Board of Technical Education, U.P.

(Diploma in Mechanical Engineering—Semester V)

THEORY OF MACHINES

SYLLABUS

L T P
5 2 –

Rationale—

A diploma holder in this course is required to assist in the design and development of prototype and other components. For this, it is essential that he is made conversant with the principles related to design of components and machine and application of these principles for designing. The aim of the subject is to develop knowledge and skills about various aspects related to design of machine components.

Learning Outcomes

After undergoing the subject, students will be able to :

- explain working of different types of mechanisms and draw their inversion.
- solve problems on power transmission.
- determine ratio of driving tension for flat and V-belt drive.
- identify various types of gears and their applications.
- construct turning moment diagram of flywheel for different types of engine.
- construct Cam Profile.
- calculate balancing of rotating mass and its position.
- identify different type of vibrations, their causes, harmful effect and remedies.

SUGGESTED DISTRIBUTION OF MARKS

No.	Topic	Time Alloted (Periods)	Marks Alloted (%)
1	Simple Mechanisms	06	08
2	Kinematic Analysis and synthesis	12	16
3	Dynamics of Machine	12	16
4	Power Transmission	12	18
5	Flywheel	06	08
6	Cam and follower	08	14
7	Balancing	06	08
8	Vibrations	08	12
	Total	**70**	**100**

DETAILED CONTENTS

1. Simple Mechanisms **(06 Periods)**

   1.1 Introduction to link, kinematic pair, lower and higher pair, Kinematic chain, mechanism, Inversions.

   1.2 Different types of mechanisms (with examples)

2. Kinematic Analysis and synthesis **(12 Periods)**

   2.1 Displacement, velocity and acceleration of plane mechanism

   2.2 Graphical and analytical techniques.

AKC TECHNICAL CLASSES

3. Dynamics of Machine **(12 Periods)**

3.1 Static and dynamic force analysis graphical and analytical approaches

3.2 Gyrosopic action in machines.

4. Power Transmission **(12 Periods)**

4.1 Introduction to Belt and Rope drives

4.2 Types of belt drives and types of pulleys

4.3 Concept of velocity ratio, slip and creep; crowning of pulleys (simple numericals)

4.4 Flat and V belt drive: Ratio of driving tensions, power transmitted, centrifugal tension, and condition for maximum horse power (simple numericals)

4.5 Different types of chains and their terminology

4.6 Gear terminology, types of gears and their applications; simple and compound gear trains; power transmitted by simple spur gear

5. Flywheel **(06 Periods)**

5.1 Principle and applications of flywheel

5.2 Turning—moment diagram of flywheel for different engines

5.3 Fluctuation of speed and fluctuation of energy—Concept only

5.4 Coefficient of fluctuation of speed and coefficient of fluctuation of energy

6. Cam and follower **(08 Periods)**

Introduction, types of Cam and follower, construction of Cam profile for constant velocity motion, constant acceleration motion and simple harmonic motion

7. Balancing **(06 Periods)**

7.1 Concept of balancing

7.2 Introduction to balancing of rotating masses (simple numericals)

8. Vibrations **(08 Periods)**

8.1 Types-longitudinal, transverse and torsional vibrations (simple numericals)

8.2 Dampening of vibrations

8.3 Causes of vibrations in machines, their harmful effects and remedies

AKC TECHNICAL CLASSES

विषय-सूची

1. सरल यन्त्रविन्यास (Simple Mechanism) 1-20

2. शुद्ध गति विश्लेषण तथा संश्लेषण (Kinematic Analysis and Synthesis) 21-61

3. मशीनों की गतिकी (Dynamics of Machines) 62-87

4. शक्ति संचारण (Power Transmission) 88-171

5. गतिपाल पहिया (Flywheel) 172-200

6. कैम तथा फालोअर (Cam and Follower) 201-239

7. सन्तुलन (Balancing) 240-274

8. कम्पन (Vibrations) 275-304

मॉडल पेपर (Model Paper) 304-306

AKC TECHNICAL CLASSES

अध्याय 1

सरल यन्त्रविन्यास
(Simple Mechanisms)

- Introduction to link, Kinematic pair, Lower and higher pair, Kinematic chain, Mechanism, Inversions.
- Different types of Mechancisms (with examples)

§ 1.1 परिचय (Introduction) :

"मशीन" शब्द से हमारा अभिप्राय: सामान्यत: एक ऐसे उपकरण अथवा युक्ति (device) से होता है जो याँत्रिक शक्ति का प्रयोग करती है, जिसमें विभिन्न अंग होते हैं जिनमें प्रत्येक का एक निश्चित कार्य होता है तथा सभी अंग मिलकर अमुक प्रकार का कार्य करते हैं।

अत: **मशीन वह युक्ति है जो किसी प्रकार की उपलब्ध (available) ऊर्जा का प्रयोग करके उससे अमुक प्रकार का यान्त्रिक कार्य करने की क्षमता रखती है। यह दृढ़ पिण्डों अथवा कड़ियों (links) का संयोजन (assembly) होती है जिनके मध्य सापेक्ष गतियों (relative motions) को सफलतापूर्वक निरुद्ध (successfully constrained) करके उपलब्ध ऊर्जा को उपयोगी कार्य में बदला जा सकता है। मशीनें बल तथा गति दोनों का पारेषण करती हैं।**

"A machine is a device by means of which available energy can be converted into desired form of useful work. It is the assembly of resistant bodies or links whose relative motions are successfully constrained so that available energy can be converted into useful work. Machines are used to transmit both motion and force."

इसके विभिन्न अंग अलग-अलग बल और गति पारेषित (transmit) करके लाभप्रद यान्त्रिक कार्य करने में सहायता करते हैं। मशीन स्वयं स्टार्ट नहीं होती है। उसको स्टार्ट होने के लिए किसी स्रोत (source) से चालन शक्ति (power of drive) का मिलना आवश्यक है। उदाहरणत:— मोटर साइकिल अथवा स्कूटर के अन्तर्दहन इंजन में ईंधन को जलाकर प्राप्त ऊष्मा ऊर्जा (heat energy) को यान्त्रिक ऊर्जा (mechanical energy) में परिवर्तित किया जाता है।

इसी प्रकार कार्यशाला (workshop) में विभिन्न मशीन टूल्स जैसे लेथ, शेपर स्लॉटर आदि विद्युत ऊर्जा को उपयोगी कार्य जैसे टर्निंग, थ्रेडिंग (threading), फेसिंग आदि में परिवर्तित करते हैं।

प्रस्तुत अध्याय में हम यन्त्र-विन्यास, उसके मौलिक अवयव तथा अमुक यन्त्र विन्यास में उसके विभिन्न अंगों की गतियों का अध्ययन करेंगे।

1.1.1 प्रतिरोधी पिण्ड (Resistant Body)

जिन पिण्डों पर बल लगाने से उनके भौतिक रूप या आकार में कोई पर्याप्त परिवर्तन नहीं होता, उन्हें प्रतिरोधी पिण्ड (resistant body) कहते हैं। ये पिण्ड ही मशीनों के विभिन्न अंग होते हैं और आवश्यक बल तथा गति पारेषित (transmit) करते हैं।

"A body is said to be resistant if it is capable of transmitting the required force with negligible deformation. These bodies are the parts of the machines which are used for transmitting motion and forces."

AKC TECHNICAL CLASSES

जैसे पिस्टन, संयोजक दण्ड, क्रैंक, लीवर तथा बोल्ट आदि। वास्तव में कोई भी पिण्ड पूर्णत: प्रतिरोधी नहीं होता है। बल तथा गति पारेषित करते समय कुछ न कुछ अंग में विरूपण होता ही है।

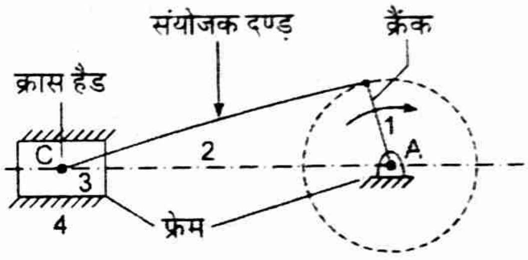
प्रतिरोधी पिण्ड दृढ़ (rigid) ही हो, यह आवश्यक नहीं है। बेल्ट, स्प्रिंग और तरल (fluid) इत्यादि भी प्रत्यास्थ पिण्ड कहलाते हैं।

1.1.2. अवयव या कड़ी (Element or Link)

एक अवयव या कड़ी, किसी मशीन का वह अंग है जो अन्य अंगों के साथ सापेक्ष गति रखता है। यह एक अथवा अधिक प्रतिरोधी पिण्डों का संयोजन होता है।

"A link or element is that part of a machine which has motion relative to some other parts. It is a resistant body or assembly of resistant bodies connected in such a way that they form a single part of it having no relative motion between them."

यह संयोजन (assembly) इस प्रकार का होता है कि प्रतिरोधी पिण्ड मिलकर एक अंग (single part) की भाँति कार्य करते हैं तथा जिनके बीच में कोई सापेक्ष गति न हो। उदाहरण के लिए एक भाप इंजन की पिस्टन रॉड, पिस्टन तथा क्रॉस हैड आपस में मिलकर एक कड़ी बनाते हैं। ये पहले अलग-अलग अवस्था में दृढ़ पिण्ड होते हैं और संयोजित अवस्था में एक दृढ़ कड़ी का रूप ग्रहण कर लेते हैं।



चित्र 1.1

चित्र 1.1 में प्रदर्शित एक सरक क्रैंक यन्त्र विन्यास (slider crank mechanism) में क्रैंक (1) एक कड़ी है और संयोजक दण्ड (2) तथा फ्रेम (4) के सापेक्ष गति रखती है। इसी प्रकार संयोजक दण्ड (connecting rod) भी एक कड़ी है।

(a) लक्षण (Characteristics)— एक कड़ी में दो प्रमुख लक्षण होने चाहिए—

(i) यह एक प्रतिरोधी पिण्ड होना चाहिए।

(ii) यह सापेक्ष गति करना चाहिए।

(b) उपयोग (Uses)—किसी कड़ी या अवयव का उपयोग निम्न कार्यों के लिए होता है—

1. बल तथा गति पारेषित करने के लिए।
2. मशीन को सहारा (support) देने के लिए।
3. मशीन के अन्य अंगों के मार्ग-दर्शन (guide) के लिए।

(c) कड़ियों का वर्गीकरण (Classification of Links)—गति पारेषण (transmission) के लिए विभिन्न मशीनों में निम्न तीन प्रकार की कड़ियों का प्रयोग किया जाता है—

1. कड़ी (Link)

- (i) दृढ़ कड़ी (rigid link)
- (ii) लचीली कड़ी (flexible link)
- (iii) तरल कड़ी (fluid link)

AKC TECHNICAL CLASSES

कड़ियों (links) को एक अन्य प्रकार से भी विभाजित अथवा वर्गीकृत किया जा सकता है—

2. कड़ी (Link)

(a) सरल कड़ी (Simple link)
(इसके साथ युगल (pair) बनाने वाले केवल दो अवयव संयुक्त होते हैं।)

(b) यौगिक कड़ी (Compound link)
(इसके साथ युगल (pair) बनाने वाले दो से अधिक अवयव संयुक्त होते हैं।)

(i) दृढ़ कड़ी (Rigid link)— बल अथवा गति पारेषित करते समय इस कड़ी में कोई विरूपण (deformation) नहीं होता है। वास्तव में सम्पूर्ण रूप से कोई भी कड़ी दृढ़ कड़ी नहीं होती। अत: जिन कड़ियों के आकार में परिवर्तन नगण्य (negligible) हो अर्थात् बहुत ही कम परिवर्तन हो, उसे दृढ़ कड़ी कहते हैं। क्रैंक, कनेक्टिंग रॉड (connecting rod), क्रैंक पिस्टन, सिलिण्डर इत्यादि इसके उदाहरण हैं।

(ii) लचीली कड़ी (Flexible link)— बल अथवा गति पारेषित करते समय इस प्रकार की कड़ी में अंशत: (partly) विरूपण होता है परन्तु इससे गति पारेषण पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है तथा बल हटा लेने पर यह विरूपण स्वत: ही समाप्त हो जाता है। उदाहरण के लिए पट्टा (belt), रस्सा (rope), चेन (chain), स्प्रिंग, (spring), तारें (wires) आदि लचीली कड़ी हैं तथा केवल तनाव बल पारेषित करते हैं।

(iii) तरल कड़ी (Fluid link)— यदि किसी मशीन में बल पारेषित करते समय तरल (fluid) का प्रयोग किया जाता है तथा बल अथवा गति का पारेषण, दाब अथवा सम्पीडन द्वारा तरल के माध्यम से होता है तब यह तरल, एक तरल कड़ी (fluid link) कहलाता है। जैसे हाईड्रॉलिक प्रेस (hydraulic press), हाईड्रॉलिक जैक (hydraulic jack) और हाईड्रॉलिक ब्रेक (hydraulic brake) आदि में भरा तेल (fluid)।

1.1.3 यन्त्र विन्यास (Mechanism)

यह एक से अधिक कड़ियों को जोड़ने से बनता है। इसमें एक कड़ी स्थिर (fixed) होती है। किसी विन्यास में एक कड़ी में उत्पन्न गति अन्य कड़ियों में एक निश्चित गति उत्पन्न करती है। यन्त्र विन्यास का उपयोग गति के पारेषण के लिए किया जाता है।

"When one of the link of a kinematic chain is fixed, the chain is known as mechanism. It may be used for transmitting or transforming motion e.g., engine indicators, type writer etc."

यह विन्यास को निम्न प्रकार वर्गीकृत किया जाता है—

यन्त्र विन्यास (Mechanism)

1. सरल यन्त्र विन्यास (Simple mechanism)

2. यौगिक यन्त्र विन्यास (Compound mechanism)

1. सरल यन्त्र विन्यास (Simple mechanism)— इसमें चार कड़ियाँ (links) होती हैं। उदाहरणत: भाप इन्जन की युग्म छड़ (coupling rod), वाट सूचक (watt's indicator) इत्यादि।

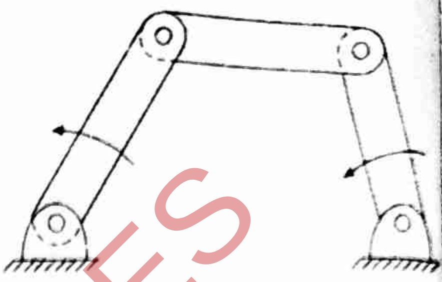
2. यौगिक यन्त्र विन्यास (Compound mechanism)— इसमें चार से अधिक कड़ियाँ (links) होती हैं। यह दो या अधिक सरल यन्त्र विन्यासों को जोड़कर बनाया जाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

(a) साधारण तथा स्पेस यंत्र विन्यास (Plane and Space Mechanisms)

यदि किसी यंत्र विन्यास के सभी बिन्दु समान्तर समतलों में गति करते हों, तब यह विन्यास ''साधारण यन्त्र विन्यास'' कहलाता है जैसा कि चित्र 1.2 में दिखाया गया है।

जब किसी यंत्र विन्यास के सभी बिन्दु समान्तर समतलों में गति नहीं करते हों, तब यह विन्यास ''स्पेस यंत्र विन्यास'' कहलाता है।



चित्र 1.2

"If all the points of a mechanism moves in parallel planes the mechaism is called plane mechanism and if they don't the mechanism is called space mechanism."

स्पेस यंत्र विन्यास का सबसे प्रचलित उदाहरण **'हुक जोड़'** है।

(b) यन्त्र विन्यास और मशीन में अन्तर (Difference between Mechanism and Machine)

क्र० सं०	यन्त्र विन्यास (Mechanism)	मशीन (Machine)
1.	यह कई कड़ियों के संयोजन (assembly) से बनता है जिसमें किसी एक कड़ी की गति ही अन्य कड़ियों को गति प्रदान करती है। इनसे कोई बल पारेषित नहीं होता।	यह कई कड़ियों के संयोजन (assembly) से बनती हैं जिनमें सापेक्ष गति (relative motion) होती है। यह उपलब्ध ऊर्जा को कार्य में बदलने की क्षमता (capacity) रखती है।
2.	यह मशीन का कार्यशील नमूना (working model) होता है।	किसी यन्त्र विन्यास को प्रायोगिक दृष्टि से सुधारने पर मशीन बनती है। यह यन्त्र विन्यास का प्रायोगिक रूप (Practical form) होती है।
3.	यह आवश्यक नहीं है कि यंत्र विन्यास मशीन का भाग हो। इसका कार्य विभिन्न कड़ियों में गति को पारेषित करना है।	यह एक या एक से अधिक यन्त्र विन्यासों से बनती है। इसका उद्देश्य उपयोगी कार्य करने के लिए ऊर्जा को पारेषित करना है।
4.	उदाहरण—इन्जन का दाब-आयतन (P-V) आरेख बनाने वाला सूचक (indicator), बीम इन्जन, बोर्डन दाब गेज, घड़ी इत्यादि।	उदाहरण—भाप इन्जन, पैट्रोल इन्जन, खराद मशीन, जेनरेटर, कम्प्रेसर, क्रेन तथा लिफ्ट इत्यादि।

1.1.4 संरचना तथा ढांचा (Structure and Frame)

संरचना (Structure)— यह कई प्रतिरोधी पिण्डों (resistant bodies) से मिलकर बनता है, जोकि बल या भार लगने पर विकृत (strained) हो जाते हैं परन्तु इन प्रतिरोधी पिण्डों में आपस में कोई सापेक्ष गति (relative motion) नहीं होती।

ढाँचा (Frame)— किसी मशीन का ढाँचा उसके गति करने वाले अंगों को आलम्ब (support) प्रदान करता है। मशीनों के ढाँचे प्रायः ढलवाँ लोहे के बनाये जाते हैं जिनमें आवश्यकतानुसार विभिन्न अंगों को सहारने के लिए व्यवस्था होती है।

AKC TECHNICAL CLASSES

संरचना तथा मशीन में अन्तर
(Difference between Structure and Machine)

क्र०सं०	संरचना (Structure)	मशीन (Machine)
1.	इसके अवयवों (members) के मध्य कोई सापेक्ष गति नहीं होती।	इसके अवयवों (members) में सापेक्ष गति होती है।
2.	भार या बल लगाने पर इसके अवयवों में विकृति (strain) आ जाती है।	इसके अवयव बल तथा गति दोनों को ही पारेषित (transmit) करते हैं।
3.	इसके द्वारा कोई लाभप्रद ऊर्जा पारेषित (transmit) नहीं होती।	इसके द्वारा लाभप्रद ऊर्जा पारेषित (transmit) होती है, जिससे यह कार्य करती है।
4.	उदाहरण— बिल्डिंग की छतों की कैचियाँ (trusses), मशीनों के ढाँचे (machine frame), रेलवे पुल (railway bridge) इत्यादि।	उदाहरण— खराद मशीन, ड्रिलिंग मशीन, भाप इन्जन, पैट्रोल इंजन इत्यादि।

1.1.5 युगल, शुद्ध गति युगल और निरुद्ध गति (Pair, Kinematic Pair and Constrained Motion)

1. युगल (Pair)— जब यन्त्र विन्यास के दो अवयवों (elements) या कड़ियों (links) को इस प्रकार जोड़ दिया जाए कि उनमें सापेक्ष गति (relative motion) सम्भव हो, तो उसे युगल (pair) कहते हैं।

2. शुद्ध गति युगल (Kinematic pair)— जब दो कड़ियाँ या अवयव परस्पर इस प्रकार जुड़े हों कि उनके मध्य सापेक्ष गति (relative motion) पूर्णतया या सफलतापूर्वक निरुद्ध (constrained) हो, तो ऐसी कड़ियों के युगल (pair) को शुद्ध गति युगल (kinematic pair) कहते हैं।

"The two links or elements of a machine, when in contact with each other, are said to form a ***pair****. If the relative motion between them is completely or successfully constrained (i.e., in a definite direction), the pair is known as* ***kinematic pair****".*

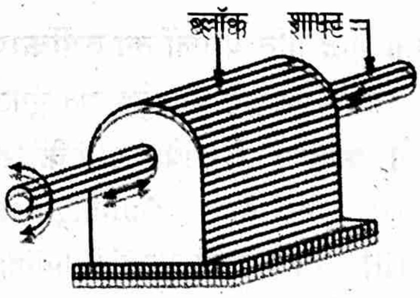
3. निरुद्ध गति (Constrained motion)—यदि किसी युगल (pair) में गति किसी भी दिशा में गति करने को बिल्कुल स्वतन्त्र न हो तो ऐसी गति निरुद्ध गति (constrained motion) कहलाती है इसके तीन प्रकार हैं—

(i) अपूर्ण निरुद्ध गति (Incompletely constrained motion)।

(ii) पूर्णतया निरुद्ध गति (Completely constrained motion)।

(iii) सफलतापूर्वक निरुद्ध गति (Successfully constrained motion)।

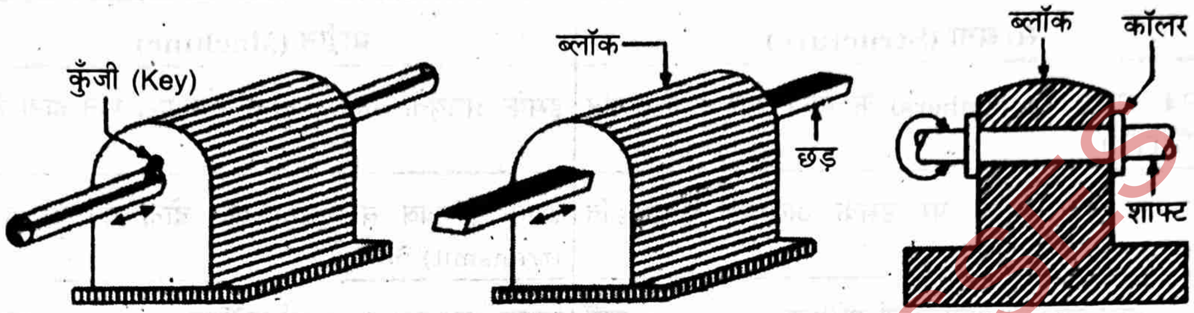
(i) अपूर्ण निरुद्ध गति (Incompletely constrained motion)— यदि किसी युगल में गति एक से अधिक दिशाओं में सम्भव हो, तो इस गति को अपूर्ण निरुद्ध गति कहते हैं। यदि युगल में प्रयुक्त बल (applied force) की दिशा में अन्तर कर दिया जाए तो सापेक्ष गति (relative motion) की दिशा बदल जाती है। चित्र 1.3 (a) में एक ब्लॉक है जिसमें एक गोल शाफ्ट गोल छिद्र में है। यह शाफ्ट घुमाने पर ब्लॉक के अन्दर घूम सकती है तथा आगे-पीछे भी सरकाई जा सकती है। इस प्रकार यहाँ शाफ्ट की दो सापेक्ष गतियाँ हुईं। किसी समय ये दोनों प्रकार की गतियाँ हो सकती हैं परन्तु इस युगल में



चित्र 1.3 (a)

AKC TECHNICAL CLASSES

किस समय कौन-सी गति हो यह निश्चित रूप से नहीं कहा जा सकता। इसलिए इस युगल को **अपूर्ण निरुद्ध गति युगल (Incompletely constrained motion pair)** कहते हैं।



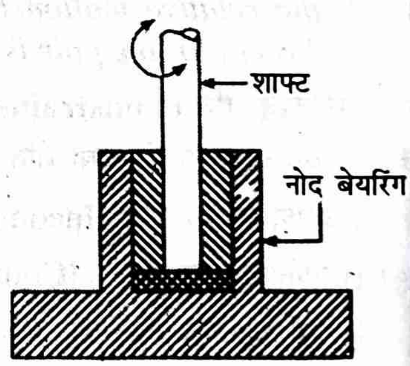
चित्र 1.3 (b), (c), (d)

(ii) पूर्णतया निरुद्ध गति (Completely constrained motion)—किसी युगल में यदि गति को एक दिशा में सीमित रखा जाए जबकि प्रयुक्त बल (applied force) की दिशा कोई भी हो तो ऐसी गति को पूर्णतया निरुद्ध गति (completely constrained motion) कहते हैं। चित्र 1.3 (a) में यदि शाफ्ट में कुंजी मार्ग (key way) बनाकर एक कुंजी (चित्र 1.3 (b) के अनुसार) लगाई जाए तो शाफ्ट केवल आगे-पीछे सरक सकती है, परन्तु वह घूम नहीं सकती। अत: ऐसा युगल जिसमें निरुद्ध गति ही होती है, **पूर्णतया निरुद्ध युगल (completely constrained pair)** कहलाता है।

चित्र 1.3 (c) में ब्लॉक के अन्दर आयताकार छड़ घूम नहीं सकती वह केवल सरक सकती है। चित्र 1.3 (d) में शाफ्ट के दोनों ओर कॉलर लगा हुआ है जिसके कारण वह सरक नहीं सकती परन्तु घूम सकती है। इसलिए ये भी पूर्णतया निरुद्ध गति के उदाहरण हैं।

(iii) सफलतापूर्वक निरुद्ध गति (Successfully constrained motion)— कभी-कभी युगल बनाने वाले तत्व ऐसे सम्बन्धित होते हैं कि निरुद्ध गति स्वयं पूर्ण नहीं हो पाती, अत: उसे किसी अन्य उपाय के द्वारा पूर्ण किया जाता है। इस प्रकार की गति **सफलतापूर्वक निरुद्ध गति (successfully constrained motion)** कहलाती है।

चित्र 1.4 में नोद बियरिंग (thrust bearing) में सफल निरुद्ध गति (successfully constrained motion) है क्योंकि शाफ्ट तो बियरिंग में घूम सकती है, परन्तु अपने भार के कारण ऊपर-नीचे नहीं सरक सकती। इस प्रकार यह एक सफलतापूर्वक निरुद्ध गति युगल (successfully constrained motion pair) बनाता है। पैट्रोल-इन्जन के सिलिण्डर में पिस्टन केवल पश्चाग्र गति ही कर सकता है, यह घूम नहीं सकता। इस प्रकार ये भी सफलातापूर्वक निरुद्ध युगल बनाते हैं।



चित्र 1.4

AKC TECHNICAL CLASSES

1.1.6 शुद्ध गति युगलों का वर्गीकरण (Classification of Kinematic Pairs)

विभिन्न आधारों पर शुद्ध गति युगलों को निम्नलिखित वर्गों में वर्गीकृत किया जा सकता है—

1. कड़ियों की सापेक्ष गति के आधार पर (On the basis of relative motion between the links)—

(i) घुमाऊँ युगल (Turning pair)।

(ii) सरकने वाला युगल (Sliding pair)।

(iii) बेलन युगल (Rolling pair)।

(iv) पेंच युगल (Screw pair)।

(v) गोलाकार युगल (Spherical pair)।

2. कड़ियों के परस्पर सम्पर्क के आधार पर (On the bais of type of contact between the links)—

(i) निम्न युगल (Lower pair)।

(ii) उच्च युगल (Higher pair)।

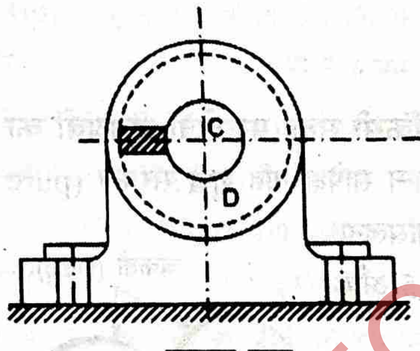
3. कड़ियों के परस्पर जुड़ने के आधार पर (On the basis of type of closure)—

(i) खुला युगल (Open or unclosed pair)।

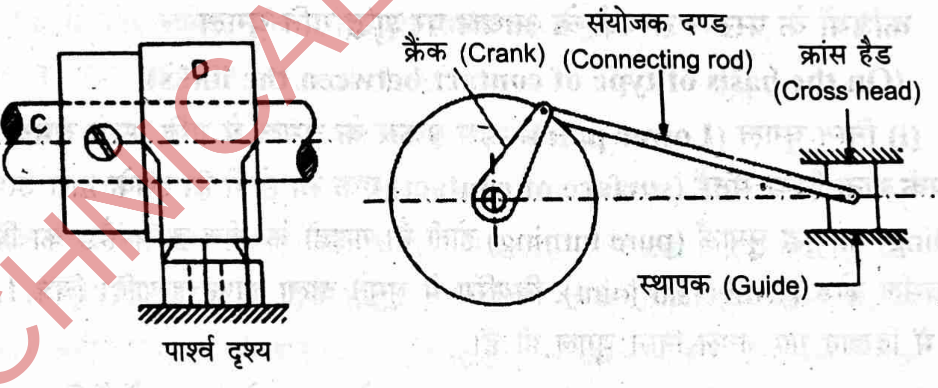
(ii) बन्द युगल (Closed pair)।

1. कड़ियों की सापेक्ष गति के आधार पर शुद्ध गति युगल (On the basis of relative motion between the links)

(i) घुमाऊँ युगल (Turning pair)—जब दो अवयव या कड़ियाँ इस प्रकार जुड़े हों कि एक, दूसरे की स्थिर अक्ष (fixed axis) के चारों ओर घूम सके तो इस युगल को घुमाऊँ युगल कहते हैं। उदाहरणार्थ बियरिंगों में घूमता शाफ्ट भी बियरिंग के साथ एक घुमाऊँ युगल बनाता है। घुमाऊँ युगल में पूर्णतया निरुद्ध गति होती है। (चित्र 1.5)।



चित्र 1.5



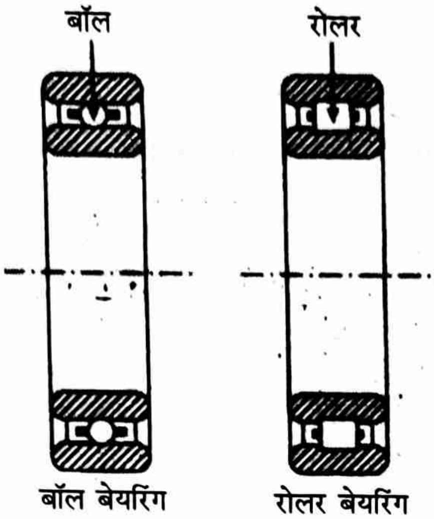
चित्र 1.6

(ii) सरकने या फिसलने वाला युगल (Sliding pair)—जब दो अवयव या कड़ियाँ इस प्रकार जुड़ी हों कि उनमें केवल फिसलने वाली गति ही हो सके तो ऐसे युगल को सरकने वाला युगल कहते हैं। उदाहरणार्थ पश्चाग्र भाप इन्जन (reciprocating steam engine) में क्रॉस हैड (cross head) गाइड के मध्य फिसलता है। (चित्र 1.6)।

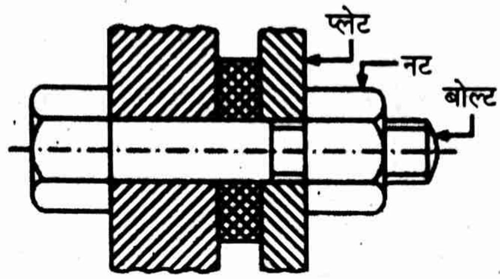
(iii) बेलन युगल (Rolling pair)—इसमें एक स्थिर अवयव (fixed element) में दूसरा अवयव घूमता है। उदाहरणार्थ—बॉल बियरिंग (ball bearing) में गोलियाँ बियरिंग के स्थिर केस में घूमती हैं और रोलर बियरिंग (roller bearing) में रोलर केस (case) में घूमते हैं। (चित्र 1.7)।

(iv) पेंच युगल (Screw pair)—जब युगल का एक अवयव दूसरे अवयव पर चूड़ियों (threads) की सहायता से घूमता है, तो उसे पेंच युगल (screw pair) कहते हैं। इसमें सापेक्ष गति (relative motion) फिसलने (sliding) तथा घूमने (turning) की गतियों का मिश्रण होती है। बोल्ट (bolt) ढिबरी (nut) के साथ मिलकर एक पेंच युगल (screw pair) बनाता है। (चित्र 1.8)।

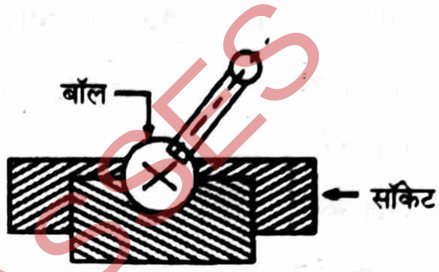
AYC TECHNICAL CLASSES



चित्र 1.7



चित्र 1.8

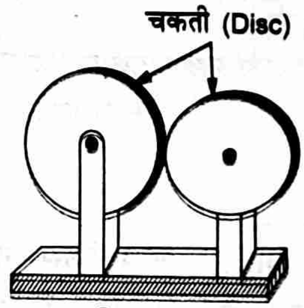


चित्र 1.9

(v) गोलीय युगल (Spherical pair)—इस प्रकार के युगल में एक स्थिर अवयव के गोलाकार खांचे में दूसरा गोलाकार अवयव (spherical element) घूमता है। उदाहरणार्थ—बॉल और सॉकेट जोड़ (ball and socket joint) तथा कार में दर्पण (mirror) इसी प्रबन्ध द्वारा लगाए जाते हैं। (चित्र 1.9)।

2. कड़ियों के परस्पर सम्पर्क के आधार पर शुद्ध गति युगल (On the basis of type of contact between the links)

(i) निम्न युगल (Lower pair)—इस प्रकार के युगल में गति करते समय किसी सतह पर दोनों अवयवों का सम्पर्क होता है। ये सतहें (surface of contact) एक सी होती हैं। इसके द्वारा उत्पन्न सापेक्ष गति शुद्ध सरकन (pure sliding) या शुद्ध घुमाऊँ (pure turning) होती है। गाइडों के बीच क्रॉस-हैड का फिसलना यूनिवर्सल जोड़ (Universal joint), बियरिंग में घूमने वाला शाफ्ट इत्यादि। चित्र 1.5 और 1.6 में दिखाए गए युगल निम्न युगल ही हैं।



चित्र 1.10

(ii) उच्च युगल (Higher pair)—इस प्रकार के युगल के अवयवों में बिन्दु या रेखा पर सम्पर्क होता है। दोनों अवयवों की सम्पर्क सतहें एक समान नहीं होती। गियर (gears), पट्टा तथा रस्सा चालन (belt and rope drive), बॉल तथा रोलर बियरिंग, कैम तथा फालोअर (cam and follower) आदि इसके उदाहरण हैं। चित्र 1.10 में दो घर्षण चकतियाँ (discs) रेखीय सम्पर्क द्वारा उच्च युगल (higher pair) बनाती हैं।

3. कड़ियों के परस्पर जुड़ने के आधार पर शुद्ध गति युगल (On the basis of type of closure)

(i) बन्द युगल (Closed pair)—जब किसी युगल के दोनों अवयवों को आपस में यांत्रिक विधि द्वारा जोड़ा जाता है, तो वह बन्द युगल (closed pair) कहलाते हैं। इस प्रकार निम्न युगल बन्द युगल भी कहलाते हैं।

(ii) खुला युगल (Open or unclosed pair)—जब किसी युगल के अवयवों को परस्पर यांत्रिक विधि द्वारा नहीं जोड़ा जाता तो वह खुला युगल (open pair) कहलाता है। जैसे कैम तथा फालोअर (cam and follower) जो परस्पर कमानी (spring) तथा गुरुत्वाकर्षण (gravity) द्वारा जुड़े होते हैं, खुला युगल के उदाहरण हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

1.1.7 चेन (Chain)

चेन (Chain) तीन या तीन से अधिक कड़ियों को परस्पर जोड़ने से बनती है। इसमें प्रत्येक कड़ी दो अन्य कड़ियों से जुड़ी रहती है।

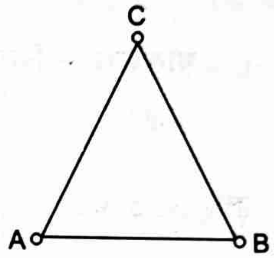
"When three or more links are joined together, chain is formed. Each link is joined togther with two other links".

चेनें, कड़ियों की सापेक्ष गति के आधार पर निम्न प्रकार की होती हैं—

चेन (Chain)

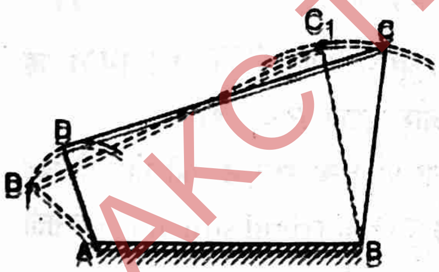
1. बन्द चेन (Locked chain)
2. निरुद्ध चेन (Constrained chain)
3. अनिरुद्ध चेन (Unconstrained chain)

1. बन्द चेन (Locked chain)— इस प्रकार की चेन की कड़ियों में कोई सापेक्ष गति नहीं होती। केवल पूरी चेन को ही घुमाया जा सकता है। यह एक दृढ़ ढाँचा (rigid frame) बनाती है। पुलों आदि के ढाँचे इस चेन के उदाहरण हैं। चित्र 1.11 में AB, BC तथा CA तीन कड़ियाँ दिखाई गई हैं। जोड़ों A, B तथा C पर ये कड़ियाँ पिनों द्वारा लगी हुई हैं तथा ये घुमाऊ युगल (turning pair) बनाती हैं। इन कड़ियों में कोई सापेक्ष गति नहीं होती। इनसे एक दृढ़ ढाँचा (rigid frame) बनता है। इस प्रकार यह एक बन्द चेन (closed chain) है।



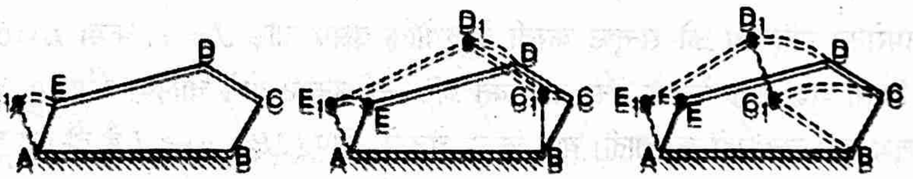
चित्र 1.11

2. निरुद्ध चेन (Constrained chain)— इस चेन की विभिन्न कड़ियों में सापेक्ष गति पूर्णतया निरुद्ध होती है। विभिन्न प्रकार के यन्त्र विन्यास और मशीनें बनाने में इस चेन का प्रयोग किया जाता है। चार कड़ियों से पिन जोड़ों द्वारा बनी एक चेन चित्र 1.12 में दिखाई गई है। चार कड़ियों AB, BC, CD तथा DA में से यदि AB को स्थिर (fixed) करते हुए AD को AD_1 पर घुमा दिया जाए तो DC तथा CB की स्थितियों में भी निश्चित परिवर्तन होता **है तथा उनकी गति निश्चित होती है। इस प्रकार बनी चेन शुद्ध गति चेन (kinematic chain) कहलाती है जो पूर्णतया निरुद्ध है। इसमें चार युगल (pair) तथा चार जोड़ (joints) होते हैं।**



बद्ध (Fixed)

चित्र 1.12



(a) स्थिर (b) स्थिर (c) स्थिर

चित्र 1.13

3. अनिरुद्ध चेन (Unconstrained chain)— इस चेन की कड़ियों में सापेक्ष गति अनिरुद्ध तथा अनिश्चित होती है। प्रायोगिक दृष्टि से इस चेन का प्रयोग नगण्य है। पाँच कड़ियों द्वारा पिन जोड़ों से बनी एक चेन चित्र 1.13 में दिखाई गई है। यदि AB को स्थिर (fixed) करके दूसरी कड़ी AE को AE_1 पर घुमा दिया जाए तो शेष कड़ियों में विस्थापन

AKC TECHNICAL CLASSES

निश्चित नहीं कहा जा सकता। शेष कड़ियाँ चित्र 1.13 (b) या (c) की भाँति विस्थापित हो सकती हैं। इस प्रकार यह एक अनिरुद्ध चेन है।

1.1.8 शुद्ध गति चेन (Kinematic Chain)

शुद्ध गति चेन अनेक शुद्ध गति युगलों (Kinematic pairs) को जोड़ने से बनती है, जिसमें प्रत्येक कड़ी दो युगलों का सदस्य (member) होती है तथा कड़ियों में सापेक्ष गति बिल्कुल निरुद्ध (completely constrained) होती है। इस प्रकार की चेन को निरुद्ध चेन (constrained chain) भी कहते हैं।

"A kinematic chain may be defined as a combination of kinematic pairs, joined in such a way that each link forms a part of two pairs and the relative motion between the links or elements is completely or successfully constrained."

चार कड़ियों से बनी एक शुद्ध गति चेन (Kinematic chain) चित्र 1.12 में दिखाई गई है, जिसमें चार जोड़ (joints) तथा चार युगल होते हैं।

(a) प्रतिबन्ध— किसी भी शुद्ध गति चेन के लिए निम्न प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होने चाहिएँ—

$$L = 2P - 4 \qquad \ldots(1)$$

तथा

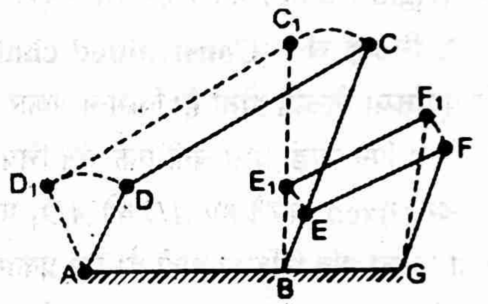
$$L = \frac{2}{3}(J + 2) \qquad \ldots(2)$$

यहाँ, L = कड़ियों की संख्या (number of links)

P = युगलों की संख्या (number of pairs)

J = जोड़ों की संख्या (number of joints)

चित्र 1.12 में शुद्ध गति चेन के लिए $J = 4, L = 4$ तथा $P = 4$ है, इसलिए उपरोक्त प्रतिबन्ध सन्तुष्ट है।



चित्र 1.14

चित्र 1.12 में दिखाई गई शुद्ध गति चेन को संयुक्त (compound) शुद्ध गति चेन में बदलने के लिए इसमें कड़ियाँ EF एवं FG को इस प्रकार जोड़ा जाता है कि ये पहले वाली कड़ियों से अलग-अलग युगल बनाती हैं तथा परस्पर भी एक युगल बनाती हैं (चित्र 1.14)। यह भी उपरोक्त प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करती है क्योंकि इसमें जोड़ $J = 7$, कड़ी $L = 6$ और युगल $P = 5$ है।

किसी शुद्ध गति चेन के लिए उपरोक्त प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होने चाहिए। यदि यह दोनों प्रतिबन्ध सन्तुष्ट नहीं होते तो वह चेन शुद्ध गति चेन नहीं कहलाती। यदि किसी चेन के लिए $(2P - 4) < L$ है तो वह दृढ़ संरचना (rigid structure) बनाती है।

(b) शुद्ध गति चेन के प्रकार (Types of Kinematic Chain)

शुद्ध गति चेन (Kinematic chain)

1. सरल शुद्ध गति चेन (Simple kinematic chain)
2. यौगिक शुद्ध गति चेन (Compound kinematic chain)

AKC TECHNICAL CLASSES

1. सरल शुद्ध गति चेन (Simple kinematic chain)— चार युगलों वाली शुद्ध गति चेन को **सरल शुद्ध गति चेन** (simple kinematic chain) कहते हैं। (चित्र 1.12 का अवलोकन कीजिए)।

2. यौगिक शुद्ध गति चेन (Compound kinematic chain)— चार से अधिक युगलों से बनी हुई शुद्ध गति चेन को **यौगिक शुद्ध गति चेन** (Compound kinematic chain) कहते हैं। (चित्र 1.14 को देखिए)।

§ 1.2 यन्त्र विन्यास, मशीन और उत्क्रमण (Mechanism, Machine and Inversion)

शुद्ध गति चेन (kinematic chain) के अध्ययन करने के बाद हम पुन: यन्त्र विन्यास (mechanism) तथा मशीन (machine) का अध्ययन करेंगे।

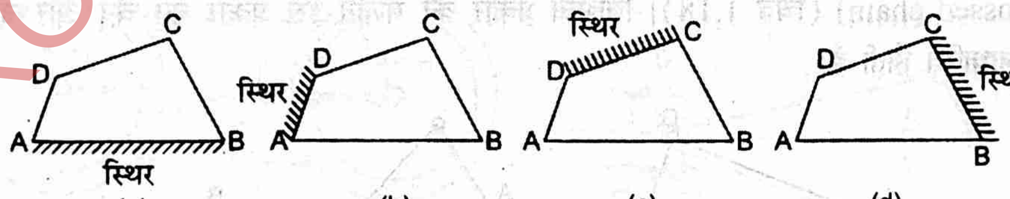
यन्त्र विन्यास (Mechanism)— यदि शुद्ध गति चेन की एक कड़ी को स्थिर (fixed) कर दिया जाए और इसका उपयोग गति को पारेषित (transmit) करने के लिए किया जाए तो इसे **यन्त्र विन्यास** (mechanism) कहते हैं।

मशीन (Machine)— यदि किसी यन्त्र विन्यास से शक्ति पारेषित की जाए या उससे कोई कार्य लिया जाए तो उसकी कड़ियों को आवश्यक बल सहन करने योग्य बनाया जाता है तथा इस प्रकार बने यन्त्र विन्यास को मशीन कहते हैं। इस आधार पर **मशीन वास्तव में अनेक प्रतिरोध कड़ियों से बना हुआ विभिन्न यन्त्र विन्यास का समूह है, जिसमें सापेक्ष गति पूर्णतया निरुद्ध (completely constrained) होती है जो उपलब्ध ऊर्जा को परिषित करने की क्षमता रखती है, जिससे निश्चित प्रकार का कार्य कराया जा सके।**

उत्क्रमण (Inversion)— यन्त्र विन्यास की परिभाषा के अनुसार शुद्ध गति चेन में किसी भी कड़ी को स्थिर (fixed) किया जा सकता है और इस प्रकार किसी चेन में जितनी कड़ियाँ हैं उतने ही भिन्न-भिन्न यन्त्र विन्यास प्राप्त किए जा सकते हैं। सभी यन्त्र विन्यास देखने में अलग-अलग हो सकते हैं जिन्हें विभिन्न उपयोग में लाया जा सकता है। इस प्रकार बना हुआ प्रत्येक यन्त्र विन्यास प्रारम्भिक यन्त्र विन्यास का **उत्क्रमण** (Inversion) कहलाता है।

"This process of obtaining different mechanisms by fixing the different links of the same kinematic chain is called ***inversion of mechanism****. It is to be mentioned here that relative motion between various links is not changed at all."*

चित्र 1.15 में प्रदर्शित शुद्ध गति चेन में चार कड़ियाँ हैं जिनमें से प्रत्येक कड़ी को क्रमश: स्थिर (fixed) करके चार विभिन्न यन्त्र विन्यास बनाए बनाए जाते हैं। चित्र 1.15 (b), (c) तथा (d) में प्रदर्शित प्रत्येक यन्त्र विन्यास 1.15 (a) में प्रदर्शित यन्त्र विन्यास का उत्क्रमण (inversion) है।



चित्र 1.15

1.2.1 तीन निम्न युगलों वाली शुद्ध गति चेन (Kinematic Chain with Three Lower Pairs)

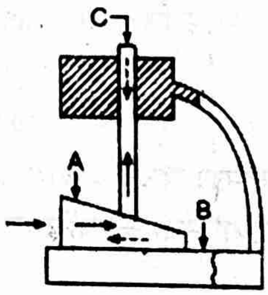
शुद्ध गति चेन के लिए कम से कम तीन युगलों का होना आवश्यक है परन्तु इसके साथ-साथ यह भी जरूरी है कि, (i) ये तीनों युगल या तो सरकने वाले हों और या (ii) तीनों में से एक युगल स्क्रू वाला (screw pair) दूसरा घुमाऊ (turning pairs) तथा तीसरा सरकने (sliding pair) वाला होना चाहिए।

AKC TECHNICAL CLASSES

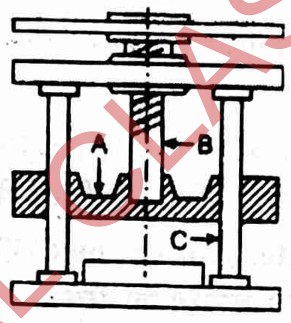
तीनों घुमाऊ युगलों से शुद्ध गति चेन सम्भव नहीं है।

चित्र 1.16 में तीन सरक युगलों (sliding pairs) से बनी शुद्ध गति चेन वाला यन्त्र विन्यास दिखाया गया है। इसमें A, B तथा C तीन कड़ियाँ हैं। कड़ी A, स्थिर फ्रेम B के साथ एक सरक युगल (sliding pair) बनाती है तथा दायीं व बायीं ओर सरक सकती है। फ्रेम B कड़ी C से दूसरा सरकने वाला युगल (sliding pair) बनाती है और B में नीचे ऊपर सरक सकती है। कड़ी A और C तीसरा सरक युगल (sliding pair) बनाती है। जब A पर बल लगाकर उसे निश्चित दूरी तक खिसकाया जाता है तो C ऊपर या नीचे की ओर निश्चित ऊँचाई तक सरकती है।

चित्र 1.17 में एक स्क्रू प्रेस (screw press) का यन्त्र विन्यास दिखाया गया है। जिसमें एक फिसलने वाला युगल (sliding pair), एक घुमाऊ युगल (turning pair) और एक पेंच युगल (screw pair) होता है।



चित्र 1.16

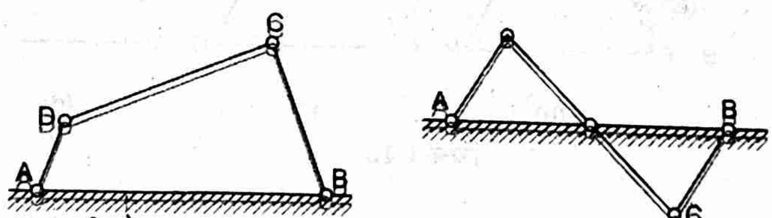


चित्र 1.17

कड़ी A से फ्रेम C मिलकर एक फिसलने वाला युगल B से A मिलकर घुमाऊ युगल और C से B मिलकर स्क्रू युगल बनाती है, यदि फ्रेम C को स्थिर (fixed) रखकर B को निश्चित कोण से घुमाया जाए तो कड़ी A का विस्थापन (displacement) निश्चित मात्रा में ऊपर-नीचे होगा। इस प्रकार A, B और C की सापेक्ष गतियाँ पूर्णतया निरुद्ध (completely constrained) होती हैं।

1.2.2 चार छड़ चेन यन्त्र-विन्यास (Four Bar Chain Mechanism)

चार कड़ियों से बनने वाले यन्त्र-विन्यास चार छड़ चेन यन्त्र-विन्यास (four bar chain mechanism) कहलाती है। इन चार कड़ियों से चार युगल बनते हैं। इनमें सबसे अधिक महत्वपूर्ण चार निम्न (lower) युगलों वाली चेनें हैं जिनमें प्रत्येक युगल घुमाऊ या सरकने वाला होता है। यह चेन दो प्रकार की होती है—(i) खुली चेन (open chain) तथा (ii) तिर्यक चेन (crossed chain) (चित्र 1.18)। विभिन्न प्रकार की मशीनें इस प्रकार की चेन और उनके उत्क्रमण (inversions) पर आधारित होती हैं।



खुली चैन (Open Chain) तिर्यक चैन (Inclined Chain)

चित्र 1.18

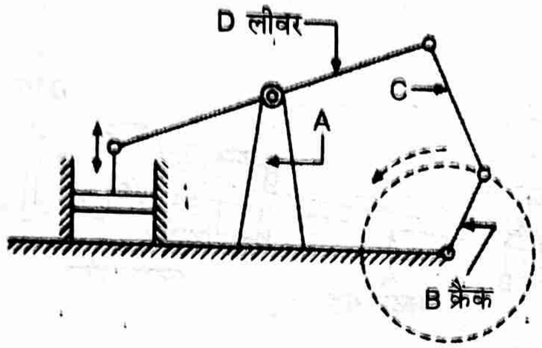
चार छड़ चेन में चारों कड़ियाँ आवश्यकतानुसार अलग-अलग लम्बाइयों की होती हैं और जिनका उपयोग विभिन्न यन्त्र विन्यास या मशीनें बनाने में किया जाता है।

AKTECHNICAL CLASSES

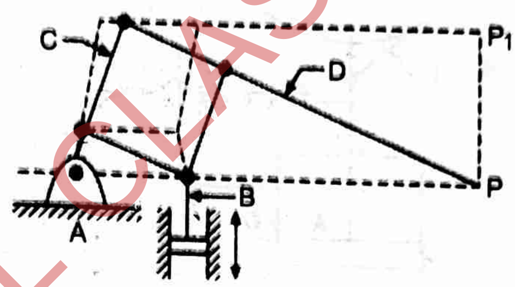
क्रैंक तथा लीवर—जो कड़ी पूर्ण चक्कर काटती है उसे **क्रैंक** (crank) कहते हैं और जो कड़ी अधूरा चक्कर काटती है उसे लीवर (lever) कहते हैं।

चार छड़ चेन द्वारा बने यन्त्र विन्यास निम्न प्रकार के होते हैं—

1. धरन इंजन लीवर तथा क्रैंक यन्त्र विन्यास (Beam engine or Crank and lever mechanism)— यह यन्त्र विन्यास घुमाऊ गति (rotary motion) को पश्चाग्र गति (reciprocating motion) में परिवर्तित करने के काम आता है। इसमें चित्र 1.19 के अनुसार चार कड़ियाँ A, B, C एवं D हैं जिसमें कड़ी A स्थिर (fixed) है तथा कड़ी B घूमती है, जिसे क्रैंक (crank) कहते हैं। कड़ी D दोलन (oscillate) करती है, जिसे लीवर (lever) कहते हैं। कड़ी D का सिरा पिस्टन दण्ड (piston rod) से जुड़ा हुआ है, जिससे क्रैंक के घूमने से पिस्टन पश्चाग्र गति करने लगता है।



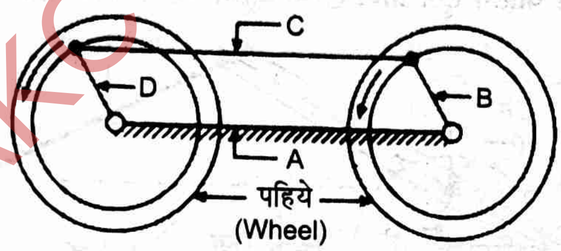
चित्र 1.19



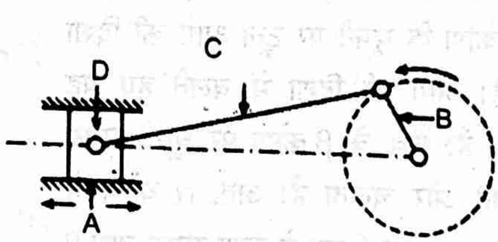
चित्र 1.20

2. दोहरा लीवर यन्त्र विन्यास (Double lever mechanism)— यह यन्त्र विन्यास इंजन सूचक यन्त्र (engine indicator) में प्रयोग किया जाता है। चित्र 1.20 के अनुसार इसमें दो मुख्य लीवर B और D होते हैं। लीवर B का विस्थापन (displacement) सिलिण्डर के दाब के समानुपाती (proportionate) होता है। लीवर D का क्षैतिज विस्थापन (horizontal displacement) क्रॉस हैड का विस्थापन मापता है, जिससे सिलिण्डर का आयतन ज्ञात किया जाता है।

3. दोहरा क्रैंक यन्त्र विन्यास (Double crank mechanism)—यह यन्त्र विन्यास एक पहिए की घुमाऊ गति (rotary motion) को दूसरे पहिए पर पारेषित (transmit) करने के लिए प्रयोग किया जाता है। इसका प्रयोग अधिकतर रेल इंजनों के पहियों में होता है। इसमें चार कड़ियाँ A, B, C तथा D होती हैं (चित्र 1.21)। इसमें कड़ी A स्थिर (fixed) होती है। कड़ी B तथा D दोनों घूमती हैं और क्रैंक कहलाती हैं। कड़ी C, कड़ी B तथा D को जोड़ती है।



चित्र 1.21



चित्र 1.22

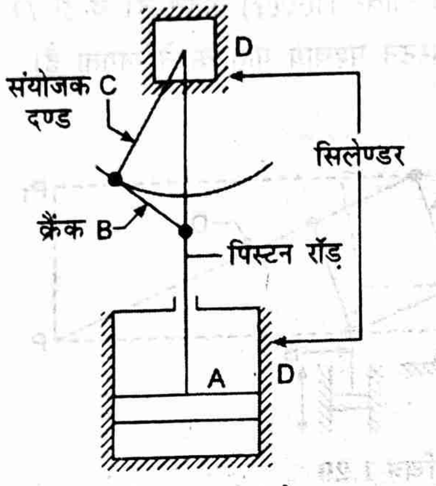
4. सरल क्रैंक चेन यन्त्र विन्यास (Slider crank chain mechanism)—यह यन्त्र विन्यास भाप तथा अन्तर्दहन इंजन में पश्चाग्र गति (reciprocating motion) को घुमाऊ गति (rotary motion) में परिवर्तित करने के लिए प्रयोग किया जाता है। इसमें कड़ी A स्थिर (fixed) रहती है। कड़ी B (क्रैंक) घूमती है, कड़ी C दोलन (oscillation)

AKC TECHNICAL CLASSES

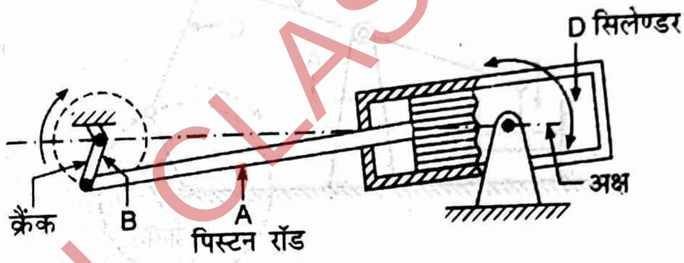
करती है तथा कड़ी D सरकती है। (चित्र 1.22)। इस प्रकार इसमें एक सरक युगल (sliding pair) तथा तीन घुमाऊ युगल (turning pair) होते हैं।

इस प्रकार की चेन के प्रमुख उत्क्रमण (inversion) निम्नलिखित हैं—

(a) पेन्डुलम पम्प (Pendulum pump)— इस यन्त्र विन्यास में कड़ी A पश्चाग्र गति (reciprocating motion) करती है, कड़ी B (क्रैंक) घूमती है और कड़ी D स्थिर (fixed) होती है जो कड़ी C को दोलन (oscillation) कराती है। (चित्र 1.23)।



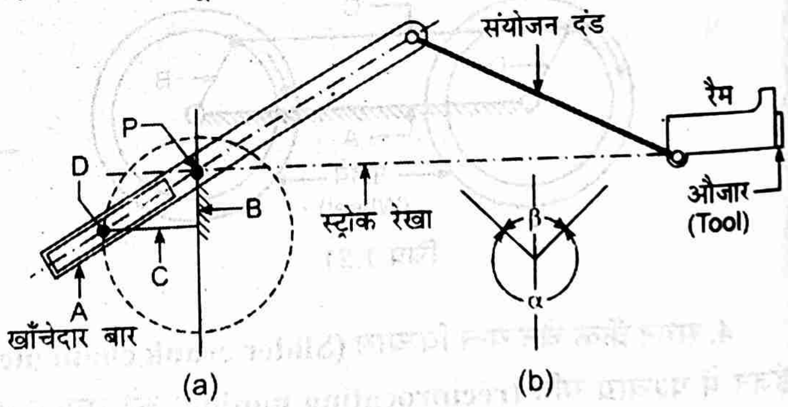
चित्र 1.23 पेन्डुलम पम्प



चित्र 1.24 दोलन सिलिन्डर इन्जन

(b) दोलन सिलिन्डर इन्जन (Oscillating cylinder engine)— इस प्रकार का विन्यास चित्र 1.24 में दिखाया गया है। यह कड़ी C को स्थिर (fixed) करके प्राप्त किया जाता है। जैसे-जैसे कड़ी B (क्रैंक) घूमती है, तो कड़ी A तथा इससे लगा पिस्टन सिलिण्डर D अपनी अक्ष (axis) पर दोलन (oscillation) करता है।

(c) व्हिटवर्थ द्रुत वापसी यन्त्र विन्यास (Whitworth quick return mechanism)— चित्र 1.25 में दिखाया गया **यह यन्त्र विन्यास एक द्रुत वापसी यन्त्र विन्यास (quick return mechanism) है, जिसका उपयोग शेपर तथा स्लॉटर मशीनों में किया जाता है।** इसमें कड़ी B स्थिर (fixed) रहती है। कड़ी A क्रैंक है तथा बिन्दु P पर दोलन करती है। कड़ी D, कड़ी A की झिर्री में पश्चाग्र गति (reciprocating motion) करती है। कड़ी A के दूसरे सिरे पर लगे एक लीवर के सिरे पर काटने वाला टूल (cutting tool) लगा रहता है। कटिंग टूल क्रैंक C के घूमने पर पश्चाग्र गति करने लगता है। क्रैंक के α कोण के घूमने पर टूल आगे की दिशा में चलता है। आगे की दिशा में चलते हुए यह कटिंग करता है। क्रैंक के β कोण पर घूमते समय टूल पीछे की ओर चलता है। अत: α कोण में लगा समय, काटने की क्रिया में लगा समय तथा β कोण घूमने पर लगा समय टूल की वापसी में लगा होता है। β कोण सदैव α से कम ही रहता है, इसलिए वापसी काटने वाले स्ट्रोक में लगे

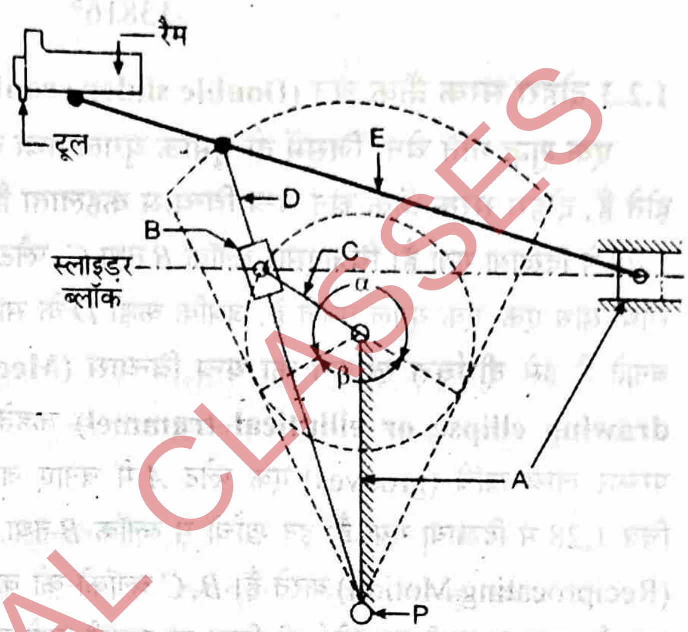


चित्र 1.25 व्हिटवर्थ-द्रुत वापसी यन्त्र विन्यास

AKC TECHNICAL CLASSES

समय की अपेक्षा शीघ्र होती है। इसलिए यह यन्त्र विन्यास द्रुत वापसी यंत्र विन्यास (quick return mechanism) कहलाता है। α तथा β के अनुपात को पिन की स्थिति ऊपर-नीचे करके परिवर्तित किया जा सकता है।

5. क्रैंक और झिर्रीदार लीवर यन्त्र विन्यास (Crank and slotter lever mechanism)—इसे द्रुत वापसी यन्त्र विन्यास भी कहते हैं। इस यन्त्र विन्यास का प्रयोग शेपर (shaper) तथा स्लोटर (slotter) मशीन में किया जाता है। इसमें कड़ी A स्थिर (fixed) है जो कि मशीन फ्रेम है। कड़ी D के दोलन द्वारा लीवर E कार्य करता है जिसमें B पश्चाग्र गति करती है। कड़ी C (क्रैंक) घूमती है। कड़ी E के द्वारा कड़ी D रैम (ram) से सम्बन्धित है तथा रैम के सिरे पर काटने वाला टूल (cutting tool) लगा होता है जो कि रैम के साथ-साथ स्थिर कड़ी A के लम्बवत् दिशा में पश्चाग्र गति करता है। जैसे ही कड़ी C, D से 90° के कोण पर आती है, रैम या टूल की गति दिशा बदल जाती है। क्रैंक के α कोण पर घूमते समय रैम आगे की ओर चलता है तथा टूल काटने का काम करता है परन्तु β कोण पर घूमते समय टूल पीछे की ओर चलता है। α कोण, β कोण से अधिक रखा जाता है। इससे काटने में लगे समय से टूल की वापसी का समय कम होता है। (चित्र 1.26)।

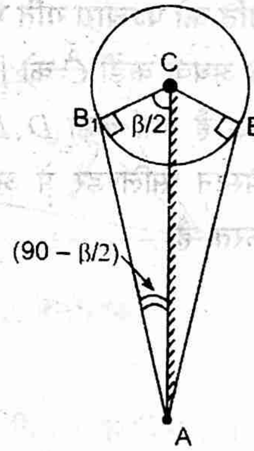


चित्र 1.26 क्रैंक और झिर्रीदार लीवर यन्त्र विन्यास

उदाहरण 1.1—एक क्रैंक तथा झिर्रीदार लीवर यन्त्रविन्यास, जो एक शेपर (shaper) में प्रयुक्त होता है, में क्रैंक के घुमाऊ केन्द्र तथा झिर्रीदार लीवर के दोलन केन्द्र के मध्य केन्द्रीय दूरी 280 mm है। क्रैंक की त्रिज्या 100 mm है। कर्तन समय का वापसी समय के साथ अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है—
$$AC = 280\,\text{mm},$$
$$CB_1 = 100\,\text{mm}$$

क्रैंक की चरम (extreme) स्थिति चित्र 1.27 में प्रदर्शित है।



चित्र 1.27

$$\sin\angle CAB_1 = \sin(90-\beta/2)$$
$$= \frac{CB_1}{AC} = \frac{100}{280} = 0.3571$$

$\therefore$
$$\angle CAB_1 = 90° - \beta/2$$
$$= \sin^{-1}(03571) = 20.92°$$

$\therefore$
$$\beta/2 = 90° - 20.92° = 69.08°$$

$\therefore$
$$\beta = 2\times 69.08 = 138.16°$$

हम जानते हैं कि—
$$\frac{\text{कर्तन स्ट्रोक का समय}}{\text{वापसी स्ट्रोक का समय}} = \frac{360° - \beta}{\beta}$$

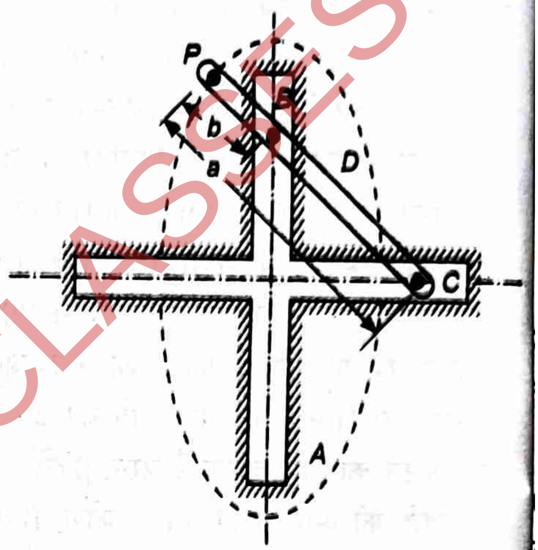
AKC TECHNICAL CLASSES

$$= \frac{360° - 138.16°}{138.16°}$$

$$= \frac{221.84°}{138.16°} = 1.605$$

1.2.3 दोहरा सरक क्रैंक चेन (Double slider crank chain)

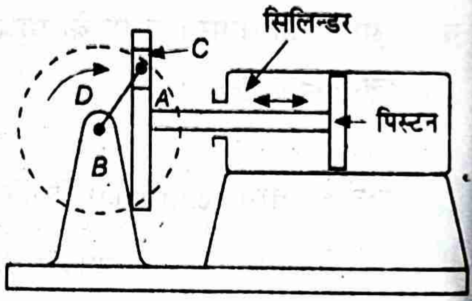
एक शुद्ध गति चेन, जिसमें दो घुमाऊ युगल तथा दो सरक युगल होते हैं, दोहरा सरक क्रैंक चेन यन्त्र विन्यास कहलाता है जैसा कि चित्र 1.28 में दिखाया गया है। चित्रानुसार ब्लॉक *B* तथा *C*, प्लेट *A* के खाँचों के साथ-साथ एक-एक युगल बनाते हैं, जबकि कड़ी *D* के साथ घुमाऊ युगल बनाते हैं इसे **दीर्घवृत्त खींचने का यन्त्र विन्यास (Mechanism for drawing ellipse or elliptical trammel)** कहते हैं। इसमें दो परस्पर लम्ब खाँचे (grooves) एक प्लेट *A* में बनाए जाते हैं जैसा कि चित्र 1.28 में दिखाया गया है। इन खाँचों में ब्लॉक *B* तथा *C* पश्चाग्र गति (Reciprocating Motion) करते हैं। *B*, *C* ब्लॉकों को कड़ी *D* से जोड़ा गया है। अब *D* कड़ी पर कोई भी बिन्दु या इसकी बढ़ी लम्बाई पर कोई बिन्दु (*P*) दीर्घवृत्त (ellipse) खींचेगा। चित्र के अनुसार दीर्घवृत्त की दीर्घ तथा लघु अक्षें (Major and minor axis) $2a$ तथा $2b$ हैं।



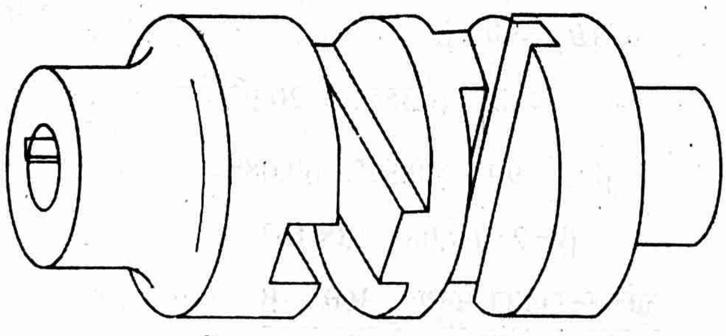
चित्र 1.28. दोहरा सरक क्रैंक चेन

दोहरा सरक क्रैंक चेन के उत्क्रमण (Inversions of Double Slider Crank Chain)

(i) स्कॉच योक यन्त्र-विन्यास (Scotch Yoke Mechanism)— यह यन्त्र विन्यास चित्र 1.29 में प्रदर्शित है। **इस यन्त्रावली का उपयोग घुमाऊ गति को पश्चाग्र गति में बदलने के लिए किया जाता है।** यह उत्क्रमण कड़ी *B* अथवा कड़ी *C* को स्थिर करके प्राप्त किया जाता है। चित्रानुसार ब्लॉक *B* बद्ध है तथा कड़ी *D*, *B* पर घूमती है। फ्रेम *A* पश्चाग्र गति करता है जिससे पिस्टन सिलिण्डर में आगे-पीछे चलता है। स्थिर ब्लॉक *B*, फ्रेम को गाइड करता है।

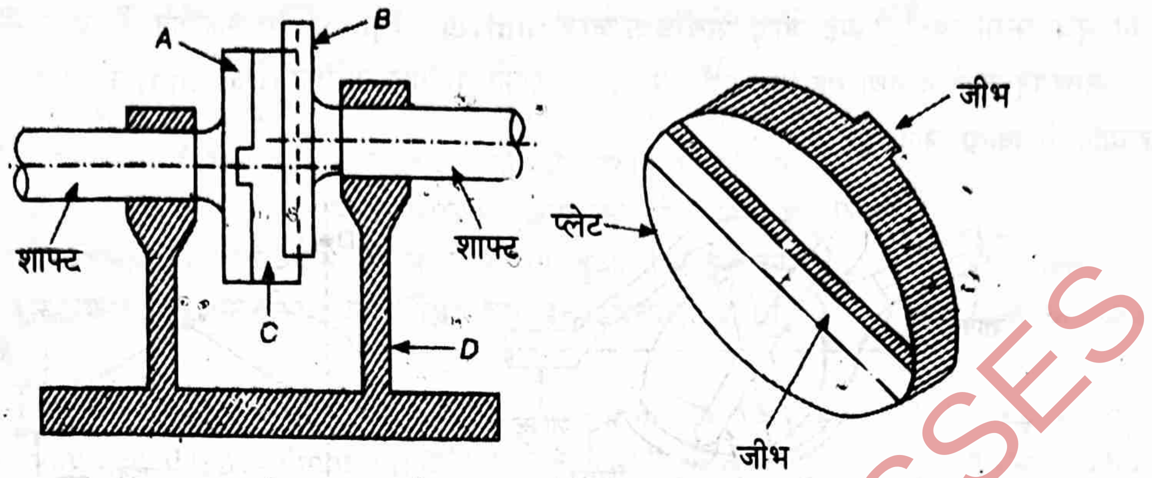


चित्र 1.29. स्कॉच योक यन्त्र-विन्यास



चित्र 1.30. ओल्डहम कपलिंग

AKC TECHNICAL CLASSES



चित्र 1.31. ओल्डहम कपलिंग यन्त्र-विन्यास

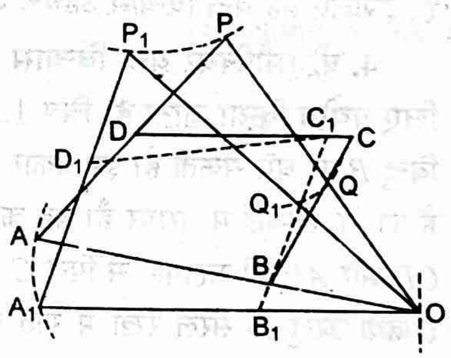
(ii) ओल्डहम कपलिंग यन्त्र-विन्यास (Oldham Coupling Mechanism)—यह कपलिंग उन दो समानान्तर शाफ्टों को जोड़ने में प्रयुक्त होता है जिनकी अक्षें एक सीध में नहीं होती। यह विन्यास चित्र 1.30 तथा 1.31 में प्रदर्शित है।

इस उत्क्रमण में फ्रेम '*D*' को बद्ध (fix) रखते हैं। जिन दो शाफ्टों को जोड़ा जाना है, उनके सिरों पर दो फ्लेंज (flanges) कड़ी *A* तथा कड़ी *B* जुड़े रहते हैं। कड़ी *A* तथा कड़ी *B*, फ्रेम *D* के साथ घुमाऊ युगल बनाते हैं। इन फ्लेंजों के व्यास में एक खाँचा (slot) कटा रहता है। जिसके मध्य में एक ब्लॉक '*C*' लगा होता है जिसकी सम्मुख सतहों पर एक-एक जीभ (Diametrical Projections) बने होते हैं जो परस्पर लम्ब होते हैं। क्रिया के अन्तर्गत यह ब्लॉक, फ्लेंजों के साथ घूमता भी है और खाँचों (slot) में सरक भी सकता है।

1.2.4 निम्न युगलों वाले सरल यन्त्र विन्यास (Simple Mechanisms with Lower Pairs)

कुछ और निम्न युगल (lower pairs) वाले यन्त्र निम्नलिखित हैं—

1. पेन्टोग्राफ (Pentograph)— चित्र 1.32 में एक सरल पेन्टोग्राफ का यन्त्र विन्यास दिखाया गया है। **इस यन्त्र विन्यास के द्वारा किसी बड़े या छोटे या समान आकार में दिए गए बिन्दु का पथ बनाया जाता है।** इसमें चार कड़ियाँ *A*, *B*, *C* तथा *D* बिन्दु पिन की सहायता से इस प्रकार जुड़ी हुई हैं कि कड़ियाँ *AB* और *CD* तथा कड़ियाँ *BC* और *AD* आपस में समान्तर हैं। यह घुमाऊ युगल बनाती है।



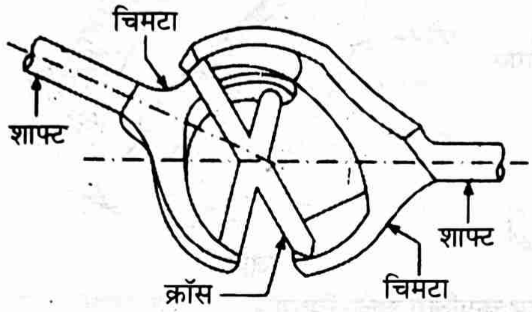
चित्र 1.32. पेन्टोग्राफ

कड़ी *AB* स्थिर पिन *O* तक बढ़ाई गई है। कड़ी *AD* को *P* तक इतना बढ़ाया जाता है कि बिन्दु *P* तथा कड़ी *BC* पर बिन्दु *Q* को मिलाने वाली रेखा *O* से गुजरती है। जब पूरे यन्त्र विन्यास को इस प्रकार घुमाया जाए कि बिन्दु *P* किसी भी दिए हुए पथ से गुजरे तो बिन्दु *Q* भी *P* जैसा ही, परन्तु उससे छोटा गति पथ दर्शाएगा। पश्चाग्र इंजन के पिस्टन का विस्थापन मापने में भी इस यन्त्र विन्यास का उपयोग होता है।

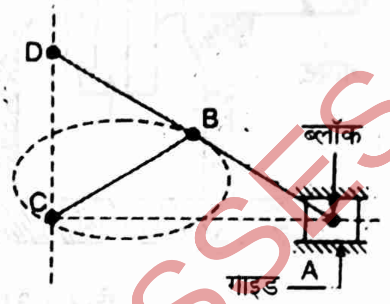
2. हुक जोड़ यन्त्र विन्यास (Hooke's joint-mechanism)— चित्र 1.33 में दिखाए गए **यन्त्र विन्यास का प्रयोग, दो असमान्तर परन्तु काटने वाली शाफ्टों को जोड़ने के लिए किया जाता है।** इसमें दोनों शाफ्टों का किनारा चिमटे के आकार की तरह होता है। एक क्रॉस (cross) को दोनों चिमटों के बीच इस प्रकार लगाया जाता है कि प्रत्येक चिमटे में

AKC TECHNICAL CLASSES

क्रॉस की भुजा फंसी रहती है यह **जोड़ सार्वत्रिक जोड़ (universal joint)** भी कहलाता है। क्रॉस की दोनों भुजाएँ एक दूसरे के लम्बवत् होती हैं तथा यह एक शाफ्ट से दूसरी शाफ्ट पर गति पारेषित (transmit) करता है। इसका प्रयोग मोटर, कार इत्यादि में किया जाता है।

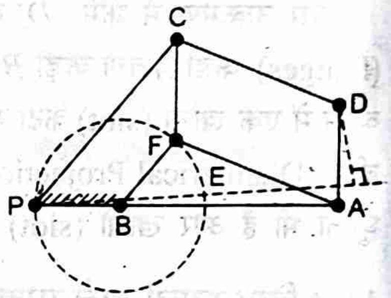


चित्र 1.33. हुक जोड़



चित्र 1.34. स्कॉट-रसल यन्त्र विन्यास

3. स्कॉट-रसल यन्त्र विन्यास (Scott-russel mechanism)—इस यन्त्र विन्यास की सहायता से सरल रेखाएं खींची जाती हैं। इस यन्त्र विन्यास से नई सरल रेखाएँ नहीं बनाई जातीं अपितु पुरानी रेखाओं से उसे नकल करके प्राप्त किया जाता है। इसमें गाइडों के द्वारा ब्लॉक एक सरल रेखा में चलने के लिए स्वतन्त्र होता है। एक संयोजक दण्ड (connecting rod) AB इस ब्लॉक से जुड़ी रहती है। यह संयोजक दण्ड पिन B पर एक और कड़ी BC से जुड़ी होती है। AB तथा BC परस्पर बराबर होती है। कड़ी AB को बिन्दु D तक बढ़ाने पर BD, AB के बराबर प्राप्त होती है। इस प्रकार बिन्दु D, CA के लम्बवत् सरल रेखा में चलता है। D के सरल रेखा में चलने की शुद्धता गाइडों के मध्य ब्लॉक की सरल रेखा में चलने की शुद्धता पर निर्भर करती है। चूँकि गाइडों पर सरल युगल (sliding pair) के कारण घिसाई अधिक होती है, इसलिए यह यन्त्र विन्यास अधिक शुद्ध और उपयोगी नहीं है। (देखिए चित्र 1.34)।



चित्र 1.35. पीयुसीलियर यन्त्र विन्यास

4. पीयुसीलियर यन्त्र विन्यास (Peaucillier mechanism)—यह यन्त्र विन्यास शुद्ध सरल रेखाएँ खींचने के लिए प्रयोग किया जाता है। चित्र 1.35 में कड़ी PD स्थिर (fixed) है तथा PB और BF परस्पर बराबर हैं। कड़ी BF बिन्दु B पर घूम सकती है। इस प्रकार पिन $F, (2 \times BF)$ व्यास के वृत्त पर घूमती है। चार कड़ियाँ FA, AD, DC तथा CF हैं जो कि लम्बाई में बराबर हैं। यह कड़ियाँ पिनों द्वारा F, A, D तथा C बिन्दुओं पर जुड़ी हैं। बराबर लम्बाई की दो कड़ियाँ CP और AP की सहायता से पिनों C और A को स्थिर पिन P पर जोड़ा गया है। जब कड़ी BF घूमती है तो PB स्थिर रहती है तथा बिन्दु D सरल रेखा में गति करता है। यह सरल रेखा क्षैतिज व्यास PE पर लम्ब होती है।

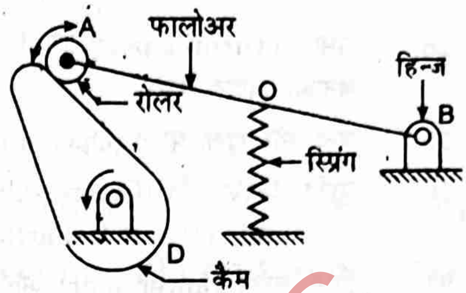
1.2.5 उच्च युगल यन्त्र विन्यास (Higher Pair Mechanism)

कैम तथा कैम यन्त्र विन्यास (Cam and cam mechanism)—कैम किसी यन्त्र विन्यास का पश्चाग्र गति (reciprocating motion) करने वाला या घूमने वाला वह अवयव (element) है जो कि एक दूसरे अवयव जिसे फालोअर (follower) कहते हैं, को सीधे सम्पर्क में घुमाता है, दोलन कराता है या पश्चाग्र गति कराता है। कैम सदैव फालोअर का स्पर्श करता है। फालोअर का कैम के साथ स्पर्श अधिकतर रेखीय होता है और यह उच्च युगल बनाते हैं।

कैम तथा फालोअर फ्रेम से मिलकर एक **तीन कड़ी वाला यन्त्र-विन्यास (Three link mechanism)** बनाते हैं। कैम, मशीन फ्रेम के साथ मिलकर एक घुमाऊ युगल तथा फालोअर, मशीन फ्रेम के साथ मिलकर सरक युगल बनाते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

कैम के कार्य करने का उदाहरण—(देखें चित्र 1.36) इस यन्त्र विन्यास में फालोअर AB बिन्दु B पर दोलन करता है। कैम अपने केन्द्र C पर घूमती है। फालोअर के O बिन्दु पर एक स्प्रिंग लगा रहता है जोकि फालोअर और कैम का सम्पर्क बनाए रखता है तथा कैम पर फालोअर को खींचे रखता है। कैम के गति करने पर स्प्रिंग के खिंचाव के विरुद्ध फालोअर ऊपर की ओर उठता है और स्प्रिंग के खिंचाव के कारण कैम की सतह से लगा हुआ नीचे की ओर आता है। **इस प्रकार कैम, फालोअर और स्प्रिंग इस यन्त्र विन्यास के तीन अवयव हैं।**



चित्र 1.36. कैम यन्त्र विन्यास

कैम यन्त्र विन्यास के उपयोग—कैम का डिजाइन सरल होने के कारण इसका उपयोग कई मशीनों में जटिल प्रकार की गति (complicated type of motion) प्राप्त करने के लिए किया जाता है। जटिल गति से हमारा तात्पर्य ऐसी गतियों से है जिन्हें हम परिभाषित नहीं कर सकते हैं। इस यंत्र विन्यास का उपयोग छपाई मशीन, घड़ियों, अन्तर्दहन इंजन और विभिन्न प्रकार की स्वचालित मशीनों (automatic machines) में भी किया जाता है।

कैम, मिलिंग मशीन (milling machine), पंच प्रेस (punch press) व डाई-कास्टिंग मशीन (die-casting machine) में प्रयोग किया जाता है।

प्रश्नावली

1. यन्त्र विन्यास (mechanism) से आप क्या समझते हैं?
2. यन्त्रावली (mechanism) का वर्गीकरण कीजिए। **(UP 2012, 16)**
3. प्रतिरोधी पिण्ड (resistant body) को परिभाषित कीजिए।
4. कड़ी या अवयव का क्या अर्थ है?
5. कड़ियों का वर्गीकरण करिए।
6. दृढ़ कड़ी (rigid link), लचीली कड़ी (flexible link) और तरल कड़ी (fluid link) को उदाहरण की सहायता से समझाइए।
7. कड़ी (link), मशीन अवयव से किस प्रकार भिन्न है?
8. यन्त्र-विन्यास और मशीन में अन्तर स्पष्ट करिए। **(UP 2002, 04, 05, 14, 15)**
9. सरल और यौगिक यन्त्र-विन्यास में अन्तर स्पष्ट करिए।
10. संरचना और मशीन में अन्तर स्पष्ट करिए।
11. घड़ी एक मशीन है या यन्त्र विन्यास, कारण सहित बताइए।
12. युगल तथा शुद्ध गति युगल (Kinematic pair) को स्पष्ट करिए।
13. शुद्ध गति युगल (Kinematic Pair) पर टिप्पणी लिखो।
14. निम्न युगल तथा उच्च युगल में अन्तर बताइए। **(UP 2002, 04, 09)**
15. (i) शुद्ध गति युगल (Kinematic pair) से आप क्या समझते हैं? इनके वर्गीकरण की विभिन्न विधियों का उल्लेख कीजिए तथा प्रत्येक विधि के लक्षण लिखिये। **(UP 2009, 18)**
    (ii) चित्रों की सहायता से विभिन्न प्रकार के शुद्ध युगलों को समझाइये। **(UP 2010)**
16. चार कड़ी यन्त्र विन्यास (Four bar mechanism) से आप क्या समझते हैं? स्लाइडर यन्त्र विन्यास को समझाइए।
17. निम्न में अन्तर स्पष्ट कीजिए—
    (i) बेलन (rolling) तथा गोलीय (spherical) युगल।
    (ii) फिसलने वाला तथा घूमने वाला युगल। **(UP 2009)**
    (iii) स्क्रू (screw) तथा गोलीय (spherical) युग्म। **(UP 2009)**

AKC TECHNICAL CLASSES

18. घुमाऊ (Turning pair) तथा फिसलने वाले युगल (Sliding pair) में अन्तर स्पष्ट करिए। प्रत्येक उदाहरण का रेखाचित्र बनाकर वर्णन करिए।
19. बन्द और खुला युगल (Open and closed pair) क्या है? **(UP 2009)**
20. पूर्णत: निरुद्ध गति (Completely constrained), अपूर्णतया निरुद्ध गति (Incompletely constrained motion) तथा अंशत: निरुद्ध गति (Partially constrained motion) में अन्तर स्पष्ट करिए।
21. निम्न युगल (lower pair) और उच्च युगल (higher pair) को उदाहरण की सहायता से स्पष्ट करें।
22. शुद्ध गति चेन (Kinematic chain) के सम्बन्ध में प्रयोग होने वाले पद कड़ी (link) तथा युगल (pair) की परिभाषा दीजिए।
23. शुद्ध गति चेन (Kinematic chain) और विभिन्न प्रकार की शुद्ध गति चेन (kinematic chain) को समझाइए।
24. सरक क्रैंक चेन (Slider Crank Chain) और उसके उत्क्रमण (inversions) बताइए और चित्र बनाइए।
25. सरक क्रैंक चेन का उपयोग कहाँ किया जाता है?
26. सरक क्रैंक चेन और दोहरी सरक क्रैंक चेन (Double slider crank mechanism) में अन्तर स्पष्ट करिए।
27. सरक क्रैंक विन्यास (Slider Crank Mechanism) पर टिप्पणी लिखें। **(UP 2016(W), 2018 (W))**
28. उच्च युगल यन्त्रावली समझाइए।
29. तीन निम्न युगलों से बनी चेन का वर्णन कीजिए।
30. चार छड़ वाली चेन को स्पष्ट करिए।
31. तीन छड़ चेन तथा चार छड़ चेन में अन्तर स्पष्ट करिए। चार छड़ चेन को मूल चेन क्यों समझा जाता है?
32. द्रुत वापसी यन्त्र-विन्यास को चित्र की सहायता से स्पष्ट करिए। **(UP 2004, 13)**
33. विभिन्न प्रकार के यन्त्र-विन्यास के नाम लिखिए और प्रत्येक का उदाहरण दीजिए। **(UP 2012)**
34. निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए—
    (i) पेन्टोग्राफ (pentograph)
    (ii) सार्वजनिक जोड़ (universal joint)
    (iii) स्कॉट रसल यन्त्र-विन्यास (scott russell mechanism)
    (iv) पीयुसीलियर यन्त्र-विन्यास (Peaucillier mechanism)
35. कैम यन्त्र-विन्यास की क्रिया बताइए। **(UP 2003)**
36. दोहरा सरक क्रैंक चेन को चित्र बनाकर वर्णन कीजिए।
37. एक ओल्डहम कपलिंग (Oldham coupling) की क्रियाविधि का सचित्र वर्णन कीजिए।
38. कैम यन्त्र-विन्यास के तीन अवयव बताइए।
39. कैम यन्त्र-विन्यास के उपयोग बताइए।
40. कैम और फालोअर में किस प्रकार का युगल बनता है?
41. कैम पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।
42. मशीन से क्या तात्पर्य है? उदाहरण देते हुए मशीन (Machine) और यन्त्र विन्यास (Mechanism) में अन्तर बताइए। **(UP 2010)**
43. काइनिमेटिक पेयर (Kinematic pair) और टाइप ऑफ मैकेनिज्म की व्याख्या करें। **(UP 2016 (W))**
44. विभिन्न प्रकार की यन्त्रावली की व्याख्या करें। **(UP 2017 (W))**
45. फोरबार मैकेनिज्म (four bar mechanism) की व्याख्या करें। **(UP 2017 (W))**
46. स्पेस मैकेनिज्म (space mechanism) का व्याख्या करें। **(UP 2017 (W))**

AKC TECHNICAL CLASSES

अध्याय

2

शुद्ध गति विश्लेषण तथा संश्लेषण
(Kinematic Analysis and Synthesis)

- Displacement, velocity and acceleration of plane mechanism
- Graphical and analytical techniques.

§ 2.1 परिचय (Introduction) :

शुद्ध गतिकी का तात्पर्य गति (motion) की ज्यामिति (geometry) से होता है। विभिन्न प्रकार की मशीनों तथा यन्त्रविन्यासों में गति का अध्ययन साधारणत: दो दृष्टिकोणों से किया जाता है—

(i) **विश्लेषण** (analysis) व (ii) **संश्लेषण** (synthesis)

विश्लेषण के अन्तर्गत किसी उपलब्ध या माने गये यन्त्रविन्यास या मशीन के गति सम्बन्धी गुणों तथा लक्षणों जैसे—वेग, त्वरण, विस्थापन की जाँच की जाती है परन्तु संश्लेषण का अर्थ विश्लेषण के ठीक विपरीत होता है। संश्लेषण या संश्लेषण में कुछ पूर्व निर्धारित गुणों तथा लक्षणों को धारण करने वाले यन्त्र विन्यास की रचना की जाती है। दूसरे शब्दों में संश्लेषण एक डिजाइन सम्बन्धी प्रक्रिया है।

एक मशीन के विभिन्न अवयवों का विभिन्न क्षणों पर वेग तथा त्वरण ज्ञात करने के लिए, उन भागों की उन क्षणों पर गतियों का अध्ययन करना आवश्यक है। किसी अवयव अथवा पुर्जे पर लगने वाले गतिक बलों का अध्ययन, उसके त्वरण पर आधारित होता है तथा त्वरण, वेग का फलन (function) है अत: किसी यंत्र विन्यास के अभिकल्पन के लिए वेग तथा त्वरण का ज्ञान आवश्यक है।

§ 2.2 यन्त्र विन्यास में कड़ियों का वेग ज्ञात करने की विधियाँ

यन्त्र विन्यास में कड़ियों का वेग ज्ञात करने की निम्नलिखित विधियाँ हैं—

1. वैश्लेषिक विधि (Analytical method)
2. वेग आरेख विधि (Velocity diagram method)

1. वैश्लेषिक विधि (Analytical method)— यह वेग ज्ञात करने की वैश्लेषिक विधि है जिसका प्रयोग सरल स्थितियों में लाभप्रद है, परन्तु जटिल स्थितियों में इस विधि से गणनाएँ कठिन व अप्रयोगात्मक हो जाती हैं। इस विधि का प्रयोग प्राय: नगण्य है परन्तु यहाँ इस अध्याय में हम पिस्टन तथा संयोजक छड़ का वेग तथा त्वरण ज्ञात करने की वैश्लेषिक विधि का अध्ययन करेंगे।

2. वेग आरेख विधि (Velocity diagram method)— किसी यन्त्र विन्यास को रेखाचित्र द्वारा दिखाया जा सकता है जिसमें प्रत्येक कड़ी को एक सरल रेखा द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। **कड़ी पर किसी भी बिन्दु की गति को वेग सदिश (velocity vector) द्वारा दिखाया जा सकता है। वेग सदिशों की सहायता से बने इन आरेखों को वेग आरेख (velocity diagram) कहते हैं तथा यह विधि वेग-आरेख विधि (velocity diagram method) कहलाती है।** यह

AKC TECHNICAL CLASSES

विधि सरल है तथा इसकी सहायता से जटिल स्थितियों में भी कड़ियों का वेग सुगमतापूर्वक ज्ञात किया जा सकता है। इसीलिए इसी विधि का प्रयोग अधिकतर किया जाता है।

यह निम्नलिखित दो प्रकार की होती है—

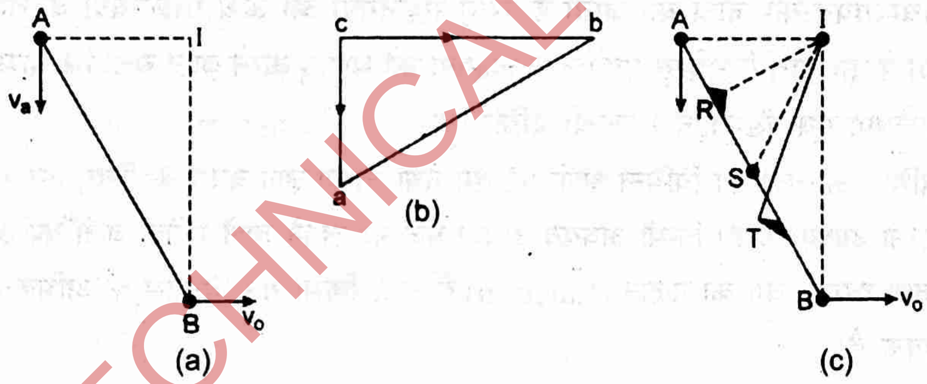
(a) तात्क्षणिक केन्द्र विधि (Instantaneous centre method)।

(b) सापेक्ष वेग विधि (Relative velocity method)।

§ 2.3 तात्क्षणिक केन्द्र विधि (Instantaneous Centre Method)

यदि कोई पिण्ड किसी क्षण मानी हुई अक्ष पर घूमता है, तो उस अक्ष को तात्क्षणिक अक्ष (Instantaneous axis) कहते हैं। चलित अवस्था में किसी कड़ी को किसी क्षण एक केन्द्र पर घूमती हुई माना जा सकता है। ऐसा केन्द्र पूर्ण कड़ी के सापेक्ष स्थिर रहता है तथा इसे तात्क्षणिक केन्द्र (Instantaneous centre) कहते हैं। कड़ी की विभिन्न स्थितियों के साथ इस केन्द्र की स्थिति बदलती रहती है। (देखें चित्र 2.1)।

"The instantaneous centre of a moving body may be defined as that centre which goes on changing from one instant to another. The locus of all such instantaneous centre is known as centrode. A line drawn through an instantaneous centre and perpendicular to the plane of motion is called instantaneous axis. The locus of this axis is known as axode."



चित्र 2.1

माना कि किसी क्षण कड़ी AB का एक सिरा A, $\vec{v}_a$ वेग से प्रदर्शित दिशा में गति करता है जबकि उसी क्षण दूसरा सिरा B, $\vec{v}_b$ से प्रदर्शित दिशा में गति करता है। तब A और B से उनकी गति की दिशा के लम्बवत् रेखाएँ खींचते हैं जोकि बिन्दु I पर मिलती हैं। इस प्रकार बिन्दु I इसका तात्क्षणिक केन्द्र (Instantaeous centre) है।

माना कि पिण्ड का कोणीय वेग (angular velocity) ω है, तो

$$\vec{v}_a = \omega . IA, \text{ एवं } \vec{v}_b = \omega . IB$$

अथवा
$$\frac{\vec{v}_a}{\vec{v}_b} = \frac{IA}{IB}$$

या
$$\frac{\vec{v}_a}{IA} = \frac{\vec{v}_b}{IB}$$

AKG TECHNICAL CLASSES

इसी प्रकार कड़ी AB पर स्थित विभिन्न बिन्दुओं R, S तथा T के वेग क्रमश: $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ तथा $\vec{v}_t$ निम्न प्रकार से सम्बन्धित हैं—

$$\frac{\vec{v}_r}{IR} = \frac{\vec{v}_s}{IS} = \frac{\vec{v}_b}{IT} = \frac{\vec{v}_a}{IA} = \frac{\vec{v}_b}{IB} = \omega = AB \text{ का कोणीय वेग}$$

यदि $\vec{v}_a$ के परिणाम और दिशा दोनों ज्ञात हैं और $\vec{v}_b$ की केवल दिशा ज्ञात हो, तो $\vec{v}_b$ का परिमाण ज्ञात किया जा सकता है। इसी प्रकार किसी अन्य बिन्दु का परिमाण भी ज्ञात किया जा सकता है।

§ 2.4 तात्क्षणिक केन्द्र के गुण (Properties of the Instantaneous Centre)

तात्क्षणिक केन्द्र के निम्न गुणों को विषय के लिए महत्वपूर्ण माना जा सकता है—

1. विन्यास के माने हुये ढाँचे के लिए एक दृढ़ कड़ी, दूसरी कड़ी के सापेक्ष ताक्षणिक केन्द्र पर तात्क्षणिक (Instantaneously) घूमता है।

2. तात्क्षणिक केन्द्र पर दो दृढ़ कड़ियाँ एक दूसरे के सापेक्ष रेखीय गति नहीं करते हैं। इस बिन्दु पर दो दृढ़ कड़ियाँ, तीसरी दृढ़ कड़ी के सापेक्ष समान रेखीय गति करती हैं। दूसरे शब्दों में तात्क्षणिक केन्द्र की किसी तीसरे दृढ़ कड़ी के सापेक्ष गति, पहली दृढ़ कड़ी अथवा दूसरी दृढ़ कड़ी पर तात्क्षणिक केन्द्र को एक बिन्दु मानने पर उसकी गति के समान होगी।

§ 2.5 एक यंत्र विन्यास में तात्क्षणिक केन्द्रों की संख्या (Number of Instantaneous Centres in a Mechanism)

एक निरुद्ध शुद्ध गति चेन में तात्क्षणिक केन्द्रों की संख्या, दो कड़ियों के सम्भावित जोड़ों की संख्या के समान होगी।

"The number of instantaneous centres in a constrained kinematic chain is equal to the number of possible combinations of two links."

कड़ियों के जोड़ों की संख्या अथवा तात्क्षणिक केन्द्रों की संख्या, n कड़ियों को दो एक साथ लेने पर बने जोड़ों की संख्या के बराबर होगी। अत:

$$\textbf{तात्क्षणिक केन्द्रों की संख्या } N = \frac{n(n-1)}{2}; \qquad \text{जहाँ } n = \text{कड़ियों की संख्या}$$

§ 2.6 तात्क्षणिक केन्द्रों के प्रकार (Types of Instantaneous Centres)

किसी विन्यास के लिए तात्क्षणिक केन्द्र निम्न तीन प्रकार के हो सकते हैं—

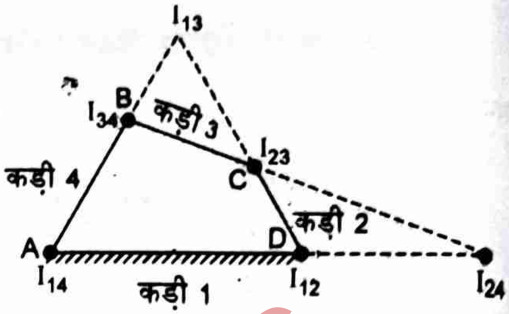
(i) **बद्ध तात्क्षणिक केन्द्र,**

(ii) **स्थायी तात्क्षणिक केन्द्र,** तथा

(iii) **चल तथा अस्थायी तात्क्षणिक केन्द्र।**

प्रथम दो प्रकार के केन्द्रों को प्राथमिक तात्क्षणिक केन्द्र तथा तीसरे प्रकार के केन्द्र को द्वितीयक तात्क्षणिक केन्द्र कहते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES



चित्र 2.2

चित्र 2.2 में दिखाई गई चार छड़ यंत्र विन्यास *ABCD* पर विचार करते हैं। एक चार छड़ विन्यास में तात्क्षणिक केन्द्रों की संख्या *N* निम्न प्रकार ज्ञात की जायेगी—

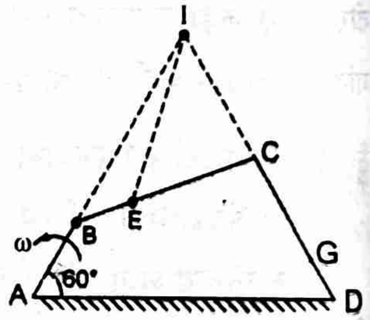
$$N = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4(4-1)}{2} = 6 \qquad \ldots (\because \ n = 4)$$

तात्क्षणिक केन्द्र I_{14} तथा I_{12} बद्ध तात्क्षणिक केन्द्र कहलाते हैं क्योंकि विन्यास की किसी भी आकृति के लिए इनकी स्थिति समान रहती है। I_{34} तथा I_{23} स्थायी तात्क्षणिक केन्द्र कहलाते हैं क्योंकि जब विन्यास गति करता है तो ये भी गति करते हैं परन्तु जोड़, स्थायी प्रकृति का होता है। तात्कालिक केन्द्र I_{24} तथा I_{13} चल तथा अस्थायी प्रकृति के होते हैं तथा विन्यास की आकृति के साथ बदलते हैं।

§ 2.7 किसी यन्त्र विन्यास में तात्क्षणिक केन्द्र ज्ञात करने की विधि (Method of Locating Instantaneous Centres in a Mechanism)

किसी यंत्र विन्यास में तात्क्षणिक केन्द्र ज्ञात करने की विधि को हम निम्न उदाहरणों द्वारा समझेंगे—

उदाहरण 2.1—चित्र 2.3 में एक चार छड़ यंत्र विन्यास *ABCD* प्रदर्शित है। तात्क्षणिक केन्द्र विधि द्वारा कड़ी *BC* तथा *CD* का कोणीय वेग ज्ञात कीजिये। इसके अतिरिक्त *BC* पर बिन्दु *E* तथा *CD* पर बिन्दु *G* का वेग भी ज्ञात कीजिये। कड़ी *AB* π radian/sec के कोणीय वेग से वामावर्त (Anti-Clockwise) घूम रही है। कुछ प्रमुख आकड़ें निम्न हैं–



चित्र 2.3

$$AB = 0.5\text{m},\ BC = 1.5\text{m},\ CD = 1.0\text{m},$$
$$DA = 1.75\text{m},\ BE = 0.5\text{m},\ GD = 0.25\text{m}$$

तथा $\angle BAD = 60°$

हल—तात्क्षणिक केन्द्र *I* प्राप्त करने के लिए, *AB* तथा *DC* को आगे बढ़ाते हैं जो बिन्दु *I* पर मिलते हैं। यहाँ *IB* तथा *IC*, बिन्दुओं *B* तथा *C* की गतियों की दिशा के लम्बवत् होगी।

क्योंकि *I*, कड़ी *BC* के घुमाव का तात्क्षणिक केन्द्र है, अत: कड़ी *BC* को *I* के परित: घूमता हुआ माना जा सकता है। माना ω = कड़ी *BC* का *I* के परित: कोणीय वेग।

तब सिरे *B* का वेग, $v_b = \omega . IB.$

परन्तु $$v_b = \omega_{ab} . AB \qquad (\because A \text{ बद्ध है})$$

$$\therefore \qquad \omega_{ab} . AB = \omega . IB$$

या $$\omega = \omega_{ab} . \frac{AB}{IB} = 3.14 \times \frac{0.5}{2.45} \qquad (IB = 2.45 \text{ चित्र द्वारा मापने पर})$$

$$\therefore \qquad \omega = \mathbf{0.64\ rad / sec}$$ उत्तर

(ii) कड़ी *CD* का वेग $\quad v_{CD} = \omega . IC = 0.64 \times 1.575 = \mathbf{1.01\ m / sec}$ उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES

बिन्दु E का (कड़ी BC पर) वेग

$$v_e = \omega . IE = 0.644 \times 21$$

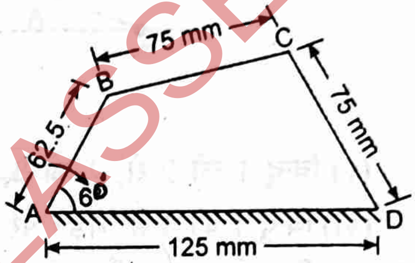
$$= \mathbf{1.343\, m/sec}$$ उत्तर

बिन्दु G का (कड़ी CD पर) वेग

$$v_g = \omega . IG = 0.64 \times 2.325$$

$$= \mathbf{1.49\, m/sec}$$ उत्तर

उदाहरण 2.2— एक पिन जोड़ वाले चार छड़ विन्यास, जैसा कि चित्र 2.4 में दिखाया गया है, में विभिन्न कड़ियों की लम्बाईयां निम्न हैं $AB = 62.5$ mm, $BC = CD = 75$mm तथा $AD = 125$ mm तथा कोण $BAD = 60°$ है। यदि कड़ी AB, 10 rpm के एक समान वेग से दक्षिणावर्त्त दिशा में घूम रही है। कड़ी BC का कोणीय वेग ज्ञात करो तथा सभी तात्क्षणिक केन्द्रों को प्रदर्शित करों।



चित्र 2.4

हल— दिया है, $N_{AB} = 10$ rpm,

$$\therefore \quad \omega_{AB} = \frac{2\pi N_{AB}}{60}$$

$$\therefore \quad \omega_{AB} = 2\pi \times \frac{10}{60} = 1.047 \text{ rad/sec}$$

क्योंकि क्रैंक की लम्बाई $AB = 62.5\text{ mm} = 0.0625\text{ m}$ है।

इसलिए कड़ी AB पर बिन्दु B का वेग $v_B = \omega_{AB} \times AB$

$$\therefore \quad v_B = 1.047 \times 0.0625 = 0.0654 \text{ m/sec}$$

तात्क्षणिक केन्द्रों की स्थितियाँ—

(i) क्योंकि विन्यास में चार कड़ियां हैं अत: तात्क्षणिक केन्द्रों की संख्या

$$N = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4(4-1)}{2} = 6 \text{ होगी।}$$

(ii) विन्यास के सभी तात्क्षणिक केन्द्रों के लिए एक तालिका 2.1 निम्न प्रकार बनाते हैं—

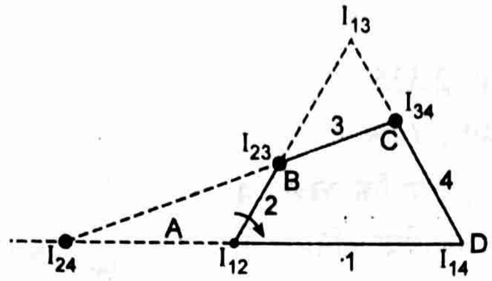
तालिका 2.1

कड़ियाँ	1	2	3	4
तात्क्षणिक केन्द्र	12	23	34	—
(संख्या 6)	13	24		
	14			

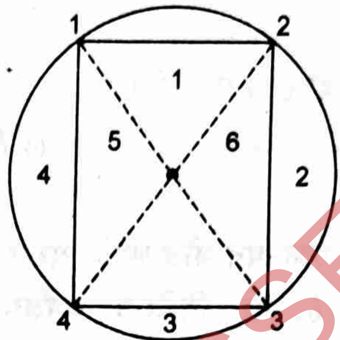
(iii) निरीक्षण द्वारा बद्ध तथा स्थायी तात्क्षणिक केन्द्रों I_{12}, I_{23}, I_{34} तथा I_{14} को ज्ञात करते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

(iv) अब अस्थायी तथा चल तात्क्षणिक केन्द्रों को ज्ञात करते हैं। इसके लिये चित्र 2.6 के अनुसार वृत्त आरेख बनाते हैं। इसके लिए कड़ियों की संख्या के बराबर अर्थात् चार बिन्दु 1, 2, 3 तथा 4 चित्रानुसार लगाते हैं।



चित्र 2.5



चित्र 2.6

(v) बिन्दु 1 को 2 से, 2 को 3, 3 को 4 तथा 1 को 4 से चित्रानुसार जोड़ते हैं।

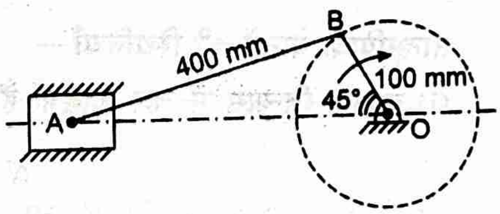
(vi) बिन्दु 1 को 3 से जोड़ने पर त्रिभुज 123 तथा 341 बनाते है। साइड 13 दोनों त्रिभुज के लिए उभयनिष्ठ होती है। अत: तात्क्षणिक केन्द्र I_{13}, बिन्दुओं $I_{12}.I_{23}$ तथा $I_{34}.I_{14}$ को जोड़ने वाली रेखाओं के कटान बिन्दु पर प्राप्त होता है। तब बिन्दुदार रेखा 1–3 पर नम्बर 5 लिख देते हैं।

(vii) उपरोक्त की भाँति बिन्दु 2 तथा 4 जोड़कर बिन्दु 6 प्राप्त करते हैं। इस प्रकार कुल 6 तात्क्षणिक केन्द्र प्राप्त हो जाते हैं।

कड़ी BC का कोणीय वेग—माना ω_{BC} = कड़ी BC का कोणीय वेग, क्योंकि बिन्दु B, कड़ी BC पर एक बिन्दु भी है। अत: कड़ी BC पर बिन्दु B का वेग $v_B = \omega_{BC} \times I_{13}.B$ मापने पर, $I_{13}.B = 105\,\text{mm} = 0.105\text{ m}$

$$\therefore \quad \omega_{BC} = \frac{v_B}{I_{13}.B} = \frac{0.0654}{0.105} = \mathbf{0.63\ rad/sec} \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 2.3—चित्र 2.7 में दिखाये गये सरक-क्रैंक यंत्रावली (Slider Crank Mechanism) के सभी तात्क्षणिक केन्द्र प्रदर्शित कीजिये। क्रैंक OB तथा संयोजक दँड AB की लम्बाईयाँ क्रमशः 100 mm तथा 400 mm हैं। यदि क्रैंक दक्षिणावर्त 10 radian/sec के कोणीय वेग से घूमती है तो ज्ञात कीजिये–(i) स्लाइडर (Slider) A का वेग, तथा (ii) संयोजक दँड AB का कोणीय वेग।



चित्र 2.7

हल—दिया है—

$$\omega_{OB} = 10\,\text{rad/sec}, OB = 100\,\text{mm} = 0.1\,\text{m}$$

क्रैंक OB का रेखीय वेग, $\quad v_{OB} = v_B = \omega_{OB} \times OB = 10 \times 0.1 = 1\,\text{m/sec}$

तात्क्षणिक केन्द्रों की स्थितियाँ

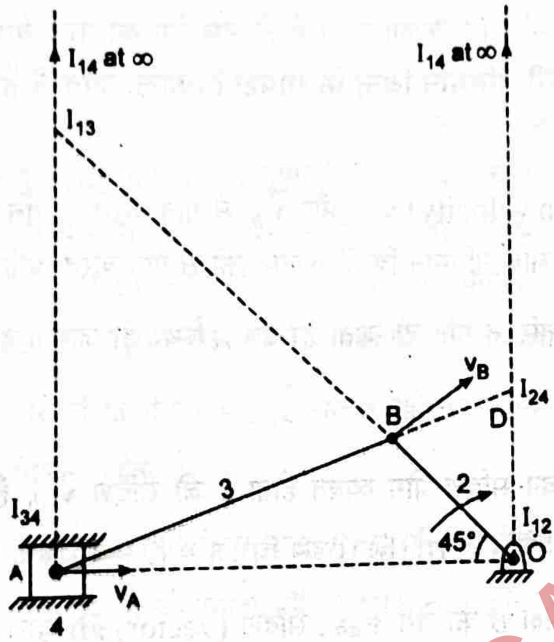
(i) क्योंकि इस विन्यास में 4 कड़ियाँ हैं अत: तात्क्षणिक केन्द्रों की संख्या

$$N = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4(4-1)}{2} = 6$$

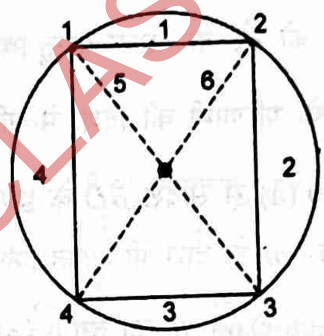
(ii) पूर्व उदाहरण की भाँति इसकी भी तालिका तैयार करते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

(iii) अब निरीक्षण द्वारा बद्ध तथा स्थायी तात्क्षणिक केन्द्रों को प्रदर्शित करते हैं। ये केन्द्र I_{12}, I_{23} तथा I_{34} होंगे जैसा कि चित्र 2.8 में दिखाया गया है क्योंकि स्लाइडर (कड़ी 4) एक समतल सतह (कड़ी 1) पर चलती है अतः तात्क्षणिक केन्द्र I_{14} अनन्त (infinity) पर होगा। सरक-क्रैंक यंत्रावली में तीन घुमॉऊ तथा एक सरकने वाला युग्म (pair) होता है। अतः इसमें तीन प्राथमिक (बद्ध तथा स्थायी) तात्क्षणिक केन्द्र प्राप्त होंगे।



चित्र 2.8



चित्र 2.9

(iv) अब पूर्व उदाहरण की भाँति शेष दो अस्थायी तथा चल तात्क्षणिक केन्द्रों को ज्ञात करते हैं। इस प्रकार सभी '6' तात्क्षणिक केन्द्र प्राप्त करते हैं। देखें चित्र 2.9।

मापने पर, $I_{13}A = 460\text{ mm} = 0.46\text{ m}$

तथा $I_{13}B = 560\text{ mm} = 0.56\text{ m}$

स्लाइडर A का वेग— माना v_A = स्लाइडर A का वेग हम जानते हैं

$$\frac{v_A}{I_{13}.A} = \frac{v_B}{I_{13}.B} \quad \text{या} \quad v_A = v_B \cdot \frac{I_{13}.A}{I_{13}.B}$$

$$= 1 \times \frac{0.46}{0.56} = \mathbf{0.82\ m/sec}$$ उत्तर

संयोजक दंड AB का कोणीय वेग— माना ω_{AB} = संयोजक दण्ड AB का कोणीय वेग।

हम जानते हैं कि
$$\frac{v_A}{I_{13}.A} = \frac{v_B}{I_{13}.B} = \omega_{AB}$$

$$\therefore \quad \omega_{AB} = \frac{v_B}{I_{13}.B} = \frac{1}{0.56}$$

$$= \mathbf{1.78\ rad/sec}$$ उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES

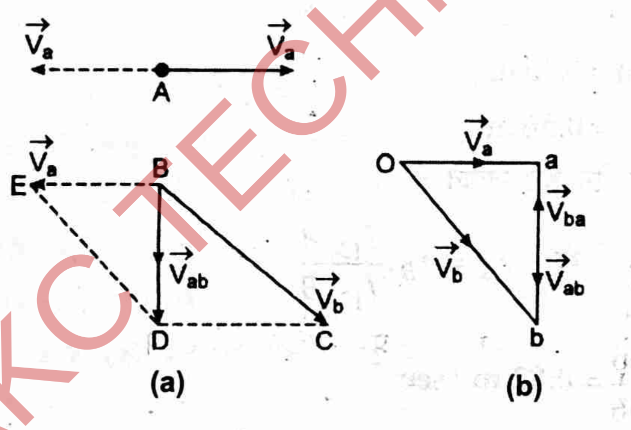
§ 2.8 सापेक्ष वेग विधि (Relative Velocity Method)

1. वेग तथा सापेक्ष वेग (Velocity and Relative velocity)— हमें इसका ज्ञान है कि स्थिर अवस्थाएँ तथा गतिमान वस्तुएँ एक दूसरे के सापेक्ष पद (relative terms) हैं। स्थिति का परिवर्तन समय के सापेक्ष (विस्थापन/समय) वेग (velocity) कहलाता है।

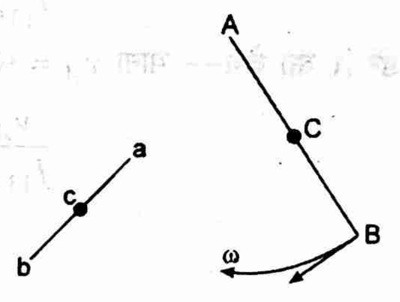
जब किसी बिन्दु या कण का वेग किसी स्थिर बिन्दु के सापेक्ष निकाला जाता है तो उस वेग को परम वेग (absolute velocity) कहते हैं। **जब किसी बिन्दु या कण का वेग किसी गतिमान बिन्दु के सापेक्ष निकाला जाता है तो उसे सापेक्ष वेग (relative velocity) कहते हैं।**

माना कि दो स्वतन्त्र कण A और B परम वेग (absolute velocity) $\vec{\mathbf{v}}_a$ और $\vec{\mathbf{v}}_b$ से गति करते हैं। तब B का वेग A के सापेक्ष, वह वेग होगा, जिस वेग से A पर स्थित और A के साथ गतिमान किसी व्यक्ति को B गति करता प्रतीत होगा। माना कि दोनों कणों को $\vec{\mathbf{v}}_a$ के बराबर परन्तु विपरीत दिशा में अतिरिक्त गति दी जाती है। तब A स्थिर हो जाएगा तथा $B,(\vec{\mathbf{v}}_b)$ तथा $(-\vec{\mathbf{v}}_a)$ के परिणामी की दिशा में गति करेगा।

चित्र 2.10 (a) से सदिश BD के द्वारा v_b तथा $-v_a$ का सदिश योग व्यक्त होता है जो सदिश $\vec{\mathbf{v}}_{ab}$ है। इस सदिश योग को त्रिभुज oab के द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है। (चित्र 2.10 (b))। इस त्रिभुज में O स्थिर बिन्दु है तथा A का वेग सदिश (vector) $\vec{\mathbf{oa}}$, B का वेग $\vec{\mathbf{ob}}$ द्वारा तथा A के सापेक्ष B का वेग $\vec{\mathbf{v}}_{ab}$, सदिश (vector) $\vec{\mathbf{ab}}$ द्वारा व्यक्ति किया जाता है जिसकी दिशा a से b है। अब सदिश $\vec{\mathbf{ba}}$ द्वारा B के सापेक्ष A का वेग $\vec{\mathbf{v}}_{ba}$ व्यक्त किया जाता है जिसकी दिशा b से a है।



चित्र 2.10



चित्र 2.11

2. यन्त्र विन्यास में किसी कड़ी का वेग— चित्र 2.11 में माना कि कोई कड़ी AB है। कड़ी पर दो बिन्दु A तथा B हैं। कड़ी, A बिन्दु पर वामावर्त दिशा (anti clockwise direction) में घूमती है। चूँकि A तथा B के बीच की दूरी परिवर्तित नहीं होती इसलिए रेखा AB पर A तथा B में सापेक्ष गति नहीं होगी। B सिरा A के सापेक्ष गति करता है। B के वेग की दिशा रेखा AB के लम्बवत् होगी।

माना कि A के सापेक्ष B का वेग सदिश (vector) ab द्वारा प्रदर्शित किया गया है जो कि AB के लम्बवत् है। माना कि कड़ी AB का कोणीय वेग ω है।

AKC TECHNICAL CLASSES

$\therefore$ A के सापेक्ष B का वेग $\qquad \vec{v}_{ab} = \vec{ab} = \omega AB$ ...(1)

माना कि कड़ी AB पर कोई बिन्दु C है।

$\therefore$ A के सापेक्ष C का वेग $\qquad \vec{v}_{ac} = \vec{ac} = \omega AC$ ...(2)

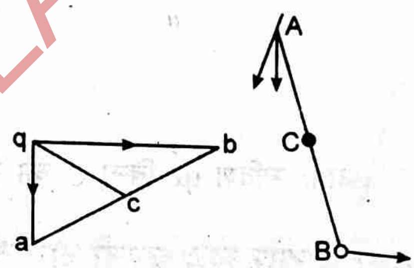
समीकरण (1) तथा (2) से, $\qquad \dfrac{\vec{v}_{ac}}{\vec{v}_{ab}} = \dfrac{\vec{ac}}{\vec{ab}} = \dfrac{\omega . AC}{\omega . AB} = \dfrac{AC}{AB}$ ...(3)

अत: बिन्दु c, ab को उसी अनुपात में विभाजित करता है जिसमें कि बिन्दु C, AB को विभाजित करता है।

3. यन्त्र-विन्यास में कड़ियों के वेग ज्ञात करने की विधि—माना कि A तथा B एक दृढ़ कड़ी के दो बिन्दु हैं जिनकी गति तथा दिशाएँ ज्ञात हैं। A किसी वक्र परिपथ पर चलता है जबकि B सरल रेखा में चलता है।

चित्र 2.12 के अनुसार वेग आरेख (vector diagram) बनाया। इसके लिए किसी बिन्दु q से उचित पैमाने पर $\vec{qa}$ सदिश खींचिए जोकि बिन्दु A की गति का परिमाण और दिशा दर्शाता है।

अत: सदिश $\vec{qb}$ खींचिए जोकि बिन्दु B की गति की दिशा तथा परिमाण प्रदर्शित करता है। अत: a तथा b को मिला दीजिए। AB तथा ab आपस में लम्बवत् हैं।



चित्र 2.12

$\therefore$ **सदिश वेग आरेख** (vector velocity diagram) qab से (परिमाण तथा दिशा में)

A के सापेक्ष B का वेग $\qquad \vec{v}_{ab} = \vec{ab}$

B के सापेक्ष A का वेग $\qquad \vec{v}_{ba} = \vec{ab}$

A का वेग $\qquad \vec{v}_{a} = \vec{qa}$

B का वेग $\qquad \vec{v}_{b} = \vec{qb}$

कड़ी AB पर बिन्दु C का वेग ज्ञात करना है। बिन्दु c को ab पर इस प्रकार बनाओं जिससे

$$\frac{\vec{bc}}{BC} = \frac{\vec{ab}}{AB}$$

B के सापेक्ष C का वेग, $\qquad \vec{v}_{bc} = \vec{bc}$

तथा A के सापेक्ष C का वेग $\qquad \vec{v}_{ac} = \vec{ac}$

अथवा $\qquad \dfrac{\vec{v}_{ac}}{\vec{v}_{ba}} = \dfrac{AC}{BA}$ ...(1)

AKC TECHNICAL CLASSES

अब बिन्दु C का वेग

$$\vec{v}_c = \text{बिन्दु } C \text{ की } A \text{ के सापेक्ष गति} + \text{बिन्दु } A \text{ की गति}$$

$$\vec{v}_c = \vec{v}_{ba} \times \frac{AC}{BA} + \vec{v}_a$$

$$= \vec{\mathbf{ba}} \times \frac{AC}{BA} + \vec{\mathbf{qa}}$$

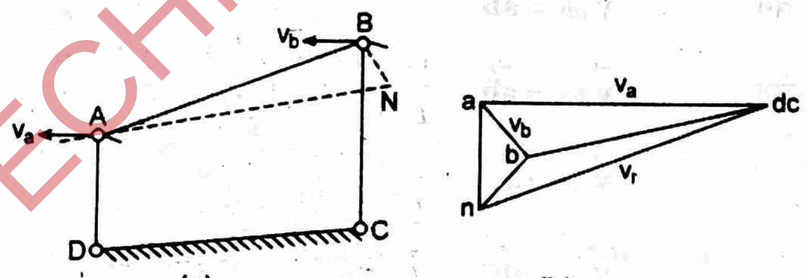
परन्तु
$$\frac{AC}{BA} = \frac{\vec{\mathbf{ac}}}{\vec{\mathbf{ba}}}$$

$$\therefore \quad \vec{v}_c = \vec{\mathbf{ba}} \times \frac{\vec{\mathbf{ac}}}{\vec{\mathbf{ba}}} + \vec{\mathbf{qa}} = \vec{\mathbf{ac}} + \vec{\mathbf{qa}} = \vec{\mathbf{qa}} + \vec{\mathbf{ac}} = \vec{\mathbf{qc}}$$

अतः सदिश $\vec{\mathbf{qc}}$ बिन्दु C का वेग प्रदर्शित करता है।

§ 2.9 चार छड़ वाली चेन का वेग आरेख

चित्र 2.13 (a) में चार छड़ वाली चेन $ABCD$ दिखाई गई है जिसमें DC एक स्थिर (fixed) कड़ी है। कड़ी AD स्थिर बिन्दु D पर घूमती है। B बिन्दु C पर घूमता है। कड़ी DC के बिन्दु D और C स्थिर हैं इसलिए इन्हें **ध्रुव (pole)** कहा जाता है। यह बिन्दु आरेख पर संपाती (coincident) होंगे। चित्र 2.13 (b) के अनुसार कोई बिन्दु d, c मानिए। अब बिन्दु d से



चित्र 2.13

सदिश (vector) $\vec{\mathbf{da}}$ खींचिएँ जो DA के लम्बवत् हों। अब c से BC के लम्बवत् $\vec{\mathbf{cb}}$ खींचिए क्योंकि A के सापेक्ष B की गति BA के लम्बरूप होगी इसलिए a से BA के लम्बवत् $\vec{\mathbf{ab}}$ रेखा खींचिए जो कि $\vec{\mathbf{cb}}$ को b पर काटती है। अतः सदिश $\vec{\mathbf{ab}}$, A के सापेक्ष B का वेग प्रदर्शित करिए तथा सदिश $\vec{\mathbf{cb}}$ B बिन्दु के वेग को प्रदर्शित करेगा। अर्थात्

$$\vec{\mathbf{ab}} = \vec{v}_{ba}$$

$$\vec{\mathbf{cb}} = \vec{v}_{cb} = \vec{v}_b$$

AKC TECHNICAL CLASSES

यदि कड़ी BA पर कोई बिन्दु N रेखा BA के बाहर है तो इसका वेग निम्न प्रकार से ज्ञात किया जाता है। NA तथा NB को मिला दीजिए तथा त्रिभुज NBA के समरूप त्रिभुज nba वेग आरेख पर बनाइए। इसके लिए a से AN के लम्बवत् सदिश $\vec{\mathbf{an}}$ तथा b से BN के लम्बरूप सदिश $\vec{\mathbf{bn}}$ खींचिए जोकि एक-दूसरे को n पर काटते हैं।

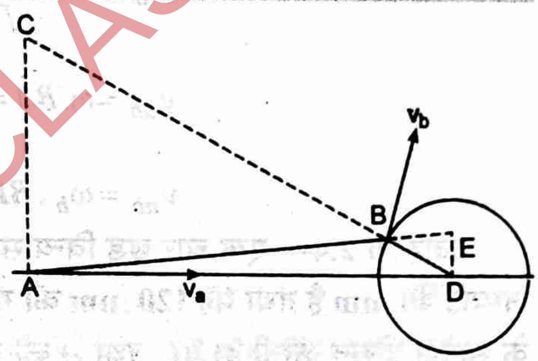
$\therefore$ $\vec{\mathbf{bn}} = \vec{\mathbf{v}}_{bn} = B$ के सापेक्ष N का वेग।

$\vec{\mathbf{an}} = \vec{\mathbf{v}}_{an} = A$ के सापेक्ष N का वेग।

$\vec{\mathbf{dn}} = \vec{\mathbf{v}}_{n} = D$ के सापेक्ष N का वेग $= N$ का परम वेग।

§ 2.10 पश्चाग्र इन्जन में पिस्टन वेग ज्ञात करने की सरल विधि

पश्चाग्र इन्जन में पिस्टन वेग ज्ञात करने के लिए चित्र 2.14 के अनुसार तात्कालिक केन्द्र वाले त्रिभुज CBA के समरूप त्रिभुज DBE प्राप्त करते हैं। त्रिभुज DBE प्राप्त करने के लिए AB को B से आगे बढ़ाते हैं तथा D से DA पर लम्ब खींचते हैं, जो बिन्दु E पर काटता है।



चित्र 2.14

त्रिभुज CBA तथा त्रिभुज DBE से,

$$\angle CBA = \angle DBE \text{ (सम्मुख कोण)}$$

$$\angle BCA = \angle EDB \text{ (एकान्तर कोण)}$$

$\therefore$ त्रिभुज CBA तथा त्रिभुज DBE समरूप हैं।

इसी प्रकार,

$$\frac{CA}{DE} = \frac{CB}{DB} \quad \text{अथवा} \quad \frac{CA}{CB} = \frac{DE}{DB}$$

परन्तु

$$\frac{CA}{CB} = \frac{\vec{\mathbf{v}}_a}{\vec{\mathbf{v}}_b}$$

$\therefore$

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DE}{DB} = \frac{\vec{\mathbf{v}}_a}{\vec{\mathbf{v}}_b} \qquad \ldots(i)$$

अब,

$$\frac{BA}{BE} = \frac{CB}{DB}$$

अथवा

$$\frac{BA}{CB} = \frac{BE}{DB} = \frac{\vec{\mathbf{v}}_{ab}}{\vec{\mathbf{v}}_b} \qquad \ldots(ii)$$

चूँकि त्रिभुज DBE का पैमाना और यन्त्र-विन्यास का पैमाना एक ही होगा, इसलिए,

AKC TECHNICAL CLASSES

$$\vec{v}_b = \vec{\omega}.CB \qquad [\text{जहाँ } \omega = C \text{ पर } AB \text{ का कोणीय वेग (angular velocity) है।}]$$

तथा $$\vec{v}_b = \omega_b .DB \qquad (\text{जहाँ } \omega_b = \text{क्रैंक } DB \text{ का कोणीय वेग है})$$

$$\omega_b = \frac{\vec{v}_b}{DB}$$

$$\therefore \quad \vec{v}_a = \vec{\omega} CA = \frac{\vec{v}_b}{CB} \times CA = \vec{v}_b \times \frac{CA}{CB}$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_b \times \frac{DE}{DB} = \vec{\omega}_b .DE \qquad \ldots\text{(iii)}$$

$$v_{ab} = \omega.BA = \frac{v_b}{CB}.BA = v_b \times \frac{BE}{BD}$$

$$\therefore \quad v_{ab} = \omega_b .BE \qquad \ldots\text{(iv)}$$

उदाहरण 2.4— एक चार छड़ विन्यास *ABCD* में कड़ी की लम्बाई 150 mm तथा यह स्थिर है। क्रैंक *AB* की लम्बाई 40 mm है तथा यह 120 mm की गति से दक्षिणावर्त घूमती है। कड़ी *CD* की लम्बाई 80 mm है तथा वह *D* के सापेक्ष दोलन करती है। *BC* तथा *A* की लम्बाईयाँ समान हैं। कड़ी *CD* की कोणीय गति क्या होगी जबकि कोण *BAD* = 60°.

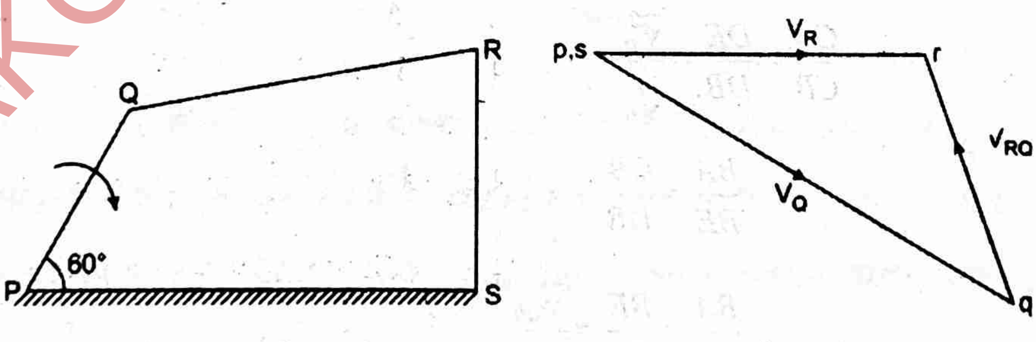
हल— दिया है— $N_{BA} = 120\,\text{rpm}$, अत:

$$\omega_{BA} = 2\pi \times \frac{120}{60} = \mathbf{12.568\ rad / sec}$$

क्योंकि क्रैंक AB की लम्बाई $= 40\,\text{mm} = 0.04\,\text{m}$ है, तब A के सापेक्ष B का वेग या B की गति (क्योंकि A एक स्थिर बिन्दु हैं)

$$\therefore \quad v_{BA} = v_B = \omega_{BA} \times AB$$

$$= 12.568 \times 0.04 = 0.503\ \text{m / sec}$$



(a) स्पेस आरेख (b) वेग आरेख

चित्र 2.15

AKC TECHNICAL CLASSES

सर्वप्रथम एक उचित पैमाना मानकर चित्र 2.15 (a) के अनुसार स्पेस आरेख तैयार करते हैं। तत्पश्चात् वेग आरेख चित्र 2.15 (b) के अनुसार तैयार करते हैं।

(i) क्योंकि कड़ी AD बद्ध है अतः बिन्दु a तथा b को वेग आरेख में एक बिन्दु माना जा सकता है। अब हम AB के लम्बवत् एक वेक्टर ab एक उचित पैमाना मानकर खींचते हैं। यह वेक्टर A के सापेक्ष बिन्दु B की गति अर्थात् (v_{BA} or v_B) दर्शाता है।

अतः वेक्टर $$ab = v_{BA} = v_B = 0.503 \text{ m / sec}$$

(ii) अब CB के लम्बवत् वेक्टर CB खींचते हैं जो बिन्दु C की B के सापेक्ष गति को दर्शाता है। (अर्थात् v_{CB}) तथा d बिन्दु से CD के लम्बवत् वेक्टर खींचते हैं जो बिन्दु C की D के सापेक्ष गति को दर्शाता है। वेक्टर bc तथा dc बिन्दु C पर एक दूसरे को काटते हैं। मापने पर

$$v_{CD} = v_C = \text{वेक्टर } dc = 0.385 \text{ m / sec}$$

हम जानते हैं कि $$CD = 80 \text{ mm} = 0.080 \text{ m}$$

अतः कड़ी CD का कोणीय वेग,

$$\omega_{CD} = \frac{v_{CD}}{DC} = \frac{0.385}{0.08}$$

$$= \mathbf{4.8 \text{ rad / sec}} \text{ दक्षिणावर्त}$$ उत्तर

उदाहरण 2.5—एक भाप इंजन के क्रैंक की लम्बाई 0.5m तथा संयोजक दंड की लम्बाई 2m है। क्रैंक दक्षिणावर्त (clockwise) 180 rpm से घूमती है। जब यह अन्तः मृत केन्द्र स्थिति (Innerdead Centre Position) से 45° के कोण पर होती है तब ज्ञात कीजिये-(i) पिस्टन का वेग (ii) संयोजक दंड का कोणीय वेग (iii) गजन पिन से 1.5m की दूरी पर संयोजक दण्ड पर स्थित बिन्दु *E* का वेग (iv) संयोजक दंड पर स्थित किसी बिन्दु '*G*' की स्थिति तथा रेखीय वेग, जबकि बिन्दु '*G*' का क्रैंक शाफ्ट के सापेक्ष वेग न्यूनतम हो।

हल—दिया है—क्रैंक के चक्कर $N_{BO} = 180 \text{ rpm}$

या $$\omega_{BO} = 2\pi \times \frac{180}{60} = 18.852 \text{ rad / sec}$$

क्योंकि क्रैंक की लम्बाई $OB = 0.5\text{m}$ है अतः O (स्थिर बिन्दु) के सापेक्ष B का रेखीय वेग,

$$v_{BO} = v_b = \omega_{BO} \times OB = 18.852 \times 0.5 = 9.426 \text{ m / sec}$$

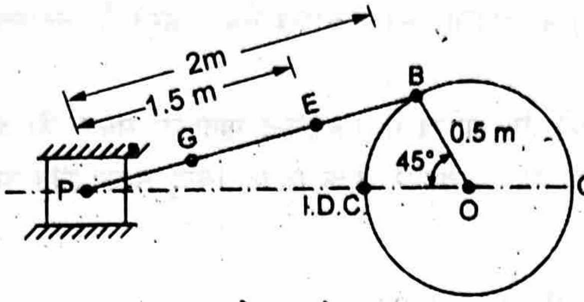
(i) पिस्टन का वेग— सर्वप्रथम एक उचित पैमाना मानकर चित्र 2.16 (a) के अनुसार स्पेस आरेख तैयार करते हैं। तत्पश्चात् वेग आरेख चित्र 2.16 (b) के अनुसार तैयार करते हैं।

1. सर्वप्रथम O के सापेक्ष B के वेग को प्रदर्शित करने के लिए BO के लम्बवत् एक वेक्टर ob, एक उचित पैमाना मानकर चित्र 2.16 (b) के अनुसार खींचते हैं। यहाँ वेक्टर $ob = v_{BO} = v_B = 9.426 \text{ m / sec}$.

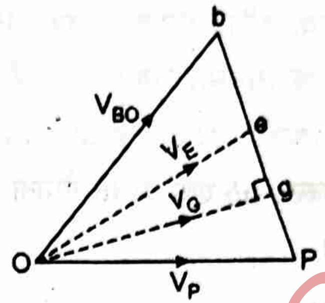
2. B के सापेक्ष P के वेग (v_{PB}) को प्रदर्शित करने के लिए बिन्दु b से BP के लम्बवत् एक वेक्टर bp तथा बिन्दु O से एक वेक्टर op, जो PO के समान्तर होगा तथा O के सापेक्ष P के वेग (v_P) को प्रदर्शित करेगा, खींचते हैं। दोनों सदिश bp तथा OP बिन्दु P पर मिलते हैं। मापने पर,

$$\text{पिस्टन } P \text{ का वेग } v_P = \text{वेक्टर } op = \mathbf{8.15 \text{ m/sec}}$$ उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES



(a) स्पेस आरेख



(b) वेग आरेख

चित्र 2.16

(ii) संयोजक दंड का कोणीय वेग— वेग आरेख चित्र 2.16 (b) से B के सापेक्ष D का वेग v_{PB} = वेक्टर $bp = 6.8 \text{ m/sec}$

क्योंकि संयोजक दंड PB की लम्बाई 2 m है अत: संयोजक दण्ड का कोणीय वेग

$$\omega_{Pb} = \frac{v_{PB}}{PB} = \frac{6.8}{2}$$

$= \mathbf{3.4 \text{ rad/sec}}$ **(वामावर्त)** उत्तर

(iii) संयोजक दंड पर बिन्दु E का वेग— बिन्दु E का वेग ज्ञात करने के लिए वेक्टर bp को बिन्दु e पर उसी अनुपात में काटते हैं जिस अनुपात पर बिन्दु E, संयोजक दण्ड PB पर चित्र 2.16 (a) में काटता है। oe को मिलाया। वेक्टर oe, बिन्दु E का वेग को प्रदर्शित करेगा। मापने पर,

E का वेग v_E = वेक्टर $oe = \mathbf{8.5 \text{ m/sec}}$ उत्तर

(iv) संयोजक दंड पर बिन्दु 'G' की स्थिति तथा रेखीय वेग— संयोजक दण्ड पर बिन्दु G की स्थिति, जहाँ क्रैंक शाफ्ट के सापेक्ष वेग न्यूनतम होगा, को बिन्दु O से वेक्टर bp पर लम्ब डालकर प्राप्त किया जा सकता है क्योंकि og की लम्बाई न्यूनतम होगी। अतः बिन्दु g ही संयोजक दंड पर G की वांछित स्थिति को प्रदर्शित करता है। मापने पर,

वेक्टर $bg = 5 \text{ m/sec}$

संयोजग दण्ड पर G की स्थिति को निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है—

$$bg / bp = BG / BP$$

या
$$BG = \frac{bg}{bp} \times BP = \frac{5}{6.8} \times 2$$

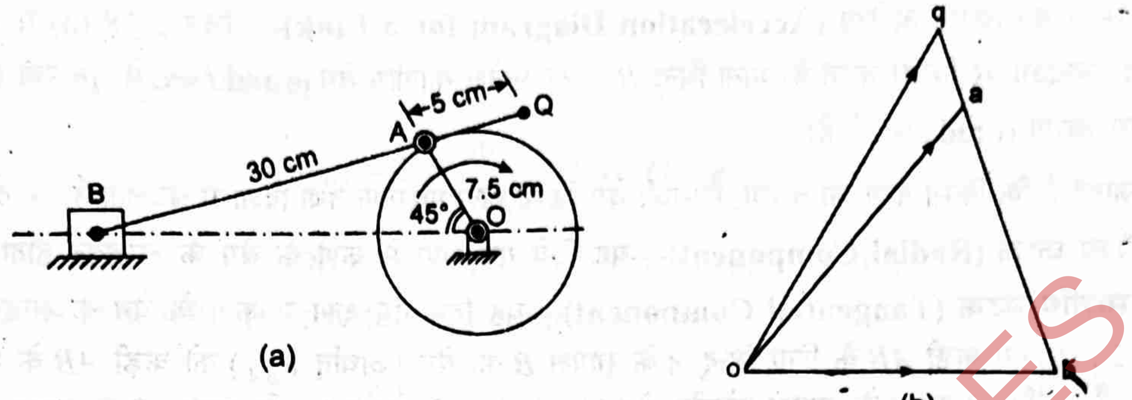
$= \mathbf{1.47 \text{ m}}$ उत्तर

मापने पर, G का रेखीय वेग

v_G = वेक्टर $og = \mathbf{8 \text{ m/sec}}$ उत्तर

उदाहरण 2.6—चित्र 2.17 में प्रदर्शित एक सरक-क्रैंक यंत्रावली में क्रैंक OA, 60 rpm की एक समान गति से दक्षिणावर्त घूम रही है। स्लाइडर 'B' की रेखीय गति ज्ञात कीजिये। इसके अतिरिक्त संयोजक दंड BA को आगे बढ़ाने पर 5 cm की दूरी पर स्थित बिन्दु Q का रेखीय वेग भी ज्ञात कीजिये।

AKC TECHNICAL CLASSES



चित्र 2.17

हल—दिया है— $N_{OA} = 60\,\text{rpm}$

अत: क्रैंक OA कोणीय वेग $\omega = \dfrac{2pN}{60} = \dfrac{2\pi \times 60}{60}$

$= 6.28\,\text{rad/sec}$

अत: बिन्दु A का O के सापेक्ष कोणीय वेग v_{AO} अथवा v_A (क्योंकि O स्थिर है)

$= \omega . OA = 6.28 \times 7.5 = 47.2\,\text{cm/sec.}$

वेग बहुभुज बनाने के लिए पैमाना $1\,\text{cm} = 10\,\text{cm/sec}$ मानकर चित्र 2.17 (b) के अनुसार वेग बहुभुज बनाते हैं। इसके लिए बिन्दु O (स्थिर बिन्दु) से OA के लम्बवत् एक रेखा oa खींचते हैं जो v_A को प्रदर्शित करती है तथा जिसकी लम्बाई $4.72\,\text{cm}, 47.2\,\text{cm/sec}$ के वेग को प्रदर्शित करता है।

बिन्दु B का A के सापेक्ष वेग v_{BA} ज्ञात करने के लिए बिन्दु 'a' से AB के लम्बवत् रेखा ab खींचते हैं जो स्लाइडर की क्रिया रेखा के अनुदिश बिन्दु 'o' से क्षैतिज रेखा खींचने पर b पर काटती है। इस प्रकार स्लाइडर क्रैंक के लिए oab वेग बहुभुज प्राप्त होता है। रेखा BA को आगे बढ़ने पर बिन्दु Q प्राप्त करते हैं। अब वेग बहुभुज में बिन्दु q इस प्रकार प्राप्त करते हैं कि

$$\frac{BQ}{BA} = \frac{bq}{ba} = \frac{v_{QB}}{v_{AB}}$$

अब बिन्दु O को q से मिलाया। इस प्रकार वेक्टर oq, बिन्दु परिमाण तथा दिशा में बिन्दु Q के परम वेग को दर्शाता है। मापने पर, $oq = 5.05\,\text{cm}$ इसलिए

$v_Q = 5.05 \times 10 = 50.5\,\text{cm/sec}$

वेक्टर ob, वेग बहुभुज में स्लाइडर B के परम वेग को प्रदर्शित करता है। मापने पर, $ob = 3.9$ cm

अत: $v_Q = 3.9 \times 10 = \mathbf{39\ cm/sec}$ **उत्तर**

§ 2.11 यन्त्र विन्यासों में त्वरण (Acceleration in Mechanisms)

पूर्व अनुच्छेदों में हमने यंत्र विन्यासों में कड़ियों का वेग ज्ञात करने की विधियों का अध्ययन किया। यहाँ हम कड़ियों में विभिन्न बिन्दुओं का त्वरण ज्ञात करने की विधि का अध्ययन करेंगे।

AKC TECHNICAL CLASSES

एक कड़ी का त्वरण आरेख (Acceleration Diagram for a Link)— चित्र 2.18 (a) में प्रदर्शित एक दृढ़ कड़ी के दो बिन्दुओं पर विचार करते हैं। माना बिन्दु B, A के सापेक्ष कोणीय वेग ω rad / sec से घूम रहा है तथा कड़ी AB का कोणीय त्वरण α rad / sec^2 है।

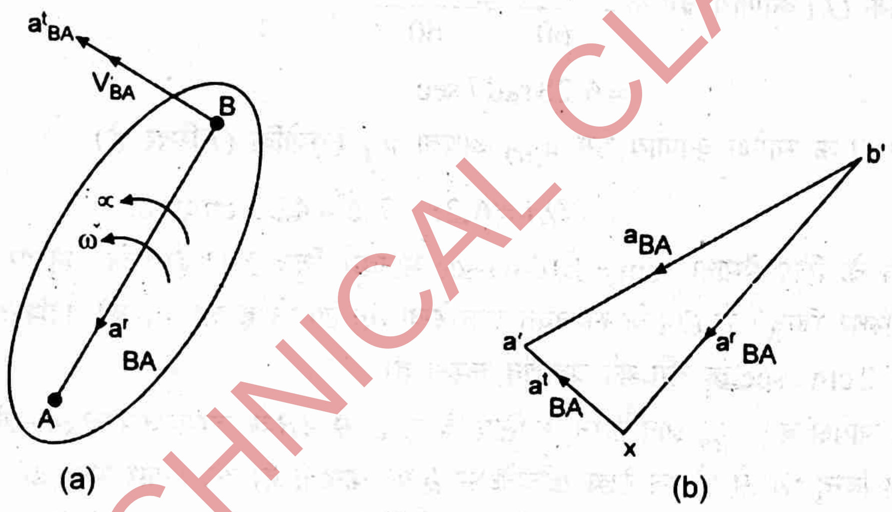
हम जानते हैं कि किसी कण का त्वरण, जिसका वेग किसी क्षण परिमाण तथा दिशा में बदलता है, के दो घटक होते हैं।

(i) त्रैज्य घटक (Radial Component)—यह दिये गये क्षण में कण के वेग के लम्बवत् होता है।

(ii) स्पर्शीय घटक (Tangential Component)—यह दिये गये क्षण में कण के वेग के समान्तर होता है।

चित्र 2.18(a) में कड़ी AB के लिए बिन्दु A के सापेक्ष B का वेग (अर्थात् v_{BA}) को कड़ी AB के लम्बवत् प्रदर्शित किया गया है क्योंकि B का A के सापेक्ष कोणीय वेग ωrad / sec है, इसलिए A के सापेक्ष B के त्वरण का त्रैज्य घटक (Radial Component) निम्न होगा—

$$a^r_{BA} = \omega^2 \times \text{कड़ी } AB \text{ की लम्बाई} = \omega^2 \times AB = \frac{v^2_{BA}}{AB}$$



चित्र 2.18

यह घटक वेग v_{BA} के लम्बवत् या कड़ी AB के समानान्तर होगा। इसी प्रकार बिन्दु A के सापेक्ष B के त्वरण का स्पर्शीय घटक (Tangential Component) निम्न होगा—

$$a^t_{BA} = \alpha \times \text{कड़ी की लम्बाई} = \alpha \times AB$$

यह घटक वेग v_{BA} के समानान्तर या कड़ी AB के लम्बवत् कार्य करेगा। त्वरण आरेख प्राप्त करने के लिए चित्र 2.18 (b) के अनुसार कोई बिन्दु b' मानते हैं तथा b' से BA के समानान्तर वेक्टर $b'x$ खींचते हैं जो त्वरण के त्रैज्य घटक $a^r.BA$ को प्रदर्शित करेगा। अब x से AB के लम्बवत् एक वेक्टर xa' खींचते हैं जो त्वरण के स्पर्शीय घटक $a^t.BA$ को प्रदर्शित करता है। $b'a'$ को मिलाया। वेक्टर $b'a'$, A के सापेक्ष B के कुल त्वरण को प्रदर्शित करता है तथा त्वरण के त्रैज्य तथा स्पर्शीय घटकों का सदिश योग होता है।

उदाहरण 2.7— एक सरक क्रैंक यंत्रावली की क्रैंक 300 rpm की एक समान चाल से दक्षिणावर्त (Clockwise) घूम रहा है। क्रैंक की लम्बाई 150 mm तथा संयोजक दण्ड की लम्बाई 600 mm है। ज्ञत कीजिये- (i) संयोजक दण्ड के मध्य बिन्दु का वेग तथा त्वरण, तथा (ii) संयोजक दण्ड का कोणीय वेग तथा त्वरण, जब क्रैंक अंत मृत केन्द्र (IDC) की स्थिति से 45° पर है।

AKC TECHNICAL CLASSES

हल—दिया है— $N_{BO} = 300\,\text{rpm}$

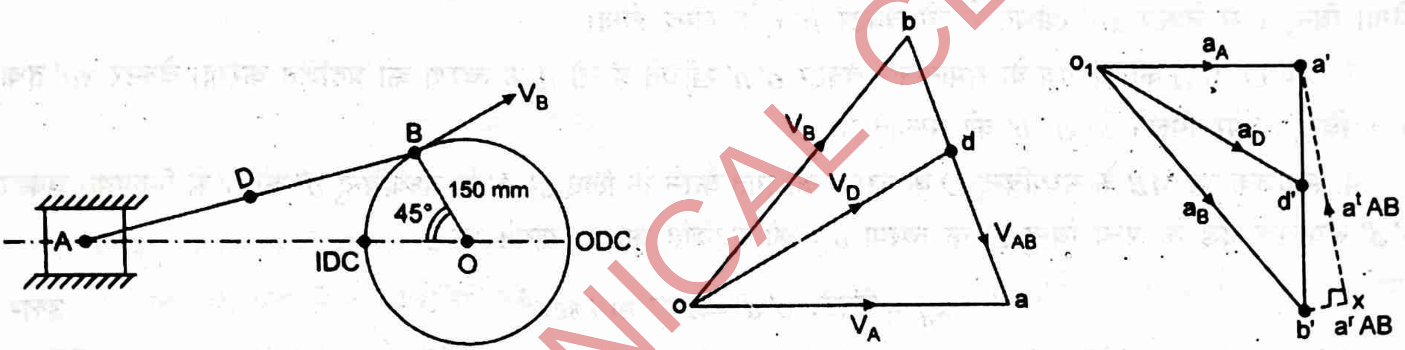
या
$$\omega_{BO} = 2\pi \times \frac{300}{60} = 31.42\,\text{rad/sec}$$

$$OB = 150\,\text{mm} = 0.15\,\text{m},\ BA = 600\,\text{mm} = 0.6\,\text{m}.$$

हम जानते हैं कि O के सापेक्ष B का रेखीय वेग अर्थात् v_{BO},

$$v_{BO} = v_B = \omega_{BO} \times OB \qquad \because (BO \text{ के लम्बवत्})$$
$$= 31.42 \times 0.15$$
$$= 4.713\ \text{m/sec.}$$

1. संयोजक दण्ड के मध्य बिन्दु का रेखीय वेग— सर्वप्रथम एक उचित पैमाना मानकर चित्र 2.19 (a) के अनुसार स्पेस आरेख तैयार करते हैं। तत्पश्चात् वेग आरेख चित्र 2.19 (b) को निम्न प्रकार तैयार करते हैं—



(a) स्पेस आरेख (b) वेग आरेख (c) त्वरण आरेख

चित्र 2.19

(a) सर्वप्रथम BO के लम्बवत् वेक्टर ob खींचते हैं जो O के सापेक्ष B का वेग को प्रदर्शित करेगा।

अर्थात् v_{BO} या v_B = वेक्टर $ob = 4.713\,\text{m/sec}$

(b) बिन्दु b से BA के लम्बवत् वेक्टर ba खींचते हैं जो B के सापेक्ष A के वेग अर्थात् v_{AB} को प्रदर्शित करेगा। अब बिन्दु O से AO के अनुदिश एक क्षैतिज रेखा खींचते हैं जो A के वेग अर्थात् v_A को प्रदर्शित करेगा। वेक्टर ba तथा oa बिन्दु a पर मिलते हैं।

मापने पर, v_{AB} = वेक्टर $ba = 3.4\,\text{m/sec}$

तथा A का वेग, v_A = वेक्टर oa = **4 m / sec** **उत्तर**

(c) संयोजक दण्ड AB के मध्यबिन्दु D का वेग ज्ञात करने के लिए वेक्टर ba के मध्यबिन्दु d को o से मिलाते हैं। वेक्टर od ही मध्यबिन्दु D के वेग को प्रदर्शित करेगा।

मापने पर, v_D = वेक्टर od = **4.1 m / sec** **उत्तर**

संयोजक दण्ड के मध्य बिन्दु का त्वरण—हम जानते हैं कि O के सापेक्ष B के त्वरण का त्रैज्य घटक

$$a^r_{BO} = a_B = \frac{v^2_{BO}}{OB} = \frac{(4.713)^3}{0.15} = 148.1\,\text{m/sec}^2$$

AKC TECHNICAL CLASSES

B के सापेक्ष A त्वरण का त्रैज्य घटक

$$a^r_{AB} = \frac{v^2_{AB}}{BA} = \frac{(3.4)^2}{0.6} = 19.3 \text{ m/sec}^2$$

अब चित्र 2.19 (c) में प्रदर्शित त्वरण आरेख को अग्र प्रकार तैयार करते हैं—

1. एक उचित पैमाना मानकर BO के समानान्तर वेक्टर $o'b'$ खींचते हैं। यह O के सापेक्ष B के त्वरण के त्रैज्य घटक को प्रदर्शित करेगा अर्थात् वेक्टर $o'b' = a^r_{BO} = a_B = \mathbf{148.1 \text{ m/sec}^2}$ **उत्तर**

क्योंकि क्रैंक OB एक नियत गति से घूमती है अतः O के सापेक्ष B के त्वरण का कोई स्पर्शीय घटक नहीं होगा।

2. B के सापेक्ष A के त्वरण के दो घटक होंगे—

(a) त्रैज्य घटक अर्थात् a^r_{AB} तथा, (b) स्पर्शीय घटक अर्थात् a^t_{AB} । ये दोनों घटक परस्पर लम्ब होंगे।

अतः बिन्दु b' से AB के समानान्तर वेक्टर $b'x$ खींचते हैं जो a^r_{AD} को प्रदर्शित करेगा तथा 193 m/sec² के बराबर होगा। बिन्दु x से वेक्टर xa' खींचते हैं जो वेक्टर $b'x$ के लम्ब होगा।

3. अब O' से A की गतिपथ के समानान्तर वेक्टर $o'a'$ खींचते हैं जो A के त्वरण को प्रदर्शित करेगा। वेक्टर xa' तथा $o'a'$ बिन्दु a' पर मिलते हैं। a' b' को मिलाते हैं।

4. संयोजक दंड AB के मध्यबिन्दु D के त्वरण को ज्ञात करने के लिए a' b' के मध्यबिन्दु d' को o' से मिलाया। वेक्टर $o'd'$ संयोजक दंड के मध्य बिन्दु D के त्वरण a_d को प्रदर्शित करेगा। मापने पर

$$a_d = \text{वेक्टर } o'd' = \mathbf{117 \text{ m/sec}^2}$$ **उत्तर**

संयोजक दंड का कोणीय वेग— हम जानते हैं कि संयोजक दंड का कोणीय वेग (Angular Velocity)

$$\omega_{AB} = \frac{v_{AB}}{BA} = \frac{3.4}{0.6} = \mathbf{5.67 \text{ rad/sec}} \text{ (वामावर्त)}$$ **उत्तर**

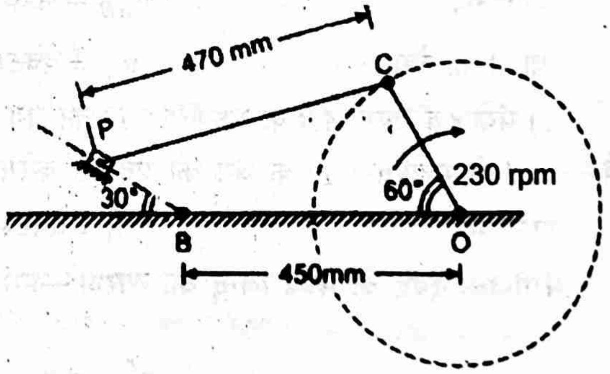
संयोजक दंड का कोणीय त्वरण— चित्र 2.19 (c) में प्रदर्शित त्वरण आरेख से,

$$a^t_{AB} = 103 \text{ m/sec}^2 \text{ (मापन द्वारा)}$$

संयोजक दंड का कोणीय त्वरण, $$\alpha_{AB} = \frac{a^t_{AB}}{BA} = \frac{103}{0.6} = \mathbf{176.67 \text{ rad/sec}^2} \text{ (दक्षिणावर्त)}$$ **उत्तर**

उदाहरण 2.8— चित्र 2.20 (a) में प्रदर्शित एक सरक क्रैंक यंत्रावली (Slider Crank Mechanism) में ब्लॉक P, स्थिर रेखा OB के सापेक्ष पश्चाग्र गति करता है तथा क्रैंक 230 rpm की एक समान गति से घूम रही है। क्रैंक की लम्बाई 150mm है। ब्लॉक P का वेग तथा त्वरण ज्ञात कीजिये।

हल—यंत्रावली का स्पेस आरेख चित्र 2.20 (a) में प्रदर्शित है।



(a) स्पेस आरेख

चित्र 2.20

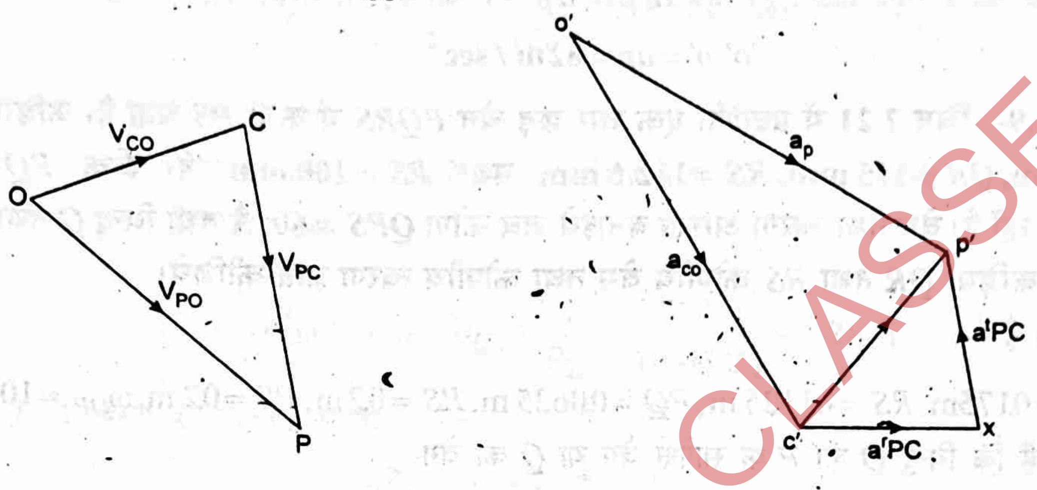
दिया है—

AKC TECHNICAL CLASSES

क्रैंक OC की लम्बाई $= 15 \text{cm} = 0.15 \text{m}$, $PC = 47 \text{cm}, OB = 45 \text{cm}$ तथा $N_{CO} = 230 \text{rpm}$

अत: क्रैंक CO का कोणीय वेग $\omega_{CO} = \dfrac{230 \times 2\pi}{60} = 24.1 \text{ rad / sec}$

तथा $$v_{CO} = \omega_{CO} \times CO = 24.1 \times 0.15 = \mathbf{3.6 \text{ m / sec}}$$



(b) वेग आरेख (c) त्वरण आरेख

चित्र 2.20

चित्र 2.20 (b) में प्रदर्शित वेग आरेख को निम्न प्रकार तैयार करेंगे—

1. सर्वप्रथम एक बिन्दु O मानेंगे तथा O से क्रैंक OC के लम्बवत् वेक्टर oc एक उचित पैमाना मानकर खींचते हैं। वेक्टर oc, O के सापेक्ष C के वेग $v_{CO} = 3.6 \text{m / sec}$ को प्रदर्शित करेगा।

2. बिन्दु C के सापेक्ष बिन्दु P के वेग v_{PC} को ज्ञात करने के लिए बिन्दु C से एक वेक्टर cp, संयोजक दंड PC के लम्बवत् खींचते हैं। यहाँ अभी वेक्टर cp का परिमाण अज्ञात है।

3. स्लाइडर P का वेग, उसकी गति की दिशा के अनुदिश प्राप्त होगा। अत: बिन्दु O से वेक्टर op खींचते हैं जो v_{PO} को प्रदर्शित करेगा तथा वेक्टर CP को बिन्दु P पर काटेगा। इस प्रकार $op = v_{Po} = v_P$ मापने पर

$$v_p = \mathbf{4.2 \text{ m / sec}}$$ उत्तर

चित्र 2.20(c) में प्रदर्शित त्वरण आरेख को निम्न प्रकार तैयार करेंगे—

1. O के सापेक्ष C के त्वरण को ज्ञात करने के लिए CO के सामानान्तर वेक्टर $o'c'$ खींचते हैं। इसका परिमाण निम्न प्रकार ज्ञात किया जायेगा।

$$o'c' = a_{CO} = \frac{v_{CO}^2}{OC} = \frac{(3.6)^2}{0.15} = 86.4 \text{ m / sec}^2$$

यहाँ त्वरण का कोई स्पर्शीय घटक नहीं होगा।

2. C के सापेक्ष P का त्रैज्यिक त्वरण $a_{PC}^r = \dfrac{v_{PC}^2}{PC}$, PC के समानान्तर खींचा जायेगा। इसके लिए C' से एक वेक्टर $c'x$, जो a_{PC}^r को प्रदर्शित करेगा तथा जिसका परिमाण वेग आरेख से v_{PC} ज्ञात करके उपरोक्त सम्बन्ध द्वारा प्राप्त किया जा सकता है, खींचते हैं,

AKC TECHNICAL CLASSES

स्पर्शीय त्वरण a_{PC}^t का परिमाण अज्ञात है परन्तु यह $c'x$ के लम्बवत् होगा। बिन्दु x से एक वेक्टर xp' खींचते हैं जो a_{PC}^t को प्रदर्शित करेगा।

3. स्लाइडर P का त्वरण गति की दिशा के अनुदिश होगा। बिन्दु O' से एक वेक्टर $o'\,p'$ स्लाइडर के पथ के समानान्तर खींचते हैं जो xp' को P' पर काटता है। अब $o'\,p' = a_P = P$ का त्वरण। मापने पर,

$$o'\,p' = ap = \mathbf{82\,m/sec^2}$$ **उत्तर**

उदाहरण 2.9—चित्र 2.21 में प्रदर्शित एक चार छड़ चेन $PQRS$ में कड़ी PS बद्ध है। कड़ियों की लम्बाईयाँ $PQ = 62.5$ mm, $QR = 175$ mm, $RS = 112.5$ mm तथा $PS = 200$ mm है। क्रैंक $PQ = 10$ rad / sec दक्षिणावर्त घूम रहीं है। वेग तथा त्वरण आरेख बनाइये जब कोण $QPS = 60°$ है तथा बिन्दु Q तथा R, PS के एक तरफ स्थित है। कड़ियों QR तथा RS कोणीय वेग तथा कोणीय त्वरण ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है—

$$QR = 0.175\,\text{m}, RS = 0.1125\,\text{m}, PQ = 0.0625\,\text{m}, PS = 0.2\,\text{m}, PS = 0.2\,\text{m}, \omega_{OP} = 10\,\text{rad/sec.}$$

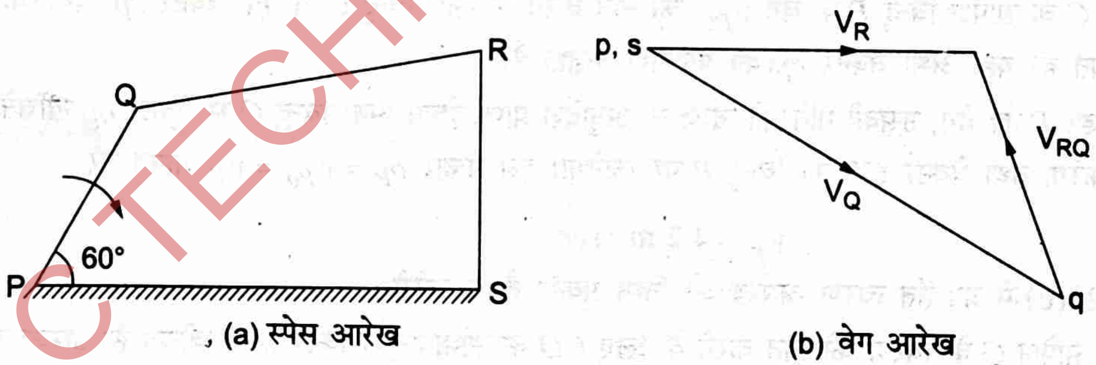
हम जानते हैं कि बिन्दु Q का P के सापेक्ष वेग या Q का वेग

$$v_{QP} = v_Q = \omega_{QP} \times PQ = 10 \times 0.0625$$

$$= \mathbf{0.625\,m/sec}$$ (PQ के लम्बवत्)

कड़ियों QR तथा RS का कोणीय वेग

सर्वप्रथम एक उचित पैमाना मानकर चित्र 2.21(a) की भाँति एक चार छड़ चेन का स्पेस आरेख बनाते हैं। अब चित्र 2.21 (b) में प्रदर्शित वेग आरेख को निम्न प्रकार तैयार करेंगे—



चित्र 2.21

1. क्योंकि P तथा S स्थिर बिन्दु हैं अत: वेग आरेख में ये एक बिन्दु से ही प्रदर्शित होंगे। अब PQ के लम्बवत् वेक्टर pq एक उचित पैमाना मानकर खींचते हैं जो P के सापेक्ष Q के वेग को दर्शायेगा अर्थात्

$$v_{QP} \text{ या } v_Q = \text{वेक्टर } pq = \mathbf{0.625\,m/sec}$$

2. बिन्दु q से QR के लम्बवत् वेक्टर qr खींचते हैं जो Q के सापेक्ष R के वेग (v_{RQ}) को प्रदर्शित करता है। अब बिन्दु S, से SR के लम्बवत् वेक्टर sr खींचते हैं जो S के सापेक्ष R के वेग (v_{RS}), को प्रदर्शित करेगा। वेक्टर qr तथा sr, बिन्दु r पर मिलेंगे। मापने पर,

$$v_{RQ} = \text{वेक्टर } qr = 0.333\,\text{m/sec}$$

तथा $v_{RS} = v_R =$ वेक्टर $sr = 0.426\,\text{m/sec}$

कड़ी QR का कोणीय वेग $\omega_{QR} = \dfrac{v_{RQ}}{QR} = \dfrac{0.333}{0.175} = \mathbf{1.9\ rad/sec}$ **(वामावर्त)** **उत्तर**

कड़ी RS का कोणीय वेग $\omega_{RS} = \dfrac{v_{RS}}{SR} = \dfrac{0.426}{0.1125} = \mathbf{3.78\ rad/sec}$ **(दक्षिणावर्त)** **उत्तर**

कड़ियों QR तथा RS का कोणीय त्वरण

क्योंकि क्रैंक PQ का कोणीय त्वरण दिया गया नहीं है अत: P के सापेक्ष Q के त्वरण का स्पर्शीय घटक नहीं होगा।

P के सापेक्ष Q के त्वरण त्रैज्यिक घटक

$$a^r_{QP} = a_{CP} = a_Q = \frac{v^2_{QP}}{PQ} = \frac{(0.625)^2}{(0.0625)} = 6.25\,\text{m/sec}^2$$

Q के सापेक्ष R के त्वरण का त्रैज्यिक घटक

$$a^r_{RQ} = \frac{v^2_{RQ}}{QR} = \frac{(0.333)^2}{0.175} = 0.634\,\text{m/sec}^2$$

S के सापेक्ष R के त्वरण का त्रैज्यिक घटक

$$a^r_{RS} = a_{RS} = a_R = \frac{v^2_{RS}}{SR} = \frac{(0.426)^2}{0.1125} = 1.613\,\text{m/sec}^2$$

चित्र 2.21(c) में प्रदर्शित त्वरण आरेख को निम्न प्रकार बनाया जायेगा—

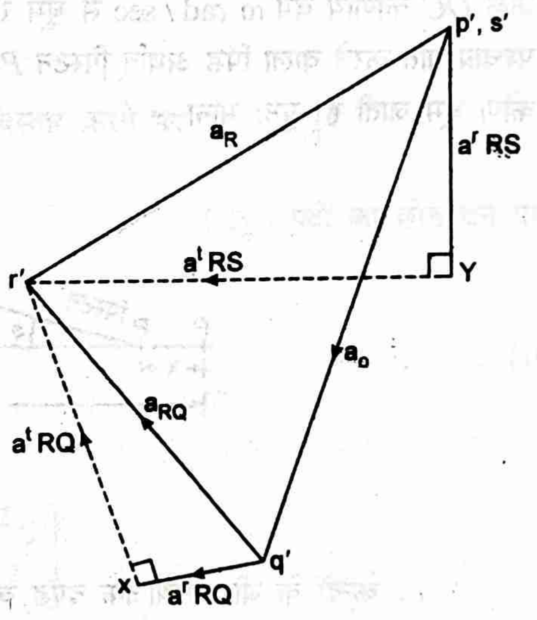
1. क्योंकि P तथा S स्थिर बिन्दु हैं अत: त्वरण आरेख में यह एक बिन्दु से ही प्रदर्शित होगा। एक उचित पैमाना मानकर PQ के समानान्तर वेक्टर $p'q'$ खींचते हैं जो P के सापेक्ष Q के त्वरण के त्रैज्यिक घटक को प्रदर्शित करेगा।

अर्थात् a^r_{QP} या $a_Q =$ वेक्टर $p'q' = 6.25\,\text{m/sec}^2$ है।

2. अब बिन्दु q' से QR के समानान्तर वेक्टर $q'x$ खींचते हैं जो Q के सापेक्ष R के त्वरण के त्रैज्यिक घटक अर्थात् a^r_{RQ} को दर्शायेगा। इस प्रकार वेक्टर

$$q'x = a^r_{PQ} = 0.634\,\text{m/sec}^2$$

3. अब बिन्दु x से QR के लम्बवत् वेक्टर xr' खींचते हैं जो Q के सापेक्ष R के त्वरण के त्रैज्यिक घटक a^t_{RQ} को प्रदर्शित करते हैं। इसका परिमाण अज्ञात है।



(c) त्वरण आरेख

चित्र 2.21

AKC TECHNICAL CLASSES

4. अब बिन्दु s' से SR के समानान्तर वेक्टर $s'y$ खींचते हैं जो S के सापेक्ष R के त्वरण के त्रैज्यिक घटक अर्थात् a_{RS}^r को प्रदर्शित करेगा। इस प्रकार वेक्टर $s'y = a_{RS}^r = 1.613\,\text{m/sec}^2$।

5. अब बिन्दु y से, SR के लम्बवत् वेक्टर yr' खींचते हैं जो S के सापेक्ष R के त्वरण के स्पर्शीय घटक a_{RS}^t को प्रदर्शित करेगा।

6. वेक्टर xr' तथा yr' बिन्दु r' पर काटते हैं। बिन्दु $p'r'$ तथा $q'r'$ को मिलाया। मापने पर,

$$a_{RQ}^t = \text{वेक्टर } xr' = 4.1\,\text{m/sec}^2$$

और

$$a_{RS}^t = \text{वेक्टर } yr' = 5.3\,\text{m/sec}^2$$

अतः कड़ी QR का कोणीय त्वरण,

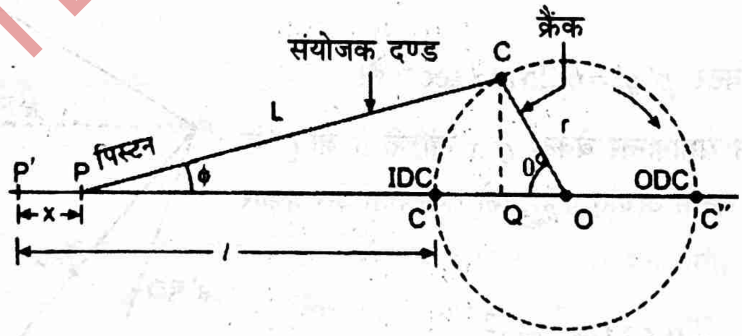
$$\alpha_{QR} = \frac{a_{RQ}^t}{QR} = \frac{4.1}{0.175} = \mathbf{23.43\ rad/sec^2}\ \textbf{(वामावर्त)}$$ **उत्तर**

कड़ी RS का कोणीय त्वरण,

$$\alpha_{RS} = \frac{a_{RS}^t}{RS} = \frac{5.3}{0.1125} = \mathbf{47.1\ rad/sec^2}\ \textbf{(वामावर्त)}$$ **उत्तर**

§ 2.12 पिस्टन का वेग तथा त्वरण ज्ञात करने की सन्निकट आंकिक विधि (Approximate Analytical Method for Velocity and Acceleration of the Piston)

हम यहाँ चित्र 2.22 में प्रदर्शित एक पश्चाग्र भाप इन्जन की क्रैंक तथा संयोजक दण्ड की गति पर विचार करते हैं। माना क्रैंक OC कोणीय वेग ω rad/sec से घूम रही है तथा किसी क्षण अंत: मृत केन्द्र (IDC) से θ के कोण पर है। माना पश्चाग्र गति करने वाला पिंड अर्थात् पिस्टन P अपनी IDC स्थिति से t समय में x विस्थापित होता है। इसी दौरान क्रैंक θ कोण घूम जाती है। पुन: माना—



चित्र 2.22

l = केन्द्रों के बीच संयोजक दण्ड की लम्बाई,

r = क्रैंक वृत की त्रिज्या अथवा क्रैंक की लम्बाई,

ϕ = स्ट्रोक रेखा PO से संयोजक दण्ड का झुकाव, तथा

AKC TECHNICAL CLASSES

$n =$ संयोजक दण्ड की लम्बाई का क्रैंक त्रिज्या के साथ अनुपात $= \dfrac{l}{r}$

पिस्टन का वेग—चित्र 2.22 की ज्यामिति पर विचार करने पर,

$$x = P'P = OP' - OP = (P'C' + C'O) - (PQ + QO)$$

$$= (l + r) - (l\cos\phi + r.\cos\theta)$$

[∵ ज्यामिति से, $PQ = l\cos\phi$, तथा $QO = r\cos\theta$]

$$= r(1-\cos\theta) + l(1-\cos\phi)$$

$$= r\left[(1-\cos\theta) + \frac{l}{r}(1-\cos\phi)\right]$$

$$= r[(1-\cos\theta) + n(1-\cos\phi)] \qquad \text{...(i)}$$

त्रिभुज CPQ तथा CQO में,

$$CQ = l.\sin\phi = r.\sin\theta$$

तथा $$\frac{l}{r} = \frac{\sin\theta}{\sin\phi}$$

∴ $$n = \frac{\sin\theta}{\sin\phi} \text{ या } \sin\phi = \frac{\sin\theta}{n} \qquad \text{...(ii)}$$

पुन: $$\cos\phi = \sqrt{1-\sin^2\phi} = \left(\frac{1-\sin^2\theta}{n^2}\right)^{1/2}$$

उपरोक्त व्यंजक का द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem) द्वारा विस्तार करने पर

$$\cos\phi = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{\sin^2\theta}{n^2} + \ldots$$ (उच्च पदों को छोड़ देने पर)

या $$1 - \cos\phi = \frac{\sin^2\theta}{2n^2} \qquad \text{...(iii)}$$

इस प्रकार प्राप्त $(1-\cos\phi)$ का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$$x = r\left[(1-\cos\theta) + n \times \frac{\sin^2\theta}{2n^2}\right]$$

$$= r\left[(1-\cos\theta) + \frac{\sin^2\theta}{2n}\right] \qquad \text{... (iv)}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

सभी (iv) का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dx}{d\theta} = r\left[\sin\theta + \frac{1}{2n} \times 2\sin\theta.\cos\theta\right]$$

$$= r\left[\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2n}\right] \quad ...(v)$$

∴ O के सापेक्ष P का वेग v_{PO} = पिस्टन का वेग

$$v_P = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$$

$$v_{PO} = \frac{dx}{d\theta}.\omega \qquad (\because \omega = d\theta / dt)$$

समीकरण (v) से $dx / d\theta$ का मान रखने पर,

$$v_{PO} = \omega r\left[\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2n}\right] \quad ...(vi)$$

पिस्टन का त्वरण—हम जानते हैं कि **वेग परिवर्तन की दर को त्वरण कहते हैं** अतः पिस्टन P का त्वरण,

$$a_p = \frac{dv_p}{dt} = \frac{dv_p}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv_p}{d\theta} \times \omega$$

समीकरण (vi) का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dv_p}{d\theta} = \omega r\left[\cos\theta + \frac{\cos 2\theta \times 2}{2n}\right] = \omega r\left[\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{n}\right]$$

उपरोक्त समीकरण में $\frac{dv_p}{d\theta}$ का मान रखने पर,

$$a_p = \omega r\left[\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{n}\right] \times \omega$$

$$= \omega^2 . r\left[\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{n}\right] \quad ...(vii)$$

विशेष स्थितियाँ—1. जब क्रैंक अन्तः मृत केन्द्र (IDC) पर होगी तब $\theta = 0°$

$$\therefore \quad a_p = \omega^2 . r\left[\cos 0° + \frac{\cos 0°}{n}\right] = \omega^2 . r\left[1 + \frac{1}{n}\right]$$

2. जब क्रैंक बाह्य मृत केन्द्र (ODC) पर होगी तब $\theta = 180°$

$$\therefore \quad a_p = \omega^2 . r\left[\cos 180° + \frac{\cos 2 \times 180°}{n}\right] = \omega^2 . r\left[-1 + \frac{1}{n}\right]$$

AKC TECHNICAL CLASSES

ODC पर जब गति की दिशा पलटेगी तब उपरोक्त व्यंजक के चिन्ह बदल जायेंगे

$$a_p = \omega^2 . r\left[1 - \frac{1}{n}\right]$$

§ 2.13 संयोजक दंड का कोणीय वेग तथा त्वरण (Angular Velocity and Acceleration of the Connecting Rod)

चित्र 2.22 में प्रदर्शित एक संयोजक दण्ड तथा क्रैंक की गति पर विचार करने पर,

$$CQ = l\sin\phi = r\sin\theta$$

$$\therefore \quad \sin\phi = \frac{r}{l} \times \sin\theta = \frac{\sin\theta}{n}$$

समय t के सापेक्ष दोनों तरफ अवकलन (differentiation) करने पर,

$$\therefore \quad \cos\phi \times \frac{d\phi}{dt} = \frac{\cos\theta}{n} \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos\theta}{n} \times \omega$$

क्योंकि संयोजक दण्ड PC का कोणीय वेग, C के सापेक्ष बिन्दु P के कोणीय वेग के समान होगा तथा $d\phi / dt$ के बराबर होगा। अत: संयोजक दण्ड का कोणीय वेग

$$\omega_{PC} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\cos\theta}{n} \times \frac{\omega}{\cos\phi} = \frac{\omega}{n} . \frac{\cos\theta}{\cos\phi}$$

हम जानते हैं कि

$$\cos\phi = \sqrt{1 - \sin^2\phi} = \left[1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}\right]^{1/2} \qquad \left[\because \sin\phi = \frac{\sin\theta}{n}\right]$$

$$\therefore \quad \omega_{PC} = \frac{\omega}{n} \times \frac{\cos\theta}{\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}\right)^{1/2}} = \frac{\omega}{n} \times \frac{\cos\theta}{\frac{1}{n}(n^2 - \sin^2\theta)^{1/2}} = \frac{\omega\cos\theta}{(n^2 - \sin^2\theta)^{1/2}} \qquad \ldots(i)$$

संयोजक दण्ड PC का कोणीय त्वरण,

$$\alpha_{PC} = C \text{ के सापेक्ष } P \text{ का कोणीय त्वरण} = \frac{d(\omega_{PC})}{dt}$$

हम जानते हैं $\dfrac{d(\omega_{PC})}{dt} = \dfrac{d(\omega_{PC})}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d(\omega_{PC})}{d\theta} \times \omega$ ...(ii)

समीकरण (i) का अवकलन करने पर,

अत: $$\frac{d(\omega_{PC})}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{\omega\cos\theta}{(n^2 - \sin^2\theta)^{1/2}}\right]$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$$=\omega\left[\frac{[(n^2-\sin^2\theta)^{1/2}(-\sin\theta)]-[(\cos\theta)\times\frac{1}{2}(n^2-\sin^2\theta)^{-1/2}\times(-)2\sin\theta.\cos\theta]}{n^2-\sin^2\theta}\right]$$

$$=\omega\left[\frac{(n^2-\sin^2\theta)^{1/2}(-\sin\theta)+(n^2-\sin^2\theta)^{-1/2}\sin\theta\cos^2\theta}{n^2-\sin^2\theta}\right]$$

$$=-\omega\sin\theta\left[\frac{(n^2-\sin^2\theta)^{1/2}-(n^2-\sin^2\theta)^{-1/2}.\cos^2\theta}{n^2-\sin^2\theta}\right]$$

$$=-\omega\sin\theta\left[\frac{(n^2-\sin^2\theta)-\cos^2\theta}{(n^2-\sin^2\theta)^{3/2}}\right]$$ ...[$(n^2-\sin^2\theta)^{1/2}$ से ऊपर नीचे गुणा करने पर]

$$=\frac{-\omega\sin\theta}{(n^2-\sin^2\theta)^{3/2}}[n^2-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)]=\frac{-\omega\sin\theta(n^2-1)}{(n^2-\sin^2\theta)^{3/2}}$$

$$\therefore \quad \alpha_{PC}=\frac{d(\omega_{PC})}{d\theta}\times\omega=\frac{-\omega^2\sin\theta.(n^2-1)}{(n^2-\sin^2\theta)^{3/2}} \quad ...(iii)$$

(−) चिन्ह इस बात को दर्शाता है कि संयोजक दण्ड का त्वरण कोण ϕ को कम करने का प्रयास करेगा।

विशेष स्थितियाँ— 1. क्योंकि $\sin^2\theta$, n^2 की तुलना में बहुत कम होगा। अत: इसको नगण्य माना जा सकता है। इस समीकरण (i) तथा (iii) को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\omega_{PC}=\frac{\omega\cos\theta}{n} \quad \text{तथा} \quad \alpha_{PC}=\frac{-\omega^2\sin\theta(n^2-1)}{n^3}$$

2. समी॰ (iii) में n^2 की तुलना में एकांक भी बहुत कम होगा अत: इसको भी नगण्य माना जा सकता है

$$\alpha_{PC}=\frac{-\omega^2.\sin\theta}{n}$$

उदाहरण 2.10— एक भाप इंजन के क्रैंक तथा संयोजक दण्ड की लम्बाई क्रमश: 0.3 m तथा 1.5 m है। क्रैंक 180 rpm दक्षिणावर्त (clockwise) घूम रही है। पिस्टन का वेग तथा त्वरण ज्ञात कीजिये जब क्रैंक, अन्त: मृत केन्द्र स्थिति से 40° के कोण पर है। पिस्टन की शून्य त्वरण स्थिति के लिए क्रैंक की स्थिति ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है— $r=0.3, l=1.5$ m, $N=180$ rpm

अत:
$$\omega=\frac{\pi\times180}{60}=18.85 \text{ rad / sec}$$

$$\theta=40°$$

पिस्टन का वेग—हम जानते हैं

AKC TECHNICAL CLASSES

$$n = \frac{l}{r} = \frac{1.5}{0.3} = 5$$

∴ पिस्टन का वेग $$v_p = \omega.r\left[\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2n}\right] = 18.85 \times 0.3\left[\sin 40° + \frac{\sin 80°}{2\times 5}\right]$$

$$= \mathbf{4.19\ m/sec}$$ उत्तर

पिस्टन का त्वरण—हम जानते हैं कि पिस्टन का त्वरण $a_p = \omega^2.r\left[\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{n}\right]$

∴ $$a_p = (18.85)^2 \times 0.3\left[\cos 40° + \frac{\cos 80°}{5}\right]\text{m/sec}^2$$

$$= \mathbf{85.35\,m/sec^2}$$ उत्तर

पिस्टन के शून्य त्वरण के लिए क्रैंक की स्थिति— माना θ_1 = पिस्टन के शून्य त्वरण के लिए क्रैंक की अंत: मृत केन्द्र (IDC) से स्थिति

हम जानते हैं कि पिस्टन का त्वरण

$$a_p = \omega^2.r\left[\cos\theta_1 + \frac{\cos 2\theta_1}{n}\right]$$

∴ $$0 = \frac{\omega^2.r}{n}(n\cos\theta_1 + \cos 2\theta_1)$$

∴ $$n = \cos\theta_1 + \cos 2\theta_1 = 0$$

या $$5\cos\theta_1 + 2\cos^2\theta_1 - 1 = 0$$

या $$2\cos^2\theta_1 + 5\cos\theta_1 - 1 = 0$$

या $$\cos\theta_1 = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4\times 1\times 2}}{2\times 2}$$

(+ive) चिन्ह लेने पर, $$\cos\theta_1 = 0.1862$$

या $$\mathbf{\theta_1 = 79.27°\ \text{या}\ 280.73°}$$ उत्तर

उदाहरण 2.11—एक सरक-क्रैंक यंत्रावली में, क्रैंक तथा संयोजक दण्ड की लम्बाईयां क्रमश: 150 mm तथा 600 mm है। क्रैंक अन्त:मृत केन्द्र से 60° के कोण पर है तथा क्रैंक शाफ्ट 450 rpm दक्षिणावर्त घूम रही है। ज्ञात कीजिये–(i) स्लाइडर का वेग तथा त्वरण तथा (ii) संयोजक दण्ड का कोणीय वेग तथा कोणीय त्वरण।

हल— दिया है— $r = 150\,\text{mm} = 0.15\,\text{m},\ l = 600\,\text{mm} = 0.6\,\text{m},\ \theta = 60°,$

$$N = 400\,\text{rpm या}\ \omega = \frac{\pi\times 450}{60} = 47.13\,\text{rad/sec}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

1. स्लाइडर का वेग तथा त्वरण—

हम जानते हैं कि $$n = \frac{l}{r}$$

$$\therefore \quad n = \frac{0.6}{0.15} = 4$$

स्लाइडर का वेग $$v_p = \omega r\left[\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2n}\right]$$

$$= 47.13 \times 0.15\left[\sin 60° + \frac{\sin 120°}{2 \times 4}\right] \text{m/sec}$$

$$= \mathbf{6.9\ m/sec}$$ उत्तर

सलाइडर का त्वरण $$a_p = \omega^2 . r\left[\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{n}\right]$$

$$= (47.13)^2 \times 0.15\left[\cos 60° + \frac{\cos 120°}{4}\right] \text{m/sec}^2$$

$$= \mathbf{124.94\ m/sec^2}$$ उत्तर

2. संयोजक दण्ड का कोणीय वेग तथा कोणीय त्वरण— हम जानते हैं संयोजक दण्ड का कोणीय वेग,

$$\omega_{PC} = \frac{\omega \cos\theta}{n} = \frac{47.13 \times \cos 60°}{4}$$

$$= \mathbf{5.9\ rad/sec}$$ उत्तर

तथा कोणीय त्वरण, $$\alpha_{PC} = \frac{\omega^2 . \sin\theta}{n} = \frac{(47.13)^2 . \sin 60°}{4} = \mathbf{481\ rad/sec}$$ उत्तर

§ 2.14 विन्यासों का शुद्ध गति संश्लेषण (Kinematic Synthesis of Mechanisms)

शुद्ध गति विश्लेषण में हम दिये गये यंत्रविन्यास अथवा मशीन के विभिन्न अंगों की गति, वेग, त्वरण आदि को ज्ञात करते हैं जबकि शुद्ध गति संश्लेषण (Kinematic Synthesis) में हम एक ऐसे विन्यास का डिजाइन या रचना करते हैं जो दी गयी अर्थात् प्रदत्त गति (Input Motion) के लिए वांछित निर्गत गति (Output Motion) उत्पन्न कर सके। **शुद्ध गति संश्लेषण एक डिजाइन प्रक्रिया है जिसमें हम प्रदत्त तथा निर्गत गति के आधार पर विन्यास के विभिन्न अनुपातों को ज्ञात करते हैं। शुद्ध गति संश्लेषण में किसी विन्यास का डिजाइन करते समय किसी समस्या को तीन भागों में विभाजित किया जा सकता है—**

1. प्रकार संश्लेषण (Type Synthesis)—प्रकार संश्लेषण से तात्पर्य है कि किस प्रकार का विन्यास चुना जाता है जैसे गियर, पट्टा तथा पुली या फिर एक कैम विन्यास के इस प्रारम्भिक चरण में हम डिजाइन सम्बन्धी विचारों जैसे स्थान, सुरक्षा, पदार्थ का चुनाव, निर्माण प्रक्रिया (Manufacturing Process) तथा मितव्ययता (economy) आदि पर विचार करते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

2. संख्यात्मक संश्लेषण (Number Synthesis)— यह एक शुद्ध गति चेन के बाह्य गुणों पर आधारित होता है जिसमें किसी विशिष्ट गति के लिए वांछित कड़ियों की संख्या तथा जोड़ों का प्रकार चुना जाता है। इस अध्ययन में कड़ी की लम्बाई का प्रभाव, उनकी अक्षों की दिशा तथा स्थिति, वेग के तात्क्षणिक केन्द्रों की स्थिति, जोड़ों की जटिलता आदि को नगण्य मान लिया जाता है।

3. विमीय संश्लेषण (Dimensional Synthesis)— इसका उद्देश्य विशिष्ट कार्य को पूरा करने तथा दिये गये गति के लक्षणों को प्राप्त करने के लिए किसी विन्यास में कड़ियों की प्रारम्भिक स्थिति तथा कड़ियों की पर्याप्त विमाएँ ज्ञात करना है। इसके अन्तर्गत बैल क्रैंक लीवर के भुजाओं के मध्य कोण, कड़ियों की केन्द्र से केन्द्र तक दूरी तथा कैम प्रोफाइल आदि का अध्ययन किया जाता है।

किसी विन्यास का डिजाइन करते समय एक विन्यास की वांछित परिशुद्धता को हमेशा ध्यान में रखना चाहिए। कभी-कभी एक विन्यास का डिजाइन सम्भव होता है जो सैद्धान्तिक रूप से दी गयी गति कर सके। वांछित गति तथा वास्तविक गति के अन्तर को **संरचनात्मक त्रुटि** (Structural error) कहते हैं। इसके अतिरिक्त निर्माण करते समय भी कुछ त्रुटियाँ रह जाती हैं। किसी कड़ी की लम्बाई में दिये गये अवकाश (clearance) तथा वास्तविक अवकाश के अन्तर को **यांत्रिक त्रुटि** (Mechanical error) कहते हैं।

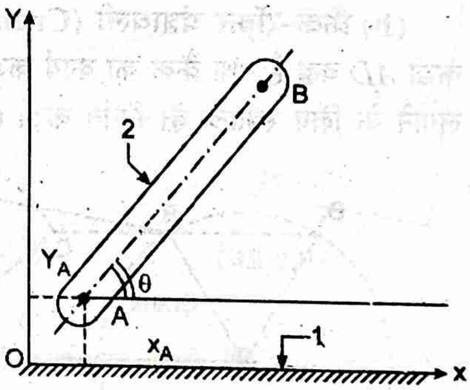
§ 2.15 स्वतन्त्रता की कोटियाँ (Degrees of Freedom)

"किसी समतल में यदि कोई कड़ी अपनी स्थिति के साथ *n* स्वतंत्र चर भी रखती है तो उस कड़ी की स्वतंत्रता की '*n*' कोटियाँ मानी जा सकती हैं।"

"A link is supposed to have n degrees of freedom if it has 'n' independent variables associated with its position in the plane."

एक स्थिर कड़ी के सापेक्ष किसी विन्यास में सभी कड़ियों की स्थितियों को विशिष्टता ज्ञात करने के लिए कई स्वतंत्र चरों की आवश्यकता होती है।

हम चित्र 2.23 में प्रदर्शित दो कड़ियों पर विचार करते हैं। कड़ी (1) बद्ध है। कड़ी (2) का एक सिरा A पर है जिसके निर्देशाँक (x_A, y_A) हैं। माना कड़ी 2 के बिन्दुओं A तथा B को मिलाने वाली रेखा, कड़ी (1) से θ के कोण पर है। इस प्रकार कड़ी 2 को तीन चरों (x_A, y_A, θ) द्वारा पूर्णत: विशिष्ट किया जा सकता है। दूसरों शब्दों में यह कहा जा सकता है **एक अनिरुद्ध दृढ़ कड़ी एक समतल में स्वतन्त्रता की तीन कोटियाँ रखती हैं।**



चित्र 2.23

यदि किसी संयोजन (assembly) में n कड़ियाँ हो तब उनके सिरों को जोड़ने से पहले स्वतन्त्रता की $3n$ कोटियाँ होगी। यदि एक निम्न युग्ल (lower pair) को एक विन्यास से जोड़ दिया जाये तो इसकी स्वतन्त्रता की दो कोटियाँ कम हो जाती हैं। हम n कड़ियों वाले एक विन्यास पर विचार करते हैं। यदि कड़ियों में से एक को बद्ध कर दिया जाये तो विन्यास में चल कड़ियों की संख्या $(n-1)$ होगी तथा किसी अन्य कड़ी से जोड़े जाने से पहले उसकी स्वतन्त्रता की $3(n-1)$ कोटियाँ होगी।

एक विन्यास की स्वतन्त्रता की कोटियाँ ज्ञात करने के लिए सम्बन्ध निम्न प्रकार लिखा जा सकता है—

$$F = 3(n-1) - 2p - h \quad \ldots(i)$$

जहाँ F = स्वतन्त्रता की कोटियाँ, n = कड़ियों की संख्या, p = निम्न युगलों की संख्या, h = उच्च युगलों की संख्या

AKG TECHNICAL CLASSES

यदि समीकरण (i) में उच्च युगलों की संख्या $h = 0$ तथा विन्यास निरुद्ध (constrained) हो अर्थात् $F = 1$ हो तब उपरोक्त समीकरण (i) को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है—

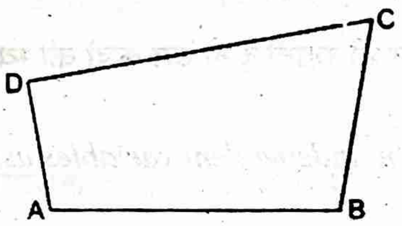
$$1 = 3(n-1) - 2p$$

$$\therefore \quad 2p - 3n + 4 = 0 \qquad \ldots(ii)$$

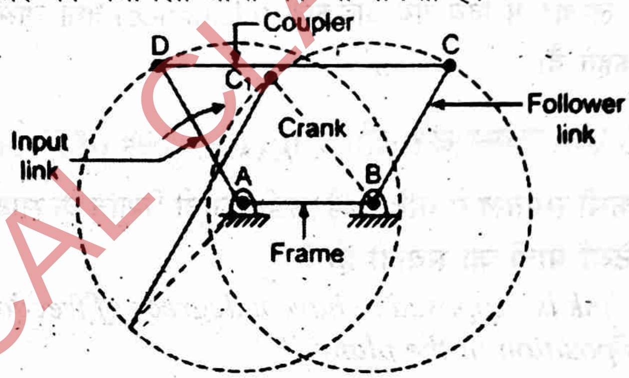
समीकरण (ii) को "**ग्रबलर समीकरण**" (Grubler's equation) भी कहते हैं।

§ 2.16 एक चार छड़ यंत्रावली की गतियाँ (Motions of a Four Bar Mechanism)

किसी यंत्रावली में कड़ियों तथा जोड़ों की संख्या की गणना करके ग्रबलर समीकरण द्वारा उसकी गतिशीलता को ज्ञात किया जा सकता है। किसी यंत्रावली की गतिशीलता का अर्थ स्वतन्त्रता की कोटियों की संख्या से है जो उसके विन्यास की विशिष्टयों को बताने के लिए आवश्यक स्वतन्त्र निर्देशाँकों की संख्या के बराबर होगी। यह विचार संख्यात्मक संश्लेषण (number synthesis) भी कहलाता है। चित्र 2.24 में प्रदर्शित एक चार छड़ यंत्रावली में उसकी चारों कड़ियों के अनुपातों के आधार पर तीन विभिन्न प्रकार की यंत्रावली प्राप्त की जा सकती है।



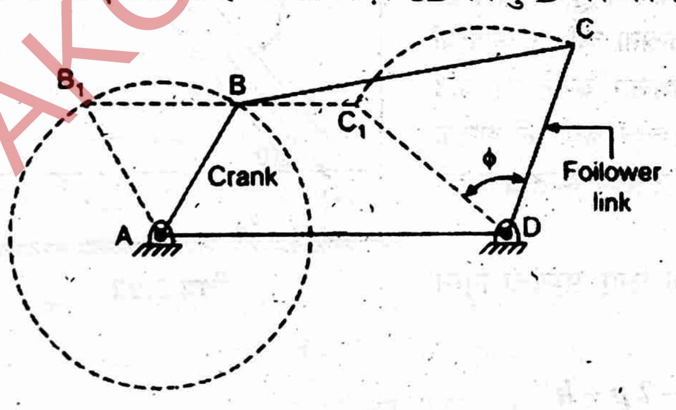
चित्र 2.24



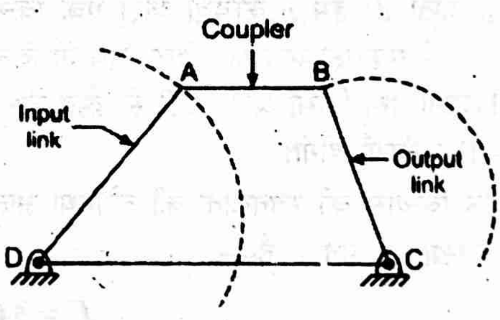
चित्र 2.25

(a) दोहरा क्रैंक यंत्रावली (Double crank mechanism)— चित्र 2.25 में एक दोहरा क्रैंक यंत्रावली प्रदर्शित है। इसमें BC अथवा AD किसी को इनपुट कड़ी बनाया जा सकता है। ये कड़ियाँ बिन्दु A तथा B पर पूर्ण चक्र लगा सकती हैं। कड़ी DC को युग्मक (coupler) कहते हैं। यह कड़ी AD तथा BC को बिन्दु D तथा C पर जोड़ती है। चित्र 2.25 में कड़ी AB को बद्ध किया गया है।

(b) क्रैंक-रॉकर यंत्रावली (Crank-rocker mechanism)— चित्र 2.26 में प्रदर्शित क्रैंक-रॉकर यंत्रावली में कड़ी AD बद्ध है तथा क्रैंक का कार्य कड़ी AB करती है। कड़ी AB एक इनपुट कड़ी है तथा A के परितः एक पूर्ण चक्कर लगाने के लिए स्वतन्त्र है। निर्गत कड़ी CD बिन्दु D पर कोण ϕ से केवल दोलन करती है।



चित्र 2.26



चित्र 2.27

AKG TECHNICAL CLASSES

(c) दोहरा रॉकर यंत्रावली (Double rocker mechanism)— चित्र 2.27 में प्रदर्शित इस यंत्रावली में कड़ी DC बद्ध है। इस शुद्ध गति चेन में इनपुट कड़ी AD तथा निर्गत कड़ी BC दोनों ही दोलन करते हैं। कोई भी कड़ी पूर्ण चक्कर नहीं लगाती है।

§ 2.17 ग्रेशॉफ का नियम (Grashof's Law)

इस नियम से, **यदि सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी कड़ियों की लम्बाइयाँ क्रमशः l तथा s हो तथा शेष दो कड़ियों की लम्बाइयाँ क्रमशः p तथा q है तब एक चार-छड़ लिंकेज के लिए—**

$$l + s \leq p + q \quad \ldots(i)$$

इस लिंकेज को ग्रेशॉफ लिंकेज भी कहते हैं।

"According to this law, if l and s are the lengths of longest and shortest linsk and p & q the lengths of the remaining two links of a planar four-bar linkage, then

$$l + s \leq p + q \quad \ldots(i)$$

The linkage is known as Grashof linkage."

वे सभी यंत्रावलियाँ जो समीकरण (i) को संतुष्ट करती हैं, श्रेणी-I यंत्रावलियाँ कहलाती हैं तथा जो संतुष्ट नहीं करती, उन्हें श्रेणी-II यंत्रावलियाँ कहते हैं।

ग्रेशॉफ लिंकेज का उत्क्रमण (Inversions of Grashof's linkage)

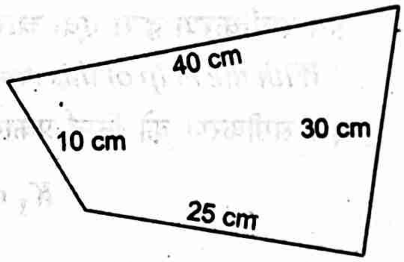
(a) जब सबसे छोटी कड़ी (s) बद्ध हो तब **दोहरा क्रैंक यंत्रावली** प्राप्त होती है।

(b) जब सबसे छोटी कड़ी (s) युग्मक (coupler) का कार्य करती है **तब दोहरा रॉकर यंत्रावली** प्राप्त होती है, तथा

(c) जब सबसे छोटी कड़ी (s) क्रैंक का कार्य करती है तथा संलग्नक कड़ी बद्ध हो तब **क्रैंक रॉकर यंत्रावली** प्राप्त होती है।

उदाहरण 2.12—चित्र 2.28 में प्रदर्शित चार छड़ चक्रीय चेन (Quadric cycle chain) में छड़ों की लम्बाइयाँ क्रमश; 10 cm, 40 cm, 30 cm तथा 25 cm है।

दी गई चेन के सभी उत्क्रमण ज्ञात कीजिये तथा उन्हें वर्गीकृत कीजिये।



चित्र 2.28

हल—यहाँ $l = 40\,\text{cm}, s = 10\,\text{cm}, p = 30\,\text{m}, q = 25\,\text{cm}$

$\therefore \quad l + s = 40 + 10 = 50\,\text{cm}, p + q = 30 + 25 = 55\,\text{cm}$

$$\therefore \quad (l + s) < (p + q)$$

क्योंकि यह चक्रीय चेन, ग्रेशॉफ के नियम का पालन करती है। इस प्रकार इसके तीन उत्क्रमण सम्भव है।

प्रथम उत्क्रमण— सबसे छोटी कड़ी (s) बद्ध है। तब यह दोहरा क्रैंक यंत्रावली बन जाती है जिसमें दो क्रैंकों की लम्बाइयाँ क्रमशः 25 cm तथा 40 cm होंगी।

द्वितीय उत्क्रमण—सबसे छोटी कड़ी से संलग्नक कड़ी (*i.e.*, 25 cm अथवा 40 cm) को बद्ध करने पर यह क्रैंक-रॉकर यँत्रावली बन जाती है। इस यंत्रावली में केवल क्रैंक ही पूर्ण चक्र लगाती है।

तृतीय उत्क्रमण— सबसे छोटी कड़ी को युग्मक (Coupler) बनाने से यह दोहरा-रॉकर यंत्रावली बन जाती है। इसमें (s) के समाने वाली कड़ी अर्थात् 30 cm लम्बाई वाली कड़ी को बद्ध कर देते हैं।

उदाहरण 2.13— एक 4-छड़ यँत्रावली में कड़ियों की लम्बाइयाँ, गुणोत्तर श्रेणी (Geometric progression) में है। इस यंत्रावली की गतिशीलता (movability) ज्ञात कीजिये।

हल— माना चार-छड़ यँत्रावली में कड़ियों की लम्बाइयाँ क्रमशः a, ar, ar^2 तथा ar^3 हैं।

जब $r > 1$ हो तो ar^3 सबसे बड़ी कड़ी होगी,

यदि $r < 1$ हो तो ar^3 सबसे छोटी कड़ी होगी।

किसी भी स्थिति में $$l + s = ar^3 + a = a(1 + r^3)$$

तथा $$p + q = ar + ar^2 = ar(1 + r)$$

ग्रेशॉफ के नियम से, $l + s \le p + q \quad \therefore \quad a(1 + r^3) \le ar.(1 + r)$

$$\therefore \quad a(1 + r)(1 - r + r^2) \le ar.(1 + r)$$

$$\therefore \quad (1 - r + r^2) \le r \quad \text{या} \quad (1 - 2r + r^2) \le 0 \quad \text{या} \quad (1 - r)^2 \le 0$$

इस समीकरण का केवल एक सम्भव हल है जब $r = 1$ हो। इस प्रकार कड़ियों की लम्बाईयां बराबर होगी। अतः दोहरी क्रैंक वाली सामान्तर चतुर्भुज यंत्रावली ही सम्भव होगी। इस प्रकार एक गैर-ग्रेशॉफ प्रकार की लिंकेज के लिए

$$(a + ar^3) \ge (ar + ar^2)$$

$$a(1 + r)(1 - r + r^2) \ge ar(1 + r)$$

अतः $$1 - 2r + r^2 \ge 0$$

इसके लिए $r < 1$ होना आवश्यक है। अतः r के इस मान के लिए कोई कड़ी घूर्णन नहीं करेगी।

§ 2.18 फ्रूडेन्सटेन का समीकरण (Freudenstein's Equation)

इस समीकरण द्वारा एक चार छड़ यंत्रावली की कड़ियों की लम्बाइयाँ ज्ञात की जा सकती हैं।

"With the help of this equation the length of links of a four bar mechanism can be computed."

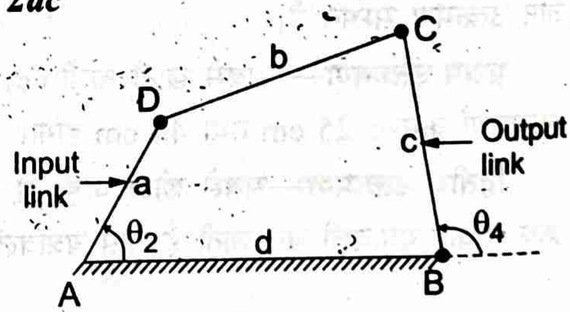
इस समीकरण को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है—

$$K_1 \cos\theta_4 - K_2 \cos\theta_2 + K_3 = \cos(\theta_2 - \theta_4) \quad \ldots(i)$$

जहाँ $$K_1 = \frac{d}{a}, K_2 = \frac{d}{c} \text{ तथा } K_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

हम चित्र 2.29 में प्रदर्शित क्रमशः a, b, c तथा लम्बाइयों वाली कड़ियों से बनी एक चार दड़ यंत्रावली पर विचार करते हैं। चित्रानुसार, θ_2 तथा θ_4 क्रमशः इनपुट तथा आउटपुट कड़ियों का कोण हैं।

कोणों के तीन जोड़ों $(\theta_{21}, \theta_{41}), (\theta_{22}, \theta_{42})$ तथा $(\theta_{23}, \theta_{43})$ के लिए समीकरण (i) को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है—



चित्र 2.29

$$K_1 \cos\theta_{41} - K_2 \cos\theta_{21} + K_3 = \cos(\theta_{21} - \theta_{41}) \quad ...(ii)$$
$$K_1 \cos\theta_{42} - K_2 \cos\theta_{22} + K_3 = \cos(\theta_{22} - \theta_{42}) \quad ...(iii)$$
$$K_1 \cos\theta_{43} - K_2 \cos\theta_{23} + K_3 = \cos(\theta_{23} - \theta_{43}) \quad ...(iv)$$

समीकरण (ii) से समीकरण (iii) व (iv) को घटाने पर,

$$K_1(\cos\theta_{41} - \cos\theta_{42}) - K_2(\cos\theta_{21} - \cos\theta_{22}) = \cos(\theta_{21} - \theta_{41}) - \cos(\theta_{22} - \theta_{42})$$
$$K_1(\cos\theta_{41} - \cos\theta_{43}) - K_2(\cos\theta_{21} - \cos\theta_{23}) = \cos(\theta_{21} - \theta_{41}) - \cos(\theta_{23} - \theta_{43})$$

K_1 तथा K_2 के लिए उपरोक्त दोनों समीकरणों को हल करने पर,

$$K_1 = \frac{Z_1.x_6 - Z_2.x_2}{x_1.x_6 - x_5.x_2}, K_2 = \frac{Z_1.x_5 - Z_2.x_1}{x_6.x_1 - x_2.x_5}$$

जहाँ $Z_1 = \cos(\theta_{21} - \theta_{41}) - \cos(\theta_{22} - \theta_{42})$

तथा $Z_2 = \cos(\theta_{21} - \theta_{41}) - \cos(\theta_{23} - \theta_{43})$

$$x_1 = \cos\theta_{41} - \cos\theta_{42}, x_2 = \cos\theta_{21} - \cos\theta_{22}$$
$$x_5 = \cos\theta_{41} - \cos\theta_{43}, x_6 = \cos\theta_{21} - \cos\theta_{23}$$

K_1 तथा K_2 के मान समीकरण (i) में रखने पर K_3 का मान ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 2.14—एक 4 – छड़ यंत्रावली की आवश्यकता है जिसके इनपुट तथा आउटपुट कोण निम्न प्रकार है–

इनपुट क्रैंक कोण	**30°**	**50°**	**80°**
आउटपुट फ्लोअर कोण	**0°**	**30°**	**60°**

4–छड़ यंत्रावली का संश्लेषण (synthesize) कीजिये।

हल—फ्रूडेन्सटेन के विस्थापन समीकरण से,

$$K_1 \cos\theta_4 - K_2 \cos\theta_2 + K_3 = \cos(\theta_2 - \theta_4)$$

उपरोक्त समीकरण में इनपुट कोण (θ_2) तथा आउटपुट कोण (θ_4) का मान रखने पर—

$$K_1 \cos 0° - K_2 \cos 30° + K_3 = \cos(30° - 0)$$
$$K_1 - 0.866 K_2 + K_3 = 0.866 \quad ...(i)$$
$$K_1 \cos 30° - K_2 \cos 50° + K_3 = \cos(50° - 30°) = \cos 20°$$
$$0.866 K_1 - 0.642 K_2 + K_3 = 0.939 \quad ...(ii)$$

तथा
$$K_1 \cos 60° - K_2 \cos 80° + K_3 = \cos(80° - 60°) = \cos 20°$$
$$0.5 K_1 - 0.173 K_2 + K_3 = 0.939 \quad ...(iii)$$

समीकरण (i), (ii) व (iii) को हल करने पर, $K_1 = 1.8321, K_2 = 1.4294$ तथा $K_3 = 0.27181$

एक कड़ी की लम्बाई (माना a) एकाँक मानने पर, अर्थात् $a = 1$

AKC TECHNICAL CLASSES

हम जानते हैं— $$K_1 = \frac{d}{a},\ d = a.K_1 = 1 \times 1.8321 = \mathbf{1.8321}$$

$$K_2 = \frac{d}{c} \rightarrow c = \frac{d}{K_2} = \frac{1.8321}{1.4294} = \mathbf{1.2817}$$

तथा $$K_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

$$\therefore \quad b = \sqrt{-2acK_3 + a^2 + c^2 + d^2}$$

$$\therefore \quad b = \sqrt{-2 \times 1 \times 1.2817 \times 0.2718 + 1^2 + (1.2817)^2 + (1.8321)^2}$$

$$\therefore \quad b = \mathbf{2.3039}$$

विभिन्न कड़ियों की लम्बाईयाँ निम्न होंगी—

$$\mathbf{a = 1.0,\ b = 2.3039,\ c = 1.2817,\ d = 1.8321}$$ **उत्तर**

§ 2.19 संश्लेषण समस्याओं का वर्गीकरण (Classification of Synthesis Problem)

संश्लेषण की विभिन्न समस्याओं को तीन वर्गों में बाँटा जा सकता है—

(a) **फंक्शन जेनेरेशन**

(b) **पथ जेनेरेशन,** तथा

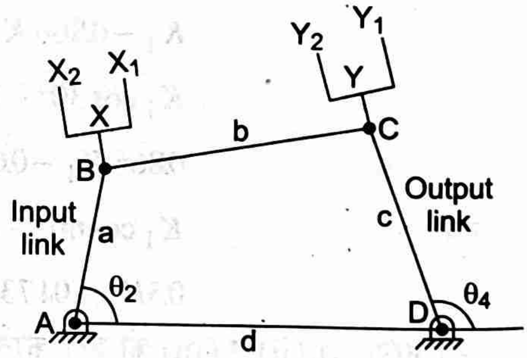
(c) **बॉडी गाइडेन्स (गति जेनेरेशन)।**

(a) फंक्शन ज़ेनेरेशन (Function Generation)

फंक्शन जेनेरेशन में यह वांछित होता है कि इनपुट कड़ी की विशिष्ट गति अथवा समय पर आउटपुट कड़ी एक निश्चित घुमॉऊ दोलन अथवा पश्चाग्र गति करे।

"In function generation, the motion of input link is correlated to the motion of output link."

चित्र 2.30 में एक चार छड़ यंत्रावली प्रदर्शित है। माना इनपुट कड़ी AB, θ_2 कोण घूमती है तथा स्वतन्त्र चर x प्रदर्शित करती है। इसी प्रकार आउटपुट कड़ी CD, θ_4 कोण घूमती है तथा परतंत्र चर (depandent variable) y प्रदर्शित करती है। यहाँ y, x पर निर्भर करती है। माना x की प्रारम्भिक तथा अन्तिम स्थिति क्रमशः x_1 तथा x_2 तथा y की क्रमशः y_1 तथा y_2 हैं। यहाँ यह माना जाता है कि θ_2 तथा x और θ_4 तथा y में रेखीय सम्बन्ध है, तब



चित्र 2.30

$$\frac{\theta_{2f} - \theta_{2i}}{x_2 - x_1} = r_1 = \text{नियतांक}$$

तथा $$\frac{\theta_{4f} - \theta_{4i}}{y_2 - y_1} = r_2 = \text{नियतांक}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

जहाँ θ_{2f} तथा θ_{2i} = इनपुट कड़ी की अन्तिम तथा प्रारम्भिक कोणीय स्थितियाँ,

θ_{4f} तथा θ_{4i} = आउटपुट कड़ी की अन्तिम तथा प्रारम्भिक कोणीय स्थितियाँ।

नियतांकों r_1 तथा r_2 को स्केल फैक्टर (scale factor) कहते हैं। यदि कड़ी अनुपात $\frac{a}{b}, \frac{a}{c}, \frac{a}{d}$ ज्ञात हो तो यंत्रावली का डिजाइन किया जा सकता है।

(b) पथ जेनेरेशन (Path Generation)

पथ जेनेरेशन में, युग्मक कड़ी (coupler link) पर एक बिन्दु को निरुद्ध (constrained) कर दिया जाता है जो स्थिर फ्रेम के सन्दर्भ में एक पथ दर्शाता है।

"In path generation, a point on the coupler link is constrained to describe a path with reference to a fixed frame."

यह पथ सामान्यतः वृत्त का एक चाप, अतिपरवलय या फिर एक सीधी रेखा होता है। युग्मक (coupler) एक तैरती हुई कड़ी (floating link) होती है। यदि पथ के बिन्दु, या तो समय अथवा इनपुट कड़ी स्थिति के अनुसार (correlated) हो तो, तब यह पथ जेनेरेशन कहलाता है।

(c) बॉडी गाइडेन्स (गति जेनेरेशन) (Body Guidance of Motion Generation)

बॉडी गाइडेन्स में, एक चल बॉडी में एक बिन्दु की स्थिति तथा बॉडी का कोणीय विस्थापन दोनों पूर्व निर्धारित होते हैं।

"Motion generation requires that an entire body be guide through a preselected sequence of motion."

§ 2.20 शेबशेव स्पेसिंग (Chebychev Spacing)

एक अमुक फंक्शन को उत्पन्न करने वाली यंत्रावली को डिजाइन करते समय कुछ बिन्दुओं से ज्यादा पर फंक्शन को परिशुद्धता के साथ उत्पन्न करना प्रायः असम्भव होता हैं। **वे बिन्दु, जिन पर उत्पन्न तथा वांछित क्रिया समान होती है, परिशुद्धता बिन्दु (precision points) कहते हैं।** ये बिन्दु ऐसी जगह लगाने चाहिए जिससे कि इनके बीच उत्पन्न होने वाली त्रुटि न्यूनतम हो।

संरचनात्मक त्रुटियों को न्यूनतम करने के लिए परिशुद्ध बिन्दुओं के शेबशेव स्पेसिंग बहुत उपयोगी है। परास (range) $x_0 \le x \le x_{n+1}$ में n बिन्दुओं के लिए शेबशेव स्पेसिंग के अनुसार परिशुद्ध बिन्दुओं x_i को अग्र प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है—

$$x_j = a - b\cos\theta_j . \pi$$

जहाँ
$$a = \frac{(x_0 + x_{n+1})}{2}, \theta_j = \left(\frac{2j-1}{2n}\right), b = \frac{1}{2}(x_{n+1} - m_0) \qquad \text{तथा } j = 1, 2 \ldots n$$

इस विधि को निम्न उदाहरण द्वारा भली-भाँति समझा जा सकता है—

उदाहरण 2.15—फ्रूडेनस्टेन समीकरण का प्रयोग करते हुए एक 4 छड़ लिन्केज का संश्लेषण कीजिये जो अन्तराल $1 \le x \le 4$ के लिए क्रिया $y = x^{1.5}$ उत्पन्न कर सके। इनपुट क्रैंक $\theta_2 = 30°$ से प्रारम्भ करती है तथा 90° का परास रखती है। तीन परिशुद्ध बिन्दु मानिये।

हल— दिया है $x_0 = 1, x_{n+1} = 4, n = 3, j = 1, 2 \ldots$

AKTU TECHNICAL CLASSES

$$a = \frac{(x_{n+1} + x_0)}{2} = \frac{4+1}{2} = 2.5, \quad b = \frac{(x_{n+1} - x_0)}{2} = \frac{4-1}{2} = 1.5$$

क्योंकि $\theta_j = \left(\frac{2j-1}{2n}\right)_{j=1}$ है।

अत;
$$\theta_1 = \frac{2\times1-1}{2\times3} = \frac{1}{6}, \theta_2 = \frac{2\times2-1}{2\times3} = \frac{3}{6}, \theta_3 = \frac{2\times3-1}{2\times3} = \frac{5}{6}$$

परिशुद्ध बिन्दुओं को निम्न प्रकार प्राप्त किया जा सकता है—

$$x_j = a - b\cos\pi.\theta_j$$

तब
$$x_1 = a - b\cos\pi.\theta_1 = 2.5 - 1.5\times\frac{\cos\pi\times1}{6} = 1.20$$

$$x_2 = a - b\cos\pi.\theta_2 = 2.5 - 1.5\times\frac{\cos\pi\times3}{6} = 2.5$$

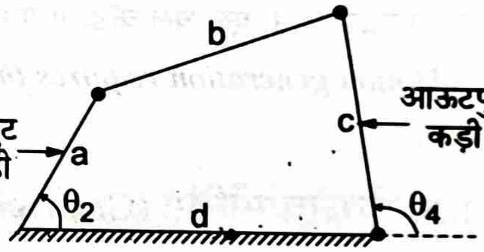
और
$$x_3 = a - b.\cos\pi.\theta_3 = 2.5 - 1.5\times\frac{\cos\pi\times5}{6} = 3.799$$

उपरोक्त अनुसार आउअपुट कड़ी फंक्शन $y = x^{1.5}$ से,

$$y_1 = x_1^{1.5} = (1.2)^{1.5} = 1.314,$$

$$y_2 = x_2^{1.5} = (2.5)^{1.5} = 3.953,$$

$$y_3 = x_3^{1.5} = (3.799)^{1.5} = 7.404$$



चित्र 2.31

इनपुट फंक्शन का प्रारम्भिक मान $x_s = 1.0$

उपरोक्तानुसार आउटपुट फंक्शन का प्रारम्भिक मान $y_s = (x_s)^{1.5} = (1)^{1.5} = 1.0$

इनपुट फंक्शन का अन्तिम मान $x_f = 4.0$

उपरोक्तानुसार आउटपुट फंक्शन का अन्तिम मान $y_f = (x_f)^{1.5} = (4)^{1.5} = 8.0$

माना तीनों परिशुद्ध बिन्दुओं x_1, x_2 तथा x_3 के अनुरूप इनपुट क्रैंक कोण क्रमशः θ_{21}, θ_{22} तथा θ_{23} तथा आउटपुट क्रैंक कोण θ_{41}, θ_{42} तथा θ_{43} है। माना चर राशियाँ x तथा y, कोण θ_2 तथा θ_4 के साथ निम्न सम्बन्धों द्वारा जुड़ी है—

$$\frac{\theta_2 - \theta_{2s}}{\Delta\theta_2} = \frac{x - x_s}{\Delta x} \quad ...(i)$$

तथा
$$\frac{\theta_4 - \theta_{4s}}{\Delta\theta_4} = \frac{y - y_s}{\Delta y} \quad ...(ii)$$

दिया है—
$$\theta_{2s} = 30°, \theta_{4s} = 0°, \Delta\theta_2 = 90°, \Delta\theta_4 = 90°$$

जहाँ θ_{2s} तथा θ_{4s} क्रमशः इनपुट तथा आउटपुट कोणों के प्रारम्भिक मान हैं।

AKT TECHNICAL CLASSES

$$\left.\begin{aligned}\Delta x = x_f - x_s = 4 - 1 = 3\\ \Delta y = y_f - y_s = 8 - 1 = 7\end{aligned}\right\} \qquad ...(iii)$$

अब समीकरण (i) से, $\frac{\theta_{22} - \theta_{21}}{\Delta\theta_2} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta x}$

या $$\theta_{22} - \theta_{21} = \Delta\theta_2\left[\frac{x_2 - x_1}{\Delta x}\right] = \frac{90}{3}(2.5 - 1.2) = 39° \qquad ...(iv)$$

अब समीकरण (ii) से,

$$\theta_{42} - \theta_{41} = \Delta\theta_4\left[\frac{y_2 - y_1}{\Delta y}\right] = \frac{90}{7}[3.953 - 1.314] = 33.93° \qquad ...(v)$$

तथा $$\theta_{23} - \theta_{21} = \Delta\theta_2\left[\frac{(x_3 - x_1)}{\Delta x}\right]$$

$$= \frac{90}{3}(3.799 - 1.20) = 77.97° \qquad ...(vi)$$

और $$\theta_{43} - \theta_{41} = \Delta\theta_4\left[\frac{y_3 - y_1}{\Delta y}\right]$$

$$= \frac{90}{7}[7.404 - 1.314] = 78.3° \qquad ...(vii)$$

तथा $$\theta_{41} = \theta_{4s} = 0°$$

इस प्रकार

इनपुट कोण (θ_2)	आउटपुट कोण (θ_4)
$\theta_{21} = 30°$	$\theta_{41} = 0°$
$\theta_{22} = 39 + 30 = 69°$	$\theta_{42} = 33.93°$
$\theta_{23} = 77.97 + 30 = 107.97°$	$\theta_{43} = 78.3°$

फ्रूडेनस्टेन के विस्थापन समीकरण से,

यहाँ $$K_2 = \frac{d}{c}, K_1 = \frac{d}{a}$$

तथा $$K_3 = \frac{a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2ac}$$

उपरोक्त समीकरण में θ_2 तथा θ_4 के मान रखने पर,

$$K_1 \cos\theta - K_2 \cos 30° + K_3 = \cos(30° - 0)$$

या $$K_1 - 0.0866 K_2 + K_3 = 0.866 \qquad ...(1)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

जब $\theta_2 = 69°$, $\theta_4 = 33.93°$ हो,

तब $$K_1 \cos 33.93 - K_2 \cos 69° + K_3 = \cos(69° - 33.93°)$$

या $$0.829K_1 - 0.358K_2 + K_3 = 0.818 \quad ...(2)$$

इसी प्रकार, जब $\theta_2 = 107.97°$ तथा $\theta_4 = 78.3°$ हो तो

$$0.202K_1 - 0.3085K_2 + K_3 = 0.868 \quad ...(3)$$

उपरोक्त समीकरणों को हल करने पर,

$$K_1 = 0.0896, K_2 = 0.1279 \text{ तथा } K_3 = 0.7265$$

माना $$d = 1, a = \frac{d}{K_1} = \frac{1.0}{0.0896} = 11.16$$

$\therefore$ $$K_2 = \frac{d}{c} \text{ या } c = \frac{d}{K_2} = \frac{1.0}{0.1279} = 7.82$$

तथा $$b = \sqrt{-2acK_3 + a^2 + c^2 + d^2} = 7.76$$

इस प्रकार **$a = 11.16$, $b = 7.76$, $c = 7.82$ तथा $d = 1.0$** **उत्तर**

प्रश्नावली

1. यंत्र विन्यास में कड़ियों का वेग ज्ञात करने की तात्कालिक केन्द्र विधि का वर्णन कीजिए।
2. विभिन्न प्रकार के तात्क्षणिक केन्द्रों का वर्णन कीजिए।
3. यन्त्र विन्यास में कड़ियों का वेग ज्ञात करने की सापेक्ष वेग विधि का वर्णन कीजिए।
4. चार कड़ियों वाले विन्यास (4 bar mechanism) का वेग आरेख (velocity diagram) बनाने की विधि लिखिए।
5. स्वच्छ चित्र की सहायता से एक स्लाइडर क्रैंक यन्त्र की संरचना कीजिये। स्वच्छ चित्र की सहायता से इसकी गति एवं त्वरण रेखाचित्र भी बनाइये। **[UP 2018 (W)]**
6. पश्चाग्र इंजन में पिस्टन का वेग ज्ञात करने की सरल विधि को समझाइए।
7. पिस्टन का वेग आरेख बनाए तथा चित्र में अधिकतम वेग को स्पष्ट कीजिए।
8. एक कड़ी के त्वरण आरेख बनाने की विधि का वर्णन कीजिए।
9. एक पश्चाग्र भाप इन्जन के पिस्टन का वेग तथा त्वरण ज्ञात करने की आँकिक विधि (Analytical Method) का वर्णन कीजिए।
10. एक पश्चाग्र भाप इन्जन के संयोजक दण्ड का कोणीय वेग तथा त्वरण करने की आँकिक विधि का वर्णन कीजिए।
11. एक चार लिंक यन्त्रावली का त्वरण आरेख कैसे प्राप्त किया जाता है? **(UP 2015)**
12. एक स्लाइडर क्रैंक यन्त्रावली (slider crank mechanism) के वेग आरेख खींचने की विधि का वर्णन कीजिए। **(UP 2012)**
13. तात्क्षणिक घूर्णन केन्द्र को परिभाषित कीजिए तथा उसके गुणों का उल्लेख कीजिए। एक चतुर्दण्ड (four bar) यंत्रावली का विन्यास चित्र बनाकर उसके तात्क्षणिक घूर्णन केन्द्रों को ज्ञात कीजिए। **(UP 2013)**
14. यन्त्रावलियों का संश्लेषण (synthesis) समझाइये। स्वच्छ चित्र की सहायता से इसकी उपयोगिता की व्याख्या कीजिए। **[UP 2016, 2018 (W)]**

AKC TECHNICAL CLASSES

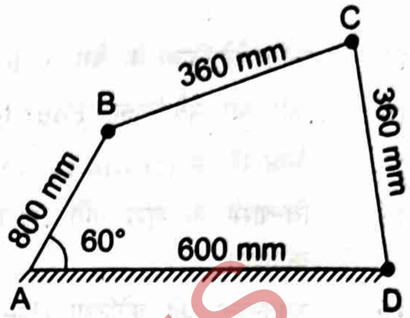
15. प्लेन मैकेनिज्म के वेग (velocity) और त्वरण (acceleration) का उल्लेख करे। [UP 2016 (W)]
16. फोर बार मैकेनिज्म (Four bar mechanism) की व्याख्या करे। [UP 2016 (W)]
17. क्रैंक रॉकर्स (crank rockers) पर टिप्पणी लिखे। [UP 2016 (W)]
18. विन्यासों के शुद्ध गति संश्लेषण (Kinematic Synthesis of Mechanism) तथा उसके प्रकारों पर संक्षिप्त टिप्पणी कीजिए।
19. स्वतन्त्रता की कोटियाँ (Degrees of Freedom) पर संक्षिप्त टिप्पणी कीजिए।
20. ग्रबलर का समीकरण क्या है? स्वतन्त्रता की कोटि ज्ञात करने के लिए यह किस प्रकार उपयोगी है?
21. निम्न चार छड़ यंत्रावलियों का चित्र बनाकर वर्णन करें—
    (i) दोहरा क्रैंक यंत्रावली (Double Crank Mechanism)
    (ii) क्रैंक रॉकर यंत्रावली (Crank Rocker Mechanism)
    (iii) दोहरा रॉकर यंत्रावली (Double Rocker Mechanism)
22. ग्रेशॉफ के नियम (Groshaf's Law) तथा उसके उत्क्रमण (Inversion) को सचित्र समझाइये।
23. फ्रूडेन्सटेन का समीकरण (Frudenstein's Equation) तथा उसका उपयोग स्पष्ट कीजिए।
24. संश्लेषण की समस्याओं (Synthesis Problem) का वर्गीकरण कीजिये।
25. निम्न पर संक्षिप्त टिप्पणी कीजिए—
    (i) फक्शंन जेनेरेशन (Function Generation)
    (ii) पथ जेनेरेशन (Path Generation)
    (iii) बॉडी जेनेरेशन (Body Generation)
26. शेबशेव स्पेसिंग (Chebychev Spacing) पर संक्षिप्त टिप्पणी कीजिए।
27. एक चतुर्दण्ड यंत्रावली (Fourbar Mechanism) की विमायें निम्नलिखित हैं—
    (i) क्रैंक की लम्बाई $= 100\,mm$,
    (ii) युग्मक दण्ड (connecting rod) की लम्बाई $= 350\,mm$
    (iii) क्रैंक तथा लीवर के घूर्णन केन्द्रों के मध्य दूरी $= 300\,mm$

    ग्राफीय विधि का प्रयोग करते हुए यह ज्ञात कीजिए कि क्रैंकों के एक सम्पूर्ण घूर्णन में लीवर का दोलन कितना होता है? (UP 2013)
28. एक चार लिंक यन्त्रावली में क्रैंक AB 36 rad/sec पर घूमता है। लिंकों की लम्बाई यह है— $AB = 200\,mm$, $BC = 400\,mm$, $CD = 50\,mm$ तथा $AD = 600\,mm$। AD स्थिर लिंक है। उस समय जब AB, AD के समकोण है, लिंक BC के मध्य बिन्दु का वेग ज्ञात कीजिए। (UP 2012)

    [उत्तर—6.3 m/sec]
29. एक स्लाइडर क्रैंक यन्त्रावली में क्रैंक 480 mm लम्बी है और 20 rad/sec पर वामावर्त दिशा में घूमती है। कनेक्टिंग रॉड की लम्बाई 1600 mm है। जब क्रैंक इनर डेड सेन्टर से 60° घूमती है, तो स्लाइडर का वेग तथा कनेक्टिंग रॉड के एक बिन्दु पर, जिस पर चरम वेग न्यूनतम है, स्थिति तथा वेग ज्ञात कीजिए। (UP 2015)
30. एक चार दण्ड लिंकेज मे $AB = 7.5\,cm$, $BC = 17.5\,cm$, $CD = 15\,cm$, $DA = 10\,cm$ तथा $\angle BAD = 90°$। लिंक QB एक समान रूप से 2 rps पर दक्षिणावर्त परिक्रमण करती है लिंक BC का कोणीय त्वरण ज्ञात कीजिए। (UP 2016)

AKC TECHNICAL CLASSES

31. एक पिन जोड़ वाली चार छड़ यंत्रावली, जैसाकि चित्र 2.32 में प्रदर्शित है। कड़ी $AB = 300\,mm$, $BC = CD = 360\,mm$ तथा $AD = 600\,mm$ है। कोण $BAD = 60°$ है। क्रैंक AB, 100 rpm की एक समान गति से घूम रहा है। सभी तात्क्षणिक केन्द्रों को दर्शाइये तथा कड़ी BC का कोणीय वेग ज्ञात कीजिये।

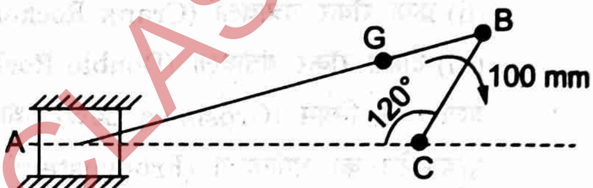


उत्तर— 6.2 rad /sec

32. एक सरक क्रैंक यन्त्रावली में क्रैंक OB तथा संयोजक दण्ड AB की लम्बाईयां क्रमशः 125 mm तथा 500 mm है। स्लाइडर A से संयोजक दण्ड के गुरुत्व केन्द्र G की दूरी 275 mm है। क्रैंक की गति 600 rpm (दक्षिणावर्त) है। जब क्रैंक I.D.C. से 45° कोण घूमती है तो ज्ञात कीजिये— (1) स्लाइडर A की गति, (2) बिन्दु G की गति, और (3) संयोजक दण्ड AB का कोणीय वेग।

[उत्तर—6.45 m /sec, 6.75 m /sec, 10.8 rad /sec]

33. एक इंजन यंत्रावली चित्र 2.33 में प्रदर्शित है। क्रैंक $CB = 100\,mm$ तथा संयोजक दण्ड $BA = 300\,mm$ है। संयोजक दण्ड के सिरे B से गुरुत्व केन्द्र G की दूरी 100 mm है। दी गई स्थिति पर, क्रैंक शॉफ्ट की गति 75 rad /sec तथा कोणीय त्वरण 1200 rad /sec^2 है। ज्ञात कीजिये— (i) बिन्दु G की गति तथा AB का कोणीय वेग तथा (ii) बिन्दु G का त्वरण तथा AB का कोणीय त्वरण।



चित्र 2.33

[उत्तर— 6.8 m /sec, 13.3 rad /sec, 414 m /sec^2, 1820 rad /sec^2 (दक्षिणावर्त)]

34. एक पिन जोड़ वाली 4-छड़ यंत्रावली $ABCD$ में विभिन्न कड़ियों की लम्बाईयाँ निम्न हैं—$AB = 25\,mm$, $BC = 87.5\,mm$, $CD = 50\,mm$ तथा $AD = 80\,mm$ कड़ी AD बद्ध है तथा कोण $BAD = 135°$ है। यदि B का दक्षिणावर्त दिशा में वेग 1.8 m /sec हो तो ज्ञात कीजिये (1) BC के मध्य बिन्दु का वेग तथा त्वरण तथा (2) कड़ी CB तथा CD का कोणीय वेग तथा कोणीय त्वरण।

[उत्तर—1.67 m /s, 110 m /sec^2, 8.9 rad /sec, 870 rad /sec^2, 32.4 rad /sec, 1040 rad /sec^2]

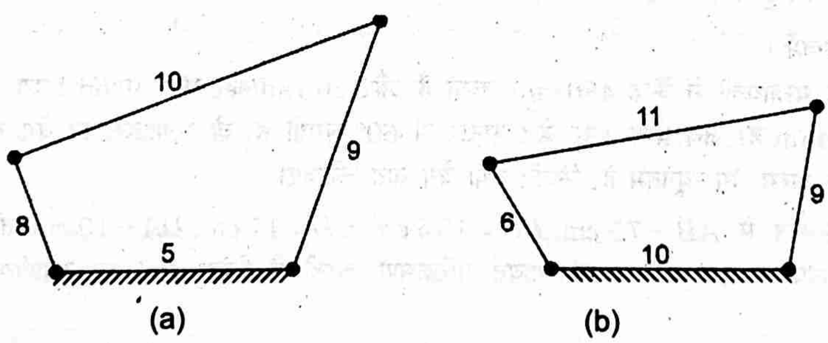
35. यदि एक भाप इंजन यंत्रावली में क्रैंक तथा संयोजक दण्ड की लम्बाईयाँ क्रमशः 300 mm तथा 1 m है तथा क्रैंक 200 rpm की नियत गति से घूम रही है। ज्ञात कीजिये—

(i) वह क्रैंक कोण, जिस पर अधिकतम वेग प्राप्त होता है, तथा

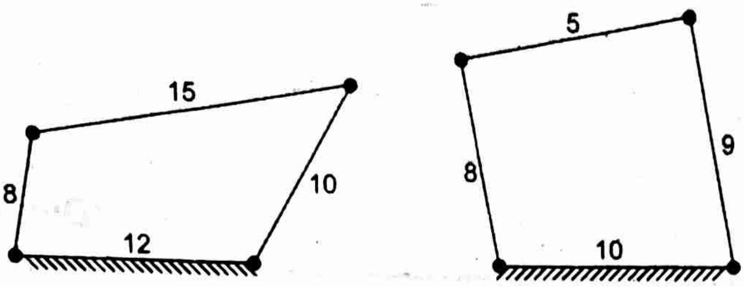
(ii) पिस्टन का अधिकतम वेग।

[उत्तर—75°, 6.55 m /sec]

36. चित्रों 2.34 (a) से (d) तक विभिन्न प्रकारों के चार छड़ यंत्रावलियाँ प्रदर्शित हैं। प्रत्येक यंत्रावली की प्रकृति अर्थात् (i) डबल क्रैंक, अथवा (ii) क्रैंक-रॉकर अथवा (iii) डबल-रॉकर ज्ञात कीजिये। संक्षेप में कारण भी स्पष्ट करें।



AKC TECHNICAL CLASSES



चित्र 2.34

[**उत्तर**—(i) डबल-क्रैंक (ii) क्रैंक-रॉकर (iii) श्रेणी II का डबल रॉकर (iv) डबल रॉकर]

37. एक चार छड़ यंत्रावली का डिजाइन कीजिये जिसके लिए इनपुट तथा आउटपुट कोण क्रमशः निम्न प्रकार हो— (i) इनपुट कोण $= 15°$, $30°$ तथा $45°$, (ii) आउटपुट कोण $= 30°$, $40°$ तथा $55°$।

[**उत्तर**—$AB = a = 1$ units, $BC = b = 0.74$ units, $CD = c = 0.896$ units तथा $AD = d = 0.905$ units]

38. फ्रूडेनस्टेन समीकरण का प्रयोग करते हुए एक 4 छड़ लिन्केज का संश्लेषण (Synthesize) कीजिये। जो अंतराल $1 \le x \le 5$ के लिए क्रिया $y = x^{18}$ उत्पन्न कर सकें। इनपुट क्रैंक $\theta_2 = 30°$ से प्रारम्भ करती है तथा $90°$ का परास रखती है। आउटपुट फ्लोअर $\theta_4 = 0°$ से प्रारम्भ करता है तथा $90°$ का परास रखता है। तीन परिशुद्ध $x = 1, 3$ तथा 5 मानिये।

AKC TECHNICAL CLASSES

अध्याय 3

मशीनों की गतिकी (Dynamics of Machines)

- Static and dynamic force analysis graphical and analytical approaches
- Gyrosopic action in machines.

§ 3.1 परिचय (Introduction) :

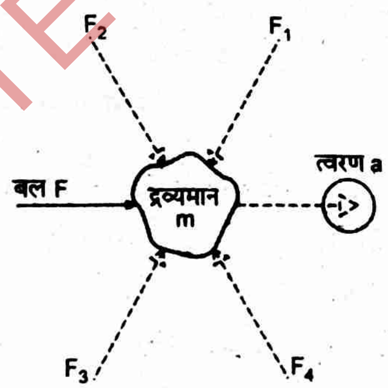
किसी मशीन यंत्रावली का डिजाइन करते समय यह आवश्यक है कि इनपुट से आउटपुट को अंतरित (transfer) होने वाले बलों का मान तथा दिशा का ज्ञान हो। यह विश्लेषण मशीनी अंगों के उचित साइज के निर्धारण में मदद करेगा जोकि अंगों में उत्पन्न होने वाले प्रतिबलों को वहन कर सकेगा।

यदि मशीन का कोई अंग त्वरित गति करता है तब उसके द्रव्यमान के कारण उसमें बल उत्पन्न हो जाती है। अंगों पर कार्य कर रहे बलों की तुलना में यदि इन जड़त्व बलों का मान नगण्य हो तो इस प्रकार का विश्लेषण **"स्थैतिक बल विश्लेषण"** (static force analysis) कहलाता है। जब अंगों के द्रव्यमान के कारण होने वाला जड़त्व प्रभाव भी गणना में शामिल किया जाये तो इस प्रकार का विश्लेषण **"गतिक बल विश्लेषण"** (dynamic force analysis) कहलाता है।

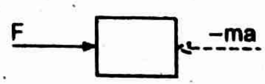
इस अध्याय में हम त्वरित द्रव्यमानों पर लगने वाले गति बलों तथा उनके प्रभाव का विश्लेषण करेंगे।

3.1.1. डी-एलेमबर्ट का नियम (D-Alembert's Principle)

माना चित्र 3.1 में प्रदर्शित m द्रव्यमान के एक पिण्ड पर बलों F_1, F_2, F_3 तथा F_4 से बना एक बल निकाय कार्यरत् है। इस बल निकाय का परिणामी बल माना F है जो पिण्ड में a मान का रेखीय त्वरण उत्पन्न करता है। अब **न्यूटन के गति के दूसरे नियम से**



चित्र 3.1



चित्र 3.2

$$F = ma \quad \ldots(i)$$

इस समीकरण (i) को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है।

$$F - ma = 0$$

AKC TECHNICAL CLASSES

यहाँ ध्यान देने योग्य बात यह है कि राशि $-ma$ को एक बल, जो मान में बराबर, दिशा में विपरीत तथा परिणामी बल F की क्रिया रेखा में कार्यरत माना जा सकता है। ये दोनों बल मिलकर निकाय का सन्तुलन बनाते हैं। (देखें 3.2) इस सिद्धान्त को **"डी-एलेमबर्ट का नियम"** कहते हैं। इस बराबर तथा विपरीत बल $-ma$ को ही जड़त्व बल (Inertia Force) कहते हैं।

इस प्रकार डी-एलेमबर्ट के नियमानुसार **"पिण्ड पर लगने वाला परिणामी बल, जड़त्व बल के साथ मिलकर पिण्ड को सन्तुलन में रखता है।"**

"The resultant force acting on a body together with the reversed effective force (or inertia force are in equilibrium)."

यह नियम एक गतिक समस्या को समान स्थैतिक समस्या में बदलने के लिए प्रयोग किया जाता है

3.1.2 इन्जनों में पश्चाग्र गति करने वाले अंगों का वेग तथा त्वरण

(Velocity and Acceleration of the Reciprocating Parts in Engines)

किसी भाप इन्जन अथवा अन्तर्दहन इन्जन (I.C. Engine) के पश्चाग्र गति करने वाले अंगों के वेग तथा त्वरण को ग्राफिय अथवा वैश्लेषिक विधि द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। वैश्लेषिक (analytical) विधि का अध्ययन हमने पूर्व अध्याय-2 में किया है। यहाँ हम ग्राफिय विधि द्वारा वेग तथा त्वरण ज्ञात करेंगे।

जिसको निम्न में से किसी एक संरचना द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

1. **क्लेन की संरचना** (Klein's Construction)
2. **रिटरहयू की संरचना** (Ritterhaus's Construction) तथा
3. **बेनेट की संरचना** (Bennett's Construction)

यहाँ हम क्लेन की संरचना द्वारा ही वेग तथा त्वरण ज्ञात करने की विधि का अध्ययन करेंगे।

(1) क्लेन की संरचना (Klien's Construction)

माना एक पश्चाग्र भाप इन्जन की संयोजक दण्ड PC तथा क्रैंक OC है। माना क्रैंक, स्ट्रोक रेखा PO से θ कोण बनाती है तथा एक समान कोणीय वेग ω rad / sec के वेग से दक्षिणावर्त घूम रही है। क्लेन का वेग तथा त्वरण आरेख निम्न प्रकार बनाया जायेगा।

क्लेन का वेग आरेख (Klien's velocity diagram)— सर्वप्रथम OP के लम्बवत् रेखा OM खींचते हैं जो PC को आगे बढ़ाने पर M पर काटती है। त्रिभुज OCM को ही **"क्लेन का वेग आरेख"** कहते हैं। इस त्रिभुज OCM में, $OM \perp PO$, $CM \parallel PC$ (समान रेखा) तथा $CO \parallel CO$ (समान रेखा) माना जायेगा।

हम जानते हैं कि दिये गये विन्यास के लिए वेग आरेख त्रिभुज OCP द्वारा प्रदर्शित होगा जैसे चित्र 3.3(b) में दिखाया गया है। यदि वेग आरेख को 90° घुमा दिया जाता है तो यह ΔOC_1P_1 से प्रदर्शित होगा जिसमें OC_1, O के सापेक्ष C के वेग अर्थात् v_{CO} को प्रदर्शित करेगा और OC के समानान्तर होगा। OP_1, O के सापेक्ष P के वेग अर्थात् v_{PO} को प्रदर्शित करेगा तथा OP के लम्बवत् होगा। इसी प्रकार C_1p_1, v_{PC} को प्रदर्शित करेगा और PC के समान्तर होगा।

यहाँ ध्यान देने योग्य बात यह है कि त्रिभुज $oc_1\,p_1$ तथा OCM समान हैं।

अतः
$$\frac{oc_1}{OC} = \frac{op_1}{OM} = \frac{c_1p_1}{CM} = \omega \quad \text{(एक नियतांक)}$$

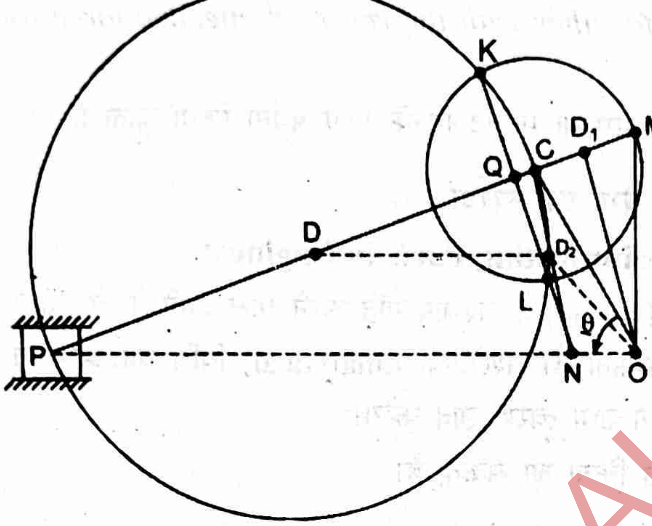
AKC TECHNICAL CLASSES

या $$\frac{v_{CO}}{OC} = \frac{v_{PO}}{OM} = \frac{v_{PC}}{CM} = \omega$$

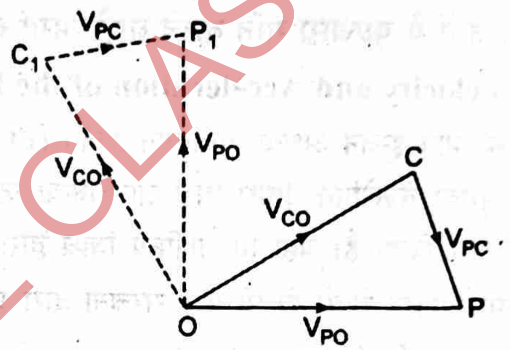
$\therefore$ $$v_{CO} = \omega \times OC,\ v_{PO} = \omega \times M$$

तथा $$v_{PC} = \omega \times CM$$

इस प्रकार क्लेन के वेग आरेख से विभिन्न बिन्दुओं का वेग प्राप्त होता है।



चित्र 3.3 (a)



चित्र 3.3 (b) वेग आरेख

क्लेन का त्वरण आरेख (Klien's acceleration diagram)— यह आरेख निम्न प्रकार तैयार किया जायेगा—

1. सर्वप्रथम C को केन्द्र मानकर CM त्रिज्या का वृत्त खींचते हैं।

2. अब PC व्यास का एक वृत्त और बनाते हैं जो पहले वृत्त को K तथा L पर काटता है।

3. KL को मिलाया तथा आगे बढ़ाने पर यह PO को N पर काटता है। यही KL, PC को बिन्दु Q पर काटती है। यहाँ एक चतुर्भुज $CQNO$ बनता है जिसे क्लेन का त्वरण आरेख कहते हैं।

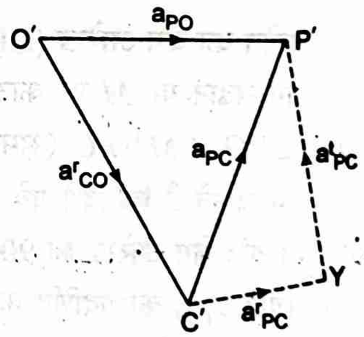
दिये गये विन्यास के लिए त्वरण आरेख को चित्र 3.3 (c) में प्रदर्शित किया गया है। हम जानते हैं कि—

(i) $o'c'$, o के सापेक्ष क्रैंक पिन c के त्वरण का त्रैज्यिक (radial) घटक अर्थात् a^r_{CO} को प्रदर्शित करेगा तथा CO के समानान्तर होगा।

(ii) $c'x$, क्रैंक पिन c के सापेक्ष पिस्टन अथवा क्रॉस हैड के त्वरण के त्रैज्यिक घटक a^r_{PC} को प्रदर्शित करेगा तथा CP या CQ के समानान्तर होगा।

(iii) xp', क्रैंक पिन c के सापेक्ष पिस्टन अथवा क्रॉस हैड के त्वरण के स्पर्शीय घटक a^t_{PC} को प्रदर्शित करेगा तथा QN के समानान्तर होगा। ($\because$ $QN \perp CQ$)

(iv) $o'p'$, o के सापेक्ष पिस्टन P के त्वरण a_{PO} को प्रदर्शित करेगा तथा PO अथवा NO के सामानान्तर होगा।



चित्र 3.3 (c) त्वरण आरेख

यहाँ ध्यान देने योग्य बात यह है कि चतुर्भुज $o'c'xp'$ (त्वरण आरेख 'c') तथा चतुर्भुज $OCQN$ (चित्र 3.3 (a)) समान है।

AKTU TECHNICAL CLASSES

अत:
$$\frac{o'c'}{OC}=\frac{c'x}{CQ}=\frac{xp'}{QN}=\frac{o'p'}{NO}=\omega^2 \quad \text{(एक नियतांक)}$$

तथा
$$\frac{a^r_{CO}}{OC}=\frac{a^r_{PC}}{CQ}=\frac{a^t_{PC}}{QN}=\frac{a_{PO}}{NO}=\omega^2$$

$\therefore$
$$a^r_{CO}=\omega^2\times OC,\; a^r_{PC}=\omega^2\times CQ,\; a^t_{PC}=\omega^2\times QN$$

तथा
$$a_{PO}=\omega^2\times NO$$

इस प्रकार क्लेन के त्वरण आरेख से विभिन्न बिन्दु का त्वरण प्राप्त होता है। इसके अतिरिक्त पिस्टन P का क्रैंक पिन C के सापेक्ष त्वरण (a_{PC}) निम्न प्रकार प्राप्त किया जा सकता है—

$$\frac{c'p'}{CN}=\omega^2 \quad \text{या} \quad \frac{a_{pc}}{CN}=\omega^2$$

$\therefore$
$$a_{pc}=\omega^2\times CN$$

(i) संयोजक दण्ड PC के किसी बिन्दु D पर वेग ज्ञात करने के लिए CM को D_1 पर इस प्रकार विभाजित करते हैं कि

$$\frac{CD_1}{CM}=\frac{CD}{CP}$$

$\therefore$ बिन्दु D का वेग, $\quad v_D=\omega\times OD_1$

(ii) बिन्दु D का त्वरण ज्ञात करने के लिए, बिन्दु D से एक रेखा PO के समानान्तर खींचते हैं जो CN के बिन्दु D_2 पर काटता है।

इस प्रकार D का त्वरण $\quad a_D=\omega^2\times OD_2$

उदाहरण 3.1—एक पश्चाग्र इंजन के संयोजक दण्ड की लम्बाई 20 cm तथा क्रैंक की लम्बाई 5 cm है। क्लेन की संरचना द्वारा पिस्टन का वेग तथा त्वरण, संयोजक दण्ड का कोणीय त्वरण, संयोजक दण्ड के मध्य बिन्दु X का वेग तथा त्वरण, जबकि क्रैंक IDC से 45° के कोण पर है तथा 240 rpm पर दक्षिणावर्त घूम रही है।

हल—दिया है—
$$AX=\frac{20}{2}=10\,\text{cm}=0.1\,\text{m}$$
$$OA=5\,\text{cm}=0.05\,\text{m},\; AB=0.2\,\text{m}$$
$$\theta=45^\circ,\; N_{AO}=240\,\text{rpm}$$
$$\omega_{AO}=\frac{2\pi N_{AO}}{60}=\frac{2\pi\times 240}{60}=\mathbf{25.14\ rad/sec}$$

क्लेन की संरचना चित्र 3.4 में प्रदर्शित है जहाँ AOM वेग आरेख तथा $OAQR$ त्वरण आरेख हैं। यहाँ (i) x_2, AR पर है (ii) xx_2, OB के समानान्तर है (iii) x_1, AM का मध्य बिन्दु है (iv) T वृत्तों के कटान पर है (v) R, Line OB पर है।

मापने पर, $\quad OM=4.3\,\text{cm}=4.3\times10^{-2}\,\text{m},\; AM=3.6\,\text{cm}=3.6\times10^{-2}\,\text{m}$

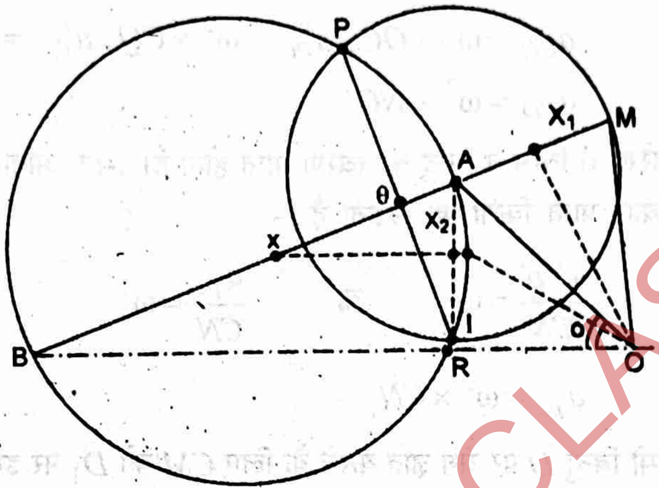
तथा $OR=3.5\,\text{cm}=3.5\times10^{-2}\,\text{m}$ है।

AKC TECHNICAL CLASSES

(a) पिस्टन का वेग तथा त्वरण— पिस्टन B का वेग $V_B = \omega_{AO} . OM$

$\therefore \quad V_B = 25.14 \times 4.3 \times 10^{-2} = \mathbf{1.08\ m / sec}$ **उत्तर**

पिस्टन का त्वरण $\quad a_B = \omega^2 . OR = (25.14)^2 \times 3.5 \times 10^{-2} = \mathbf{22.12\ m / sec^2}$ **उत्तर**



चित्र 3.4

(b) बिन्दु x का वेग तथा त्वरण— संयोजक दण्ड का मध्यबिन्दु x है। अत: AM का मध्यबिन्दु x_1 प्रदर्शित करते हैं। x_1 को o से मिलाया। मापने पर,

$$ox_1 = 4.4\text{cm} = 4.4 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

अत; बिन्दु x का वेग $v_x = \omega . ox_1 = 25.14 \times 4.4 \times 10^{-2}$

$$= \mathbf{1.10\ m / sec}$$ **उत्तर**

बिन्दु x का त्वरण ज्ञात करने के लिए स्ट्रोक रेखा OB के समानान्तर $x x_2$ रेखा खींचते हैं। जो AR को x_2 पर काटती है। मापने पर,

$$ox_2 = 4.2 \times 10^{-2}\ \text{m}$$

बिन्दु x का त्वरण,

$$a_x = \omega^2 . ox_2 = (25.14)^2 \times 4.2 \times 10^{-2}$$

$$= \mathbf{26.54\ m / sec^2}$$ **उत्तर**

(c) संयोजक दण्ड का कोणीय वेग तथा कोणीय त्वरण—संयोजक दण्ड का वेग

$$v_B = \omega . AM = (25.14) \times 3.6 \times 10^{-2}$$

$$= 0.905\ \text{m / sec}$$

कोणीय वेग $\quad \omega_{AB} = \dfrac{v_{AB}}{AB} = \dfrac{0.905}{0.2} = 4.525\ \text{rad / sec}$

AKC TECHNICAL CLASSES

संयोजक दण्ड AB का कोणीय त्वरण

$$\alpha_{AB} = \frac{a^t_{AB}}{AB} \quad \text{तथा} \quad a^t_{AB} = \omega^2.QR$$

$$a^t_{QR} = (25.14)^2 \times 3.6 \times 10^{-2} = 22.75 \text{ m/sec}^2$$

अत:
$$\alpha_{AB} = \frac{22.75}{0.2} = \mathbf{113.75 \text{ rad/sec}^2}$$ उत्तर

3.1.3 एक इन्जन के पश्चाग्र गति करने वाले अंगों पर बल (Forces on the Reciprocating Parts of an Engine)

एक क्षैतिज इन्जन के पश्चाग्र गति करने वाले अंगों पर लगने वाले बलों के चित्र 3.5 में प्रदर्शित किया गया है। संयोजक दण्ड के भार को नगण्य मानते हुए इन बलों के लिए व्यंजक निम्न प्रकार व्युत्पन्न होंगे—

1. पिस्टन प्रयास—यह स्ट्रोक रेखा के अनुदिश पिस्टन अथवा क्रॉस हैड पिन पर लगने वाला कुल बल है जिसे F_P से प्रदर्शित करते हैं।

माना m_R = पश्चाग्र गति करने वाले अंगों का द्रव्यमान (पिस्टन, क्रॉस हैड पिन आदि)

∴ K_R = पश्चाग्र गति करने वाले अंगों का भार $= m_R \cdot g$

अत; पश्चाग्र गति करने वाले अंगों का त्वरण

$$a_R = a_P = \omega^2.r\left[\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{n}\right] \quad \text{(अध्याय 2 के अनुच्छेद 2.12 से)}$$

∴ त्वरण उत्पन्न करने वाला बल या जड़त्व बल $F_1 = m_R.a_R$

$$\therefore \quad \mathbf{F_1 = m_g.\omega^2.r\left[\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{n}\right]}$$

क्षैतिज इन्जनों में स्ट्रोक के पहले आधे चरण में पश्चाग्र गति करने वाले अंग, शून्य से त्वरित होते हैं तथा शेष आधे चरण में मन्दित होते हैं। पश्चाग्र गति करने वाले अंगों पर त्वरण के कारण जड़त्व बल, सिलेन्डरी में पिस्टन के दोनों तरफ दाबान्तर के कारण लगने वाले बल का विरोध करता है। दूसरी तरफ पश्चाग्र अंगों के मन्दन के कारण जड़त्व बल, पिस्टन पर बल की मदद करता है। इस प्रकार

पिस्टन प्रयास F_P = पिस्टन पर कुलभार ∓ जड़त्व बल

$$= F_L \mp F_I \quad \text{(घर्षण प्रतिरोध नगण्य मानते हैं)}$$

$$= F_L \mp F_I - R_F \quad \text{(घर्षण प्रतिरोध सम्मिलित करने पर)}$$

जब पिस्टन त्वरित होता है तब (–)ive चिन्ह प्रयुक्त होता है तथा जब पिस्टन मंदित होता है तब (+) ive चिन्ह प्रयुक्त होता है।

एक द्वि-क्रिया पश्चाग्र भाप इंजन में, पिस्टन पर नेट लोड

$$F_L = p_1(A_1) - p_2(A_2) = p_1A_1 - p_2(A_1 - a)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

जहाँ A_1 = पिस्टन का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल

$A_2 = (A_1 - a)$ = पिस्टन का क्रैंक साइड की तरफ अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल

2. संयोजक दण्ड के अनुदिश कार्यरत् बल—यह F_Q से प्रदर्शित होता है (देखे चित्र 3.5)

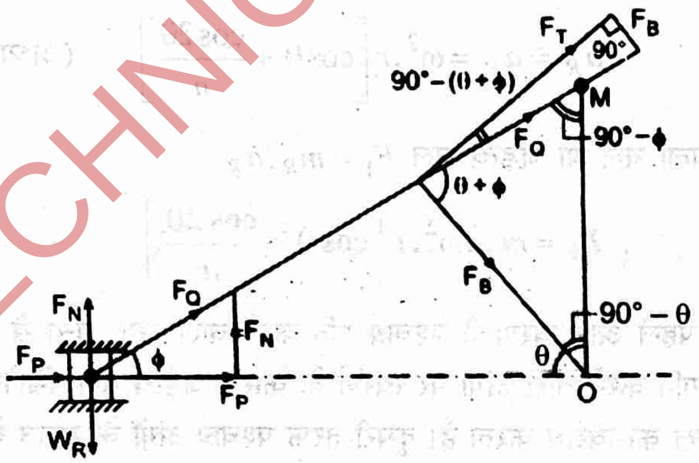
$$F_Q = \frac{F_p}{\cos\phi}$$

हम जानते हैं कि $$\cos\phi = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}}$$

$$\therefore \quad F_Q = \frac{F_p}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{n^2}}}$$

3. सिलेण्डर की दीवारों पर बल अथवा गाइडस पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया—इसको F_N से प्रदर्शित करते हैं (देखें चित्र 3.5)

$$\therefore \quad F_N = F_Q.\sin\phi = \frac{F_p}{\cos\phi} \times \sin\phi = F_p.\tan\phi \qquad \left[\because F_Q = \frac{F_p}{\cos\phi}\right]$$



चित्र 3.5

4. क्रैंक पिन प्रयास तथा क्रैंक शॉफ्ट बियरिंग पर दाब—संयोजक दण्ड पर लगने वाले बल F_Q को दो घटकों में तोड़ देते हैं। इसमें से, एक क्रैंक के अनुद्रिश तथा दूसरा क्रैंक के लम्बवत् होता है। क्रैंक के लम्बवत् घटक F_T को क्रैंक पिन प्रयास तथा क्रैंक के अनुदिश घटक को F_B से प्रदर्शित करते हैं तथा यह क्रैंक शॉफ्ट बियरिंग पर दाब डालता है। (देखें चित्र 3.5)।

F_Q को क्रैंक के लम्बवत् तोड़ने पर

$$F_T = F_Q.\sin(\theta + \phi) = \frac{F_p}{\cos\phi} \times \sin(\theta + \phi)$$

F_Q को क्रैंक के अनुदिश तोड़ने पर

$$F_B = F_Q.\cos(\theta+\phi) = \frac{F_p}{\cos\phi}\times\cos(\theta+\phi)$$

5. क्रैंक प्रयास अथवा घुमॉऊ घूर्ण—क्रैंक पिन प्रयास (F_T) तथा क्रैंक पिन त्रिज्या (r) के गुणनफल को क्रैंक प्रयास अथवा क्रैंक शॉफ्ट पर घुमॉऊ घूर्ण कहते हैं। इस प्रकार, क्रैंक प्रयास $T = F_T \times r = \frac{F_p\sin(\theta+\phi)}{\cos\phi}\times r$

$$\therefore \quad T = \frac{F_p(\sin\theta.\cos\phi+\cos\theta.\sin\phi)}{\cos\phi}\times r$$

$$= F_P\left[\sin\theta+\cos\theta\times\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\right]\times r$$

$$= F_p[\sin\theta+\cos\theta.\tan\phi]\times r \qquad \text{...(i)}$$

हम जानते हैं कि $l\sin\phi = r.\sin\theta$

$$\sin\phi = \frac{r}{l}.\sin\theta = \frac{\sin\theta}{n}$$

and

$$\cos\phi = \sqrt{1-\sin^2\phi} = \sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-\sin^2\theta}$$

$$\therefore \quad \tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{\sin\theta}{n}\times\frac{n}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}} = \frac{\sin\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}$$

$\tan\phi$ का मान समीकरण (i) में रखने पर, क्रैंक प्रयास

$$T = F_p\left[\sin\theta+\frac{\cos\theta.\sin\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\right]\times r$$

$$= F_p\times r\left[\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{2\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\right] \qquad \text{...(ii)}$$

क्योंकि n^2 की तुलना में $\sin^2\theta$ बहुत कम है अतः $\sin^2\theta$ को नगण्य मानने पर क्रैंक प्रयास

$$T = F_p\times r\left[\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{2n}\right] = F_p\times OM$$

उदाहरण 3.2—निम्न आंकड़ों के लिए एक आई०सी०इन्जन (I.C. engine) पर जड़त्व बल ज्ञात करो। बोर = 0.175 cm, स्ट्रोक = 0.2 m, इंजन स्पीड = 500 rpm, संयोजक दण्ड की लम्बाई = 0.4 m, क्रैंक कोण = T.D.C. से 60° तथा पश्चाग्र गति करने वाले अंगों का द्रव्यमान = 180 kg।

हल—दिया है—$D = 0.175$ m, $L = 0.2$ m,

AKC TECHNICAL CLASSES

$\therefore$ $$r = \frac{L}{2} = 0.1\,\text{m},\ n = 500\,\text{rpm}$$

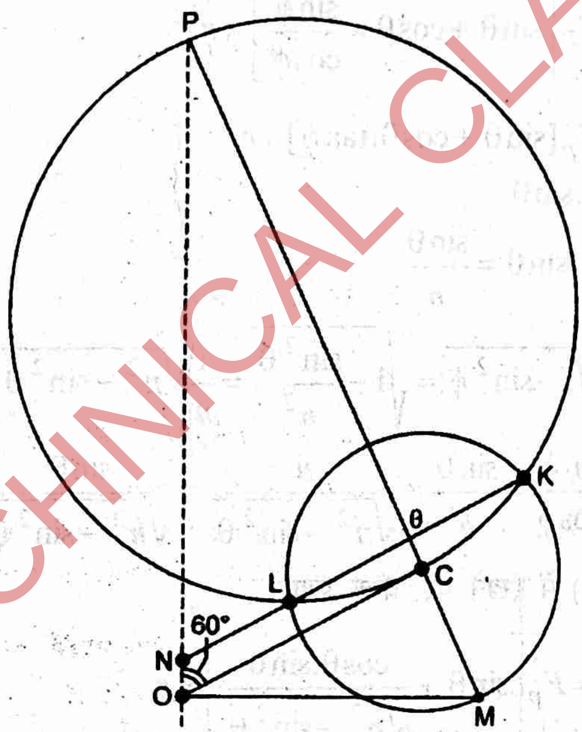
अत: $$\omega = \frac{2\pi \times 500}{600} = 52.4\,\text{rad/sec},$$

$$l = 0.4\,\text{m},\ m_g = 180\,\text{kg}$$

जड़त्व बल को ग्राफिय अथवा वैश्लेषिक विधि द्वारा निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है—

1. ग्राफिय विधि (Graphical method)— सर्वप्रथम हम एक उचित पैमाना मानकर चित्र 3.6 की भाँति क्लेन का त्वरण आरेख बनाते हैं। मापने पर,

$$ON = 38\,\text{mm} = 0.038\,\text{m}$$



चित्र 3.6

$\therefore$ पश्चाग्र गति करने वाले अंगों का त्वरण

$$a_r = \omega^2 \times ON = (52.4)^2 \times 0.038 = 104.34\,\text{m/sec}$$

हम जानते हैं कि जड़त्व बल

$$F_I = m_R \times a_R = 180 \times 104.34$$

$\therefore$ $$F_I = 18780\text{N} = \mathbf{18.78\,kN}$$ **उत्तर**

2. वैश्लैषिक विधि (Analytical method)— हम जानते हैं कि संयोजक दण्ड की लम्बाई तथा क्रैंक का अनुपात

$$n = \frac{l}{r} = \frac{0.4}{0.1} = 4$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$\therefore$ जड़त्व बल $$F_I = m_R.\omega^2.r\left[\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{n}\right]$$

$$= 180(52.4)^2 \times 0.1\left[\cos 60° + \frac{\cos 120°}{4}\right]$$

$$= 18530\,\text{N} = \mathbf{18.53\ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 3.3—एक क्षैतिज इंजन की क्रैंक पिन वृत्त त्रिज्या 300 mm है। पश्चाग्र अंगों का द्रव्यमान 250 kg है। जब क्रैंक I.D.C. से 60° पर है तब पिस्टन के दोनों तरफ के दाबों का अन्तर 0.35 N/mm² है। संयोजक दण्ड की लम्बाई 1.2 m तथा सिलेण्डर का व्यास 0.5 m है। इंजन की गति 250 rpm तथा पिस्टन छड़ का व्यास नगण्य मानने पर ज्ञात करें–(1) गाइडस पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया (2) संयोजक दण्ड पर दाब (3) क्रैंक पिन पर स्पर्शीय बल, तथा (4) क्रैंक शॉफ्ट पर घुमॉऊ घूर्ण।

हल—दिया है—$r = 0.3$ m, $m_R = 250$ kg, $\theta = 60°$, $\Delta p = p_1 - p_2 = 0.35\,\text{N/mm}^2$

$$l = 1.2\,\text{m},\ D = 0.5\,\text{m},\ N = 250\,\text{rpm}$$

या $$\omega = \frac{2\pi \times 250}{60} = 26.2\,\text{rad/sec}$$

सर्वप्रथम हम पिस्टन प्रयास ज्ञात करेंगे—

$\therefore$ पिस्टन पर कुल भार $$F_L = (p_1 - p_2) \times \frac{\pi}{4}D^2 = 0.35 \times \frac{\pi}{4}(500)^2 = 68730\,\text{N}$$

तथा $$n = \frac{l}{r} = \frac{1.2}{0.3} = 4$$

पश्चाग्र गति करने वाले अंगों पर जड़त्व बल

$$F_I = m_R.\omega^2.r\left[\cos\theta + \frac{\cos 2\theta}{n}\right]$$

$\therefore$ $$F_I = 250 \times (26.2)^2 \times 0.3\left[\cos 60° + \frac{\cos 120°}{4}\right] = 19306\,\text{N}$$

$\therefore$ पिस्टन प्रयास $$F_p = F_L - F_I = 68730 - 19306 = 49424\,\text{N}$$

$$= \mathbf{49.424\ kN}$$

1. गाइड्स पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया—माना ϕ = स्ट्रोक रेखा से संयोजक दंड का झुकाव

अब $$\sin\phi = \frac{\sin\theta}{n} = \frac{\sin 60°}{4} = \frac{0.866}{4} = 0.2165 \quad \text{या} \quad \phi = 12.5°$$

$\therefore$ अभिलम्ब प्रतिक्रिया

$$F_N = F_p.\tan\phi = 49.424 \times \tan 12.5° = \mathbf{10.96\ kN}$$ उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES

2. संयोजक दण्ड में दाब—

$$F_Q = \frac{F_p}{\cos\phi} = \frac{49.424}{\cos 12.5^\circ} = \mathbf{50.62\ kN}$$ उत्तर

3. क्रैंक पिन पर स्पर्शीय बल—

$$F_T = F_Q.\sin(\theta+\phi) = 50.62\sin(60^\circ+12.5^\circ) = \mathbf{48.28\ kN}$$ उत्तर

4. क्रैंक शॉफ्ट पर घुमॉऊ घूर्ण—क्रैंक शॉफ्ट पर घुमाऊ घूर्ण $T = F_T \times r$

$$\therefore \quad T = 48.28 \times 0.3 = \mathbf{14.484\ kN\text{-}m}$$ उत्तर

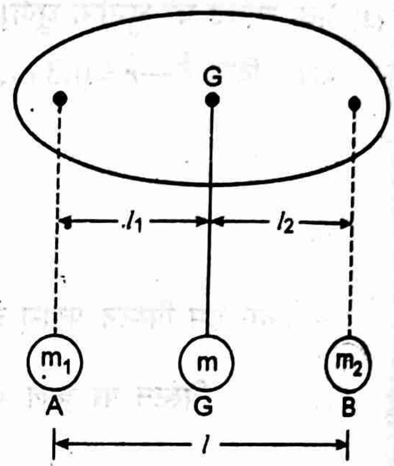
3.1.4 समतुल्य गतिक निकाय (Equivalent Dynamical System)

बाह्य बलों के प्रभाव में एक दृढ़ पिण्ड की गति को ज्ञात करने के लिए सामान्यत: यह आसान रहता है कि दृढ़ पिण्ड के स्थान पर दो द्रव्यमान एक स्थिर दूरी पर इस प्रकार लगायें कि—

(i) दोनों द्रव्यमानों का योग, दृढ़ पिण्ड के द्रव्यमान के बराबर हो,

(ii) दोनों द्रव्यमानों का गुरुत्व केन्द्र, दृढ़ पिण्ड के गुरुत्व केन्द्र पर ही हो, तथा

(iii) द्रव्यमानों का उनके गुरुत्व केन्द्रों के परित: जड़त्व आघूर्णों का योग पिण्ड के द्रव्यमान जड़त्व आघूर्ण के बराबर हो।



चित्र 3.7

जब उपरोक्त तीनों स्थितियाँ संतुष्ट होती हैं तब एक निकाय "**समतुल्य गतिक निकाय**" (Equivalent Dynamical system) कहा जा सकता है। माना एक दृढ़ पिण्ड, जिसका गुरुत्व केन्द्र G है, चित्र 3.7 में प्रदर्शित है। माना m = पिण्ड का द्रव्यमान,

k_G = गुरुत्व केन्द्र G के परित: परिभ्रमण त्रिज्या,

m_1 तथा m_2 = दो माने हुये द्रव्यमान

l_1 तथा l_2 = माने हुये द्रव्यमानों की गुरुत्व केन्द्रों से दूरी,

l = दोनों द्रव्यमानों के बीच की दूरी

तब उपरोक्त शर्तों के अनुसार

$$m_1 + m_2 = m \quad \ldots(i)$$

$$m_1 l_1 = m_2 l_2 \quad \ldots(ii)$$

तथा $$m_1(l_1)^2 + m_2(l_2)^2 = m(k_G)^2 \quad \ldots(iii)$$

समीकरण (i) व (ii) से,

$$m_1 = \frac{ml_2}{l_1+l_2} \quad \text{तथा} \quad m_2 = \frac{ml_1}{l_1+l_2}$$

m_1 तथा m_2 के मान समीकरण (iii) में रखने पर,

AKC TECHNICAL CLASSES

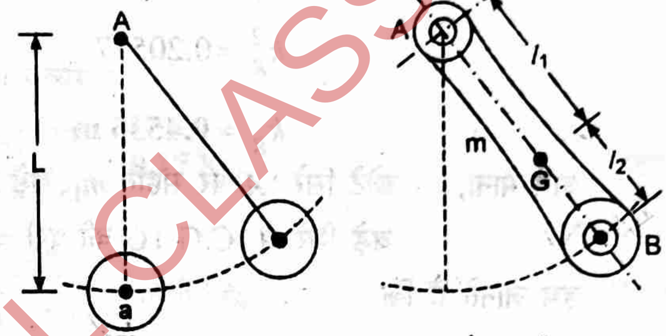
$$\frac{ml_2}{(l_1+l_2)}(l_1)^2+\frac{ml_1}{l_1+l_2}(l_2)^2=m(k_G)^2$$

या
$$l_1 . l_2=(k_G)^2 \qquad \ldots(iv)$$

यह समीकरण दोनों द्रव्यमानों के रखने का अभिष्ठ प्रतिबन्ध बताती है जिससे निकाय गतिक समतुल्य **(Dynamically Equivalent)** हो जाता है।

3.1.5 सरल तथा यौगिक पेंडुलम (Simple and compound pendulum)

चित्र 3.8(a,b) में क्रमशः एक सरल तथा एक यांत्रिक पेंडुलम प्रदर्शित है। इनके लिए कुछ उपयोगी सूत्र निम्न प्रकार हैं—



(a) सरल पेंडुलम (b) यौगिक पेंडुलम

चित्र 3.8

सरल पेंडुलम—(i) जड़ताघूर्ण (Moment of inertia)

$$I=mL^2$$

(ii) आवर्त काल (Periodic time) $t=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

(iii) आवृत्ति (Frequency) $n=\frac{1}{t}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$

यौगिक पेंडुलम— **(i) जड़ताघूर्ण** $I=m(k_g^2+l_1^2)$

(ii) आवर्तकाल $t=2\pi\sqrt{\frac{k_g^2+l_1^2}{gl_1}}$

(iii) आवृत्ति $n=\frac{1}{t}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gl_1}{k_g^2+l_1^2}}$

यहाँ—(i) $k_g=G$ (गुरुत्व केन्द्र) से गुजरती तथा गति समतल पर लम्ब अक्ष पर घूर्णन त्रिज्या (radius of gyration)

(ii) दोनों पेंडुलम की तुलना करने पर,

$\frac{K_g^2+l_1^2}{l_1}=L=$ दोनों पेंडुलम की समान आवृत्ति के लिए **सरल पेंडुलम की समतुल्य लम्बाई** (equivalent length)।

उदाहरण 3.4—एक संयोजक दंड (connecting rod) को छोटे सिरे पर लटकाया गया है तथा इसकी संहति (mass) 42 kg है। रॉड का गुरुत्वकेन्द्र छोटे सिरे से 700 mm दूरी पर है। यदि इसका आवर्तकाल (time period) 2 sec हो तो दो संहति वाला समतुल्य गतिक निकाय (Equivalent dynamical system having two mass) ज्ञात कीजिए जबकि इसकी एक संहति छोटे सिरे पर है।

हल— दिया है— $l_1=700\,\text{mm}=0.70\,\text{m},\ m=42\,\text{kg}$ तथा $t=2\,\text{sec}$

AKC TECHNICAL CLASSES

अब आवर्तकाल $t = 2\pi\sqrt{\frac{k_g^2 + l_1^2}{g l_1}}$ से,

$$2 = 2\pi\sqrt{\frac{k_g^2 + (0.7)^2}{9.81 \times 0.7}}$$

वर्ग करने पर $$\frac{1}{\pi^2} = \frac{k_g^2 + (0.7)^2}{9.81 \times 0.7}$$

$\therefore$ $$k_g^2 = 0.20577$$

$\therefore$ $$k_g = \mathbf{0.4536\ m}$$

अब माना, छोटे सिरे 'A' पर संहति m_1, बड़े सिरे 'B' पर संहति $= m_2$

बड़े सिरे से (C.G.) G की दूरी $= l_2$

हम जानते हैं कि

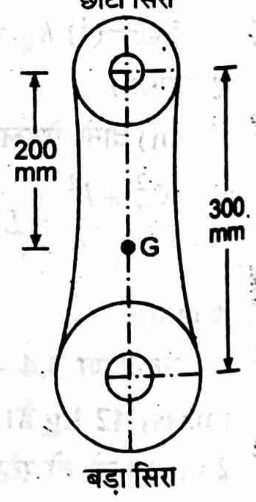
$$l_1 . l_2 = (k_g)^2$$

$\therefore$ $$l_2 = \frac{(k_g)^2}{l_1} = \frac{(0.20577)}{0.7} = \mathbf{0.2939\ m}$$ **उत्तर**

$$m_1 = \frac{m l_2}{l_1 + l_2} = \frac{42 \times 0.299}{(0.7 + 0.2939)} = \mathbf{12.42\ kg}$$ **उत्तर**

$$m_2 = \frac{m l_1}{l_1 + l_2} = \frac{42 \times 0.7}{(0.7 + 0.2939)} = \mathbf{29.58\ kg}$$ **उत्तर**

उदाहरण 3.5— एक गैस इन्जन की संयोजक दण्ड की केन्द्रों के मध्य लम्बाई 300 mm है। इसका द्रव्यमान 15 kg तथा द्रव्यमान जड़त्व आघूर्ण 7000 kg-mm^2 है। इसका गुरुत्व केन्द्र छोटे सिरे के केन्द्र से 200 mm की दूरी पर है। इस संयोजक दण्ड के लिए एक दो द्रव्यमान वाला समतुल्य निकाय ज्ञात कीजिये जबकि एक द्रव्यमान, छोटे सिरे के केन्द्र पर हो।



चित्र 3.9

हल—दिया है— $l = 300$ mm, $m = 15$ kg, $I = 7000$ kg-mm^2, $l_1 = 200$ mm

संयोजक दण्ड को चित्र 3.9 में प्रदर्शित किया जाता है—

माना k_G = संयोजक दण्ड की उसके $C.G.$ से गुजरने वाली अक्ष के परित: परिभ्रमण त्रिज्या

हम जानते हैं कि $I = m(k_G)^2$

$\therefore$ $$7000 = 15(k_G)^2$$

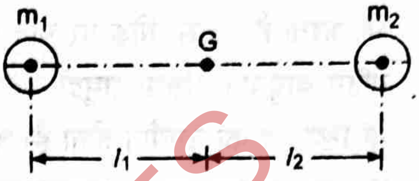
$\therefore$ $$k_G = 21.6\ \text{mm.}$$

क्योंकि एक समतुल्य द्रव्यमान छोटे सिरे के केन्द्र पर है इसलिए माना दूसरा द्रव्यमान G से l_2 दूरी पर है। (देखें चित्र 3.10)। हम जानते हैं कि एक समतुल्य गतिक निकाय के लिए,

$$l_1 l_2 = (k_G)^2$$

$$\therefore \quad l_2 = \frac{(k_G)^2}{l_1} = \frac{466.7}{200}$$

$$= 2.33 \text{ mm}$$



चित्र 3.10

माना, m_1 = छोटे सिरे पर स्थित द्रव्यमान

m_2 = गुरुत्व केन्द्रों G से l_2 दूरी पर स्थित द्रव्यमान

हम जानते हैं $$m_1 = \frac{ml_2}{l_1 + l_2} = \frac{15 \times 2.33}{200 + 2.33} = \mathbf{0.17\ kg}$$ उत्तर

तथा $$m_2 = \frac{ml_1}{l_1 + l_2} = \frac{15 \times 200}{200 + 2.33} = \mathbf{14.83\ kg}$$ उत्तर

§ 3.2 घूर्णाक्षदर्शी या जायरोस्कोप (Gyroscope)

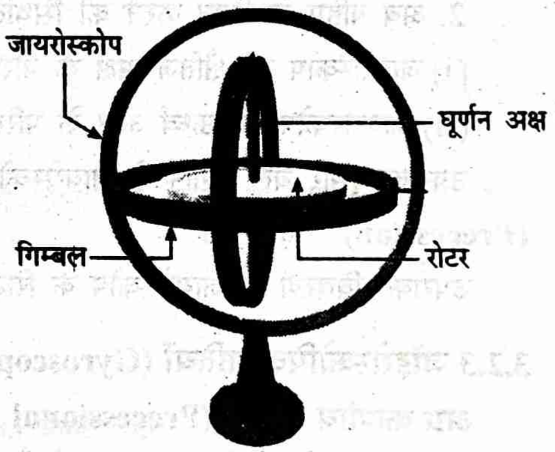
घूर्णाक्षदर्शी या घूर्णदर्शी (Gyroscope) एक युक्ति है जो किसी वस्तु की कोणीय स्थिति (झुकाव) को मापने के काम आता है। इसकी क्रियाविधि कोणीय संवेग के संरक्षण के सिद्धान्त पर आधारित है। इसका प्रयोग जहाँ चुम्बकीय सूई काम नहीं करती वहाँ भी नेविगेशन में होता है। ये चुम्बकीय सूई की अपेक्षा अधिक सूक्ष्म मापी (precise) भी होते हैं।

"Gyroscope is a device which is used to measure the angular position (tilt) of an object. Its mechanism is based on the principle of protection of angular momentum. The use of the rotor is where the magnetic needle does not work there is also navigation. These are also more premeditative than magnetic needles."

3.2.1 परिभाषा (Definition)

घूर्णाक्षदर्शी या जायरोस्कोप एक ऐसा स्पिन करता हुआ पहिया अथवा संहति (mass) है जो सार्वत्रिक (universal) प्रकार से इस भाँति माउण्ट किया गया (mounted) है कि केवल अपना गुरुत्व केन्द्र (centre of gravtiy) स्थिर स्थिति में रखते हुए किसी भी दिशा में मुड़ अथवा घूम सकता है। देखे चित्र 3.11

जायरोस्कोपीय गति (gyroscopic motion) के अन्तर्गत कोई पिण्ड स्पिन करने के साथ-साथ वक्रीय गति (curved motion) भी करता है।



चित्र 3.11

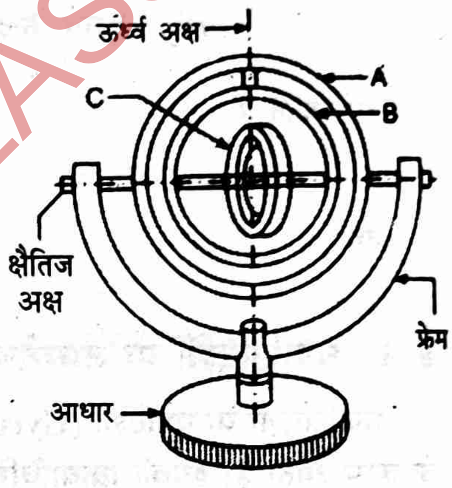
AKC TECHNICAL CLASSES

उदाहरण तथा उपयोग (Applications)

सरलतम जायरोस्कोप एक घूमता हुआ अथवा स्पिन (spin) करता हुआ लट्टू है जो घूमने के साथ-साथ वक्रीय गति भी करता है। किसी मोड़ पर गति के अनतर्गत रेल इन्जन तथा ट्रक के पहिए, कार, मोटर साइकिल, स्कूटर तथा साइकिल के पहिए वायुयान अथवा समुद्री जहाज के प्रोपैलर (propeller) तथा जायरोकम्पास (gyrocompass) आदि में जायरोस्कोप के सिद्धान्त का उपयोग होता है। कुछ परिस्थितियों में जायरोस्कोप के प्रभाव अवांछित (undesirable) होते हैं जबकि अन्य में इस प्रभाव द्वारा लाभदायक बल उपजाए जाते हैं। इसका उपयोग अन्तर महाद्वीपीय बेलिस्टिक प्रक्षेपास्त्रों (intercontinental ballistic missiles) तथ रेडियो नियन्त्रित हेलिकॉप्टर (radio controlled helicopters) आदि में भी होता है।

3.2.2 घूर्णाक्षदर्शी (Gyroscope) की क्रिया

चित्र 3.12 में जायरोस्कोप का एक नमूना प्रदर्शित है। इसमें दो रिंगों A तथा B के केन्द्रो पर एक पहिया C एक्सिल सहित लगा है। यह पहिया तथा एक्सिल रिंग B पर क्षैतिज बियरिंगों पर टिके है और घूमने के लिए स्वतन्त्र हैं। रिंग B, रिंग A पर ऊर्ध्व बियरिंगों द्वारा टिका हैं। एक्सिल तथा रिंग B की बियरिंगें परस्पर 90° पर हैं। रिंगों सहित पूर्ण संयोजन (assembly) फ्रेम की क्षैतिज बियरिंगों पर टिका है। एक्सिल तथा पहिंए की गति के अतिरिक्त यह संयोजन फ्रेम की क्षैतिज अक्ष तथा रिंग A की ऊर्ध्व अक्ष पर घूम सकता है।



चित्र 3.12

जब जायरोस्कोप स्थिर है तो पहिए का एक्सिल किसी भी दिशा को इंगित (point out) करते हुए सन्तुलित हो सकता है, क्योंकि संयोजन या असैम्बली का गुरुत्व केन्द्र स्थिर रहता है।

यदि पहिए को स्पिन कराया जाता है तो निम्न प्रकार के लक्षण प्रदर्शित होते हैं—

जायरोस्कोप के लक्षण, प्रभाव तथा सिद्धान्त (Characteristics, effect and principles)

1. पहिए को स्पिन कराने से जायरोस्कोप के एक्सिल की दिशा में परिवर्तन नहीं होता, भले ही फ्रेम के आधार को कितना ही मोड़कर रखा जाए। यह लक्षण **जायरोस्कोपीय जड़त्व** (gyroscopic inertia) के कारण प्रदर्शित होता है।

2. अब पहिए के स्पिन करने की सिथति में यदि,

(i) जायरोस्कोप की क्षैतिज अक्ष के परित: बल लगाया जाये तो जायरोस्कोप ऊर्ध्व अक्ष के परित: घूम जाता है।

(ii) जायरोस्कोप की ऊर्ध्व अक्ष के परित: बल लगाया जाये तो यह क्षैतिज अक्ष के परित: घूम जाता है।

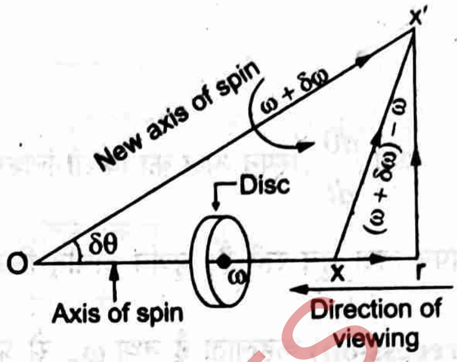
उपरोक्तानुसार बल लगाने से जायरोस्कोप के क्षैतिज अक्ष अथवा ऊर्ध्व अक्ष के परित: घूम जाने को **"प्रीसीशन (Precession)"** कहते हैं।

उपरोक्त विवरण ही जायरोस्कोप के सिद्धान्त (principle), प्रभाव (effect) और लक्षण कहलाते हैं।

3.2.3 जॉइरोस्कोपिक गतियाँ (Gyroscopic motions)

अग्र कोणीय गतियाँ (Precessional Angular Motion)— हम जानते हैं कि समय के सापेक्ष कोणीय वेग में परिवर्तन की दर को कोणीय त्वरण कहते हैं। कोणीय त्वरण एक सदिश राशि है तथा इसको वेक्टर आरेख द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।

AKC TECHNICAL CLASSES



चित्र 3.13

माना एक डिस्क जैसा चित्र 3.13 में प्रदर्शित है, अक्ष ox (जिसे स्पिन अथवा घुमाव अक्ष भी कहते हैं) के परित: घूम रही है। सामने से देखने पर घूमने की दिशा वामावर्त (Anticlockwise) है तथा यह कागज के समतल के लम्ब समतल में ω कोणीय वेग से घूम रही है।

एक सूक्ष्म समय अन्तराल δt के पश्चात्, मान डिस्क नई घूर्णन अक्ष, जो $\delta\theta$ कोण पर है, के परित: कोणीय वेग $(\omega+\delta\omega)$ से घूम रही है। दाँये हाथ का पेंच नियम प्रयोग करने पर डिस्क के प्रारम्भिक कोणीय वेग (ω), को वेक्टर ox द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। डिस्क के अन्तिम कोणीय वेग $(\omega+\delta\omega)$ के वेक्टर ox' द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। (देखें चित्र 3.13)। वेक्टर xx', δt समय में कोणीय वेग में परिवर्तन अर्थात् डिस्क के कोणीय त्वरण को प्रदर्शित करता है। वेक्टर xx' को दो घटकों, एक ox के समान्तर तथा दूसरा लम्ब लम्ब में तोड़ा जा सकता है।

ox दिशा में कोणीय त्वरण का घटक,

$$\alpha_t = \frac{xr}{\delta t} = \frac{or - ox}{\delta t}$$

$$\therefore \quad \alpha_t = \frac{ox'\cos\delta\theta - ox}{\delta t} = \frac{(\omega+\delta\omega)\cos\delta\theta - \omega}{\delta t} = \frac{\omega\cos\delta\theta + \delta\omega\cos\delta\theta - \omega}{\delta t}$$

क्योंकि $\delta\theta$ बहुत छोटा है अत: $\cos\delta\theta = 1$ रखने पर,

$$\alpha_t = \frac{\omega+\delta\omega-\omega}{\delta t} = \frac{\delta\omega}{\delta t}$$

जब $\delta t \to 0$ हो
$$\alpha_t = \underset{\delta t\to 0}{Lt}\left(\frac{\delta\omega}{\delta t}\right) = \frac{d\omega}{dt}$$

ox की लम्ब दिशा में कोणीय त्वरण का घटक

$$\alpha_c = \frac{rx'}{\delta t} = \frac{ox'.\sin\delta\theta}{\delta t} = \frac{(\omega+\delta\omega).\sin\delta\theta}{\delta t} = \frac{\omega\sin\delta\theta + \delta\omega\sin\delta\theta}{\delta t}$$

क्योंकि $\delta\theta$ बहुत छोटा है, अत: $\sin\delta\theta = \delta\theta$ रखने पर,

$$\alpha_c = \frac{\omega.\delta\theta + \delta\omega.\delta\theta}{\delta t} = \frac{\omega.\delta\theta}{\delta t}$$

$\left(\frac{\delta\omega.\delta\theta}{\delta t}\right.$ को छोटा होने के कारण नगण्य माने पर$\left.\right)$

जब $\delta t \to 0$ हो $\alpha_c = \underset{\delta t\to 0}{Lt}\left(\frac{\omega.\delta\theta}{\delta t}\right) = \omega \times \frac{d\theta}{dt} = \omega.\omega_p$

$\therefore$ डिस्क का कुल कोणीय त्वरण = वेक्टर $xx' = \alpha_t$ तथा α_c का वेक्टर योग

AKC TECHNICAL CLASSES

$$= \frac{d\omega}{dt} + \omega \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \omega.\omega_p$$

जहाँ $\frac{d\theta}{dt}$,स्पिन अक्ष का किसी निश्चित अक्ष के परित: कोणीय वेग ही यह अक्ष, उस समतल के लम्बवत् होगी जिसमें सिपन अक्ष घूम रही है। घूर्णन अर्थात् स्पिन अक्ष का कोणीय वेग $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$, **अग्र कोणीय वेग (Angular Velocity of Precession)** कहलाता है तथा ω_p से प्रदर्शित होता है। वह अक्ष, जिसके परित: स्पिन अक्ष घूमती है, **अग्र-अक्ष (Axis of Precession)** कहलाती है। अग्र अक्ष (Axis of Precession) के परित: स्पिन अक्ष की कोणीय गति को **अग्र कोणीय गति (Precessional Angular Motion)** कहते हैं।

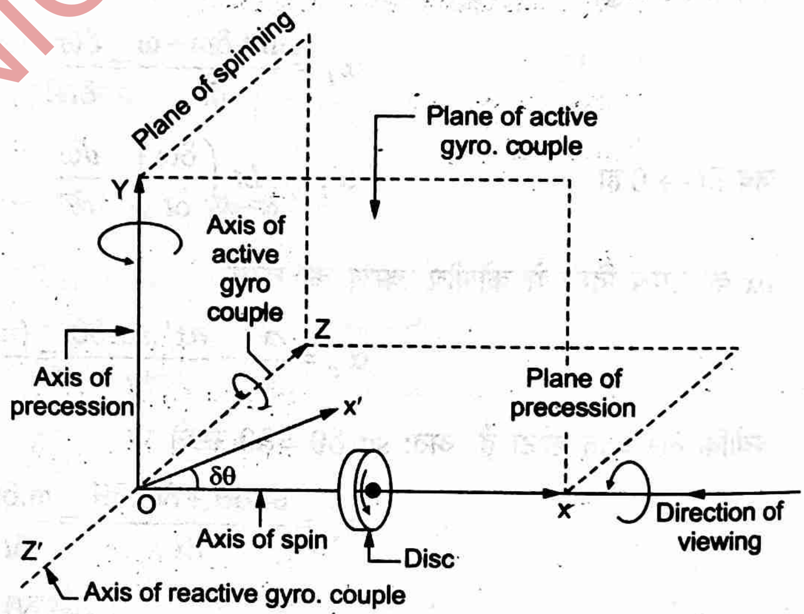
नोट— 1. अग्र अक्ष उस समतल के लम्ब होगी जिसमें स्पिन अक्ष घूर्णन करती है।

2. यदि डिस्क का कोणीय वेग, स्पिन अक्ष की सभी स्थितियों के लिए नियत रहता है तब $\frac{d\theta}{dt}$ शून्य होता है तदानुसार α_c भी शून्य होगा।

3. यदि डिस्क का कोणीय वेग, मान में नियत परन्तु दिशा में परिवर्तित होता है तो डिस्क का कोणीय त्वरण $\alpha_c = \omega.\frac{d\theta}{dt} = \omega.\omega_p$ होगा। कोणीय त्वरण α_c को **"जाइरोस्कोपिक त्वरण" (Gyroscopic Acceleration)** कहते हैं।

3.2.4 जाइरोस्कोपिक युग्म (Gyroscopic Couple)

माना एक डिस्क, स्पिन अक्ष OX के परित: ω rad / sec के कोणीय वेग से घूम रही है। सामने से देखने पर घूमने की दिशा वामावर्त होगी। (देखे चित्र 3.14(a)) क्योंकि वह समतल जिसमें डिस्क घूम रही है, समतल YOZ के समानान्तर है अत: यह **स्पिन समतल (plane of spinning) कहलाता है।** समतल XOZ एक क्षैतिज समतल है तथा स्पिन अक्ष के परित: क्षैतिज समतल के समानान्तर एक समतल में घूमती है। दूसरे शब्दों में, स्पिन अक्ष को अक्ष OY के परित: कोणीय वेग ω_p rad / sec से घूमता हुआ माना जा सकता है। यह क्षैतिज समतल XOZ **अग्र समतल (plane of precession)** तथा OY के **अग्र अक्ष (axis of precession)** कहलाता है।



चित्र 3.14 (a)

माना $I = OX$ के परित: डिस्क का द्रव्यमान जड़त्व का द्रव्यमान आघूर्ण

$\omega =$ डिस्क का कोणीय वेग

$\therefore$ डिस्क का कोणीय संवेग $= I.\omega$

AKG TECHNICAL CLASSES

क्योंकि कोणीय संवेग एक सदिश राशि है अतः यह वेक्टर $\vec{ox}$ से प्रदर्शित किया जा सकता है। (देखें चित्र 3.14 (b)) ऊपर से देखने पर स्पिन अक्ष OX, अक्ष OY के परितः वामावर्त (Anticlockwise) भी घूम रही है। माना स्पिन अक्ष OX समतल XOZ में δt समय में छोटा सा कोण $\delta\theta$ घूमकर नयी स्थिति OX' पर आती है।

कोणीय वेग ω को नियम मानते हुए, अब कोणीय संवेग को वेक्टर OX' से प्रदर्शित किया जाता है।

$$\text{कोणीय संवेग में परिवर्तन} = \vec{ox'} - \vec{ox} = \vec{xx'} = \vec{ox}.\delta\theta \text{ (}xx'\text{ की दिशा में)}$$

$$= I.\omega.\delta\theta$$

$$\text{तथा कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर} = I.\omega.\frac{\delta\theta}{\delta t}$$

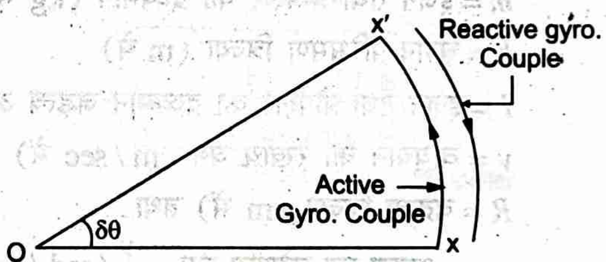
क्योंकि कोणीय संवेग में परिवर्तन की दर, डिस्क पर बलयुग्म के प्रयोग के कारण होगा। अतः डिस्क पर लगने वाला बलयुग्म, जो अग्रता (precession) उत्पन्न करेगा

$$C = \underset{\delta t \to 0}{Lt}\ I\omega \times \frac{\delta\theta}{\delta t} = I.\omega \times \frac{d\theta}{dt} = I.\omega.\omega_p \qquad \ldots\left(\because \frac{d\theta}{dt} = \omega_p\right)$$

जहाँ ω_p = स्पिन अक्ष की अग्रता (precession) का कोणीय वेग या स्पिन अक्ष की अक्ष OY के परितः घूर्णन गति SI Units में, C का मात्रक Nm होगा जबकि I, kgm^2 में है।

यहाँ यह बातें ध्यान देने योग्य हैं—

1. वेक्टर xx' की दिशा में, बलयुग्म $I.\omega.\omega_p$ **क्रियाशील जायरोस्कोपिक बलयुग्म (Active Gyroscopic Couple)** कहलाता है (देखें चित्र 3.14 (b))। वेक्टर xx' समतल XOZ अथवा क्षैतिज समतल में होगा। बहुत सूक्ष्म विस्थापन $\delta\theta$ के लिए वेक्टर xx' ऊर्ध्वाधर समतल XOY के लम्बवत् होगा। इस प्रकार कोणीय संवेग में परिवर्तन करने वाला बलयुग्म, समतल XOY में होगा। चित्र 3.14 (a) में वेक्टर xx' समतल XOY में वामावर्त आघूर्ण प्रदर्शित करेगा अतः समतल XOY **क्रियाशील जायरोस्कोपिक बलयुग्म का समतल** कहते हैं तथा अक्ष OZ, जिसके परितः बलयुग्म कार्य करता है, को **क्रियाशील जायरोस्कोपिक बलयुग्म की अक्ष** कहते हैं।



चित्र 3.14 (b)

2. जब स्पिन अक्ष स्वयं कोणीय वेग ω_p से गति करता है तो डिस्क पर प्रतिक्रिया बलयुग्म (reactive couple) कार्य करता है जो समान मान $I\omega.\omega_p$ का होगा परन्तु दिशा विपरीत होगी। यह प्रतिक्रिया बलयुग्म, जो डिस्क पर कार्यरत् होगा जब स्पिन अक्ष, अग्र अक्ष (axis of precession) के परितः घूमती है, प्रतिक्रिया जायरोस्कोपिक बलयुग्म (reactive gyroscopic couple) कहलाता है। इसकी अक्ष चित्र 3.14 (a) में OZ' से प्रदर्शित है।

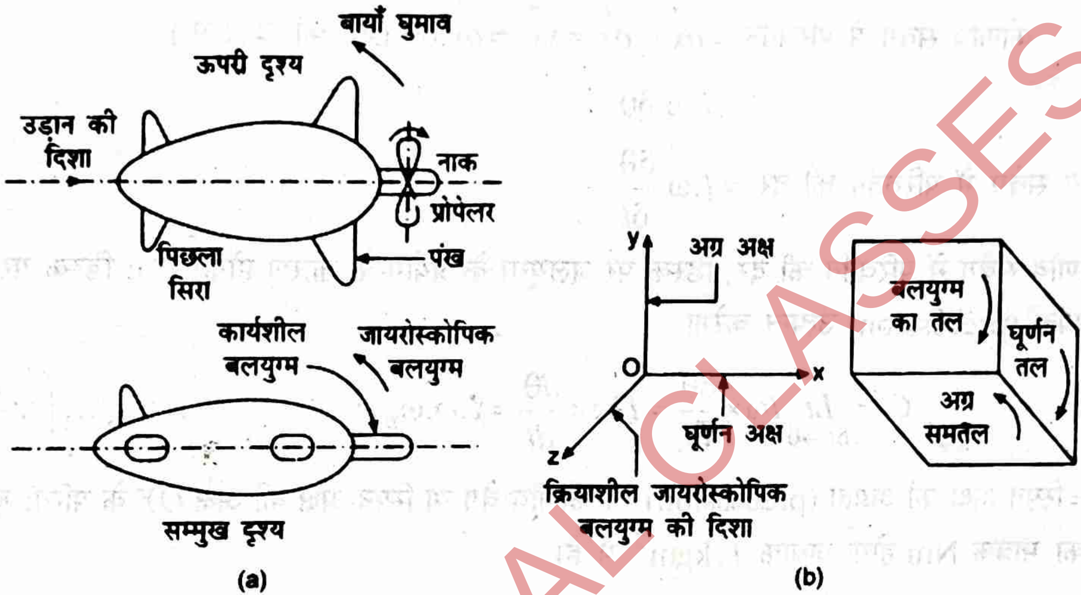
3. जायरोस्कोपिक बलयुग्म प्रायः बियरिंगों द्वारा लगाया जाता है जो शॉफ्ट को सहारते हैं। बियरिंग समान तथा विपरीत बलयुग्म का प्रतिरोध करते हैं।

4. जायरोस्कोपिक सिद्धान्त का प्रयोग **''जायरोस्कोप''** नामक उपकरण में किया जाता है. तरंगों के रोलिंग तथा पिचिंग प्रभाव को न्यूनतम करने के लिए जायरोस्कोप को पानी के जहाजों में लगाया जाता है। इनका प्रयोग हवाई जहाजों, मोनोरेलकारों, जाइरोकम्पास आदि में भी होता है।

AKT TECHNICAL CLASSES

3.2.5 एक वायुयान पर जायरोस्कोपिक बलयुग्म का प्रभाव (Effect of the Gyroscopic Couple on an Aeroplane)

एक वायुयान का ऊपरी तथा सम्मुख दृश्य चित्र 3.15 (a) में प्रदर्शित है। माना इंजन या प्रोपेलर (Propeller) दक्षिणावर्त (Clockwise) दिशा में घूम रही है। जब उसे पिछले सिरे (rear end) से देखा जाता है। वायुयान बाँयी तरफ घूमता है।



चित्र 3.15

माना ω = इंजन का कोणीय वेग (rad / sec) में

m = इंजन तथा प्रोपेलर का द्रव्यमान (kg में)

k = घूर्णन/परिभ्रमण त्रिज्या (m में)

I = इंजन तथा प्रोपेलर का द्रव्यमान जड़त्व आघूर्ण (Kg-m^2 में) $= mk^2$

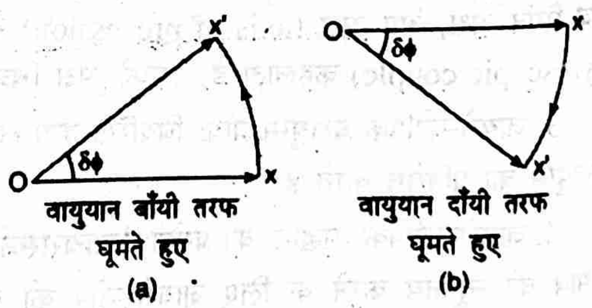
v = वायुयान का रेखीय वेग (m / sec में)

R = वक्रता त्रिज्या (m में) तथा

ω_p = अग्रता का कोणीय वेग $= \frac{v}{R}$ (rad / sec)

अत: वायुयान पर कार्यरत् जायरोस्कोपिक बलयुग्म $C = I.\omega.\omega_p$

बाँयी तरफ घूमने से पहले, कोणीय संवेग सेक्टर ox से प्रदर्शित है। जब वह बाँयी तरफ घूमता है तब क्रियाशील जायरोस्कोपिक बलयुग्म कोणीय संवेग वेक्टर की दिशा ox' में परिवर्तित कर देता है। देखें चित्र 3.16 (a)। वेक्टर xx', कोणीय संवेग में परिवर्तन को प्रदर्शित करता है तथा ox के लम्बवत् होता है। इस प्रकार क्रियाशील जायरोस्कोपिक बलयुग्म का समतल XOY, xx' के लम्बवत् होगा। हम क्रियाशील जायरोस्कोपिक बलयुग्म की दिशा को दक्षिणावर्ती (Clockwise) पाते है। (देखें चित्र 3.16 (a))।



चित्र 3.16 (a)

AKC TECHNICAL CLASSES

दूसरे शब्दों में, बाँये हाथ घूमने के लिए, अक्ष oz में वायुयान पर क्रियाशील जायरोस्कोपिक बलयुग्म दक्षिणावर्त (Clockwise) होगा जैसा की चित्र 3.16 (b) में प्रदर्शित है।

प्रतिक्रिया जायरोस्कोपिक बलयुग्म, जो परिमाण में क्रियाशील बलयुग्म के बराबर होगा, दूसरी दिशा में क्रिया करेगा अर्थात् वामावर्त (anticlockwise) घूमेगा। इस बलयुग्म के प्रभाव में वायुयान की नाक (nose) उठेगी तथा पूँछ (Tail) नीचे जायेगी।

इसके ठीक विपरीत जब वायुयान दाँयी तरफ घूमेगा तथा परिस्थितियाँ समान ही होंगी तब प्रतिक्रिया जायरोस्कोपिक बलयुग्म के प्रभाव में नाक (nose) नीचे जायेगी तथा पूँछ (Tail) ऊपर जायेगी।

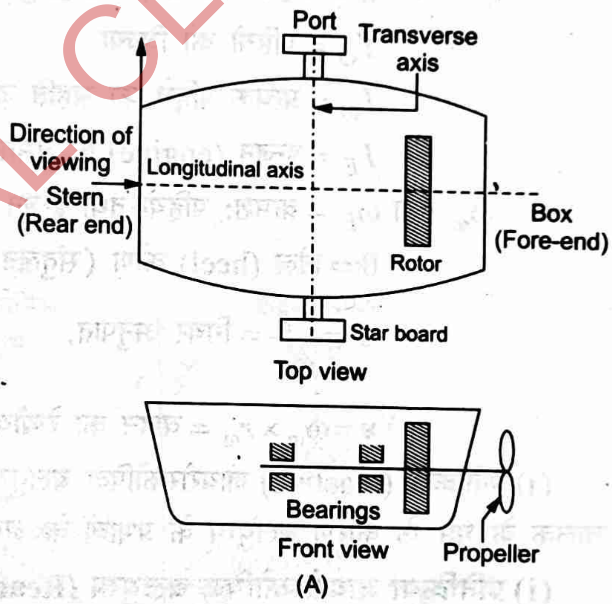
3.2.6 पानी के जहाज पर स्टीयरिंग के दौरान जायरोस्कोपिक बलयुग्म प्रभाव (Effect of Gyroscopic Couple on a Naval Ship During Steering)

चित्र 3.17 (a) में पानी के जहाज का ऊपरी तथा सम्मुख दृश्य प्रदर्शित है।

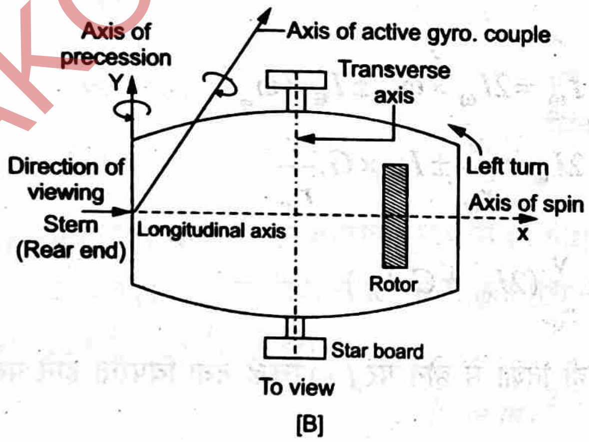
एक पूरे जहाज को एक वक्र (curve) में बाँयीं या दाँयी तरफ मोड़ने को स्टियरिंग (steering) कहते हैं जब जहाज आगे बढ़ रहा होता है।

माना एक जहाज बाँयी तरफ मुड़ रहा है (चित्र 3.17 (b)) तथा रोटर (rotor) दक्षिणावर्त (clockwise) घूम रहा है। जब उसे जहाज के पिछले भाग से देखा जाता है। पानी के जहाज पर जायरोस्कोपिक बलयुग्म के प्रभाव को वायुयान की भाँति ही समझा जा सकता है।

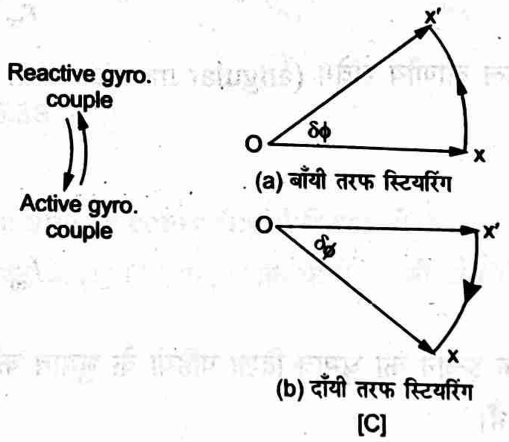
जब रोटर दक्षिणावर्त घूमता है, तब इसका कोणीय संवेग वेक्टर ox दिशा में होगा। जब जहाज को बाँयी तरफ घुमाया जाता है तब क्रियाशील जायरोस्कोपिक बलयुग्म इस वेक्टर की दिशा ox से ox' कर देगा। वेक्टर xx' अब क्रियाशील जायरोस्कोपिक बलयुग्म को प्रदर्शित करेगा तथा ox के लम्बवत् होगा। इस प्रकार क्रियाशील जायरोस्कोपिक बलयुग्म का समतल, xx' के लम्बवत् होगा तथा इसकी दिशा, oz अक्ष में बाँये हाथ घूमने के लिए, दक्षिणावर्त (clockwise) होगी। देखे चित्र 3.17 (c)।



चित्र 3.17 (a)



चित्र 3.17 (b)



चित्र 3.17 (c)

AKC TECHNICAL CLASSES

समान परिमाण का प्रतिक्रिया जायरोस्कोपिक बलयुग्म दूसरी दिशा में कार्य करेगा अर्थात् वामावर्त दिशा (anticlockwise direction) में होगा। इस प्रतिक्रिया जायरोस्कोपिक बलयुग्म का प्रभाव अग्र भाग को उठाने तथा पिछले भाग को दबाने का होगा।

यदि जहाज समान परिस्थितियों में दाँयी तरफ घूमता है तो प्रतिक्रिया जायरोस्कोपिक बलयुग्म का प्रभाव जहाज के अग्र भाग को दबाने तथा पिछले भाग को उठाने का होगा।

3.2.7 दो पहिया वाहन पर जायरोस्कोपिक प्रभाव एवं स्थिरता (Gyroscopic effect and stability of a two wheel vehicle)

चित्र 3.17 (a) में एक दो पहिया वाहन की घुमाव पथ पर स्थिति को प्रदर्शित किया गया है। चित्रानुसार माना—

R = मार्ग के घुमाव की त्रिज्या,

m = वाहन तथा सवार, की संयुक्त संहति,

h = वाहन तथा सवार के (c.g.) की ऊँचाई,

Y_ω = पहियों की त्रिज्या,

I_ω = प्रत्येक पहिये का संहति जड़ताघूर्ण,

I_E = इन्जन (engine) के घुमाऊँ अंगों का संहति जड़ता घूर्ण;

ω_ω तथा ω_E = क्रमशः पहियों तथा इन्जन के कोणीय वेग,

θ = हील (heel) कोण (संतुलन स्थिति में वाहन का ऊर्ध्व से कोण),

$G = \frac{\omega_E}{\omega_w}$ = गियर अनुपात,

$v = \omega_w \times r_\omega$ = वाहन का रेखीय वेग।

(i) प्रतिक्रिया (reactive) जायरोस्कोपिक बलयुग्म, (ii) अपकेन्द्री बल F_c के कारण बलयुग्म एवं (iii) वाहन तथा चालक के भार के कारण बलयुग्म के प्रभावों के अन्तर्गत वाहन का सन्तुलन बना रहता है।

(i) प्रतिक्रिया जायरोस्कोपिक बलयुग्म (Reactive gyroscopic couple)

पहियों का कोणीय वेग $\omega_w = v / r_\omega$

अतः इंजन का कोणीय वेग $\omega_E = G.\omega_w = G.\frac{v}{r_w}$

अब कुल कोणीय संवेग (angular momentum) $= I_\omega = 2I_\omega \times \omega_w \pm I_\epsilon \times \omega_\epsilon$

$$= 2I_w \times \frac{v}{r_w} \pm I_E \times G.\frac{v}{r_w}$$

$$\therefore \quad I_\omega = \frac{v}{r_w}(2I_\omega \pm G.I_E)$$

वाहन के इन्जन की घुमाव दिशा पहियों के घुमाव की ही दिशा में होने पर (+) चिन्ह तथा विपरीत होने पर (−) चिन्ह प्रयोग करते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

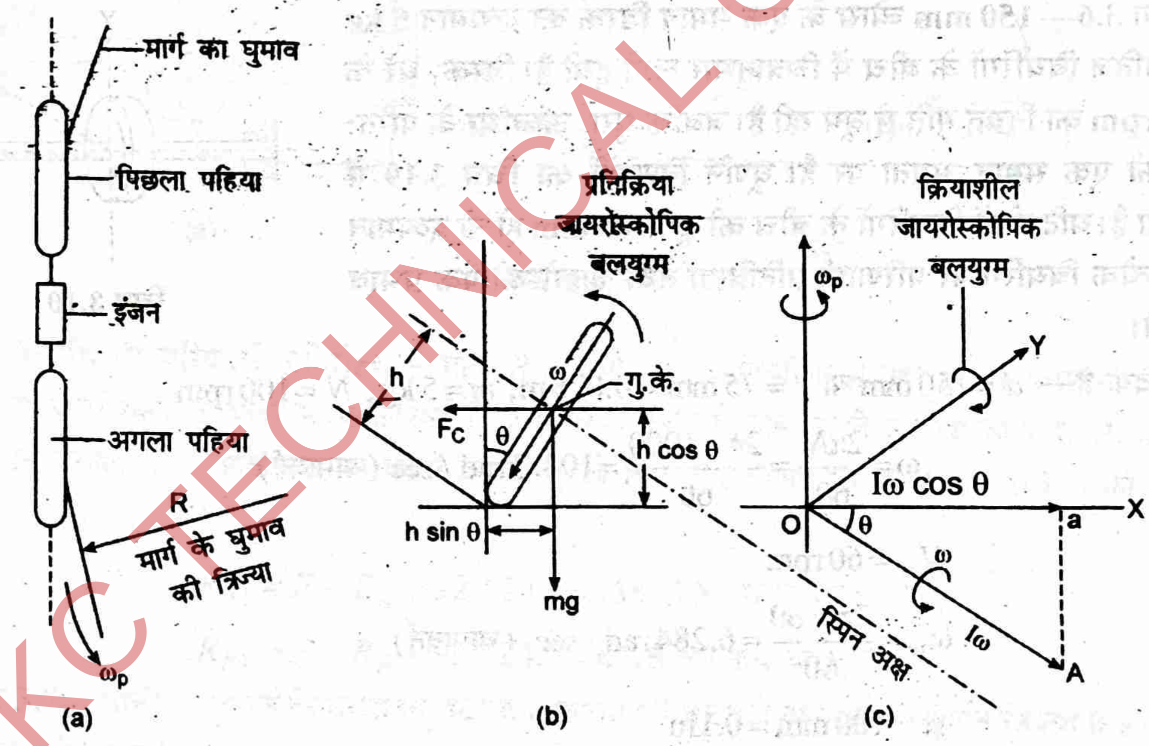
वक्र मार्ग (curved path) पर चलते समय वाहन सदैव ऊर्ध्वाधर (vertical) से किसी कोण θ पर (वक्र के केन्द्रों की ओर) झुक जाता है। यह कोण (θ) हील का कोण (angle of heel) कहलाता है। इस प्रकार पहियों की स्पिन अक्ष भी क्षैतिज से θ कोण पर झुकने के कारण कोणीय संवेग का सदिश $I.\omega$ अक्ष ox से θ कोण पर झुकता है परन्तु अग्रता (precession) की अक्ष $o\text{-}z$ ऊर्ध्वाधर है। इसलिए $I.\omega$ का $o\text{-}x$ पर क्षैतिज घटक $I.\omega\cos\theta$ प्रयोग करते हैं। अत:

जायरोस्कोपिक बलयुग्म, $C_1 = I.\omega.\cos\theta \times \omega_p$

$$= \frac{v}{r_\omega}(2I_\omega \pm G.I_E)\cos\theta \times \frac{v}{R} \qquad \left(\because \omega_r = \frac{v}{R}\right)$$

$$\therefore \qquad C_1 = \frac{v^2}{R.r_\omega}(2I_\omega \pm G.I_E).\cos\theta$$

यह क्रियाशील (active) जायरोस्कोपिक बलयुग्म प्रदक्षिण (clockwise) दिशा में है। देखें चित्र 3.18 (c)। इस प्रकार प्रतिक्रिया (reactive) जायरोस्कोपिक बलयुग्म प्रवाम दिशा में (चित्र 3.18 (b)) वाहन पर क्रिया करेगा परन्तु इसका मान C_1 के बराबर ही होगा।



चित्र 3.18

(ii) अपकेन्द्रीय बल F_c के कारण बलयुग्म (Couple due to centrifugal force F_c)

अपकेन्द्री बल (F_c) वाहन तथा सवार के संयुक्त गुणनखण्ड के (C.G.) पर, (वक्र के केन्द्र की ओर) क्षैतिज में क्रिया करता है। (देखें चित्र 3.18 (b))।

$$\therefore \qquad F_c = mv^2 / R$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$\therefore$ F_c के कारण अपकेन्द्री बलयुग्म $C_2 = F_c \times h\cos\theta = \left(\frac{mv^2}{R}\right) h\cos\theta$

(वाहन पर प्रवाम anticlockwise)

(iii) वाहन तथा चालक के भार के कारण बलयुग्म (संतुलक बलयुग्म) (Balancing couple)

चित्र 3.18 (b) के अनुसार,

संतुलक बलयुग्म $C_B = mg \times h\sin\theta$ (वाहन पर प्रदर्शित clockwise)

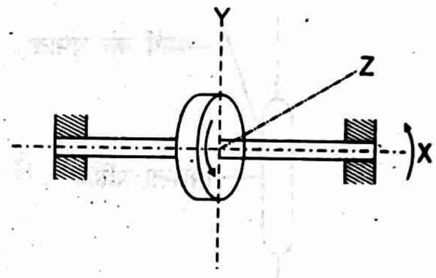
अत: वाहन की स्थिरता (stability) के लिए,

संतुलक बलयुग्म (C_B) = कुल पलटने वाला (overturning) बलयुग्म $(C_1 + C_2)$

$$\therefore \quad mgh.\sin\theta = \frac{v^2}{R}\left[\frac{(2I_\omega \pm G.I_E)}{r_\omega} + mh\right].\cos\theta$$

इस सम्बन्ध से, वाहन के सन्तुलन के लिए, ऊर्ध्वाधर से उसका झुकाव कोण (angle of heel) θ ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 3.6— 150 mm व्यास के एक समान डिस्क का द्रव्यमान 5 kg है। यह दो क्षैतिज बियरिंगों के बीच में चित्रानुसार लगी हुयी है। डिस्क, धूरे के परित: 100 rpm की नियत गति से घूम रही है। जबकि धुरा, ऊर्ध्वाधर के परित: 60 rpm की एक समान अग्रता पर है। घूर्णन दिशाओं को चित्र 3.19 में दिखाया गया है। यदि दोनों बियरिंगों के बीच की दूरी 100 mm हो तो द्रव्यमान के कारण प्रत्येक बियरिंग पर परिणामी प्रतिक्रिया तथा जाइरोस्कोपिक प्रभाव ज्ञात कीजिये।



चित्र 3.19

हल—दिया है— $d = 150\,\text{mm}$ या $r = 75\,\text{mm} = 0.075\,\text{m}$, $m = 5\,\text{kg}$, $N = 100\,\text{rpm}$

$$\therefore \quad \omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi \times 1000}{60} = 104.7\,\text{rad/sec (वामावर्त)}$$

$$N_p = 60\,\text{rpm}$$

या $$\omega_p = \frac{2\pi \times 60}{60} = 6.284\,\text{rad/sec (वामावर्त)}$$

$$x = 100\,\text{mm} = 0.1\,\text{m}$$

हम जानते हैं कि किसी डिस्क का उसके समतल को लम्बवत् तथा उसके गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के परित: द्रव्यमान जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2} \times 5(0.075)^2 = 0.014\,\text{g-m}^2$$

अत: डिस्क पर कार्यरत् जाइरोस्कोपिक बलयुग्म

$$C = I.\omega.\omega_p = 0.014 \times 104.7 \times 6.284 = 9.2\,\text{Nm}$$

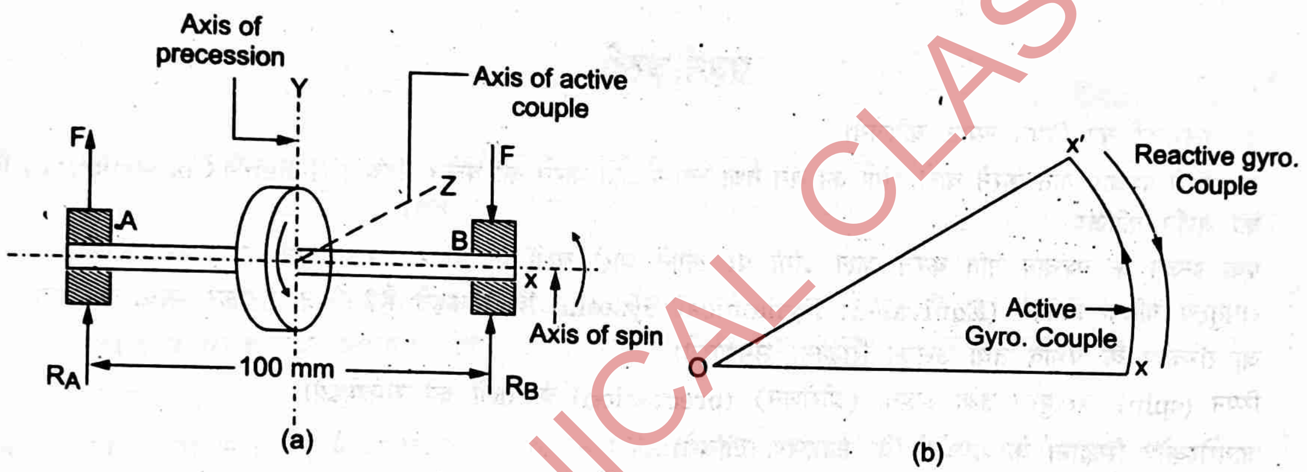
AKC TECHNICAL CLASSES

प्रतिक्रिया जाइरोस्कोपिक बलयुग्म की दिशा चित्र 3.20(b) में प्रदर्शित है। इस बलयुग्म के कारण प्रत्येक बियरिंग पर माना F बल कार्य करता है।

$$\therefore \quad F = \frac{c}{x} = \frac{9.2}{0.1} = 92\text{N}$$

इन बलों की दिशा चित्र 3.20 (a) में प्रदर्शित है। माना डिस्क के भार के कारण बियरिंग A तथा B पर प्रतिक्रियायें क्रमशः R_A तथा R_B हैं क्योंकि डिस्क दोनों बियरिंगों के मध्य में है अतः R_A तथा R_B बराबर होंगे। अतः

$$R_A = R_B = \frac{5}{2} = 2.5\,\text{kg} = 2.45\,\text{N}$$



चित्र 3.20

प्रत्येक बियरिंग पर परिणामी प्रतिक्रिया—माना R_{A1} तथा R_{B1} = बियरिंगों A तथा B पर परिणामी प्रतिक्रियाएँ क्योंकि प्रतिक्रिया जाइरोस्कोपिक बलयुग्म, दक्षिणावर्त दिशा में क्रिया करता है, जब सामने से देखा जाता है। इस प्रकार बाँये बियरिंग (A) पर असका प्रभाव प्रतिक्रिया को बढ़ाने का तथा दाँये बियरिंग (B) पर इसका प्रभाव प्रतिक्रिया को घटाने का होगा।

$$\therefore \quad R_{A1} = F + R_A = 92 + 24.5 = \mathbf{116.5\,N} \text{ (ऊपर को)} \qquad \text{उत्तर}$$

$$\text{तथा} \quad R_{B1} = F - R_B = 92 - 24.5 = \mathbf{67.5\,N} \text{ (नीचे को)} \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 3.7— पानी के जहाज के टरबाइन रोटर का द्रव्यमान 7.8 टन है तथा इसकी घूर्णन त्रिज्या 0.6 m है। यह 2000 rpm पर दक्षिणावर्त (clockwise) घूमता है। जब इसे जहाज के पिछले भाग से देखा जाता है। जायरोस्कोपिक बलयुग्म ज्ञात कीजिए। यदि जहाज 100 km / hour के वेग से चलता है तथा 80 m त्रिज्या के वक्र में बाँयी तरफ घूमता है।

हल— दिया है, $m = 7.8$ टन $= 7800\,\text{kg}$, $k = 0.6\,\text{m}$, $N = 2000\,\text{rpm}$

$v = 100\,\text{km / hour} = 27.8\,\text{m / sec.}$, $R = 80\,\text{m}$

कोणीय वेग $$\omega = \frac{2\pi \times 2000}{60} = 209.44\,\text{rad / sec}$$

अब रोटर का द्रव्यमान जड़त्व आघूर्ण $I = mk^2 = 7800 \times (0.6)^2 = 2808\,\text{kg-m}^2$

AKC TECHNICAL CLASSES

तथा अग्रता कोणीय वेग 'ω_p' $= \dfrac{v}{R} = \dfrac{27.8}{80} = 0.3475$ rad / sec.

$\therefore$ जायरोस्कोपिक बलयुग्म $C = I.\omega.\omega_p = 2808 \times 209.44 \times 0.4375$

$= 204367.3632$ Nm

$= \mathbf{204.367}$ **kNm** **उत्तर**

हम जानते हैं कि जब रोटर दक्षिणावर्त घूमता है तथा जहाज पीछे से देखा जाता है तथा जहाज बाँयी तरफ घूमता है तो प्रतिक्रिया जायरोस्कोपिक बलयुग्म के प्रभाव में जहाज आगे से उठेगा तथा पिछला भाग दबेगा।

AKC TECHNICAL CLASSES

प्रश्नावली

1. डी-एलेमबर्ट का नियम स्पष्ट कीजिये।
2. इन्जनों में पश्चाग्र गति करने वाले अंगों का वेग तथा त्वरण ज्ञात करने की क्लेन संरचना (Klien's Construction) विधि का वर्णन कीजिये।
3. एक इन्जन के पश्चाग्र गति करने वाले अंगों पर लगने वाले बलों का चित्र बनाकर संक्षिप्त वर्णन कीजिए।
4. समतुल्य गतिक निकाय (Equivalent Dynamical System) किसे कहते हैं? चित्र बनाकर स्पष्ट कीजिए।
5. जायरोस्कोप के प्रभाव तथा उसका सिद्धान्त समझाइये।
6. स्पिन (spin), बलयुग्म तथा अग्रता (प्रीसैशन) (precession) के तलों को समझाइये।
7. जायरोस्कोप सिद्धान्त के उपयोगों के उदाहरण दीजिये।
8. मशीन के जायरोस्कोपिक एक्शन की व्याख्या करे। **[UP 2016 (W)]**
9. उपयुक्त व्यंजकों की सहायता से दो पहिया वाहन में जायरोस्कोपिक प्रभाव की विवेचना कीजिए। **(UP 2010)**
10. मशीनों में जाइरोस्कोपिक क्रिया से क्या तात्पर्य है? स्वच्छ चित्र की सहायता से इसकी उपयोगिता की व्याख्या कीजिए। **[UP 2018 (W)]**
11. एक पश्चाग्र इन्जन की क्रैंक तथा संयोजक दण्ड क्रमशः 150 mm तथा 600 mm है। क्रैंक I.D.C. से 60° पर है तथा 300 rpm की एक समान गति से घूम रही है। क्लेन संरचना (Klein's Construction) द्वारा ज्ञात कीजिये— (I) पिस्टन का वेग तथा त्वरण (II) संयोजक दण्ड के मध्य बिन्दु D का वेग तथा त्वरण, तथा (III) संयोजक दण्ड का कोणीय वेग तथा कोणीय त्वरण।

    [उत्तर—4.6 m/s, 61.7 m/sec^2, 4.6 m/s, 93.8 m/sec^2, 4.17 rad/sec, 214 rad/sec.]
12. एक भाप इंजन के सम्बन्ध में निम्न आँकड़े प्राप्त हुये—

    (a) पिस्टन का व्यास = 240 mm, (b) स्ट्रोक = 600 mm, (c) संयोजक दण्ड की लम्बाई = 1.5 m, (d) पश्चाग्र अंगों का द्रव्यमान = 300 kg, (e) गति = 125 rpm.

    जब क्रैंक IDC से 30° पर हो तो क्रैंक शॉफ्ट पर जड़त्व बलों की दिशा तथा परिमाण ज्ञात करो।

    [उत्तर—14.92 kN]
13. एक स्लाइड़र क्रैंक मैकेनिज्म (slider crank mechanism) में, क्रैंक OA की लम्बाई 500 mm है तथा यह 350 rpm की एक समान गति से घूम रही है। कनैक्टिंग रॉड AB की लम्बाई 2 m है। क्लेन संरचना (Klein's construction) का प्रयोग करते हुए संयोजक दड़ पर स्थित बिन्दु 'C' का त्वरण ज्ञात कीजिए जबकि क्रैंक, स्ट्रोक की क्रियारेखा से 45° के कोण पर है। बिन्दु 'C' की संयोजक दड़ पर स्थिति, बिन्दु A से 600 mm दूर (अर्थात् $AC = 600$ m) है।

    [उत्तर—570.9 m / sec^2]

14. एक संयोजक दण्ड की केन्द्रों की मध्य लम्बाई 220 mm तथा द्रव्यमान 2 kg है। इसका गुरुत्व केन्द्र के परितः जड़त्व आघूर्ण 0.02 kg-m^2 है। इसका गुरुत्व केन्द्र छोटे सिरे से 150 mm की दूरी पर है। दो द्रव्यमानों वाला समतुल्य गतिक निकाय (Equivalent Dynamical System) ज्ञात कीजिये जबकि एक द्रव्यमान छोटे सिरे पर स्थित है।

[उत्तर— 0.617 kg, 1.383 kg]

15. एक एकसमान डिसक का व्यास 300 mm तथा द्रव्यमान 5 kg है तथा यह 600 mm लम्बाई की एक भुजा के सिरे पर लगी है। भुजा का दूसरा सिरा एक यूनिवर्सल बियरिंग में स्वतन्त्रतापूर्वक घूमता है। यदि सामने से देखने पर डिस्क, भुजा के परितः 300 rpm से दक्षिणावर्त घूम रही हो तब किस गति से यह ऊर्ध्वाधर अक्ष के परितः अग्रता पर होगी?

[उत्तर—16.7 rad /sec]

16. समुद्री जहाज के रोटर (rotor) की सहंति 6 टन (tonne) तथा जड़ता त्रिज्या (radius of gyration) 0.5 m है। जहाज के पिछले सिरे (stern) सें देखने पर रोटर प्रदक्षिण दिशा में 1500 rpm से गतिशील है। यदि जहाज बाँयी ओर 53.76 नॉट (knot) की गति से 65 m त्रिज्या के वक्र पर घूमता है तो जायरोस्कोपिक बलयुग्म का मान ज्ञात कीजिए।

(1 नॉट = 1.855 km / hour)

[उत्तर—100.56 kNm]

17. एक वायुयान 600 km / hour की गति से उड़ रहा है। इंजन के रोटर का भार 4000 N है तथा जड़ता त्रिज्या (radis of gyration) 1 m है। वायुयान को पीछे से (rear side) देखने पर रोटर की गति 3000 r. p.m वामावर्त (anticlockwise) है।

यदि वायुयान 100 m त्रिज्या के एक वक्र (curve) में ऊपर को (upwards) एक लूप (loop) लेता है तो ज्ञात कीजिए-(i) उत्पन्न जायरोस्कोपिक बलयुग्म; तथा (ii) वायुयान की बॉडी पर उत्पन्न प्रतिक्रिया जायरोस्कोपिक बलयुग्म का प्रभाव।

[उत्तर— 213.5 kN – m]

18. एक स्टीमर के प्रत्येक पैड़ल पहिये का द्रव्यमान 1600 kg तथा जड़ता त्रिज्या (radius of gyration) 1.2 m है। स्टीमर 24 km / hour की गति से 160 m त्रिज्या के वक्राकार पथ पर पोर्ट (Port) की तरफ घूमता है। पैडल (Paddles) की गति 90 r. p.m. है। स्टीमर पर कार्य करने वाले जायरोस्कोपिक बलयुग्म का परिमाण (magnitude) तथा प्रभाव ज्ञात कीजिए।

[उत्तर—905.6 Nm]

AKC TECHNICAL CLASSES

अध्याय 4

शक्ति संचारण (Power Transmission)

- Introduction to Belt and Rope drives
- Types of belt drives and types of pulleys
- Concept of velocity ratio, slip and creep; crowning of pulleys (simple numericals)
- Flat and V belt drive: Ratio of driving tensions, power transmitted, centrifugal tension, and condition for maximum horse power (simple numericals)
- Different types of chains and their terminology
- Gear terminology, types of gears and their applications; simple and compound gear trains; power transmitted by simple spur gear

§ 4.1 परिचय (Introduction) :

कर्मशाला (workshop) मशीनों एवं युक्तियों (devices) में विभिन्न शाफ्टों को गति प्रदान करने के लिये यान्त्रिक शक्ति (mechanical power) के संचारण की आवश्यकता पड़ती है। यान्त्रिक शक्ति को, विभिन्न शक्ति पारेषण की विधियों एवं युक्तियों के द्वारा विद्युत शक्ति से परिवर्तित कर प्राप्त किया जाता है। शक्ति पारेषण की विभिन्न विधियाँ निम्न हैं—

(i) पट्टा चालन (Belt drive)— इसका प्रयोग अधिक दूरी (लगभग 6 m से 10 m) पर स्थित दो शाफ्टों के मध्य कम अश्वशक्ति संचारण के लिये किया जाता है। इस चालन का उपयोग प्राय: प्रथम चालक से विभिन्न मशीनों पर शक्ति पारेषण आदि में होता है।

(ii) रस्सा चालन (Rope drive)—इस चालन विधि का उपयोग बहुत ही अधिक दूरी पर कम अश्वशक्ति के संचारण में किया जाता है। उदाहरण के लिए रोप वे (Rope way), कोयला ढोने की ट्राली आदि से इनका प्रयोग किया जाता है।

(iii) चेन चालन (Chain drive)—चेन चालन का प्रयोग मध्यम दूरी (लगभग 1 m से 2 m) पर माध्यम शक्ति के संचारण (transmission) में किया जाता है। यह चालन धनात्मक चालन भी कहलाती है क्योंकि इसमें वेगानुपात (velocity ratio) लगभग स्थिर रहता है।

(iv) गियर चालन—शक्ति संचारण की इस विधि का प्रयोग ऐसी परिस्थितियों में किया जाता है, जहाँ स्थिर वेग अनुपात (constant velocity ratio) की आवश्यकता हो तथा चालक एवं चलित शाफ्ट में बहुत कम दूरी हो। इस चालन के द्वारा अधिक शक्ति का संचारण सम्भव है। गियर चालन अधिक संहत (compact) होता है तथा स्थिर वेगानुपात देता है। बहुत कम अथवा अधिक गति होने पर भी गियर चालन में गति की परिशुद्धता बनी रहती है।

4.1.1 उपयुक्त चालन चुनाव के लिये आवश्यक पद (Necessary Requirements for Selection of a Drive System)

किसी चालन का चुनाव करने में निम्न पद ध्यान देने योग्य हैं—

(i) पारेषित शक्ति (transmitted power)।

(ii) चालक एवं चलित शाफ्टों की घुमाव की दिशा।

AKC TECHNICAL CLASSES

(iii) चालक एवं चलित शाफ्टों के मध्य दूरी।

(iv) चालक एवं चलित शाफ्टों का वेग अनुपात (velocity ratio)।

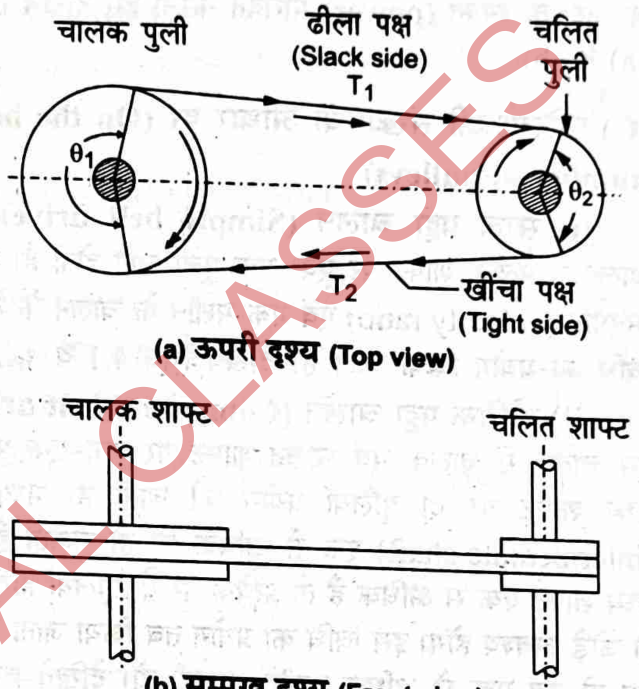
(v) चालक एवं चलित शाफ्टों की कोणीय स्थिति।

(vi) फिसलन (slip) अनुमेय है या नहीं।

4.1.2 पट्टा चालन (Belt Drive)

पट्टा चालन में चालक (driver) एवं चलित (driven) शाफ्ट में से प्रत्येक पर एक पुली लगी होती है। इन दोनों पुलियों पर एक लचीला पट्टा लपेटा हुआ होता है। चालक शाफ्ट पर लगी पुली को चालक पुली (driver pulley) एवं चलित शाफ्ट पर लगी पुली को चलित पुली (driven pulley) कहते हैं। देखिये चित्र 4.1 (a) व (b)। पट्टा चालन एक ऋणात्मक (negative) चालन है अर्थात् इस चालन में फिसलन (slip) सम्भव है। इसे घर्षण चालन (friction drive) भी कहते हैं, क्योंकि इसमें शक्ति का संचारण पुली एवं पट्टे की सतहों के बीच घर्षण के कारण होता है।

चालक पुली पट्टे के जिस भाग को खींचती है, वह खिंचा पक्ष (tight side) एवं चालक पुली से चलित पुली की ओर जाने वाला भाग ढीला पक्ष (slack side) कहलाता है। खिंचे पक्ष (tight side) के पट्टे के तनाव को T_1 तथा ढीले पक्ष के तनाव को T_2 से प्रदर्शित करते हैं।



(a) ऊपरी दृश्य (Top view)

(b) सम्मुख दृश्य (Front view)

चित्र 4.1

पुली के जिस भाग पर पट्टा लिपटा रहता है, पट्टे के उस भाग द्वारा पुली के केन्द्र पर बनाया गया कोण छादन कोण (angle of lap) कहलाता है। चित्र 4.1 (a) में चालक तथा चलित पुली पर इनको θ_1 एवं θ_2 से प्रदर्शित किया गया है।

4.1.3 पट्टा चालन का वर्गीकरण (Classification of Belt Drive)

पट्टा चालन को निम्न आधारों पर वर्गीकृत किया जाता है—

(A) पट्टे की अनुप्रस्थ काट के आधार पर (On the basis of cross section of belt)

(i) चपटा पट्टा चालन (Flat belt drive)— इसमें पट्टे की अनुप्रस्थ काट **आयताकार (rectangular)** या चपटी (flat) होती है। इस चालन में कम शक्ति (power) को अधिक दूरी पर पारेषित किया जाता है।

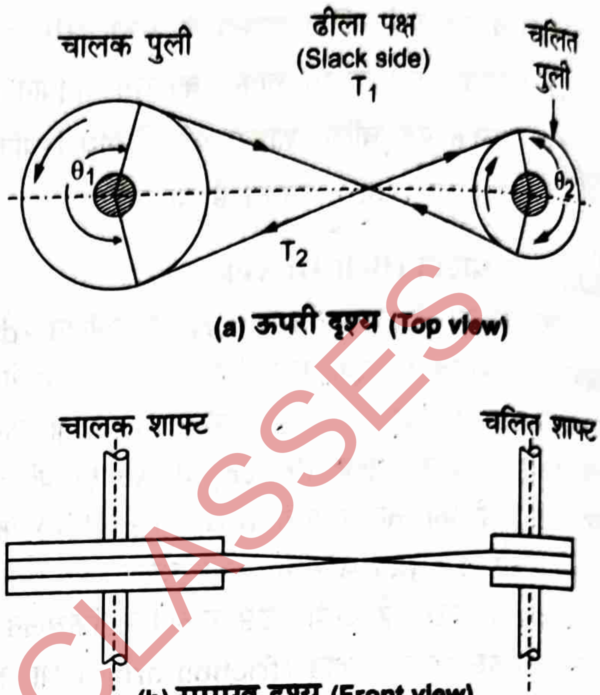
(ii) वी-पट्टा चालन (V-belt drive)— इसमें पट्टे की अनुप्रस्थ काट **समलम्बाकार (trapezoidal)** होती है। पुलियों की परिधि पर एक V-खाँचा बना होता है जिसमें फँसकर पट्टा चलता है। इसका उपयोग चपटा पट्टा चालन की अपेक्षा कम दूरी पर अधिक शक्ति (power) को पारेषण करने में किया जाता है।

(B) पट्टे को पुलियों पर लपेटने के आधार पर (On the basis of wrapping of belt and pulley)

(i) खुला पट्टा चालन (Open belt drive)— इस चालन में पट्टे को पुलियों की बाह्य सतह पर लपेटा जाता है। देखिये चित्र 4.1 (a) व (b)। इसमें दोनों पुलियों के घूमने की दिशा समान रहती है। इस चालन से अधिक दूरी पर कम शक्ति (power) पारेषित की जाती है।

AKC TECHNICAL CLASSES

(ii) उभयमुखी पट्टा चालन (Cross belt drive)— इस विधि में पट्टा दोनों पुलियों पर क्रास (cross) की अवस्था में लिपटा रहता है। इसमें दोनों पुलियों के घूमने की दिशा विपरीत होती है। इस विधि का उपयोग उस अवस्था में किया जाता है जिसमें चालक एवं चलित शाफ्टों को विपरीत दिशा में घुमाना हो तथा कम दूरी पर अधिक शक्ति (power) पारेषित करनी हो। देखिये चित्र 4.2 (a) व (b)।



(a) ऊपरी दृश्य (Top view)

(b) सम्मुख दृश्य (Front view)

चित्र 4.2

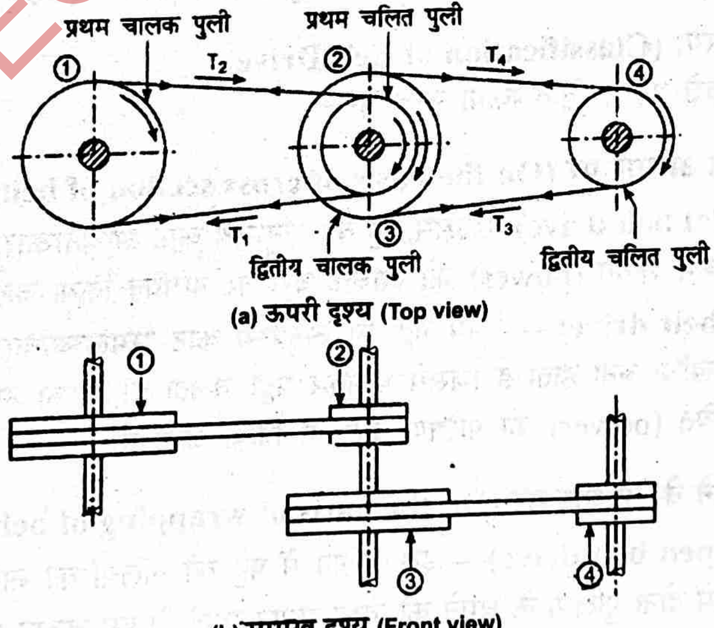
(C) पुलियों की संख्या के आधार पर (On the basis of number of pulleys)

(i) सरल पट्टा चालन (Simple belt drive)— इस चालन में प्रत्येक शाफ्ट पर एक-एक पुली लगी होती है। कम वेग अनुपात (velocity ratio) एवं एक मशीन के चालन के लिये इस विधि का प्रयोग किया जाता है। देखिये चित्र 4.1 व 4.2।

(ii) यौगिक पट्टा चालन (Compound belt drive)— इस चालन में चालक एवं चलित शाफ्ट पर एक-एक पुली एवं मध्य शाफ्ट पर दो पुलियाँ प्रयोग की जाती हैं। मध्य शाफ्ट (intermediate shaft) एक से अधिक भी हो सकती है। अगर मध्य शाफ्ट एक से अधिक है तो प्रत्येक पर दो पुलियाँ होंगी। इस प्रकार पट्टा चालन की इस विधि में पुलियों के कम से कम दो जोड़े अवश्य होंगे। इस विधि का प्रयोग तब किया जाता है जब सरल पट्टा चालन से हमें वाँछित वेग अनुपात नहीं प्राप्त हो रहा हो एवं एक से अधिक मशीनें चलानी हों। देखिये चित्र 4.3 (a) व (b)।

(D) चालक एवं चलित शाफ्टों की स्थिति के आधार पर (On the basis of position of driver and driven shafts)

(i) समानान्तर चालन (Parallel drive)— इस चालन में चालक एवं चलित शाफ्टें एक दूसरे के सामान्तर होती हैं। देखिये चित्र 4.1, 4.2 व 4.3।



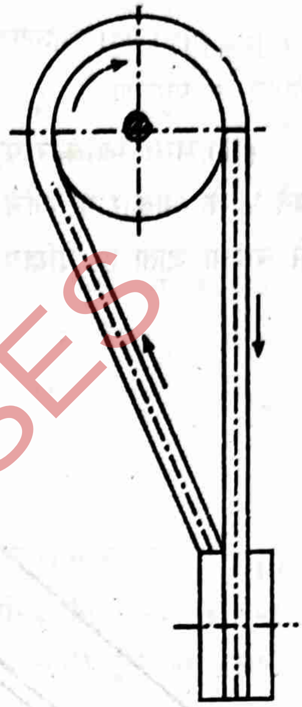
(a) ऊपरी दृश्य (Top view)

(b) सम्मुख दृश्य (Front view)

चित्र 4.3

AKC TECHNICAL CLASSES

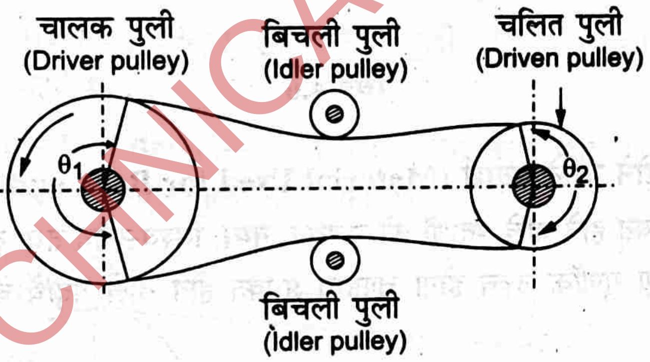
(ii) लम्ब चालन (Right angle drive) तथा कोणीय चालन (Angular drive)—जब दोनों शाफ्ट एक दूसरे के समकोण पर हो तो इस प्रकार के चालन को लम्ब चालन कहते हैं। देखिये चित्र 4.4। यदि दोनों शाफ्ट्स के मध्य का कोण 90° के अतिरिक्त अन्य कोई है तो उसे कोणीय चालन कहते हैं। इस प्रकार के चालन में पुली पर आने वाले पट्टे के भाग की केन्द्र रेखा पुली के घुमाव के समतल में होनी चाहिये। कभी-कभी इस स्थिति को प्राप्त करने के लिये गाइड पुली का प्रयोग भी किया जाता है। इस विधि के द्वारा पुलियों के घुमाव की दिशा समान होती है।



चित्र 4.4

(E) बिचली (idler) पुली के प्रयोग के आधार पर (On the basis of use of idler pulley)

(i) बिचली पुली सहित चालन (Drive with idler pulley)—पट्टा चालन में बिचली पुली का प्रयोग, चालक या चलित के छादन कोण (angle of lap) को बढ़ाने के लिये किया जाता है क्योंकि हम जानते हैं कि छादन कोण जितना अधिक होगा, उतना ही अधिक शक्ति का संचारण कर सकते हैं। देखिये चित्र 4.5। आवश्यकतानुसार बिचली पुली एक या दो हो सकती है।



चित्र 4.5

(ii) बिचली पुली रहित चालन (Drive without idler pulley)— उपरोक्त सभी चालन बिचली पुली रहित चालन है। देखिये चित्र 4.1 से 4.4 तक।

§ 4.2 पट्टे के प्रकार (Types of Belt)

पट्टा दो प्रकार का होता है—

(i) आयताकार अनुप्रस्थ काट या चपटा पट्टा (flat belt) एवं

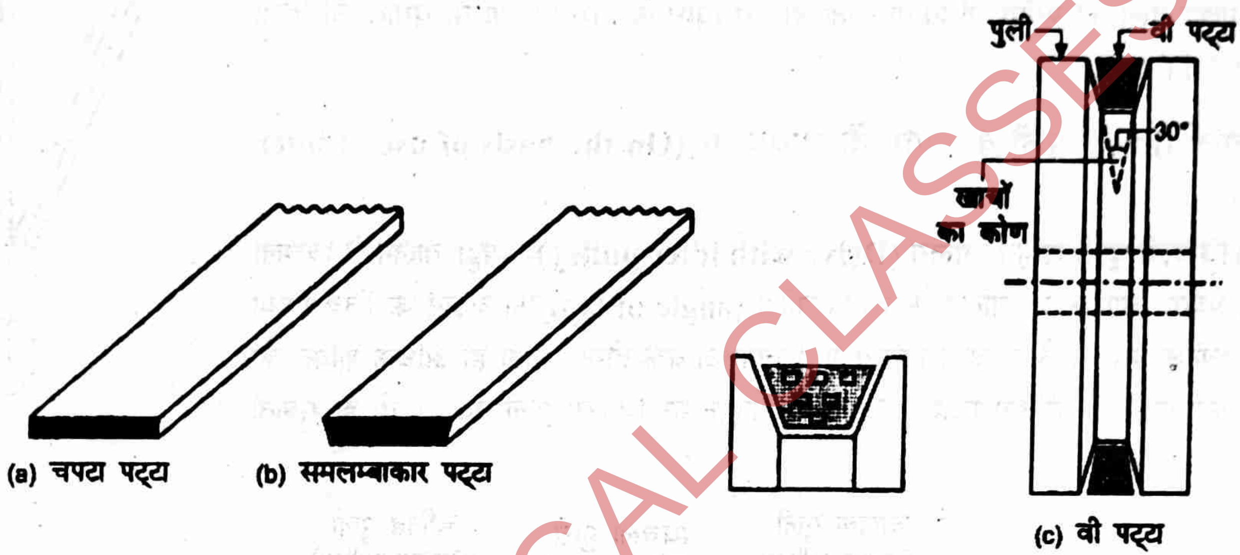
(ii) समलम्बाकार अनुप्रस्थ काट या V-पट्टा (V-belt)।

(i) आयताकार अनुप्रस्थ काट—इस पट्टे की अनुप्रस्थ काट आयताकार होती है। देखिये चित्र 4.6 (a)। इसको चपटा पट्टा भी कहते हैं। यह चमड़े, किरमिच, रबड़, ऊंट के बाल इत्यादि से बनाये जाते हैं। ये विभिन्न आयताकार परतों (layers) को आपस में चिपका कर या सिलाई करके बनाया जाता है। जब दो परतों का प्रयोग किया जाता है तो उसे दोहरी पर्त या दोहरी प्लाई (double ply) पट्टा कहते हैं। यदि पट्टे को बनाने में तीन प्लाई का प्रयोग किया गया है तो वह पट्टा तिहरी प्लाई

AKC TECHNICAL CLASSES

(tipple ply) पट्टा कहलाता है। पट्टा जितनी अधिक परतों का बना होगा वह उतना ही अधिक मजबूत होता है और अधिक शक्ति के पारेषण के लिये प्रयोग किया जाता हैं।

(ii) समलम्बाकार पट्टा—इस पट्टे की काट समलम्ब चतुर्भुज (trapezoidal) होती है। यह पट्टा पुली की परिधि पर बने V के आकार के खाँचे में फँस कर चलता है। खांचे का कोण लगभग 30° होता है। यह पट्टा चमड़े, रबड़ या सूती धागों से बनाया जाता है। देखिये चित्र 4.6 (b) व (c)।



चित्र 4.6

4.2.1 रस्सों व पट्टों में प्रयुक्त होने वाले पदार्थ (Material Used for Belts and Ropes)

रस्सों तथा बेल्टों के लिए प्रयुक्त होने वाले पदार्थों को मजबूत, नम्य, विश्वसनीय तथा लम्बे समय तक कार्य करने वाला होना चाहिए। इन पदार्थों का घर्षण गुणाँक उच्च होना चाहिए। प्रयुक्त होने वाले पदार्थें के आधार पर पट्टों (Belts) का वर्गीकरण निम्न प्रकार है—

1. चमड़े का पट्टा (Leather belts)—पट्टे के लिए सबसे महत्वपूर्ण पदार्थ चमड़ा (leather) होता है। सर्वोत्तम चमड़े की बेल्टें 1.2 m से लेकर 1.5 m लम्बी पट्टियों की बनी होती हैं। ये एक या अधिक परतों की बनी हो सकती है। चमड़े की ऊपरी परत (बालों की तरफ से) अधिक चिकनी होती है परन्तु इसकी आन्तरिक सतह अधिक मजबूत होती है। इन पट्टों की समय-समय पर सफाई तथा ड्रेसिंग (Dressing) करनी पड़ती है।

2. सूती या फेब्रिक पट्टा (Cotton or fabric belts)—फेब्रिक पट्टा प्राय: फोल्डिंग कैनवास (Folding canvas) अथवा सूती डक (Cotton duck) से बनाये जाते हैं जिनको पट्टे की वाँछित मोटाई के अनुसार एक साथ सिलाई (Stitch) किया जाता है। इन पट्टों को वाँछित चौड़ाई अथवा मोटाई की पट्टी में बुनकर भी बनाया जाता है। ये पट्टे सस्ते तथा गर्म जलवायु के लिए उपयुक्त होते हैं।

3. रबर पट्टा (Rubber belt)—रबर की बेल्टें, फेब्रिक की परतों पर रबड़ चढ़ाकर बनाई जाती हैं। ये बेल्टें नम्य (flexible) होती हैं परन्तु आग, तेल अथवा ग्रीस के सम्पर्क में आने पर शीघ्रता से खराब हो जाते हैं। इनका प्रमुख लाभ यह है कि इन्हें आसानी से बेसिरा (Endless) बनाया जा सकता है। ये बेल्टें सॉ-मिल (Saw mill), पेपर मिल (Paper mill) आदि के लिए उपयुक्त रहती हैं जहाँ नम वातावरण (Wet atmosphere) रहता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

4. बलाटा पट्टा (Balata belt)—ये बेल्टें भी रबर बेल्टों के समान ही होती हैं परन्तु इनमें रबर के स्थान पर बलाटा गोंद (Balata gum) का प्रयोग किया जाता है। ये बेल्टें अम्लरोधी (acid proof) तथा जलरोधी (water proof) होती हैं। इन पर पशुतेल (animal oils) या क्षारों (alkalies) का भी कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। इन बेल्टों का प्रमुख दोष यह है कि 40°C से अधिक तापमान पर यह नर्म (soft) तथा चिपचिपा या स्टिकी (sticky) बन जाता है।

प्रयुक्त होने वाले पदार्थों के आधार पर रस्सों (ropes) का वर्गीकरण निम्न प्रकार है—

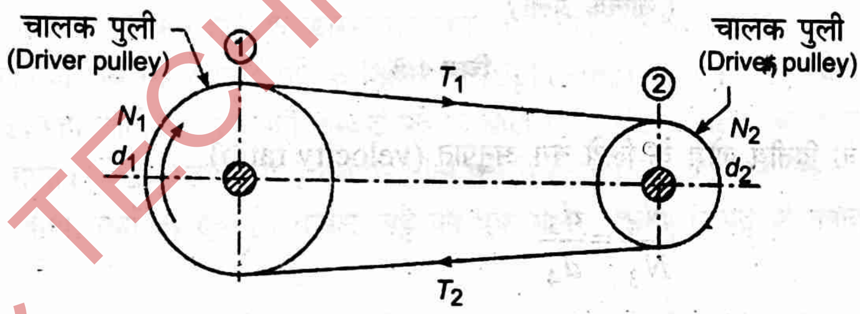
1. फाइबर रस्से (Fibre ropes)—जब पुलियों के बीच की दूरी लगभग 60 metre हो, तब फाइबर रस्सों का प्रयोग सफलतापूर्वक किया जाता है। ये रस्से प्राय: हेम्प (hemp), मनीला (manila) तथा सूत (cotton) जैसे रेशेदार (fibrous) पदार्थों के बनाये जाते हैं। ये रस्से प्राय: कम नम्य (less flexible) तथा खराब यांत्रिक गुणों (Poor mechanical properties) वाले होते हैं।

2. तार रस्से (Wire ropes)— जब पुलियों के बीच की दूरी लगभग 150 मीटर के लगभग हो तथा बहुत अधिक शक्ति पारेषित करनी हो तो तार रस्सों का प्रयोग किया जाता है। ये रस्से अनेक धातु तारों को एक साथ बटकर (wrap) बनाये जाते हैं। इनका प्रयोग प्रमुखतया ऐलीवेटर (Elevators), खदान के हॉयस्ट (Mine hoists), कन्वेयर (conveyors), लटककर पुलों (suspension bridges) आदि में होता है। ये एक खाँचेदार (grooved) पुली पर चलाये जाते हैं।

§ 4.3 वेग अनुपात (Velocity Ratio)

पट्टा चालन में चलित पुली (driven pulley) एवं चालक पुली (driver pulley) के वेगों के अनुपात को चालन (drive) का वेग अनुपात कहते हैं।

(A) सरल पट्टा चालन (Simple belt drive)— चित्र 4.7 में एक सरल पट्टा चालन प्रदर्शित किया गया है। इस चालन में चालक एवं चलित शाफ्टों पर एक-एक पुली लगी होती है।



चित्र 4.7

यदि N_1 = चालक पुली के प्रति मिनट चक्करों की संख्या (rpm)।

N_2 = चलित पुली के प्रति मिनट चक्करों की संख्या (rpm)।

d_1 = चालक पुली का व्यास मीटर में।

d_2 = चलित पुली का व्यास मीटर में।

हम जानते हैं कि पट्टा चालन के लिये,

चालक पुली पर पट्टे का परिधीय वेग = चलित पुली पर पट्टे का परिधीय वेग

$$\pi d_1 N_1 = \pi d_2 N_2 \quad \ldots(i)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

या $$\frac{N_2}{N_1} = \frac{d_1}{d_2}$$

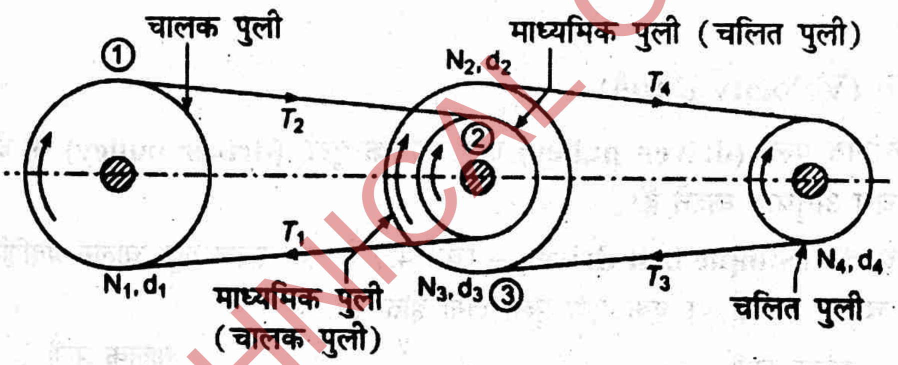
अतः वेग अनुपात (V,R.) $$\frac{N_2}{N_1} = \frac{d_1}{d_2}$$ ...(ii)

या **वेगानुपात (VR) = $\frac{\text{चलित पुली के rpm}}{\text{चालक पुली के rpm}} = \frac{\text{चालक पुली का व्यास}}{\text{चलित पुली का व्यास}}$** ...(iii)

(B) यौगिक पट्टा चालन (Compound belt drive)— चित्र 4.8 में एक संयुक्त या यौगिक पट्टा चालन प्रदर्शित किया गया है। इस पट्टा चालन में चालक एवं चलित शाफ्टों में से प्रत्येक पर एक-एक पुली तथा माध्यमिक शाफ्ट (intermediate shaft) पर दो पुलियाँ लगी होती हैं।

पुलियों के प्रथम-जोड़े के लिये वेग अनुपात (velocity ratio)

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{d_1}{d_2}$$ ... (i)



चित्र 4.8

इसी प्रकार पुलियों के द्वितीय जोड़े के लिये वेग अनुपात (velocity ratio)

$$\frac{N_4}{N_3} = \frac{d_3}{d_4}$$ ...(ii)

समीकरण (i) व (ii) को गुणा करने पर,

$$\frac{N_2}{N_1} \times \frac{N_4}{N_3} = \frac{d_1}{d_2} \times \frac{d_3}{d_4}$$

यहाँ $N_2 = N_3$ हैं क्योंकि दोनों पुलियाँ एक शाफ्ट पर लगी हैं।

अतः वेगानुपात $(VR) = \frac{N_4}{N_1} = \frac{d_1 \times d_3}{d_2 \times d_4}$ ...(iii)

या **वेगानुपात (VR) = $\frac{\text{अन्तिम चलित पुली के rpm}}{\text{प्रथम चालक पुली के rpm}} = \frac{\text{चालक पुलियों के व्यासों की गुणा}}{\text{चलित पुलियों के व्यासों की गुणा}}$** ...(iv)

AKC TECHNICAL CLASSES

उपरोक्त यौगिक पट्टा चालन का वेग अनुपात (velocity ratio) समीकरण (iii) या (iv) से प्राप्त होगा।

4.3.1 फिसलन एवं सरकन (Slip and Creep)

(A) फिसलन (Slip)—पुली एवं पट्टे के रेखीय वेग के अन्तर को फिसलन कहते हैं। फिसलन (slip) के कारण पट्टा चालन का वेग अनुपात कम हो जाता है अर्थात् चलित पुली के rpm कम हो जाते हैं जिसके कारण पट्टा चालन के द्वारा कम शक्ति (power) का संचारण हो पाता है।

"The difference in the linear velocities of pulley and belts is called slip. It is generally expressed as a percentage. The results of the belt slipping is to reduce the velocity ratio of the system."

फिसलन (slip) होने के निम्न कारण हैं—

(i) अधिक समय तक एक ही पट्टे को व पुलियों को प्रयोग करने के कारण उनकी सम्पर्क सतह घिस जाती है, जिसके कारण पुली एवं पट्टे के मध्य घर्षण कम हो जाता है।

(ii) वर्तमान में पट्टा चालन बहुत अधिक गति पर शक्ति का संचारण करता है। अत: अधिक गति के कारण पट्टा, पुली के मध्य में कुछ ऊपर को उठ जाता है, जिसके कारण पट्टा एवं पुली के मध्य हवा प्रवेश कर जाती है, जो घर्षण पकड़ (frictional grip) को कम करती है।

(iii) पट्टे के द्वारा अनुमेय सीमा (permissible limits) से अधिक शक्ति (power) के संचारण के कारण पट्टे की लम्बाई में वृद्धि होती है। पट्टा इस लम्बाई वृद्धि को प्रत्येक चक्कर में समंजित (adjust) करता है, जिसके कारण वह पुली के ऊपर फिसलता है।

उपरोक्त सभी कारणों से चालक पुली पट्टे को अपने साथ या पट्टा, चलित पुली को अपने साथ लेकर नहीं चल पाते हैं तथा चलित पुली के प्रति मिनट चक्करों की संख्या कम हो जाती है अर्थात् चालन का वेग अनुपात कम हो जाता है।

(B) सरकन (Creep)— इसके कारण भी पट्टा चालन का वेगानुपात कम होता है। इसमें भी पट्टा पुली को अपने साथ लेकर गति नहीं कर पाता है। सरकन होने के कारण को समझने के लिए शक्ति संचारण करके किसी पट्टे के एक मीटर लम्बाई पर विचार कीजिये। जब यह लम्बाई पट्टे के खिंचे पक्ष (tight side) के तनाव (T_1) के सम्पर्क में आती है तो माना पट्टे की लम्बाई $(1+x_1)$ हो जाती है। जब यही लम्बाई पट्टे के ढीले पक्ष (Slack side) के तनाव (T_2) के सम्पर्क में आती है तो पट्टे की लम्बाई माना $(1+x_2)$ हो जाती है क्योंकि ढीले पक्ष में तनाव (T_2) का मान, खिंचे पक्ष (tight side) में तनाव (T_1) के मान से कम होगा। यहाँ x_1 एवं x_2 क्रमश: पट्टे की एक मीटर लम्बाई में पट्टे के तनाव T_1 एवं T_2 के कारण हुई वृद्धि है।

पट्टा, पुलियों पर अपने घुमाव के प्रति चक्कर में इस लम्बाई वृद्धि के अन्तर $[(1+x_1)-(1+x_2)]$ को समायोजित करने के लिये पुलियों पर सरकता है, जिसके कारण पट्टा पुलियों को अपने साथ लेकर गति नहीं कर पाता है और चलित पुली के चक्कों की संख्या प्रतिमिनट कम हो जाने के कारण पट्टा चालन का वेग अनुपात कम हो जाता है।

□ *"When the belt passes from the slack side to the tight side, a certain portion of the belt extends and it contracts again when the belt passes from the tight side to slack side. Due to these changes of length, there is a relative motion between the belt and the pulley surfaces. This relative motion is termed as creep". The total effect of creep is to reduce slightly the speed of driven pulley."*

क्योंकि फिसलन (slip) एवं सरकन (creep) दोनों का प्रभाव पट्टा चालन के वेग अनुपात (velocity ratio) को कम करता है। अत: फिसलन एवं सरकन दोनों को जोड़कर प्रयोग किया जाता है और इसे **फिसलन** (slip) कहते हैं। यहाँ यह

भी ध्यान देने की बात है कि सरकन का परिमाण (magnitude) फिसलन (slip) के परिमाण की तुलना में नगण्य होता है। फिसलन को हमेशा पट्टा चालन की गति के प्रतिशत ($S\%$) में प्रदर्शित किया जाता है।

4.3.2 वेगानुपात पर फिसलन का प्रभाव (Effect of Slip on Velocity Ratio)

(i) सरल पट्टा चालन (Simple belt drive)-- चित्र 4.7 का अवलोकन कीजिये। यदि चालक एवं चलित पुलियों पर पट्टे में क्रमशः $S_1\%$ एवं $S_2\%$ का फिसलन हो तथा चालक एवं चलित पुलियों का व्यास क्रमशः d_1 एवं d_2, चक्करों की प्रतिमिनट संख्या N_1 एवं N_2 हो, तो चालक पुली से गुजरने के पश्चात् पट्टे का वेग

$$= \pi d_1 N_1 - \pi d_1 N_1 \times \frac{S_1}{100} = \pi d_1 N_1 \left(1 - \frac{S_1}{100}\right)$$

अब यही पट्टा चलित पुली पर से गुजरेगा। अतः चलित पुली से गुजरने के पश्चात्, पट्टे का वेग

$$= \pi d_1 N_1 \left(1 - \frac{S_1}{100}\right) - \pi d_1 N_1 \left(1 - \frac{S_1}{100}\right)\frac{S_2}{100}$$

$$= \pi d_1 N_1 \left(1 - \frac{S_1}{100}\right)\left(1 - \frac{S_2}{100}\right)$$

चलित पुली के चक्करों की प्रति मिनट संख्या पट्टे के इसी वेग पर निर्भर करेगी।

$$\pi d_2 N_2 = \pi d_1 N_1 \left(1 - \frac{S_1}{100}\right)\left(1 - \frac{S_2}{100}\right)$$

या
$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{d_1}{d_2}\left(1 - \frac{S_1}{100}\right)\left(1 - \frac{S_2}{100}\right)$$

या
$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{d_1}{d_2}\left(1 - \left(\frac{S_1 + S_2}{100}\right) + \frac{S_1 S_2}{10000}\right)$$

[यहाँ $\frac{S_1 S_2}{10000}$ का मान बहुत कम होता है अतः इसे नगण्य मान लिया जाता है।]

या
$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{d_1}{d_2} \times \left(1 - \frac{S}{100}\right) \qquad \text{...(i)}$$

यहाँ $S\%$ = चालक एवं चलित पुलियों पर पट्टे की फिसलन का पूर्ण योग (प्रतिशत में) है।

यदि पट्टे की मोटाई 't' हो, तो वेगानुपात (velocity ratio)

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{(d_1 + t)}{(d_2 + t)}\left(1 - \frac{S}{100}\right) \qquad \text{...(ii)}$$

(ii) यौगिक पट्टा चालन (Compound belt drive)—चित्र 4.8 का अवलोकन कीजिये। यदि पुलियों के प्रथम व द्वितीय जोड़े पर क्रमशः कुल फिसलन $S_1\%$ एवं $S_2\%$ हो तथा चारों पुलियों का क्रमशः व्यास d_1, d_2, d_3 व d_4 तथा चक्करों की प्रतिमिनट संख्या N_1, N_2, N_3 एवं N_4 हो, तो पुलियों के प्रथम जोड़े का वेग अनुपात (velocity ratio),

AKC TECHNICAL CLASSES

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{d_1}{d_2}\left(1 - \frac{S_1}{100}\right) \quad \ldots(i)$$

एवं पुलियों के द्वितीय जोड़े का वेग अनुपात (velocity ratio),

$$\frac{N_4}{N_3} = \frac{d_3}{d_4}\left(1 - \frac{S_2}{100}\right) \quad \ldots(ii)$$

समी० (i) व (ii) को गुणा करने पर,

$$\frac{N_2}{N_1} \times \frac{N_4}{N_3} = \frac{d_1}{d_2} \times \frac{d_3}{d_4}\left(1 - \frac{S_1}{100}\right)\left(1 - \frac{S_2}{100}\right)$$

(यहाँ $N_2 = N_3$ क्योंकि पुली नं० 2 व नं० 3 एक ही शाफ्ट पर लगी हैं)

या
$$\frac{N_4}{N_1} = \frac{d_1 \times d_3}{d_2 \times d_4}\left(1 - \frac{S_1}{100}\right)\left(1 - \frac{S_2}{100}\right)$$

या
$$\frac{N_4}{N_1} = \frac{d_1 \times d_3}{d_2 \times d_4}\left(1 - \frac{(S_1 + S_2)}{100} + \frac{S_1 S_1}{10000}\right)$$ [यहाँ $\frac{S_1 S_2}{10000}$ को नगण्य मानने पर]

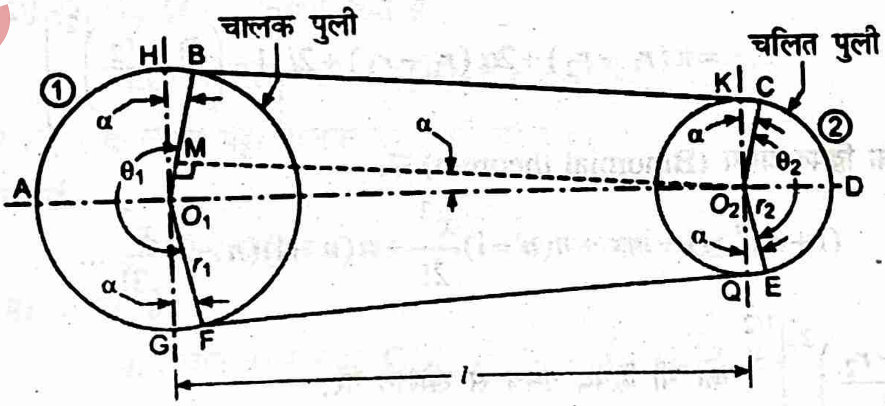
या
$$\frac{N_4}{N_1} = \frac{d_1 \times d_3}{d_2 \times d_4}\left(1 - \frac{S}{100}\right) \quad \ldots(iii)$$ [यहाँ $S\% = (S_1\% + S_2\%)$ है।]

यदि दोनों पट्टों में से प्रत्येक की मोटाई 't' हो, तो $\frac{N_4}{N_1} = \frac{(d_1 + t) \times (d_3 + t)}{(d_2 + t) \times (d_4 + t)}\left(1 - \frac{S}{100}\right)$ ...(iv)

§ 4.4. पट्टे की आवश्यक लम्बाई (Necessary Length of Belt)

इस अनुचछेद के अन्तर्गत हम खुला पट्टा चालन (open belt drive) तथा उभयमुखी पट्टा चालन (crossed belt drive) में आवश्यक पट्टे की लम्बाई ज्ञात करेंगे।

(i) खुला पट्टा चालन (Open belt drive)— चित्र 4.9 का अवलोकन करें। इसमें नं० 1 पुली चालक एवं नं० 2 पुली चलित पुली है। पुली नं० 1 व 2 का अर्धव्यास क्रमशः r_1 एवं r_2 है तथा उनके केन्द्रों के बीच की दूरी l है। पुली नं० 1 व 2 पर छादन कोण क्रमशः $\angle BO_1F$ एवं $\angle CO_2E$ हैं।



चित्र 4.9

AKC TECHNICAL CLASSES

चित्र के अनुसार $\angle O_1 O_2 M = \alpha$ (माना गया है।)

अतः $\angle HO_1 B = \angle GO_1 F = \angle KO_2 C = \angle QO_2 E = \alpha$ होगा।

यहाँ बिन्दुओं B, C, E व F पर पट्टा पुलियों को स्पर्श करता है।

अतः पट्टे की लम्बाई, $L =$ चाप लम्बाई $FAB + BC +$ चाप लम्बाई $CDE + EF$

यहाँ $O_2 M = BC = EF$ है।

अतः $L =$ चाप लम्बाई $FAB +$ चाप लम्बाई $CDE + 2BC$

$\Delta MO_2 O_1$ में,

$$O_1 O_2^2 = O_2 M^2 + O_1 M^2$$

$$O_2 M = \sqrt{O_1 O_2^2 - O_1 M^2}$$

$$= \sqrt{l^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

चाप FAB की लम्बाई $= r_1(\pi + 2\alpha)$ [यहाँ $\angle FO_1 B = \theta_1 = (\pi + 2\alpha)$ है।]

एवं चाप CDE की लम्बाई $= r_2(\pi - 2\alpha)$ [यहाँ $\angle CO_2 E = \theta_2 = (\pi - 2\alpha)$ है।]

फिर $\Delta MO_2 O_1$ से

$$\sin\alpha = \frac{O_1 M}{O_1 O_2} = \frac{O_1 B - MB}{O_1 O_2}$$

(क्योंकि $O_1 B = r_1, MB = O_2 C = r_2$ तथा $O_1 O_2 = l$ है।)

$$\therefore \quad \sin\alpha = \left(\frac{r_1 - r_2}{l}\right)$$

परन्तु कोण α का मान बहुत कम है, इसलिये $\sin\alpha = \alpha$ लिया जा सकता है।

$$\therefore \quad \alpha = \left(\frac{r_1 - r_2}{l}\right)$$

इस प्रकार,

$$L = r_1(\pi + 2\alpha) + r_2(\pi - 2\alpha) + 2\sqrt{l^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

$$= \pi(r_1 + r_2) + 2\alpha(r_1 - r_2) + 2l\left[1 - \left(\frac{r_1 - r_2}{l}\right)^2\right]^{1/2}$$

हम जानते हैं, कि द्विपद प्रमेय (Binomial theorem) से,

$$(1-x)^n = 1 - mx + n(n-1)\frac{x^2}{2!} + n(n-1)(n-2)\frac{x^3}{3!} \ldots$$

अतः $\left[1 - \left(\frac{r_1 - r_2}{l}\right)^2\right]^{1/2}$ को भी द्विपद प्रमेय से खोलने पर,

AKC TECHNICAL CLASSES

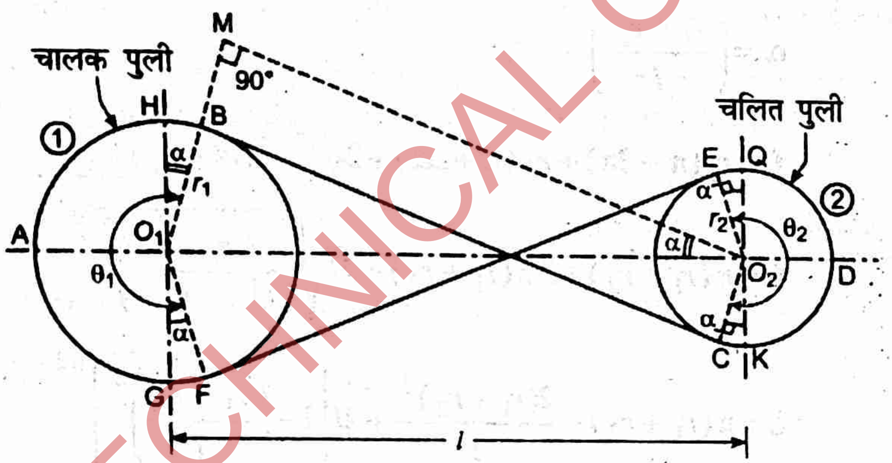
$$\left[1-\left(\frac{r_1-r_2}{l}\right)^2\right]^{1/2}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{r_1-r_2}{l}\right)^2+\ldots$$ (उच्चतर पदों को नगण्य मानने पर)

अतः $$L=\pi(r_1+r_2)+\frac{2(r_1-r_2)^2}{l}+2l\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{(r_1-r_2)}{l}\right)^2\right]$$ (α का मान रखने पर)

या $$L=\pi(r_1+r_2)+\frac{2(r_1-r_2)^2}{l}+2l-\frac{(r_1-r_2)^2}{l}$$

अतः $$\boldsymbol{L=\pi(r_1+r_2)+2l+\frac{(r_1-r_2)^2}{l}} \quad \text{... (i)}$$

(ii) उभय मुखी पट्टा चालन (Cross belt drive)— चित्र 4.10 में उभयमुखी पट्टा चालन दर्शाया गया है। इसमें पुली नं० 1 चालक एवं पुली नं० 2 चलित पुली है। पुली नं० 1 व 2 का अर्धव्यास क्रमशः r_1 व r_2 है तथा उनके केन्द्रों के बीच की दूरी l है।



चित्र 4.10

पुली नं० 1 व 2 पर छादन कोण क्रमशः $\angle BO_1F$ एवं $\angle CO_2E$ हैं।

चित्र के अनुसार $\angle O_1O_2M=\alpha$ (माना गया है।)

अत; $\angle HO_1B=\angle GO_1F=\angle QO_2E=\angle KO_2C=\alpha$ होगा।

यहाँ बिन्दुओं B, C, E व F पर पट्टा पुलियों को स्पर्श करता है।

अतः पट्टे की लम्बाई,

$$L=\text{चाप लम्बाई } FAB+BC+\text{चाप लम्बाई } CDE+EF$$

यहाँ $O_2M=BC=FE$ है।

अतः $$L=\text{चाप की लम्बाई } FAB+\text{चाप लम्बाई } CDE+2BC$$

$\Delta\, MO_2O_1$ में,

AKC TECHNICAL CLASSES

$$O_1O_2^2 = O_2M^2 + O_1M^2$$

या
$$O_2M = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1M^2} = \sqrt{l^2 - (r_1 + r_2)^2}$$

चाप FAB की लम्बाई $= (\pi + 2\alpha)r_1$ [यहाँ $\angle FO_1B = \theta_1 = (\pi + 2\alpha)$ है।]

चाप CD की लम्बाई $= (\pi + 2\alpha)r_2$ [यहाँ $\angle CO_2E = \theta_2 = (\pi + 2\alpha)$ है।]

फिर ΔMO_2O_1 से,

$$\sin\alpha = \frac{O_1M}{O_1O_2} = \frac{(O_1B + MB)}{O_1O_2}$$

(क्योंकि $O_1B = r_1$ एवं $MB = CO_2 = r_2$ तथा $O_1O_2 = l$ है।)

$$\therefore \quad \sin\alpha = \left(\frac{r_1 + r_2}{l}\right)$$

परन्तु कोण α का मान बहुत कम है, इसलिये $\sin\alpha = \alpha$ लिया जा सकता है।

$$\therefore \quad \alpha = \left(\frac{r_1 + r_2}{l}\right)$$

इस प्रकार,
$$L = r_1(\pi + 2\pi) + r_2(\pi + 2\alpha) + 2\sqrt{l^2 - (r_1 + r_2)^2}$$

या
$$L = \pi(r_1 + r_2) + 2\alpha(r_1 + r_2) + 2l\sqrt{1 - \left(\frac{r_1 + r_2}{l}\right)^2}$$

या
$$L = \pi(r_1 + r_2) + \frac{2(r_1 + r_2)^2}{l} + 2l\left[1 - \left(\frac{r_1 + r_2}{l}\right)^2\right]^{1/2}$$

$\left[1 - \left(\frac{r_1 + r_2}{l}\right)^2\right]^{1/2}$ को द्विपद प्रमेय (Binomial theorem) से खोलने पर,

$$\left[1 - \left(\frac{r_1 + r_2}{l}\right)^2\right]^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r_1 + r_2}{l}\right)^2 + \ldots$$ (उच्चतर पदों को नगण्य मानने पर)

अतः
$$L = \pi(r_1 + r_2) + \frac{2(r_1 + r_2)^2}{l} + 2l\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{(r_1 + r_2)}{l}\right)^2 + \ldots\right]$$

या
$$L = \pi(r_1 + r_2) + \frac{2(r_1 + r_2)^2}{l} + 2l - \frac{(r_1 + r_2)^2}{l}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

अत:

$$L = \pi(r_1 + r_2) + 2l + \frac{(r_1 + r_2)^2}{l} \quad ...(ii)$$

4.4.1 खुला एवं उभयमुखी पट्टा चालन की तुलना
(Comparison between Open Belt & Cross Belt Drive)

क्र० सं०	खुली पट्टा चालन (Open belt drive)	उभयमुखी पट्टा चालन (Cross belt drive)
1.	चालक एवं चलित पुलियाँ एक दिशा में घूमती हैं।	चालक एवं चलित पुलियाँ विपरीत दिशा में घूमती हैं।
2.	चालक एवं चालित पुलियों पर छादन कोण (angle of lap) साधारणतया भिन्न होते हैं।	चालक एवं चालित पुलियों पर छादन कोण (angle of lap) समान होते हैं।
3.	इसमें छादन कोण (angle of lap) का मान कम होता है।	शाफ्टों के मध्य उतनी ही दूरी के लिये छादन कोण का मान अधिक होता है।
4.	इस चालन के द्वारा कम शक्ति पारेषण होता है।	इस चालन में समान दशाओं में अधिक शक्ति का पारेषण होता है।
5.	बिचली पुलियों (idler pulleys) के प्रयोग से छादन कोण (angle of lap) बढ़ाया जा सकता है।	बिचली पुलियों का प्रयोग सम्भव नहीं है।
6.	इस चालन में पट्टे की घिसाई कम होती है।	इस चालन में पट्टा अधिक घिसता है।

उदाहरण 4.1—500 mm व्यास की पुली 160 rpm पर घूम रही है तथा 300 mm व्यास की दूसरी पुली को चलाती है, तो इस पुली के rpm ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है,

(i) $d_1 = 500\,\text{mm}$ (ii) $d_2 = 300\,\text{mm}$ (iii) $N_1 = 160\,\text{rpm}$ (iv) $N_2 = ?$

हम जानते हैं, कि

$$\pi d_1 N_1 = \pi d_2 N_2 \quad \text{या} \quad \frac{N_2}{N_1} = \frac{d_1}{d_2}$$

या

$$N_2 = \frac{d_1 \times N_1}{d_2} = \frac{500 \times 160}{300} = \mathbf{266.67\ rpm}$$ **उत्तर**

उदाहरण 4.2—उदाहरण 4.1 में यदि कुल फिसलन 3% हो तो द्वितीय पुली के rpm ज्ञात कीजिये।

हल— दिया है,

(i) फिसलन (Slip) $= 3\%$ (ii) $d_1 = 500\,\text{mm}$ (iii) $d_2 = 300\,\text{mm}$ (iv) $N_1 = 150\,\text{rpm}$

(iv) $N_2 = ?$

वेगानुपात हम जानते हैं, कि

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{d_1}{d_2}\left(1 - \frac{S}{100}\right)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

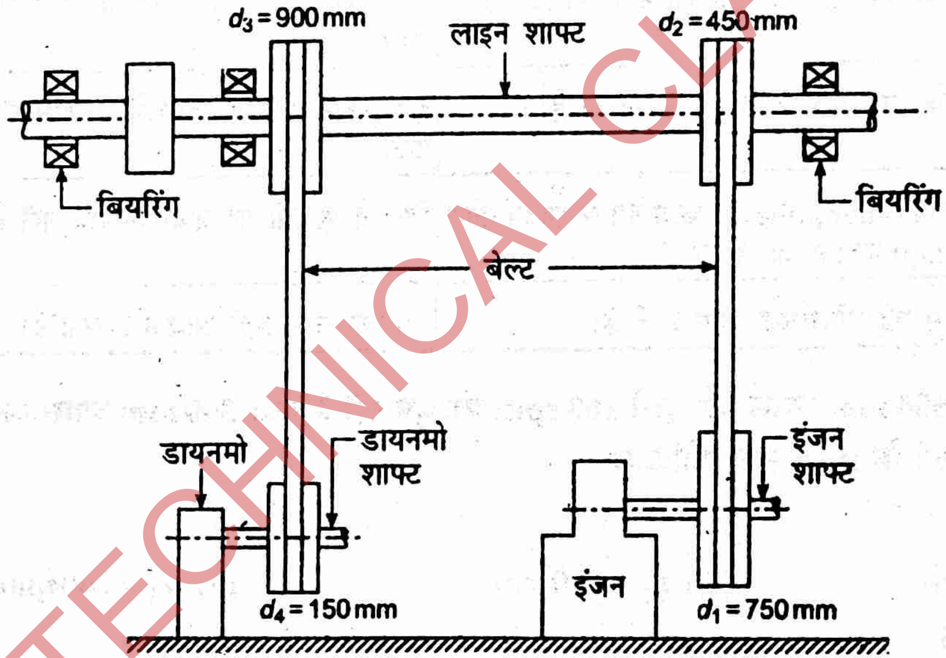
$$\frac{N_2}{150} = \frac{500}{300}\left(1 - \frac{3}{100}\right)$$

$$N_2 = \frac{500}{300} \times \frac{97}{100} \times 150 = \mathbf{242.5\ rpm}$$ उत्तर

उदाहरण 4.3— किसी वर्कशाप में एक इंजन 150 rpm पर गति करके एक लाइन शाफ्ट (line shaft) को चलाता है। इंजन शाफ्ट पर लगी पुली का व्यास 750 mm तथा लाइन शाफ्ट की पुली का व्यास 450 mm है। लाइन शाफ्ट पर एक अन्य पुली जिसका व्यास 900 mm है, के द्वारा डायनयो की शाफ्ट पर लगी 150 mm व्यास की पुली को घुमाया जाता है। निम्न दशाओं में डायनमों शाफ्ट की गति ज्ञात कीजिये–

(i) जब कोई फिसलन (Slip) न हो,

(ii) जब प्रत्येक चालन पर 2% फिसलन हो।



चित्र 4.11

हल—दिया है, (चित्र 4.11 का अवलोकन करें)

(i) $N_1 = 150$ rpm (ii) $N_4 = ?$ (iii) $d_1 = 750$ mm (iv) $d_2 = 450$ mm (v) $d_3 = 900$ mm (vi) $d_4 = 150$ mm (vi) प्रत्येक चालन पर फिसलन (Slip) = 2%

(i) जब कोई फिसलन नहीं है।

इस स्थिति में वेगानुपात

$$\frac{N_4}{N_1} = \frac{d_1 \times d_3}{d_2 \times d_4}$$

$$\frac{N_4}{150} = \frac{750 \times 900}{450 \times 150}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$$N = \frac{750 \times 900 \times 150}{450 \times 150} = \mathbf{1500\ rpm}$$ उत्तर

(ii) जब प्रत्येक चालन पर 2% फिसलन है।

इस स्थिति में वेगानुपात

$$\frac{N_4}{N_1} = \frac{d_1 \times d_3}{d_2 \times d_4}\left(1 - \frac{S_1}{100}\right)\left(1 - \frac{S_2}{100}\right)$$

$$\frac{N_4}{150} = \frac{750 \times 900}{450 \times 150}\left(1 - \frac{2}{100}\right)\left(1 - \frac{2}{100}\right)$$

$$N_4 = \frac{150 \times 750 \times 900 \times 98 \times 98}{450 \times 150 \times 100 \times 100} = \mathbf{1440.6\ rpm}$$ उत्तर

उदाहरण 4.4— 0.61 m व्यास की घिरनी 0.81 m व्यास की एक अन्य घिरनी को पट्टे की सहायता से घुमाती है। दोनों घिरनियों के केन्द्रों के मध्य 4.26 m की दूरी है। खुले (open) तथा उभयमुखी (crossed) चालन के लिये पट्टे की लम्बाई ज्ञात कीजिये।

यदि चालक घिरनी (driver pulley) दक्षिणावर्त दिशा (clockwise direction) में घूमे तो दोनों दिशाओं में चलित घिरनी के घूमने की दिशा (direction of rotation) भी बताइये।

हल—दिया है—

(i) चालक घिरनी का व्यास $(d_1) = 0.61\text{m}$

(ii) चलित घिरनी का व्यास $(d_2) = 0.81\text{m}$

(iii) दोनों घिरनी के केन्द्रों के मध्य दूरी $(l) = 4.26\text{m}$

(iv) पट्टे की लम्बाई $(L) = ?$

(v) चलित घिरनी के घुमाव की दिशा = ?

(a) खुला पट्टा चालन (Open belt drive)— हम जानते हैं कि, खुला चालन में

$$\text{पट्टे की लम्बाई } L = \pi(r_1 + r_2) + \frac{(r_1 - r_2)^2}{l} + 2l$$

$$= \pi(0.305 + 0.405) + \frac{(0.305 - 0.405)^2}{4.26} + 2 \times 4.26$$

$$= 2.23 + 0.00234 + 8.52 = \mathbf{10.75\ m}$$ उत्तर

(b) उभयमुखी पट्टा चालन (Cross belt drive)—उभयमुखी पट्टा चालन में

$$\text{पट्टे की लम्बाई } L = \pi(r_1 + r_2) + \frac{(r_1 + r_2)^2}{l} + 2l$$

$$= \pi(0.305 + 0.405) + \frac{(0.305 + 0.405)^2}{4.26} + 2 \times 4.26$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$$= 2.23 + 0.118 + 8.52$$

$$= \mathbf{10.86\ m}$$

उत्तर

खुला पट्टा चालन में चलित घिरनी के घूमने की दिशा, चालक घिरनी के घूमने की दिशा के समान ही दक्षिणावर्त (clockwise) ही होगी।

उभयमुखी पट्टा चालन में चलित घिरनी के घूमने की दिशा, चालक घिरनी के घूमने की दिशा में विपरीत वामावर्त (anti clockwise) होगी।

4.4.2 चपटे पट्टे में तनावों का अनुपात (Ratio of Tension of Flat Belt)

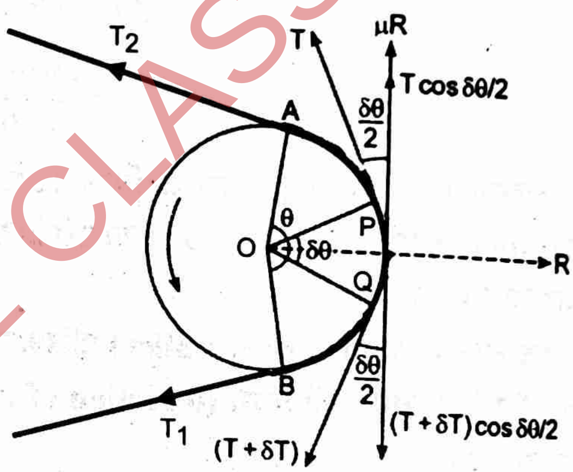
चित्र 4.12 में प्रदर्शित पुली को दक्षिणावर्त दिशा (clockwise direction) में घूमता हुआ मानते हैं।

यदि T_1 = पट्टे के खिंचे पक्ष (tight side) में तनाव।

T_2 = पट्टे के ढीले पक्ष (slack side) में तनाव।

θ = पट्टे के पुली पर लिपटे भाग द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण (छादन कोण) है। पट्टे की PQ लम्बाई पर विचार करने पर,

लम्बाई PQ के द्वारा पुली के केन्द्र पर कोण '$\delta\theta$' बनाया गया है।



चित्र 4.12

इस भाग पर निम्न बल लगे हुए हैं—

(i) बिन्दु P पर पट्टे का तनाव $= T$

(ii) बिन्दु Q पर पट्टे का तनाव $= (T + \delta T)$

(iii) पट्टे व पुली के मध्य लम्ब प्रतिक्रिया $= R$

(iv) घुमाव की दिशा के विपरीत घर्षण बल $= \mu R$

जहाँ 'μ' पुली व पट्टे के मध्य घर्षण गुणांक है।

पट्टे की PQ लम्बाई पर लगे सभी बलों को क्षैतिज दिशा में वियोजित (resolve) करने पर,

$$R = (T + \delta T)\sin\frac{\delta\theta}{2} + T\sin\frac{\delta\theta}{2}$$

क्योंकि PQ की लम्बाई द्वारा बनाया गया $\delta\theta$ का मान बहुत कम है। अत: $\sin\left(\frac{\delta\theta}{2}\right) = \frac{\delta\theta}{2}$ लिया जा सकता है।

या
$$R = (T + \delta T)\frac{\delta\theta}{2} + T.\frac{\delta\theta}{2}$$

या
$$R = T.\frac{\delta\theta}{2} + \delta T.\frac{\delta\theta}{2} + T.\frac{\delta\theta}{2}$$

($\delta T.\frac{\delta\theta}{2}$ को नगण्य मानने पर बहुत छोटा होने के कारण)

AKC TECHNICAL CLASSES

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{T}.\delta\theta \qquad \ldots(i)$$

अब पट्टे की PQ की लम्बाई पर सभी बलों को ऊर्ध्वाधर दिशा में वियोजित (resolve) करने पर,

$$\mu R + T\cos\frac{\delta\theta}{2} = (T+\delta T)\cos\frac{\delta\theta}{2}$$

$$\mu R = (T+\delta T)\cos\frac{\delta\theta}{2} - T\cos\frac{\delta\theta}{2}$$

क्योंकि कोण $\delta\theta$ का मान बहुत कम है अत: $\cos\frac{\delta\theta}{2} = 1$ लेने पर,

या
$$\mu R = (T+\delta T) - T$$

या
$$\mu \boldsymbol{R} = \delta \boldsymbol{T} \qquad \ldots(ii)$$

समी० (i) से R का मान समी० (ii) में रखने पर,

या
$$\mu(T.\delta\theta) = \delta T$$

या
$$\mu.\delta\theta = \frac{\delta \boldsymbol{T}}{\boldsymbol{T}} \qquad \ldots(iii)$$

समी० (iii) का समाकलन करने पर,

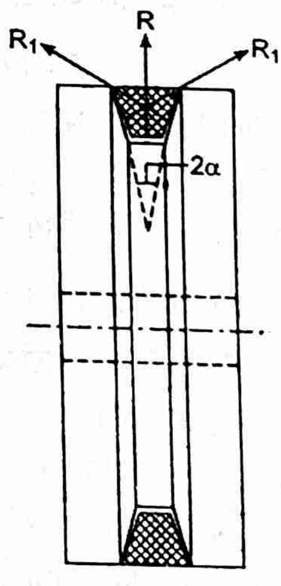
या
$$\int_{T_2}^{T_1}\frac{\delta T}{T} = \mu\int_0^{\theta}\delta\theta \quad \text{या} \quad \log_e\frac{T_1}{T_2} = \mu\theta$$

या
$$\frac{\boldsymbol{T_1}}{\boldsymbol{T_2}} = \boldsymbol{e}^{\mu\theta} \qquad \ldots(iv)$$

उपरोक्त सूत्र (iii) से हमें ज्ञात होता है, कि **पट्टे के दोनों भागों में तनाव के अनुपातों पर पट्टे व पुली के मध्य उत्पन्न घर्षण गुणांक (μ) एवं छादन कोण (θ) का ही प्रभाव पड़ता है।**

उपरोक्त सूत्र में छादन कोण (angle of lap) छोटी पुली का प्रयोग किया जायेगा क्योंकि पट्टा सर्वप्रथम छोटी पुली पर फिसलेगा।

4.4.3 V पट्टा चालन में पट्टे के तनावों का अनुपात (Ratio of Tensions in V-belt Drive)



चित्र 4.13

V पट्टा की आकृति समलम्बाकार (trapezoidal) होती है। V पट्टा चालन की घिरनी की परिधि पर भी उसी आकार का खाँचा बना होता है। देखिये चित्र 4.13 । पुली की परिधि पर V-खाँचा बनाने से पट्टे की सतह का खाँचे की सतह से अधिक सम्पर्क बनता है जिसके कारण घर्षण पकड़ (frictional grip) अधिक हो जाती है व अधिक शक्ति का संचारण किया जा सकता है। साथ ही पट्टे के फिसलन की सम्भावना कम हो जाती है। पट्टे की अच्छी पकड़ के लिये यह आवश्यक है कि पट्टा खाँचे की तिरछी सतहों के सम्पर्क में रहे तथा तली (bottom)

AKC TECHNICAL CLASSES

के सम्पर्क में न हो। यदि R_1 = पुली खाँचे की तिरछी सतह व पट्टे के मध्य लम्ब प्रतिक्रया है तथा R = खांचे की निचली सतह व पट्टे के मध्य लम्ब प्रतिक्रिया है।

इस प्रकार पट्टे पर कुल लम्ब प्रतिक्रिया,

$$2R_1 \sin\alpha = R$$

या

$$2R_1 = \frac{R}{\sin\alpha} \quad \ldots(i)$$

पट्टे पर कुल घर्षण बल (frictional force)

$$F = \mu \times 2R_1 = \frac{\mu R}{\sin\alpha}$$

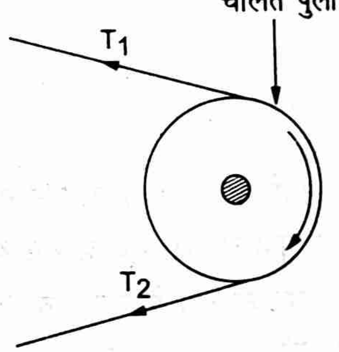
V-पट्टा चालन में, चपटे पट्टे चालन के घर्षण गुणांक μ के स्थान पर $\frac{\mu}{\sin\alpha}$ हो जाता है। शेष सभी स्थितियाँ समान रहती हैं।

अत: तनावों में अनुपात,

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{\theta} \times \frac{\mu}{\sin\alpha}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\theta\cos\alpha} \quad \ldots(ii)$$

4.4.4 चपटे पट्टे द्वारा शक्ति संचारण (Power Transmission by a Flat Belt)



चित्र 4.14

यदि किसी पट्टे के खिंचे एवं ढीले पक्ष में तनाव क्रमशः T_1 एवं T_2 न्यूटन (N) है और पट्टे का वेग v (m/s) है, तो पट्टे पर प्रभावकारी तनाव (effective tension) = $(T_1 - T_2)$ न्यूटन (N) होगी। (देखिये चित्र 4.14 में।)

पट्टे द्वारा प्रति सेकिण्ड किया गया कार्य $= (T_1 - T_2)\, v$ N m/s

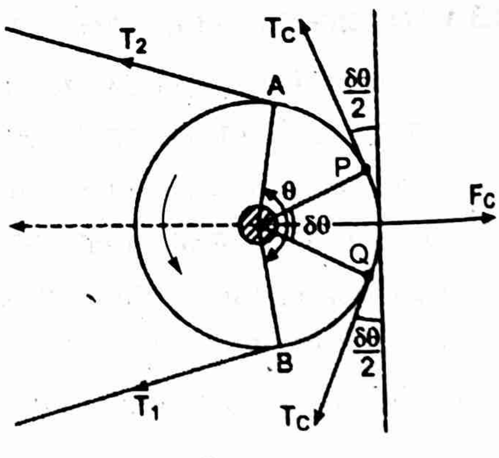
जहाँ, v = पुली पर पट्टे का रेखीय वेग, m/s में

अत: पट्टे द्वारा पारेषित शक्ति (power),

$$P = (T_1 - T_2)\, v \text{ Watt} \quad \ldots(i)$$

यहाँ ध्यान देने योग्य बात है कि चालक पुली पर $(T_1 - T_2)\, r_1$ तथा चलित पुली पर $(T_1 - T_2)\, r_2$ घुमाऊं घूर्ण कार्यरत होगा। r_1 एवं r_2 क्रमशः चालक एवं चलित पुलियों के अर्धव्यास हैं।

4.4.5 अपकेन्द्रीय तनाव बल (Centrifugal Tension)



चित्र 4.15

चित्र 4.15 का अवलोकन करें। हम जानते हैं, कि **पट्टा पुली के ऊपर लगातार घूमता रहता है। अत: पट्टे में एक अपकेन्द्रीय बल (centrifugal force) उत्पन्न होगा जो हमेशा पुली के केन्द्र से बाहर की ओर क्रिया करेगा, जिसका प्रभाव खिंचे पक्ष (tight side) एवं ढीले पक्ष (slack side) में तनाव को बढ़ाता है। अपकेन्द्रीय बल (centrifugal force) के**

AKC TECHNICAL CLASSES

कारण पट्टे में उत्पन्न तनाव को अपकेन्द्रीय तनाव (centrifugal tension) कहते हैं। कम गति पर इसका मान बहुत कम होता है किन्तु अधिक गति पर इसका मान काफी अधिक हो जाता है, जिसको गणना में प्रयोग किया जाना अति आवश्यक है।

"Since the belt continuously runs over the pulleys, therefore some centrifugal force is caused, where effect is to increase the tension on both, tight as well as the slack sides. The tension caused by centrifugal force is called centrifugal tension."

पट्टे की PQ लम्बाई को लेकर गणना करने पर, इस लम्बाई द्वारा पुली के केन्द्र पर '$\delta\theta$' कोण बनाया गया है।

यदि $m =$ पट्टे की इकाई लम्बाई का द्रव्यमान (kg)।

$v =$ पट्टे का रेखीय वेग (m/s)।

$r =$ पुली का अर्धव्यास (m)।

$T_C =$ पट्टे के बिन्दु P व Q पर कार्यरत अपकेन्द्रीय तनाव बल।

$$PQ \text{ पट्टे की लम्बाई } = r.\delta\theta$$

$$PQ \text{ लम्बाई के पट्टे का द्रव्यमान (M)} = m(r\,\delta\theta)$$

हम जानते हैं कि,

$$\text{अपकेन्द्रीय बल } (F_C) = (\text{M})\left(\frac{v^2}{r}\right)$$

$$\therefore \quad PQ \text{ पट्टे की लम्बाई के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बल } = m(r.\delta\theta) \times \frac{v^2}{r} = m.\delta\theta.v^2$$

बिन्दु P तथा Q पर कार्यरत अपकेन्द्रीय तनाव (T_C) के कारण पट्टा सन्तुलन में है। अत: PQ पर कार्यरत अपकेन्द्रीय बल एवं अपकेन्द्रीय तनाव को क्षैतिज अवयवों में वियोजित करके जोड़ने पर,

$$2T_C.\sin\frac{\delta\theta}{2} = m\delta\theta.v^2$$

क्योंकि पट्टे की लम्बाई PQ द्वारा पुली के केन्द्र पर बनाया गया कोण $\delta\theta$ का परिमाण बहुत कम है, अत:

$$\sin\frac{\delta\theta}{2} = \frac{\delta\theta}{2} \text{ माना जा सकता है।}$$

$$\therefore \quad 2T_C\frac{\delta\theta}{2} = m\delta\theta\,v^2$$

या

$$\boldsymbol{T_C = mv^2}$$

4.4.6 अपकेन्द्रीय तनाव (T_C) का संचारित शक्ति पर प्रभाव

निम्न गतियों (<10 m / sec) पर अपकेन्द्रीय तनाव बहुत कम होता है परन्तु उच्च गतियों (>10 m / sec) पर इसका प्रभाव अधिक होता है तथा गणना में शामिल किया जाता है।

अपकेन्द्रीय तनाव (T_C) के कारण पट्टे के खिंचे पक्ष (tight side) एवं ढीले पक्ष (slack side) में क्रमश: निम्न तनाव होंगे—

AKC TECHNICAL CLASSES

पट्टे के खिंचे पक्ष (tight side) में तनाव $=(T_1+T_C)$

पट्टे के ढीले पक्ष (slack side) में तनाव $=(T_2+T_C)$

अत: पारेषित शक्ति $(P)=[(T_1+T_C)-(T_2+T_C)]v=(T_1-T_2)v$

अत: हम देखते हैं, कि अपकेन्द्रीय तनाव (T_C) का पट्टे द्वारा पारेषित शक्ति पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

4.4.7 पट्टे में प्रारम्भिक तनाव (Initial Tension of Belt)

जब पुलियों पर पट्टा चढ़ाया जाता है, उस समय पट्टे में कुछ प्रारम्भिक तनाव रखा जाता है, जिसका परिमाण पारेषित की जाने वाली शक्ति (power) के ऊपर निर्भर करता है। प्रारम्भिक तनाव (T_0) पट्टे की सम्पूर्ण लम्बाई में समान होता है किन्तु जब पट्टे से शक्ति का पारेषण किया जाता है, तो पट्टे के खिंचे भाग (tight side) में तनाव T_0 से बढ़कर T_1 हो जाता है तथा ढीले पक्ष में तनाव T_0 से घटकर T_2 हो जता है। T_1 तनाव की अधिकतम सीमा है। यदि T_1 का मान थोड़ा-सा भी और बढ़ा दिया जाये तो पट्टा पुली पर फिसलने लगेगा तथा इस अवस्था में कोई शक्ति पारेषण सम्भव नहीं होगा।

इस प्रकार पट्टे के खिंचे पक्ष की ओर लम्बाई में वृद्धि होगी जबकि ढीले पक्ष की ओर लम्बाई में कमी होगी। यहाँ यह माना जा सकताहै, कि पट्टे की कुल लम्बाई स्थिर रहती है। माना α = प्रति इकाई बल के कारण पट्टे की लम्बाई का वृद्धि गुणांक

तब, खिंचे पक्ष (tight side) की ओर पट्टे की लम्बाई में वृद्धि

= ढीले पक्ष (slack side) की ओर पट्टे की लम्बाई में कमी

अत: $$\alpha(T_1-T_0)=\alpha(T_0-T_2)$$

या $$T_1-T_0=T_0-T_2$$

या $$2T_0=T_1+T_2$$

या $$T_0=\frac{T_1+T_2}{2} \qquad \text{... (i)}$$

यदि पट्टे के अपकेन्द्रीय तनाव (centrifugal tension) को भी गणना में लिया जाए।

तब, $$T_\theta=\frac{T_1+T_2+2T_C}{2} \qquad \text{... (ii)}$$

4.4.8 अपकेन्द्री तनाव के कारण पट्टे में प्रतिबल

यदि पट्टे की चौड़ाई 'b' तथा मोटाई 't' है तब पट्टे के पदार्थ में उत्पन्न प्रतिबल—

$$\sigma=\frac{T_1}{b\times t} \qquad \text{(यहाँ } T_C=0 \text{ है।)}$$

तथा $$\sigma'=\frac{(T_1+T_C)}{b\times t} \qquad \text{(यहाँ अपकेन्द्रीय तनाव } T_C \text{ है।)}$$

इस प्रकार हम देखते हैं, कि अपकेन्द्रीय तनाव (T_C) को गणना में लेने पर पट्टे के पदार्थ में उत्पन्न प्रतिबल (σ') का परिमाण σ से अधिक होगा। इसलिये अपकेन्द्रीय तनाव की दशा में अधिक अनुप्रस्थ काट का पट्टा या उच्च तनाव सामर्थ्य का पट्टा प्रयोग करना पड़ेगा।

AKC TECHNICAL CLASSES

4.4.9 पट्टे द्वारा पारेषित अधिकतम शक्ति का प्रतिबन्ध (Conditions for Maximum Power Transmitted by a Belt)

हम जानते हैं, कि पट्टे द्वारा पारेषित अश्वशक्ति

$$P = (T_1 - T_2)v \quad \text{...(i)}$$

तथा पट्टे के तनावों में अनुपात, $\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\theta}$ ...(ii)

एवं पट्टे में अपकेन्द्रीय तनाव, $T_C = mv^2$ ...(iii)

समी० (ii) से T_2 का मान समी० (i) में रखने पर

$$P = \left(T_1 - \frac{T_1}{e^{\mu\theta}}\right)v$$

$$P = T_1\left(1 - \frac{1}{e^{\mu\theta}}\right)v$$

किसी एक निश्चित पट्टा द्वारा शक्ति संचारण के लिये,

$$\left(1 - \frac{1}{e^{\mu\theta}}\right) = C \text{ (Constant)}$$

अत: पट्टे द्वारा पारेषित अश्वशक्ति, $P = T_1 \times C \times v$ ...(iv)

हम जानते हैं, कि पट्टे के खिंचे पक्ष (tight side) में अधिकतम तनाव,

$$T = T_1 + T_C$$

अत: $T_1 = T - T_C$ ...(v)

समी० (v) से T_1 के मान को समी० (iv) में रखने पर,

$$P = (T - T_C) \times C \times v$$

$$= C \times (T - mv^2) \times v = C(Tv - mv^3)$$

शक्ति के अधिकतम मान के लिये, $\frac{d(P)}{dv} = 0$ रखने पर,

अत: $T - 3mv^2 = 0$

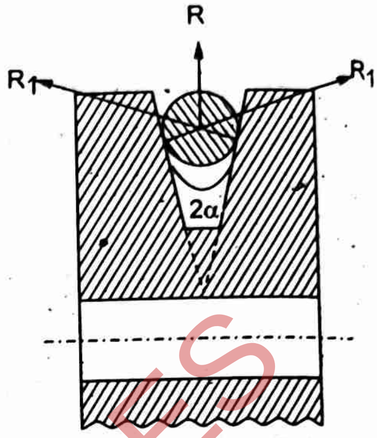
या $T - 3T_C = 0$

या $T = 3T_C$

या $\boldsymbol{T_C = T/3}$ ...(vi)

AKC TECHNICAL CLASSES

अत: उपरोक्त सम्बन्ध (vi) से हम निष्कर्ष पर पहुँचते हैं, कि **किसी पट्टे के द्वारा शक्ति संचारण में अपकेन्द्रीय तनाव (T_C) का मान अधिकतम तनाव (T) के एक तिहाई से अधिक नहीं होना चाहिये।**



चित्र 4.16

4.4.10 रस्सा चालन (Rope Drive)

रस्सा चालन (rope drive) अधिकतम दूरी व कम शक्ति के संचारण के लिये प्रयोग किया जाता है। इसकी पुली की परिधि पर भी चित्रानुसार एक खाँचा बना होता है। खाँचे का कोण सामान्यतया 45° होता है। इसका तनाव अनुपात भी V-पट्टा चालन की भाँति ही ज्ञात किया जा सकता है। देखिय चित्र 4.16 ।

अत: तनाव अनुपात $$\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\theta\cos\alpha}$$

जहाँ, T_1 = रस्से के खिंचे पक्ष (tight side) का तनाव (N)।

T_2 = रस्से के ढीले पक्ष (slack side) का तनाव (N)।

θ = छादन कोण (angle of lap) रेडियन में।

μ = रस्से तथा पुली की सम्पूर्ण सतह के मध्य घर्षण गुणांक।

α = खाँचे का आधा कोण का मान डिग्री में।

इसका उपयोग खानों से अयस्कों (ores) को बाहर लाने वाली ट्रालियों में, कई मंजिल बिल्डिंगों में ट्राली को ऊपर नीचे लाने ले जाने में व पहाड़ों पर सामान को नीचे से ऊपर लाने ले जाने में सामान्यतया: किया जाता है।

4.4.11 वी-पट्टा चालन के चपटा पट्टा चालन की अपेक्षा लाभ (Advantages of V-Belt Drive over Flat Belt Drive)

चपटे पट्टा चालन की तुलना में V-पट्टा चालन के प्रमुख लाभ निम्न हैं—

1. V-पट्टा चालन में चालक एवं चलित पुली के मध्य कम दूरी होने के कारण यह एक संहत (compact) इकाई है।
2. V-पट्टा चालन में दोनों तनावों का अनुपात, चपट्टा चालन की अपेक्षा अधिक होता है। अत: अधिक शक्ति संचारण में सक्षम है।
3. V-पट्टा चालन में पट्टे के फिसलने की सम्भावना बहुत कम होती है।
4. चपटे पट्टे की तुलना में पट्टे में खिंचाव के लिये कम समंजन (adjustment) की आवश्यकता पड़ती है।
5. अधिक शक्ति संचारण के लिये एक पुली की परिधि पर एक से अधिक खाँचे (groove) बनाकर कई पट्टों को चलाया जा सकता है।
6. शक्ति संचारण के समय चपटे पट्टे चालन की अपेक्षा, V-पट्टा चालन में कम आवाज (noise) उत्पन्न होती है।

4.4.12 रस्सा चालन के लाभ (Advantages of Rope Drive)

चपटे पट्टा चालन की तुलना में रस्सा चालन के प्रमुख लाभ निम्न हैं—

1. रस्सा चालन पट्टा चालन की अपेक्षा अधिक दूरी पर शक्ति का संचारण करने में सक्षम है।

AKC TECHNICAL CLASSES

2. इसमें तनावों का अनुपात चपटे पट्टे चालन से अधिक होने के कारण अधिक शक्ति संचारण सम्भव है।

3. एक पुली पर कई खाँचे बनाकर एक से अधिक रस्सों का प्रयोग किया जा सकता है जिसके कारण एक पुली से ही अधिक शक्ति का संचारण किया जा सकता है।

उदाहरण 4.5— कोई पट्टा दो पुलियों पर 1800 N के प्रारम्भिक तनाव (initial tension) पर चढ़ाया जाता है। छोटी पुली पर छादन कोण 165° है। $\mu = 0.2$ तथा पट्टे का वेग 16.67 m / s है। पट्टे को पूर्णतया प्रत्यास्थ (elastic) तथा नगण्य द्रव्यमान का मानते हुए इसके द्वारा पारेषित शक्ति ज्ञात कीजिये।

हल— दिया है,

(i) प्रारम्भिक तनाव $(T_0) = 1800\text{N}$ (ii) छादन कोण $(\theta) = 165°$

(iii) घर्षण गुणांक $(\mu) = 0.2$ (iv) पट्टे का वेग $(v) = 16.67 \text{ m/s}$

(v) शक्ति $(P) = ?$

$$\text{प्रारम्भिक तनाव } T_0 = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

अत:

$$T_1 + T_2 = 1800 \times 2$$

या

$$T_1 + T_2 = 3600\text{N} \qquad \ldots(\text{i})$$

हम जानते हैं, कि—

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\theta}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{0.2 \times \left(\frac{165}{180} \times \pi\right)}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{0.576}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = 1.78 \qquad \ldots(\text{ii})$$

समी० (i) से T_1 का मान समीकरण (ii) में रखने पर,

$$1.78\,T_2 + T_2 = 3600$$

$$2.78\,T_2 = 3600$$

$$T_2 = 1295.5\text{N}$$

T_2 का मान समीकरण (ii) में रखने पर,

$$T_1 = 1.78 \times 1295.5$$

$$= \mathbf{2306\ N}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

हम जानते हैं, पारेषित अश्व शक्ति

$$P = (T_1 - T_2)v = (2306 - 1295.5)\ 16.67$$

$$= 16845 \text{ W} = \mathbf{16.845\ kW}$$ **उत्तर**

उदाहरण 4.6—यदि दो पुलियों के केन्द्रों के बीच की दूरी 0.90 m है और उनके व्यास 0.375 m तथा 0.15 m हैं तथा दोनों पुलियों पर पट्टा एक साथ फिसलता है। बड़ी पुली के लिये $\mu = 0.25$ हो, तो छोटी पुली के लिये μ का मान ज्ञात कीजिये। दोनों पुलियाँ खुले पट्टे द्वारा सम्बन्धित हैं।

हल—दिया है,

(i) पुलियों के केन्द्रों के बीच की दूरी $(l) = 0.90\text{ m}$

(ii) बड़ी पुली का व्यास $(d_1) = 0.375\text{ m}$

(iii) छोटी पुली का व्यास $(d_2) = 0.15\text{ m}$

(iv) बड़ी पुली का घर्षण गुणांक $(\mu) = 0.25$

(v) छोटी पुली का घर्षण गुणांक $(\mu_2) = 0.25$

हम जानते हैं, कि खुला पट्टा चालन में,

बड़ी पुली पर छादन कोण $(\theta_1) = \pi + 2\alpha$

व छोटी पुली पर छादन कोण $(\theta_2) = \pi - 2\alpha$ होता है।

एवं $$\sin\alpha = \frac{r_1 - r_2}{l} = \frac{0.1875 - 0.075}{0.90} = \frac{0.1125}{0.90}$$

या $$\sin\alpha = 0.125 \quad \therefore \quad \alpha = 7.18°$$

(यहाँ $r_1 = \frac{0.375}{2} = 0.1875\text{m}$ व $r_2 = \frac{0.15}{2} = 0.075\text{ m}$ है।)

$\therefore$ $$2\alpha = 14.36°$$

अतः $$\theta_1 = (180 + 14.36)° = (194.36)°$$

$$= \frac{194.36 \times \pi}{180} = 3.39 \text{ रेडियन}$$

एवं $$\theta_2 = (180 - 14.36)° = (165.64)°$$

$$= \frac{165.64 \times \pi}{180} = 2.89 \text{ रेडियन}$$

हम जानते हैं, कि

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu_1\theta_1} = e^{\mu_2\theta_2}$$

या $$\mu_1\theta_1 = \mu_2\theta_2$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$$0.25 \times 3.39 = \mu_2 \times 2.89$$

$$\mu_2 = \mathbf{0.293}$$ उत्तर

उदाहरण 4.7—एक चपटा पट्टा जिसकी चौड़ाई 100 mm तथा मोटाई 8 mm है एवं जिसका द्रव्यमान (mass) 0.98 kg/m है, दो घिरनियों के मध्य 15 m / s वेग से चलते हुए शक्ति पारेषित करता है। छोटी घिरनी पर छादन कोण 165° एवं घर्षण गुणांक (μ) = 0.3 है। अधिकतम अनुमेय पट्टा प्रतिबल 2 N / mm^2 है। पट्टे में प्रारम्भिक तनाव तथा उसके द्वारा पारेषित शक्ति ज्ञात कीजिये।

हल— दिया है,

(i) पट्टे की चौड़ाई $(b) = 100\,\text{mm}$

(ii) पट्टे की मोटाई $(t) = 8\,\text{mm}$

(iii) पट्टे का द्रव्यमान $(m) = 0.98$ kg/m

(iv) छोटी घिरनी पर छादन कोण $(\theta) = 165°$

(v) घर्षण गुणांक $(\mu) = 0.3$

(vi) अनुमेय प्रतिबल $(\sigma) = 2\text{N/mm}^2$

(vii) पट्टे का वेग $(v) = 15\,\text{m/s}$

(viii) पट्टे का प्रारम्भिक तनाव $(T_0) = ?$

(ix) पारेषित शक्ति $(P) = ?$

हम जानते हैं, कि— $(T_1 + T_C) = \sigma \times b \times t = 2 \times 100 \times 8 = 1600\text{N}$

एवं अपकेन्द्रीय तनाव $T_C = mv^2$

$$\therefore \quad T_C = 0.98 \times (15)^2 = 220.5\text{ N}$$

T_C का मान रखने पर

अतः:

$$T_1 + 220.5 = 1600$$

$$T_1 = 1379.5\text{ N}$$

हम यह भी जानते हैं, कि

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\theta} = e^{0.3 \times \left(\frac{165}{180} \times \pi\right)} = 2.37$$

T_1 का मान रखने पर,

$$\frac{1379.5}{T_2} = 2.37$$

$$T_2 = 581.7\text{N}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

अब प्रारम्भिक तनाव $(T_0) = \frac{T_1 + T_2}{2}$

$$T_0 = \frac{1379.5 + 581.7}{2} = \frac{1961.2}{2} = \mathbf{980.6\ N}$$ उत्तर

संचारित शक्ति $(P) = (T_1 - T_2)v$

$$= (1379.5 - 581.7) \times 15 = 11966.85\ W$$

$$= \mathbf{11.96\ kW}$$ उत्तर

उदाहरण 4.8—एक पट्टा चालन में पट्टे के ढीले भाग में तनाव, खिंचे भाग के तनाव का आधा है, तथा पट्टे का वेग 15 m/s है। पट्टे में अधिकतम अनुमेय प्रतिबल 1.5 N/mm^2 से अधिक नहीं होता है। 10 kW शक्ति पारेषित करने के लिये पट्टे की चौड़ाई ज्ञात कीजिये। यदि पट्टे का घनत्व 1800 kg/m^3 तथा मोटाई 6 mm हो।

हल—दिया है,

(i) ढीले पक्ष का तनाव $(T_2) = \frac{1}{2} \times$ खिंचे पक्ष का तनाव (T_1)

(ii) पट्टे का वेग $(v) = 15$ m/s

(iii) पट्टे में अधिकतम प्रतिबल $(\sigma) = 1.5$ N/mm^2

(iv) पारेषित शक्ति $(P) = 10$ kW

(v) पट्टे की चौड़ाई $(b) = ?$

(vi) पट्टे की मोटाई $(t) = 6$ mm $= 0.006$ m

(vii) पट्टे का घनत्व $= 1800$ kg/m^3

हम जानते हैं, कि

पारेषित शक्ति $(P) = (T_1 - T_2)v$

या, $10{,}000 = (T_1 - T_2)15$

या, $(T_1 - T_2) = 666.67$ ... (i)

प्रश्नानुसार, $T_2 = \frac{1}{2} \times T_1$

या, $T_1 = 2T_2$ ... (ii)

समी० (ii) से T_1 का मान समी० (i) में रखने पर,

$$2T_2 - T_2 = 666.67$$

$$T_2 = 666.67\ N$$

अत: $T_1 = 1333.33\ N$

AKC TECHNICAL CLASSES

हम जानते है कि, अपकेन्द्रीय तनाव $(T_C) = mv^2$

यहाँ, प्रति मीटर पट्टे का द्रव्यमान $m = 1800 \times b \times 0.006 \times 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$

$$m = 10.8\,b$$

अत:

$$T_C = 10.8\,b \times (15)^2 = 10.8\,b \times (15)^2$$

$$= 2430\,b$$

सूत्र, $T_1 + T_C = \sigma \times b \times t$ से

या, $1333.33 + 2430\,b = 1.5 \times 10^6 \times b \times 0.006$

या, $1333.33 + 2430\,b = 9000\,b$

या, $1333.33 = 6570\,b$

अत: $b = 0.2029\,\text{m} = \mathbf{202.9\,mm}$ उत्तर

उदाहरण 4.9—10 mm मोटाई तथा 100 mm चौड़ाई के एक पट्टे का घनत्व 1200 kg/m³ है, जोकि एक खुला पट्टा चालन द्वारा दो पुली के बीच शक्ति पारेषित करता है। बड़ी पुली का छादन कोण 200° है। पुली एवं पट्टे के बीच 'μ' का मान 0.3 तथा पट्टे में अधिकतम अनुमेय प्रतिबल 2.2 N/mm² है। ज्ञात कीजिए—

(i) अधिकतम शक्ति के लिये पट्टे का अनुकूलतम वेग।

(ii) अधिकतम पारेषित शक्ति।

हल—दिया है,

(i) पट्टे की मोटाई $(t) = 10\,\text{mm} = 0.010\,\text{m}$

(ii) पट्टे की चौड़ाई $(b) = 100\,\text{mm} = 0.1\,\text{m}$

(iii) पट्टे का भार $(w) = 1200\,\text{kg/m}^3$

(iv) बड़ी पुली का छादन कोण $(\theta_1) = 200°$

(v) घर्षण गुणांक $(\mu) = 0.3$

(vi) पट्टे में अधिकतम अनुमेय प्रतिबल $(\sigma) = 2.2\,\text{N/mm}^2$

हम जानते हैं, कि खुला पट्टा चालन में बड़ी पुली का छादन कोण (angle of lap)

$$\theta_1 = \pi + 2\alpha$$

या $200° = 180° + 2\alpha$

अत: $2\alpha = (200° - 180°)$

$$2\alpha = 20°$$

$$\alpha = 10°$$

AKC TECHNICAL CLASSES

अत: छोटी पुली का छादन कोण (angle of lap)

$$\theta_2 = \pi - 2\alpha = 180° - 2 \times 10° = 160°$$

अब सूत्र $\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\theta}$ से,

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{0.3 \times \left(\frac{160}{180} \times \pi\right)} = e^{0.837} = 2.31$$

अधिकतम तनाव $T = \sigma \times b \times t = 2.2 \times 100 \times 10 = 2200\text{N}$

अपकेन्द्रीय तनाव $(T_C) = mv^2$

अत: $T_C = 1200 \times 0.1 \times 0.01 \times v^2 = 1.2v^2$

हम जानते हैं, कि अधिकतम शक्ति संचारण के लिये,

$$T_C = \frac{T}{3} = \frac{2200}{3} = 733.33\text{N}$$

अत: $1.2v^2 = 733.33$

$$v^2 = \frac{733.33}{1.2}$$

$$v^2 = 611.1$$

$$\mathbf{v = 24.72\ m/s}$$ उत्तर

अधिकतम तनाव $T = T_1 + T_C$

$$2200 = T_1 + 733.33$$

अत: $T_1 = 2200 - 733.33 = 1466.67\text{N}$

एवं $T_2 = \frac{T_1}{2.31} = \frac{1466.67}{2.31} = 634.86\text{N}$

संचारित अश्व शक्ति $P = (T_1 - T_2)v = (1466.67 - 634.86) \times 24.72$

$$= 20562.84\ \text{W} = \mathbf{20.56\ kW}$$ उत्तर

उदाहरण 4.10—निम्न आँकड़ों की सहायता से एक रस्सा चालन के द्वारा पारेषित शक्ति ज्ञात कीजिये।

(i) छादन कोण (angle of lap) = 180°

(ii) पुली खाँचा कोण = 60°

(iii) घर्षण गुणांक = 0.2

(iv) प्रति मीटर रस्से में पदार्थ की मात्रा = 0.4 kg

(v) अनुज्ञेय तनाव = 1500 N

(vi) रस्से का वेग = 15 m / sec

AKC TECHNICAL CLASSES

हल—दिया है—छादन कोण $(\theta)=180°=\left(\frac{180}{180}\times\pi\right)=3.142$ रेडियन

पुली खाँचा कोण $(2\alpha)=60°$

अतः $\alpha=30°$

घर्षण गुणांक $(\mu)=0.2$

एक मीटर पट्टे के पदार्थ की मात्रा $(m)=0.4\,\text{kg}$

अनुमेय तनाव $(T)=1500\text{N}$

पट्टे का वेग $(v)=15\,\text{m/sec}$

हम जानते हैं, कि अपकेन्द्रीय तनाव

$$T_C=mv^2=0.4\times(15)^2=90\text{N}$$

अतः
$$T_1=T-T_C=1500-90=1410\text{N}$$

सूत्र $\frac{T_1}{T_2}=e^{\mu\theta\,\text{cosec}\,\alpha}$ के प्रयोग करने पर

$$\frac{T_1}{T_2}=e^{0.2\times3.142\times\text{cosec}\,30°}=e^{1.2568}=3.51$$

$$\therefore\quad T_2=\frac{T_1}{3.51}=\frac{1410}{3.51}=401.5$$

अब, संचारित अश्व शक्ति $P=(T_1-T_2)v$

$$=(1410-401.5)\times15=15127.5\,\text{W}$$

$$=\mathbf{15.127\ kW}$$

उत्तर

उदाहरण 4.11—एक रस्सा चालन में 1.5 m व्यास की पुली जिसके खाँचे का कोण 45° है, के द्वारा 100 kW शक्ति पारेषित करती है। पुली 200 rpm पर घूम रही है। पुली के खाँचे व रस्से के मध्य घर्षण गुणांक 0.3 है। छादन कोण (angle of lap) 160° है। प्रत्येक रस्सा 0.6 kg/m द्रव्यमान का है तथा सुरक्षित रूप में अधिकतम तनाव 800 N वहन कर सकता है। अपकेन्द्रीय तनाव को गणना में करते हुए निम्न ज्ञात कीजिये—

(i) रस्सों की संख्या एवं (ii) रस्सों का प्रारम्भिक तनाव।

हल—दिया है,

(i) पुली का व्यास $(d)=15\,\text{m}$

(ii) खाँचे का कोण $(2\alpha)=45°$

(iii) पारेषित शक्ति $(P)=100\,\text{kW}$

(iv) पुली के चक्कर/मिनट $(N)=200$

(v) घर्षण गुणांक $(\mu)=0.3$

(vi) छादन कोण $(\theta)=160°$

(vii) रस्से की प्रति मीटर लम्बाई का द्रव्यमान $(m)=0.6\,\text{kg}$

AKC TECHNICAL CLASSES

(viii) सुरक्षित अधिकतम तनाव $(T) = 800\text{N}$

(ix) रस्सों की संख्या $(n) = ?$

(x) रस्सों का प्रारम्भिक तनाव $T_\theta = ?$

हम जानते हैं, कि अपकेन्द्रीय तनाव

$$T_C = mv^2 = 0.6 \times \left(\frac{\pi \times 1.5 \times 200}{60}\right)^2$$

$$= 0.6 \times 246.49 = 147.89\text{ N}$$

खिंचे पक्ष में तनाव, $T_1 = T - T_C$

$$= (800 - 147.89)\text{ N} = 652.11\text{N}$$

अब सूत्र $\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\theta}$ से,

$$\frac{652.11}{T_2} = e^{0.3 \times \left(\frac{160^\circ}{180^\circ} \times \pi\right) \text{cosec } 22.5^\circ}$$

$$= e^{2.188} = 8.918$$

अतः $T_2 = \frac{652.11}{8.918} = 73.124\text{N}$

अब पारेषित शक्ति $P = \frac{(T_1 - T_2)v}{60}$

$$= \frac{(652.11 - 73.124) \times \pi \times 1.5 \times 200}{60}$$

$$= \frac{578.98 \times 942.47}{60} = 9094.528\text{ W}$$

$$= \mathbf{9.094\text{ kW}}$$ उत्तर

(i) अतः रस्सों की संख्या $(n) = \frac{100}{9.094} = \mathbf{11}$ उत्तर

(ii) रस्से में प्रारम्भिक तनाव $(T_0) = \frac{(T_1 + T_2 + 2T_C)}{2}$

$$= \frac{(652.11 + 73.124 + 2 \times 147.8940)}{2} = \frac{1021}{2}$$

$$= \mathbf{510.5\text{ N}}$$ उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES

उदाहरण 4.12—दो पुलियाँ जिनका व्यास क्रमश: 600 mm एवं 240 mm है, खुला पट्टा चालन से सम्बन्धित है। दोनों पुलियों के केन्द्रों की दूरी 3 m है। छोटी पुली जो 300 rpm पर घूम रही है, के द्वारा 5 kW शक्ति संचारित की जाती है। यदि पट्टा एवं पुली सतह के बीच घर्षण गुणांक 0.3 एवं सुरक्षित कार्यकारी तनाव 10 N/mm पट्टे की चौड़ाई हो, तो ज्ञात कीजिये—

(a) पट्टे की कम से कम चौड़ाई।

(b) पट्टे का प्रारम्भिक तनाव।

(c) आवश्यक पट्टे की लम्बाई।

हल—दिया है,

(i) बड़ी पुली का व्यास $(d_1) = 600\,\text{mm} = 0.60\,\text{m}$

(ii) छोटी पुली का व्यास $(d_2) = 240\,\text{mm} = 0.24\,\text{m}$

(iii) दोनों पुलियों के केन्द्रों के बीच की दूरी $(l) = 3\,\text{m}$

(iv) छोटी पुली के चक्कर/मिनट $(N) = 300\,\text{r.p.m}$

(v) पारेषित शक्ति $(P) = 5\,\text{kW}$

(vi) पुली एवं पट्टे के बीच घर्षण गुणांक $(\mu) = 0.3$

(vii) सुरक्षित कार्यकारी तनाव $= 10\,\text{N/mm}$

हम जानते हैं, कि

$$P = (T_1 - T_2)v$$

यहाँ पट्टे का वेग

$$v = \pi d_2 N_2$$

$$= 3.14 \times 0.24 \times 300\,\text{m/min}$$

$$= 226\,\text{m/min}$$

या

$$5000 = \frac{(T_1 - T_2) \times 26}{60}$$

अत:

$$(T_1 - T_2) = \frac{60 \times 5000}{226} = 1327\,\text{N} \quad \ldots\text{(i)}$$

खुला पट्टा चालन में,

$$\sin\theta = \frac{(r_1 - r_2)}{l}$$

यहाँ

$$r_1 = \frac{0.60}{2} = 0.30\,\text{m}$$

$$r_2 = \frac{0.24}{2} = 0.12\,\text{m}$$

$$l = 3\,\text{m}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

अतः $$\sin\alpha = \frac{(0.30-0.12)}{3} = \frac{0.18}{3} \doteq 0.06$$

या $$\alpha = (3.43)^\circ$$

छोटी पुली पर छादन कोण (angle of lap)

$$\theta = (\pi - 2\alpha) = (180 - 2\times 3.43)^\circ$$

$$= (180-6.86)^\circ = (173.14)^\circ$$

$$= 173.14 \times \frac{\pi}{180^\circ} = 3.02 \text{ रेडियन}$$

हम जानते हैं, कि $$\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\theta} = e^{0.3\times 3.02} = 2.475 \quad \ldots(ii)$$

समी० (i) व (ii) से,

$$2.475T_2 - T_2 = 1327$$

$$1.475T_2 = 1327$$

अतः $$T_2 = 900\text{N}$$

एवं $$T_1 = 2227\text{N}$$

(a) माना पट्टे की चौड़ाई b है।

अतः $$T_1 = 10\times b$$

$$2227 = 10\times b$$

$$b = \mathbf{222.7\ mm}$$ उत्तर

(b) पट्टे का प्रारम्भिक तनाव

$$T_0 = \frac{(T_1+T_2)}{2} = \frac{2227+900}{2}$$

$$= \mathbf{15635\ N}$$ उत्तर

(c) खुला पट्टा चालन में पट्टे की लम्बाई

$$L = \pi(r_1+r_2) + \frac{(r_1-r_2)^2}{1} + 2l$$

$$= \pi(0.30+0.12) + \frac{(0.30-0.12)^2}{3} + 2\times 3$$

$$= 1.32 + 0.0108 + 6 = \mathbf{7.33\ m}$$ उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES

उदाहरण 4.13—एक पुली जिसका व्यास 3.6 m है, रस्सा चालन के द्वारा शक्ति का संचारण करती है। पुली के रिम पर 15 खाँचे बने हैं, जिनमें से प्रत्येक का कोण 45° है। छादन कोण (angle of lap) 170° है एवं रस्सा व खाँचे की सतह के मध्य घर्षण गुणांक 0.28 है। रस्से में अधिकतम तनाव 960 N है तथा रस्से का द्रव्यमान (m) = 1.5 kg/m लम्बाई है। पुली पर पट्टे का परिधीय वेग एवं संचारित अधिकतम शक्ति ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है,

(i) पुली का व्यास $(d) = 3.6\,\text{m}$

(ii) खाँचे (grooves) की संख्या $= 15$

(iii) खाँचे (groove) का कोण $(2\alpha) = 45°$

(iv) छादन कोण $(\theta) = 170°$

(v) घर्षण गुणांक $(\mu) = 0.28$

(vi) अधिक तनाव $(T) = 960\text{N}$

(vii) रस्से का द्रव्यमान $(m) = 1.5$ kg

(viii) पुली पर पट्टे का परिधीय वेग $(v) = ?$

(ix) संचारित अधिकतम शक्ति $= ?$

हम जानते हैं, कि अधिकतम शक्ति संचारण के लिये प्रतिबन्ध

$$T_{\max} = 3T_C$$

$$T_{\max} = 3.mv^2$$

या
$$v = \sqrt{\left(\frac{T_{\max}}{3m}\right)} = \sqrt{\left(\frac{960}{3 \times 1.5}\right)} = \mathbf{14.6\ m/s}$$ उत्तर

रस्से के दोनों तनावों में अनुपात, $\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\theta \operatorname{cosec} \alpha} = e^{0.28 \times \left(170 \times \frac{\pi}{180}\right) \operatorname{cosec} 22.5°} = e^{2.1698} = 8.756$

एवं
$$T_C = mv^2 = 1.5 \times (14.6)^2 = 320\,\text{N}$$

अपकेन्द्रीय तनाव (T_c) की उपरोक्त सूत्र से भी गणना की जा सकती है।

हम यह भी जानते हैं, कि $T = T_1 + T_C$

या $T_1 = T - T_C = (960 - 320) = 640\,\text{N}$

अत: $T_2 = \frac{640}{8.756} = 73.09\,\text{N}$

एक रस्से द्वारा पारेषित शक्ति $P = (T_1 - T_2)\,v = (640 - 73.09) \times 14.6$

$$= 8279.72\,\text{W} = 8.28\,\text{kW}$$

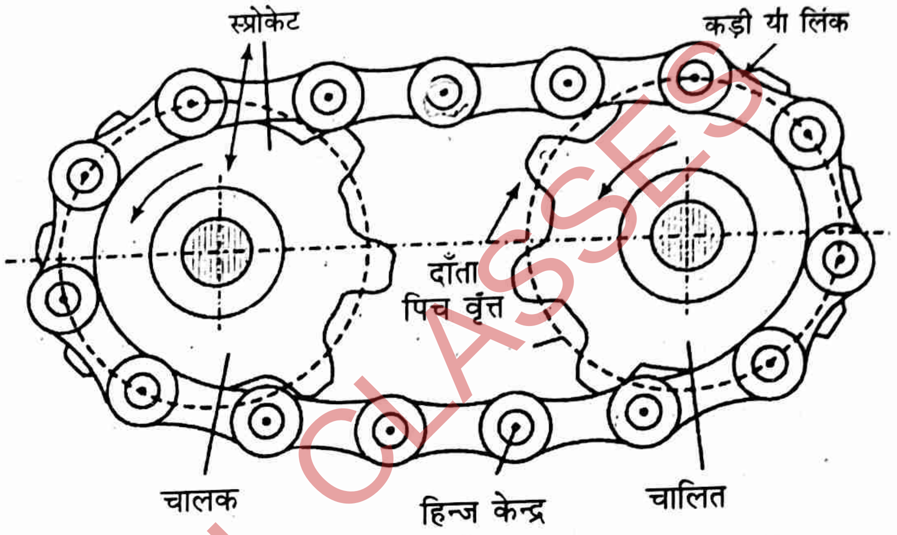
अत: 15 रस्सों द्वारा पारेषित शक्ति $= 8.28 \times 15 =$ **124.2 kW** उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES

§ 4.5 चेन चालन (Chain Drive)

पट्टा चालन और रस्सा चालन में हमने देखा कि पुली एवं पट्टे के बीच फिसलन संभव है। फिसलन न होने देने के लिए इस्पात की बनी चेनों का प्रयोग किया जाता है। जैसा कि चित्र 4.17 में प्रदर्शित है।

चेन दृढ़ (rigid) कड़ियों को हिंज (hinge) द्वारा जोड़ कर बनाई जाती है जिससे कि चालक तथा चलित पट्टियों पर इसे लपेटने के लिए आवश्यक नम्यता (flexibility) बनी रहे। इन पहियों पर उभरे हुए दाँते होते हैं जो चेन के खाँचों में फिट होकर धनात्मक चालन (positive drive) बनाते हैं। इस प्रकार चेन एवं पहियें एक साथ घूमने के लिए निरुद्ध (Constrained) होते हैं और फिसलन रहित एक निश्चित वेगानुपात उपलब्ध कराते हैं। दाँतेदार पहिया, जो देखने में स्पर गियर की भाँति होता है, स्प्रोकेट पहिया (sproket wheel) या केवल स्प्रोकेट (sprocket) कहलाता है।



चित्र 4.17. चेन चालन

4.8.1 चेन चालन की उपयोगिता (Utility of Chain Drives)

चेन चालन का उपयोग प्रमुखतया कम दूरी पर स्थित दो शाफ्टों के मध्य गति तथा शक्ति के पारेषण के लिए होता है। क्योंकि चेन चालन में वेगानुपात लगभग स्थिर रहता है। अत: इसका उपयोग धनात्मक चालन के लिए भी होता है। उदाहरण के लिए साइकिल, स्कूटर, मोटर-साइकिल, क्रेन, हॉइस्ट (hoist) बॉयलर में कोयला भरण-स्टोकर (feed stockers) में, पदार्थ हस्तान्तरण, कृषि यन्त्रों, रोड़ रोलरों आदि में चेन चालन का प्रयोग होता है।

4.8.2 पट्टा अथवा रस्सा चालन की तुलना में चेन चालन के लाभ तथा अलाभ (Advantages and Disadvantages of Chain Drive over Belt or Rope Drive)

पट्टा चालन अथवा रस्सा चालन की तुलना में चेन चालन के प्रमुख लाभ तथा अलाभ निम्न प्रकार हैं—

लाभ

1. शाफ्टों के बीच कम दूरी होने पर चेन चालन उपयोगी रहता है।
2. इससे शाफ्टों पर कम भार लगता है।
3. कम स्थान घेरता है।
4. स्थिर वेगानुपात प्राप्त होता है।
5. एक चेन द्वारा एक समय में एक से अधिक इकाईयाँ भी सरलता से चलाई जा सकती हैं।
6. चेन चालन को भट्टियों जैसे गर्म वातावरण में भी प्रयोग किया जा सकता है।
7. पट्टे या रस्से की अपेक्षा इसका सेवाकाल अधिक रहता है।
8. चेन चालन से उच्च पारेषण दक्षता (98% तक) प्राप्त हो सकती है।

AKC TECHNICAL CLASSES

अलाभ

1. चेन का भार अधिक होता है।
2. चेन का मूल्य अधिक होता है।
3. चेन निर्माण में अत्यधिक कुशलता व तकनीक की आवश्यकता होती है।
4. चेन चालन में यथार्थ संस्थापन (Accurate mounting) एवं सावधानीपूर्वक रखरखाव की आवश्यकता होती हैं।
5. चेन की लम्बाई क्रिया के दौरान खिंच जाती है। इस कारण समय-समय पर इसकी कुछ कड़ियों को निकालने की आवश्यकता होती है।

4.8.3 चेनों का वर्गीकरण एवं उपयोग (Classification of Chains and Their Uses)

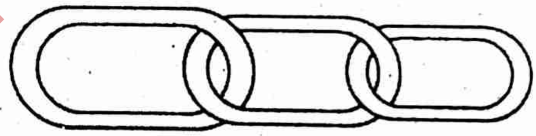
उपयोग के आधार पर चेनों को प्राय: निम्न तीन वर्गों में बाँटा जा सकता है—

1. हॉइस्ट अथवा क्रेन चेनें (Hoisting or crane chains)—ये चेनें हॉइस्ट अथवा क्रेन आदि पर प्रयोग की जाती हैं। ये चेनें भी दो प्रकार की हो सकती हैं—

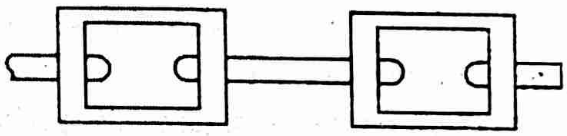
(i) ओवल कड़ी चेन (Oval link chain) तथा

(ii) वर्गाकार कड़ी चेन (Square link chain)

ओवल कड़ी चेन की कड़ियाँ ओवल आकृति की होती हैं (देखें चित्र 4.18(i)) । इन कड़ियों के जोड़ प्राय: वेल्ड किये गये होते हैं। इनके लिए विशिष्ट प्रकार के स्प्रोकेट प्रयोग कम गति के लिए होता है। जैसे चेन हॉइस्ट या समुद्री जहाजों के एँकर (anchors) आदि में। वर्गाकार कड़ी चेन की कड़ियाँ वर्गाकार आकृति की होती हैं (देखें चित्र 4.18 (ii)। इनकी लागत ओवल आकृति वाली चैन से कम होती है परन्तु अधिक वाली चैन से कम होती है परन्तु अधिक भार की स्थिति में वर्गाकार कड़ी चेन के ऐंठने (kinking) का खतरा रहता है।



(i) ओवल कड़ी चेन



(ii) वर्गाकार कड़ी चेन

चित्र 4.18

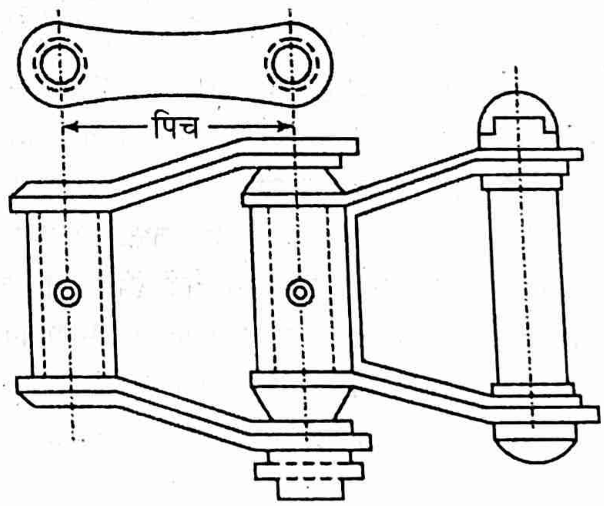
2. वाहक चेनें (Converyor chains)— इस प्रकार की चेनों का प्रयोग कारखानों आदि में पदार्थों के लगातार हस्तान्तरण तथा ढुलाई के लिए होता है।

ये चेनें भी दो प्रकार की होती हैं—

(i) हुक चेन तथा

(ii) बंद जोड़ प्रकार की चेन।

चित्र 4.19 में एक बंद जोड़ प्रकार की वाहक चेन प्रदर्शित है। ये चेनें सामान्यतया आघातवर्ध्य ढलवाँ लोहे (maleable cast iron) की बनाई जाती है। इन चेनों का परिचालन पूर्णत: शांत नहीं रहता और ये कम गति (3 से 12 km/H तक) के लिए ही प्रयोग की जाती है।



चित्र 4.19

AKC TECHNICAL CLASSES

3. शक्ति पारेषण चेनें (Power transmission chains)— ये चेनें अधिक गति पर शक्ति पारेषण हेतु प्रयोग की जाती हैं। इस प्रकार की चेनों में पर्याप्त स्नेहन का भी प्रावधान रहता है। ये चेनें भली-भाँति सूक्ष्मतापूर्वक एवं दृढ़ पदार्थों की बनाई जाती हैं। ये चेनें तीन प्रकार की होती हैं—

(i) ब्लॉक चेन (Block chain)

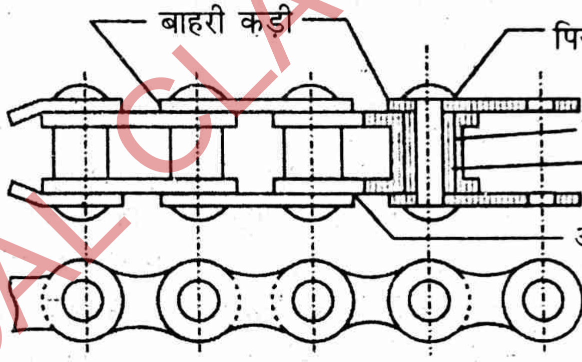
(ii) रोलर चेन (Roller chain)

(iii) शांति चेन (Silent chain)

चित्र 4.20. ब्लॉक चेन

ब्लॉक चेन को बुश चेन भी कहते हैं। यह ठोस इस्पात ब्लॉकों के दोनों तरफ कड़ियों को कठोरीकृत इस्पात की रिवेटों द्वारा जोड़कर बनाई जाती है। इस प्रकार के चेन स्प्रोकेट के दाँतों के साथ जुड़ते हुए तथा अलग होते हुए आवाज करती हैं क्योंकि दाँतों और कड़ियों के मध्य रगड़ (rubbing) होती है। यह कम गति पर उच्च शक्ति पारेषण के लिए उपयुक्त होती है।

रोलर चेन सर्वाधिक प्रयोग की जाने वाली चेन है। ये चेनें बहुत मजबूत तथा सरंचना में सरल होती हैं। इसमें अन्दर की प्लेटें आपस में इस्पात के बुशों द्वारा सम्बन्धित होती हैं। इस बुश में से पिन को गुजारकर और बाहरी कड़ी को लगाकर पिन रिवेट कर दी जाती है जैसा की चित्र 4.21 में प्रदर्शित है। प्रत्येक बुश को घेरे हुए (enclosed) एक रोलर भी लगा होता है। यह रोलर, बुश पर घूमने के लिए स्वतंत्र होता है और स्प्रोकेट पहिये के दाँतों को घिसने से बचाता है। सामान्यतया पिन, बुश तथा रोलर, मिश्र धातु इस्पात के बनाये जाते हैं जिन्हें कठोरीकृत तथा घिसकर (by grinding) तैयार किया जाता है।

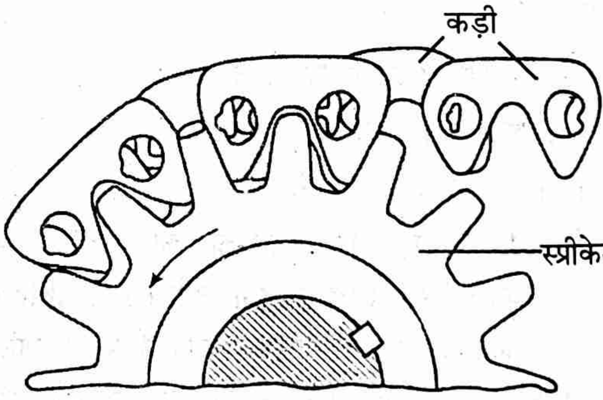


चित्र 4.21. रोलर चेन

इस चेन का सेवाकाल अधिक होता है और यह खराब परिस्थितियों में भी अच्छी सेवा प्रदान करती हैं। ये सामान्यतया 450 m/min गति के लिए प्रयोग की जाती है।

शांत चेन को अधोमुखी दांता चेन (Inverted tooth chain) भी कहते हैं। इस चेन का अभिकल्पन (design) चेनों के खिंचे जाने से होने वाले दुष्प्रभावों को समाप्त करने और शोर रहित परिचालन के लिए किया गया है। जब चेन खिंच जाती है और उसकी पिन में वृद्धि हो जाती है तब कड़ी स्प्रोकेट पहिये के दाँते पर कुछ बढ़ी हुयी त्रिज्या के साथ चढ़ती है। इस पिच में होने वाला आंशिक परिवर्तन स्वत: ही ठीक हो जाता है।

चित्र 4.22 के अनुसार यह एक दूसरे पर चढ़ी (overlapping) कड़ियों की बनाई जाती है। चेन की कड़ियाँ परस्पर पिनों या रॉकर जोड़ द्वारा होती हैं। ये चेन बहुत मजबूत होती है और किसी प्रकार टूटने आदि की सम्भावना बहुत कम होती है। यदि इनका उचित स्नेहन बना रहे तो ये चेनें विश्वसनीय सेवा देती हैं तथा शांत परिचालन प्रदान करती है।



चित्र 4.22. शांत चेन

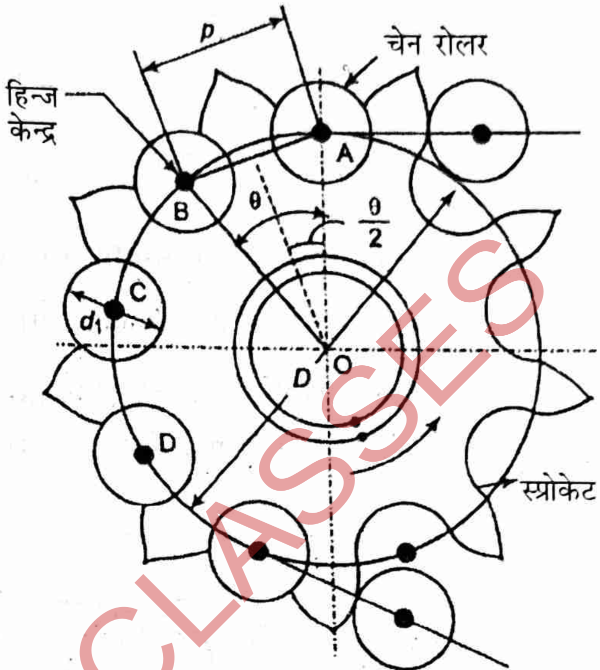
AKC TECHNICAL CLASSES

4.5.4 चेन चालन में प्रयुक्त पद (Terms Used in Chain Drive)

चेन चालन में निम्न पद प्रमुखतया से प्रयुक्त होते हैं—

(i) चेन का पिच (Pitch of chain)— यह एक कड़ी के हिन्ज केन्द्र (Hinge Centre) से अगली कड़ी से संगत हिन्ज केन्द्र (Hinge Centre) के मध्य दूरी है। जैसाकि चित्र 4.23 में प्रदर्शित है इसे प्राय: p से व्यक्त किया जाता है।

(ii) चेन स्प्रोकेट का पिचवृत्त व्यास (Pitch circle diameter of chain sprocket)—यह उस वृत्त का व्यास होता है जिस पर चेन के हिन्ज केन्द्र होते हैं। जब चेन को स्प्रोकेट पर लपेटा जाता है जैसा कि चित्र 4.23 में प्रदर्शित है। चित्र 4.23 में A, B, C तथा D चेन के हिन्ज केन्द्र हैं और इससे होकर जाता हुआ वृत्त, पिच वृत्त तथा उसका व्यास पिच वृत्त व्यास कहलाता है।



चित्र 4.23

4.5.5 पिच तथा पिच वृत व्यास में सम्बन्ध (Relation between Pitch and Pitch Circle Diameters)

चित्र 4.23 में एक स्प्रोकेट पर चेन को लिपटा हुआ प्रदर्शित किया गया है क्योंकि चेन की कड़ियाँ दृढ़ (rigid) होती हैं इसीलिए चेन की पिच, पिचवृत्त के चाप (Arc) पर नहीं होती है तथा पिच की लम्बाई एक जीवा (chord) की भाँति होती है। चित्र के अनुसार चेन की एक पिच लम्बाई AB पर विचार करते हैं जो चेन स्प्रोकेट के केन्द्र पर θ कोण बनाता है।

माना, D = पिच वृत्त व्यास, तथा T = स्प्रोकेट पर दाँतों की संख्या

अब चित्रानुसार चेन की पिच $p = AB = 2.AO.\sin\theta/2$

$$= 2\times(D/2)\sin(\theta/2) = D\sin(\theta/2)$$

हम जानते हैं कि $\theta° = \dfrac{360°}{T}$

$$\therefore \quad p = D\sin\left(\frac{360°}{2T}\right) = D\sin\left(\frac{180}{T}\right)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{D = p.\text{cosec}\left(\frac{180}{T}\right)}$$

सुरक्षित चालन के लिए स्प्रोकेट का बाह्य व्यास (D_0) जहाँ d_1 = चेन रोलर का व्यास

$$D_0 = \boldsymbol{D + 0.8\,d_1}$$

4.5.6 चेन चालन में वेगानुपात (Velocity Ratio of Chain Drives)

चेन चालन में वेगानुपात $VR = \dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{T_2}{T_1}$

AKC TECHNICAL CLASSES

जहाँ, N_1 तथा N_2 = छोटे तथा बड़े स्प्रोकेट की क्रमशः घूर्णन गति (rpm में)

तथा T_1 & T_1 = छोटे तथा बड़े स्प्रोकेट पर क्रमशः दाँतों की संख्या

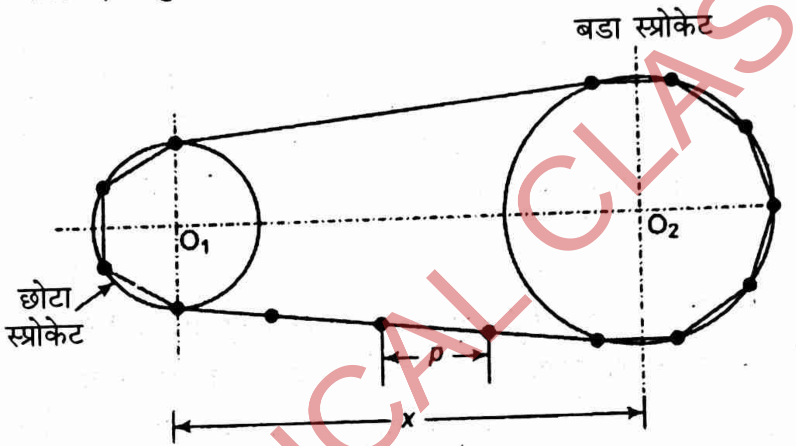
$$\text{चेन की औसत गति } V = \frac{\pi DN}{60} = \frac{T.p.N}{60}$$

जहाँ D = स्प्रोकेट का पिचवृत्त व्यास (metres में,) तथा

p = चेन की पिच (metres में)

4.5.7 चेन की लम्बाई तथा केन्द्रीय दूरी (Length of Chain and Centre Distance)

दो स्प्रोकेट को जोड़ने वाला एक खुला चेन चालन निकाय चित्र—4.24 में प्रदर्शित है।



चित्र 4.24. चेन की लम्बाई

माना T_1 तथा T_2 = छोटे तथा बड़े स्प्रोकेट पर क्रमशः दाँतों की संख्या, तथा

p = चेन की पिच (Pitch)

x = केन्द्रीय दूरी

चेन की लम्बाई (L), चेन कड़ियों की संख्या (K) तथा चेन का पिच (p) के गुणनफल के बराबर होनी चाहिए।

अर्थात् $L = p.k$

यहाँ चेन कड़ियों की संख्या को निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है—

$$K = \frac{(T_1 + T_2)}{2} + \frac{2x}{p} + \left[\frac{T_2 - T_1}{2\pi}\right]^2 \frac{p}{x}$$

उपरोक्त सूत्र से प्राप्त कड़ियों की संख्या को नजदीकी सम संख्या (nearest even number) माना जा सकता है।

केन्द्रीय दूरी को निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है—

$$x = \frac{p}{4}\left[K - \frac{T_1 + T_2}{2} + \sqrt{\left(K - \frac{(T_1 + T_2)}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{T_2 - T_1}{2\pi}\right)^2}\right]$$

AKC TECHNICAL CLASSES

चेन की प्रारम्भिक लचक (Initial sag) को समायोजित करने के लिए उपरोक्त सम्बन्ध से प्राप्त केन्द्रीय दूरी में से 2 से 5 mm तक घटाया जा सकता है।

नोट—1. अच्छे परिणामी के लिए न्यूनतम केन्द्रीय दूरी, पिच के 30 गुने से 50 गुने तक रहनी चाहिए।

2. वेग संचारण अनुपात 3 होने के लिए न्यूनतम केन्द्रीय दूरी निम्न प्रकार ली जाती है—

$$x_{min} = \frac{(d_1 + d_2)}{2} + 30 \text{ से } 50\,\text{mm}$$

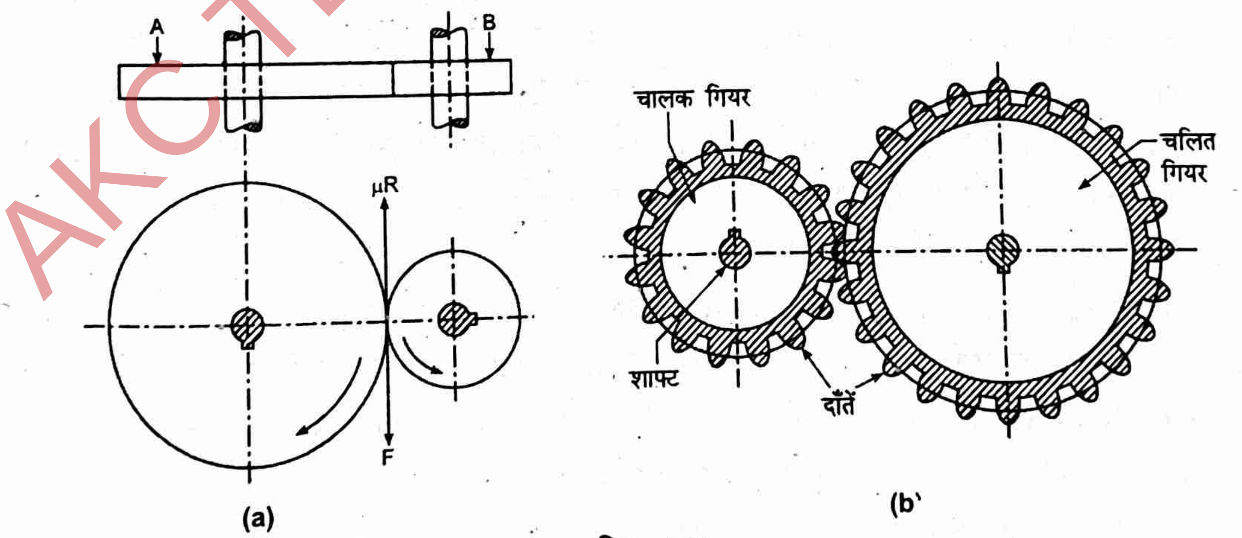
§ 4.6 गियर चालन (Gear Drive)

परिशुद्ध मशीनों में, जहाँ एक निश्चित वेगानुपात आवश्यक होता है, धनात्मक चालन गियरों (gears) के माध्यम से किया जाता है।

गियर एक प्रकार का पहिया है, जिसकी परिधि पर दाँते बने होते हैं। गियर चालन का प्रयोग भी एक शाफ्ट से दूसरी शाफ्ट पर शक्ति संचारण में किया जाता है। इस चालन विधि में भी पट्टा, रस्सा या चेन चालन की तरह दो शाफ्टों में से प्रत्येक पर कम से कम एक-एक गियर लगा होता है। यह एक धनात्मक चालन (positive drive) विधि है अर्थात् इसमें फिसलन (slip) नहीं होती है। इस चालन में स्थिर वेग अनुपात प्राप्त होता है। गियर चालन का प्रयोग ऐसी परिस्थितियों में होता है जहाँ चालक तथा चलित शाफ्टों के मध्य बहुत कम अन्तर होता है—

4.6.1 घर्षण पहिये तथा गियर (Friction Wheels and Gears)

चित्र 4.25 का अवलोकन कीजिये। चित्र में दो वृत्ताकार पहिये क्रमशः A व B कुंजी द्वारा दो समानान्तर शाफ्टों पर लगे दर्शाये गये हैं। माना पहिया A दक्षिणावृत्त दिशा (clockwise direction) में घूमते हुए पहियों की सतहों पर घर्षण के कारण, पहिये B को वामावर्त दिशा (anticlockwise direction) में F स्पर्शी बल (tangential force) लगाकर घुमाता है। इस दशा में स्पर्शी बल F की दिशा के विपरीत एक घर्षण बल μR उत्पन्न हो जायेगा। अब यदि स्पर्शी बल F का मान घर्षण बल μR से अधिक हो जाये तो दोनों पहियों के मध्य फिसलन (slip) उत्पन्न हो जायेगी अर्थात् पहिया A, पहिये B को अपने साथ लेकर नहीं चलेगा, जिसके कारण पहिये B के चक्कर प्रति मिनट कम हो जायेंगे और शक्ति का संचारण कम परिमाण में होगा।



चित्र 4.25

AKC TECHNICAL CLASSES

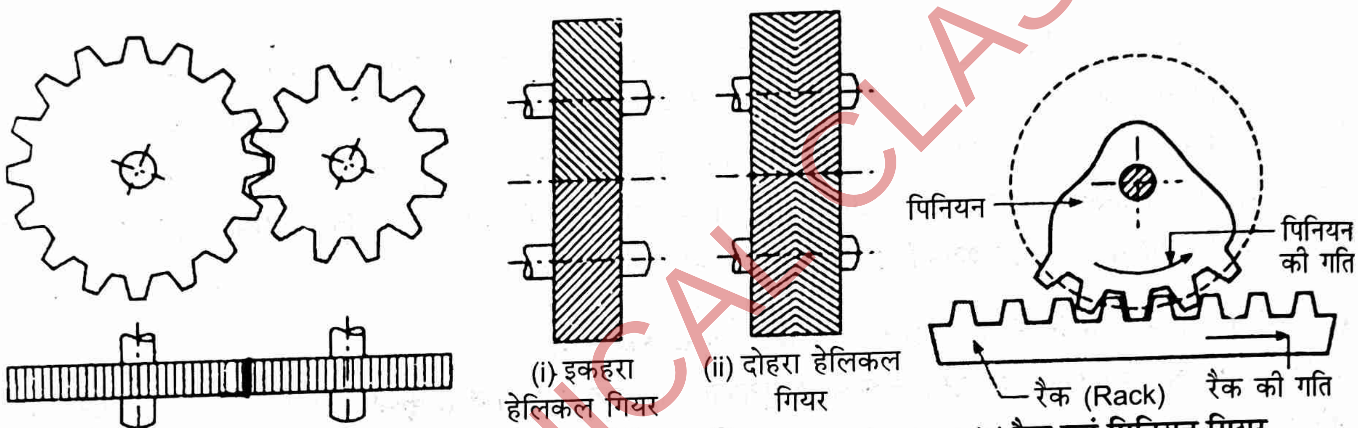
अत: पहियों की परिधि पर उभार बना दिये जाते हैं। इन उभारों को दाँते कहते हैं तथा इन उभारदार पहियों को गियर कहा जाता है। इस प्रकार एक पहिये के दाँते दूसरे पहिये के दाँतों के मध्य खाली जगह (recesses) में फँस कर चलते हैं, जिससे फिसलन (slip) को शून्य कर दिया जाता है और पहियें के फिसलने की समस्या हल हो जाती है, देखिये चित्र 4.25।

4.6.2 गियरों का वर्गीकरण (Classification of Gears)

गियरों का वर्गीकरण अग्र आधारों पर किया जाता है—

(A) शाफ्टों की अक्षों की स्थिति (Position of axis) के आधार पर

(a) जब चालक एवं चलित शाफ्ट समानान्तर हों— इस स्थिति वाली शाफ्टों पर स्पर गियर (spur gear), हेलिकल गियर (helical gear) और रैक एवं पिनियन का प्रयोग किया जाता है, देखिये चित्र 4.26 (a), (b) व (c)।



(a) स्पर गियर (b) हेलिकल गियर (c) रैक एवं पिनियन गियर

चित्र 4.26

AKC TECHNICAL CLASSES

1. स्पर गियर (Spur gear)—इन गियरों का प्रयोग दो एक समतलीय समानान्तर शाफ्टों पर शक्ति पारेषण के लिये किया जाता है। यदि गियरों पर बाह्य दाँते हैं तो दोनों शाफ्ट विपरीत दिशा में घूमती हैं। इन पर दाँते गियर की अक्ष के समानान्तर व सीधे होते हैं। शक्ति पारेषण के समय दाँतों के कारण इन पर अक्षीय बल नहीं लगता है। इनका प्रयोग गति परिवर्तन यन्त्र विन्यासों में फिसलने वाले गियरों (sliding gears) के रूप में किया जाता है।

आन्तरिक स्पर गियरों (internal spur gears) में दाँते वलयी गियर के आन्तरिक व्यास पर बने होते हैं। वलयी गियर (annular gear) एक बाह्य दाँते वाले स्पर गियर (spur gear) में सम्पर्क कर, शक्ति का संचारण करता है। दोनों गियर समान दिशा (same direction) में घूमते हैं। इन गियरों का उपयोग सामान्यतया एपिसाइक्लिक गियर ट्रेन (epicyclic gear train) में गति को कम करने के लिये, विभिन्न मशीनी औजारों (machine tools), क्लचों (clutches) एवं कपलिंग (coupling) इत्यादि में किया जाता है, देखिये चित्र 4.26 (a)।

2. बलदार गियर (Helical gears)—चित्र 4.26 (b) का अवलोकन करें। **इन गियरों को भी उन्हीं परिस्थितियों में प्रयोग किया जाता है जिनमें स्पर गियरों (spur gears) का प्रयोग होता है। इन गियरों की परिधि पर पेंच के आकार के या बलदार दाँते (helical teeth) बने होते हैं।** एक बलदार गियर से मिलने वाले गियर पर भी उसी प्रकार के विपरीत क्रम (opposite hand) में दाँते बने होते हैं। ये दो प्रकार के होते हैं—

(i) इकहरा बलदार गियर (Single helical gear)।

(ii) दोहरा बलदार गियर (Double helical gear) या हेरिंगबोन गियर (Heringbone gear)।

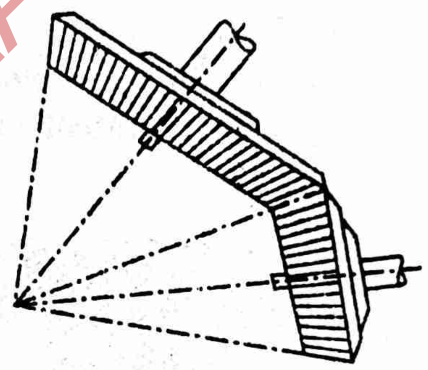
इन गियरों में क्रिया के दौरान स्पर गियरों (spur gears) की अपेक्षा कम आवाज (noise) उत्पन्न होती है। इकहरा बलदार गियर के आपस में सम्पर्क के समय दाँतों के मध्य अक्षीय दाब (axial thrust) उत्पन्न होता है, जो एक प्रकार से अलाभ (disadvantage) है। इस अक्षीय दाब (axial thrust) को शून्य करने के लिये दोहरा बलदार गियरों (double helical gears) का प्रयोग किया जाता है। एक दोहरा बलदार गियर ऐसे दो इकहरा बलदार गियरों के समतुल्य है, जिन पर समान एवं विपरीत दाब उत्पन्न हो। इस प्रकार परिणामी दाब शून्य हो जाता है।

इन गियरों का प्रयोग आटोमोबाइल्स के गियर बक्सों (gear boxes) एवं भाप व गैस टरबाइनों में गति को कम करने में किया जाता है।

3. रैक एवं पिनियन (Rack and pinion)—रैक, एक अनन्त अर्धव्यास या शून्य वक्रता (curvature) का स्पर गियर है। इसके साथ एक स्पर गियर, जिसे पिनियन भी कहते हैं, प्रयोग किया जाता है देखिये चित्र 4.26 (c)।

इनका प्रयोग खराद मशीन की सैडल इत्यादि को अनुदैर्ध्य गति (longitudinal motion) संचारित करने में किया जाता है।

(b) जब चालक एवं चलित शाफ्टों की अक्ष काटने वाली (intersecting) हो—यदि चालक एवं चलित शाफ्टों की अक्ष एक-दूसरे को काटती हैं, तो ऐसी शाफ्टों पर शक्ति संचारण के लिये बेवेल गियरों (bevel gears) का उपयोग किया जाता है। इस अवस्था में दोनों शाफ्ट एक ही समतल (coplaner) में होती हैं, देखिये चित्र 4.27। बेवेल गियरों के दाँते आवश्यकतानुसार सीधे (straight), फलक पर नत (inclined) या वलयाकार (spiral) हो सकते हैं।



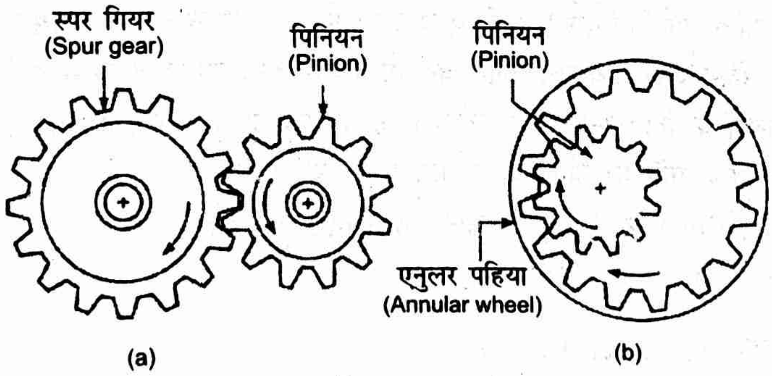
चित्र 4.27. बेवेल गियर

(c) जब चालक एवं चलित शाफ्टों की अक्ष असमानान्तर एवं आपस में न काटने वाली हो—इस स्थिति में शक्ति को संचारित करने के लिये वर्म एवं पहिया (worm and wheel) या वलयाकार गियरों को प्रयोग किया जाता है, देखिये चित्र 4.29 (a)। वर्म पर पेंच की भाँति चूड़ियाँ (threads) हेलिक्स के रूप में कटी होती हैं। गियरों का इस प्रकार का सम्बन्ध कम शक्ति को अधिक गति अनुपात पर पारेषित करने के लिये प्रयोग किया जाता है। हाइपाइड गियर चित्र 4.29 (b) में प्रदर्शित किया गया है। हाइपाइड गियर वलयाकार गियरों के समान होते हैं परन्तु ये ऐसी शाफ्टों को जोड़ने के काम में आते हैं जो विभिन्न समतलों में होती हैं तथा एक-दूसरे को काटती नहीं हैं।

(B) गियरिंग (Gearing) के प्रकार के आधार पर

इस आधार पर ये तीन प्रकार के हो सकते हैं—

(a) बाह्य गियरिंग (External gearing)— इस प्रकार की गियरिंग में दोनों गियरों की सम्पर्क सतह बाह्य होती है अर्थात् बाह्य सतहों पर दाँते बने होते हैं, देखिये चित्र 4.28 (a) दोनों गियर विपरीत दिशाओं में घूमते हैं।



चित्र 4.28

AKS TECHNICAL CLASSES

(b) आन्तरिक गियरिंग (Internal gearing)— देखिये चित्र 4.28 (b) इसमे बड़े गियर की आन्तरिक सतह एवं छोटे गियर की बाह्य सतह पर दाँते बने होते हैं। बड़े गियर को वलयी गियर (annular gear) एवं छोटे गियर को पिनियन (pinion) कहते हैं। इस प्रकार की गियरिंग में चालक एवं चलित शाफ्ट एक ही दिशा मे घूमती हैं।

(c) रैक एवं पिनियन (Rack and pinion)—देखिये चित्र 4.26 (c)। इसका प्रयोग घुमाऊ गति को अनुदैर्ध्य गति में या अनुदैर्ध्य गति को घुमाऊ गति में परिवर्तित करने में किया जाता है।

(C) गियरों की सतह पर दाँतों की स्थिति (Position of teeth) के आधार पर

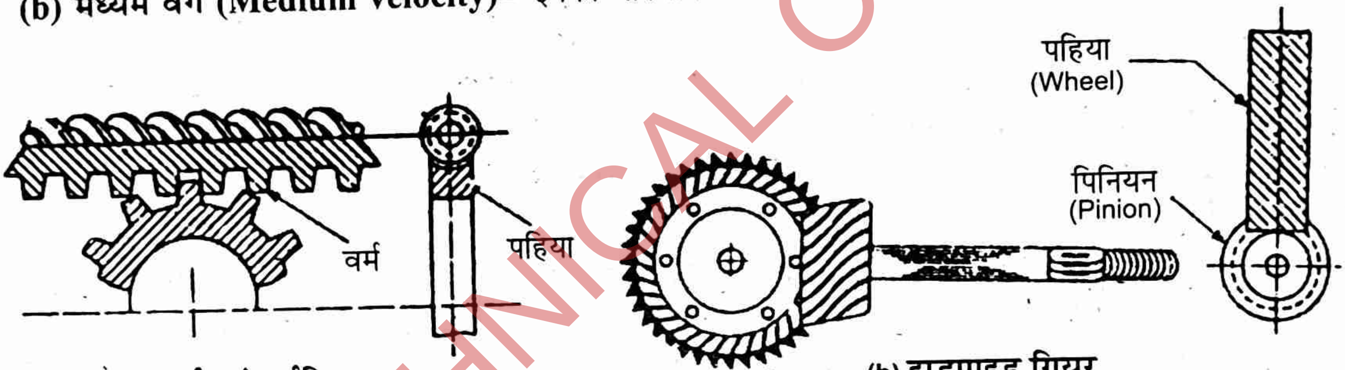
इस आधार पर सीधे दाँते गियर (straight teeth gear) को स्पर गियर (spur gear), आनत दाँते गियर (inclined teeth gear) को हेलिकल गियर (helical gear) एवं वक्र गियर (curved teeth gear) को स्पाइरल गियर (spiral gear) कहते हैं।

(D) गियरों के परिधीय वेग (Circumferential velocity) के आधार पर

परिधीय वेग के आधार पर गियरों का वर्गीकरण निम्न तीन प्रकार से किया जा सकता है—

(a) निम्न वेग (Low velocity)— इन गियरों का परिधीय वेग 3 m/sec से कम होता है।

(b) मध्यम वेग (Medium velocity)—इनका परिधीय वेग 3 m/sec से 15 m/sec के मध्य होता है।



(a) वर्म एवं वर्मगियर

(b) हाड़पाइड़ गियर

चित्र 4.29

(c) उच्च वेग (High velocity)—ये गियर 15 m / sec से अधिक परिधीय वेग पर शक्ति का संचारण करते हैं।

4.6.3 गियरों का पदार्थ (Gear Materials)

गियर निर्माण के लिए उचित पदार्थ का चयन, उसकी सामर्थ्य तथा कार्यकारी परिस्थितियों जैसे घिसाई, शोर आदि पर निर्भर करता है। गियरों के निर्माण में साधारणतया ढलवाँ लोहा (cast iron) या इस्पात एलॉय (steel alloys) का प्रयोग किया जाता है परन्तु कम शक्ति पारेषित करने के लिये ये आजकल प्लास्टिक के भी बनाये जाते हैं। इसके अतिरिक्त लकड़ी, संपीडित पेपर, सिंथेटिक रेजिन जैसे नायलोन आदि का भी प्रयोग होता है। उच्च सामर्थ्य गियरों के लिए स्टील का प्रयोग होता है। उच्च सामर्थ्य गियरों के लिए स्टील का प्रयोग होता है तथा उचित ऊष्मा उपचार द्वारा उन्हें कठोर बनाया जाता है। वर्म गियरों के निर्माण में प्राय: फॉस्फर ब्रोंज का प्रयोग किया जाता है।

गियरों की ढलाई (casting) से, मिलिंग मशीन (milling machine) या गियर हाबिंग मशीन (gear hobbing machine) इत्यादि पर दाँते काट कर बनाये जाते हैं।

4.6.4 पारेषित शक्ति (Transmitted Power)

यदि F = चालक गियर (A), द्वारा चलित गियर (B) पर लगाया गया स्पर्शी बल (tangential force) (N) में।

AKC TECHNICAL CLASSES

V = चालक गियर (A) का परिधीय वेग m/s में।

अत: पारेषित शक्ति (transmitted power) $P = F \times V$ Watt

गियर चालन में हम स्पर्शी बल (tangential force) F में दांतेदार, पहिये के पदार्थ की सामर्थ्य के अनुसार वृद्धि कर, अधिक शक्ति संचारित कर सकते हैं।

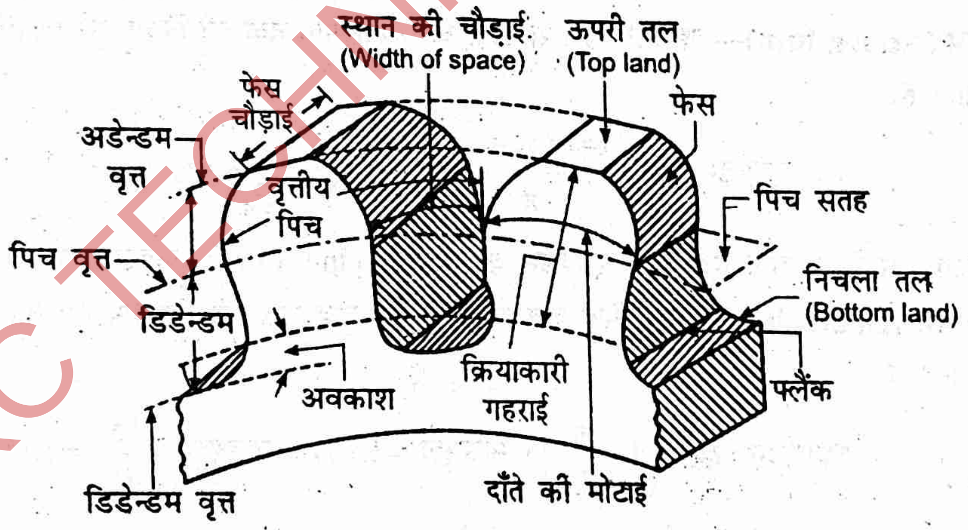
4.6.5 गियर चालन (Gear Drive) की अन्य चालनों से तुलना

उपरोक्त के सन्दर्भ में तुलनात्मक पद निम्न हैं—

1. गियर चालन को अन्य चालनों की अपेक्षा कम दूरी पर शक्ति संचारण के लिये प्रयोग किया जाता है।
2. गियर चालन को अन्य विधियों की अपेक्षा कम गति पर शक्ति संचारण के लिये प्रयोग किया जाता है।
3. गियर चालन में चालक एवं चलित शाफ्टों में स्थिर वेग अनुपात प्राप्त होता है, अर्थात् शक्ति संचारण की इस विधि में पट्टा व रस्सा चालन की भाँति फिसलन (slip) नहीं होती है।
4. गियर चालन का उपयोग निम्नतम से उच्चतम शक्ति पारेषण में सुगमतापूर्वक किया जा सकता है।
5. अन्य चालनों की अपेक्षा गियर चालन कम स्थान घेरता है अर्थात् यह संहत (compact) होता है।
6. यह अन्य चालनों की अपेक्षा कोणीय शाफ्टों (angular shafts) की स्थिति में अधिक सुगमता व परिशुद्धता से शक्ति संचारण कर सकता है।

4.6.6 गियर नामावली (Gear Nomenclature)

चित्र 4.30 का अवलोकन करें। इस चित्र में गियर दाँतों के विभिन्न अवयवों (elements of gear teeth) को दर्शाया गया है।



चित्र 4.30

1. पिच बिन्दु (Pitch point)— गियर दाँते का सबसे बाहर की ओर का बिन्दु (outermost point) पिच बिन्दु कहलाता है। दो मिलने वाले गियरों के पिच वृत्त इसी बिन्दु पर स्पर्श करते हैं।

2. पिचवृत्त (Pitch circle)— एक गियर के विभिन्न दाँतों के पिच बिन्दु (pitch point) से गुजरने वाला वृत्त पिच वृत्त (pitch circle) कहलाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

3. पिचवृत्त व्यास (Pitch circle diameter)—पिच वृत्त के व्यास को पिच वृत्त व्यास (pitch circle diameter) कहते हैं। किसी भी गियर का साइज उसके पिच वृत्त व्यास (d) से प्रदर्शित करते हैं।

4. पिच सतह (Pitch surface)—गियर के दाँते की मोटाई में पिच वृत्त से एक सतह बनती है जिसे पिच सतह कहते हैं, देखिये चित्र 4.30।

5. पिच रेखा (Pitch line)—यह वह रेखा है, जिस पर दो परस्पर मिलने वाले गियरों की पिच सतहें स्पर्श करती हैं।

6. वृत्तीय पिच (Circular pitch)—पिच वृत्त की परिधि पर किसी एक दाँते के पिच बिन्दु से, आसन्न दाँते के अनुरूप पिच बिन्दु (corresponding pitch point) की वृत्तीय दूरी को, वृत्तीय पिच (circular pitch) कहते हैं। इसे P_c से दर्शाया जाता है।

यदि किसी गियर का पिच वृत्त व्यास 'd' एवं गियर की परिधि पर दाँतों की संख्या 'T' हो, तो वृत्तीय पिच

$$P_c = \frac{\pi d}{T}$$

7. व्यासीय पिच (Diametral pitch)—यह पिच वृत्त व्यास की प्रति इकाई में दाँतों की संख्या होती है। इसे P_d से दर्शाया जाता है।

$$\text{व्यासीय पिच } (P_d) = \frac{T}{d}$$

8. माड्यूल (Module)— यह पिच वृत्त व्यास की लम्बाई प्रति दाँता है। इसे m से दर्शाया जाता है।

$$\text{माडयूल } (m) = \frac{d}{T}.$$

9. एडेण्डम (Addendum)—यह पिच वृत्त से दाँतों के ऊपरी भाग तक की त्रिज्य दूरी (radial distance) है। इसे a से दर्शाया जाता है।

$$\text{एडेण्डम } (a) = \frac{\text{वृत्तीय पिच}}{\pi} = \frac{P_c}{\pi} = \frac{d}{T} = \frac{1}{P_d} = m$$

दाँतों के ऊपरी भागों से होता हुआ वृत्त एडेण्डम वृत्त (addendum circle) कहलाता है।

10. डिडेण्डम (Dedendum)—यह पिच वृत्त से दाँतों की जड़ तक की त्रिज्यक (radial) दूरी है। इसे 'b' से प्रदर्शित किया जाता है।

$$\text{डिडेण्डम } (b) = \left(1 + \frac{\pi}{20}\right) \times \text{माड्यूल} = 1.157 \times \text{माड्यूल} = \frac{157}{P_d} = 1.157 \times \frac{P_c}{\pi}$$

दाँतों की जड़ों (roots) से होकर जाता हुआ वृत्त **डिडेण्डम वृत्त** (dedendum circle) कहलाता है।

11. अवकाश (Clearance)—गियर के किसी दाँते के ऊपरी किनारे से, उससे मिलने वाली गियर के दाँते की जड़ (root) तक की त्रिज्यक दूरी को अवकाश कहते हैं। यह एडेण्डम एवं डिडेण्डम का अन्तर है।

$$\text{अवकाश} = \text{डिडेण्डम} - \text{एडेण्डम} = 1.157\ m - m = 0.157\ m$$

12. कुल गहराई (Total depth)—यह गियर के एडेण्डम वृत्त (addendum circle) एवं डिडेण्डम वृत्त (dedendum circle) के मध्य की त्रिज्यक दूरी है तथा अडेण्डम के योग के बराबर है।

AKC TECHNICAL CLASSES

13. दाँते की मोटाई (Thickness of tooth)—पिच वृत्त पर दाँते सिरों के बीच के चाप (arc) की लम्बाई को दाँते की मोटाई कहते हैं।

14. स्थान की चौड़ाई (Width of space)—यह पिच वृत्त पर दो दाँतों के मध्य चाप की लम्बाई है।

15. फेस (Face)—गियर की चौड़ाई में पिच सतह (pitch surface) से ऊपर दाँते की सतह को, दाँते का फेस (face of tooth) कहते हैं।

16. फ्लैंक (Flank)—गियर की चौड़ाई में पिच सतह (pitch surface) से नीचे दाँते की सतह को फ्लैंक (flank) कहते हैं।

17. निचली सतह (Bottom land)—दो दाँतों के मध्य गियर की निचली सतह को बॉटम लैण्ड कहते हैं।

18. ऊपरी सतह (Top land)—दाँते के ऊपरी भाग की सतह को टॉप लैण्ड (top land) कहते हैं।

19. दाब कोण (Pressure angle)—दो गियरों के दाँतों के सम्पर्क बिन्दु पर उभयनिष्ठ लम्ब (common normal) तथा पिच वृत्तों पर उभयनिष्ठ स्पर्शी (common tangent) के मध्य के कोण को दाब कोण कहते हैं।

20. स्पर्श मार्ग (Path of contact)—दो दाँतों के मिलने के आरम्भ से लेकर अन्त तक दाँतों के स्पर्श बिन्दु द्वारा तय किया गया मार्ग, स्पर्श मार्ग कहलाता है।

21. स्पर्श चाप (Arc of contact)—दो मिलने वाले दाँतों के आरम्भ से लेकर अन्त तक पिच वृत्त किसी बिन्दु द्वारा तय किया गया मार्ग, सम्पर्क चाप या स्पर्श चाप कहलाता है।

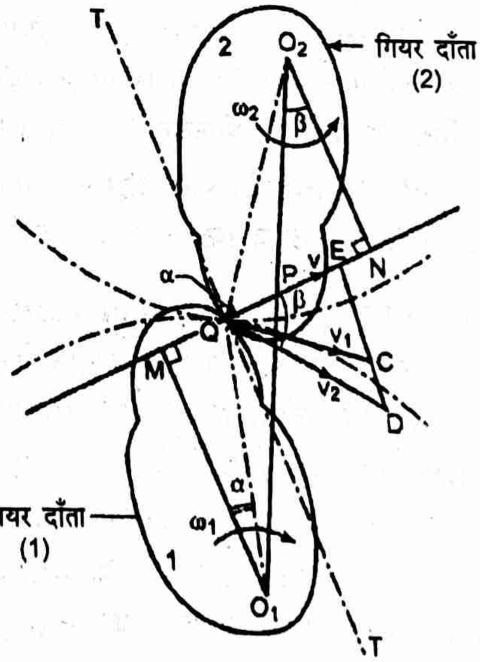
22. पिनियन तथा गियर (Pinion and gear)—आपस में मिलने वाले दो गियरों में से कम व्यास वाले गियर को पिनियन (pinion) एवं बड़े व्यास वाले को गियर (gear) कहते हैं।

4.6.7 गियर का नियम: दाँतेदार पहियों के नियत वेगानुपात का प्रतिबन्ध

(Law of Gearing : Condition for Constant Velocity Ratio of Toothed Wheels)

सर्वप्रथम दो गियरों (एक पहिया तथा एक गियर) के दो दांत, जो आपस में बिन्दु Q पर सम्पर्क में हैं, पर विचार करते हैं। माना दोनों गियर चित्र के अनुसार घूम रहे हैं।

माना सम्पर्क बिन्दु Q पर, TT उभयनिष्ठ स्पर्शरेखा (Common tangent) तथा MN उभयनिष्ठ लम्ब है। दोनों दाँतों के केन्द्रों O_1 तथा O_2 से उभयनिष्ठ लम्ब MN पर O_1M तथा O_2M लम्ब डालते हैं। देखें चित्र 4.31।



चित्र 4.31. गियर का नियम

चित्रानुसार बिन्दु Q की गति पर विचार करने पर स्पष्ट है कि जब बिन्दु Q को दाँता (1) पर स्थित माना जायेगा तब इसकी गति की दिशा QC होगी। यदि बिन्दु Q को दाँत (2) पर स्थित माना जायेगा तो इसके गति की दिशा QD होगी। माना बिन्दु Q का वेग पहिये (1) तथा (2) पर क्रमशः v_1 तथा v_2 है।

यदि दोनों दाँत, सम्पर्क में बने रहे तो वेगों का उभयनिष्ठ लम्ब MN के अनुदिश घटक बराबर होंगे।

$$\therefore \quad v_1 . \cos\alpha = v_2 . \cos\beta$$

AKC TECHNICAL CLASSES

या
$$(\omega_1 \times O_1Q).\cos\alpha = (\omega_2 \times O_2Q).\cos\beta$$

∴
$$(\omega_1 \times O_1Q).\frac{O_1M}{O_1Q} = (\omega_2 \times O_2G)\frac{O_2N}{O_2G}$$

∴
$$\omega_1 \times O_1M = \omega_2 \times O_1N$$

∴
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2N}{O_1M} \qquad \ldots(i)$$

इसी प्रकार समरूप त्रिभुज O_1MP तथा O_2NP में,

$$\frac{O_1N}{O_1M} = \frac{O_2P}{O_1P} \qquad \ldots(ii)$$

समी० (i) व (ii) से,
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2N}{O_1M} = \frac{O_2P}{O_1P} \qquad \ldots(iii)$$

उपरोक्त समीकरणों से स्पष्ट है कि कोणींय वेगों का अनुपात, बिन्दु P से केन्द्रों O_1 तथा O_2 की दूरियों के व्युत्क्रमानुपाती होगा अथवा दोनों सतहों के सम्पर्क बिन्दु Q पर खींचा गया उभयनिष्ठ लम्ब, दोनों केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा को बिन्दु P पर कोणीय वेगों के अनुपात के विपरीत अनुपात में काटता है।

"इस प्रकार गियर की सभी स्थितियों में नियत कोणीय वेगानुपात रखने के लिए दोनों गियरों पर बिन्दु *P*, एक नियत बिन्दु (जिसे पिच बिन्दु कहते हैं) होना चाहिए।" दूसरे शब्दों में,

"दाँतों के एक जोड़े में स्पर्श बिन्दु पर खींचा गया लम्ब, पिच बिन्दु से होकर गुजरना चाहिए।"

"In order the have a constant angular velocity ratio for all positions of the wheels, the point 'P' must be the fixed point (called pitch point) for the two wheels."

In other words, "The common normal at the point of contact between a pair of teeth must always passes through the pitch point.

It is known as "Law of gearing."

गियर के दाँतों का प्रोफाइल डिजाइन करते समय इस मूलभूत नियम को अवश्य ही संतुष्ट होना चाहिए। यही **"गियर का नियम" (Law of Gearing) भी कहलाता है।"** उपरोक्त स्थिति को इनवोल्यूट दाँता संतुष्ट करता है यदि रूट वृत्त (Root Circle), उभयनिष्ठ लम्ब के स्पर्शी हो।

4.6.8 दाँतों के प्रकार (Forms of Teeth)

दो मिलने वाले दाँतों में से एक दाँत के आकार को अपनी मर्जी से मान लेते हैं और तब दूसरे दाँत का डिजाइन इस प्रकार करते हैं कि दोनों दाँत मिलकर गियर के नियम का पालन करें। इस प्रकार के दाँतों को परस्पर मिलने वाले दाँत (Conjugate teeth) कहते हैं।

परस्पर मिलने वाले दाँतों को रखने वाले गियर, गति तथा शक्ति पारेषण का कार्य सफलतापूर्वक करते हैं परन्तु इनका निर्माण कठिन तथा महँगा होता है। दोनों के प्रमुख तथा प्रचलित प्रोफाइल निम्न दो प्रकार के होते हैं—

(i) चक्रीय या अण्डाकार प्रोफाइल (Cycloidal tooth profile) तथा,

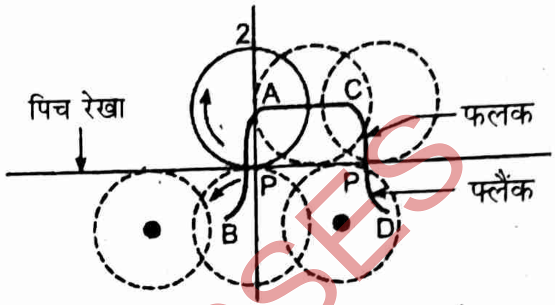
(ii) पेंच के आकार का या इन्वोल्यूट प्रोफाइल (Involute tooth profile)

AKC TECHNICAL CLASSES

(i) चक्रीय या अण्डाकार प्रोफाइल (Cycloidal Tooth Profile)

एक चक्र (Cycloid) किसी वृत्त की परिधि पर एक बिन्दु द्वारा चला गया बिन्दुपथ होता है जब वृत्त एक निश्चित सीधी रेखा पर बिना फिसले लुढ़कता है। देखें चित्र 4.32—

"A cycloid is the curve traced by a point on the circumference of a circle which rolls without slipping on a fixed straight line."

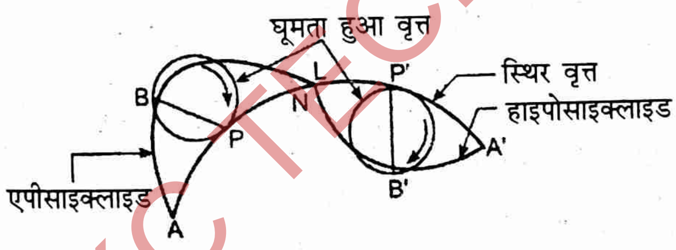


चित्र 4.32. चक्रीय प्रोफाइल

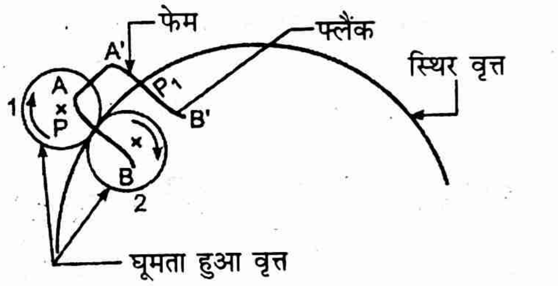
माना दो वृत्त 1 तथा 2 बिन्दु P पर मिल रहे हैं। वृत्त 2 एक सीधी रेखा, जो पिच रेखा भी है, पर दायीं ओर बिना फिसले लुढ़क रहा है। बिन्दु P लुढ़कने पर वृत्त पर एक वक्र PA बनाता है। वक्र PA साइक्लोडल दाँता प्रोफाइल के फलक (Face) को प्रदर्शित करता है। जब वृत्त (1) एक नियत सीधी रेखा पर बायीं ओर बिना फिसले लुढ़लकता है तब बिन्दु P वक्र PB पर चलता है। वक्र PB दाँतें के प्रोफाइल का फ्लैंक (Flank) बनाता है। इस प्रकार वक्र BPA एक दाँतें की कुल पार्श्व (Total Side) को दर्शाते हैं। इस प्रकार $CP'D$, दाँत की दूसरी साइड को दर्शाता है।

एपीसाइक्लॉइड (Epicycloid)—जब एक वृत्त, एक स्थिर वृत्त की परिधि के बाहरी ओर बिना फिसले लुढ़कता है, तो वृत्त पर बना हुआ एक बिन्दु एक वक्र बनाता है जिसे एपीसाइक्लॉइड (Epicycloid) कहते हैं।

हाइपोसाइक्लॉइड (Hypocycloid)—जब एक वृत्त, एक स्थिर वृत्त की परिधि के अन्दर की ओर, बिना फिसले लुढ़कता है तो वृत्त पर बना हुआ एक बिन्दु एक वक्र बनाता है जिसे हाइपोसाइक्लॉइड (Hypocycloid) है। चित्र 4.33 में प्रदर्शित वक्र ABL तथा $A'B'N$ एक एपीसाइक्लॉइड तथा हाइपोसाइक्लॉइड को दर्शाते हैं। चित्र 4.34 में एपीसाइक्लॉइड तथा हाइपोसाइक्लॉइड की रचना को दर्शाता है।



चित्र 4.33. एपीसाइक्लाइड और हाइपोसाइक्साइड



चित्र 4.34. एपीसाइक्लाइड और हाइपोसाइक्लाइड की रचना

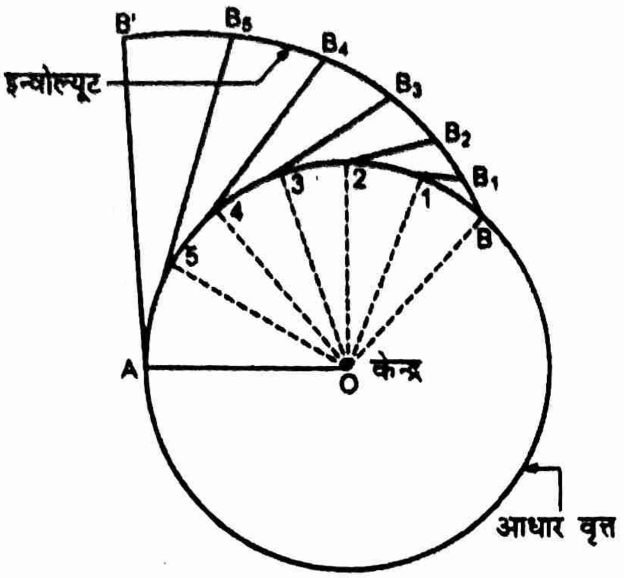
(ii) पेंच के आकार का या 'इन्वोल्यूट प्रोफाइल' (Involute Tooth Profile)

देखें चित्र 4.35 । माना एक धागा (String) AB एक वृत्त की परिधि पर (वक्र AB) लपेटा हुआ है। यदि धागे को वृत्त से खोल (Unwound) दिया जाये तब यह सीधी रेखा AB' द्वारा प्रदर्शित होगा। AB' त्रिज्या OA पर लम्ब है। बिन्दु B बिन्दु B_1, B_2, B_3, B_4 से होता हुआ B' पर पहुँचता है तब चक्र BB' एक इन्वोल्यूट कहलाता है।

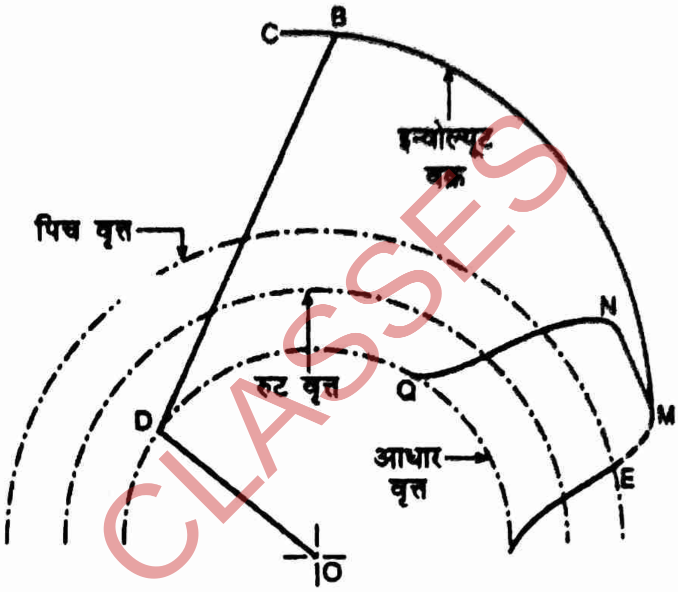
इस प्रकार इन्वोल्यूट, धागे के एक सिरे पर स्थित बिन्दु द्वारा चला गया पथ है जब उसे एक वृत्त की परिधि से खोला जाता है। माना वक्र AB को छः बराबर भागों में विभाजित करते हैं। चित्र में विभाजित भाग A-5, 4-4, 4-3 आदि प्रदर्शित है। बिन्दु 5, 4, 3 आदि से स्पर्श रेखायें खींचते हैं तथा इन स्पर्श रेखाओं की लम्बाईयाँ चाप B-5, B-4, B-3 आदि के बराबर

AKC TECHNICAL CLASSES

रखी जाती है। इन बिन्दुओं को मिलाने पर एक इन्वोल्यूट वक्र प्राप्त होता है। चित्र 4.35 में प्रदर्शित वक्र $BB_1 B_2 ... B'$ एक इन्वोल्यूट वक्र है।



चित्र 4.35. इन्वोल्यूट प्रोफाइल



चित्र 4.36.

इन इनवोल्यूट वक्र की आकृति चित्र 4.36 में दिखाई गई है जहाँ A प्रारम्भिक बिन्दु है तथा AE दाँत का प्रारम्भिक छोटा प्रोफाइल है जिसको आगे बढ़ाने पर दाँते की एक साइड AM प्राप्त होती है। इसी प्रकार दाँते की दूसरी साइड को Q से प्रारम्भ करके विपरीत दिशा में प्राप्त किया जा सकता है। जहाँ arc $AQD = DB$ होगा।

4.6.9 गियर दाँतों के सिस्टम (System of Gear Teeth)

सामान्यतया गियर दाँतों के निम्न चार सिस्टम प्रयोग में लाये जाते हैं—

(i) $14\frac{1}{2}°$ कम्पोजिट सिस्टम ($14\frac{1}{2}°$ Composite system)

(ii) $14\frac{1}{2}°$ पूर्ण गहराई इनवोल्यूट सिस्टम ($14\frac{1}{2}°$ Full depth involute system)

(iii) 20° पूर्व गहराई इन्वोल्यूट सिस्टम और (20° Full depth involute system) and

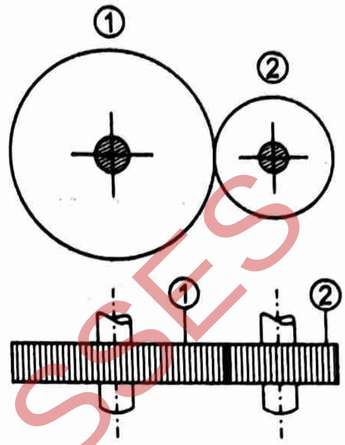
(iv) 20° स्टब इन्वोल्यूट सिस्टम (20° Stub involute system)

$14\frac{1}{2}°$ कम्पोजिट सिस्टम सामान्य कार्यों वाले गियर के लिए प्रयोग किया जाता है। इस सिस्टम के दाँतों का प्रोफाइल में ऊपर तथा नीचे का भाग साइक्लोडियल वक्र तथा मध्य भाग इन्वोल्यूट वक्र होता है। यह मजबूत होता है परन्तु इसमें अन्तर्विनिमेयता (Interchangeability) नहीं होती। ये दाँते मिलिंग कटर अथवा हॉब से बनाये जाते हैं। $14\frac{1}{2}°$ पूर्ण गहराई इन्वोल्यूट दाँतों का प्रोफाइल, स्पर तथा हैलीकल गियर के लिए गियर हॉब के साथ प्रयोग करने को विकसित किये गये थे।

20° पूर्ण गहराई इन्वोल्यूट सिस्टम के दाँतो का प्रोफाइल भी हॉब द्वारा काटा जा सकता है। दाब कोण $14\frac{1}{2}°$ से बढ़ाकर 20° करने से दाँतों का आधार चौड़ा होकर धरन की तरह अधिक मजबूती से कार्य कर सकता है। 20° स्टब इन्वोल्यूट सिस्टम में अधिक मजबूत दाँते होते हैं जो अधिक भार वहन कर सकते हैं।

4.6.10 वेग अनुपात (Velocity Ratio)

चित्र 4.37 का अवलोकन कीजिये। इसमें चालक एवं चलित शाफ्टों पर एक-एक गियर लगा प्रदर्शित किया गया है। चालक एवं चलित शाफ्टों पर लगे गियरों को क्रमशः चालक गियर एवं चलित गियर कहते हैं।



चित्र 4.37.

यदि चालक एवं चलित गियरों के पिच वृत्त व्यास क्रमशः d_1 व d_2 एवं rpm क्रमशः N_1 व N_2 हों। शक्ति संचारण के लिये दोनों गियरों का परिधीय वेग समान होना चाहिये।

अतः $$\pi d_1 N_1 = \pi d_2 N_2$$

या $$\frac{N_2}{N_1} = \frac{d_1}{d_2} \qquad \ldots(i)$$

यहाँ $\frac{N_2}{N_1}$ के अनुपात को गियरों का वेग अनुपात (velocity ratio) कहते हैं।

गियरों का वेग अनुपात (velocity ratio) साधारणतया: एक से अधिक प्रदर्शित किया जाता है। यदि गणना से वेग अनुपात एक से कम प्राप्त होता है, तो उसको उलट कर एक से अधिक कर प्रदर्शित किया जाता है।

उदाहरण 4.14—किसी स्पर गियर (spur gear) पर 120 दाँते हैं और वह 100 rpm पर घूमता है। इसकी व्यासीय पिच 0.4 है। यह गियर एक दूसरे गियर को 300 rpm पर चलाता है। दोनों गियरों के पिच वृत्तीय व्यास (pitch circle diameters) तथा उनकी शाफ्टों की अक्षों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिये। दूसरे गियर पर दाँतों की संख्या भी ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है,

(i) प्रथम गियर पर दाँतों की संख्या $(T_1) = 120$

(ii) प्रथम गियर के rpm$(N_1) = 100$ rpm

(iii) प्रथम गियर का व्यासीय पिच $(P_d) = 0.4$

(iv) दूसरे गियर के rpm $(N_2) = 300$ rpm

(v) दोनों गियरों के पिच वृत्तीय व्यास $(d_1, d_2) = ?$

(vi) दोनों शाफ्टों के मध्य दूरी $= ?$

(vii) दूसरे गियर पर दाँतों की संख्या $= ?$

हम जानते हैं, कि व्यासीय पिच $(P_d) = 0.4 = \frac{T_1}{d_1}$

या $$0.4 = \frac{120}{d_1}$$

अतः $$d_1 = 300 \text{ mm}$$ उत्तर

अब $$\frac{N_2}{N_1} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{या} \quad \frac{300}{100} = \frac{120}{T_2}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

या $$T_2 = \frac{100 \times 120}{300} = \mathbf{40}$$ **उत्तर**

एवं, $$\frac{300}{100} = \frac{300}{d_2}$$

या $$d_2 = \frac{300 \times 100}{300} = \mathbf{100\ mm}$$ **उत्तर**

अत: दोनों गियरों की शाफ्टों की अक्षों के बीच दूरी,

$$\frac{(d_1 + d_2)}{2} = \frac{(300+100)}{2} = \mathbf{200\ mm}$$ **उत्तर**

उदाहरण 4.15—दो समानान्तर शाफ्टों के अक्षों के बीच की दूरी लगभग 1035 mm है। एक शाफ्ट से दूसरे शाफ्ट को स्पर गियरों की सहायता से चलाना है। गियरों का माड्यूल 20 mm है। यदि दूसरी शाफ्ट को प्रथम शाफ्ट के सापेक्ष साढ़े तीन गुना गति से चलाना हो तो दोनों गियरों के दाँतों की संख्या तथा उनके मध्य यथार्थ (accurate) दूरी ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है,

(i) दोनों शाफ्टों के अक्षों के मध्य दूरी $= 1035\ \text{mm}$

(ii) गियरों का माड्यूल $(m) = 20\ \text{mm}$

(iii) द्वितीय शाफ्ट की गति $(N_2) = 3.5 \times$ प्रथम शाफ्ट की गति $= 3.5 \times N_1$

(iv) दोनों गियरों पर दाँतों की संख्या $(T_1, T_2) = ?$

(v) दोनों शाफ्टों के मध्य यथार्थ दूरी $= ?$

हम जानते हैं, कि

$$\text{माड्यूल } (m) = \frac{d_1}{T_1} = \frac{d_2}{T_2}$$

अत: $$d_1 = mT_1 \quad \text{एवं} \quad d_2 = mT_2$$

दोनों शाफ्टों के अक्ष के मध्य दूरी $= \left(\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}\right)$

या $$1035 = \frac{m(T_1 + T_2)}{2}$$

या $$m(T_1 + T_2) = 2070 \quad \text{या} \quad 20(T_1 + T_2) = 2070$$

या $$(T_1 + T_2) = 103.5 \qquad \ldots(i)$$

एवं $$\frac{N_2}{N_1} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{या} \quad \frac{T_1}{T_2} = 3.5$$

AKC TECHNICAL CLASSES

या $$T_1 = 3.5 T_2 \quad \text{... (ii)}$$

समी० (ii) से T_1 का मान समी० (i) में रखने पर,

$$5T_2 = 103.5$$

अतः $$T_2 = 23 \text{ एवं } T_1 = 3.5 \times 23 = 80.5$$

यहाँ $T_1 = 81$ लेने पर क्योंकि दाँते का मान भिन्न में नहीं हो सकता है।

अतः दोनों शाफ्टों के मध्य यथार्थ दूरी $= \dfrac{m(T_1 + T_2)}{2} = \dfrac{20(81+23)}{2}$

$$= 1040 \text{ mm} = \mathbf{1.04\ m}$$ उत्तर

उदाहरण 4.16—दो गियरों के द्वारा 18 kW शक्ति संचारित की जाती है जबकि गियरों के दाँतों पर स्पर्श बल (tangential force) 1600 N है। यदि चलित गियर पर दाँतों की संख्या 60 हो तथा पिच 40 mm हो, तो चलित गियर के rpm तथा वृत्तीय गति (pitch circle velocity) ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है,

(i) पारेषित शक्ति $(P) = 18 \times 10^3$ Watt

(ii) स्पर्श रेखीय बल $(F) = 1600$N

(iii) चलित गियर पर दाँतों की संख्या $(T_2) = 60$

(iv) वृत्तीय पिच $(P_c) = 40$ mm

(v) पिच वृत्तीय गति $(v) = ?$

(vi) चलित गियर के rpm $N_2 = ?$

हम जानते हैं, कि— पारेषित शक्ति $(P) = F \times v$

$$18 \times 10^3 = 1600 \times v$$

अतः पिच वृत्तीय गति $(v) = \dfrac{18 \times 10^3}{1600} = 11.25$ m/s

एवं वृत्तीय पिच (Circular pitch) $P_c = \dfrac{\pi d_2}{T_2}$

यहाँ d_2 एवं T_2 चलित गियर के क्रमशः पिच वृत्त व्यास एवं दाँतों की संख्या को दर्शाते हैं।

$$40 = \frac{\pi \times d_2}{60}$$

अतः $$d_2 = 764.33 \text{ mm}$$

क्योंकि $$v = \pi d_2 N_2$$

अतः चलित गियर के rpm $N_2 = \dfrac{11.25 \times 1000 \times 60}{3.14 \times 764.33} = \mathbf{281.25\ rpm}$ उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES

4.6.11 गियर माला (Gear Train)

शक्ति (power) को एक शाफ्ट से दूसरी शाफ्ट पर संचारित करने के लिये, दो या दो से अधिक गियरों के संयोजन (combination) को, गियर माला (gear train) कहते हैं।

"The combination of two or more gears to transmit power from our shaft to another shaft is called Gear train."

विभिन्न पिच वृत्त व्यास के दो या दो से अधिक गियरों को संयोजित करने का एक उद्देश्य यह भी है कि चालक एवं चलित शाफ्टों के मध्य एक निश्चित वेग अनुपात (velocity ratio) प्राप्त किये जा सकें।

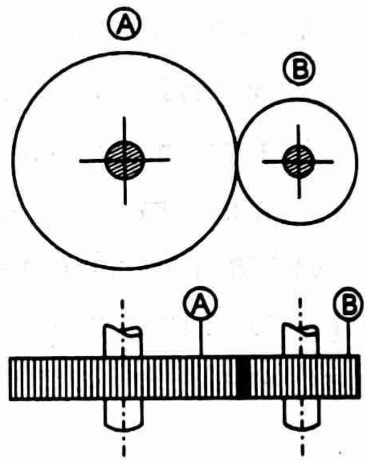
विभिन्न प्रकार के गियरों के संयोजित करने के आधार पर गियर मालायें (gear trains) मुख्यत: चार प्रकार की होती हैं—

1. सरल गियर माला (Simple gear train)।
2. संयुक्त गियर माला (Compound gear train)।
3. चक्रीय गियर माला (Epicyclic gear train)।
4. प्रत्यावर्ती गियर माला (Reverted gear train)।

उपरोक्त गियर मालाओं का विस्तृत विवरण निम्न अनुच्छेदों में दिया गया है—

1. सरल गियर माला (Simple Gear Train)

इस गियर माला में चालक एवं चलित शाफ्ट पर एक-एक गियर लगा होता है। इस अवस्था में दोनों शाफ्ट विपरीत दिशाओं में घूमती हैं, देखिये चित्र 4.38। यदि चालक एवं चलित गियरों का पिच वृत्त व्यास d_A एवं d_B तथा दाँतों की संख्या क्रमश: T_A एवं T_B हो, तो



चित्र 4.38.

चालक गियर की रेखीय गति = चलित गियर की रेखीय गति

$$\pi d_A N_A = \pi d_B N_B$$

या
$$\frac{N_B}{N_A} = \frac{d_A}{d_B}$$

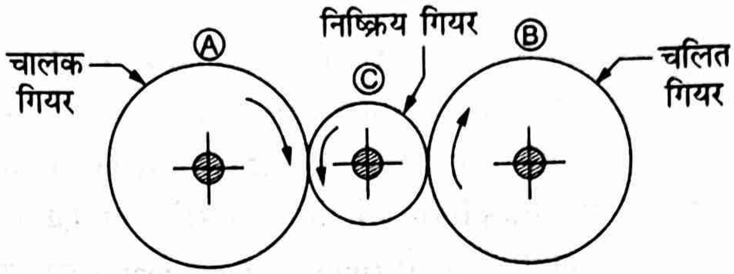
क्योंकि दो सम्पर्क करने वाले गियरों का वृत्तीय पिच (circular pitch) समान होता है इसलिये इन गियरों पर दाँतों की संख्या प्रत्येक गियर के पिच वृत्त व्यास के समानुपाती होगी। T_A एवं T_B क्रमश: चालक एवं चलित गियरों पर दाँतों की संख्या है। अत: वेग अनुपात

$$\frac{N_B}{N_A} = \frac{d_A}{d_B} = \frac{T_A}{T_B} \quad \text{...(i)}$$

यदि दोनों शाफ्टों को समान दिशा में घुमाना हो, तो चालक एवं चलित गियरों के मध्य विषम संख्याओं में अर्थात् एक, तीन, पाँच इत्यादि निष्क्रिय गियरों (idler gears) का प्रयोग, चालक एवं चलित गियरों के मध्य खाली स्थान के अनुसार किया जायेगा। इन निष्क्रिय गियरों का, गियर माला के वेग अनुपात पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

देखिये चित्र 4.39। इस चित्र में चालक एवं चलित गियरों के मध्य एक निष्क्रिय गियर (idler gear) लगा हुआ दिखाया गया है। यहाँ चालक एवं चलित गियरों के घूमने की दिशायें समान हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES



चित्र 4.39.

यदि चालक, चलित एवं निष्क्रिय गियर का व्यास एवं दाँतों की संख्या क्रमशः d_A, d_B, d_C एवं T_A, T_B, T_C तथा च० प्र० मि० क्रमशः N_A, N_B व N_C हों।

क्योकि गियर A व गियर C तथा गियर C व गियर B आपस में सम्पर्क में हैं।

अत: गियर A का परिधीय वेग = गियर C का परिधीय वेग

या $$\pi d_A N_A = \pi d_C N_C$$

या $$\frac{N_C}{N_A} = \frac{d_A}{d_C} = \frac{T_C}{T_B} \quad \ldots(i)$$

अब गियर C का परिधीय वेग = गियर B का परिधीय वेग

या $$\pi d_C N_C = \pi d_C N_B$$

या $$\frac{N_B}{N_C} = \frac{d_C}{d_B} = \frac{T_C}{T_B} \quad \ldots(ii)$$

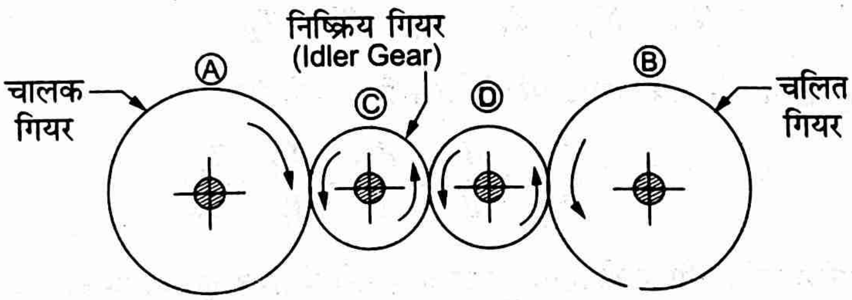
समीकरण (i) व (ii) को गुणा करने पर,

$$\frac{N_C}{N_A} \times \frac{N_B}{N_C} = \frac{d_A}{d_C} \times \frac{d_C}{d_B} = \frac{T_A}{T_C} \times \frac{T_C}{T_B}$$

या $$\frac{N_B}{N_A} = \frac{d_A}{d_B} = \frac{T_A}{T_B} \quad \ldots(iii)$$

अत: वेग अनुपात (Velocity ratio) $\dfrac{N_B}{N_A} = \dfrac{T_A}{T_B}$

इस प्रकार हम देखते हैं कि गियर माला के वेग अनुपात (velocity ratio) पर निष्क्रिय गियर (idler gear) का कोई प्रभाव नहीं है। **यदि चालक एवं चलित गियरों के मध्य सम संख्या (even number) में अर्थात् दो, चार या छः निष्क्रिय गियरों (idler gears) का प्रयोग किया जाए तो चालक एवं चलित गियरों की दिशायें विपरीत होंगी,** देखिये चित्र 4.40।



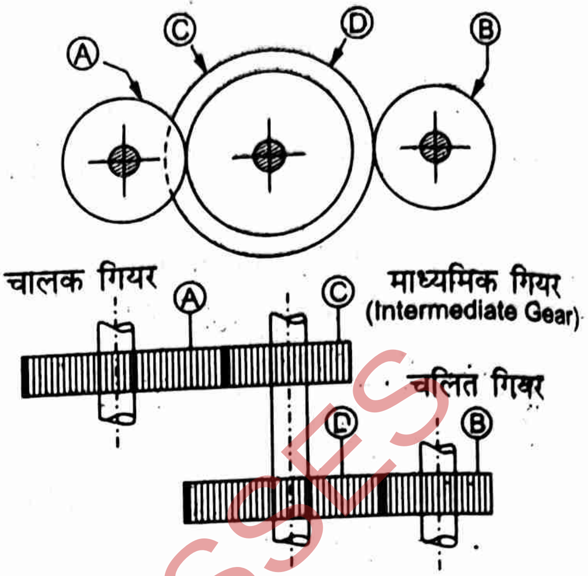
चित्र 4.40.

उपरोक्त गणना के ही अनुसार चित्र में प्रदर्शित दो निष्क्रिय गियरों वाली साधारण गियर माला का वेग अनुपात (velocity ratio) भी समी० (iii) के अनुसार होगा। यहाँ भी निष्क्रिय गियरों (idler gears) का कोई प्रभाव वेग अनुपात पर नहीं होगा।

AKC TECHNICAL CLASSES

2. संयुक्त गियर माला (Compound Gear Train)

इस गियर माला में चालक एवं चलित शाफ्टों में से प्रत्येक पर एक-एक गियर तथा माध्यमिक शाफ्ट (intermediate shaft) पर दो या अधिक गियर लगे होते हैं, देखिये चित्र 4.41। इस गियर माला में माध्यमिक गियरों (intermediate gears) का वेग अनुपात पर प्रभाव होगा अर्थात् माध्यमिक गियरों पर बने दाँतों की संख्या को वेग अनुपात निकालते समय गणना में सम्मिलित किया जायेगा।



चित्र 4.41.

चित्र 4.41 में दिखाई संयुक्त गियर माला (compound gear train) में गियर A व D चालक गियर एवं गियर C व B चलित गियर की तरह कार्य करेंगे।

यदि गियरों A, C, D, B का पिच वृत्त व्यास क्रमशः d_A, d_C, d_D, d_B व दाँतों की संख्या क्रमशः T_A, T_C, T_D, T_B हो एवं rpm N_A, N_C, N_D व N_B हों, तो

गियर A का परिधीय वेग = गियर C का परिधीय वेग

या $$\pi d_A N_A = \pi d_C N_C$$

या $$\frac{N_C}{N_A} = \frac{d_A}{d_C} = \frac{T_A}{T_C} \quad \text{...(i)}$$

इसी प्रकार, गियर D का परिधीय वेग = गियर B का परिधीय वेग

या $$\pi d_D N_D = \pi d_B N_B$$

या $$\frac{N_B}{N_D} = \frac{d_D}{d_B} = \frac{T_D}{T_B} \quad \text{...(ii)}$$

समी० (i) व (ii) को गुणा करने पर,

$$\frac{N_C}{N_A} \times \frac{N_B}{N_D} = \frac{d_A}{d_C} \times \frac{d_D}{d_B} = \frac{T_A}{T_C} \times \frac{T_C}{T_B}$$

यहाँ $N_C = N_D$ है, क्योंकि एक शाफ्ट पर ही दोनों गियर लगे हैं।

अतः $$\frac{N_B}{N_A} = \frac{d_A}{d_C} \times \frac{d_D}{d_B} = \frac{T_A}{T_C} \times \frac{T_D}{T_B} \quad \text{...(iii)}$$

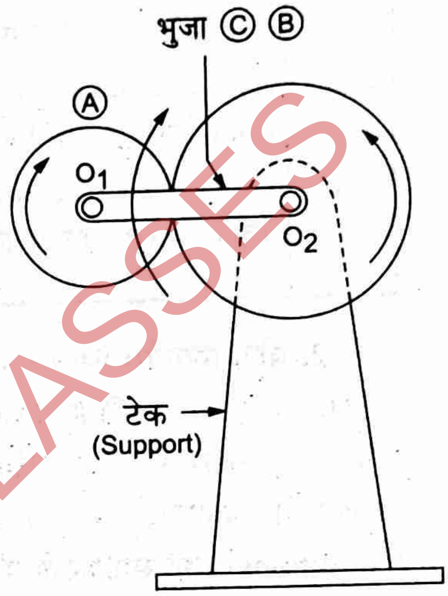
अर्थात् $$\frac{\text{अंतिम चलित गियर के rpm}}{\text{प्रथम चालक गियर के rpm}} = \frac{\text{चालक गियरों के पिच वृत्त व्यासों की गुणा}}{\text{चलित गियरों के पिच वृत्त व्यासों की गुणा}}$$

$$= \frac{\text{चालक गियरों पर बने दाँतों की गुणा}}{\text{चलित गियरों पर बने दाँतों की गुणा}}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

3. बाह्य चक्रीय या अधिचक्रिक गियर माला (Epicyclic Gear Train)

चित्र 4.42 में एक साधारण बाह्य चक्रीय गियर माला को प्रदर्शित किया गया है। चित्र में गियर B एवं भुजा C अक्ष (O_2) के परितः घूम सकती है। गियर A, गियर B से मेल खाता है तथा गियर A अपनी अक्ष O_1 के परितः घूम सकता है। यदि भुजा बद्ध है, तो गियर माला साधारण गियर माला की तरह शक्ति का संचारण करेगी। यदि गियर B को बद्ध कर दिया जाये और भुजा C की सहायता से गियर A को, गियर B की परिधि पर घुमाया जाये तो यह एक बाह्य चक्रीय गियर माला बन जाती है।



चित्र 4.42.

"In epicyclic gear train the axes of the gear wheels rotate about the axis of other wheels in addition to revolution around their respective axes."

Eplicylic gear trains are used in differential gears of automobile, the back gear of lathe, wrist watches, etc."

बाह्य चक्रीय गियर माला का वेग अनुपात (velocity ratio) ज्ञात करने की दो विधियाँ हैं—

1. सारिणी विधि (Tabular method) एवं
2. बीजगणीतीय विधि (Algebraic method)

1. सारणी विधि (Tabular method)—यदि T_A एवं T_B क्रमशः गियर A व B पर दाँतों की संख्या है। सर्वप्रथम, भुजा को बद्ध हुआ मानिये। इस प्रकार दोनों गियरों की अक्षें (axis) भी एक दूसरे के सापेक्ष स्थिर हो जायेंगी। जब गियर B वामावर्त दिशा (anticlockwise direction) में एक चक्कर घूमता है, तो गियर A दक्षिणावर्त दिशा (clockwise direction) में $\frac{T_B}{T_a}$ चक्कर बनायेगा। वामावर्त दिशा में गियर B के द्वारा बनाये गये चक्कर को +1 लेने पर गियर B दक्षिणावर्त दिशा में $-\frac{T_B}{T_A}$ चक्कर बनायेगा। इस गणना को सारणी की प्रथम पंक्ति में लिखा जायेगा।

इसके पश्चात् यदि गियर B को $+x$ चक्कर बनाता हुआ मानें, तो गियर A, $-x\frac{T_B}{T_A}$ चक्कर बनायेगा। इस गणना को सारणी को द्वितीय पंक्ति में लिखते हैं। दूसरे शब्दों में गियर माला के विभिन्न अवयवों द्वारा बनाई गई गतियों को जो प्रथम पंक्ति में लिखी गई हैं, x से गुणा कर देते हैं।

अब गियर माला की भुजा (C) को $+y$ चक्कर देते हैं एवं गियर माला के प्रत्येक अवयव के चक्करों में $+y$ को जोड़कर तृतीय पंक्ति में लिखते हैं।

प्रश्न में किन्ही भी दो अवयवों के घूमने सम्बन्धी दो दशा (conditions) दी जायेंगी। जिनको तृतीय कॉलम में लिखी समीकरण में रखकर अवयव की गति ज्ञात की जा सकती है।

AKC TECHNICAL CLASSES

सारणी 4.1

क्रम संख्या	क्रिया	गियर माला के विभिन्न अवयवों के चक्कर		
		भुजा	गियर (B)	गियर (A)
1.	भुजा C स्थिर है तथा गियर $B, +1$ चक्कर से घूमता है	0	+1	$-\frac{T_B}{T_A}$
2.	भुजा C स्थिर है तथा गियर $B, +x$ चक्कर बनाता है	0	$+x$	$-x\frac{T_B}{T_A}$
3.	भुजा $C, +y$ चक्कर बनाती है।	$+y$	$x+y$	$y-x\frac{T_B}{T_A}$

2. बीजगणितीय विधि (Algebraic method)— इस विधि में बाह्य चक्रीय गियर माला के प्रत्येक अवयव की गतियाँ, भुजा (C) की गतियों के सापेक्ष समीकरण के रूप में लिखते हैं। इस प्रकार बनी समीकरणें की संख्या, गियर माला में अवयवों की संख्या पर निर्भर करती है परन्तु प्रत्येक बाह्य चक्रीय गियर माला से सम्बन्धित प्रश्न में दो दशा (conditions) दी जायेंगी। उदाहरण के रूप में एक अवयव को बद्ध तथा दूसरे अवयव की निश्चित गति दी हुई होगी। ये दोनों दशायें (conditions) सभी समीकरणों को हल करने के लिये पर्याप्त होगी अर्थात् गियर माला के प्रत्येक अवयव की गति ज्ञात की जा सकती है।

यदि भुजा C बद्ध है, तो गियर B की, भुजा C के सापेक्ष गति $= N_B - N_C$

इसी प्रकार गियर A की, भुजा C के सापेक्ष गति $= N_A - N_C$

क्योंकि गियर B एवं A के सीधे सम्पर्क में हैं, इसलिये दोनों विपरीत दिशा में घूमेंगे।

अत:
$$\frac{N_A - N_C}{N_B - N_C} = -\frac{T_B}{T_A}$$

यहाँ भुजा C को बद्ध हुआ माना है, तो $N_C = 0$ होगा।

अत:
$$\frac{N_A}{N_B} = -\frac{T_B}{T_A}$$

यदि गियर B बद्ध हो, तो $N_B = 0$ होगा।

$$\frac{N_A - N_C}{0 - N_C} = -\frac{T_B}{T_A}$$

या
$$\frac{N_A}{N_C} = 1 + \frac{T_B}{T_A}$$

आवश्यक (Important)—बाह्य चक्रीय गियर माला (epicyclic gear train) से सम्बन्धित प्रश्नों का हल सारणी विधि से आसान होता है। अत: सारणी विधि को ही प्रयोग करके सम्बन्धित प्रश्नों को आमतौर पर हल किया जाता है।

बाह्य चक्रीय या **अधिचक्रिक गियर माला के लाभ तथा उपयोग** (Advantages and uses of epicyclic gear train)—**गियरों की किसी निश्चित संख्या के लिए, अन्य गियर माला की अपेक्षा बाह्य चक्रीय गियर माला में अधिक**

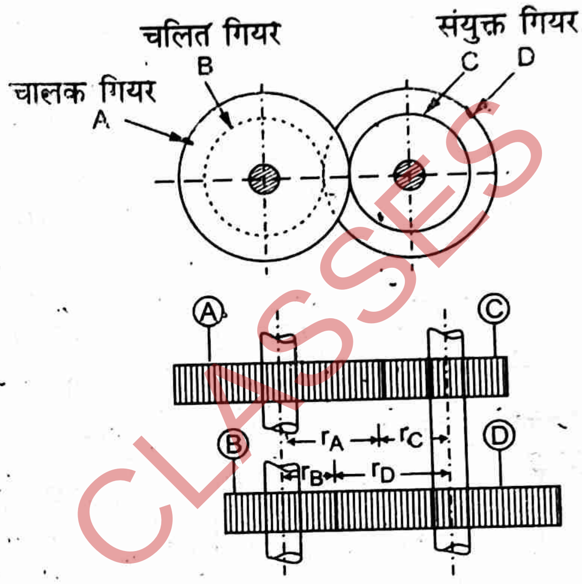
AKC TECHNICAL CLASSES

वेग अनुपात प्राप्त होता है। इसीलिए इस गियरमाली का सर्वाधिक उपयोग होता है। उदाहरणतः हाथ की घड़ियों में, पुली ब्लॉक (pulley block) में, हविसों (hoists) में तथा ऑटोमोबाइल के विभेदी गियर (differential gear of automobile) आदि में।

4. प्रत्यावर्ती गियर माला (Reverted Gear Train)

यदि प्रथम चालक एवं अन्तिम चलित गियरों की अक्ष एक (coaxial) हो तो इस प्रकार बनी ट्रेन को प्रत्यावर्ती गियर माला (reverted gear train) कहते हैं।

"When the axis of first driver and last driven gears are coaxial, then the train is called reverted gear train."



चित्र 4.43. (a) (b)

देखिये चित्र 4.43 (a) व (b)। क्योंकि प्रथम एवं अन्तिम गियरों के घूमने की दिशा समान है अतः यह संयुक्त गियर माला (compound gear train) ही है।

इस गियर माला का प्रयोग घड़ियों व खराद मशीन टूल (lathe machine tool) के पश्च गियर (back gear) में किया जाता है।

यदि T_A, T_B, T_C व T_D क्रमशः गियरों A, B, C व D पर दाँतों की संख्या व N_A, N_B, N_C व N_D इन्हीं गियरों की क्रमशः चक्कर की संख्या प्रति मिनट हों, तो

गियर A का परिधीय वेग = गियर C का परिधीय वेग

या,
$$\pi d_A N_A = \pi d_C N_C$$

या
$$\frac{N_C}{N_A} = \frac{d_A}{d_C} = \frac{T_A}{T_C} \quad \ldots(i)$$

इसी प्रकार, गियर D का परिधीय वेग = गियर B का परिधीय वेग

या,
$$\pi d_D N_D = \pi d_B N_B$$

या,
$$\frac{N_B}{N_D} = \frac{d_D}{d_B} = \frac{T_D}{T_B} \quad \ldots(ii)$$

समी॰ (i) व (ii) को गुणा करने पर,

$$\frac{N_C}{N_D} \times \frac{N_B}{N_D} = \frac{d_A}{d_C} \times \frac{d_D}{d_B} = \frac{T_A \times T_D}{T_C \times T_B}$$

यहाँ $N_C = N_D$ क्योंकि दोनों गियर एक शाफ्ट पर लगे हैं।

अतः
$$\frac{N_B}{N_A} = \frac{d_A \times d_D}{d_C \times d_B} = \frac{T_A \times T_D}{T_C \times T_B} \quad \ldots(iii)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

अर्थात्
$$\frac{\text{अंतिम चलित गियर के rpm}}{\text{प्रथम चालक गियर के rpm}} = \frac{\text{चालक गियरों के पिच वृत्त व्यासों की गुणा}}{\text{चलित गियरों के पिच वृत्त व्यासों की गुणा}}$$
$$= \frac{\text{चालक गियरों पर बने दाँतों की गुणा}}{\text{चलित गियरों पर बने दाँतों की गुणा}}$$

चित्र के अनुसार दोनों अक्षों के मध्य दूरी समान है एवं चारों गियरों के वृत्तीय पिच (circular pitch) को समान माना गया है।

अत: $$r_A + r_C = r_D + r_B$$

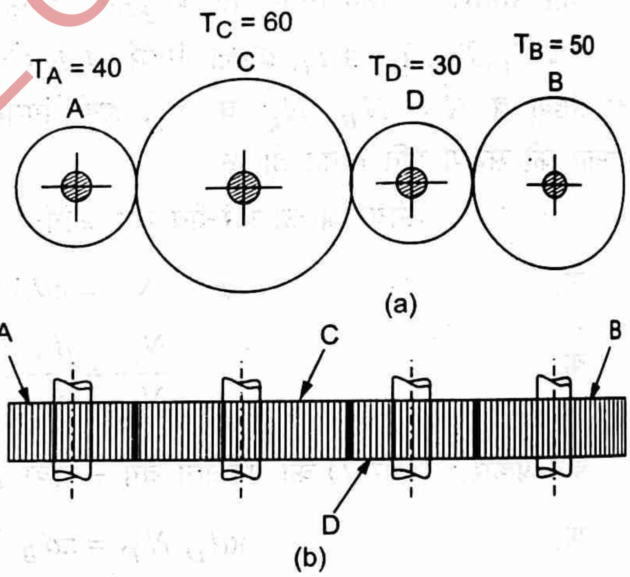
या $$d_A + d_C = d_D + d_B$$

या $$T_A + T_C = T_D + T_B \qquad \ldots(iv)$$

समी० (iii) व (iv) का प्रयोग करके इस गियर माला से सम्बन्धित प्रश्नों को हल किया जाता है।

उदाहरण 4.17—एक सरल गियर माला चित्र 4.44 में दिखाई गयी है। चालक गियर *A*, 1000 rpm पर दक्षिणावर्ती दिशा (clockwise directions) में घूमता है। गियर *A*, *C*, *D*, *B* पर दाँतों की संख्या क्रमश: 40, 60, 30 एवं 50 हो, तो चलित गियर *B* के rpm एवं घुमाव की दिशा ज्ञात कीजिये।

हल—चित्र 4.44 (a) व (b) का अवलोकन कीजिये।



चित्र 4.44.

माना गियर A, C, D व B के चक्र प्रति मिनट N_A, N_C, N_D व N_B हैं, तो

$$\frac{N_C}{N_A} = \frac{T_A}{T_C} \qquad \ldots(i)$$

तथा $$\frac{N_D}{N_C} = \frac{T_C}{T_D} \qquad \ldots(ii)$$

एवं $$\frac{N_B}{N_D} = \frac{T_D}{T_B} \qquad \ldots(iii)$$

समी० (i) व (ii) एवं (iii) को गुणा करने पर,

$$\frac{N_C}{N_A} \times \frac{N_D}{N_C} \times \frac{N_B}{N_D} = \frac{T_A}{T_D} \times \frac{T_C}{T_D} \times \frac{T_D}{T_B}$$

या $$\frac{N_B}{N_A} = \frac{T_A}{T_B}$$

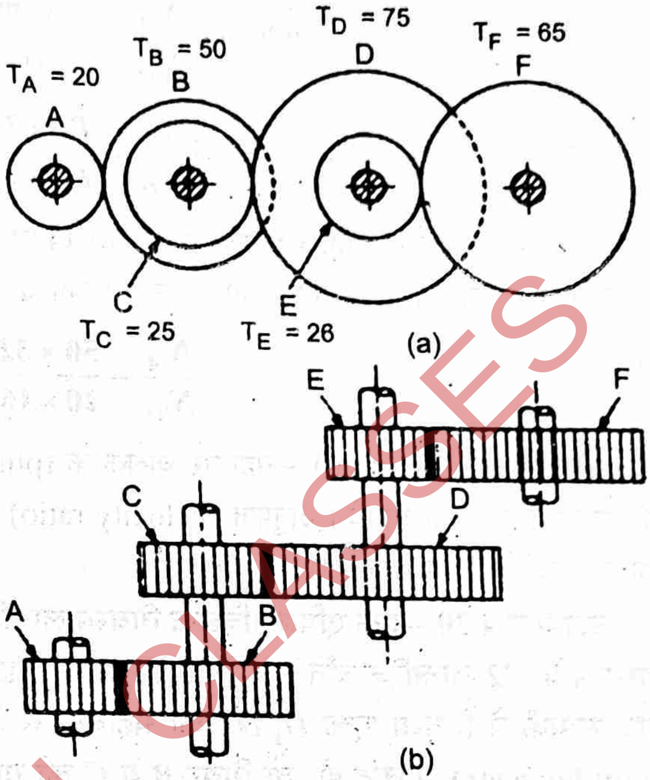
या $$N_B = \frac{T_A}{T_B} \times N_A = \frac{40}{50} \times 1000$$

$$= \mathbf{800\ rpm}$$ **उत्तर**

क्योंकि चालक एवं चलित गियरों के मध्य दो निष्क्रिय गियर (idler gear) हैं अत: चलित गियर *B* की दिशा चालक गियर *A* के विपरीत दिशा में होगी अर्थात् **वामावर्ती (anticlockwise) दिशा** में होगी।

AKC TECHNICAL CLASSES

उदाहरण 4.18—एक मशीन टूल (machine tool) में चित्र 4.45 के अनुसार संयुक्त गियर माला (compound gear train) का प्रयोग किया गया है। यदि गियर A मोटर शाफ्ट से सम्बन्धित हो और 975 rpm पर घूम रहा हो तथा गियर B, C, D, E समानान्तर शाफ्टों पर लगे हैं तो अन्तिम चलित गियर F की गति rpm में ज्ञात कीजिये। गियर A, B, C, D, E, F पर दाँतों की संख्या क्रमश: 20, 50, 25, 75, 26, 65 है।



चित्र 4.45.

हल—चित्र 4.45 (a) व (b) का अवलोकन कीजिये। माना गियर A, B, C, D, E व F के rpm N_A, N_B, N_C, N_D, N_E व N_F हैं एवं दाँतों की संख्या T_A, T_B, T_C, T_D, T_E व T_F है।

हम जानते हैं, कि

$$\frac{N_F}{N_A} = \frac{T_A \times T_C \times T_E}{T_B \times T_D \times T_F}$$

या,

$$\frac{N_F}{975} = \frac{20 \times 25 \times 26}{50 \times 75 \times 65}$$

अत:

$$N_F = \frac{20 \times 25 \times 26 \times 975}{50 \times 75 \times 65} = 52 \text{ rpm}$$

उत्तर

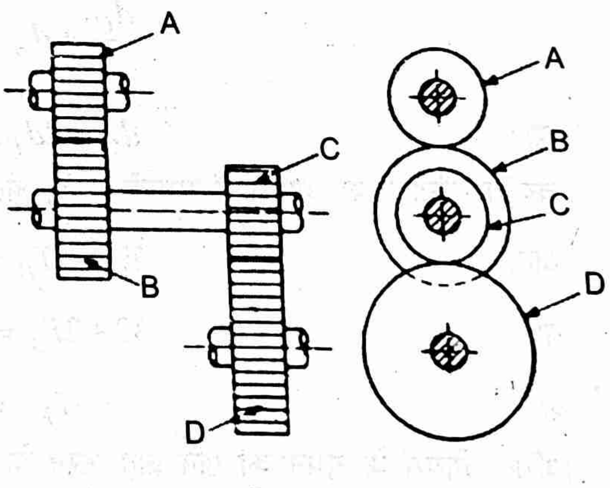
उदाहरण 4.19— मोटर की गति को 3000 rpm से 600 rpm पर कम करना है। चलित गियर की उपरोक्त गति को प्राप्त करने के लिये संयुक्त गियर माला (compound gear train) बनाइये। समान पिच के केवल स्पर गियर (spur gear) उपलब्ध हैं जिनके दाँतों की संख्या निम्न है—

16, 20, 32, 40, 50, 75

हल—वाँछित गति अनुपात (Velocity ratio)

$$= \frac{\text{चालक के चक्र (rpm)}}{\text{चलित के चक्र (rpm)}}$$

$$= \frac{300}{600} = 5$$



चित्र 4.46.

हम यह जानते हैं, कि संयुक्त गियर माला (compound gear train) में कम से कम चार गियर प्रयोग किये जाते हैं अत: हमको चालक शाफ्ट एवं चलित शाफ्ट पर उपरोक्त दिये गये गियरों में से, उन गियरों को प्रयोग करना है, जिनका वेग अनुपात 5 हो। देखिये चित्र 4.46.

AKC TECHNICAL CLASSES

अब, वेगानुपात $\frac{N_A}{N_D} = \frac{\text{चलित गियरों पर बने दाँतों की संख्या का गुणन}}{\text{चालक गियरों पर दाँतों की संख्या का गुणन}}$

अत: $$\frac{N_A}{N_D} = \frac{T_B \times T_D}{T_A \times T_C}$$

गियरमाला का वेग अनुपात 5 प्राप्त करने के लिये उपलब्ध गियरों में से $T_A = 20, T_B = 50, T_C = 16$ एवं $T_D = 32$ दाँतों वाले गियरों का चयन कर प्रयोग करने पर वेग अनुपात 5 प्राप्त हो जायेगा।

$$\therefore \quad \frac{N_A}{N_D} = \frac{50 \times 32}{20 \times 16} = 5$$ **उत्तर**

आवश्यक (Important)—यहाँ पर चालक के rpm अंश (nominator) एवं चलित के rpm हर (denominator) में रखकर गियरमाला का वेग अनुपात (velocity ratio) ज्ञात किया गया है क्योंकि वेग अनुपात का मान हमेशा एक से अधिक प्रदर्शित किया जाता है।

उदाहरण 4.20—एक एपिसाइक्लिक गियरमाला में तीन गियर *A*, *B* व *C* चित्र 4.47 के अनुसार लगे हैं। वलयी गियर *A* पर 72 आन्तरिक दाँते तथा गियर *C* पर 32 बाह्य दाँते हैं। ग्रह गियर *B*, वलयी गियर *A* तथा सूर्य गियर *C* के साथ सम्पर्क में है तथा भुजा $O_1 O_2$ की सहायता से गियर *C* के चारों तरफ 18 rpm से घूमता है। यदि वलयी (annular gear) *A* बद्ध हो, तो गियर *B* व *C* की गति rpm में ज्ञात कीजिये।

हल— देखिये चित्र 4.47।

(i) वलयी गियर (Annular gear) *A* पर दाँतों की संख्या $(T_A) = 72$

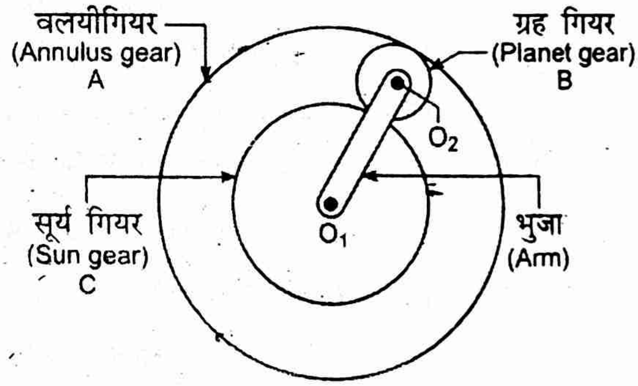
(ii) ग्रह गियर (Planet gear) *B* पर दाँतों की संख्या $(T_B) = ?$

(iii) सूर्य गियर पर दाँतों की संख्या $(T_C) = 32$

(iv) वलयी गियर (*A*) स्थिर है।

(v) गियर *B* के rpm $(N_B) = ?$

(vi) गियर *C* के rpm $(N_C) = ?$



चित्र 4.47.

हम जानते हैं, कि

$$\frac{d_C}{2} + d_B = \frac{d_A}{2}$$

या $$d_C + 2d_B = d_A$$

क्योंकि तीनों गियर आपस में सम्पर्क में हैं, अत: इनके वृत्तीय पिच (circular pitch) समान हैं।

अत: $$T_C + 2T_B = T_A,$$

या $$32 + 2T_B = 72 \quad \text{या} \quad 2T_B = 40$$

या $$T_B = 20$$ **उत्तर**

विभिन्न गियरों के घूमने की गति ज्ञात करने के लिये सारणी—4.2 बनाते हैं।

प्रश्नानुसार,

$$N_A = 0 \quad \text{(दिया है।)}$$

अत:

$$x + y = 0 \quad ...(i)$$

एवं भुजा के चक्कर $y = 18$ ...(ii)

यहाँ हमने भुजा को वामावर्त दिशा (anticlockwise direction) में घूमता हुआ माना है एवं वामावर्त दिशा में घूमने को धनात्मक (+ive) लिया है।

सारणी 4.2

क्रम संख्या	क्रिया	गियर माला के विभिन्न अवयवों के चक्कर			
		भुजा	गियर (A)	गियर (B)	गियर (C)
1.	भुजा स्थिर है तथा गियर $A, +1$ चक्कर से घूमता है।	0	+1	$+\frac{T_A}{T_B}$	$+\frac{T_A}{T_B} \times \left(-\frac{T_B}{T_C}\right) = -\frac{T_A}{T_C}$
2.	भुजा स्थिर है तथा गियर $A, +x$ चक्कर से घूमता है।	0	$+x$	$+x\frac{T_A}{T_B}$	$= -x\frac{T_A}{T_C}$
3.	भुजा $+y$ चक्कर से घूमती है।	$+y$	$x+y$	$y + x\frac{T_A}{T_B}$	$= y - x\frac{T_A}{T_C}$

समी० (ii) से y का मान समी० (i) में रखने पर,

$$x + 18 = 0$$

$$x = -18$$

अत: गियर B के चक्कर $N_B = y + x \times \frac{T_A}{T_B}$

$$= 18 - 18 \times \frac{72}{20}$$

$$= 18 - 64.8$$

$$= -\mathbf{46.8\ rpm}$$ **उत्तर**

ऋणात्मक चिन्ह (negative sign) दक्षिणावर्त दिशा (clockwise direction) को प्रदर्शित करता है।

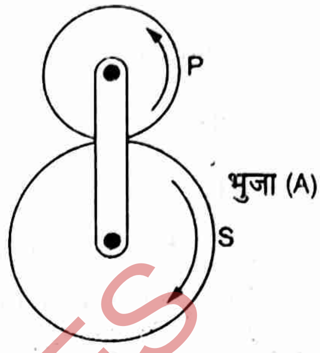
एवं गियर C के चक्कर $N_C = y - x \times \frac{T_A}{T_C}$

$$= 18 + 18 \times \frac{72}{32} = 18 + 40.5$$

$$= \mathbf{58.5\ rpm}$$ **(वामावर्त दिशा में)** **उत्तर**

AKC TECHNICAL CLASSES

उदाहरण 4.21—एक एपिसाइक्लिक ट्रेन जोकि चित्र 4.48 में दिखायी गयी है, उसके गियर P में दाँतों की संख्या 50 तथा गियर S में दाँतों की संख्या 75 है। भुजा 100 rpm बनाती है। ग्रह गियर P की गति ज्ञात कीजिये जबकि: (a) गियर S स्थिर है। (b) गियर S भुजा की विपरीत दिशा में 200 rpm से घूमता है।



चित्र 4.48.

हल—चित्र 4.48 का अवलोकन कीजिये। दिया है,

(i) गियर P पर दाँतों की संख्या $(T_P) = 50$

(ii) गियर S पर दाँतों की संख्या $(T_S) = 75$

(iii) भुजा A के rpm $(N_A) = 100$

सारणी 4.3 बनाते हैं। वामावर्त दिशा को धनात्मक लेने पर

सारणी 4.3

क्रम संख्या	क्रिया	गियर माला के विभिन्न अवयवों के चक्कर		
		भुजा (A)	गियर (P)	गियर (S)
1.	भुजा स्थिर है तथा गियर $P, +1$ चक्कर से घूमता है।	0	+1	$-\frac{T_p}{T_s}$
2.	भुजा स्थिर है तथा गियर $P, +x$ चक्कर बनाता है।	0	$+x$	$-x\frac{T_p}{T_s}$
3.	भुजा $+y$ चक्कर से घूमती है।	$+y$	$x+y$	$y-x\frac{T_p}{T_s}$

प्रश्नानुसार,

(a) जब गियर S स्थिर है।

$$y = +100 \qquad \ldots(i)$$

(यहाँ भुजा के घूमने की दिशा (direction), वामावर्त (anticlockwise) मानी गई है।)

एवं
$$y - x \times \frac{T_P}{T_S} = 0 \qquad \ldots(ii)$$

$$100 - x \times \frac{50}{75} = 0 \quad \text{या} \quad x = 100 \times \frac{75}{50} = 150$$

अत: गियर P की गति $N_P = x + y = 150 + 100 =$ **250 rpm (वामावर्त)** **उत्तर**

(b) जब गियर 'S' 200 rpm पर दक्षिणावर्त दिशा में घूमता है। अर्थात्

$$N_S = -200$$

या
$$y - x\frac{T_P}{T_S} = -200$$

AKC TECHNICAL CLASSES

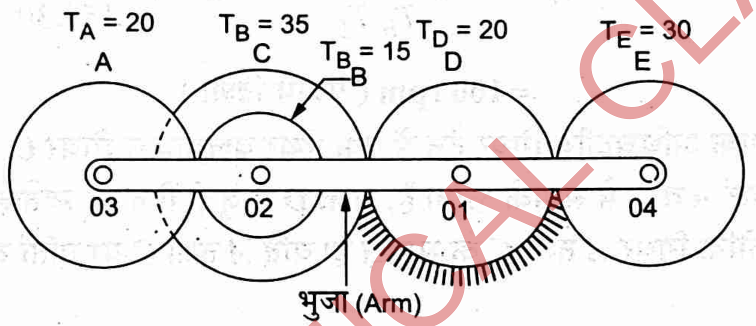
या $$100 - x \times \frac{50}{75} = -200$$

$$x \times \frac{50}{75} = 300$$

$$x = 300 \times \frac{75}{50} = 450$$

इस स्थिति में गियर P की गति, $N_P = x + y = 450 + 100 =$ **550 rpm (वामावर्त)** उत्तर

उदाहरण 4.22—चित्र 4.49 में एक बाह्य चक्रीय गियरमाला (epicyclic gear train) की व्याख्या दिखाई गई है। गियर D स्थिर है तथा गियर B और C समकेन्द्रित रूप से ढले हैं और एक पिन पर लगे हैं। यदि भुजा R प्रवाम दिशा में 1 चक्कर प्रति सेकिण्ड से घूमे, तो पहिये A तथा E की गति तथा घूर्णन दिशा ज्ञात कीजिये।



चित्र 4.49.

हल—दिया है,

(i) गियर D स्थिर है, अर्थात् $N_D = 0$ है।

(ii) भुजा R के चक्कर $= 1$ चक्कर/सेकिण्ड $= 60$ चक्कर/मिनट

(iii) गियर A की दिशा $(N_A) = ?$ तथा घुमाव की दिशा $= ?$

(iv) गियर E की गति $(N_E) = ?$ तथा घुमाव की दिशा $= ?$

वामावर्त (anticlockwise) दिशा को धनात्मक मानने पर।

सारणी 4.4

क्र० सं०	क्रिया	गियरमाला के विभिन्न अवयवों के प्रकार					
		भुजा	गियर (A)	गियर (B)	गियर (C)	गियर (D)	गियर (E)
1.	भुजा स्थिर है तथा गियर $A, \times 3 + 1$ चक्कर से घूमता है	0	+1	$-\frac{T_A}{T_B}$	$-\frac{T_A}{T_B}$	$+\frac{T_A}{T_B}\times\frac{T_C}{T_D}$	$-\frac{T_A}{T_B}\times\frac{T_C}{T_E}$
2.	भुजा स्थिर है तथा गियर $A, \times 3 + x$ चक्कर से घूमता है	0	$+x$	$-x\frac{T_A}{T_B}$	$-x\frac{T_A}{T_B}$	$+x\frac{T_A T_C}{T_B T_D}$	$-x\frac{T_A T_C}{T_B T_E}$
3.	भुजा, $\times 3 + y$ चक्कर से धूमती है।	$+y$	$x + y$	$y - x\frac{T_A}{T_B}$	$y - x\frac{T_A}{T_B}$	$y + x\frac{T_A T_C}{T_B T_E}$	$y - x\frac{T_A T_C}{T_B T_E}$

AKC TECHNICAL CLASSES

$$y = 60 \qquad \text{... (i)}$$

एवं $$y + x\frac{T_A\, T_C}{T_B\, T_D} = 0$$

या $$60 + x\frac{20 \times 35}{15 \times 20} = 0 \quad \text{या } 60 + 2.333x = 0$$

या $$x = -25.71$$

अत: $$N_A = x + y = -25.71 + 60$$

$$= 34.29 \text{ rpm (प्रवाम दिशा)}$$ उत्तर

तथा $$N_E = y - x\frac{T_A\, T_C}{T_B\, T_E} = 60 + 25.71 \times \frac{20 \times 35}{15 \times 30}$$

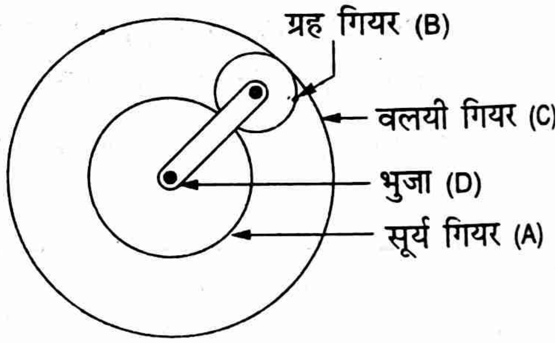
$$= 100 \text{ rpm (प्रवाम दिशा)}$$ उत्तर

उदाहरण 4.23—(a) एक अधिचक्रीय गियर ट्रेन में एक स्थिर वलयाकार गियर C, सूर्य गियर A के संकेन्द्री है। एक ग्रह गियर B जोकि गियर A व C से सम्पर्क करता है, भुजा D में जुड़ी पिन पर स्वतन्त्र रूप से घूम सकता है। भुजा D उसी अक्ष पर घूमती है जोकि गियर A तथा C के समाक्ष है। यदि A तथा C पर दाँतों की संख्या T_1 एवं T_2 हो, तो सिद्ध कीजिये—

$$\frac{\text{भुजा } D \text{ की गति}}{\text{गियर } A \text{ की गति}} = \frac{T_1}{(T_1 + T_2)}$$

(b) यदि किसी भी गियर में दाँतों की न्यूनतम संख्या 18 हो तथा $(T_1 + T_2) = 120$ हो, तो भुजा D की अधिकतम एवं न्यूनतम गतियाँ ज्ञात कीजिये जबकि गियर A 500 rpm पर घूमता है।

हल— (a) चित्र 4.50 का अवलोकन कीजिये।



चित्र 4.50.

दिया है,

(i) सूर्य गियर A पर दाँतों की संख्या $= T_1$

(ii) वलयाकार गियर C पर दाँतों की संख्या $= T_2$

$$\frac{d_A}{2} + d_B = \frac{d_C}{2}$$

या $$d_A + 2d_B = d_C$$

या $$T_A + 2T_B = T_2$$

या $$T_1 + 2T_B = T_2$$

या $$T_B = \left(\frac{T_2 - T_1}{2}\right) \qquad \text{...(ii)}$$

सारणी—4.5 बनाइये।

AKC TECHNICAL CLASSES

$$N_C = y - x\frac{T_A}{T_C} \quad \ldots(ii)$$

दिया है।

$$N_C = 0$$

अतः
$$y - x\frac{T_A}{T_C} = 0$$

या
$$y - x\frac{T_1}{T_2} = 0$$

या
$$y = x \times \frac{T_1}{T_2}$$

अब,
$$\frac{\text{भुजा } D \text{ की गति}}{\text{गियर } A \text{ की गति}} = \frac{y}{(x+y)}$$

सारणी 4.5

क्रम संख्या	क्रिया	गियर माला के विभिन्न अवयवों के चक्कर			
		भुजा (D)	गियर (A)	गियर (B)	गियर (C)
1.	भुजा स्थिर है तथा $A, +1$ चक्कर से घूमता है।	0	+1	$-\frac{T_A}{T_B}$	$-\frac{T_A}{T_B} \times \frac{T_B}{T_C} = -\frac{T_A}{T_C}$
2.	भुजा स्थिर है तथा गियर $A, +x$ चक्कर से घूमता है।	0	$+x$	$-x\frac{T_A}{T_B}$	$-x\frac{T_A}{T_C}$
3.	भुजा, $+y$ चक्कर से घूमती है।	$+y$	$x+y$	$y - x\frac{T_A}{T_B}$	$y - x\frac{T_A}{T_C}$

समी० (i) से y का मान रखने पर,

$$= \frac{x \times \frac{T_1}{T_2}}{x + x \times \frac{T_1}{T_2}} = \frac{x \times \frac{T_1}{T_2}}{\frac{(x \times T_2 + x \times T_1)}{T_2}}$$

$$= \frac{x \times T_1}{x \times (T_1 + T_2)} = \frac{\mathbf{T_1}}{\mathbf{(T_1 + T_2)}}$$

सिद्ध हुआ।

(b) माना सूर्य गियर A पर $T_1 = 18$ हैं।

हमने सिद्ध किया है कि,
$$\frac{\text{भुजा } D \text{ की गति}}{\text{गियर } A \text{ की गति}} = \frac{T_1}{(T_1 + T_2)}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$$\frac{\text{भुजा } D \text{ की गति}}{500} = \frac{18}{120}$$

अत: $$\text{भुजा } D \text{ की गति} = \frac{18 \times 500}{120} = 75 \text{ rpm}$$

अब गियर B पर दाँतों की संख्या 18 लेने पर,

$$T_B = \left(\frac{T_2 - T_1}{2}\right)$$

$$18 = \left(\frac{T_2 - T_1}{2}\right)$$

या $$T_2 - T_1 = 36 \qquad \ldots\text{(iii)}$$

तथा $$T_1 + T_2 = 120 \qquad \text{(दिया है)} \ldots\text{(iv)}$$

समी० (iii) व (iv) से,

अत: $$2T_2 = 156$$

$$T_2 = 78$$

T_2 का मान समी० (iv) में रखने पर,

$$T_1 = 120 - 78$$

या $$T_1 = 42$$

हमने सिद्ध किया है, कि

$$\frac{\text{भुजा } D \text{ की गति}}{\text{गियर } A \text{ की गति}} = \frac{T_1}{(T_1 + T_2)}$$

या $$\frac{\text{भुजा } D \text{ की गति}}{500} = \frac{42}{120}$$

अत: $$\text{भुजा } D \text{ की गति} = \frac{42 \times 500}{120} = 175 \text{ rpm}$$

अत: भुजा D की निम्नतम गति $= \mathbf{75\ rpm}$

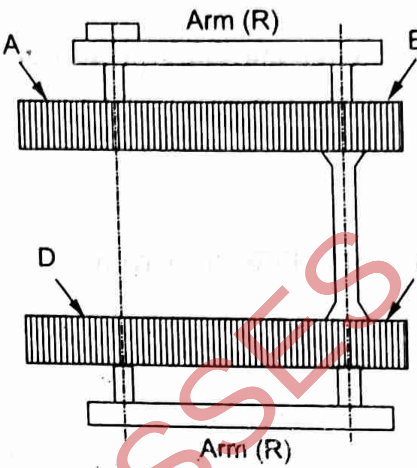
एवं भुजा D की अधिकतम गति $= \mathbf{175\ rpm}$

उत्तर

उदाहरण 4.24—चित्र 4.51 में एक बाह्य चक्रीय गियरमाला (epicyclic gear train) प्रदर्शित की गई है। यदि गियर *A*, 300 rpm से दक्षिणावर्त (clockwise direction) में घूम रहा हो, तो भुजा *R* के rpm तथा घुमाव की दिशा ज्ञात कीजिये। गियर *B* तथा *C* ग्रह गियर हैं। गियर *D* स्थिर है। गियर *B* तथा *C* दोनों साथ-साथ घूमते हैं।

$$T_A = 43,\ T_B = 24,\ T_D = 30$$

AKC TECHNICAL CLASSES



चित्र 4.51.

हल—चित्र 4.51 में एक बाह्य चक्रीय एवं प्रत्यावर्ती गियर माला को संयुक्त रूप में दिखाया गया है।

दिया है— (i) गियर A के rpm $(N_A) = 300$

(ii) गियर D स्थिर है, अर्थात् $N_D = 0$

(iii) भुजा R के rpm एवं घुमाव की दिशा = ?

हम जानते हैं, कि प्रत्यावर्ती गियर माला (reverted gear train) में,

$$\frac{d_A}{2} + \frac{d_B}{2} = \frac{d_C}{2} + \frac{d_D}{2}$$

या $$d_A + d_B = d_C + d_D$$

या $$T_A + T_B = T_C + T_D$$

या $$43 + 24 = T_C + 30$$

अतः $$T_C = 37$$

बाह्य चक्रीय गियर माला के विभिन्न गियरों की गति के लिये सारणी 4.6 बनाते हैं। दिशा को धनात्मक मानते हैं।

सारणी 4.6

क्र० सं०	क्रिया	गियर माला के विभिन्न अवयवों के चक्कर				
		भुजा (R)	गियर (A)	गियर (B)	गियर (C)	गियर (D)
1.	भुजा स्थिर है तथा $A, +1$ चक्कर से घूमता है।	0	+1	$-\frac{T_A}{T_B}$	$-\frac{T_A}{T_B}$	$\frac{T_A \times T_C}{T_B \times T_D}$
2.	भुजा स्थिर है तथा गियर $A, +x$ चक्कर से घूमता है।	0	$+x$	$-x\frac{T_A}{T_B}$	$-x\frac{T_A}{T_C}$	$x\frac{T_A T_D}{T_B T_D}$
3.	भुजा, $+y$ चक्कर से घूमती है।	$+y$	$x + y$	$y - x\frac{T_A}{T_B}$	$y - x\frac{T_A}{T_C}$	$y + x\frac{T_A T_C}{T_B T_D}$

$$x + y = 300 \quad \ldots(i)$$

$$y + x\frac{T_A T_C}{T_B T_D} = 0$$

$$y + x\frac{43 \times 37}{24 \times 30} = 0 \qquad y + 2.21x = 0 \quad \ldots(ii)$$

समी० (i) व (ii) को आपस में घटाने पर,

$$-1.21x = 300$$

$$x = -248$$

AKC TECHNICAL CLASSES

x का मान समी० (i) में रखने पर,

$$-248 + y = 300$$

$$y = 548 \text{ rpm}$$

अत: गियर B के rpm

$$N_B = y - x\frac{T_A}{T_B} = 548 + 248 \times \frac{43}{24}$$

$$= 548 + 444 = 992 \text{ rpm (प्रदक्षिण में)}$$

एवं गियर C के rpm भी 992 होंगे क्योंकि दोनों गियर एक ही शाफ्ट पर लगे हैं।

उदाहरण 4.25—चित्र 4.52 में एक बाह्य चक्रीय गियरमाला प्रदर्शित की गई है जिसमें थोड़ा स्पेस कम करें। सूर्य गियर S पर 30 दाँते एवं दो ग्रह गियरों में से प्रत्येक पर 50 दाँते हैं। ग्रह गियरें, PP, स्थिर वलयी गियर A जिस पर आन्तरिक दाँते हैं, के सम्पर्क में हैं। चालक शाफ्ट, जिस पर सूर्य गियर लगा है, 300 rpm पर 4 kW संचारित करती है। चलित शाफ्ट, एक भुजा जिस पर ग्रह गियर लगे हैं, से सम्बन्धित है। चलित शाफ्ट के rpm एवं संचारित मरोड़ घूर्ण (torque) ज्ञात कीजिये यदि गियर ट्रेन की संचारण दक्षता 95% हो।

हल—चित्र 4.52 का अवलोकन कीजिये।

(i) ग्रह गियरों P, P में से प्रत्येक पर दाँते $(T_P) = 50$

(ii) सूर्य गियर S पर दाँते $(T_S) = 30$

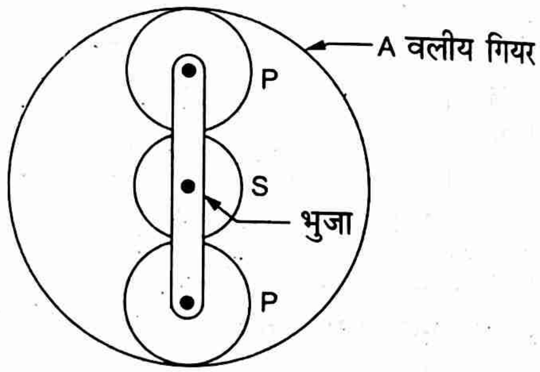
(iii) सूर्य गियर के rpm $(N_S) = 300$

(iv) संचारित शक्ति (Transmission Power) = 4 kW

(v) संचारित दक्षता (Transmission efficiency) = 95%

(vi) चलित शाफ्ट के rpm = ?

(vii) संचारित मरोड़ घूर्ण (T) = ?



चित्र 4.52.

सारणी—4.7 बनाते हैं।

यदि d_A, d_p एवं d_S क्रमश: गियर A, P व S के पिच वृत्त व्यास हैं, तो

$$\frac{d_A}{2} = \frac{d_S}{2} + d_p$$

या

$$d_A = d_S + 2d_p$$

क्योंकि सभी गियर एक दूसरे के सम्पर्क में हैं, इसलिये सभी गियरों के वृत्तीय पिच (circular pitch) समान हैं।

अत:
$$T_A = T_S + 2T_P$$

या
$$T_A = 30 + 2 \times 50$$

या
$$T_A = 130$$

सारणी से,
$$x + y = 300 \quad \text{...(i)}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

सारणी 4.7

क्र० सं०	क्रिया	गियर के अवयवों के चक्कर			
		भुजा	गियर (*S*)	गियर (*P*)	गियर (*A*)
1.	भुजा स्थिर है तथा $S, +1$ चक्कर से घूमता है।	0	+1	$-\frac{T_S}{T_P}$	$-\frac{T_S}{T_P}\times\frac{T_P}{T_A}=-\frac{T_S}{T_A}$
2.	भुजा स्थिर है तथा गियर '*S*', $+x$ चक्कर से घूमता है।	0	$+x$	$-x\frac{T_S}{T_P}$	$-x\frac{T_S}{T_A}$
3.	भुजा $+y$ चक्कर से घूमती है।	y	$x+y$	$y-x\frac{T_S}{T_P}$	$y-x\frac{T_S}{T_A}$

अत: $$y-x\frac{T_S}{T_A}=0 \quad \text{या} \quad y-x\frac{30}{130}=0$$

या $$130y-30x=0 \qquad \ldots\text{(ii)}$$

समी० (i) व (ii) से,

$$160y=9000$$

$$y=\frac{900}{16}$$

समी० (i) से,

$$x=\frac{3900}{16}$$

∴ चलित शाफ्ट के rpm = भुजा के rpm $= y = \frac{900}{16} =$ **56.25 rpm** **उत्तर**

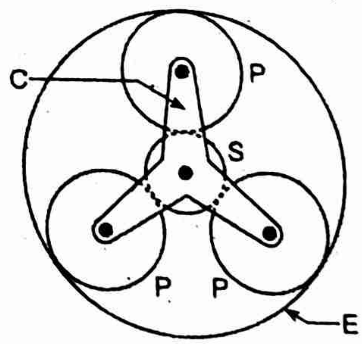
चलित शाफ्ट द्वारा संचारित मरोड़ घूर्ण,

संचारित शक्ति $(P)=2\pi NT$

$$4000\times0.95\times60=2\times\pi\times56.25\times T$$

$$T=\mathbf{645.43\,Nm}$$ **उत्तर**

उदाहरण 4.26—एक अधिचक्रीय गियर माला में एक सूर्य गियर *S*, एक स्थिर आन्तरिक गियर *E* एवं तीन समरूप ग्रह गियर *P* एक त्रिभुजाकार आकृति की भुजा *C* से सम्बन्धित हैं। विभिन्न गियरों का आकार इस प्रकार का है कि भुजा *C*, सूर्य गियर *S* के चक्करों का 1/5 हिस्सा घूमती है। किसी भी गियर पर कम से कम दाँतों की संख्य 16 हो, तो गियरमाला के प्रत्येक गियर पर दाँतों की संख्या ज्ञात कीजिये।



चित्र 4.53.

हल—चित्र 4.53 का अवलोकन कीजिये।

AKC TECHNICAL CLASSES

दिया है— (i) भुजा C के चक्करों की संख्या $= \frac{1}{5} \times$ सूर्य गियर S के चक्करों की संख्या

(ii) किसी भी गियर पर कम से कम दाँते $= 16$

माना सूर्य गियर S एवं आन्तरिक गियर E पर दाँतों की संख्या क्रमशः T_S एवं T_E है।

सारणी 4.8

क्र० सं०	क्रिया	गियरमाला के विभिन्न अवयवों के चक्कर			
		भुजा (C)	सूर्य गियर (S)	ग्रह गियर (P)	आन्तरिक गियर (E)
1.	भुजा C स्थिर है तथा सूर्य गियर, +1 चक्कर से घूमता है।	0	+1	$-\frac{T_S}{T_P}$	$-\frac{T_S}{T_P} \times \frac{T_P}{T_E} = -\frac{T_S}{T_E}$
2.	भुजा C स्थिर है तथा सूर्य गियर, $+x$ चक्कर से घूमता है।	0	$+x$	$-x\frac{T_S}{T_P}$	$-x\frac{T_S}{T_E}$
3.	भुजा $C, +y$ चक्कर से घूमती है।	$+y$	$x+y$	$y - x\frac{T_S}{T_P}$	$y - x\frac{T_S}{T_E}$

प्रश्नानुसार, भुजा C के चक्करों की संख्या $= \frac{1}{5} \times$ सूर्य गियर S के चक्करों की संख्या

या $$y = \frac{1}{5}(x+y)$$

या $$4y = x$$

अतः $$y = \frac{x}{4} \qquad \ldots(i)$$

एवं $$y - x\frac{T_s}{T_E} = 0 \qquad \text{दिया है।}$$

या $$\frac{x}{4} - x\frac{T_S}{T_E} = 0$$

या $$x\frac{T_S}{T_E} = \frac{x}{4}$$

या $$\frac{T_S}{T_E} = \frac{1}{4}$$

यदि $T_S = 16$ मान लिया जाये। क्योंकि प्रश्न में किसी भी गियर पर कम से कम दाँतों की संख्या 16 दी गई है।

अतः $\mathbf{T_S = 16}$ व $\mathbf{T_E = 64}$ **उत्तर**

AKC TECHNICAL CLASSES

अब $$\frac{d_S}{2} + d_p = \frac{d_E}{2}$$

$$d_S + 2d_P = d_E$$

क्योंकि गियरों S, P व E के वृत्तीय पिच समान हैं अत: गियर पर दाँतों की संख्या उनके पिच वृत्त व्यास (pitch circle diameter) के समानुपाती होगी।

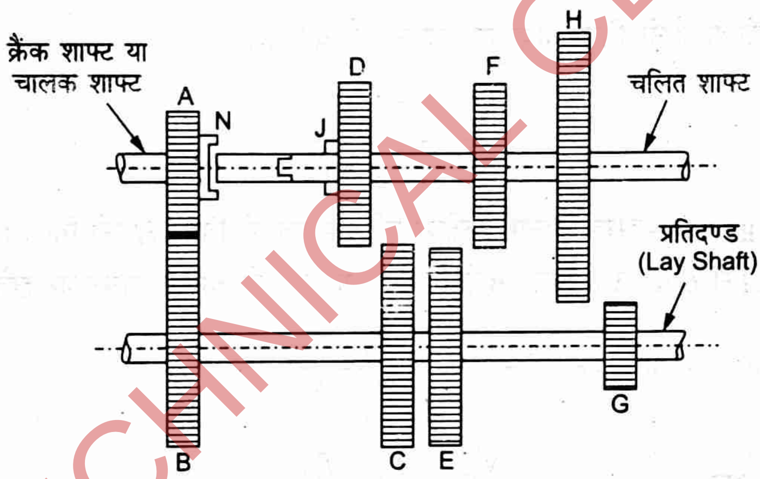
अत: $T_S + 2T_P = T_E$ या $16 + 2T_P = 64$

या $2T_P = 64 - 16$ या $2T_P = 48$

या $T_P = 24$ **उत्तर**

4.6.12 सरक गियर बॉक्स (Sliding Mesh Gear Box)

मोटर कार, स्कूटर इत्यादि में विभिन्न गतियाँ प्राप्त करने के लिये सरक गियर बॉक्स (sliding mesh gear box) का प्रयोग किया जाता है। चित्र 4.54 में एक गतियों वाला सरक गियर बाक्स प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 4.54.

इंजन की क्रैंक शाफ्ट या चालक शाफ्ट पर गियर A लगा होता है जो प्रतिदण्ड (lay shaft) पर लगे गियर B से हमेशा सम्पर्क में रहता है। इस शाफ्ट पर अन्य गियर C, E तथा G लगे होते हैं, जो चलित शाफ्ट पर लगे गियरों D, F व H से सम्बन्धित किये जा सकते हैं। गियर D के साथ भाग J जुड़ा होता है जो गियर D को बायीं ओर सरकाकर गियर A के साथ लगे क्लच के भाग N के साथ जोड़ा जा सकता है। चलित शाफ्ट की चार गतियाँ निम्न प्रकार प्राप्त की जा सकती हैं—

1. चरम गियर (Top gear)— इसमें चालक एवं चलित शाफ्टों की गति समान होती है। गियर D को बायीं ओर सरकाकर भाग J को, गियर A के साथ लगे भाग N के साथ जोड़ दिया जाता है। प्रतिदण्ड शाफ्ट अलग से घूमती रहती है। इस पर लगे गियरों का वेग अनुपात (velocity ratio) पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

2. तृतीय गियर (Third gear)—इसमें गियर D को लीवर की सहायता से दायीं ओर सरकाकर प्रतिदण्ड शाफ्ट पर लगे गियर C से सम्बद्ध कर दिया जाता है। शक्ति का संचारण क्रैंक शाफ्ट पर लगे गियर A से गियर B पर तथा B से प्रतिदण्ड (lay shaft) पर बद्ध गियर C के द्वारा चलित शाफ्ट पर लगे गियर D पर होता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

अत: वेग अनुपात (velocity ratio) $\frac{N_B}{N_A} \times \frac{N_D}{N_C} = \frac{T_A \times T_C}{T_B \times T_D}$.

$N_B = N_C$ क्योंकि एक ही शाफ्ट पर बद्ध हैं।

$$\therefore \qquad \frac{N_D}{N_A} = \frac{T_A \times T_C}{T_B \times T_D}$$

3. द्वितीय गियर (Second gear)—इसमें गियर F को लीवर की सहायता से बायीं ओर सरकाकर गियर E से सम्बद्ध कर दिया जाता है। शक्ति का संचारण गियर A से B पर तथा गियर B से E पर तथा गियर E से चलित शाफ्ट पर लगे गियर F पर होता है। इसमें चलित शाफ्ट की गति तृतीय गियर (third gear) से कम होती है, क्योंकि चलित शाफ्ट पर लगा गियर F, गियर D से बड़ा है।

अत: वेग अनुपात (velocity ratio) $\frac{N_B}{N_A} \times \frac{N_F}{N_E} = \frac{T_A \times T_E}{T_B \times T_F}$

यहाँ $N_B = N_E$ है क्योंकि दोनों गियर एक ही शाफ्ट पर बद्ध हैं।

अर्थात् $$\frac{N_F}{N_A} = \frac{T_A \times T_E}{T_B \times T_F}$$

4. प्रथम गियर (First gear)—इसके अन्तर्गत लीवर की सहायता से गियर H को गियर G से सम्बद्ध कर दिया जाता है। शक्ति का संचारण गियर A से B पर तथा गियर B से G तथा गियर G से चलित शाफ्ट पर लगे गियर H पर होता है।

अत: वेग अनुपात (velocity ratio) $\frac{N_B \times N_H}{N_A \times N_G} = \frac{T_A \times T_G}{T_B \times T_H}$

क्योंकि $N_B = N_G$ है अत: $$\frac{N_H}{N_A} = \frac{T_A \times T_G}{T_B \times T_H}$$

उपरोक्त गणना से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि चित्र 4.54 में प्रदर्शित सरक गियर बॉक्स (sliding mesh gear box) से, हम चलित शाफ्ट की चार विभिन्न गतियाँ प्राप्त कर सकते हैं।

4.6.13 विभेदी गियर विन्यास (Differential Gear Mechanism)

विभेदी गियर माला का प्रयोग कार, ट्रक, बस इत्यादि में किया जाता है। जब कोई कार या ट्रक किसी मोड़ पर चलता है, तो उस मोड़ पर आन्तरिक पहियों को कम दूरी तथा बाह्य पहियों को अधिक दूरी एक ही समय में तय करनी पड़ती है अत: पिछले पहियों की गति का अन्तर विभेदी गियरमाला (differential gear train) के द्वारा प्राप्त किया जाता है देखिये चित्र 4.55। विभेदी गियर माला को पिछले धुरे के मध्य में लगाते हैं।

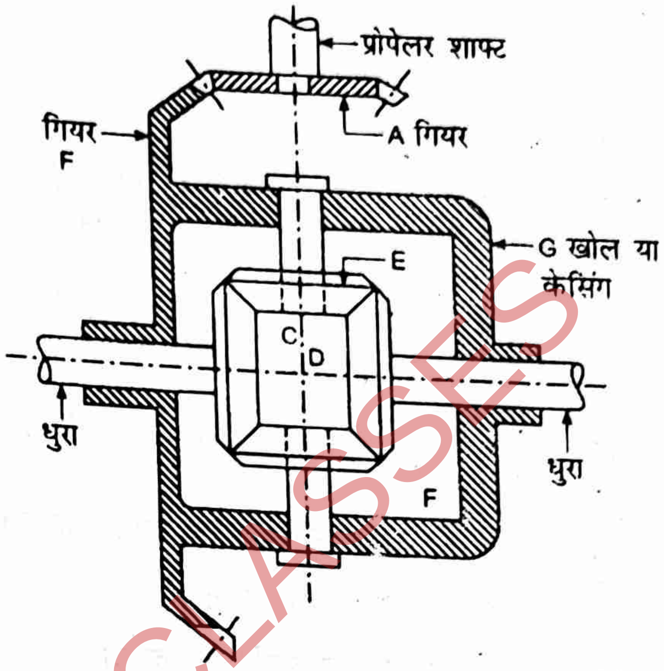
"When the automobile is taking a turn, then the outer wheel will run faster than the inner wheel because at that time the outer rear wheel has to cover more distance than the inner rear wheel. This is achieved by epicyclic gear train with bevel gears, as shown in Fig. 4.55, and known as Differential Gear Mechanism."

AKC TECHNICAL CLASSES

चित्र में इंजन की क्रैंक शाफ्ट से शक्ति का संचारण नोदक दण्ड (propeller shaft) को होता है। नोदक दण्ड के घूमने से बेवल गियर A घूमता है तथा शक्ति का संचारण गियर B पर होता है। गियर B के साथ खोल (casing) G बद्ध होती है। खोल G के साथ पिनों के द्वारा ग्रह गियर (planet gear) E व F तथा पिछले धुरे पर दो सूर्य गियर क्रमशः C तथा D लगे होते हैं।

बेवल गियर C एवं बेवल गियर B का धुरा स्वतन्त्रतापूर्वक घूम सकता है। गियरों C तथा D के वृत्तीय पिच (circular pitch) एवं पिच वृत्त व्यास (pitch circle diameter) समान होते हैं, अतः इन गियरों पर दाँतों की संख्या भी समान होती है क्योंकि गियर E व F की अक्षें गियर B की अक्ष पर घूमती हैं इसलिये गियर B, गियर E व F के लिये भुजा (R) का कार्य भी करता है।

विभिन्न गियरों की गतियाँ ज्ञात करने के लिये हम सारणी—4.9 बनायेंगे।



चित्र 4.55.

सारणी 4.9

क्र० सं०	क्रिया	गियरमाला के विभिन्न अवयवों के चक्कर			
		भुजा (R)	गियर (C)	गियर (E) या (F)	गियर (D)
1.	भुजा (R) स्थिर है तथा गियर C, +1 चक्कर से घूमता है।	0	+1	$\pm \frac{T_C}{T_E}$	$-\frac{T_E}{T_D}\left(\pm \frac{T_C}{T_E}\right) = -1$
2.	भुजा (R) स्थिर है तथा गियर C, $+x$ चक्कर से घूमता है।	0	$+x$	$\pm x \frac{T_C}{T_E}$	$-x$
3.	भुजा (R), $+y$ चक्कर से घूमती है।	$+y$	$x+y$	$y \pm x \frac{T_C}{T_E}$	$-x+y$

उपरोक्त सारणी से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि मोड़ पर गियर C से सम्बन्धित पहिया $(x+y)$ तथा गियर D से सम्बद्ध पहिया $(-x+y)$ चक्करों पर घूमते हैं।

उदाहरण 4.27—चित्र 4.56 में एक विभेदी गियर बॉक्स (differential gear box) में प्रोपेलर शाफ्ट (propeller shaft) पर लगे पिनियन P पर 20 दाँते हैं और गियर Q में 100 दाँते हैं। गियर C तथा D बायीं ओर दाहिनी ओर के धुरों से जुड़े हैं। यदि प्रोपेलर शाफ्ट 1000 rpm पर घूमती है और बायें धुरे पर लगे पहिए की गति 240 rpm हो तथा बायें धुरे की तरफ लगे गियर Q की गति 200 rpm हो, तो दाँये धुरे पर लगे पहिये की गति ज्ञात कीजिये।

AKC TECHNICAL CLASSES

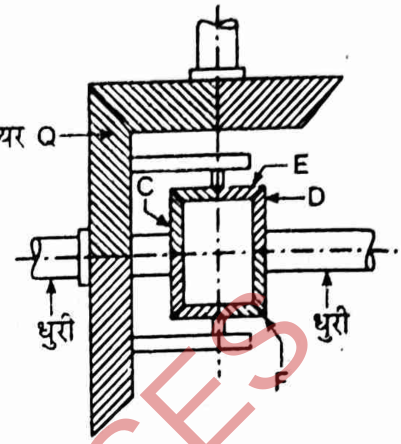
हल—दिया है,

(i) पिनियन P के rpm $(N_P) = 1000$

(ii) गियर C के rpm $(N_C) = 240$

(iii) पिनियिन P पर दाँतों की संख्या $(T_P) = 20$

(iv) गियर Q पर दाँतों की संख्या $(T_Q) = 100$



चित्र 4.56.

हम जानते हैं, कि— $$\frac{N_Q}{N_P} = \pm\frac{T_P}{T_Q}$$

अत: $$N_Q = \pm\frac{20}{100} \times 1000 = \pm 200 \text{ rpm}$$

यहाँ $\pm$ चिन्ह का प्रयोग इसलिए किया गया, क्योंकि गियर Q दूसरे समतल में है।

अब नीचे दी गई सारणी 4.10 बनाते हैं।

यहाँ गियर Q भुजा का भी कार्य कर रहा है।

अत: $$y = 200 \text{ rpm}$$

सारणी 4.10

क्र० सं०	क्रिया	गियरमाला के विभिन्न अवयवों के चक्कर			
		गियर (Q)	**गियर (C)**	**गियर (E) या (F)**	**गियर (D)**
1.	भुजा स्थिर है तथा गियर C, +1 चक्कर से घूमता है।	0	+1	$\pm\frac{T_C}{T_E}$	$-\frac{T_E}{T_D}\left(\pm\frac{T_C}{T_E}\right) = -1$
2.	भुजा सिथर है तथा गियर C, $+x$ चक्कर से घूमता है।	0	$+x$	$\pm x\frac{T_C}{T_E}$	$-x$
3.	भुजा, $+y$ चक्कर से घूमती है।	$+y$	$x+y$	$y \pm x\frac{T_C}{T_E}$	$-x+y$

सारणी 4.10 से, $$N_C = x + y$$

$$240 = x + y$$

y का मान रखने पर, $$240 = x + 200$$

$$x = 40$$

$\therefore$ $$\text{गियर } D \text{ के rpm}(N_D) = -x + y = -40 + 200$$

$$= \mathbf{160 \text{ rpm}}$$ उत्तर

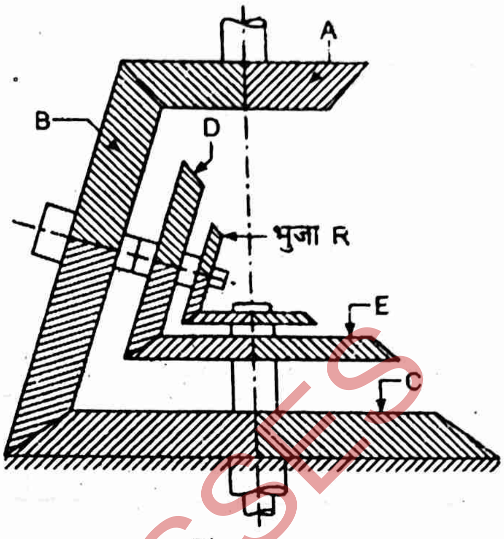
अत: **दायीं ओर के धुरे पर लगा पहिया 160 rpm पर घूमेगा।**

AKC TECHNICAL CLASSES

उदाहरण 4.28—चित्र 4.57 में एक बेवल गियर माला (bevel gear train) प्रदर्शित की गई है। गियर A चालक तथा गियर E चलित गियर है। गियर A के rpm 1500 दक्षिणावर्त (clockwise) हैं, तो गियर E के rpm ज्ञात कीजिये।

$T_A = 20, T_B = 50,$ तथा $T_C = 78,$ $T_D = 24,$ $T_E = 30$ है।

गियर माला का गति अनुपात भी ज्ञात कीजिये।



चित्र 4.57.

हल—चित्र 4.57 का अवलोकन कीजिये।

दिया है,

(i) गियर A के rpm $(N_A) = 1500$ दक्षिणावर्त

(ii) गियर C स्थिर है।

(iii) गियर E के rpm $(N_E) = ?$

$$x + y = 1500 \quad \ldots(i)$$

$$y - x\frac{T_A}{T_C} = 0$$

$$y - x\frac{20}{78} = 0$$

$$78y - 20x = 0 \quad \ldots(ii)$$

समी० (i) को 20 से गुणा करके जोड़ने पर,

$$78y - 20x = 0$$

$$20x + 20y = 30000$$

$$98y = 30000$$

$$y = \frac{30000}{98} = 306.12 \text{ rpm}$$

y का मान समी० (i) में रखने पर

$$x = 1500 - 306.12 = 1193.88$$

अतः गियर E के rpm

$$N_E = y - x\frac{T_A}{T_B} \times \frac{T_D}{T_E} = 306.12 - 1193.88 \times \frac{20}{50} \times \frac{24}{30}$$

$$= 306.12 - 382.04 = -\mathbf{75.92 \text{ rpm}}$$ **उत्तर**

ऋणात्मक चिन्ह यह दर्शाता है, कि गियर E के घूमने की दिशा A के विपरीत होगी।

AKC TECHNICAL CLASSES

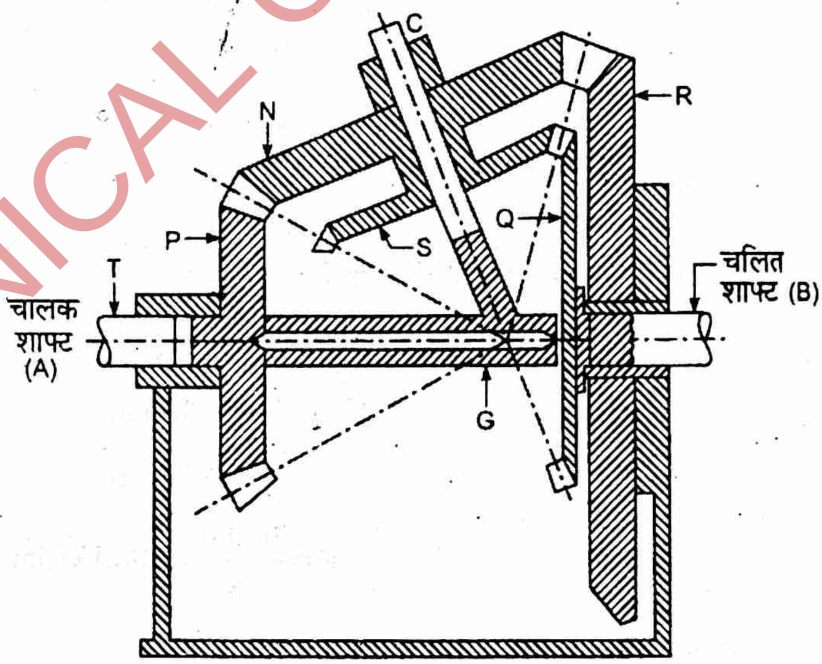
सारणी 4.11

क्र० सं०	क्रिया	गियरमाला के विभिन्न अवयवों के प्रकार					
		भुजा (R)	गियर (A)	गियर (B)	गियर (C)	गियर (D)	गियर (E)
1.	भुजा (R) स्थिर है तथा गियर $A, +1$ चक्कर से घूमता है	0	+1	$\pm\frac{T_A}{T_B}$	$-\frac{T_A}{T_C}$	$\pm\frac{T_A}{T_B}$	$-\frac{T_A}{T_B}\times\frac{T_D}{T_E}$
2.	भुजा (R) स्थिर है तथा गियर $A, +x$ चक्कर से घूमता है	0	$+x$	$-x\frac{T_A}{T_B}$	$-x\frac{T_A}{T_C}$	$\pm x\frac{T_A}{T_B}$	$-x\frac{T_A}{T_B}\times\frac{T_D}{T_E}$
3.	भुजा (R) $+y$ चक्कर से घूमती है।	$+y$	$x+y$	$y\pm x\frac{T_A}{T_B}$	$y-x\frac{T_A}{T_C}$	$y\pm x\frac{T_A}{T_B}$	$y-x\frac{T_A}{T_B}\times\frac{T_D}{T_E}$

4.6.14 हम्पेज गति रिडक्शन गियर माला (Humpage's Speed Reduction Gear Train)

इसका प्रयोग ऐसी स्थितियों में किया जाता है, जहाँ चलित शाफ्ट की गति को अत्यधिक कम किया जाना हो। वर्कशॉप में प्रयोग की जाने वाली विभिन्न मशीनों व विद्युत मशीनों में इसका प्रयोग बहुतायत से किया जाता है। (देखे चित्र 4.58)

इस गियर बॉक्स में कम गियरों का प्रयोग करके गति को अत्यधिक कम किया जा सकता है। चालक शाफ्ट A व चलित शाफ्ट B एक ही अक्ष (coaxial) पर लगी होती है। चालक शाफ्ट पर बेवल गियर 'P' तथा चलित शाफ्ट पर बेवल गियर 'Q' लगा होता है। बेवल गियर A, बेवल गियर N से व बेवल गियर N एक स्थिर बेवल गियर R से सम्पर्क करता है। बेवल गियर Q, बेवल गियर S से जो गियर N के साथ संयुक्त गियर (compound gear) है, से सम्पर्क करता है। संयुक्त गियर (NS) एक भुजा या स्पिण्डल C पर लगे होते हैं, जिसका सम्बन्ध खोखली स्लीव G से होता है। स्लीव, चालक एवं चलित शाफ्ट की अक्ष पर स्वतन्त्रता पूर्वक घूम सकती है।



चित्र 4.58. हम्पेज गति रिडक्शन गियर माला

चलित शाफ्ट की गति को ज्ञात करने के लिये उपरोक्त सारणी 4.11 का प्रयोग करते हैं—

सारणी से,
$$N_C = y \quad \text{...(i)}$$
$$N_A = x + y \quad \text{...(ii)}$$
$$N_Q = -x\frac{T_A}{T_Q} + y \quad \text{...(iii)}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$$N_R = -x\frac{T_A}{T_R} + y \quad ...(iv)$$

उपरोक्त सारणी को प्रयोग करके शाफ्ट B की गति ज्ञात की जा सकती है।

4.6.15 यांत्रिक चालन का चयन (Selection of a Mechanical Drives)

यांत्रिक चालन के अभिकल्पन में निम्न आकड़ें उपलब्ध होने चाहिए—

(i) चालन शाफ्ट से संचारित की जाने वाली शक्ति (Power),

(ii) चालक एवं चलित शाफ्टों की कोणीय गतियाँ,

(iii) शाफ्टों के मध्य दूरियाँ तथा उनकी परस्पर स्थितियाँ, तथा

(iv) सकल विमाएँ (Overall dimensions)

उपरोक्त परिस्थितियों के लिए विभिन्न प्रकार के चालन अभिकल्पित किये जा सकते हैं। सर्वाधिक लाभदायक चालन के चयन के लिए निम्न प्रचालों (Parameters) की तुलना की जानी चाहिए—

(i) दक्षता (Efficiency)

(ii) भार (Weight)

(iii) साइज (Size)

(iv) कैपिटल लागत (Capital cost)

(v) क्रियाकारी तथा अनुरक्षण लागत (Operational and Maintenance cost)

उचित चालन के चयन में निम्न कारक भी महत्वपूर्ण होते हैं—

(i) वेगानुपात (Velocity ratio)—वाँछित वेगानुपात को चालन की एक या अधिक अवस्था में प्राप्त किया जा सकता है। दाँतेदार गियरिंग से एक अवस्था में उच्चतम वेगानुपात प्राप्त किया जा सकता है। वर्म गियर से वेगानुपात का उच्चतम मान, सामान्यतया 100 तक, प्राप्त किया जा सकता है। उच्च वेगानुपात प्राप्त करने के लिए प्राय: बहु अवस्था (multistage) चालन प्रयोग करना श्रेयकर रहता है।

(ii) परिधीय वेग (Peripheral velocity)—यदि उच्च कारकों को समान रखा जाये तो पारेषित शक्ति सीधे ही परिधीय वेग के समानुपाती होती है अत: परिधीय वेग को बढ़ाकर चालन के साइज को कम किया जा सकता है लेकिन परिधीय वेग को भी एक सीमा तक बढ़ाया जा सकता है। अधिकतम अनुमेय परिधीय वेग, विभिन्न चालनों के लिए अग्र प्रकार माना जा सकता है--

(a) चपटा पट्टा $V_{max} \leq 25$ m/sec

(b) मानक V पट्टा $V_{max} \approx 25$ to 30 m/sec

(c) इस्पात बैन्ड ड्राइव $V_{max} \approx 80$ m/sec

(d) चेन चालन $V_{max} = 25\text{-}30$ m/sec

(e) स्पर गियर $v > 10$ m/sec, बेवल गियर $v > 15$ m/sec, वर्म गियर $V_{max} \leq 20$ m/sec

(iii) पारेषित शक्ति (Transmitted power)—दाँतेदार गियरों से अधिकतम पारेषित की जा सकती है। V-बेल्ट तथा चेन चालन में साइज़ तथा उनका नम्बर बढ़ाकर अधिक शक्ति पारेषित की जा सकती है।

V-बेल्ट के लिए अधिकतम 735 से 1100 kW

चपटी-बेल्ट के लिए अधिकतम 1835 kW

चेन चालन के लिए अधिकतम 3670 kW

AKC TECHNICAL CLASSES

घर्षण चालन के अधिकतम सीमा 150 से 225 kW

(iv) पारेषण में हानियाँ (Transmission losses)—चालन में दो प्रकार की हानियाँ हो सकती हैं एक जो भार पर निर्भर नहीं करती तथा दूसरा जो भार पर निर्भर करती हैं। हानियाँ घुमाँऊ गति, अंगों के भार, बेयरिंगों प्रमुख तथा दाँतों में घर्षण आदि पर निर्भर करती है तुलना के लिए पारेषण में प्रमुख हानियाँ निम्न हैं—दाँतेदार गियर 1%, चेन चालन-2%, चपट्टा पट्टा चालन-2.5%, *V*-बेल्ट ड्राइव-4%, वर्म गियर-10 से 25%।

(v) भार, साइज तथा चालन की लागत (Weight, size and Cost of drives)—यह कारक भी बहुत महत्वपूर्ण है। याँत्रिक चालन में शाफ्टों के केन्द्रों के मध्य दूरी तथा पुली की चौड़ाई पर चालन का साइज निर्भर करता है। दी गई शक्ति एवं वेगानुपात केन्द्रों की बीच के दूरियों के लिए कम होते हुए क्रम में विभिन्न चालन निम्न प्रकार होते हैं—

(a) चपटी बेल्ट (b) *V*-बेल्ट (c) चेन चालन (d) दाँतेदार गियर, तथा (e) वर्म गियर

पुली या गियर की चौड़ाई के लिए, फेस चौड़ाई के कम होते क्रम में विभिन्न चालन निम्न प्रकार होते हैं—

(a) चेन (b) चपटी बेल्ट (c) दाँतेदार गियर तथा (d) वर्म गियर

लागत के सम्बन्ध में यदि *V*-बेल्ट चालन की लागत को एकांक (unit) माना जाये तो अन्य चालनों की तुलनात्मक लागत निम्न प्रकार होगी—

(i) चपटी बेल्ट (flat belt) ≈ 1.06, (ii) निष्क्रिय पुली के साथ चपटी बेल्ट = 1.25, (iii) वर्म गियर = 1.25, (iv) चेन चालन = 1.4 तथा (v) दाँतेदार गियर = 1.65।

प्रश्नावली

1. शक्ति संचारण (power transmission) से आप क्या समझते हैं?
2. शक्ति पारेषण के लिये विभिन्न चालन विधियों के नाम बताइये।
3. पट्टा चालन में फिसलन (slip) से क्या तात्पर्य है? इसे न्यूनतम कैसे किया जाता है?
4. खुला पट्टा चालन एवं उभयमुखी पट्टा चालन का वर्णन कीजिये।
5. चपटे पट्टे की अपेक्षा V-पट्टे के लाभ बताइये।
6. वेग अनुपात (velocity ratio) से आप क्या समझते हैं तथा पट्टे की मोटाई का इस पर प्रभाव बताइये।
7. फिसलन (slip) एवं सरकन (creep) को परिभाषित कीजिये तथा यह समझाइये कि ये किस प्रकार वेग अनुपात को प्रभावित करते हैं?
8. पट्टा चालन में फिसलन से क्या तात्पर्य है? इसे कैसे कम किया जा सकता है?
9. पट्टों में "आरम्भिक तनाव" (initial tensions) से आप क्या समझते हैं? व्याख्या कीजिये।
10. खुले पट्टे चालन (open belt drive) में पट्टे की आवश्यक लम्बाई के लिये व्यंजक प्राप्त कीजिये।
11. उभयमुखी पट्टा चालन (cross belt drive) में पट्टे की आवश्यक लम्बाई के लिये व्यंजक प्राप्त कीजिये।
12. किसी पट्टे के खिंचे पक्ष (tight-side) में तनाव ढीले पक्ष (slack side) में तनाव से क्यों अधिक होता है? किन परिस्थितियों में दोनों तनावों का मान बराबर होता है। इन तनावों में क्या अनुपात है?
13. पट्टे का प्रारम्भिक तनाव (initial tension) का क्या अर्थ है?
14. पट्टा चालन में पुली के दोनों ओर के तनावों का अनुपात, सिद्ध कीजिये कि $\left(\frac{T_1}{T_2} = e^{\mu\theta}\right)$ है। जिसमें T_1 = खिंचाव की तरफ का तनाव, T_2 = ढीली तरफ का तनाव, μ = घर्षण गुणांक तथा θ = छादन का कोण (angle of lap) है।
15. अपकेन्द्रीय तनाव (Centrifugal Tension) का क्या तात्पर्य है?

AKC TECHNICAL CLASSES

16. (a) पट्टा चालन में अपकेन्द्रीय तनाव के निम्नलिखित सूत्र को व्युत्पन्न कीजिये—

$$T_C = mv^2$$

(b) पारेषित शक्ति पर, अपकेन्द्रीय तनाव के प्रभावों को समझाइये।

(c) पट्टे द्वारा पारेषित अधिकतम शक्ति के लिये प्रतिबन्धों को लिखिये।

17. V-पट्टा चालन एवं रस्सा चालन में तनावों के अनुपात का व्यंजक लिखिए तथा प्रयुक्त पद समझाइये।

18. चेन चालन के प्रमुख अवयव लिखिये।

19. चेन चालन के लाभ बताइये।

20. पट्टे में अभिकेन्द्रीय तनाव से क्या तात्पर्य है? पारेषित शक्ति पर इसका क्या प्रभाव पड़ता है?

21. सिद्ध कीजिये कि पट्टे से अधिकतम शक्ति पारेषित करने के लिये, पट्टे में अभिकेन्द्रीय तनाव, पट्टे के अधिकतम अनुज्ञेय तनाव के एक तिहाई के बराबर होता है।

22. चपटे पट्टे के सापेक्ष V पट्टे के लाभ बताइये। V पट्टे की काट, उसकी विभिन्न पर्तों (layers) को दर्शाते हुए खींचिये।

23. गियर चालन से आप क्या समझते हैं? गियर चालन के अन्य चालनों की तुलना में लाभ बताइये।

24. गियर के सन्दर्भ में निम्न की परिभाषा दीजिये—

पिच बिन्दु (pitch point), पिच वृत्त (pitch circle), पिच वृत्त व्यास (pitch circle diameter), फेस (face), फ्लैंक (flank), एडेण्डम (adendum), डिडेण्डम (dedendum), अन्तराल (clearance)।

25. गियर्स की इनवोल्यूट प्रोफाइल (involute profile) पर टिप्पणी कीजिए। **(UP 2016, 18)**

26. हैलिकल गियर्स (Helical gears) पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिये। **(UP 2016, 17, 18)**

27. गियर माला के गति अनुपात (velocity ratio) को परिभाषित कीजिये।

28. गियर के मूल सिद्धान्त (Law of Gearing) को समझाइये तथा सिद्ध कीजिए। **(UP 2013, 16, 18)**

29. विभिन्न प्रकार के गियरों का संक्षिप्त वर्णन कीजिये।

30. निम्न पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिये—

(i) स्पाइरल गियर (spiral gear) (ii) वर्म गियर (worm gear)

(iii) बेवल गियर (bevel gear) (iv) रैंक एवं पिनियन (rack & pinion)।

31. निम्न प्रकार की गियरमालाओं के मुख्य बिन्दु (main characteristics) को बताइये।

(i) साधारण गियरमाला (simple gear train) (ii) संयुक्त गियरमाला (compound gear train)

(iii) प्रत्यावर्ती गियरमाला (reverted gear train) (iv) अधिचक्रीय गियरमाला (epicyclic gear train)

32. साधारण, संयुक्त एवं अधिचक्रीय गियरमालाओं में अन्तर स्पष्ट कीजिये। **(UP 2013)**

33. रेखाचित्र देते हुए एक संयोजी गियर ट्रेन तथा अधिचक्रीय गियर ट्रेन में अन्तर स्पष्ट कीजिये। **(UP 2012)**

34. अधिचक्रीय (epicyclic) व प्रत्यावर्ती (reverted) गियर माला क्या है? समझाइये। स्पर-गियर (spur gears) चलित दो समानान्तर शाफ्ट के बीच की शुद्ध दूरी का निरूपण कीजिये।

35. स्वच्छ चित्र द्वारा सूर्य तथा ग्रह व्हील (sun and planet wheel) को समझाइये।

36. विभिन्न प्रकार की गियरमालाओं का वर्णन कीजिये। स्वच्छ चित्र की सहायता से कंपाउंड गियर ट्रेन की उपयोगिता की व्याख्या कीजिए। **(UP 2018)**

37. स्वच्छ चित्र की सहायता से एक डिफ्रेन्शियल गियर (differential gear) की कार्य विधि समझाइये। **(UP 2013, 17)**

38. ऑटोमोबाइल विभेदी गियरमाला (differential gear train) में सिद्ध कीजिये कि प्रोपेलर शाफ्ट के rpm पिछले दोनों पहियों के rpm का गणितीय माध्य होते हैं।

39. बेवेल गियरों के पिच कोणों को ऑकलन करने के लिए सम्बन्धों को मालूम कीजिए। **(UP 2014)**

AKC TECHNICAL CLASSES

40. एक हम्पेज गियर (humpage gear) की कार्य-विधि रेखाचित्र देते हुए समझाइये।

41. अधिचक्रीय तथा प्रत्यावर्तीय गियर मालाओं के कार्यो का वर्णन कीजिये। दो समानान्तर स्पर गियर्स द्वारा चलायमान शाफ्टों के मध्य शुद्ध दूरी के लिए सूत्र व्युत्पन्न कीजिये।

42. यदि 0.8 m व्यास की पुली 300 rpm पर घूमती है तथा पट्टे द्वारा दूसरी पुली को 240 rpm पर चलाती है तो चलित पुली का व्यास ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—1 m]

43. यदि प्रश्न 42 में पुलियों तथा पट्टे में कुल फिसलन 3% हो, तो 240 rpm पर ही पुली को घुमाने के लिये इसका व्यास ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—0.97 m]

44. यदि किसी पट्टा चालन में पुलियों का व्यास 0.60 m एवं 0.40 m है और उनके केन्द्रों के बीच की दूरी 3 m, हो तो खुला पट्टा चालन (open belt drive) एवं उभयमुखी पट्टा चालन (cross belt drive) में पट्टे की आवश्यक लम्बाइयाँ ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—7.57 m, 7.65 m]

45. एक पट्टे द्वारा पारेषित शक्ति ज्ञात कीजिये यदि पुली का व्यास 0.60 m एवं rpm 200 है। पुली एवं पट्टे के मध्य घर्षण गुणांक 0.25 व छादन कोण (angle of lap) 160° है। पट्टे में अधिकतम तनाव 2500 N है।

[उत्तर—7.88 kW]

46. एक घिरनी जो 40 m/s की गति से घूम रही है, 55 kW संचारित करती है। पट्टे में अधिकतम तनाव प्रति मिमी० पट्टे की चौड़ाई के लिये 40 N है। अगर छादन कोण (angle of lap) 160° तथा घर्षण गुणांक 0.25 है तो पट्टे की चौड़ाई ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—68.43 mm]

47. एक खुला पट्टा चालन में एक 0.30 m व्यास तथा 200 rpm पर घूमने वाली घिरनी से 0.50 m व्यास की घिरनी पर शक्ति पारेषित होती है। छोटी घिरनी पर छादन कोण 160° है। जब 3.5 kW शक्ति पारेषित की जाती है तो पट्टा फिसलने ही वाला होता है। $\mu = 0.25$ मानिये। यदि खिंचाव 25 N/mm पट्टे की चौड़ाई से अधिक न हो, तो पट्टे में प्रारम्भिक तनाव तथा पट्टे की चौड़ाई ज्ञात कीजिये। अपकेन्द्री तनाव नगण्य मानिये।

[उत्तर— 1661.81 N, 88.76 mm]

48. एक शक्ति पारेषित करने वाले पट्टे की कसी व ढीली ओर के तनावों में अनुपात 2.5 है। पट्टा 20 mm चौड़ा एवं 10 mm मोटा है। पट्टे में अधिकतम प्रतिबल 5 N/mm^2 तक सीमित है। पट्टा दो घिरनियों को जोडता है, जिनमें चालक एव चलित घिरनियों का व्यास क्रमशः 0.60 m एवं 0.45 m है। चालक घिरनी 120 rpm पर घूमती है। ज्ञात कीजिये—

(i) पट्टे द्वारा पारेषित शक्ति। (ii) चलित घिरनी के घूमने की गति।

[उत्तर—2.26 kW, 160 rpm]

49. 3.5 मीटर दूरी पर स्थित दो शाफ्ट के मध्य 0.60 m तथा 0.30 m व्यास की दो पुलियों से तिर्यक (crossed) पट्टे चालन द्वारा 8 kW शक्ति पारेषित की जाती है। चालक घिरनी की गति 220 rpm है। पट्टा जो 5 मिमी मोटा है, पर पट्टे की प्रति मिमी चौड़ाई पर अनुज्ञेय भार 2.5 N है। छोटी पुली की सतह तथा पट्टे के बीच घर्षण गुणांक 0.35 है। पट्टे की चौड़ाई, पट्टे की आवश्यक लम्बाई तथा पट्टे मे आवश्यक प्रारम्भिक तनाव ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—136.923 mm, 8.47 m, 1122.495 N]

50. किसी पट्टे मे अपकेन्द्रीय तनाव ज्ञात कीजिये, जोकि दो पुलियों पर 1800 m/min के वेग से चल रहा है। पट्टे की चौड़ाई 120 mm तथा मोटाई 6 mm है। पट्टे का द्रव्यमान 1000 kg/m^3 है। यदि छादन कोण = 180°, घर्षण गुणांक $(\mu) = 0.3$ तथा पट्टे में अधिकतम प्रतिबल 2.8 N/mm^2 हो, तो पट्टे द्वारा पारेषित शक्ति ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—648 N, 34.53 kW]

AKC TECHNICAL CLASSES

51. एक विद्युत मोटर से एक्जास्ट पंखे को चलाने के लिए एक चमड़े के पट्टे का प्रयोग करना है, जिसके लिए निम्न आँकड़े दिये गये हैं—

		मोटर घिरनी	पंखा घिरनी
(i)	व्यास	0.45 m	1.8 m
(ii)	छादन कोण	2.6 रेडियन	3.8 रेडियन
(iii)	घर्षण गुणांक	0.31	0.26
(iv)	चाल	750 rpm	
(v)	पारेषित शक्ति	39 kW	

पट्टे की मोटाई 6 mm है एवं अनुमेय प्रतिबल 2.3 N/mm^2 है। पट्टे की चौड़ाई ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—222.43 mm]

52. एक पट्टा 200 m/min की गति से 5 kW शक्ति पारेषित कर रहा है। छादन कोण (angle of lap) 160° हो और घर्षण गुणांक (coefficient of friction) 0.3 हो, तो कसे भाग में तनाव ज्ञात कीजिये। यदि पट्टे में अनुमेय खिंचाव (permissible pull) 15 N/mm चौड़ाई हो, तो पट्टे की चौड़ाई ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—2644.95 N, 176.33 mm]

53. यदि 5 मिमी मोटे चमड़े के लिये यह नियम लागू हो कि प्रभावकारी तनाव (effective tension) 10 N/mm पट्टे की चौड़ाई से अधिक नहीं होना चाहिये, तो पट्टे में अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये। यदि छादन कोण $(\theta) = 160°$, घर्षण गुणांक $(\mu) = 0.3$, पट्टे का वेग $(v) = 1000$ m/min तथा पट्टे का घनत्व $(\rho) = 1100$ kg/m^3 है।

[उत्तर—3.83 N/mm^2]

54. एक V-पट्टे का अनुप्रस्थ काट (cross-section) 600 mm^2, छादन कोण 180° है। घिरनी के खाँचे (angle of groove) का मान 45° है तथा पट्टे के पदार्थ का घनत्व 1 Mg/m^3 है। पट्टे में अधिकतम प्रतिबल 4 MPa है तथा पट्टे के लिये घर्षण गुणांक $(\mu) = 0.2$ है। यदि पट्टे की गति 25 m/s हो, तो पारेषित शक्ति ज्ञात कीजिये। अधिकतम पारेषित शक्ति के लिये पट्टे का वेग भी निकालिये।

[उत्तर—40.814 kW, 36.51 m/s]

55. एक रस्सा चालन के द्वारा, एक मीटर व्यास की पुली से 650 kW पारेषित करनी है। पुली 360 च० प्र० मि० पर घूम रही है। यदि रस्से में अधिकतम तनाव 1350 N, प्रति मीटर रस्से की लम्बाई का द्रव्यमान $(m) = 0.9$ kg, छादन कोण $(\theta) = 150°$, खाँचे का कोण $(2\alpha) = 45°$ व रस्से व पुली की सतह के बीच घर्षण गुणांक $(\mu) = 0.3$ हो, तो अपकेन्द्रीय तनाव को गणना में लेते हुए रस्सों की आवश्यक संख्या ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—39 रस्से]

56. एक पट्टा चालन में दो V-पट्टे समान्तर में दो खाँचों में समान आकार की दो पुलियों पर शक्ति संचारण कर रहे हैं। प्रत्येक खाँचे का कोण 30° है। प्रत्येक पट्टे की अनुप्रस्थ काट 750 mm^2 है तथा घर्षण गुणांक $(\mu) = 0.12$ है। पट्टे के पदार्थ का घनत्व 1.2 Mg/m^3 तथा अधिकतम प्रतिबल 7 MN/m^2 है। पुली का व्यास 300 mm है तथा यह 1500 चक्कर प्रति मि० पर घूम रही है। पारेषित शक्ति निकालिये। शाफ्ट की उस गति को भी निकालिये जिस पर पारेषित शक्ति अधिकतम होगी।

[उत्तर—172 kW, 2808.65 rpm]

57. 9.5 mm मोटाई वाले चमड़े के पट्टे की चौड़ाई ज्ञात करिये, जो 750 rpm की गति से घूम रही मोटर पुली द्वारा 15 kW पारेषित करता हो। मोटर की चालक पुली का व्यास 0.30 m है। चलित (driven) पुली 250 rpm की गति से घूमती है तथा दोनों पुलियों के केन्द्र के बीच की दूरी 3 m है। पट्टे में झुकाव नगण्य मानिये तथा उसमें फिसलन नहीं है। पट्टे के पदार्थ का घनत्व 1 Mg/m^3 है, चमड़े में अधिकतम अनुमेय तनाव प्रतिबल 2.05 MPa एवं पट्टे तथा पुली के बीच घर्षण गुणांक 0.3 है, खुला पट्टा चालन मानिये। वेग ज्ञात करते समय पट्टे की मोटाई उपेक्षणीय मान लें।

[उत्तर—112.28 mm]

AKG TECHNICAL CLASSES

58. 1 m व्यास की पुली पर चपटा पट्टा 240 rpm पर 10 kW शक्ति प्रेषित करता है। लैप कोण 160° एवं घर्षण गुणांक 0.25 लेते हुए पट्टे की आवश्यक चौड़ाई ज्ञात कीजिए, यदि खिंचाव 20 N/mm पट्टे की चौड़ाई से अधिक न हो।

[उत्तर—79.25 mm]

59. किसी गियर पर 64 दाँते हैं और माड्यूल (module) 8 mm है तो वृत्तीय पिच (circular pitch) एवं व्यासीय पिच ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—25.12 mm, 0.125 दाँता/मिमी०]

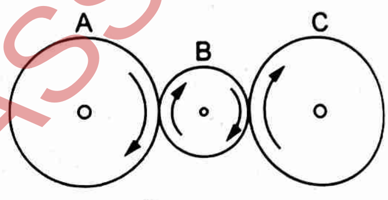
60. दो समानान्तर शाफ्ट के अक्षों की दूरी लगभग 600 mm है तथा वे स्पर गियरों द्वारा सम्पर्क में हैं जिनका वृत्तीय पिच 35 mm है। एक शाफ्ट की गति 180 rpm जो दूसरे शाफ्ट को 540 rpm पर चलाता है। प्रत्येक गियर में दाँतों की संख्या तथा शाफ्टों के केन्द्रों के बीच की सही दूरी 0.001 mm के निकटतम तक ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—81 व 27, 601.91 mm]

61. चित्र 4.59 में प्रदर्शित सरल गियर माला में दाँतों की संख्या निम्नवत् है—

$$T_A = 100,\ T_B = 50,\ T_C = 75$$

यदि चालक गियर A, 400 rpm पर शक्ति का संचारण करें तो गियर C के rpm ज्ञात कीजिये।



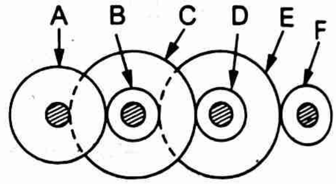
चित्र 4.59.

[उत्तर—533.3 rpm]

62. चित्र 4.60 में, प्रदर्शित संयुक्त गियर माला (compound gear train) में दाँतों की संख्या निम्नलिखित है—

$$T_A = 65,\ T_B = 40,\ T_C = 80,\ T_D = 50,\ T_E = 75,\ T_F = 30$$

यदि चालक गियर A, 400 rpm पर घूमता है तो चलित गियर F के rpm ज्ञात कीजिये।



चित्र 4.60.

[उत्तर—2600 rpm]

63. एक सूर्य एवं ग्रह प्रकार (sun and planet type) की अधिचक्रीय गियर ट्रेन में सूर्य गियर एवं वलयाकार गियर में दाँतों की संख्या क्रमश: T_1 तथा T_2 हो, तो सिद्ध कीजिये कि—

$$\frac{\text{सूर्य गियर की गति}}{\text{भुजा की गति}} = \frac{(T_1 + T_2)}{T_1}$$

यदि किसी भी गियर में दाँतों की न्यूनतम संख्या 15 तथा $(T_1 + T_2) = 114$ हो, तो भुजा की अधिकतम एवं न्यूनतम गतियाँ ज्ञात कीजिये जबकि सूर्य गियर 1000 rpm पर घूमता है तथा वलायाकार गियर स्थिर है।

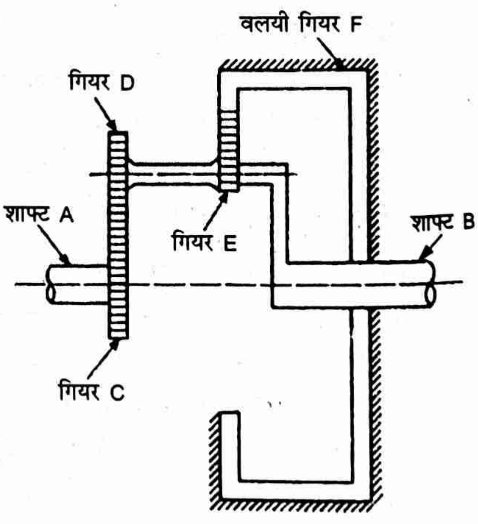
[उत्तर—131.57 rpm व 368.42 rpm]

64. एक अधिचक्रीय गियर माला (epicyclic gear train) में पिनियन C, शाफ्ट A पर कसी हुई है। गियर D तथा E यौगिक हैं तथा क्रैंक भुजा पर लगे हुए हैं। भुजा शाफ्ट B को चलाती है। गियर E एक स्थिर आन्तरिक गियर F से मिलकर चलता है। विभिन्न गियरों में दाँते निम्नलिखित हैं—

$$T_C = 21,\ T_D = 28,\ T_E = 14,\ T_F = 84$$

यदि शाफ्ट A दक्षिणावर्त दिशा (clockwise direction) में 100 rpm से घूमता है तो शाफ्ट B के rpm तथा उनकी दिशा बताइये। (देखे चित्र 4.61)

[उत्तर—11.1 rpm दक्षिणावर्त]



चित्र 4.61.

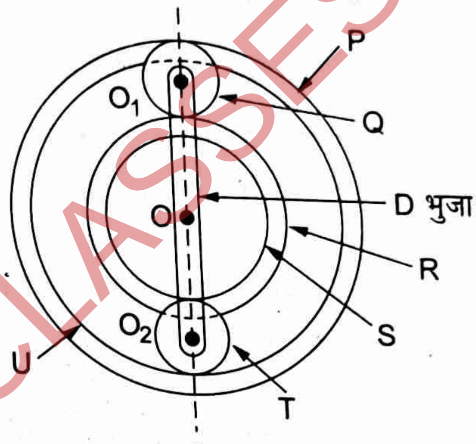
AKC TECHNICAL CLASSES

65. एक सूर्य और ग्रह गियर की अधिचक्रीय गियरमाला में, वलयाकार (annular) गियर बद्ध हैं। यदि भुजा 750 चक्कर प्रति मिनट पर घूमती हो तथा सूर्य एवं वलयाकार गियर के दाँते क्रमशः 25 व 100 हो, तो सूर्य गियर किस गति से चक्कर लगायेगा। यदि वलयाकार के स्थान पर सूर्य गियर को स्थिर कर दिया जाए, तो वलयाकार गियर की गति क्या होगी?
[उत्तर—3750.5 rpm, 937.48 rpm]

66. एक अधिचक्रीय गियरमाला चित्र 4.62 में प्रदर्शित की गई है। गियर P, गियर U तथा संयुक्त गियर R व S संकेन्द्रित हैं। भुजा D पर लगे पिनों Q_1 व Q_2 पर क्रमशः गियर Q व T घूमते हैं। सभी पहियों की वृत्तीय पिच समान हैं। गियर Q व T में से प्रत्येक पर 18 दाँते तथा गियर R व S पर क्रमशः 28 व 26 दाँते हैं।

यदि भुजा D, 150 rpm पर दक्षिणावर्त दिशा (clockwise direction) में घूमें तो गियर U के rpm ज्ञात कीजिये। यदि (i) गियर P स्थिर है। (ii) गियर P वामावर्ती दिशा (anticlockwise direction) में 15 rpm की गति से घूमे।

[उत्तर—6.22 rpm, −8.16 rpm]



चित्र 4.62.

67. सूर्य तथा ग्रह (sun and planet) प्रारूपी एक अधिचक्रीय गियर माला में, वलयाकार गियर (annular gear) पर दाँतों की संख्या 130 तथा ग्रह गियर पर 25 है, यदि भुजा (arm) वामावर्त दिशा में 240 rpm पर घूमती है तथा जब वलयाकार गियर स्थिर है, तो सूर्य तथा ग्रह गियरों की गति तथा दिशा ज्ञात कीजिये।

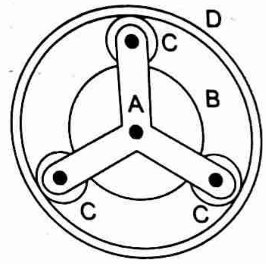
[उत्तर—630 rpm (वामावर्त), 1008 rpm (दक्षिणावर्त)]

68. दो शाफ्ट जिनकी बीच की दूरी लगभग 410 mm है, को स्पर गियरों से जोड़ा गया है। दाँतों का माड्यूल 6 mm है तथा एक गियर, दूसरे गियर से 3 गुनी गति से घूमता है। ये मानते हुए कि उपलब्ध गियरों में दाँतों की संख्या 5 के गुणांक में है तथा सबसे छोटे गियर में दाँतों की संख्या 20 से कम नहीं है। दोनों गियरों के दाँतों की संख्या तथा वास्तविक दूरी ज्ञात कीजिए।

[उत्तर—35 तथा 105, वास्तविक दूरी 420 mm]

69. चित्र 4.63 में प्रदर्शित एक सूर्य तथा ग्रह गियर में आंतरिक दाँतेदार रिंग का पिच वृत्त व्यास 224 mm है तथा मोड्यूल 4 mm है। जब रिंग D स्थिर है, तब स्पाइडर A, जो समान साइज के तीन ग्रह गियरों C को धारण किये हुए हैं, उसी दिशा में एक चक्र घूमता है जबकि सूर्य गियर B को धारण करने वाला चालक स्पिंडल 5 चक्र घूमता है। सभी गियरों पर दाँतों की उचित संख्या ज्ञात करो।

[उत्तर—$T_D = 56$, $T_B = 14$, $T_C = 21$]



चित्र 4.63.

AKC TECHNICAL CLASSES

अध्याय 5

गतिपाल पहिया
(Flywheel)

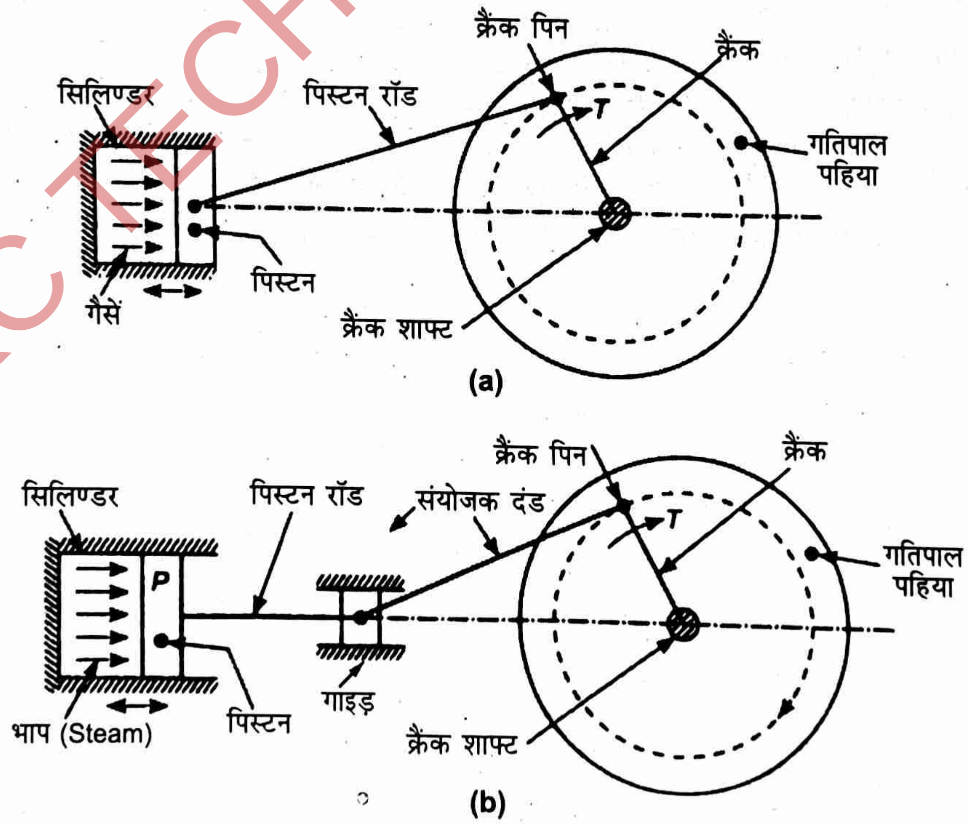
§ 5.1 परिचय (Introduction) :

गतिपाल पहिये का सिद्धान्त एवं अनुप्रयोग (Principle and Applications of Flywheel)

वर्तमान युग में हम अभियांत्रिकी क्षेत्र में विभिन्न प्रकार की युक्तियों, मशीनों व इंजनों का प्रयोग करते हैं। कार्यशाला (workshop) में शक्ति को प्राप्त करने के लिये तथा ऑटोमोबाइल्स जैसे ट्रक, कार, स्कूटर इत्यादि में अन्तर्दहन इंजनों (I.C. engines) का प्रयोग करते हैं। इन इंजनों के प्रति चक्र (cycle) में चार क्रियायें क्रमशः चूषण (suction), सम्पीडन (compression), विस्तार (expansion) एवं निर्वात (exhaust) होती हैं। कुछ प्रकार के इंजनों में ये क्रियायें चार स्ट्रोक में तथा अन्य प्रकार के इंजनों में दो स्ट्रोक में पूर्ण होती हैं।

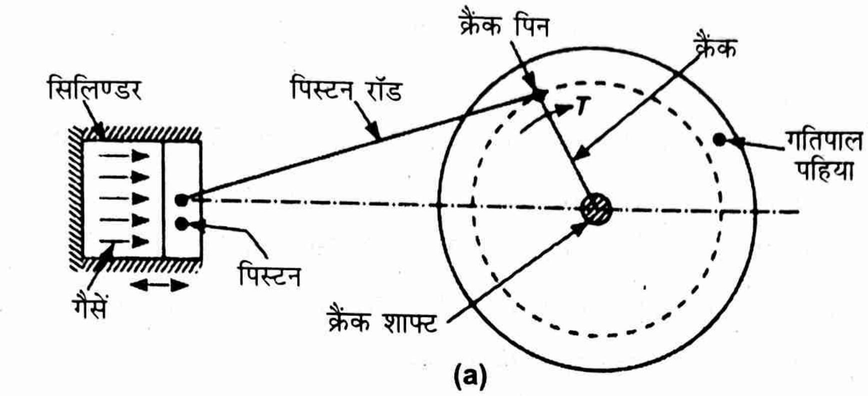
अन्तर्दहन इंजन (I.C. engine) एवं भाप इंजन (steam engine) में इन स्ट्रोकों में ऊर्जा समान रूप से उत्पादित नहीं होती जबकि ऊर्जा की खपत समान रूप (uniform rate) से होती है। अतः इंजन के सुचारू रूप से कार्य करने के लिये एक ऐसी युक्ति की आवश्यकता है जो ऊर्जा के उत्पादन एवं उसकी खपत के मध्य एक सेतु (bridge) का कार्य कर सके। गतिपाल पहिया इसी कार्य के लिये प्रयोग किया जाता है।

चित्र 5.1 (a) व (b) में क्रमशः एक अन्तर्दहन इंजन (I.C. engine) एवं भाप इंजन (steam engine) की कार्य विधि का आरेख प्रदर्शित किया गया है। चित्र 5.1 (a) व (b) दोनों में ही पिस्टन पर गैसों या भाप का दबाव, पिस्टन को पश्चाग्र

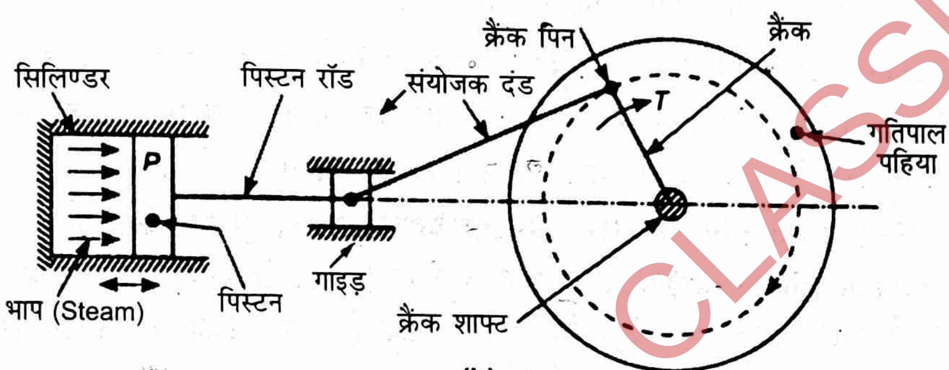


चित्र 5.1

AKC TECHNICAL CLASSES



(a)



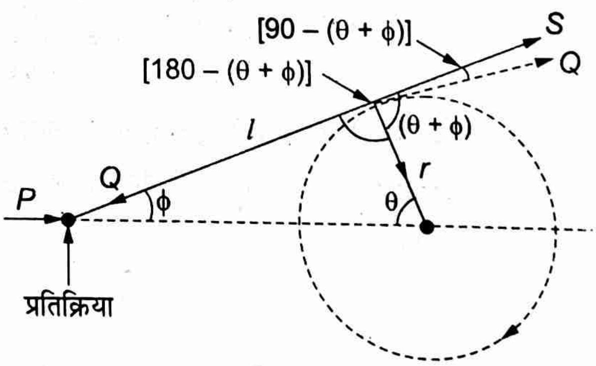
(b)

चित्र 5.1

गतिज बल, पश्चाग्र गति करने वाले पुर्जों के त्वरण (acceleration) में परिवर्तन के कारण उत्पन्न होते हैं। पश्चाग्र गति करने वाले पुर्जों के त्वरण में परिवर्तन होता रहता है जिसके कारण क्रैंक पर बदलते हुए गतिज बल क्रिया करते हैं।

क्रैंक पर इन स्थैतिक बलों (static forces) एवं बदलते हुए गतिज गलों (kinetic forces) के कारण, समान घुमॉऊ बल घूर्ण (T) उत्पन्न नहीं होता है, जिसके कारण क्रैंक शाफ्ट की घुमॉऊ गति भी परिवर्तित होती रहती है। क्रैंक की घुमॉऊ गति में परिवर्तन के कारण उत्पन्न ऊर्जा का मान भी बदलता रहता है। ऊर्जा के इस उतार-चढ़ाव के परिणाम को कम करने के लिए गतिपाल पहिया (fly wheel) प्रयोग किया जाता है। गतिपाल पहिये का कार्य इंजन में उत्पन्न ऊर्जा के उतार-चढ़ाव (fluctuation) को कम करके इंजन को लगभग समान गति (uniform speed) पर चलाये रखना है जिससे इंजनों के विभिन्न पुर्जो में कम से कम कम्पन (vibration) उत्पन्न हो। पश्चाग्र गति इंजन में गतिपाल पहिये के सम्बन्ध में प्रयोग किये जाने वाले तकनीकी पद निम्न हैं—

(i) पिस्टन प्रयास (Piston effort)—चित्र 5.2 का अवलोकन करें। चित्र में पिस्टन पर दबाव लगाने वाली गैसों या भाप का परिणामी दाब (resultant pressure) 'P' है। भाप इंजन में यही परिणामी दाब पिस्टन रॉड के माध्यम से क्रॉस हैड पर भी क्रिया करेगा। इस परिणामी दाब को **पिस्टन प्रयास (piston effort)** कहते हैं। इसकी इकाई न्यूटन (N) होगी।



चित्र 5.2

पिस्टन प्रयास 'P' के परिणाम को निम्न सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है—

$$P = pA - mf \pm m \qquad \text{... (i)}$$

(ऊर्ध्वाधर एक सिलिण्डर अन्तर्दहन इंजन के लिए)

AKG TECHNICAL CLASSES

$$P = (p_1 A_1 - p_2 A_2) - mf \pm m \quad \text{... (ii)}$$

(उर्ध्वाधर एक सिलिण्डर द्विक्रिया भाप इंजन के लिए।)

जहाँ p = अन्तर्दहन इंजन के सिलिण्डर में उत्पन्न गैसों की दाब तीव्रता का परिणाम N/mm^2 में।

A = पिस्टन के उस भाग का क्षेत्रफल mm^2 में, जिस भाग पर गैसें क्रिया कर रही हैं।

तथा p_1 एवं p_2 भाप इंजन के पिस्टन के दोनों ओर लगने वाली भाप की दबाव तीव्रता N/mm^2 में।

एवं A_1 व A_2 पिस्टन के दोनों ओर के क्रमश: क्षेत्रफल को प्रदर्शित करते हैं। क्षेत्रफल की इकाई mm^2 में।

m = गति करने वाले पुर्जों में पदार्थ की मात्रा किग्रा (kg) में।

f = गति करने वाले पुर्जों का त्वरण, mm/s^2 में।

उपरोक्त सूत्र में $\pm m$ के साथ धनात्मक (+ive) चिन्ह उस समय प्रयोग किया जायेगा जब पिस्टन नीचे की ओर गतिमान होगा तथा ऋणात्मक (–ive) चिन्ह उस समय प्रयोग किया जायेगा जब पिस्टन नीचे से ऊपर की ओर गति करेगा।

क्षैतिज सिलिण्डर के केस में $\pm m$ का मान उपरोक्त सूत्रों में शून्य होगा।

(ii) क्रैंक पिन प्रयास (Crank pin effort)—क्रैंक पिन पर लगने वाले 'Q' बल के क्रैंक के लम्ब रूप घटक 'S' को क्रैंक पिन प्रयास (crank pin effort) कहते हैं। संयोजक दण्ड (connecting rod) में 'Q' बल पिस्टन प्रयास 'P' के कारण उत्पन्न होता है। 'R', 'Q' बल का क्रैंक के अनुरूप घटक है। इसकी इकाई न्यूटन (N) होगी।

चित्र 5.2 के अनुसार,

$$P = Q\cos\phi \quad \text{... (i)}$$

या

$$Q = \frac{P}{\cos\phi} \quad \text{...(ii)}$$

यहाँ,

$$R = Q\cos(\theta + \phi)$$

एवं

$$S = Q\cos[90° - (\theta + \phi)]$$

$$S = Q\sin(\theta + \phi) \quad \text{...(iii)}$$

'Q' का मान समीकरण (i) से समीकरण (iii) में रखने पर

$$\boldsymbol{S = \frac{P}{\cos\phi}\sin(\theta + \phi)} \quad \text{...(iv)}$$

(iii) क्रैंक प्रयास (Crank effort)—क्रैंक प्रयास को घुमॉऊ घूर्ण (turning moment) भी कहते हैं। यह क्रैंक पिन प्रयास (crank pin effort) एवं क्रैंक पिन वृत्त की त्रिज्या 'r' के गुणनफल के मान के बराबर होता है। इसकी इकाई न्यूटन-मी (Nm) होगी।

$$T = S \times r$$

$$T = \frac{P}{\cos\phi}\sin(\theta + \phi) \times r \quad \text{...(v)}$$

$$T = P.r(\sin\theta + \cos\theta \times \tan\phi) \quad \text{...(vi)}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

यदि l = संयोजक दंड की लम्बाई हो तब चित्र 5.2 से,

$$l \sin\phi = r . \sin\theta$$

$$\sin\phi = \frac{r}{l} . \sin\theta = \frac{\sin\theta}{n} \qquad \left[\because \frac{l}{r} = n\right]$$

तथा

$$\cos\phi = \sqrt{1-\sin^2\phi} = \sqrt{1-\frac{\sin^2\theta}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}{n}$$

$$\tan\phi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{\sin\theta}{n} \times \frac{n}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}$$

अब समीकरण (vi) से

$$\boldsymbol{T = P.r\left[\sin\theta + \frac{\sin^2\theta}{2\sqrt{n^2-\sin^2\theta}}\right]} \qquad \ldots\text{(vii)}$$

घुमॉऊ घूर्ण 'T' का यह परिमाण ही क्रैंक को घुमाता है।

(iv) जड़त्व बल (Inertia force)—पश्चाग्र गति इंजनों में जड़त्व बलों का कार्य उसके विभिन्न पुर्जों पर लगने वाले बाह्य बलों का विरोध करना है। इस प्रकार के इंजनों में जड़त्व बल पिस्टन, पिस्टन रॉड व संयोजक दण्ड इत्यादि के गति करने के कारण उत्पन्न होते हैं।

§ 5.2 घुमॉऊ घूर्ण आरेख (Turning Moment Diagram)

"घुमॉऊ घूर्ण आरेख, जिसे क्रैंक प्रयास आरेख भी कहते हैं, क्रैंक की विभिन्न स्थितियों में घुमॉऊ घूर्ण अथवा कैंक प्रयास के ग्राफीय निरूपण (Graphical Representation) को कहते हैं।"

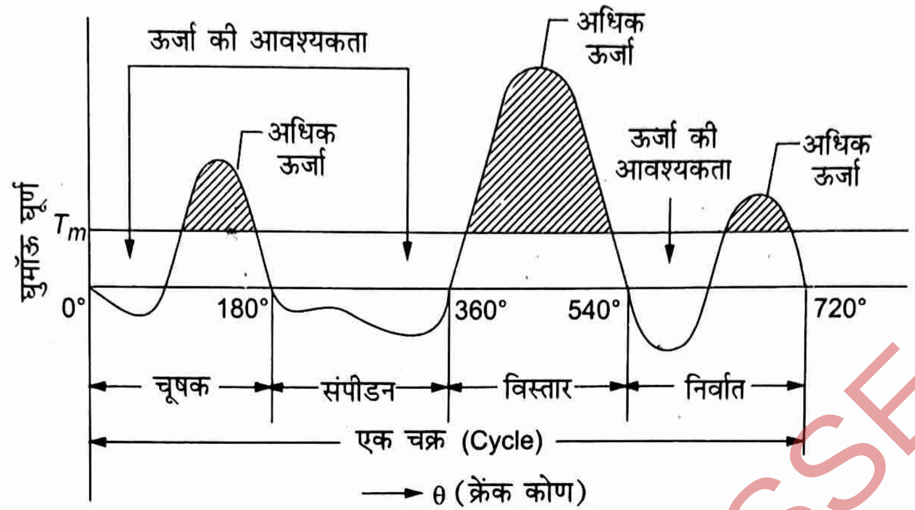
"The turning moment diagram, also known as crank effort diagram is the graphical representation of the turning moment or crank-effort for various positions of the crank".

इस आरेख में क्रैंक-कोण को x-अक्ष पर तथा उस स्थिति के क्रैंक प्रयास को y-अक्ष पर प्रदर्शित करते हैं।

5.2.1 विभिन्न इंजनों के क्रैंक प्रयास आरेख (Crank Effort Diagrams of Different Engines)

(i) एकल सिलिण्डर चार स्ट्रोक इंजन (Single cylinder four stroke engine)—चित्र 5.3 में इसका घुमॉऊ घूर्ण (turning moment) या क्रैंक प्रयास (crank effort) आरेख प्रदर्शित किया गया है। हम यह जानते हैं कि इस इंजन के एक चक्र (cycle) में एक कार्यकारी स्ट्रोक (working storke) होगा तथा क्रैंक 720° घूमेगा अर्थात् क्रैंक (crank) दो चक्कर घूमेगा। इस आरेख में क्रैंक कोण (θ) को क्षैतिज रेखा पर एवं घुमॉऊ घूर्ण (T) को उर्ध्वाधर रेखा पर प्रदर्शित किया गया है। चूषण स्ट्रोक में क्योंकि सिलिण्डर के अन्दर का दाब वायुमण्डलीय दाब से कम होता है, इसलिये शुरू में आरेख ऋणात्मक तथा बाद मे सिलिण्डर के अन्दर का दाब वायुमण्डलीय दाब से अधिक होने के कारण आरेख धनात्मक होगा।

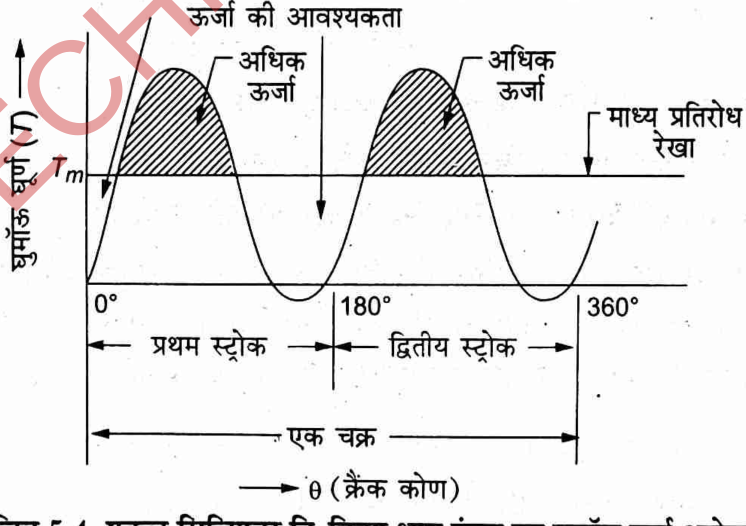
AKC TECHNICAL CLASSES



चित्र 5.3. एकल सिलिण्डर चार स्ट्रोक अन्तर्दहन इंजन का घुमॉऊ घूर्ण आरेख

सम्पीडन स्ट्रोक में गैसों के ऊपर कार्य किया जाता है, इसलिये इस स्ट्रोक में भी आरेख ऋणात्मक होगा, जैसा कि चित्र में प्रदर्शित किया गया है। कार्यकारी स्ट्रोक में ईंधन के दहन होने के कारण अधिक धनात्मक आरेख प्राप्त होता है। निर्वात स्ट्रोक के शुरू में निर्वात वाल्व के खुलने से अधिक दबाव वाली गैसें वायुमण्डल में निष्कासित हो जाती हैं। कम दबाव वाली गैसों को बाहर निकालने के लिये गैसों पर कार्य करना पड़ता है, जिसमें शुरू में ऋणात्मक आरेख प्राप्त होता है। निर्वात के अन्त में अधिक दबाव पर ईंधन के सिलिण्डर के अन्दर प्रवेश के कारण धनात्मक आरेख प्राप्त होगा।

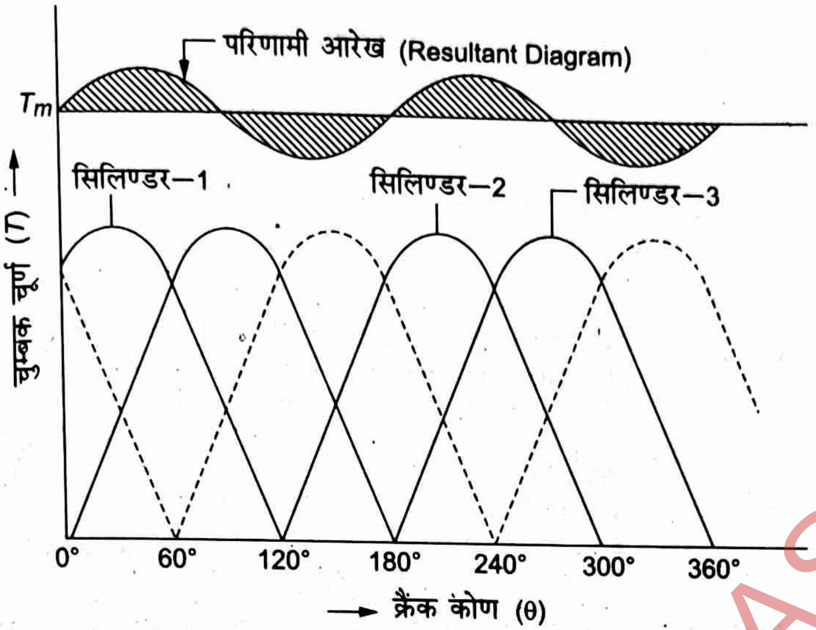
(ii) एक सिलिण्डर द्वि-क्रिया भाप इंजन (Single cylinder double acting steam engine)—अग्र चित्र 5.4 में एक सिलिण्डर द्वि-क्रिया भाप इंजन का घुमॉऊ घूर्ण आरेख प्रदर्शित किया गया है। यह क्रैंक के एक चक्कर के लिये है। क्रैंक के एक चक्कर में इंजन का एक चक्र (cycle) पूर्ण होगा।



चित्र 5.4. एकल सिलिण्डर द्वि-क्रिया भाप इंजन का घुमॉऊ घूर्ण आरेख

(iii) तीन सिलिण्डर भाप इंजन—अग्र चित्र 5.5 में तीन सिलिण्डर भाप इंजन के लिये क्रैंक प्रयास (crank effort) आरेख प्रदर्शित किया गया है। तीनों सिलिण्डर में उत्पन्न घुमॉऊ घूर्ण (turning moment) आरेख अलग-अलग रेखाओं द्वारा प्रदर्शित किया गया है। तीन सिलिण्डर इंजन में प्रत्येक क्रैंक (crank) 120° के अन्तर पर क्रैंक शॉफ्ट के साथ जुड़े होते हैं। परिणामी घुमॉऊ घूर्ण आरेख को भी (resultant turning moment) चित्र 5.5 में प्रदर्शित किया गया है।

AKC TECHNICAL CLASSES



चित्र 5.5. तीन सिलिण्डर भाप इंजन का घुमॉऊ घूर्ण आरेख

AKC TECHNICAL CLASSES

5.2.2 गतिपाल पहिये के कार्य (Functions of Fly Wheel)

समी० (iv) एवं घुमॉऊ घूर्ण (turning moment) आरेख 5.3, 5.4 एवं 5.5 से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि इंजन के चक्र (cycle) में ऊर्जा (energy) समान परिमाण में उत्पन्न नहीं होती है वरन् कोण θ एवं ϕ के परिमाण पर निर्भर करती है। क्रैंक कोण θ एवं संयोजक दण्ड का क्षैतिज के साथ कोण ϕ प्रत्येक क्षण बदलते रहते हैं जिससे उत्पादित ऊर्जा का परिमाण भी परिबर्तित होता रहता है। ऊर्जा के मान में परिवर्तन से इंजन की गति भी कम व ज्यादा होती रहेगी। यह दशा (condition) प्रायोगिक नहीं है क्योंकि इंजन में ऊर्जा की खपत समान (uniform) दर से होती है। वास्तविक रूप में इंजन समान गति से क्रियाशील रहते हैं। अत: ऊर्जा के उत्पादन एवं ऊर्जा की खपत की अवस्थाओं के मध्य सन्तुलन रखने के लिये हम गतिपाल पहिये (fly wheel) को प्रयोग करते हैं। गतिपाल पहिये का कार्य इंजन सिलिण्डर में अधिक ऊर्जा के उत्पादन की दशा में उसे शोषित करना एवं कम ऊर्जा उत्पादन के समय पूर्व शोषित ऊर्जा को पिस्टन को प्रदान करना है। जिससे इंजन समान गति (uniform speed) से क्रियाशील रह सकें।

गतिपाल पहिये में घुमॉऊ-घूर्ण को संचित करने का गुण उसके जड़ताघूर्ण (Moment of Inertia) के कारण होता है। गतिपाल पहिया, इंजन के शक्ति स्ट्रोक (Power stroke) में उत्पन्न अतिरिक्त ऊर्जा को अवशोषित कर लेती है। इंजन के अन्य स्ट्रोकों जैसे–चूषण स्ट्रोक संपीड़न स्ट्रोक तथा निकास स्ट्रोक में यह ऊर्जा क्रैंक शाफ्ट पर त्याग (release) कर देता है। इस प्रकार इंजन प्रक्रियाओं के प्रत्येक चक्र (each cycle of operation) में घुमॉऊ घूर्ण में उतार-चढ़ाव के कारण होने वाले गति परिवर्तनों को गतिपाल पहिये (flywheel) द्वारा नियन्त्रित किया जाता है।

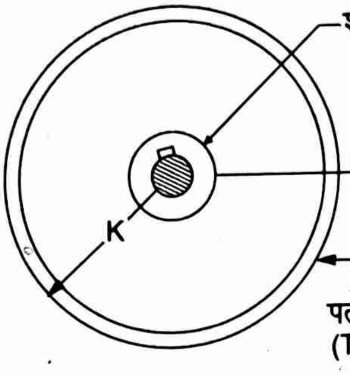
5.2.3 गतिपाल पहिये के प्रकार (Types of Fly Wheel)

साधारणत: गतिपाल पहिये दो प्रकार के होते हैं—

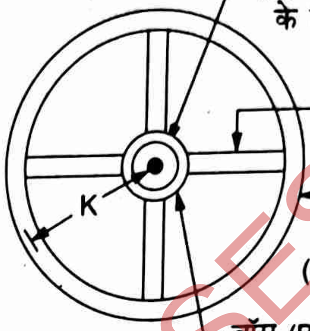
(i) चकती के आकर में (Disc type)। (ii) रिम के आकर में (Rim type)।

(i) चकती के आकर में (Disc type)—चित्र 5.6 में एक चकती के आकार का गतिपाल पहिया (fly wheel) प्रदर्शित किया गया है। इस प्रकार के गतिपाल पहिये का सम्पूर्ण भार पहिये के केन्द्र के चारों तरफ केन्द्रित होता है जिसके कारण पहिया केन्द्र पर अधिक मोटा व किनारों पर पतला होता है। इस पहिये का अर्द्धव्यास उसी भार के रिम के आकार

(rim type) के गतिपाल पहिये से कम होता है अतः यह तुलनात्मक कम ऊर्जा के उच्चावन (fluctuation of energy) को नियन्त्रित कर सकता है।



चित्र 5.6.



चित्र 5.7.

(ii) रिम के आकार में (Rim type)— इस प्रकार के गतिपाल पहिये का सम्पूर्ण भार रिम (rim) पर लगाया हुआ होता है। रिम के आकार के गतिपाल पहिये का लाभ यह है कि समान भार के चकती के आकार (disc type) के गतिपाल पहिये की तुलना में इसकी अधिक घूर्णन त्रिज्या (radius of rotation) 'K' होने के कारण यह अधिक ऊर्जा उच्चावचन (fluctuation of energy) को नियन्त्रित कर सकता है। रिम एवं भुजाओं की काट आयताकार, वृत्तीय या दीर्घवृत्ताकार (elliptical) हो सकती है। चित्र 5.7 में रिम के आकार का गतिपाल पहिया प्रदर्शित किया गया है।

गतिपाल पहिया सामान्यतः ढलवाँ लोहे (cast iron) का बना होता है। छोटे पहिये को पूरा ही एक साथ ढालकर (casting) बनाया जाता है जबकि बड़े पहिये को कुछ भागों (segments) में ढालकर तथा फिर इन भागों को बोल्टों (bolts) द्वारा जोड़कर, पूरा पहिया बना लिया जाता है। गतिपाल पहिये के केन्द्र पर शाफ्ट लगाने के लिए छिद्र तथा कुँजी लगाने के लिए कुँजीछिद्र (keyhole) बना होता है।

§ 5.3 इंजन की ऊर्जा एवं गति में उतार-चढ़ाव (Fluctuation of Energy and Speed of an Engine)

चित्र 5.3, 5.4 एवं 5.5 में हमने देखा कि घुमाँऊ घूर्ण, इंजन के चक्र (cycle) में समान नहीं रहता है वरन् कभी कम तो कभी अधिक उत्पन्न होता रहता है जिससे इंजन से प्राप्त शक्ति भी परिवर्तित होती रहती है। **इंजन के प्रत्येक चक्र (cycle) में प्राप्त अधिकतम ऊर्जा (E_1) व निम्नतम ऊर्जा (E_2) के परिमाण के अन्तर को ऊर्जा का उच्चावचन, (fluctuation of energy) कहते हैं।** इसे ($E_1 - E_2$) से प्रदर्शित किया जाता है।

ऊर्जा के प्रति चक्र में अधिकतम एवं निम्नतम परिमाणों के लिये इंजन की गति भी अधिकतम व न्यूनतम होगी। **अतः प्रति चक्र (cycle) अधिकतम गति (N_1) एवं निम्नतम गति (N_2) के अन्तर को गति का उच्चावचन (fluctuation of speed) कहते हैं।** इसे ($N_1 - N_2$) से प्रदर्शित करते हैं।

§ 5.4 विभिन्न गुणाँक (Different Coefficients)

(i) ऊर्जा का उच्चावचन गुणांक (Coefficient of fluctuation of energy)—ऊर्जा उच्चावचन गुणाँक (Coefficient of fluctuation of energy), इंजन के अधिकतम ऊर्जा उच्चावचन एवं प्रति चक्र (cycle) किये गये कार्य के अनुपात को कहते हैं। इसे 'e' से प्रदर्शित करते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

"It is the ratio of the maximum fluctuation of Energy to the work done for cycle."

$$e = \frac{\text{ऊर्जा का उच्चावचन}}{\text{कार्य प्रति चक्र (cycle)}}$$

$$\therefore \quad e = \frac{(E_1 - E_2)}{\text{कार्य प्रति चक्र (cycle)}}$$

(ii) गति उतार-चढ़ाव गुणांक (Coefficient of fluctuation of speed)—यह गति में अधिकतम उतार-चढ़ाव एवं औसत गति का अनुपात है। इसे 'c' से प्रदर्शित किया जाता है।

"The difference between the maximum and minimum speeds during a cycle is called the maximum fluctuation of speed. The ratio of maximum of speed to the mean speed is called the coefficient of fluctuation of speed."

$$c = \frac{\text{गति में अधिकतम उतार-चढ़ाव}}{\text{औसत गति}} \quad \text{या} \quad c = \frac{(N_1 - N_2)}{\left(\dfrac{N_1 + N_2}{2}\right)}$$

5.4.1 क्रैंक प्रयास आरेख के उपयोग (Uses of Crank Effort Diagram)

(i) इंजन के प्रति चक्र (cycle) में क्रैंक प्रयास (T) एवं क्रैंक के कोणीय विस्थापन (θ) के आरेख का क्षेत्रफल उसका कार्य प्रति चक्र होगा। इसको गतिपाल पहिये के प्रति मिनट चक्करों की संख्या (N) से गुणा करके तथा 60 से भाग देकर इंजन की शक्ति ज्ञात की जा सकती है।

(ii) (T-θ) आरेख के क्षेत्रफल को आधार की लम्बाई से भाग देने पर औसत घुमॉऊ घूर्ण (T_m) ज्ञात किया जा सकता है।

(iii) (T-θ) आरेख से, 'T' के अधिकतम मान के लिए, क्रैंक शाफ्ट के व्यास की गणना की जा सकती है।

5.4.2 गतिपाल पहिये के पदार्थ की मात्रा की गणना करना (Calculation of Mass of Fly Wheel)

यदि m = गतिपाल पहिये के पदार्थ की मात्रा (kg)

E_1 = गतिपाल पहिये के एक चक्र (cycle) में उत्पन्न अधिकतम ऊर्जा का परिमाण (Nm)

E_2 = प्रति चक्र (cycle) में उत्पन्न निम्नतम ऊर्जा का परिमाण (Nm)

N_1 = प्रति चक्र (cycle) में पहिये की अधिकतम गति च० प्र० मि० (r.p.m)

N_2 = प्रति चक्र (cycle) में पहिये की निम्नतम गति च० प्र० मि० (r.p.m)

K = गतिपाल पहिये की विघूर्णन त्रिज्या (m)

ω_1 = प्रति चक्र (cycle) पहिये का अधिकतम कोणीय वेग (Rad./sec.)

ω_2 = प्रति चक्र (cycle) पहिये का निम्नतम कोणीय वेग (Rad./sec.)

$I = mK^2$ पहिये के पदार्थ की मात्रा का जड़ता घूर्ण (mass moment of inertia), पहिये के केन्द्र से जाने वाली अनुदैर्ध्य अक्ष के सापेक्ष।

अत: गतिपाल पहिये की अधिकतम ऊर्जा (maximum energy)

AKC TECHNICAL CLASSES

$$E_1 = \frac{1}{2} I\omega_1^2 = \frac{1}{2} mK^2 \times \left(\frac{2\pi N_1}{60}\right)^2 \quad \text{...(i)}$$

$$\left[\text{जहाँ } \omega_1 = \frac{2\pi\, N_1}{60} \text{ rad./sec.}\right]$$

गतिपाल पहिये की निम्नतम ऊर्जा (Minimum energy)

$$E_2 = \frac{1}{2} I\omega_2^2 = \frac{1}{2} mK^2 \times \left(\frac{2\pi N_2}{60}\right)^2 \quad \text{...(ii)}$$

$$\left[\text{जहाँ } \omega_2 = \frac{2\pi\, N_2}{60} \text{ rad./sec.}\right]$$

ऊर्जा का अधिकतम उतार-चढ़ाव (Maximum fluctuation of energy)

$$E_{\text{उ०च०}} = E_1 - E_2$$

$$E_{\text{उ०च०}} = \frac{1}{2} mK^2 \left(\frac{2\pi N_1}{60}\right)^2 - \frac{1}{2} mK^2 \left(\frac{2\pi N_2}{60}\right)^2$$

$$E_{\text{उ०च०}} = \frac{1}{2} mK^2 \left(\frac{4\pi^2}{3600}\right) [N_1^2 - N_2^2]$$

$$E_{\text{उ०च०}} = \frac{\pi^2}{900} (mK^2) \left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right) (N_1 - N_2)$$

$$\mathbf{E_1 - E_2 = \frac{\pi^2}{900} (mK^2) (\text{औसत गति}) (\text{गति में परिवर्तन})} \quad \text{...(iii)}$$

समीकरण (iii) का प्रयोग करके गतिपाल पहिये के द्रव्यमान (m) की गणना की जा सकती है।

5.4.3 गतिपाल पहिये की औसत ऊर्जा (Mean Kinetic Energy of Fly Wheel)

यदि E_m = गतिपाल पहिये की औसत ऊर्जा (Nm)

एवं ω = गतिपाल पहिये की औसत कोणीय गति (Radian/sec)

$$E_m = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} (mK^2) \left(\frac{2\pi N_1 + 2\pi N_2}{2 \times 60}\right)^2 \qquad \left(\because\ \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} (mK^2) . \frac{4\pi^2}{3600} \left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right)^2$$

$$E_m = \frac{\pi^2}{900} . \frac{1}{2} (mK^2) \left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right)^2 \quad \text{...(iv)}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

हम जानते हैं, कि
$$E_1 - E_2 = \frac{\pi^2}{900}(mK^2)\left(\frac{N_1+N_2}{2}\right)(N_1 - N_2)$$

या
$$\frac{(E_1 - E_2)}{(N_1 - N_2)} = \frac{\pi^2}{900}(mK^2)\left(\frac{N_1+N_2}{2}\right) \quad \ldots(v)$$

समीकरण (v) व (iv) से,
$$E_m = \frac{1}{2} \times \frac{(E_1 - E_2)}{(N_1 - N_2)} \times \left(\frac{N_1+N_2}{2}\right)$$

या
$$\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2} \times \frac{(E_1 - E_2)}{\left[\frac{(N_1 - N_2)}{\left(\frac{N_1+N_2}{2}\right)}\right]}}$$

या
$$\boldsymbol{2E_m \times c = (E_1 - E_2)}$$

हम जानते हैं, कि $(E_1 - E_2) = e \times$ कार्य प्रति चक्र (cycle)

अत: $2E_m \times c = e \times$ कार्य प्रति चक्र (cycle)

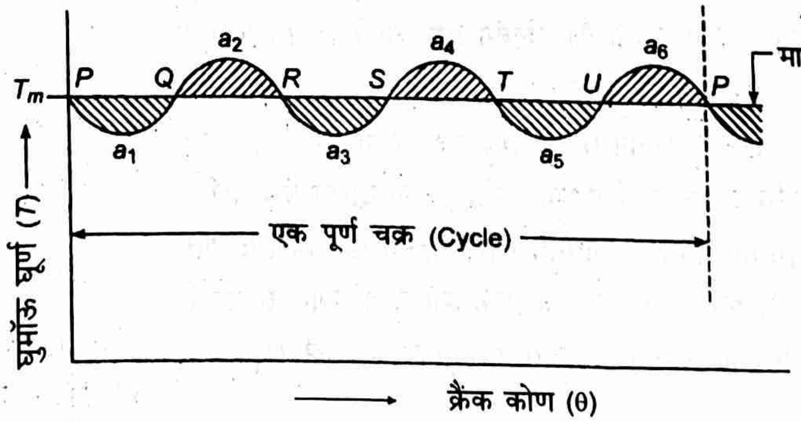
या $\boldsymbol{2E_m \times \frac{c}{e}}$ **= कार्य प्रति चक्र (cycle)**

या कार्य प्रति चक्र (Work done per cycle)

$$= 2 \times \text{गतिपाल पहिये की औसत ऊर्जा} \times \frac{\text{गति उतार चढ़ाव गुणाँक}}{\text{ऊर्जा उतार चढ़ाव गुणाँक}} \quad \ldots(vi)$$

5.4.4 बहु-सिलिण्डर इंजन के घुमॉऊ घूर्ण आरेख से ऊर्जा का उच्चावचन ज्ञात करना (Determination of Fluctuation of Energy of a Multi-Cylinder Engine)

चित्र 5.8 में एक बहु-सिलिण्डर इंजन का क्रैंक प्रयास आरेख प्रदर्शित किया गया है। यह आरेख इंजन के एक पूर्णचक्र (cycle) के लिये है। T_m **इंजन का औसत प्रतिरोधी घुमॉऊ घूर्ण है।** माना T रेखा के नीचे व ऊपर के आरेख के क्षेत्रफल क्रमशः a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 mm^2 हैं। यह भी माना कि बिन्दु 'P' पर ऊर्जा E mm^2 है, तब प्रत्येक बिन्दु पर ऊर्जा अग्र प्रकार ज्ञात करेंगे—



चित्र 5.8.

P पर ऊर्जा $(E_P) = E$ mm^2

AKC TECHNICAL CLASSES

Q पर ऊर्जा $(E_Q) = (E - a_1)\,\text{mm}^2$

R पर ऊर्जा $(E_R) = (E - a_1 + a_2)\,\text{mm}^2 = (E_Q + a_2)\,\text{mm}^2$

S पर ऊर्जा $(E_S) = (E_Q + a_2 - a_3)\,\text{mm}^2 = (E_R - a_3)\,\text{mm}^2$

T पर ऊर्जा $(E_T) = (E_R - a_3 + a_4)\,\text{mm}^2 = (E_S - a_4)\,\text{mm}^2$

U पर ऊर्जा $(E_U) = (E_S + a_4 - a_5)\,\text{mm}^2 = (E_T + a_5)\,\text{mm}^2$

P पर ऊर्जा $(E_P) = (E_T - a_5 + a_6)\,\text{mm}^2 = (E_U + a_6)\,\text{mm}^2$

$= E\,\text{mm}^2$ (क्योंकि P पर प्रारम्भिक स्थिति प्राप्त हो जाती है।)

इसके पश्चात् उपरोक्त सभी बिन्दुओं पर प्राप्त ऊर्जाओं में से अधिकतम ऊर्जा परिमाण (E_1) एवं निम्नतम ऊर्जा परिमाण (E_2) को ज्ञात कीजिये। माना ये परिमाण क्रमश: 'R' व 'T' बिन्दुओं पर प्राप्त होते हैं।

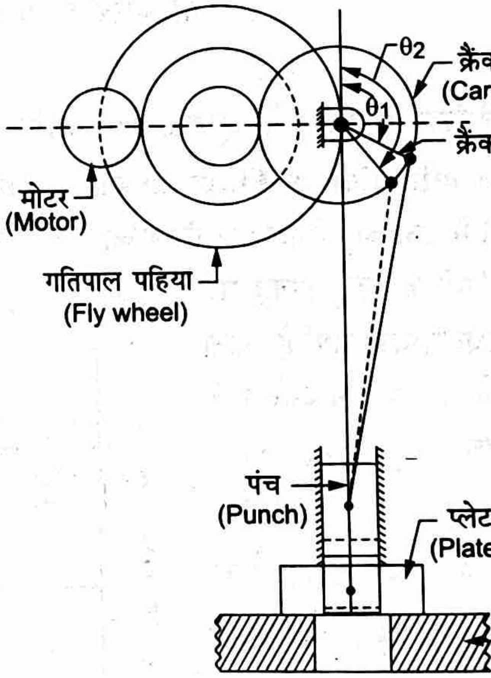
अत: ऊर्जा का उतार चढ़ाव

$$E_1 - E_2 = [(E - a_1 + a_2) - (E_s + a_4)]\,\text{mm}^2$$
$$= [(E_Q + a_2) - (E_s + a_4)]\,\text{mm}^2$$

इस प्रकार मिमी^{2} में प्राप्त ऊर्जा के उतार-चढ़ाव के परिमाण को आरेख को खींचने के लिए माने गये क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर पैमानों से गुणा करके न्यूटन-मी में परिवर्तन कर लेते हैं। इस मान को समीकरण (iii) में रखकर गतिपाल पहिये का द्रव्यमान ज्ञात किया जा सकता है। द्रव्यमान ज्ञात होने पर पहिये की अन्य विमायें (dimensions) भी ज्ञात की जा सकती हैं।

5.4.5 पन्चिंग प्रैस में गतिपाल पहिये का कार्य (Work of a Flywheel in a Punching Press)

पन्चिंग प्रेस (punching press) का प्रयोग मोटी प्लेटों में छिद्र बनाने के लिए किया जाता है। पन्चिंग प्रैस व रिवेटिंग (rivetting) मशीन में भी गतिपाल पहिया प्रयोग किया जाता है। पिछले अनुच्छेदों में हमने अध्ययन किया है कि गतिपाल पहिया इंजनों में गति के उतार चढ़ाव (fluctuation of speed) को कम करने के लिये प्रयोग किया जाता है जबकि क्रैंक शाफ्ट पर भार समान रहता है। पन्चिंग प्रेस में गतिपाल पहिये का कार्य गति के उतार चढ़ाव को कम करना है, लेकिन यहाँ घुमॉऊ घूर्ण समान रहता है तथा चक्र (cycle) के दौरान भार (load) घटता-बढ़ता रहता है। पन्चिंग प्रेस का रेखाचित्र 5.9 में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 5.9.

क्रैंक के कोणीय विस्थापन θ_1 से θ_2 तक, स्लाइडर क्रैंक यन्त्र विन्यास पर अत्यधिक भार कार्य करेगा, क्योंकि इसी दौरान पंच मशीन द्वारा छिद्र पंच (punch) किया जायेगा। जिससे क्रैंक की कोणीय गति (angular speed) कम होगी। जबकि क्रैंक को ऊर्जा स्रोत से ऊर्जा समान रूप से मिलती रहेगी। कोणीय विस्थापन θ_2 से θ_1 तक

AKC TECHNICAL CLASSES

स्लाइडर क्रैंक यन्त्र विन्यास पर कोई भार कार्यरत नहीं होगा जिस कारण क्रैंक की कोणीय गति अधिक हो जायेगी। इस अवस्था में भी ऊर्जा स्रोत (source of energy) से यन्त्र विन्यास को समान ऊर्जा मिलती रहेगी। अत: कम कोणीय गति की अवस्था में गतिपाल पहिये के द्वारा अधिक ऊर्जा को निष्पादित करना व अधिक कोणीय गति की अवस्था में ऊर्जा को अपने अन्दर शोषित करना जिससे स्लाइडर क्रैंक यन्त्र विन्यास समान गति पर कार्य करता रहे। गतिपाल पहिये के उचित जड़त्व आघूर्ण (moment of inertia) को रखने के कारण सम्भव हुआ है।

यदि E_1 = छिद्र को पंच करने के लिये आवश्यक ऊर्जा है।

एवं d_1 = छिद्र का व्यास।

t_1 = प्लेट की मोटाई।

τ = अधिकतम कर्तन प्रतिबल।

अत: अधिकतम कर्तन बल $F_S = \pi d_1 t_1 \tau$ ...(1)

(यहाँ यह माना गया है कि छिद्र पंच हो जाने के पश्चात् अधिकतम कर्तन बल का परिमाण धीरे-धीरे शून्य हो जायेगा।)

$\therefore$ छिद्र के बनाने में किया गया कार्य

$$E_1 = \frac{1}{2} \times F_S \times t \quad ...(2)$$

(यहाँ t = पदार्थ की मोटाई है, जिसमें छिद्र किया गया है।)

माना एक छिद्र क्रैंक के एक चक्कर लगाने पर बनता है। एक छिद्र को पंच करने में शाफ्ट को प्रति चक्कर दी गई ऊर्जा E_1 है। अत: मोटर द्वारा क्रैंक शाफ्ट को दी गई वास्तविक ऊर्जा

$$E_2 = E_1\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}\right) \quad ...(3)$$

तथा छिद्र को पंच करने में आवश्यक बची ऊर्जा,

$$= E_1 - E_2 = E_1 - E_1\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}\right)$$

$$= E_1\left(1 - \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}\right) \quad ...(4)$$

यह ऊर्जा, गतिपाल पहिये के द्वारा अधिकतम गति से न्यूनतम गति होने पर गतिज ऊर्जा में कमी होने के कारण प्रदान की जायेगी। अत: **ऊर्जा में अधिकतम उतार-चढ़ाव**

$$\mathbf{E_1 - E_2 = E_1\left[1 - \left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}\right)\right]} \quad ...(5)$$

यहाँ $\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}\right) = \frac{t}{2l} = \frac{t}{4r}$ है।

t = प्लेट की मोटाई

l = पंच का स्ट्रोक

AKC TECHNICAL CLASSES

$= 2 \times$ क्रैंक का अर्धव्यास।

$= 2 \times r$

गतिपाल पहिये का द्रव्यमान तथा व्यास को पूर्व अनुच्छेदों में दिये गये सूत्रों से ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 5.1—किसी बहु-सिलिण्डर (multi-cylinder) इंजन में ऊर्जा के उतार-चढ़ाव की सीमा 14000 Nm है। गति में उतार-चढ़ाव की सीमा 280 च० प्र० मि० (r. p. m.) की औसत गति से ±2% है। यदि गतिपाल पहिये का व्यास 1.6 m हो, तो उसका भार ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है—

(i) ऊर्जा का उच्चावचन $(E_1 - E_2) = 14000 \text{Nm}$

(ii) औसत गति $\left(\dfrac{N_1 + N_2}{2}\right) = 280 \text{r.p.m.}$

(iii) गति की उच्चावचन $(N_1 - N_2) = 2 \times 2 \times \dfrac{280}{100}$

$= 11.2 \text{ r.p.m.}$

(iv) माध्य अर्धव्यास (K) $= \dfrac{1.6}{2} = 0.8 \text{ m}$

हम जानते हैं, कि

$$E_1 - E_2 = \frac{\pi^2}{900}(mK^2)\left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right)(N_1 - N_2)$$

$$14000 = \frac{3.14^2}{900}(m \times 0.8)^2 \times 280 \times 11.2$$

$$m = \frac{14000 \times 900}{3.14^2 \times 0.8^2 \times 280 \times 11.2}$$

$= \mathbf{636.73 \text{ kg}}$ उत्तर

उदाहरण 5.2—एक इंजन के गतिपालक चक्र का भार 65 kN है तथा परिभ्रमण अर्द्धव्यास 1.8 m है। घुमॉऊ-आघूर्ण-आरेख दर्शाता है कि ऊर्जा उच्चावचन 56 kNm है। यदि इंजन का माध्यवेग 120 r. p. m. हो, तो इसकी अधिकतम गति ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है—

(i) गतिपालक चक्र का भार $= 65 \text{ kN}$

(ii) परिभ्रमण अर्द्धव्यास $= 1.8 \text{ m}$

(iii) ऊर्जा का उच्चावचन $= 56 \text{ kNm}$

(iv) माध्य गति $\dfrac{(N_1 + N_2)}{2} = 120 \text{ r.p.m.}$

AKC TECHNICAL CLASSES

हम जानते हैं, कि

$$E_1 - E_2 = \frac{\pi^2}{900}(mK^2)\left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right)(N_1 - N_2)$$

$$56 \times 10^3 = \frac{3.14^2}{900}(6500 \times 1.8^2) \times 120 \times (N_1 - N_2)$$

$$(N_1 - N_2) = \frac{56 \times 1000 \times 900}{3.14^2 \times 6500 \times 1.8^2 \times 120}$$

$$= 2.0227 \text{ r.p.m.}$$

एवं $$\left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right) = 120 \text{ r.p.m.}$$

या $$(N_1 + N_2) = 240 \text{ r.p.m.}$$

$$(N_1 + N_2) + (N_1 - N_2) = 240 + 2.0227$$

$$2N_1 = 242.0227$$

$$N_1 = 121.01135 = \mathbf{121 \text{ r.p.m.}}$$ उत्तर

$$2N_2 = 237.9773$$

$$N_2 = 118.9886 = \mathbf{119 \text{ r.p.m.}}$$ उत्तर

'उदाहरण 5.3—एक 200 kW का द्वि-क्रिया भाप इंजन, जोकि 120 rpm की माध्य गति से चलता है, में ऊर्जा का उच्चावचन, माध्य से 20% होता है। गतिपाल पहिये के रिम का 1300 mm माध्य अर्धव्यास पर पदार्थ की मात्रा (m) निकालिये जबकि गति का उच्चावचन माध्य गति के 1% के अन्दर ही रहता है।

हल—दिया है,

(i) शक्ति $(P) = 200 \text{ kW}$

(ii) माध्य गति $\left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right) = 120 \text{ rpm}$

(iii) ऊर्जा का उच्चावचन $(E_1 - E_2) = 20\%$ माध्य ऊर्जा

(iv) माध्य अर्धव्यास $(K) = 1300 \text{ mm} = 1.30 \text{ m}$

(v) गति का उच्चावचन $(N_1 - N_2) = 1\%$ माध्य गति

$$= 120 \times \frac{1}{100} = 1.2 \text{ rpm}$$

हम जानते हैं कि, $$P = \frac{2\pi NT}{60}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

यहाँ, N = माध्य गति rpm में।

T = माध्य मरोड़ घूर्ण (Twisting moment) Nm में।

या,
$$(2\pi T) = \frac{P \times 60}{N} = \frac{200 \times 10^3 \times 60}{120} = 1 \times 10^5 \text{ Nm}$$

अत:
$$(E_1 - E_2) = 1 \times 10^5 \times \frac{20}{100} = 20 \times 10^3 \text{Nm}$$

यहाँ $(2\pi T)$ गतिपाल पहिये के एक चक्कर में किया गया कार्य है क्योंकि भाप इंजन में दो स्ट्रोक होते हैं और इंजन का एक चक्र (cycle) भी गतिपाल पहिये के एक चक्कर में पूर्ण होता है इसलिये $(2\pi T)$ एक चक्र (cycle) में किया गया कार्य होगा।

समीकरण (iii) से हम जानते हैं कि इंजन के प्रति चक्र (cycle) ऊर्जा का उच्चावचन,

$$(E_1 - E_2) = \frac{\pi^2}{900}(mK^2)\left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right)(N_1 - N_2)$$

$$20 \times 10^3 = \frac{3.14^2}{900}(m \times 1.30^2) \times 120 \times 1.2$$

$$m = \frac{20 \times 10^3 \times 900}{3.14^2 \times 1.30^2 \times 120 \times 1.2}$$

$$= \mathbf{7501.77 \text{ kg}}$$

उत्तर

उदाहरण 5.4—एक सिलिण्डर एकल प्रक्रिया (single acting) चार स्ट्रोक गैस इंजन 15 kW शक्ति तथा 250 चक्कर प्रतिमिनट पर कार्य कर रहा है। गैस द्वारा फैलाव स्ट्रोक (expansion stroke) का कार्य, संपीडन स्ट्रोक के कार्य से 2.5 गुणा है। अन्त: एवं बाह्य स्ट्रोक के कार्य नगण्य हैं। यदि चाल का उतार-चढ़ाव माध्य के ±2% से अधिक न हो और घुमॉऊ घूर्ण आरेख विस्तार त्रिभुजाकार हो तो गतिपालक का मात्रा जड़त्व आघूर्ण (mass moment of inertia of flywheel) ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है।

(i) एकल सिलिण्डर चार स्ट्रोक इंजन

(ii) इंजन की शक्ति (Power) $= 15 \text{kW} = 15 \times 10^3$ W

(iii) चक्कर प्रति मिनट $(N) = 250$

(iv) फैलाव स्ट्रोक का कार्य $= 25 \times$ संपीडन स्ट्रोक

(v) गति पालक का मात्रा जड़त्व आघूर्ण $(I) = mk^2 = ?$

हम जानते हैं, कि—

$$P = \frac{2\pi NT}{60}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$$15 \times 10^3 = \frac{2 \times 3.14 \times 250 \times T}{60}$$

$$T_{(mean)} = \frac{15 \times 10^3 \times 60}{2 \times 3.14 \times 250} = 573.24 Nm$$

कार्य प्रति चक्र (cycle) $= T_{(mean)} \times \theta$

$$= 573.24 \times 2\pi \times 2 = 7200 Nm$$

माना संपीडन स्ट्रोक में किया गया कार्य x Nm है।

अत: प्रश्नानुसार विस्तार स्ट्रोक में किया गया कार्य $= 2.5x$ Nm

अन्त: स्ट्रोक (suction stroke) एवं बाह्य स्ट्रोक (exhaust stroke) में किया गया कार्य प्रश्नानुसार नगण्य है।

अत:
$$-x + 2.5x = 7200$$

$$1.5x = 7200$$

$$x = 4800 Nm$$

एवं विस्तार स्ट्रोक में किया गया कार्य $= 2.5 \times 4800 = 12000 Nm$

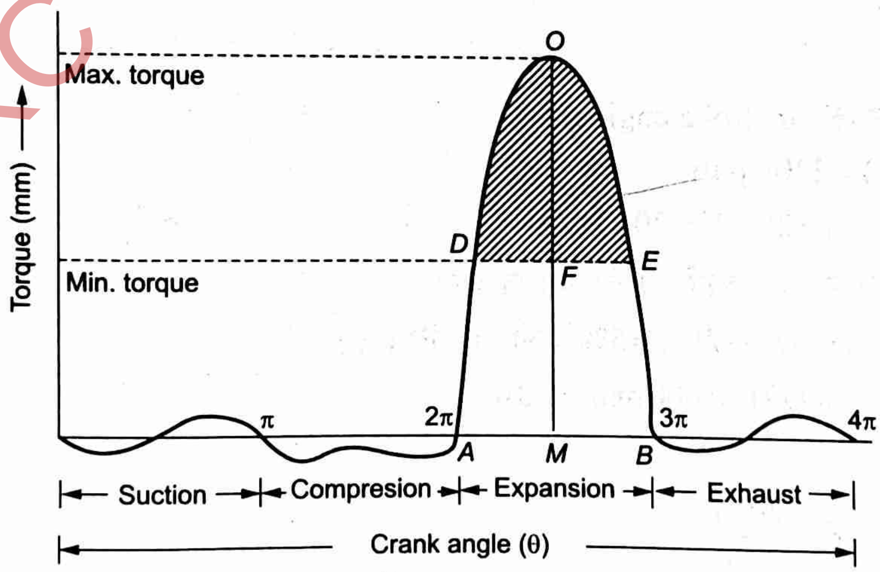
विस्तार स्ट्रोक में किया गया कार्य अग्र चित्र 5.10 में त्रिभुज AOB से प्रदर्शित किया गया है जिसमें आधार $= \pi$ रेडियन एवं ऊंचाई $OM = T_{max}$ है।

$\therefore$ विस्तार स्ट्रोक में किया गया कार्य $= \frac{1}{2} \times \pi \times T_{max}$

या
$$\frac{1}{2} \times \pi \times T_{max} = 12000$$

$$T_{max} = 7643.312 Nm$$

क्योंकि त्रिभुजाकार क्षेत्रफल ODE जो माध्य घुमॉऊ घूर्ण रेखा से ऊपर है, अधिकतम ऊर्जा के उच्चावचन (maximum fluctuation of energy) को दर्शाती है। अत: ज्यामितिय सूत्र,



चित्र 5.10.

AKC TECHNICAL CLASSES

$$\frac{\Delta ODE \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{OF^2}{OM^2} \text{ से,}$$

$$\Delta ODE \text{ का क्षेत्रफल} = \Delta OAB \text{ का क्षेत्रफल} \times \frac{OF^2}{OM^2}$$

$$= 12000 \times \left(\frac{7070.072}{7643.312}\right)^2 = 10267.524 \text{ Nm}$$

[यहाँ $OF = OM - FM = 7643.312 - 573.2 = 7070.072$ Nm है।]

अब सूत्र,

$$(E_1 - E_2) = \frac{\pi^2}{900} mK^2 \left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right)(N_1 - N_2)$$

$$10267.524 = \frac{3.14^2}{900}(mK^2) \times 250 \times \left(250 \times \frac{4}{100}\right)$$

$$I = mK^2 = \frac{10267.524 \times 900 \times 100}{3.14^2 \times 250 \times 250 \times 4}$$

$$= \mathbf{374.89 \text{ kg-m}^2}$$ उत्तर

नोट—कार्य प्रति चक्र के सूत्र में दो से गुणा इसलिये की गई है क्योंकि चार स्ट्रोक इंजन के क्रैंक शाफ्ट के दो चक्करों में इंजन का एक चक्र (cycle) पूर्ण होता है।

उदाहरण 5.5—एक चार स्ट्रोक इंजन जो 240 rpm पर 20 kW शक्ति उत्पन्न करता है, के गतिपालक पहिये का द्रव्यमान ज्ञात कीजिये जबकि इंजन द्वारा पावर स्ट्रोक के समय कार्य पूरे चक्र (cycle) में औसत कार्य का 1.4 गुना है। गतिपालक पहिये का औसत व्यास 1800 mm है और इसकी चाल का उच्चावचन 5% है। इंजन के धुरे पर औसत आघूर्ण भी ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है।

(i) चार स्ट्रोक इंजन (Four stroke engine)

(ii) औसत गति $(N) = 240$ r.p.m

(iii) उत्पादित शक्ति $(P) = 20 \text{ kW} = 20 \times 10^3$ W

(iv) पावर स्ट्रोक में किया गया कार्य $= 1.4 \times$ औसत कार्य

(v) चाल का उच्चावचन $(N_1 - N_2) = 5\% \times$ औसत चाल (N)

(vi) रिम का औसत व्यास $(D) = 1800 \text{ mm} = 1.8$ m

हम जानते हैं, कि—

$$P = \frac{2\pi NT}{60}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

यहाँ P = उत्पन्न शक्ति वाट (watt) में।

N = गतिपालक के चक्कर प्रति मिनट (rpm)।

T = मादय मरोड़ घूर्ण न्यूटन-मी (Nm) में।

प्रति चक्र (cycle) किया गया कार्य

$$2\pi T = \frac{P \times 60 \times 2}{N} = \frac{20 \times 10^3 \times 60 \times 2}{240}$$

$$= 1 \times 10^4 \text{Nm}$$

(उपरोक्त सूत्र में 2 से गुणा चार स्ट्रोक इंजन के कारण किया गया है।)

पावर स्ट्रोक मे किया गया कार्य $= 1.4 \times 1 \times 10^4 = 1.4 \times 10^4 \text{Nm}$

प्रत्येक स्ट्रोक में किया गया औसत कार्य $= \frac{1 \times 10^4}{4} = 2.5 \times 10^3 \text{Nm}$

अत: ऊर्जा का उच्चावचन $(E_1 - E_2) = (1.4 \times 10^4 - 2.5 \times 10^3)\text{Nm}$

$$= 1.15 \times 10^4 \text{Nm}$$

सूत्र

$$E_1 - E_2 = \frac{\pi^2}{900} mK^2 \left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right)(N_1 - N_2)$$

$$1.15 \times 10^4 = \frac{3.14^2}{900} \times m \times 0.90^2 \times 240 \times \left(240 \times \frac{5}{100}\right)$$

$$m = \frac{1.15 \times 10^4 \times 900 \times 100}{3.14^2 \times 0.90^2 \times 240 \times 240 \times 5}$$

$$= 450 \text{ kg}$$ उत्तर

उदाहरण 5.6—एक वाष्प इंजन के मरोड़ घूर्ण (turning moment) को चित्र 5.11 में माध्य प्रतिरोध रेखा के ऊपर व नीचे के क्षेत्रफल क्रमशः $+310, -205, +220, -295, +122, -244, +225$ तथा -133 mm² दर्शाया गया है। चित्र का पैमाना आगे दिया गया है।

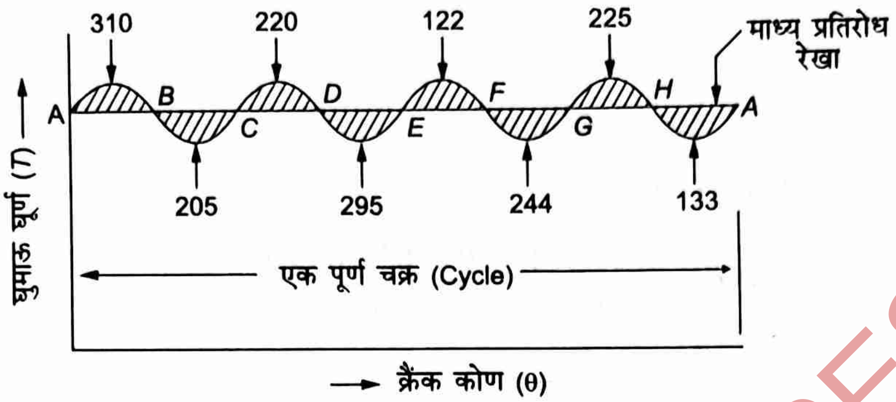
मरोड़ घूर्ण, 1 mm = 1000 Nm

क्रैंक कोण, 1 mm = 2.4°

एक मिनट में औसत चक्करों की संख्या 180 है एवं गति का सम्पूर्ण उच्चावचन औसत गति के 2.5% से अधिक नहीं होता है। गतिपाल पहिये के रिम के उपयुक्त परिच्छेद की गणना कीजिये। रिम की औसत गति 20 m/sec है तथा रिम पदार्थ का घनत्व 7200 kg/m³ दिया है।

हल—प्रश्नानुसार गतिपाल पहिये पर कार्यरत् मरोड़ घूर्ण, आरेख चित्र 5.11 में प्रदर्शित किया गया है।

AKC TECHNICAL CLASSES



चित्र 5.11.

माना A बिन्दु पर मरोड़ घूर्ण (turning moment) $E_A = E \text{ mm}^2$

B बिन्दु पर मरोड़ घूर्ण, $E_B = (E + 310) \text{ mm}^2$

C बिन्दु पर मरोड़ घूर्ण, $E_C = (E + 310 + 205) \text{ mm}^2 = (E + 105) \text{ mm}^2$

D बिन्दु पर मरोड़ घूर्ण, $E_D = (E + 105 + 220) \text{ mm}^2 = (E + 325) \text{ mm}^2$

E बिन्दु पर मरोड़ घूर्ण, $E_E = (E + 325 - 295) \text{ mm}^2 = (E + 30) \text{ mm}^2$

F बिन्दु पर मरोड़ घूर्ण, $E_F = (E + 30 + 122) \text{ mm}^2 = (E + 152) \text{ mm}^2$

G बिन्दु पर मरोड़ घूर्ण, $E_G = (E + 152 - 244) \text{ mm}^2 = (E - 192) \text{ mm}^2$

H बिन्दु पर मरोड़ घूर्ण, $E_H = (E - 92 + 225) \text{ mm}^2 = (E + 133) \text{ mm}^2$

A बिन्दु पर मरोड़ घूर्ण, $E_A = (E + 133 - 133) \text{ mm}^2 = E \text{ mm}^2$

अत: अधिकतम मरोड़ घूर्ण $(E_1) = (E + 325) \text{ mm}^2$

एवं, निम्नतम मरोड़, घूर्ण, $(E_2) = (E - 92) \text{ mm}^2$

इसलिये ऊर्जा का उच्चावचन, $(E_1 - E_2) = (E + 325) - (E - 92) = 417 \text{ mm}^2$

$$= 417 \times 1000 \times \left(\frac{2.4}{180} \times \pi\right) \text{Nm}$$

$$= 17458.4 \text{ Nm}$$

औसत गति $\left(\dfrac{N_1 + N_2}{2}\right) = 180 \text{ rpm}$ (दिया

गति का उच्चावचन $(N_1 - N_2) = 180 \times \dfrac{25}{100} \text{ rpm}$

$$= 4.5 \text{ rpm}$$ (दिया

AKC TECHNICAL CLASSES

सूत्र
$$E_1 - E_2 = \frac{\pi^2}{900}(mK^2)\frac{(N_1+N_2)}{2}(N_1 - N_2) \text{ से,}$$

$$17458.4 = \frac{\pi^2}{900}(nK^2)\times 180\times 4.5$$

$$mK^2 = \frac{17458.4\times 900}{\pi^2\times 180\times 45}$$

$$= 1967.44 \text{ kgm}^2 \qquad \ldots(1)$$

गतिपाल पहिये की कोणीय गति

$$= \frac{2\times 3.14\times 180}{60} = 18.84 \text{ rad / s}$$

तथा रिम का परिधीय वेग $v = \omega K$

या
$$20 = 18.84\times K$$

$$K = \frac{20}{18.84} = 1.0615 \text{ m}$$

उपरोक्त समीकरण (1) से,

$$mK^2 = 1967.44$$

$$m(1.0615)^2 = 1967.44$$

$$m = \frac{1967.44}{1.0615^2}$$

$$= 1746.069 \text{ kg}$$

हम जानते हैं कि,

पदार्थ की मात्रा = क्षेत्रफल × लम्बाई × घनत्व

$$m = a\times 2\pi K\times\rho$$

$$1746.069 = a\times 2\times 3.14\times 1.0615\times 7200$$

$$a = \frac{1746.069}{2\times 3.14\times 1.0615\times 7200}\text{ m}^2$$

$$= 0.0363788 \text{ m}^2$$

$$= \mathbf{363768.8 \text{ mm}^2}$$

उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES

उदाहरण 5.7—एक बहुसिलिण्डर इंजन के निर्गत मरोड़ घूर्ण (output turning moment) वक्र एवं माध्य प्रतिरोध रेखा के मध्य निम्न अन्तःखण्डित क्षेत्रफल क्रमशः प्राप्त हुए।

$$-35, +410, -285, +325, -335, +260, -365, +285, -260 \text{ mm}^2$$

घुमॉऊ घूर्ण आरेख 1 mm = 70 Nm एवं 1 mm = 4.5° मानकर बनाया गया। इंजन की औसत गति 900 rpm एवं गति का कुल उतार चढ़ाव औसत गति का 2% है।

गतिपाल पहिये के रिम का व्यास ज्ञात कीजिये यदि सुरक्षित अपकेन्द्रीय प्रतिबल 7 N/mm^2 है। गतिपाल पहिये के पदार्थ का घनत्व 7200 kg/m^3 है। रिम का अनुप्रस्थ काट आयताकार है जिसकी चौड़ाई, मोटाई की दो गुना है। भुजाओं के प्रभाव को नगण्य मानिये।

हल—दिया है,

(i) औसत गति $\left(\dfrac{N_1+N_2}{2}\right) = 900\,\text{rpm}$

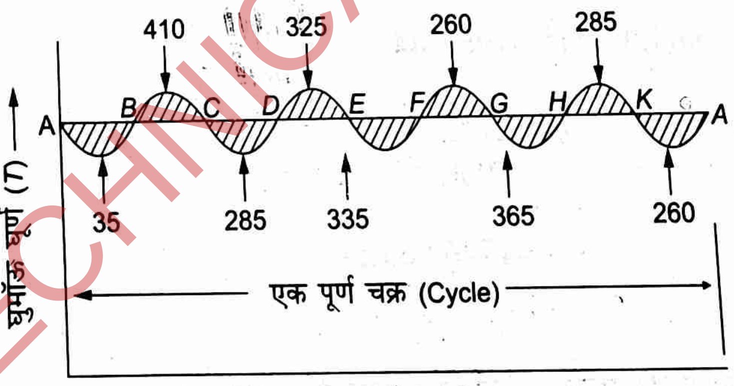
(ii) गति का उतार चढ़ाव $(N_1 - N_2) = \left(\dfrac{2}{100} \times 900\right) = 18\,\text{rpm}$

(iii) सुरक्षित अपकेन्द्री प्रतिबल $(\sigma_c) = 7\,\text{N/mm}^2$

(iv) पदार्थ का घनत्व $(\rho) = 7200\,\text{kg/m}^3$

(v) चौड़ाई $(b) = 2 \times$ मोटाई (t)

आरेख 5.12 का अवलोकन कीजिये।



चित्र 5.12.

माना गतिपाल पहिये की बिन्दु A पर ऊर्जा $= E\,\text{mm}^2$

बिन्दु B पर ऊर्जा $= (E-35)\,\text{mm}^2$

बिन्दु C पर ऊर्जा $= (E-35+410)\,\text{mm}^2 = (E+375)\,\text{mm}^2$

बिन्दु D पर ऊर्जा $= (E+375-285)\,\text{mm}^2 = (E+90)\,\text{mm}^2$

बिन्दु E पर ऊर्जा $= (E+90+325)\text{mm}^2 = (E+415)\,\text{mm}^2$

AKC TECHNICAL CLASSES

बिन्दु F पर ऊर्जा $=(E+415-335)\,\text{mm}^2=(E+80)\,\text{mm}^2$

बिन्दु G पर ऊर्जा $=(E+80+260)\,\text{mm}^2=(E+340)\,\text{mm}^2$

बिन्दु H पर ऊर्जा $=(E+340-365)\,\text{mm}^2=(E-25)\,\text{mm}^2$

बिन्दु K पर ऊर्जा $=(E-25+285)\,\text{mm}^2=(E+260)\,\text{mm}^2$

बिन्दु A पर ऊर्जा $=(E+260-260)\,\text{mm}^2=E\,\text{mm}^2$

इस प्रकार ऊर्जा का अधिकतम उतार-चढ़ाव (E_1-E_2)

$$=[(E+415)-(E-35)]\,\text{mm}^2=450\,\text{mm}^2$$

$$=450\times 70\times\left(\frac{45}{180}\times\pi\right)\text{Nm}=2472.75\,\text{Nm}$$

हम जानते हैं, कि $$(E_1-E_2)=\frac{\pi^2}{900}(mK^2)\left(\frac{N_1+N_2}{2}\right)(N_1-N_2)$$

$$2472.75=\frac{\pi^2}{900}(m\times K^2)\times 900\times 18$$

$$mK^2=\frac{2472.75\times 900}{\pi^2\times 900\times 18}$$

या $$mK^2=13.93 \quad \ldots(i)$$

सूत्र $$\sigma_c=\rho v^2 \quad \ldots(ii)$$

उपरोक्त सूत्र में σ_c = अपकेन्द्रीय प्रतिबल या परिधीय प्रतिबल (N/m^2),

ρ = के पदार्थ का घनत्व (kg/m^3),

v = पहिये का माध्य अर्धव्यास पर रेखीय वेग (m/s)

समीकरण (ii) से,

अतः से, $$v=\sqrt{\frac{\sigma_c}{\rho}}$$

$$v=\sqrt{\frac{7\times 10^6}{7200}}=31.18\,\text{m/s}$$

हम जानते हैं, कि $$v=\frac{\pi DN}{60}$$

$$31.18=\frac{\pi\times D\times 900}{60}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$$D = \frac{31.18 \times 60}{\pi \times 900} = 0.662\,\text{m}$$

अतः: अर्धव्यास $(K) = \frac{0.662}{2} = 0.331\,\text{m}$

समीकरण (i) से,

$$mK^2 = 13.93$$

$$m(0.331)^2 = 13.93$$

$$m = \frac{13.93}{(0.331)^2}\,\text{kg}$$

$$\mathbf{m = 127.17\ kg}$$ उत्तर

अब सूत्र, $m = 2\pi\, K \times a \times \rho$

$$127.17 = 2 \times 3.14 \times 0.331 \times a \times 7200$$

$$a = \frac{127.17}{2 \times 3.14 \times 0.331 \times 7200} = 0.00849\,\text{m}^2$$

$$a = b \times t$$

$$0.00849 = 2t \times t$$

$$t^2 = 0.004245$$

$$t = 0.065\,\text{m}$$ उत्तर

$$b = 2t = 2 \times 0.065\,\text{m}$$

$$b = \mathbf{0.13\ m}$$ उत्तर

उदारण 5.8— एक पंचिंग मशीन एक मिनट में 6 छिद्र बनाती है। प्रत्येक छिद्र जिसका व्यास 40 mm है, 35 mm मोटाई की प्लेट में छिद्र करने हेतु प्रति mm^2 अपरूपण क्षेत्रफल के लिये 8 Nm ऊर्जा की आवश्यकता होती है। पंच का स्ट्रोक 95 mm है। अगर गतिपालक चक्र की माध्य गति 20 m/sec हो, तो मोटर के लिए आवश्यक शक्ति ज्ञात कीजिए। गति में पूर्ण उच्चावचन माध्य गति से 3% से अधिक नहीं होना चाहिए। गतिपालक चक्र का द्रव्यमान (mass) भी ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है—

(i) छिद्र का व्यास $(d) = 40\,\text{mm}$

(ii) प्लेट की मोटाई $(t) = 35\,\text{mm}$

(iii) ऊर्जा की आवश्यकता (E_1) प्रति mm^2 अपरूपण क्षेत्रफल के लिए $= 8\,\text{Nm}$

AKG TECHNICAL CLASSES

(iv) पंच का स्ट्रोक $(l) = 95 \text{ mm}$

(v) गतिपालक चक्र की माध्य गति $(v) = 20 \text{ m/s}$

(vi) गति का उच्चावचन $(v_1 - v_2) = 3\%$

(vii) प्रति मिनट बनाये गये छिद्रों की संख्या $(n) = 6$

(a) मोटर की आवश्यक शक्ति

प्रतिछिद्र कर्तन क्षेत्रफल $(A) = \pi dt = 3.14 \times 40 \times 35 = 4396 \text{ mm}^2$

प्रतिछिद्र ऊर्जा की खपत $(E_1) = 8 \times 4396 = 35168 \text{Nm}$

एक छिद्र को बनाने में लगा समय $= \frac{60}{6} = 10$ सेकिण्ड

प्रति सेकिण्ड ऊर्जा की खपत $= \frac{35168}{10} = 3516.8 \text{ Nm/s}$

अत: मोटर की आवश्यक शक्ति $(P) = 3516.8 \text{ W} = 3.5168 \text{ kW}$

(b) गतिपालक चक्र का द्रव्यमान

यदि $m =$ गतिपालक चक्र का द्रव्यमान किग्रा में

$l =$ प्लेट की लम्बाई $= 95 \text{ mm}$

$t =$ प्लेट की मोटाई $= 35 \text{ mm}$

अत: एक छिद्र पंच करने में लगा समय $= \frac{10}{2 \times 95} \times 35 = 1.84$ सेकिण्ड

मोटर द्वारा खर्च की गई ऊर्जा $(E_2) = 3516.8 \times 1.84 = 6478 \text{ Nm}$

अत: ऊर्जा का उच्चावचन $E_1 - E_2 = 35168 - 6478 = 28690 \text{ Nm}$

गति का उच्चावचन गुणांक $(C) = \frac{(v_1 - v_2)}{v} = 0.03$

हम जानते हैं कि अधिकतम ऊर्जा का उच्चावचन

$$(E_1 - E_2) = mv^2C$$

$$28690 = m \times (20)^2 \times 0.03$$

$$m = \mathbf{2390.84 \text{ kg}}$$

उत्तर

नोट—ऊर्जा का अधिकतम उच्चावचन निम्न प्रकार भी ज्ञात किया जा सकता है—

क्योंकि $E_1 = 35168 \text{ Nm}$

अत:
$$E_1 - E_2 = E_1\left[1 - \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{2\pi}\right]$$

$$= E_1\left[1 - \frac{t}{2l}\right] = 35168\left[1 - \frac{35}{2 \times 95}\right] = \mathbf{28690 \text{ Nm}}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

उदाहरण 5.9—एक पंच मशीन द्वारा 20 mm इस्पात प्लेट में 24 mm व्यास के छिद्र बनाने के लिये आवश्यक गतिपालक पहिये का भार और विद्युत मोटर की शक्ति (power) ज्ञात कीजिये। मशीन द्वारा प्रति स्ट्रोक एक छिद्र बनाया जाना है, और प्रति मिनट 32 स्ट्रोक लगाये जाते हैं। मशीन की क्रैंक शाफ्ट के 30° घुमाव में छिद्रण क्रिया पूर्ण होती है। क्रैंक शाफ्ट तथा गतिपालक पहिया परस्पर 10 : 1 अनुपात की गियर ट्रेन द्वारा सम्बन्धित किये गये हैं। गतिपालक पहिये की न्यूनतम चाल अधिकतम की 90% रखी जानी है, और मशीन की यांत्रिक दक्षता 85% मानी जा सकती है। इस्पात प्लेट की अंतिम कर्तन सामर्थ्य 350 Nmm^2 है। गतिपालक पहिये की औसत त्रिज्या 50 cm मानिये।

हल—छिद्र का कर्तन क्षेत्रफल, $A = \pi dt = \pi \times 24 \times 20 = 1508\,\text{mm}^2$

पंच पर अधिकतम बल, $F = A \times 350$

$$= 1508 \times 350 = 527.8\,\text{kN}$$

अब एक छिद्र करने के लिये आवश्यक ऊर्जा = पंच पर औसत बल × प्लेट की मोटाई

$$= \left[\frac{1}{2} \times \text{पंच पर अधिकतम बल}\right] \times \text{प्लेट की मोटाई}$$

$$= \frac{1}{2} \times 527.8 \times 10^3 \times \frac{20}{1000} = 5278\ \text{N-m}$$

अब मशीन की यांत्रिक दक्षता 85% है,

अत: प्रति चक्र (cycle) में सप्लाई की गई ऊर्जा $= \dfrac{5278}{0.85} = 6210$ N-m

क्योंकि क्रैंक शाफ्ट के 30° घुमाव में अर्थात् एक चक्कर के $\dfrac{30°}{360} = \dfrac{1}{12}$ भाग में छिद्रण क्रिया होती है।

अत: प्रदान की गई ऊर्जा का शेष $\dfrac{11}{12}$ भाग गतिपालक पहिये को प्राप्त होना चाहिये।

अत: गतिपालक पहिये का उतार-चढ़ाव, $(E_1 - E_2) = \dfrac{11}{12} \times 6210 = 5653$ N-m

32 कार्यकारी स्ट्रोक प्रति मिनट पर क्रैंक शाफ्ट की गति = 32 r.p.m.

अत: गतिपालक पहिये की गति, $N_1 = 32 \times 10 = 320$ r.p.m.

∴ पहिये की अधिकतम कोणीय गति, $\omega_1 = \dfrac{2\pi N_1}{60} = \dfrac{2\pi \times 320}{60} = 33.49\,\text{rad/s}$

अब पहिये की न्यूनतम गति, $\omega_2 = 33.49 \times 0.9 = 30.14\,\text{rad/s}$

हमें ज्ञात है, कि— $E_1 - E_2 = \dfrac{1}{2} I(\omega_1^2 - \omega_2^2)$

अथवा
$$I = \frac{2 \times (E_1 - E_2)}{(\omega_1^2 - \omega_2^2)} = \frac{2 \times 5653}{(33.49^2 - 30.14^2)} = \frac{2 \times 5653}{213.36} = 53\,\text{kg m}^2$$

AKC TECHNICAL CLASSES

अब, $I = mk^2 = 53\,\text{kg-m}^2$

[यहाँ m = गतिपाल पहिये की संहति, k = गतिपालक पहिये की त्रिज्या)

$\therefore$ $m = \frac{I}{k^2} = \frac{53}{(0.5)^2} = 212\,\text{kg}$ (यहाँ k = गतिपाल पहिये की त्रिज्या $= 0.5\,\text{m}$)

$\therefore$ गतिपालक पहिये का भार, $W = mg = 212 \times 9.81 = 2079.3$ N

अब, मोटर की आवश्यक शक्ति $P = 6210 \times \frac{32}{60} = 3400\ W = \mathbf{3.4\ kW}$ उत्तर

उदाहरण 5.10—एक रिवेटिंग मशीन, 3 kW शक्ति की मोटर द्वारा एक समान घूर्ण पर चलायी जा रही है। गतिपाल पहिये का द्रव्यमान 150 kg तथा त्रिज्या 0.6 m है। एक रिवेटिंग क्रिया 1 सेकेण्ड का समय लेती है तथा 10000 Nm शक्ति अवशोषित करती है। रिवेटिंग से पहले गतिपाल पहिये की गति 300 rpm है। रिवेटिंग के ठीक बाद में गति क्या होगी? प्रति मिनट की गई रिवेटिंग की संख्या भी ज्ञात करें।

हल—दिया है— $P = 3\,\text{kW},\ m = 150\,\text{kg},\ k = 0.6\,\text{m},\ N_1 = 300\,\text{rpm}$

$\therefore$ $\omega_1 = \frac{2\pi N_1}{60} = \frac{2\pi \times 300}{60} = 31.42\,\text{rad/sec}$

रिवेटिंग के ठीक बाद में पहिये की गति—माना ω_2 = रिवेटिंग के ठीक बाद में पहिये का कोणीय वेग

हम जानते हैं कि मोटर द्वारा प्रदत्त ऊर्जा

$$E_2 = 3\,\text{kW} = 3000\,\text{Nm/sec}$$

परन्तु एक रिवेटिंग क्रिया में, जिसमें 1 sec लगता है, अवशोषित ऊर्जा $E_1 = 10{,}000$ Nm

अत: प्रति सेकिण्ड गतिपाल पहिये द्वारा प्रदत्त ऊर्जा = ऊर्जा का अधिकतम उतार चढ़ाव (fluctuation)

$$\Delta E = E_1 - E_2 = 10{,}000 - 3{,}000 = 7{,}000\ \text{Nm}$$

अत: ऊर्जा का अधिकतम उतार चढ़ाव

$$\Delta E = \frac{1}{2} . mk^2 [\omega_1^2 - \omega_2^2]$$

$\therefore$ $$7000 = \frac{1}{2} \times 150 \times (0.6)^2 [(31.42)^2 - (\omega_2)^2]$$

$$= 27 [(987.2 - (\omega_2)^2]$$

$\therefore$ $$\omega_2^2 = 987.2 - \left(\frac{7000}{27}\right) = 728$$

$\therefore$ $$\omega_2 = 26.98\ \text{rad/sec}$$

हम जानते हैं कि $$\omega_2 = \frac{2\pi N_2}{60}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$$\therefore \qquad N_2 = \frac{26.98 \times 60}{2\pi} = \mathbf{257.6\ rpm}$$ **उत्तर**

प्रतिमिनट की गई रिवेटिंग की संख्या—क्योंकि प्रत्येक रिवेटिंग क्रिया में, जिसमें एक सेकेण्ड लगता है, अवशोषित ऊर्जा 10,000 N-m होती है।

$$\text{अत: प्रति मिनट रिवेटों की संख्या} = \frac{E_2}{E_1} \times 60 = \frac{3000}{10{,}000} \times 60$$

$$= \mathbf{18\ रिवेट}$$ **उत्तर**

AKC TECHNICAL CLASSES

प्रश्नावली

1. गतिपालक चक्र (Flywheel) के कार्यों की विवेचना करें।
2. एक पश्चाग्र इंजन में गतिपालक पहिये तथा गति अधिनियन्त्रक के कार्यों में अन्तर बताइये। **(UP 2014)**
3. पश्चाग्र इंजन के सन्दर्भ में निम्न को परिभाषित कीजिये— **(UP 2015)**
   (i) पिस्टन प्रयास (Piston Effort) (ii) क्रैंक पिन प्रयास (Crank Pin Effort)
   (iii) घुमॉऊ घूर्ण (Turning Moment) (iv) जड़त्व बल (Inertia Force)
4. निम्न को समझाइये—
   (i) ऊर्जा का उच्चावचन (Fluctuation of Energy) **(UP 2001, 04)**
   (ii) गति का उच्चावचन (Fluctuation of Speed)
   (iii) ऊर्जा का उच्चावचन गुणाँक (Coeff. of Fluctuation of Energy) **(UP 2003)**
   (iv) गति का उच्चावचन गुणाँक (Coeff. of Fluctuation of Speed) **(UP 2001, 04)**
5. अधिकतम ऊर्जा उच्चावचन गुणाँक तथा चाल उच्चावचन गुणाँक में अन्तर स्पष्ट कीजिए। **(UP 2007)**
6. रिम प्रारूप (Rim type) तथा चक्रिका प्रारूप (Disc type) के गतिपालक चक्र में अन्तर स्पष्ट कीजिए। **(UP 2007)**
7. एक एकल सिलिण्डर द्वि-क्रिया वाष्प इंजन का घुमॉऊ-घूर्ण आरेख बनाइये। **(UP 2014)**
8. गतिपालक चक्र (flywheel) क्या है? गति के उच्चावचन गुणाँक (coefficient of fluctuation) के लिए एक सम्बन्ध ऊर्जा के अधिकतम उच्चावचन तथा माध्य गति पर, गतिपालक चक्र की गतिज ऊर्जा के पदों में ज्ञात कीजिए। **(UP 2012)**
9. टर्निंग मुमेन्ट डायग्राम (Turning moment diagram) की व्याख्या करे। **(UP 2017)**
10. यदि क्रैंक एक समान परिमाण से घूर्णन कर रहा हो तब पिस्टन के विस्थापन, वेग तथा त्वरण के लिए व्यंजक प्राप्त कीजिए। **(UP 2013)**
11. किसी एकल सिलिण्डर 4-स्ट्रोक स्थिर डीजल इंजन में गतिपाल चक्र का क्या कार्य होता है? इस प्रकार के इंजन के गतिपाल चक्र की माप को कैसे निर्धारित किया जाता है?
12. एक एकल सिलिण्डर डबल एक्टिंग वाष्प इंजन के लिए वर्तन आघूर्ण आरेख (turning moment diagram) समझाइये। **(UP 2014)**
13. गतिपालक पहिये से आप क्या समझते हैं? यह कितने प्रकार के होते है? इनके प्रमुख कार्य भी बताइये। **(UP 2014)**
14. गतिपाल पहिये की माप कैसे ज्ञात की जाती है?
15. एक इंजन की गति उच्चावचन का कारण समझाइये।
16. एक मशीन का गतिक बल विश्लेषण (dynamic force analysis) से आप क्या समझते हैं? समझाइये। **(UP 2016)**
17. फ्लाई व्हील विश्लेषण (flywheel analysis) समझाइये। **(UP 2016, 18)**

18. एक इंजन के गतिपाल पहिये के रिम का द्रव्यमान 6.5×10^3 kg और माध्य त्रिज्या (mean radius) 1.8m है। ऊर्जा का उच्चावचन 6×10^4 Nm है। इंजन के चक्र (cycle) की अधिकतम गति एवं न्यूनतम गति को ज्ञात कीजिये जबकि माध्य गति 120 r.p.m है। **(UP 2015)**

[उत्तर—121 r.p.m. एवं 119 r.p.m.]

19. एक इंजन के गतिपाल पहिये का भार 65 kN है तथा परिभ्रमण अर्धव्यास 1.8 m है। टर्निंग मुमेन्ट डायग्राम दर्शाता है कि ऊर्जा का उच्चावचन 56 kNm है। यदि इंजन का माध्य वेग 120 r.p.m. हो तो इसकी अधिकतम तथा न्यूनतम गति और गति का उच्चावचन गुणाँक ज्ञात कीजिए।

[उत्तर—121 rpm, 119 rpm, $\frac{1}{60}$] **(UP 2001, 03)**

20. एक गतिपाल चक्र की अधिकतम तथा न्यूनतम गति क्रमशः 242 rpm तथा 238 r.p.m. है। चक्र का द्रव्यमान 2600 kg तथा परिभ्रमण त्रिज्या 1.8 m है। ज्ञात कीजिए—

(i) गपिाल चक्र की औसत चाल (ii) अधिकतम ऊर्जा उच्चावचन (iii) चाल उच्चावचन गुणाँक।

[उत्तर—240 rpm, 88.68 kNm, 16.67×10^{-3}] **(UP 2009)**

21. एक फ्लाईव्हील का द्रव्यमान 4000 kg तथा परिभ्रमण त्रिज्या 1.8 m है। फ्लाईव्हील अपनी गति 210 rpm से 212 rpm तक बदलने में कितनी ऊर्जा अवशोषित करेगा?

[उत्तर—59,975.6 Nm] **(UP 2004)**

22. एक भाप इंजन के गतिपाल पहिये की परिभ्रमण त्रिज्या = 1 m और द्रव्यमान = 2500 kg है। प्रारम्भिक घूर्ण 1500 Nm है तथा यह स्थिर है। निम्नलिखित की गणना कीजिए-

(i) गतिपाल पहिये का कोणीय त्वरण।

(ii) गतिपाल पहिये की शुरू से 10 sec बाद गतिज ऊर्जा।

[उत्तर—0.6 rad/sec^2, 45 kNm] **(UP 2000)**

23. 147 kW का एक द्वि-क्रिया इंजन जो 120 r.p.m. की माध्य गति से गति करता है, में ऊर्जा का उच्चावचन माध्य से 20 प्रतिशत होता है। गतिपाल पहिये के रिम के पदार्थ की मात्रा 1500 mm माध्य अर्धव्यास पर निकालिये, जबकि गति का उच्चावचन माध्य गति से 1.5% के अन्दर रहना हो।

[उत्तर—2761 kg]

24. एक सिलिण्डर इंजन, जो 73.55 kW की क्षमता का है, में ऊर्जा का उतार-चढ़ाव (energy fluctuation) 1.5×10^4 है तथा इसकी गति को औसत गति के ±1 प्रतिशत के अन्दर नियमित रखना है। यदि इंजन की औसत गति 120 r.p.m. हो तथा गतिपाल पहिये की विघूर्णन त्रिज्या (radius of gyration) 1 m हो, तो इसके पदार्थ की मात्रा (m) ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—4754.2 kg]

25. 240 r.p.m. पर 20 kW विकसित करने के लिये एक चार स्ट्रोक इंजन के लिए गतिपाल पहिये के रिम का भार ज्ञात कीजिये जबकि पावर स्ट्रोक में किया गया कार्य पूर्ण चक्र के औसत कार्य का 1.4 गुना है। गतिपाल पहिये का माध्य व्यास 1800 mm है तथा कुल गति उच्चावचन माध्य गति के 5% तक सीमित होना है। इंजन शाफ्ट पर औसत ऐंठन घूर्ण भी ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—450 kg, 796.17 Nm]

26. एक गतिपाल के पदार्थ की मात्रा 200 kg है, एक 100 mm व्यास के शाफ्ट पर लगा है जो दो बियरिंगों पर आधारित है। बियरिंग गतिपाल पहिये के दोनों पार्श्व पर है। बियरिंग में घर्षण होने के कारण 20 sec में एक समान मंदन (retardation) होने के कारण गतिपाल पहिये की गति 500 से 300 rpm तक घट जाती है। शाफ्ट तथा बियरिंग के बीच घर्षण गुणंक 0.09 है। गतिपाल पहिये की विघूर्णन त्रिज्या का मान ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—205.43 mm]

AKC TECHNICAL CLASSES

27. एक क्षैतिज क्रास यौगिक वाष्प इंजन 120 rpm पर 400 kW शक्ति उत्पन्न करता है। कर्तन आघूर्ण (turning moment) आरेख से प्राप्त ऊर्जा का उच्चावचन गुणाँक 0.1 है। औसत गति 0.5% के अन्दर रहती है। आवश्यक गतिपालक चक्र का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, यदि उसकी परिभ्रमण त्रिज्या 2 m हो।

[उत्तर—3166.28 kg] (UP 2005, 08)

28. किसी एकल सिलिण्डर डीजल इंजन द्वारा 600 rpm पर 7.5 kW शक्ति उत्पन्न होती है। यदि प्रति चक्र (cycle) ऊर्जा उच्चावचन 300 N-m हो तथा चाल उच्चावचन औसत चाल का ±2% रखा जाना हो तब 0.75 m व्यास के रिम प्रारूप (rim type) के गतिपालक चक्र का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

[उत्तर—13.57 kg] (UP 2007)

29. एक बहु-सिलिण्डर इंजन 400 r.p.m पर स्थिर शक्ति देने के लिये चलाया जाना है। इसके लिये क्रैंक प्रयास आरेख (crank effort diagram) खींचा गया तथा एक चक्र (cycle) में औसत बलघूर्ण माध्य प्रतिरोध रेखा के ऊपर तथा नीचे निम्न प्रकार क्षेत्र (mm^2) में प्राप्त हुए।

$$+162, -180, +170, -182, +178, -148$$

आरेख का पैमाना 1 mm = 240 Nm तथा 1 mm = 3° है।

यदि इंजन की गति 395 तथा 405 rpm की सीमाओं में रखी जानी हो तो गतिपाल पहिये के लिये आवश्यक मात्रा जड़ताघूर्ण (mass moment of inertia) ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—55 kg-m^2]

30. एक बहु-सिलिण्डर इंजन का घुमॉऊ घूर्ण आरेख 1 mm = 700 Nm ऊर्ध्वाधर तथा 1 mm = 3° के क्षैतिज क्रैंक घुमाव के पैमाने पर बनाया गया है। एक सिरे से निर्गत बल घूर्ण (output torque) वक्र तथा माध्य प्रतिरोध रेखा के बीच का अन्त: खण्डित क्षेत्रफल क्रमश: निम्न प्रकार है—

$$-50, +120, -95, 145, -85, 71, -106 \text{ mm}^2 \text{ है।}$$

इंजन की औसत गति 800 r.p.m. है तथा न्यूनतम एवं अधिकतम गति का उच्चावचन (fluctuation) औसत गति से 2% से अधिक नहीं होता है। गतिपाल पहिये का जड़त्व आघूर्ण निकालिये।

[उत्तर—40.75 kg-m^2]

31. एक बहु-सिलिण्डर (multi-cylinder) के, जिसकी औसत गति 500 r.p.m. है, घुमॉऊ घूर्ण आरेख (turning moment diagram) के ऊपर तथा नीचे के क्षेत्रफल क्रमश; +160, −172, +168, −191, +197, −162 mm^2 है। आरेख का पैमाना निम्नलिखित है—

बलघूर्ण 1 mm = 250 Nm

क्रैंक कोण 1 mm = 3°

गतिपाल पहिये के पदार्थ की मात्रा का जड़ताघूर्ण निकालिये। यदि गतिपाल पहिये की गति को 505 r.p.m. तथा 495 r.p.m के बीच रखना हो। गति का कुल उच्चावचन औसत गति के प्रतिशत मे क्या होगी?

[उत्तर—47.05 kg-m^2, ±1%]

32. एक प्रेस मशीन 3.5 kW मोटर द्वारा चालित है। प्रत्येक प्रेसिंग क्रिया में 5400 Nm ऊर्जा खर्च होती है तथा एक सेकण्ड का समय लगता हैं प्रति धण्टा प्रेसिंग की संख्या तथा गतिपाल पहिये के उच्चावचन की गणना कीजिए।

[उत्तर—2333, 1800 Nm]

33. एक पंचिग (punching) मशीन एक मिनट में 6 छेद करती है। 35 mm मोटी प्लेट में 40 mm व्यास के प्रत्येक छिद्र के लिए, 8 Nm ऊर्जा प्रति mm^2 अपरुपणित क्षेत्रफल का, की आवश्यकता हैं पंच का स्ट्रोक 95 mm है। मोटर के लिए आवश्यक शक्ति ज्ञात कीजिए। यदि फलाईव्हील की औसल चाल 20 m/sec है। यदि चाल का पूर्ण उच्चावचन औसत चाल के 3% से अधिक नहीं होता है, तो फ्लाईव्हील का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए। (UP 2015)

[उत्तर—1983 kg]

AKC TECHNICAL CLASSES

अध्याय 6

कैम तथा फालोअर
(Cam and Follower)

- Introduction, types of Cam and follower, construction of Cam profile for constant velocity motion, constant acceleration motion and simple harmonic motion.

§ 6.1 परिचय (Introduction) :

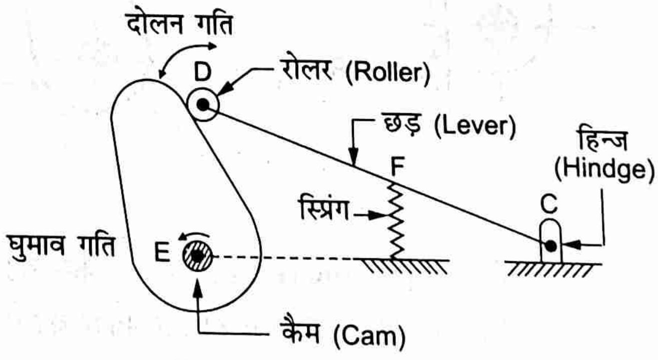
आज के इस मशीनी युग में कैम-फालोअर यँत्रावली एक सरलतम तथा अधिकतर मशीनों में पाये जाने वाली यँत्रावली है। हम जानते हैं कि कुछ मशीनी अवयवों (elements) को लगातार और समरूप गति (uniform motion) के स्थान पर रुक-रुक कर (intermittent) गति की आवश्यकता होती है। उदाहरणत: अन्तर्दहन इंजन (internal combustion engine), शेपर (shaper), प्लेनर (planer) आदि में कुछ अवयव एक निश्चित समय पर गतिशील होते हैं। अन्तर्दहन इंजन वाले वाल्व, एक निश्चित समय पर ही क्रियाशील होते हैं। इसी प्रकार प्लेनर का फीड-स्क्रू (feed screw) भी एक निश्चित समय पर ही कार्य करता है। इस प्रकार की सभी गतियाँ कैम-फालोअर यँत्रावली द्वारा प्राप्त की जाती हैं।

कैम, एक घूमने वाला (rotating) या पश्चाग्र गति (reciprocating motion) करने वाला मशीनी अवयव है जो एक दूसरे अंग, जिसे फालोअर कहते हैं, को पश्चाग्र गति या दोलन गति कराता है। दूसरे अवयव अर्थात् फालोअर को यह गति, रुक-रुक कर (intermittent) या अनियमित गति (irregular motion) के रूप में प्राप्त होती है। कैम तथा फालोअर एक दूसरे के साथ रेखीय सम्पर्क बनाते हैं। इस प्रकार ये एक उच्च युगल (higher pair) बनाते हैं।

"A cam is a rotating machine element which gives reciprocating or oscillating motion to another element known as follower. The cam and the follower have a line contact and constitute a higher pair."

कैम सामान्यत: एक शॉफ्ट द्वारा एक समान गति पर घूमती है जबकि फालोअर की गति का प्रकार पूर्व निर्धारित होता है और कैम की आकृति पर निर्भर करता है। कैम का उपयोग अन्तर्दहन इंजनों के प्रवेश तथा निकास वाल्व (Inlet & Outlet Valve), छपाई मशीनों (Printing Machines), सिलाई मशीनों (Sewing Machines), मोटरकारों, स्वचालित मशीनों (Automatic Machines), घड़ियों (Clocks) आदि में किया जाता है।

चित्र 6.1 में एक सरल यन्त्र विन्यास प्रदर्शित है। इसमें कैम तो अपने केन्द्र E पर घूमती है तथा फालोअर CD, बिन्दु C पर दोलन करता है। कैम तथा फालोअर का सम्पर्क बनाये रखने के लिए फालोअर के बिन्दु F पर एक स्प्रिंग लगा है। कैम के घूमने से फालोअर स्प्रिंग के खिंचाव के विरुद्ध ऊपर उठता है तथा स्प्रिंग के खिचाँव से नीचे की ओर आता है। अत: कैम यन्त्र विन्यास के तीन अवयव कैम, फालोअर तथा स्प्रिंग हैं।



चित्र 6.1. सरल यन्त्र विन्यास

AKC TECHNICAL CLASSES

§ 6.2 विभिन्न प्रकार के कैम तथा कैम-फालोअर यँत्रावली (Different Types of Cam and Cam-Follower Mechanism)

कैम का वर्गीकरण (classification) निम्न प्रकार से हो सकता है—

(i) आकृति (shape) के आधार पर,

(ii) फालोअर (follower) की निरुद्धता (constraint) के आधार पर, तथा

(iii) फालोअर को दी गई गति (motion) के आधार पर

(i) आकृति (Shape) के आधार पर

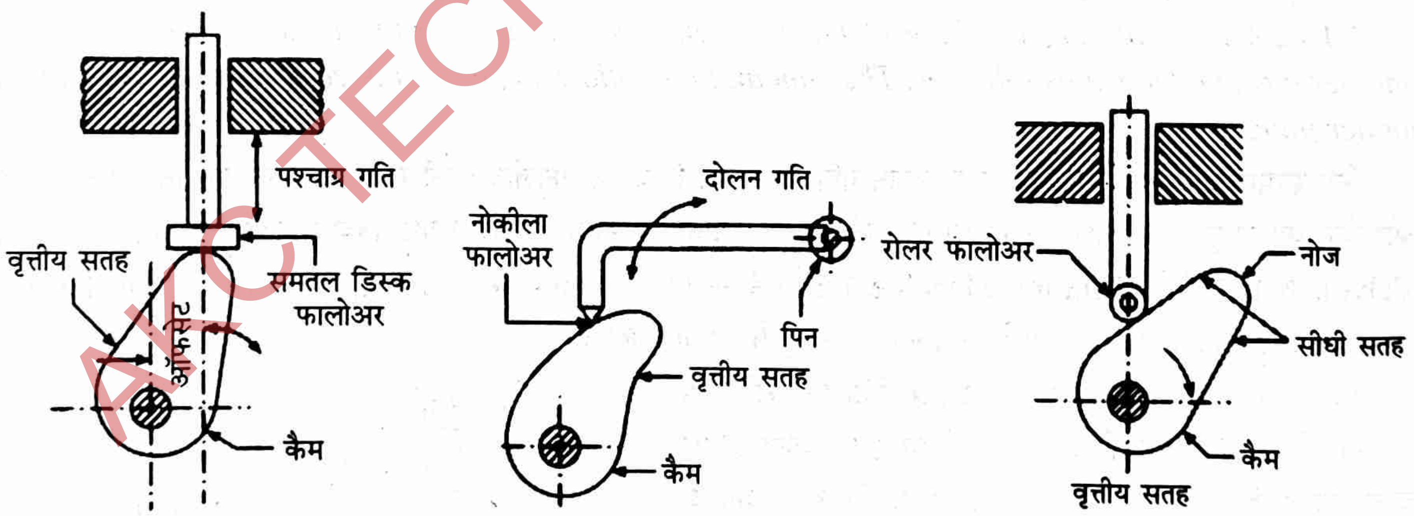
आकृति के आधार पर कैम चार प्रकार के हो सकते हैं—

(a) त्रैज्यिक या डिस्क कैम (Radial or Disc Cam) (b) पार्श्व कैम (Face Cam), (c) बेलनाकार कैम (Cylinderical Cam), (d) वेज कैम (Wedge Cam)।

(a) त्रिज्या या डिस्क कैम—इस प्रकार के कैम (radial or disc cam) में क्रियाकारी सतह (working surface) का आकार इस प्रकार का होता है कि फालोअर (follower) को कैम की क्षैतिज अक्ष के लम्बरूप पश्चाग्र गति (reciprocating motion) या दोलन गति (oscillation) प्राप्त होती है। इस प्रकार की कैम भी तीन प्रकार की होती है—

1. वृत्तीय कैम (Circular cam)।
2. स्पर्शी कैम (Tangent cam)।
3. पश्चाग्र गति कैम (Reciprocating cam)।

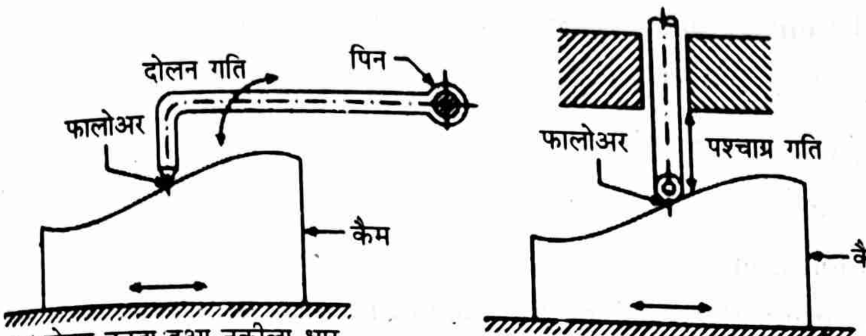
1. वृत्तीय कैम (Circular cam)—इस प्रकार की कैम चित्र 6.2 (a) व (b) में प्रदर्शित की गई है। इस कैम में इसकी सतह इस प्रकार की होती है कि उसका कैम के घुमाव केन्द्र के सापेक्ष कुछ अर्धव्यास होता है। यह कैम फालोअर को पश्चाग्र गति या दोलन कराती है।



चित्र 6.2

2. स्पर्शी कैम (Tangent cam)—इस कैम की सतह बिल्कुल सीधी होती है उनमें कोई वृत्तीय वक्र (circular curve) नहीं होता है। देखिये चित्र 6.3। इस प्रकार की कैम से फालोअर की पश्चाग्र गति या दोलन गति प्राप्त की जा सकती है।

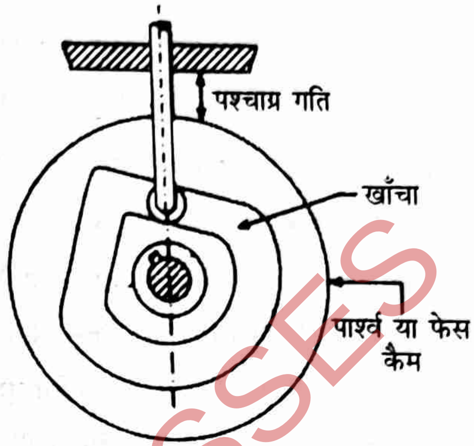
AKC TECHNICAL CLASSES



(a) दोलन करता हुआ नुकीला धार (knife edge) फालोअर

(b) पश्चाग्र करता हुआ नुकीला धार (knife edge) फालोअर

चित्र 6.4.



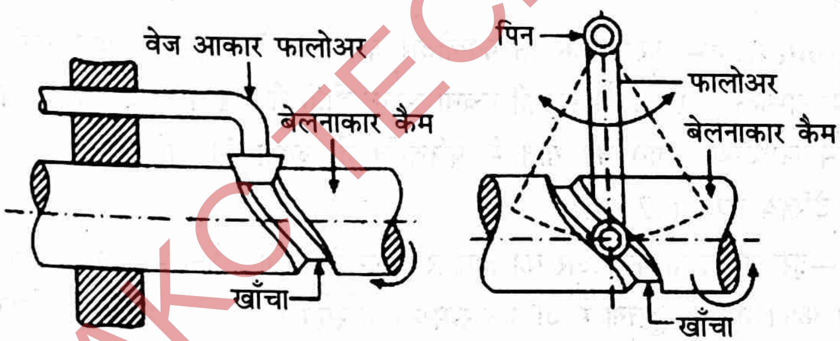
चित्र 6.5. पार्श्व कैम

3. पश्चाग्र गति कैम (Reciprocating cam)—अग चित्र 6.4(a) व (b) का अवलोकन करें। पश्चाग्र गति कैम क्षैतिज दिशा में पश्चाग्र गति करती है जिसके कारण सम्बन्धित फालोअर ऊपर-नीचे या दोलन गति करता है। पश्चाग्र गति कैम की सतह किसी अर्धव्यास पर बनी होती है।

(b) पार्श्व कैम (Face Cam)—इस कैम में डिस्क के फेस (face) में एक खाँचा (groove) काटा जाता है, जिसकी भीतरी सतह की रूपरेखा (outline) कैम की कार्यकारी सतह के अनुरूप होती है, यह कैम चित्र 6.5 में प्रदर्शित है।

(c) बेलनाकार कैम (Cylinderical Cam)—इस प्रकार की कैम को बेलनाकार सतह पर निश्चित आकार का खाँचा (groove) काट पर प्राप्त किया जाता है। बेलनाकार कैम से कैम की क्षैतिज अक्ष के अनुरूप फालोअर की पश्चाग्र गति या दोलन गति प्राप्त की जा सकती है। (चित्र 6.6)।

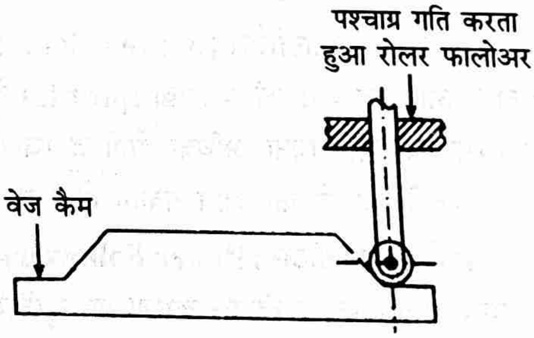
(d) वेज कैम (Wedge Cam)—इस कैम से कैम की गति पश्चाग्र (reciprocating) होती है और यह वेज (wedge) की आकृति का बना होता है। यह कैम चित्र 6.7 में प्रदर्शित है।



(a) वेज आकार (wedge shaped) पश्चाग्र गति फालोअर

(b) रोलर दोलन गति फालोअर

चित्र 6.6.



चित्र 6.7. वेज कैम

(ii) फालोअर (Follower) की निरुद्धता (Constraint) के आधार पर

इस आधार पर कैम दो प्रकार के हो सकते हैं—

(a) धनात्मक निरुद्धता वाले (Positively Constrained)—इसमें फालोअर एक खांचे में अपने आप चलता है और उससे बाहर नहीं निकलता।

AKJ TECHNICAL CLASSES

(b) बलात् निरुद्धता वाले (Forced Constrained)—जिनमें फालोअर को कैम से सम्बद्ध रखने के लिए कोई बाहरी बल जैसे स्प्रिंग, गुरुत्व (graving) आदि लगाया जाता है।

(iii) फालोअर को दी गई गति (Motion) के आधार पर

इस आधार पर कैम तीन प्रकार के हो सकते हैं—

(a) समान गति कैम (Uniform Motion Cam)

(b) समत्वरण तथा मंदन कैम (Uniform Acceleration and Retardation)

(c) सरल आवर्त गति कैम (Simple Harmonic Motion Cam)

इसके अतिरिक्त कैम का वर्गीकरण निम्न प्रकार से भी किया जा सकता है—

(a) सरक कैम (Sliding Cam)—इसमें कैम सरकता है और फालोअर, पश्चाग्र गति (reciprocating motion) करता हैं चित्र 6.4 (b) में दिखाया गया कैम सरक कैम (sliding cam) है।

(b) घूर्णन कैम (Rotating Cam)—यह कैम एक निश्चित अक्ष (axis) पर घूमता है और फाओअर (follower) पश्चाग्र गति या दोलन करता हैं चित्र 6.2 में एक घूर्णन कैम प्रदर्शित है।

§ 6.3 फालोअर के वर्गीकरण (Classification of Followers)

फालोअर का वर्गीकरण निम्न प्रकार से किया जा सकता है—

(i) सम्पर्क सतह (Surface in Contact) के आधार पर,

(ii) गति (Motion) के आधार पर,

(iii) कैम के सापेक्ष (With Respect to Cam) गति रेखा की स्थिति के आधार पर

(i) सम्पर्क सतह (Surface in contact) के आधार पर

इस आधार पर फालोअर तीन प्रकार के होते हैं—

(a) क्षुरधार फालोअर (Knife Edged Follower)—इस प्रकार के फालोअर का सिरा तेज क्षुरधार अर्थात् नुकीला होता है और यह कैम की रूपरेखा (profile) के सम्पर्क में रहता है। इसकी रचना सरल होती है, परन्तु इसके नुकीले भाग के घिसने की सम्भावना अधिक होती है जिससे सम्बन्धित भाग की गति में परिवर्तन हो जाता है। अत: फालोअर को जल्दी-जल्दी बदलने की आवश्यकता होती है। देखिये चित्र 6.2 (b)।

(b) रोलर फालोअर (Roller Follower)—इस प्रकार के फालोअर का आकार रोलर के समान होता है जो गति पारेषण के समय घूमता रहता है जिसके कारण यह क्षुरधार फालोअर की तुलना में अधिक समय तक सही गति का पारेषण करता रहता है। इसमें कैम के साथ सम्पर्क, रोलर के विभिन्न बिन्दुओं पर होता है। इसमें कैम में घिसाव कम होता है। देखिये चित्र 6.3।

(c) चपटा मुख फालोअर (Flat Faced Follower)—इस प्रकार का फालोअर एक चकती (disc) के आकार का होता है। इसका लाभ यह कि एक बिन्दु के घिस जाने पर कैम का फालोअर के साथ सम्पर्क चकती के अन्य भाग पर किया जा सकता है। देखिये चित्र 6.2 (a)।

(ii) गति (motion) के आधार पर

इस आधार पर फालोअर कई प्रकार के हो सकते हैं—

(a) पश्चाग्र फालोअर (Reciprocating Follower)—इस प्रकार के फालोअर गाइड (guides) में पश्चाग्र गति से चलता है जैसाकि चित्र 6.2 (a) में दिखाया गया है।

AKC TECHNICAL CLASSES

(b) दोलन फालोअर (Oscillating Follower)—इस प्रकार के फालोअर का एक सिरा कैम के सम्पर्क में रहता है तथा दूसरा सिरा एक पिन की सहायता से जुड़ा रहता है जिस पर फालोअर दोलन करता है। ऐसा फालोअर चित्र 6.2 (b) में प्रदर्शित करता है।

(iii) कैम के सापेक्ष गति की रेखा की स्थिति के आधार पर

इस आधार पर फालोअर निम्न प्रकार के हो सकते हैं—

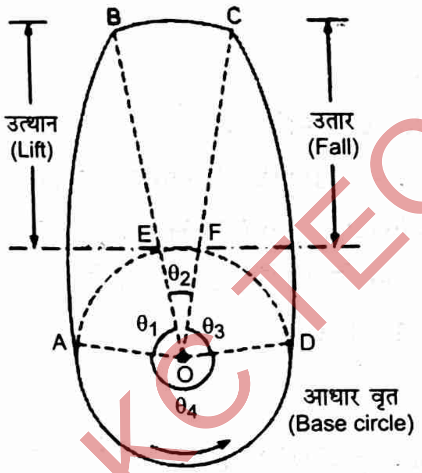
(a) केन्द्रीय या त्रैज्यिक फालोअर (Central or Radial Followers)—इस प्रकार के फालोअर की गति कैम के केन्द्र से होकर जाने वाली रेखा पर होती है जैसाकि चित्र 6.3 में प्रदर्शित है।

(b) ऑफसैट फालोअर (Offset Follower)—इस प्रकार के फालोअर की गति कैम के केन्द्र से हटी हुई (offset) रेखा पर होती है। जैसाकि चित्र 6.2 (a) में प्रदर्शित है।

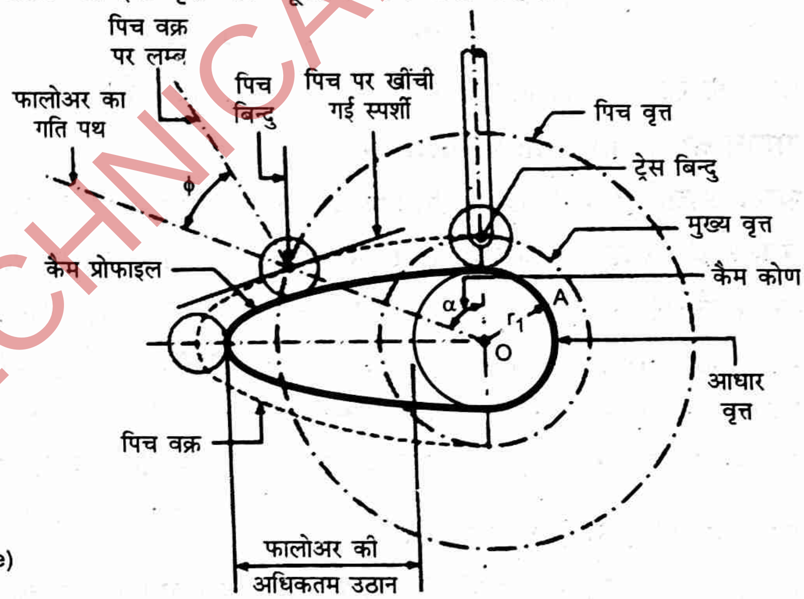
§ 6.4 कैम की नाम पद्धति (Nomenclature of Cam)

कैम के विभिन्न अंगों के नाम तथा उनकी परिभाषाएँ चित्र 6.8 (a, b) में दिखाये गये कैम प्रोफाइल से भली प्रकार समझी जा सकती हैं—

(a) आधार वृत्त (Base circle)— चित्र 6.8 (a) का अवलोकन करने पर हम देखते हैं कि फालोअर A बिन्दु से B बिन्दु तक ऊपर उठता है तथा B से C तक स्थिर अवस्था में रहता है। C से D तक फालोअर नीचे की ओर गति करता है। D से A तक फिर स्थिर रहता है। **अतः O से A या O से D तक की दूरी को अर्धव्यास मानकर खींचा गया वृत्त, आधार वृत्त (base circle) कहलाता है।** OA या OD को इस वृत्त का न्यूनतम अर्धव्यास कहेंगे।



चित्र 6.8. (a) कैम के विभिन्न कोण



चित्र 6.8. (b) कैम की नाम पद्धति

(b) उत्थान (Lift)—कैम की घुमॉऊ अक्ष (rotational axis) से फालोअर के कैम को स्पर्श करने वाले बिन्दु की उच्चतम दूरी तथा कैम के न्यूनतम अर्धव्यास के अन्तर को फालोअर व.ः उत्थान (lift) कहते हैं।

"It is the maximum travel of the follower from its lowest position to the top most position."

$$\text{उत्थान (lift)} = OB - OE = EB = FC$$

AK TECHNICAL CLASSES

उत्थान को हम निम्न प्रकार भी परिभाषित कर सकते हैं। "**यह फालोअर द्वारा अपनी प्रारम्भिक निम्नतम स्थिति से उच्चतम स्थिति तक चली गई दूरी है।**" फालोअर का उतार (fall) हमेशा उत्थान (lift) के बराबर होगा।

(c) उठान कोण (Angle of ascent)— फालोअर के अपनी प्रारम्भिक निम्नतम स्थिति से उच्चतम स्थिति तक पहुँचने में कैम द्वारा चला गया कोणीय विस्थापन, उठान कोण (angle of rest) कहलाता है। चित्र 6.8 (a) में $\angle AOB = \theta_1$ = उठान कोण (angle of ascent) है।

(d) विश्राम कोण (Angle of rest)—फालोअर को अपनी उच्चतम स्थिति में दिशा परिवर्तन में कुछ समय लगता है। इस समय में कैम द्वारा घूमा गया कोण, विश्राम कोण (angle of rest) कहलाता है। चित्र 6.8 (a) में यह $\angle BOC$ से प्रदर्शित किया गया है।

(e) उतार कोण (Angle of descent)—फालोअर की उच्चतम स्थिति से निम्नतम स्थिति तक आने में कैम द्वारा घूमा गया कोणीय विस्थापन (angular dispacement) उतार कोण कहलाता है। चित्र 6.8 (a) में इसे $\angle COD = \theta_3$ से प्रदर्शित किया गया है।

(f) क्रिया कोण (Angle of action)—फालोअर के अपनी निम्नतम स्थिति में अपनी दिशा परिवर्तन में कुछ समय लगता है अर्थात् फालोअर को नीचे की ओर की गति से ऊपर की ओर गति आरम्भ करने की स्थिति में आने में लगे समय में कैम द्वारा घूमा गया कोण, क्रिया कोण (angle of action) कहलाता है। इसे चित्र 6.8 (a) में $\angle DOA = \theta_4$ से प्रदर्शित किया गया है। इसके अतिरिक्त कैम प्रोफाइल के कुछ महत्वपूर्ण बिन्दुओं को चित्र 6.8 (b) में दिखाया गया है।

§ 6.5 फालोअर की गतियाँ (Motion of Follower)

फालोअर की साधारणतया निम्न तीन प्रकार की गतियाँ होती हैं—

(i) समान वेग (Uniform velocity)।

(ii) सरल आवर्त गति (Simple harmoic motion or S.H.M.)।

(iii) समान वेग वृद्धि या वेग ह्रास (Uniform acceleration or deceleration)।

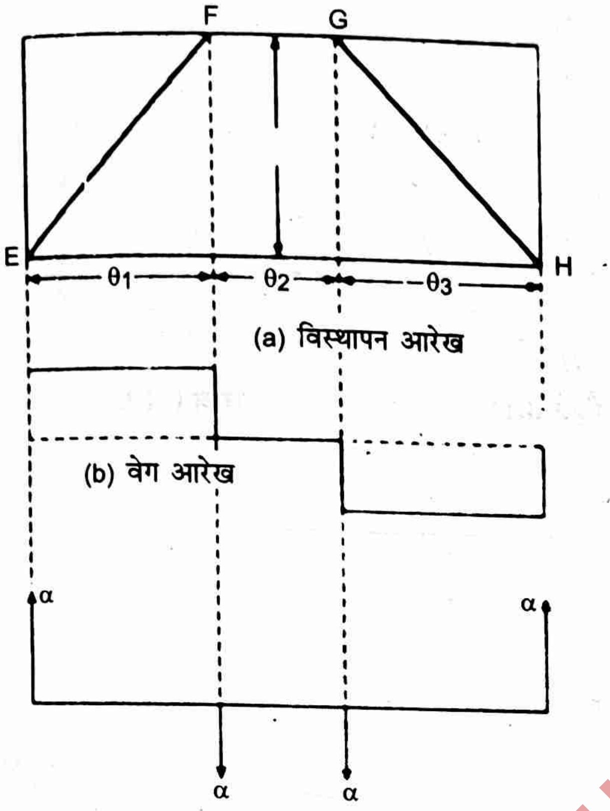
अब हम फालोअर की उपरोक्त तीनों गतियों में से प्रत्येक का क्रमश: विस्थापन (displacement), वेग (velocity) एवं त्वरण (acceleration) आरेखों की सहायता से अध्ययन करेंगे अर्थात् इन आरेखों की सहायता से हमें यह ज्ञात करने में सहायता मिलेगी कि कैम की किसी भी कोणीय स्थिति में, फालोअर का अपनी आरम्भिक स्थिति से क्या विस्थापन है एवं विस्थापन की इस नई स्थिति में उसके वेग व त्वरण के मान का कितना परिमाण (magnitude) है।

6.5.1. समान वेग (Uniform Velocity)

फालोअर की समान गति के अन्तर्गत विस्थापन, वेग एवं त्वरण आरेख को चित्र 6.9(a) (b) व (c) में प्रदर्शित किया गया है। इस आरेख का आधार (क्षैतिज रेखा) समय (अर्थात् कैम के चक्कर में कितने सेकिण्ड लगे, को प्रदर्शित करती है।) या कैम के कोणीय विस्थापन को डिग्री में तथा ऊर्ध्वाधर रेखा क्रमश: फालोअर के विस्थापन, वेग व त्वरण को प्रदर्शित करती है।

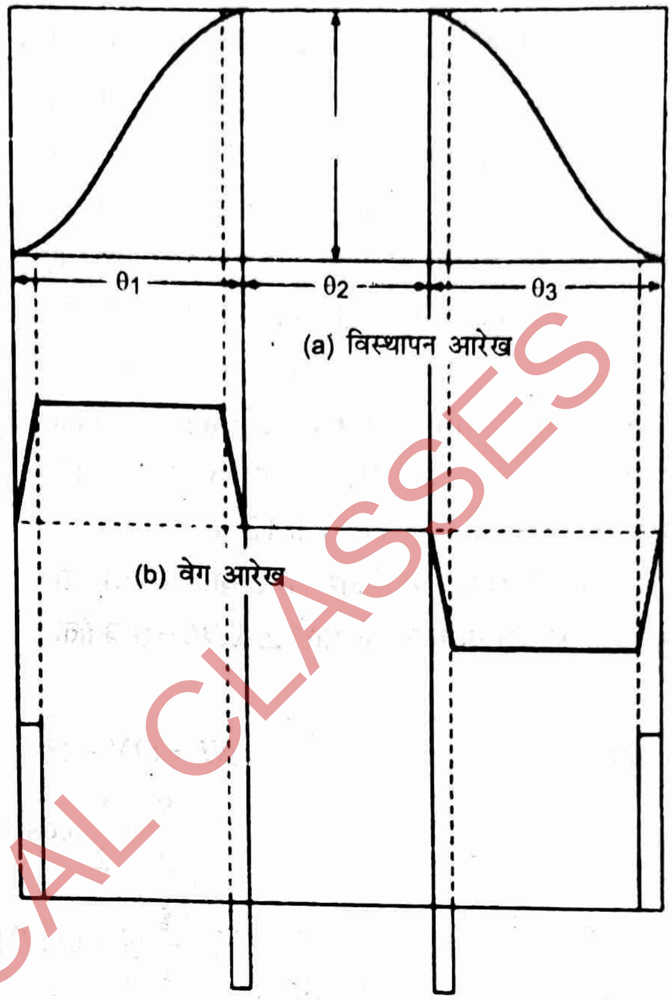
उत्थान व उतार में समान वेग से फालोअर की गति करने को विस्थापन आरेख में स्थिर ढलान की सरल रेखा से प्रदर्शित करेंगे। उत्थान में विस्थापन सरल रेखीय ढंग से बढ़ता जायेगा तथा उतार में सरल रेखीय ढंग से घटता जायेगा। देखिये चित्र 6.9 (a)। वेग आरेख चित्र 6.9 (b) के अनुसार बनेगा। उत्थान में समान वेग एक दिशा में अर्थात् धनात्मक होगा तथा

AKC TECHNICAL CLASSES



(c) त्वरण आरेख

चित्र 6.9.



(c) त्वरण आरेख

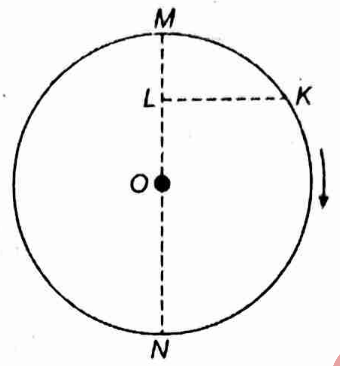
चित्र 6.10.

उतार में समान वेग विपरीत दिशा में अर्थात् ऋणात्मक होगा। वेग की इन स्थितियों को सन्तुष्ट करने के लिये फालोअर के उत्थान के आरम्भ तथा अन्त में त्वरण का परिमाण अनन्त (infinite) होना चाहिये। इसी प्रकार फालोअर के उतार के समय भी आरम्भ तथा अन्त में त्वरण अनन्त (infinite) होना चाहिये। जैसा कि चित्र 6.9 (c) में प्रदर्शित किया गया है। प्रयोगात्मक रूप में ऐसा सम्भव नहीं, क्योंकि वेग को अपने अधिकतम मान पर पहुँचने के लिये तथा अधिकतम मान को, फालोअर के स्ट्रोक के अन्त में, शून्य तक आने के लिये कुछ समय की आवश्यकता होगी अर्थात् फालोअर के स्ट्रोक के दौरान वेगवृद्धि तथा वेगह्रास परिमित (finite) हो। इस स्थिति को प्राप्त करने के लिये विस्थापन आरेख के कोने E, F, G, H कुछ वक्रीय कर दिये जाते हैं, जिससे फालोअर को अपने अधिकतम वेग को प्राप्त करने तथा स्ट्रोक के अन्त में शून्य वेग पर आने में कुछ समय मिल जाये। देखिये चित्र 6.10 (a)। फालोअर के उत्थान तथा उतार के आरम्भ में वेग बढ़ेगा तथा अन्त में वेग घटेगा जैसा चित्र 6.10 (b) में दिखाया गया है। वेग की इन स्थितियों के लिये त्वरण आरेख चित्र 6.10 (c) मे प्रदर्शित किया गया है। यहाँ वेग के घटने व वृद्धि में त्वरण समान माना गया है। त्वरण में नगण्य परिव.ीन होगा क्योंकि वेग वृद्धि या वेगह्रास में समय बहुत ही कम, लगभग नगण्य लगता है।

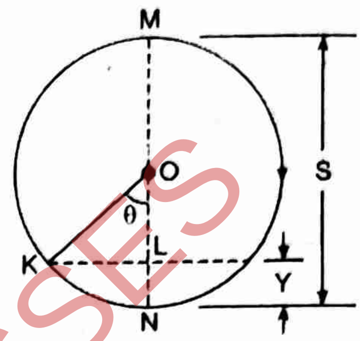
AKC TECHNICAL CLASSES

6.5.2. सरल आवर्त्त गति (Simple Harmonic Motion)

चित्र 6.11 में एक वृत्त पर बिन्दु 'K' समान कोणीय गति करता हुआ प्रदर्शित किया गया है। यदि बिन्दु 'K' से वृत्त के व्यास MN पर लम्ब डाला जाये तो बिन्दु 'L' प्राप्त होता है। यदि बिन्दु 'K' वृत्त के अनुरूप कोणीय गति करे तो K की विभिन्न स्थितियों से प्राप्त बिन्दु 'L' भी वृत्त के केन्द्र 'O' के सापेक्ष ऊपर नीचे गति करेगा। इस प्रकार बिन्दु 'L' की गति सरल आवर्त्त गति (S.H.M.) होगी।



चित्र 6.11.



चित्र 6.12.

(a) विस्थापन (Displacement)—माना फालोअर का कुल उत्थान $NM = S$ है। NM को व्यास मानकर एक वृत्त खींचिये। (चित्र 6.12)।

माना किसी समय, फालोअर का उत्थान 'Y' है। इस समय बिन्दु K वृत्त के केन्द्र के साथ $\angle KOL = \theta$ बनाता है।

अत:

$$NL = ON - OL$$

$$Y = \frac{S}{2} - \frac{S}{2}.\cos\theta$$

$$\boldsymbol{Y = \frac{S}{2}(1 - \cos\theta)} \qquad \ldots(i)$$

समी० (i) से 'θ' के विभिन्न मानों के लिये फालोअर के विस्थापन के विभिन्न मान प्राप्त किये जा सकते हैं। इस प्रकार प्राप्त विस्थापन के विभिन्न मानों के लिये, विस्थापन आरेख खींचा जा सकता है।

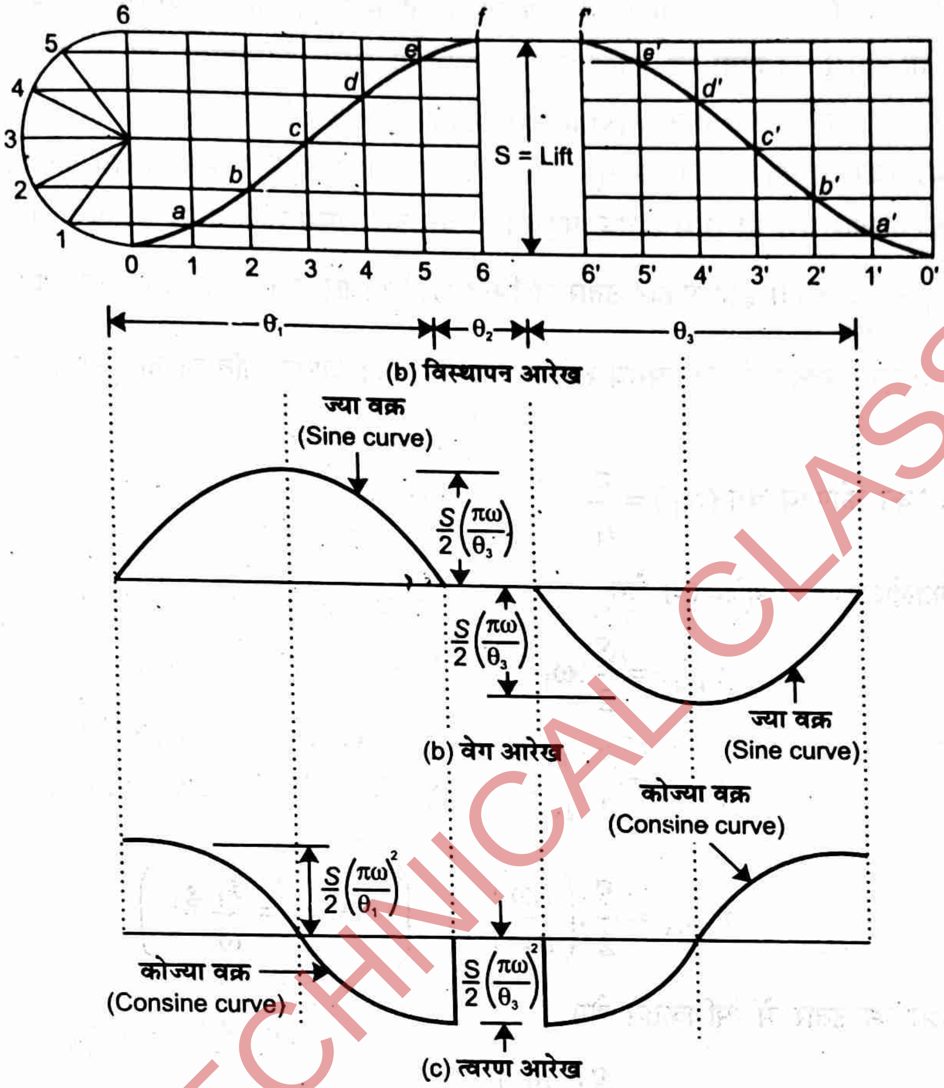
विस्थापन आरेख को खींचने के लिये सरल ज्यामितीय तरीका यह है कि फालोअर के उत्थान (lift) को व्यास मानकर चित्र 6.13 (a) के अनुसार एक अर्धवृत्त की रचना करें। इस अर्धवृत्त को छ: बराबर भागों 0–1, 0–2, 0–3, 0–4, 0–5, 0–6 में विभक्त करते हैं।

अर्धवृत्त के शून्य बिन्दु से एक क्षैतिज रेखा खींचते हैं और इस रेखा पर किसी उचित पैमाने पर उत्थान कोण (angle of ascent), विश्राम कोण (angle of rest) एवं उतार कोण (angle of descent) को चित्रानुसार अंकित करें। अब उत्थान कोण (θ_1) एवं उतार कोण (θ_3) को उतने ही सम भागों में विभक्त करते हैं जितने में अर्धवृत्त को किया है। यहाँ θ_1 क्षैतिज दूरी को छ: बराबर भागों में क्रमश: 0-1, 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6 में बाँटते है जो कैम के कोणीय विस्थापन (angular displacement) को फालोअर के उत्थान के समय प्रदर्शित करते हैं। इसी प्रकार θ_3 क्षैतिज दूरी को छ: बराबर भागों क्रमश: $6'–5'$, $5'–4'$, $4'–3'$, $3'–2'$, $2'–1'$, $1'–0'$, में बाँटते हैं जो कैम के विस्थापन को उतार के समय प्रदर्शित करते हैं। इस प्रकार प्राप्त सभी क्षैतिज बिन्दुओं पर लम्ब ऊर्ध्वाधर रेखाएँ खीचँते हैं जो फालोअर का पूर्ण विस्थापन प्रदर्शित करेगी।

इसके पश्चात् अर्धवृत्त की परिधि पर बिन्दुओं 1, 2, 3, 4, 5 और 6 से क्षैतिज रेखाएँ खींचते हैं। जोकि उपरोक्त ऊर्ध्वाधर रेखाओं को क्रमश: a, b, c, d, e, f तथा f', e', d', c', b', a' पर मिलाती हैं। इस प्रकार प्राप्त इन बिन्दुओं को मिलाते हुए एक वक्र खींचते हैं जो विस्थापन (displacement) आरेख होगा। पहला वक्र फालोअर का उत्थान वक्र व दूसरा वक्र फालोअर का उतार वक्र होगा।

AKC TECHNICAL CLASSES

इस आरेख की सहायता से कैम के किसी भी कोणीय विस्थापन के लिये फालोअर का विस्थापन ज्ञात किया जा सकता है। विस्थापन आरेख को चित्र 6.13(a) में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 6.13.

(b) वेग आरेख (Velocity diagram)—यदि किसी समय फालोअर के वेग को 'v' से प्रदर्शित किया जाये। तब समी० (i) का अवकलन (differentiation) समय के सापेक्ष करने पर

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta}\left[\frac{S}{2}(1-\cos\theta)\right]\frac{d\theta}{dt}$$

या

$$v = \frac{S}{2}.(\sin\theta).\omega_1 \quad \ldots(ii)$$

(यहाँ $\omega_1 = \frac{d\theta}{dt}$ है, जो बिन्दु 'K' के वेग को दर्शाता है।)

फालोअर के अधिकतम वेग के लिये $\theta = 90°$ या $270°$ होना चाहिये।

$$v_{(maximum)} = \frac{S}{2} \times \omega_1 \quad ...(iii)$$

यदि समी० (ii) में $\theta = 90°$ रखेंगे तो $\sin\theta = 1$ होगा जो फालोअर का उत्थान के समय अधिकतम वेग प्रदर्शित करेगा। यदि $\theta = 270°$ रखेंगे तो $\sin\theta = 1$ होगा जो फालोअर के उतार के समय अधिकतम वेग को प्रदर्शित करेगा।

समी० (ii) से प्राप्त वेग आरेख ज्या आरेख (sine-curve) है। अब हम बिन्दु 'K' की कोणीय गति 'ω_1' को कैम की कोणीय गति 'ω' में बदलकर अधिकतम वेग के सूत्र को व्युत्पन्न करेंगे। माना कैम की कोणीय गति ω रेडियन/से० है। यदि 't_1' समय में बिन्दु 'K' आधार वृत्त पर 0 से 6 तक पहुँचता है एवं इस समय में कैम पर कोणीय विस्थापन θ_1 होता है, तब उत्थान में लगा समय $t_1 = \frac{\theta_1}{\omega}$ होगा। इसी प्रकार उतार में बिन्दु 'K' आधार वृत्त पर 6 से 0 तक आने में इतना ही समय 't' लेगा अर्थात् वृत्त पर पूरे एक चक्कर में $2t_1$ समय लगेगा, जिसमें सरल आवर्त्त गति करता हुआ बिन्दु 'L' एक दोलन पूर्ण करेगा।

इसलिए बिन्दु 'K' का कोणीय वेग $(\omega_1) = \frac{\pi}{t_1}$

अतः उत्थान में फालोअर का अधिकतम वेग

$$v_{max} = \frac{S}{2}.\omega_1$$

$$v_{max} = \frac{S}{2}.\frac{\pi}{t_1}$$

$$v_{max} = \frac{S}{2}.\left(\frac{\pi\omega}{\theta_1}\right) \quad \left(\text{यहाँ } t_1 = \frac{\theta_1}{\omega} \text{ है।}\right) \quad ...(iv)$$

इसी प्रकार फालोअर के उतार में अधिकतम वेग

$$v'_{max} = \frac{S}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\theta_3}\right) \quad ...(v)$$

उपरोक्त समी० (v) में $t_1 = \frac{\theta_3}{\omega}$ है। यहाँ 'θ_3' उतार कोण है।

फालोअर के उत्थान तथा उतार के लिये वेग आरेख को चित्र 6.13(b) में प्रदर्शित किया गया है।

(c) त्वरण आरेख (Acceleration diagram)—**"किसी गति करती हुई वस्तु का त्वरण (acceleration), उसके वेग परिवर्तन की समय के सापेक्ष दर (rate) को कहते हैं।"**

या त्वरण $$f = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt}$$

समी० (ii) से $$v = \frac{S}{2}\sin\theta \times \omega_1$$

AKC TECHNICAL CLASSES

अतः फालोअर का त्वरण $f = \frac{S}{2}(\cos\theta).\omega_1^2$

अधिकतम त्वरण के लिये $\cos\theta = 1$ होना चाहिये, अर्थात् $\theta = 0°$ या $180°$ हो।

अर्थात्
$$f_{(max)} = \frac{S}{2}.\omega_1^2$$

$$f_{(max)} = \frac{S}{2}\left(\frac{\pi}{t_1}\right)^2$$

$$f_{(max)} = \frac{S}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\theta_1}\right)^2 \quad \text{...(vi)}$$

इसी प्रकार,
$$f'_{(max)} = \frac{S}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\theta_3}\right)^2 \quad \text{...(vii)}$$

समी० (vi) व (vii) क्रमश; फालोअर के उत्थान व उतार के समय अधिकतम त्वरण का परिणाम दर्शायेगी। त्वरण आरेख, चित्र 6.13 (c) में प्रदर्शित किया गया है। दोनों ही वक्र कोज्या वक्र (cosine curve) हैं।

6.5.3. समान त्वरण या मंदन गति (Uniform Acceleration and Deceliration Motion)

यदि फालोअर के समान त्वरण एवं मंदन को 'f' से प्रदर्शित किया जाये,

तब
$$f = \frac{dv}{dt}$$

या
$$dv = f\, dt$$

समाकलन (integration) करने पर,

$$v = ft + c_1$$ (जहाँ c_1 एक स्थिरांक है।)

जब फालोअर उत्थान की आरम्भिक अवस्था में होता है तो $t = 0$ होगा और वेग 'v' भी शून्य होगा, अतः $c_1 = 0$ होगा।

अतः;
$$v = ft \quad \text{...(i)}$$

हम जानते हैं, कि
$$v = \frac{dy}{dt}$$

या
$$dy = v.dt$$

∴
$$dy = ft.dt$$ [समी० (i) में 'v' का मान रखने पर]

समाकलन (integration) करने पर,

$$y = \frac{ft^2}{2} + c_2$$

AKC TECHNICAL CLASSES

उत्थान के आरम्भ में $t=0$ व $y=0$ होगा।

अत: $c_2=0$ होगा।

$$y=\frac{ft^2}{2} \qquad ...(ii)$$

क्योंकि फालोअर की गति समान त्वरण या समान मंदन में हो रही है अत: वेग आरेख समी० (i) के अनुसार सरल रेखा होगी जिसका ढलान (slope) f होगा। फालोअर के उत्थान व उतार के आरम्भ व अन्त में वेग शून्य होता है, अत: उत्थान के आधे समय में वेग वृद्धि तथा आधे समय में वेग ह्रास होगा। इसी प्रकार उतार में भी आधे समय तक वेग वृद्धि तथा आधे समय तक वेग ह्रास होगा।

समी० (ii) के अनुसार विस्थापन आरेख परवलय होगा। उत्थान के आधे समय $(t_1/2)$ तक वेग वृद्धि तथा आधे समय $(t_1/2)$ तक वेग ह्रास के कारण परवलय वक्र दोहरा होगा। इसी प्रकार उतार में आधे समय $(t_3/2)$ तक ऋणात्मक वेग वृद्धि तथा आधे समय $(t_3/2)$ तक ऋणात्मक वेग ह्रास के कारण दोहरा परवलय प्राप्त होगा।

(a) विस्थापन आरेख (Displacement diagram)—समी० (ii) में प्राप्त समी० में फालोअर के उत्थान व उतार में लगे समय क्रमश: t_1 एवं t_3 में से प्रत्येक को छ: भागों में विभक्त करके तथा इस प्रकार प्राप्त समय के विभिन्न मानों को उपरोक्त समी० (ii) में रखकर विस्थापन के विभिन्न मान प्राप्त होंगे जिनको एक ग्राफ पर रेखांकित (plot) करके विस्थापन आरेख प्राप्त किया जा सकता है जो दोहरा परवलय होगा। उत्थान के आधे समय $(t_1/2)$ का परवलय एक ओर तथा आधे समय $(t_1/2)$ का परवलय दूसरी ओर होगा। इसी प्रकार उतार में लगे $(t_3/2)$ का परवलय एक ओर तथा $(t_3/2)$ का परवलय दूसरी ओर को होगा।

उदाहरणत: माना फालोअर के उत्थान में लगा समय $(t_1/2)$ छ: सेकिण्ड (six seconds) है अत: उत्थान के वेग वृद्धि के लिये विस्थापन आरेख के मान निम्न होंगे—

पहले सेकण्ड में फालोअर का उत्थान या विस्थापन $y_1=\frac{1}{2}f(1)^2$

दूसरे सेकेण्ड में फालोअर का उत्थान या विस्थापन $y_2=\frac{1}{2}f(2)^2$

तीसरे सेकेण्ड में फालोअर का उत्थान या विस्थापन $y_3=\frac{1}{2}f(3)^2$

चौथे सेकेण्ड में फालोअर का उत्थान या विस्थापन $y_4=\frac{1}{2}(4)^2$

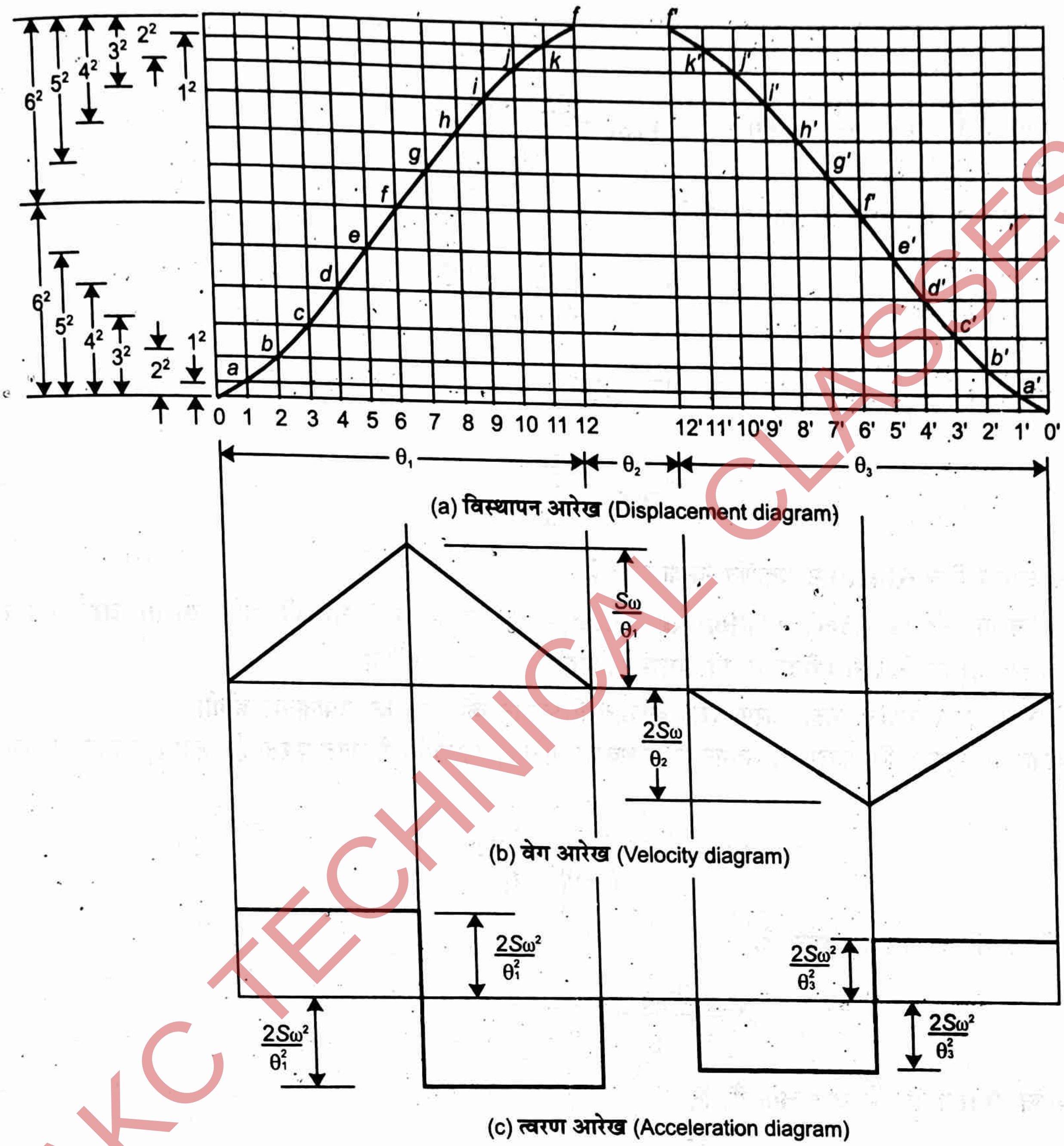
पाँचवे सेकेण्ड में फालोअर का उत्थान या विस्थापन $y_5=\frac{1}{2}f(5)^2$

छठे सेकेण्ड में फालोअर का उत्थान या विस्थापन $y_6=\frac{1}{2}f(6)^2$

इसी प्रकार उत्थान में वेग ह्रास के लिये भी विस्थापन के विभिन्न मान प्राप्त किये जा सकते हैं जो विपरीत दिशा में होंगे। फालोअर के उतार में भी इसी प्रकार के विस्थापन के विभिन्न मान प्राप्त किये जा सकते हैं।

विस्थापन आरेख 6.14 (a) में दिखाया गया है।

AKC TECHNICAL CLASSES



AKC TECHNICAL CLASSES

चित्र 6.14.

(b) वेग आरेख (Velocity diagram)—हमें उपरोक्त विवरण से ज्ञात है कि फालोअर के उत्थान तथा उतार में लगा समय क्रमशः t_1 एवं t_3 है। उत्थान व उतार के आधे समय क्रमशः $(t_1/2)$ व $(t_3/2)$ तक वेग वृद्धि तथा आधे समय क्रमशः $(t_1/2)$ व $(t_3/2)$ में वेग ह्रास होगा। उत्थान व उतार के शुरू व अन्त में वेग शून्य है।

उपरोक्त विवरण से हमें ज्ञात है कि समी० (i) से प्राप्त आरेख सरल रेखा होगी।

अतः वेग आरेख उत्थान (lift) एवं उतार (fall) के लिये त्रिभुजाकार होगा।

फालोअर का उत्थान में अधिकतम वेग, $v_{max} = \frac{S}{t_1/2} = \frac{2S}{t_1}$

हम जानते हैं कि $t_1 = \frac{\theta}{\omega}$ अत: $v_{max} = \frac{2S \times \omega}{\theta_1}$ ...(iii)

एवं फालोअर का उतार में अधिकतम वेग

$$v'_{max} = \frac{S}{t_3/2} = \frac{2S}{t_3}$$

(यहाँ पर $t_3 = \frac{\theta}{\omega}$ होगा। क्योंकि कैम समान कोणीय वेग ω रेडियन/सेकेण्ड से घूम रही है।)

अत: $$v'_{max} = \frac{2S\omega}{\theta_3}$$ ...(iv)

वेग आरेख चित्र 6.14(b) में प्रदर्शित किया गया है।

(c) त्वरण आरेख (Acceleration diagram)—हम जानते हैं, **"किसी गति करती वस्तु का त्वरण (acceleration) उसके वेग परिवर्तन की समय के सापेक्ष दर को कहते हैं।"**

क्योंकि समान त्वरण है अत: त्वरण रेखा कोणीय विस्थापन की रेखा के समानान्तर होगी।

हम यह पढ़ चुके हैं कि फालोअर उत्थान में अधिकतम गति $t_1/2$ समय में प्राप्त करता है। जहाँ t_1 उत्थान में लगा कुल समय है।

अत: $$\text{त्वरण } (f) = \frac{v_{max} - v_0}{t_1/2 - 0} = \frac{v_{max}}{t_1/2}$$

क्योंकि प्रारम्भिक वेग v_0 शून्य है।

या $$f = \frac{2v_{max}}{t_1}$$

उपरोक्त विवरण से हम जान चुके हैं, कि

$$v_{max} = \frac{2S\omega}{\theta_1} \quad \text{तथा} \quad t_1 = \frac{\theta_1}{\omega} \text{ है।}$$

अत: $$f = \frac{2 \times 2S\omega \times \omega}{\theta_1 \times \theta_1}$$

$$f = \frac{4S\omega^2}{\theta_1^2}$$ ...(v)

इसी प्रकार उतार के समय फालोअर का त्वरण $f' = \frac{4S\omega^2}{\theta_3^2}$ ...(vi)

AKC TECHNICAL CLASSES

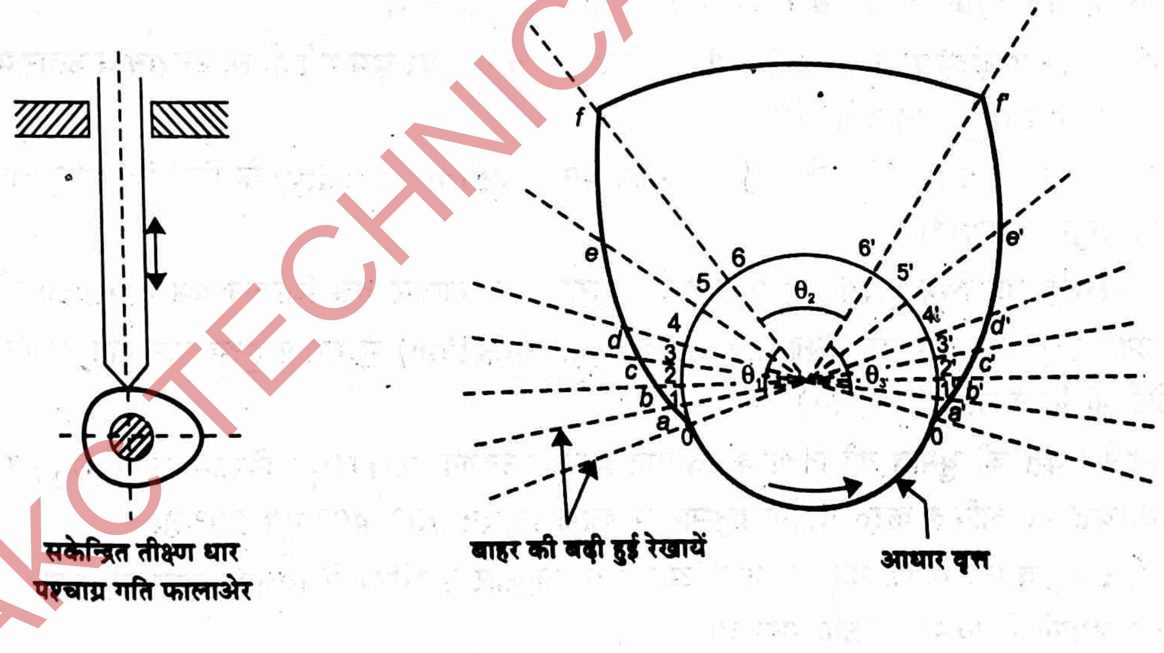
§ 6.6 कैम प्रोफाइल का संश्लेषण (Synthesis of Cam Profile)

कैम का पार्श्व चित्र (cam profile) बनाना उत्क्रमण के सिद्धान्त (principle of inversion) पर आधारित है। इसमें पहले किसी भी प्रकार की गति के लिए फालोअर का विस्थापन आरेख प्राप्त कर लेते हैं। फिर उसकी मदद से कैम प्रोफाइल तैयार करते हैं।

इसमें कैम को स्थिर रखा जाता है तथा कैम के घूमने की विपरीत दिशा में कैम के समान गति पर फालोअर को घुमाया जाता है। ऐसा करने से विपरीत दिशा में फालोअर का ऐसा ही समान सापेक्ष घुमाव प्राप्त होगा जैसाकि कैम के घुमाने पर प्राप्त होता है। इस घुमाव के अनुरूप ट्रेस बिन्दु की चाल को विस्थापन आरेख द्वारा प्राप्त किया जाता है। कैम की सभी स्थितियों के लिए प्राप्त इन ट्रेस बिन्दुओं को **''स्टेशन बिन्दु'' (station point)** कहते हैं तथा इन बिन्दुओं से गुजरने वाले वक्र (curve) को ''पिच वक्र'' (Pitch curve) कहते हैं। एक बार ट्रेस बिन्दु प्राप्त होने पर हम इन स्टेशन बिन्दुओं के अनुरूप फालोअर की स्थितियों को बना सकते हैं। इन स्थितियों में फालोअर की सतह द्वारा बनाया गया आवरण (envelope) ही **''कैम प्रोफाइल'' (cam profile)** कहलाता है। कैम प्रोफाइल बनाने की विधि संक्षेप में निम्न प्रकार है—

6.6.1 कैम पार्श्व चित्र (Cam Profile)

कैम का पार्श्व चित्र प्राप्त करने के लिये निम्न विधि का प्रयोग किया जाता है, जो तीक्ष्ण धार (knife edge) संकेन्द्रित पश्चाग्र गति फालोअर के लिये है। देखिये चित्र 6.15 (a)।



चित्र 6.15.

(i) सर्वप्रथम फालोअर की गति के अनुसार विस्थापन आरेख बनाते हैं।

(ii) इसके पश्चात् दिये अर्धव्यास को लेकर कैम का आधारवृत्त (base circle) बनाते हैं।

(iii) अब प्रश्न में दी गई कैम की कोणीय गति की दिशा (direction) को आधार वृत्त पर प्रदर्शित करते हैं। यदि प्रश्न में कोणीय गति की कोई दिशा नहीं दी गई हो तो कोई भी दिशा दक्षिणावृत्त (clockwise) या वामावृत्त (anticlockwise) मान लेते हैं।

AKOTECHNICAL CLASSES

(iv) अब कैम की घुमाव की दिशा के विपरीत दिशा में आधार वृत्त पर क्रमशः उत्थान कोण (θ_1), विश्राम कोण (θ_2) एवं उतार कोण (θ_3) को रेखांकित करते हैं। देखिये चित्र 6.15 (b)।

(v) अब उत्थान कोण (θ_1) एवं उतार कोण (θ_3) को उतने ही सम भागों में विभाजित करते हैं जितने में विस्थापन आरेख (displacement diagram) में उत्थान कोण (θ_1) एवं उतार कोण (θ_3) को विभाजित किया है।

(vi) इसके पश्चात् प्राप्त विभक्त भागों को आधार वृत्त के केन्द्र से मिलाकर, आधार वृत्त से बाहर की ओर रेखाओं को बढ़ाते हैं।

(vii) अब विस्थापन आरेख पर प्राप्त $1a, 2b, 3c, 4d, 5e, 6f, 6'f', 5'e', 4'd', 3'c', 2'b', 1'a'$ दूरियों को आधार वृत्त से बाहर की ओर बढ़ाई गई इन रेखाओं पर, आधार वृत्त से मापकर अंकित करते हैं।

(viii) इस प्रकार बाहर की ओर बढ़ी हुई इन रेखाओं (extended lines) पर प्राप्त बिन्दुओं को मिलाने पर जो वक्र प्राप्त होगा वह कैम का दी गई दशाओं में पार्श्व चित्र (cam profile) होगा। देखिये चित्र 6.15 (b)।

उदाहरण 6.1— किसी कैम की सहायता से क्षुरधार (knife edged) फालोअर पश्चाग्र गति कर रहा है तो निम्न की सहायता से कैम का पार्श्व चित्र खींचिये—

(i) कैम फालोअर को समान वेग (uniform velocity) से 70° के घुमाव में 40 mm उठाती है।

(ii) इसके पश्चात् 40° के घुमाव तक फालोअर स्थिर रहता है।

(iii) फिर 80° के घुमाव में फालोअर समान गति से अपनी पूर्व स्थिति पर आ जाता है।

(iv) कैम के शेष 170° के घुमाव में फालोअर फिर स्थिर रहता है।

कैम का न्यूनतम अर्द्धव्यास 50 mm है। यदि कैम 300 r.p.m. पर घूम रही हो तो उत्थान व उतार में फालोअर के अधिकतम वेग तथा त्वरण ज्ञात कीजिये।

हल—1. सर्वप्रथम चित्र 6.16 (a) के अनुसार समान वेग (uniform velocity) के लिये विस्थापन आरेख 6.5 (i) में बताई विधि के अनुसार बनाइये।

2. इसके पश्चात् अग्र चित्र 6.16 (b) में दिखाये अनुसार एक आधार वृत्त जिसका व्यास 50 mm को बनाते हैं।

3. अब आधार वृत्त पर वामावर्त्त दिशा (anticlockwise direction) में घूमता हुआ मान लेते हैं। (क्योंकि प्रश्न में घुमाव की कोई भी दिशा नहीं दी गई है।)

4. अब आधार वृत्त की घुमाव की दिशा के विपरीत क्रमशः उत्थान कोण (θ_1), विश्राम कोण (θ_2) एवं उतार कोण (θ_3) को आधारवृत्त पर अंकित करते हैं। प्रश्नानुसार ये कोण क्रमशः 70°, 40° एवं 80° हैं।

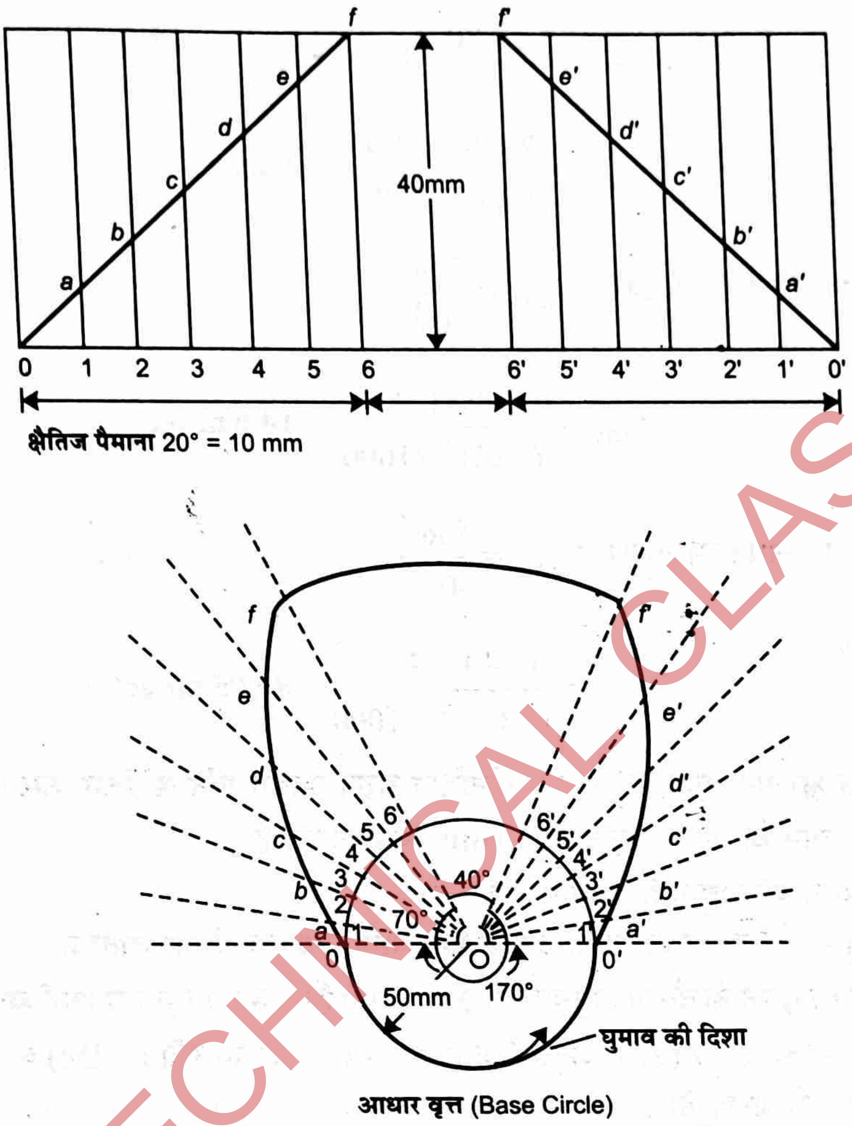
5. इसके बाद θ_1 व θ_3 कोणों को विस्थापन आरेख के अनुसार समभागों में विभक्त करते हैं। यहाँ इन कोणों में से प्रत्येक को छः समभागों में विभक्त किया गया है।

6. अब इन विभक्त हुए कोणों के प्रत्येक बिन्दु को आधार वृत्त के केन्द्र से मिला बढ़ाते हैं। इस प्रकार प्राप्त रेखायें 01, 02, 03, 04, 05, 06 एवं 06′, 05′, 04′, 03′, 02′, 01′ को आधार वृत्त से बाहर की ओर बढ़ाते हैं।

7. इसके पश्चात् इन बढ़ी हुई रेखाओं पर आधार वृत्त से विस्थापन आरेख पर प्राप्त दूरियाँ क्रमशः $1a, 2b, 3c, 4d, 5e, 6f$ व $6'f', 5'e', 4'd', 3'c', 2'b', 1'a'$ अंकित करते हैं।

8. अब इन रेखाओं पर प्राप्त बिन्दुओं $0, a, b, c, d, e, f, f', e', d', c', b', a', 0$ को एक वक्र से मिलाकर कैम पार्श्व को प्राप्त करते हैं। देखिये चित्र 6.16 (b)।

AKC TECHNICAL CLASSES



चित्र 6.16.

AKC TECHNICAL CLASSES

हम जानते हैं, कि फालोअर का उत्थान में अधिकतम वेग

$$\therefore \quad v_{max} = \frac{2S.\omega}{\theta_1} \qquad \text{जहाँ उत्थान } (s) = 40\,\text{mm},$$

$$\text{उत्थान कोण } (\theta_1) = 70° \qquad \therefore \quad \theta_1 = \frac{70 \times \pi}{180} = 1.22\,\text{rad.}$$

तथा
$$\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi \times 300}{60} = 31.4\,\text{rad/sec.}$$

अब
$$v_{max} = \frac{2 \times 40 \times 31.4}{1.22 \times 1000} = \mathbf{2.059\ m/s}$$
उत्तर

इसी प्रकार फालोअर के उतार में अधिकतम वेग

$$v'_{max} = \frac{2S\omega}{\theta_3}$$

$$\text{यहाँ उतार कोण} = \frac{\pi \times 80}{180} = 1.396 \text{ rad.}$$

अत:
$$v'_{max} = \frac{2 \times 40 \times 31.4}{1.396 \times 1000} = \mathbf{1.8\ m/sec}$$ **उत्तर**

फालोअर का उत्थान में अधिकतम त्वरण $f_{max} = \dfrac{4S\omega^2}{\theta_1^2}$

$$\therefore \quad f_{max} = \frac{4 \times 40 \times (31.4)^2}{(1.22)^2 \times 1000} = \mathbf{10.6\ m/sec^2}$$ **उत्तर**

फालोअर का उतार में अधिकतम त्वरण $f'_{max} = \dfrac{4S\omega^2}{\theta_3^2}$

$$\therefore \quad f'_{max} = \frac{4 \times 40 \times (31.4)^2}{(1.396)^2 \times 1000} = \mathbf{80.95\ m/sec^2}$$ **उत्तर**

उदाहरण 6.2—एक क्षुरधार अनुगामी की निम्नलिखित सरल आवर्त गति के लिए कैम प्रोफाइल खींचिये–

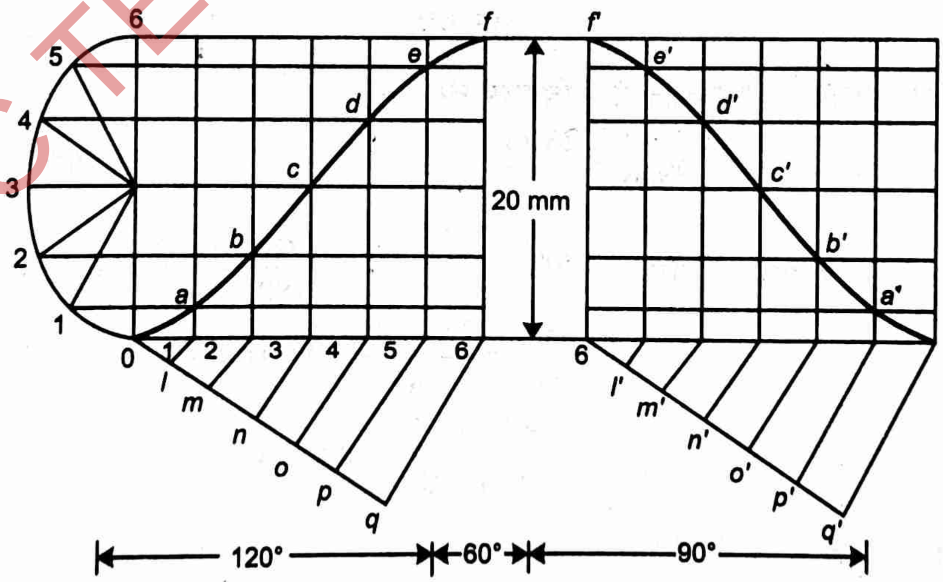
(i) कैम के 120° घूमने के दौरान अनुगामी 20 mm ऊपर उठता है।

(ii) कैम के 60° घूमने पर अनुगामी विश्राम करता है।

(iii) कैम के 90° घूमने के दौरान अनुगामी अपनी प्रारम्भिक अवस्था में आ जाता है।

(iv) कैम के शेष समय घूमने के दौरान अनुगामी विश्राम करता है। कैम का न्यूनतम अर्द्धव्यास 20 mm मानिये।

हल—1. सर्वप्रथम अग्र चित्र 6.17 (a) के अनुसार अनुगामी के सरल आवर्त गति (SHM) के लिये विस्थापन आरेख (§6.5.(ii)) में दी गई विधि से बनाते हैं।



(a) **विस्थापन आरेख**

चित्र 6.17.

AKC TECHNICAL CLASSES

2. अब आधार वृत्त, 20 mm अर्धव्यास को लेकर चित्र 6.17(b) के अनुसार बनाते हैं।

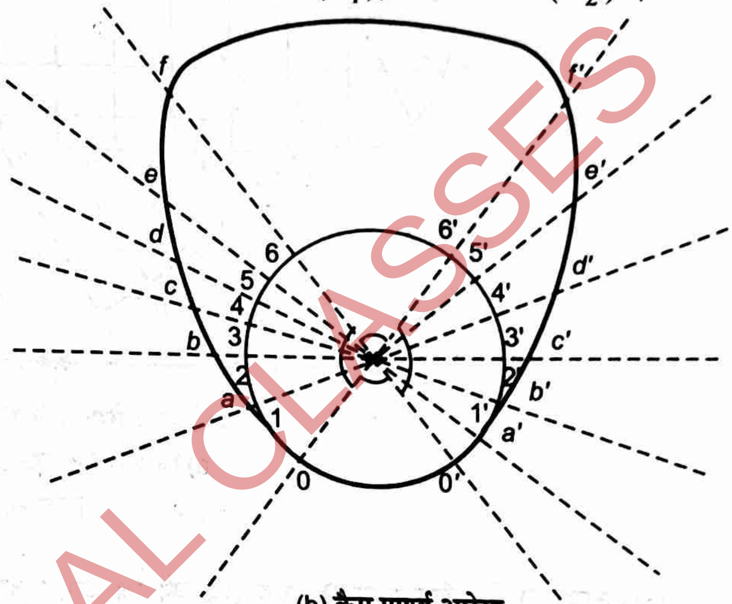
3. आधार वृत्त पर घुमाव की दिशा वामावृत्त (anticlockwise) मानकर दर्शाते हैं।

4. इसके पश्चात् आधार वृत्त की घुमाव की दिशा के विपरीत क्रमशः उत्थान कोण (θ_1), विश्राम कोण (θ_2) एवं उतार कोण (θ_3) को आधार वृत्त पर अंकित करते हैं। ये कोण क्रमशः 120°, 60° व 90° हैं।

5. इसके बाद उत्थान कोण (θ_1) एवं उतार कोण (θ_3) को क्रमशः उतने सम भागों में विभक्त करते हैं, जितने भागों में विस्थापन आरेख में कोणीय विस्थापन θ_1 एवं θ_3 को विभक्त किया गया है। यहाँ इन कोणों में से प्रत्येक को छः भागों में विभक्त किया गया है।

6. अब इन विभक्त हुए कोणों के प्रत्येक बिन्दु को आधार वृत्त के केन्द्र से मिला देते हैं। इस प्रकार प्राप्त रेखायें 01, 02, 03, 04, 05, 06, एवं 06′, 05′, 04′, 03′, 02′, 01′ को आधार वृत्त से बाहर की ओर बढ़ाते हैं।

7. इसके पश्चात् इन बढ़ी हुई रेखाओं पर आधार वृत्त से विस्थापन आरेख पर प्राप्त दूरियाँ क्रमशः 1*a*, 2*b*, 3*c*, 4*d*, 5*e*, 6*f* व 6′*f*′, 5′*e*′, 4′*d*′, 3′*c*′, 2′*b*′, 1′*a*′ अंकित करते हैं।



(b) कैम पार्श्व आरेख

चित्र 6.17.

8. अब इन रेखाओं पर प्राप्त बिन्दुओं 0, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *f*′, *e*′, *d*′, *c*′, *b*′, *a*′, 0 को मिलाकर एक वक्र से प्राप्त करते हैं जो कैम का पार्श्व (profile) होगा। देखिये चित्र 6.17 (b)।

उदाहरण 6.3—किसी कैम की सहायता से एक रोलर फालोअर, जिसके रोलर का व्यास 20 mm है, गति कर रहा है, तो निम्न की सहायता से कैम का पार्श्व (profile) खींचिये—

(i) कैम फालोअर को सरल आवर्त गति (S.H.M.) में अपने 60° के घुमाव में 40 mm उठाती है।

(ii) इसके पश्चात् 30° के घुमाव तक फालोअर स्थिर रहता है।

(iii) फिर 90° के घुमाव तक फालोअर सरल आवर्त गति में अपनी पूर्व स्थिति पर आ जाता है।

(iv) कैम के शेष घुमाव में फालोअर फिर स्थिर रहता है।

कैम का न्यूनतम अर्धव्यास 45 mm है। यदि कैम 200 r. p. m. पर घूम रही है तो उत्थान तथा उतार में फालोअर का अधिकतम वेग तथा त्वरण ज्ञात कीजिये।

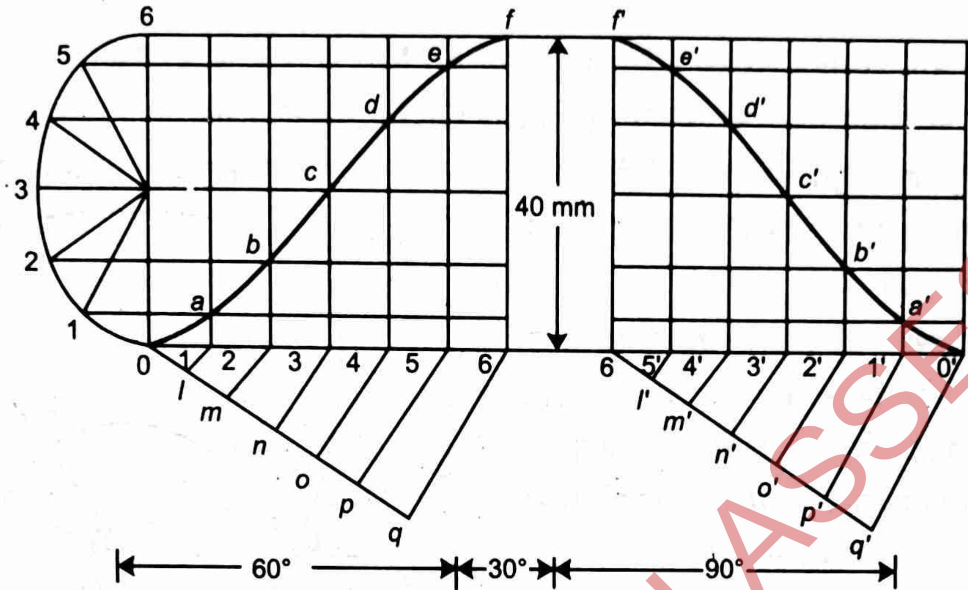
हल—(i) सर्वप्रथम फालोअर के उत्थान व उतार में सरल आवर्त गति के लिये विस्थापन आरेख चित्र 6.18 (a) के अनुसार §6.5.(ii) में दी गई विधि के अनुसार बनाते हैं।

(ii) अब आधार वृत्त को 45 mm का अर्धव्यास लेकर बनाते हैं। आधार वृत्त पर घुमाव की दिशा अंकित करते हैं।

(iii) इसके पश्चात् आधार वृत्त के अर्धव्यास 45 mm में रोलर का अर्धव्यास 10 mm जोड़कर तथा आधार वृत्त के केन्द्र को ही लेकर पिच वृत्त (pitch circle) की रचना करते हैं।

(iv) इसके बाद बाधार वृत्त की घुमाव की दिशा के विपरीत कोणीय विस्थापन θ_1, θ_2 एवं θ_3 को पिच वृत्त पर चित्रानुसार अंकित करते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES



उपरोक्त आरेख के लिए क्षैतिज पैमाना 10 = 10 mm

(a) विस्थापन आरेख (Displacement diagram)

चित्र 6.18.

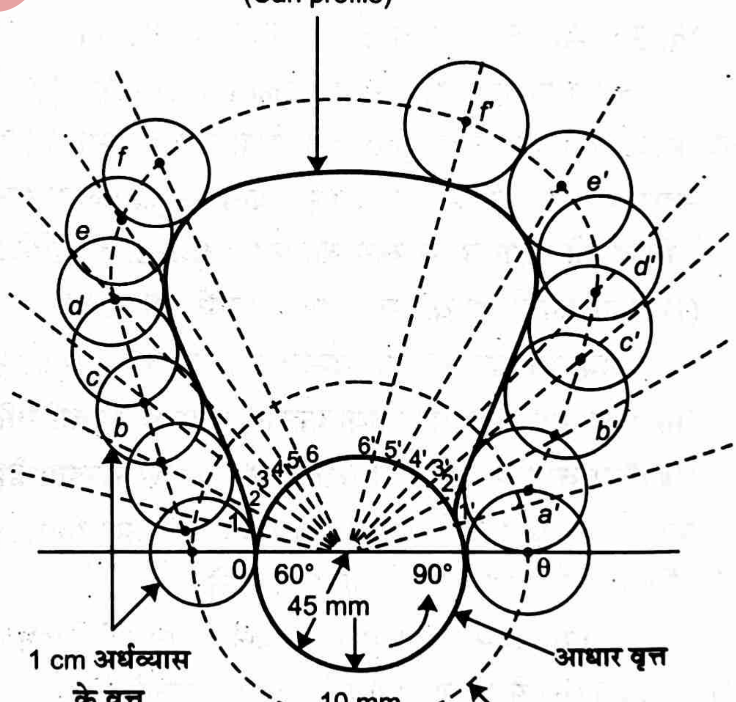
(v) अब कोणीय विस्थापन θ_1 एवं θ_3 को विस्थापन आरेख के अनुरूप सम भागों में विभक्त करते है।

(vi) इस प्रकार रोलर वृत्त पर विभक्त भागों को विभिन्न रेखाओं से आधार वृत्त के केन्द्र से मिलाते है तथा इन रेखाओं को पिच वृत्त से बाहर की ओर बढ़ाते हैं।

(vii) इन बढ़ी हुई रेखाओं (extended lines) पर पिच वृत्त (pitch circle) से बाहर की ओर, विस्थापन ओरख से प्राप्त, विस्थापन की दूरियाँ $1a$, $2b$, $3c$, $4d$, $5e$, $6f, 6'f', 5'e', 4'd'$, $3'c', 2'b', 1'a'$ को अंकित करते है।

(viii) इस प्रकार इन बढ़ी हुई रेखाओं पर क्रमशः प्राप्त बिन्दुओं a, b, c, d, e, f, $f, f', e', d', c', b', a'$ को केन्द्र मानकर तथा रोलर के अर्धव्यास को लेकर विभिन्न वृत्तों की रचना करते हैं।

(ix) इन विभिन्न वृत्तों को अन्दर की तरफ से स्पर्श करता हुआ वक्र बनाते हैं जो आधार वृत्त को दोनों ओर शून्य पर मिलेगा, यही कैम पार्श्व (cam profile) होगा। देखिये चित्र 6.18 (b)।



(b) आधार आरेख

चित्र 6.18.

AKC TECHNICAL CLASSES

1. फालोअर के उत्थान में अधिकतम वेग,

$$v_{max} = \frac{S}{2}\left(\frac{\pi\omega}{\theta_1}\right)$$

दिया है— उत्थान $S = 40\,\text{mm}$

उत्थान कोण $(\theta_1) = 60° = 1.047\text{ rad}$

कोणीय गति $(\omega) = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi \times 200}{60} = 20.94\text{ rad/sec}$

$$\therefore \quad v_{max} = \frac{S}{2}\left[\frac{\pi\omega}{\theta_1}\right] = \frac{40 \times 3.14 \times 20.94}{2 \times 1.047 \times 1000} = \mathbf{1.255\ m/sec}$$ उत्तर

इसी प्रकार फालोअर के उतार में अधिकतम वेग

$$v'_{max} = \frac{S}{2}\left[\frac{\pi\omega}{\theta_3}\right]$$

$$\therefore \quad v'_{max} = \frac{40}{2}\left[\frac{3.14 \times 20.94 \times 180}{90 \times \pi \times 1000}\right] = \mathbf{0.837\ m/sec}$$ उत्तर

2. फालोअर का उत्थान में अधिकतम त्वरण

$$f_{max} = \frac{S}{2}\left[\frac{\pi\omega}{\theta_1}\right]^2 = \frac{40}{2}\left[\frac{3.14 \times 20.94}{1.047}\right]^2 \times \frac{1}{1000}$$

$$= \mathbf{78.85\ m/sec^2}$$ उत्तर

इसी प्रकार **फालोअर के उतार में अधिकतम त्वरण**

$$f'_{max} = \frac{S}{2}\left[\frac{\pi\omega}{\theta_3}\right]^2 = \frac{40}{2}\left[\frac{3.14 \times 20.94 \times 180}{\pi \times 90}\right]^2 \times \frac{1}{1000}$$

$$= \mathbf{35.045\ m/sec^2}$$ उत्तर

उदाहरण 6.4—10 mm व्यास के रोलर अनुगामी (roller follower) को एक समान गति (uniform velocity) देने के लिए कैम-प्रोफाइल खींचिये जो कैम के आधे चक्र में 60 mm ऊपर उठता है और कैम के अगले आधे चक्र में समान गति से वापसी करता है। कैम-शाफ्ट का व्यास 90 mm है। कैम-शाफ्ट एवं अनुगामी के केन्द्रों के बीच की न्यूनतम दूरी 50 mm है। कैम वामावर्ती (anticlockwise) दिशा में घूमता है एवं रोलर अनुगामी का पथ कैम-शाफ्ट की अक्ष से गुजरता है।

हल—दिया है—

1. उत्थान $(S) = 60\,\text{mm}$
2. उत्थान कोण $(\theta_1) = 180°$
3. विश्राम कोण $(\theta_2) = 0°$

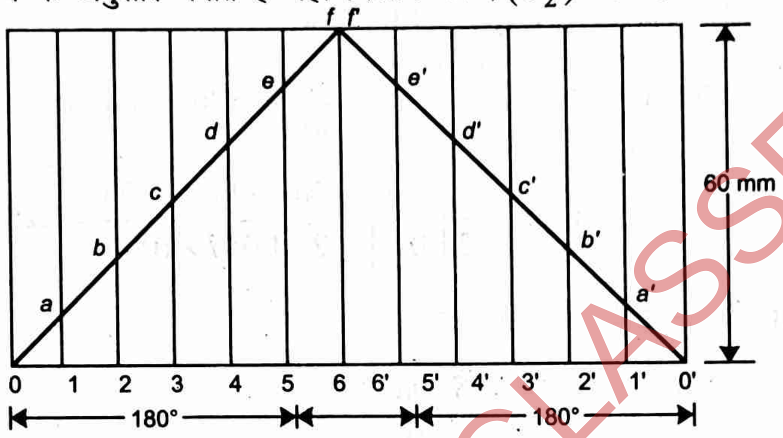
AKC TECHNICAL CLASSES

4. उतार कोण $(\theta_3) = 180°$

5. कैम का न्यूनतम अर्धव्यास $= (50 - 5)\,mm = 45\,mm$

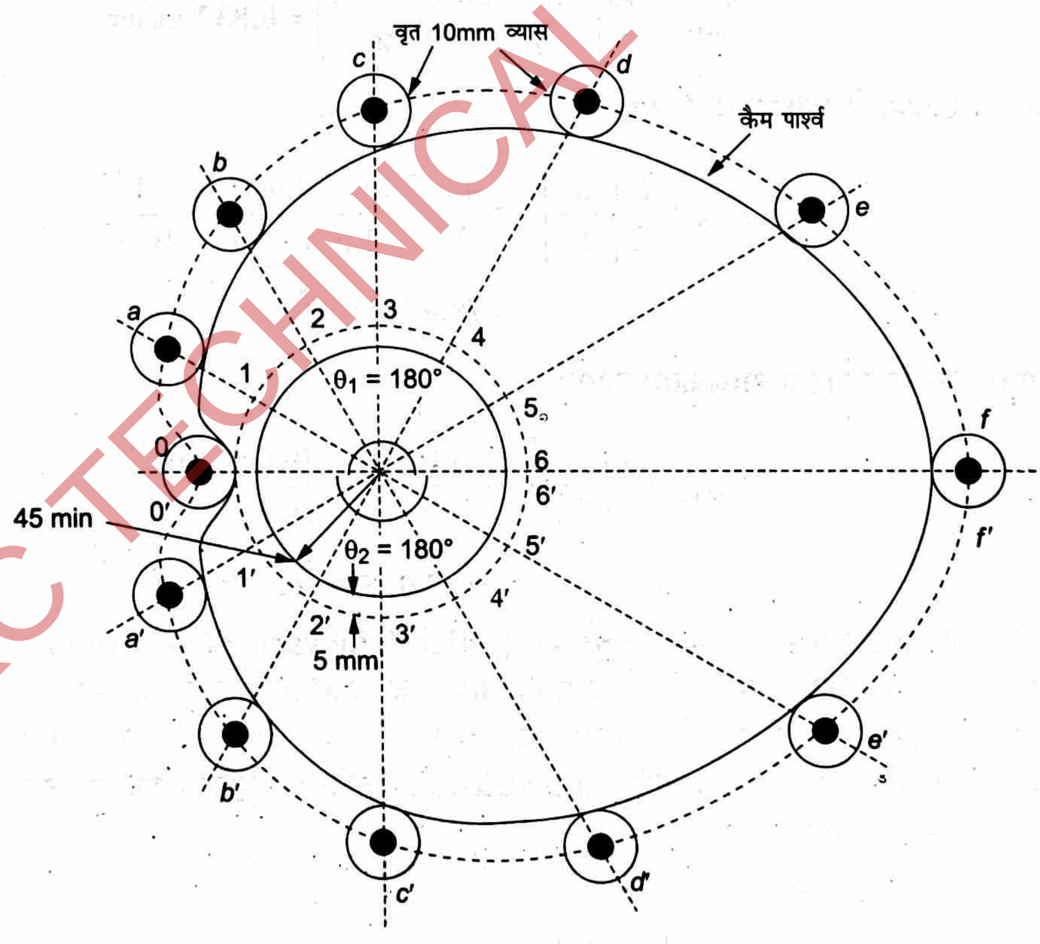
6. रोलर का व्यास $= 10\,mm$

इस प्रश्न में सर्वप्रथम फालोअर के उत्थान में व उतार में एक समान गति के लिये विस्थापन आरेख चित्र 6.19 (a) के अनुसार §6.5.(i) में बताई विधि के अनुसार बनाते हैं यहाँ विश्राम कोण $(\theta_2) = 0°$ होगा।



उपरोक्त आरेख के लिये, क्षैतिज पैमाना 60° = 10 mm

(a) विस्थापन आरेख



(b) कैम पार्श्व आरेख

चित्र 6.19.

AKC TECHNICAL CLASSES

इसके पश्चात् कैम पार्श्व (cam profile) बनाने के लिये उदाहरण 6.3 में दी गई विधि का अनुसारण करते हैं। देखिये चित्र 6.19 (b) ।

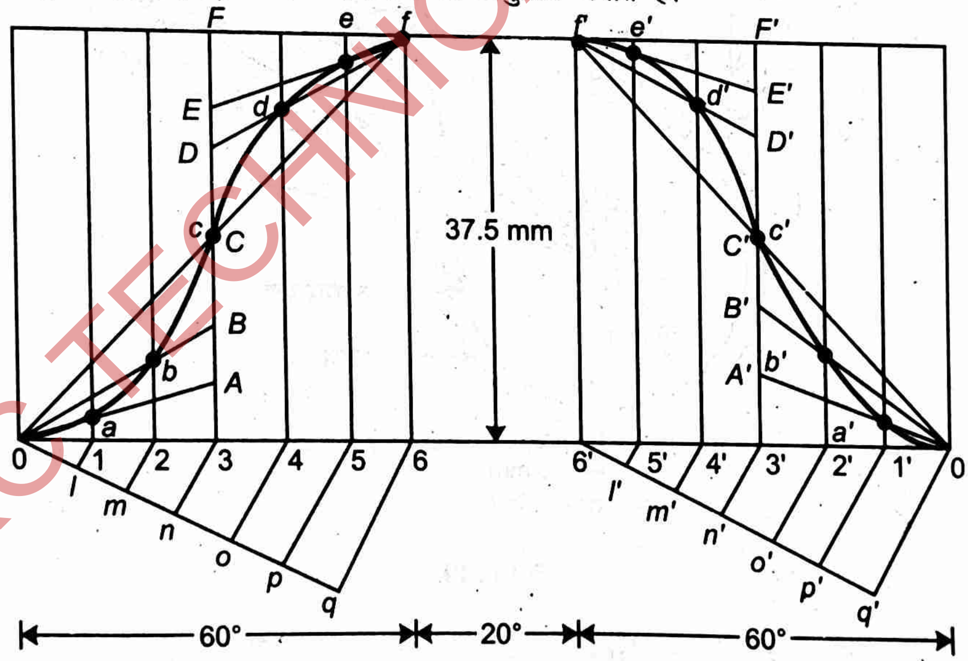
उदाहरण 6.5—एक अन्तर्दहन इंजन के निर्वात वाल्व (exhaust value) को नियन्त्रित करने के लिये कैम पार्श्व (cam profile) बनाइये। वाल्व को खोलने एवं बन्द करने में फालोअर समान वेग वृद्धि एवं वेग ह्रास से गति करता है। उत्थान एवं उतार कोण में से प्रत्येक 60° है। वाल्व अपनी पूर्णतया खुली अवस्था में कैम के 20° घुमाव तक रहता है।

वाल्व का उत्थान 37.5 mm एवं कैम का न्यूनतम अर्धव्यास 50 mm है। रोलर फालोअर का व्यास 20 mm है। फालोअर की स्ट्रोक रेखा कैम की अक्ष से होकर गुजरती है।

हल—दिया है,

1. फालोअर की गति समान वेग वृद्धि एवं वेग ह्रास से होती है।
2. उत्थान कोण $(\theta_1) = 60°$
3. विश्राम कोण $(\theta_2) = 20°$
4. उतार कोण $(\theta_3) = 60°$
5. वाल्व का उत्थान $= 37.5 \text{ mm}$
6. कैम का न्यूनतम अर्धव्यास $= 50 \text{ mm}$
7. रोलर का व्यास $= 20 \text{ mm}$

(i) सर्वप्रथम फालोअर के उत्थान तथा उतार में समान वेग वृद्धि व वेग ह्रास गति के लिये विस्थापन आरेख अग्र चित्र 6.20 (a) के अनुसार §6.5(iii) में दी गई विधि के अनुसार बनाते हैं।



(a) विस्थापन आरेख

चित्र 6.20.

(ii) अब कैम का न्यूनतम अर्धव्यास 50mm के बराबर लेकर आधार वृत्त (base circle) की रचना करे। आधार वृत्त पर घुमाव की दिशा वामावृत्त (anticlockwise direction) को अंकित करते हैं।

AKG TECHNICAL CLASSES

(iii) इसके पश्चात् आधार वृत्त के अर्धव्यास 50 mm में रोलर का अर्धव्यास 10 mm जोड़कर आधार वृत्त के केन्द्र को लेकर पिच वृत्त (pitch circle) को बनाते हैं।

(iv) इसके बाद आधार वृत्त की घुमाव की दिशा के विपरीत कोणीय विस्थापन θ_1, θ_2 एवं θ_3 को पिचवृत्त पर चित्रानुसार अंकित करते हैं।

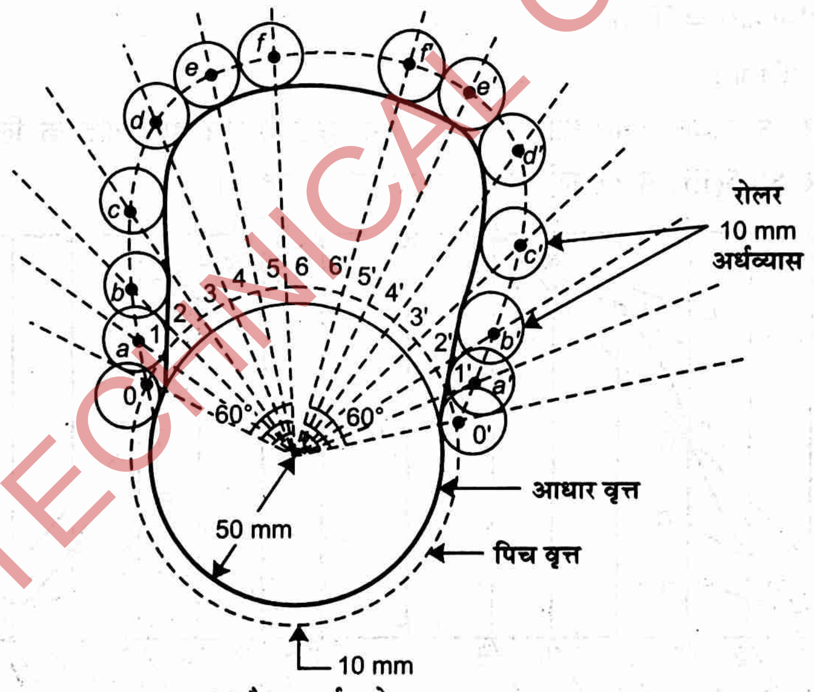
(v) अब कोणीय विस्थापन θ_1 एवं θ_3 को, विस्थापन आरेख के अनुरूप समभागों, में विभक्त करें। यहाँ प्रत्येक को छः बराबर भागों में विभक्त करते हैं।

(vi) इस प्रकार रोलर वृत्त पर विभक्त भागों को, विभिन्न रेखाओं से, आधार वृत्त के केन्द्र से मिलायें तथा इन रेखाओं को पिच वृत्त से बाहर की ओर बढ़ाते हैं।

(vii) इन बढ़ी हुई रेखाओं (extended lines) पर पिच वृत्त (pitch circle) से बाहर की ओर, विस्थापन ओरख से प्राप्त विस्थापन की दूरियाँ $1a$, $2b$, $3c$, $4d$, $5e$, $6f$, $6'f'$, $5'e'$, $4'd'$, $3'c'$, $2'b'$, $1'a'$ को अंकित करते है।

(viii) इस प्रकार इन बढ़ी हुई रेखाओं पर क्रमशः प्राप्त बिन्दुओं a, b, c, d, e, f, f', e', d', c', b', a' को केन्द्र मानकर तथा रोलर के अर्धव्यास को लेकर विभिन्न वृत्तों की रचना करते हैं।

(ix) इन विभिन्न वृत्तों को अन्दर की तरफ से स्पर्श करता हुआ वक्र (curve) बनाते हैं जो आधार वृत्त को दोनों ओर शून्य पर मिलेगा, यही कैम पार्श्व (profile) होगा। देखिये चित्र 6.20 (b) ।



(a) कैम पार्श्व आरेख

चित्र 6.20.

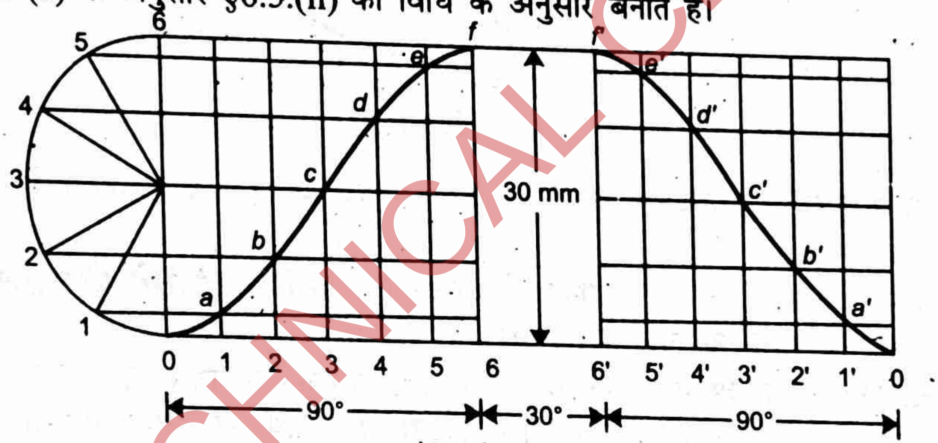
उदाहरण 6.6—एक चपटे मुख फालोअर (flat face follower) को सरल आवर्त गति प्रदान करने के लिये कैम की रूपरेखा बनाइये। फालोअर का स्ट्रोक 30 mm है। कैम की न्यूनतम त्रिज्या 35 mm है। फालोअर अक्ष कैम के घूर्णन अक्ष से होकर जाती है। प्रत्येक स्ट्रोक को पूरा करने के लिये कैम $\frac{1}{4}$ चक्कर घूमती है तथा फालोअर ऊपर उठी स्थिति में कैम के $\frac{1}{12}$ चक्कर घूमने तक स्थिर रहता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

हल—दिया है—

1. फालोअर का उत्थान व उतार दोनों ही सरल आवर्त गति में होते हैं।
2. फालोअर का उत्थान $(S) = 30\,mm$
3. कैम की न्यूनतम त्रिज्या $= 35\,mm$
4. उत्थान में कैम का कोणीय विस्थापन $(\theta_1) = \frac{1}{4}$ चक्कर $= 90°$
5. उतार के कैम का कोणीय विस्थापन $(\theta_3) = \frac{1}{4}$ चक्कर $= 90°$
6. विश्राम कोण $(\theta_2) = \frac{1}{12}$ चक्कर $= 30°$
7. कैम का घूर्णन अक्ष फालोअर की अक्ष से होकर जाता है।

(i) सर्वप्रथम फालोअर के सरल आवर्त गति के लिये उत्थान एवं उतार का विस्थापन आरेख (displacement diagram) चित्र 6.21 (a) के अनुसार §6.5.(ii) की विधि के अनुसार बनाते हैं।



क्षैतिज पैमाना 15° = 10 mm

(a) विस्थापन आरेख (Displacement diagram)

चित्र 6.21.

(ii) अब आधार वृत्त को 35 mm की त्रिज्या (radius) लेकर बनाते हैं। आधार वृत्त पर घुमाव की दिशा अंकित करते हैं।

(iii) इसके पश्चात् आधार वृत्त की घुमाव की दिशा के विपरीत कोणीय विस्थापन θ_1, θ_2 एवं θ_3 को आधार वृत्त पर अंकित करते हैं।

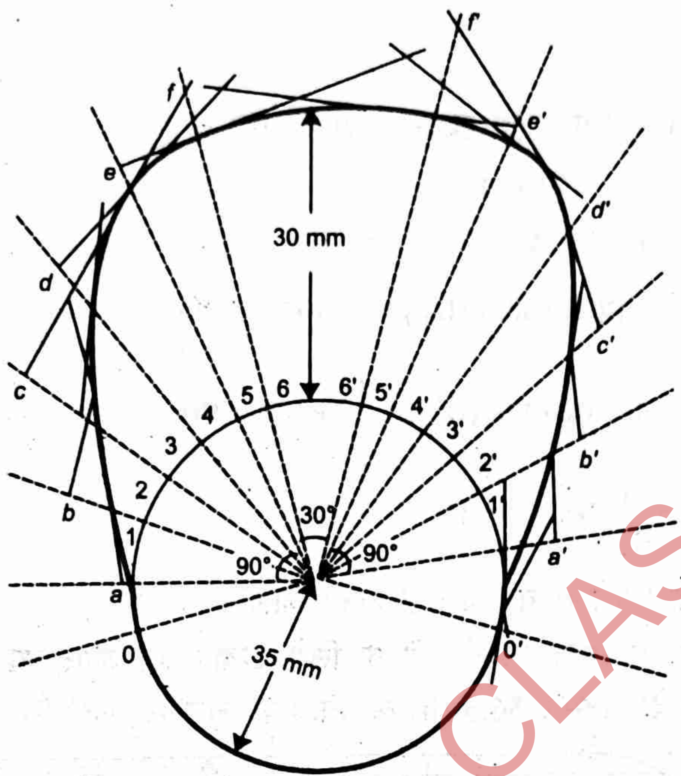
(iv) अब कोणीय विस्थापन θ_1 एवं θ_3 को, विस्थापन आरेख के अनुरूप समभागों मे विभक्त करते हैं। यहाँ पर प्रत्येक को छः बराबर भागों में बाँटा गया है।

(v) इस प्रकार आधार वृत्त पर विभक्त भागों को विभिन्न रेखाओं से वृत्त के केन्द्र से मिलाते हैं तथा इन रेखाओं को आधार वृत्त से बाहर की ओर चित्र 6.21 (b) के अनुसार बढ़ाते हैं।

(vi) अब इन बढ़ी हुई रेखाओं (extended lines) पर आधार वृत्त से बाहर की ओर विस्थापन आरेख से प्राप्त दूरियाँ $1a$, $2b$, $3c$, $4d$, $5e$, $6f$, $6'f'$, $5'e'$, $4'd'$, $3'c'$, $2'b'$, $1'a'$ को अंकित करते हैं।

(vii) इस प्रकार इन रेखाओं पर प्राप्त बिन्दुओं a, b, c, d, f, f', e', d', c', b', a' व आधार वृत्त के दोनों ओर के शून्य बिन्दुओं पर लम्ब रेखायें (perpendicular lines) बनाते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES



(b) कैम पार्श्व आरेख

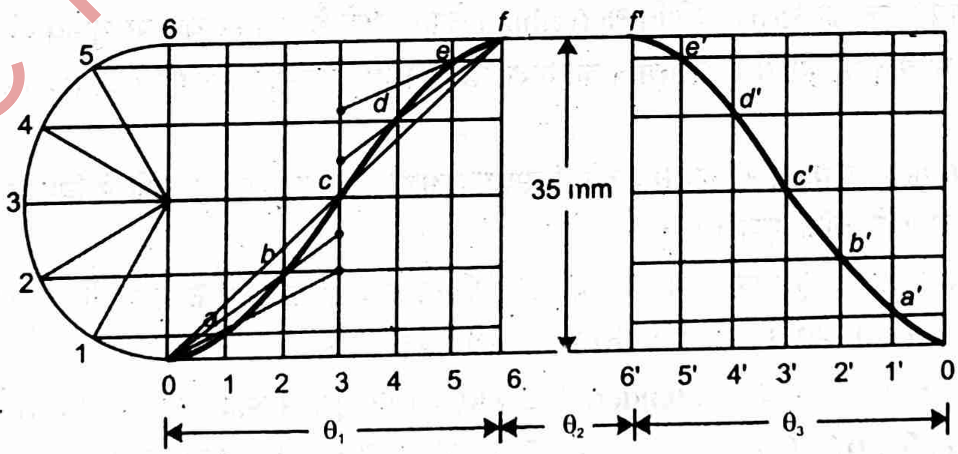
चित्र 6.21.

(viii) इन लम्ब रेखाओं को अन्दर की ओर से स्पर्श करता हुआ वक्र (curve) प्राप्त करते हैं। यही कैम का पार्श्व चित्र (cam profile) होगा।

उदाहरण 6.7—निम्न आँकड़ों की सहायता से कैम का पार्श्व चित्र खींचिये जो प्रदक्षिण में घूमती है और एक क्षुरधार (knife edged) फालोअर को चलाती है।

(a) कैम का न्यूनतम अर्धव्यास = 30 mm (b) फालोअर का उत्थान (lift) = 35 mm (c) कैम का उत्थान कोण (θ_1) = 60° (d) कैम का विश्राम कोण (θ_2) = 20° (e) कैम का उतार कोण (θ_3) = 60°।

उत्थान (ascent) में फालोअर समान वेग वृद्धि तथा वेगह्रास (uniform acceleration and deceleration) से गति करता है तथा उतार में सरल आवर्त गति (S.H.M.) से गति करता है। कैम 200 चक्र प्रति मिनट पर घूम रही है।



क्षैतिज पैमाना 60° = 10 mm

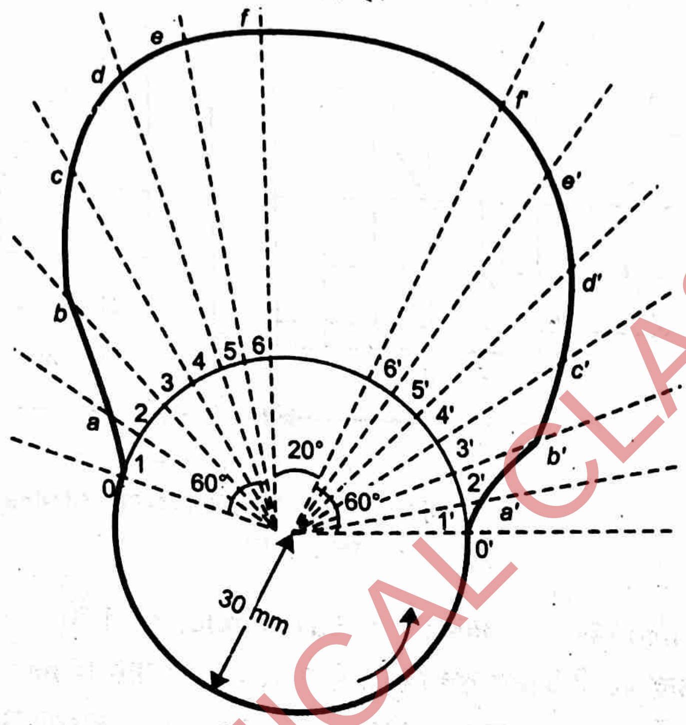
(a) विस्थापन आरेख (Displacement diagram)

चित्र 6.22.

AKC TECHNICAL CLASSES

हल—1. सर्वप्रथम उत्थान में विस्थापन आरेख समान वेग वृद्धि तथा वेग ह्रास §6.5 (iii) में दी गई विधि से तथा उतार में विस्थापन आरेख सरल आवर्त गति §6.5.(ii) में दी गई विधि से चित्र 6.22 (a) के अनुसार बनाते हैं।

2. इसके पश्चात् कैम पार्श्व (profile) पिछले उदाहरणों में क्षुरधार फालोअर (knife edged follower) के लिये दी गई विधि का प्रयोग करके चित्र 6.22 (b) के बराबर बनाते हैं।



(b) कैम पार्श्व (Profile)

चित्र 6.22.

उदाहरण 6.8—रोलर अनुगामी का व्यास 20 mm है। अन्य आँकड़े निम्न प्रकार हैं–

(i) उत्थान (lift) = 40 mm,

(ii) उत्थान कोण (angle of ascent) = 60°,

(iii) विश्राम कोण (angle of rest) = 60°,

(iv) पतन कोण (angle of fall) = 90°,

(v) क्रिया कोण (angle of action) = 150°

कैम का न्यूनतम अर्धव्यास 30 mm तथा वह वामावर्त दिशा में घूम रही है। अनुगामी की गति सरल आवर्त है।

हल—दिया है—

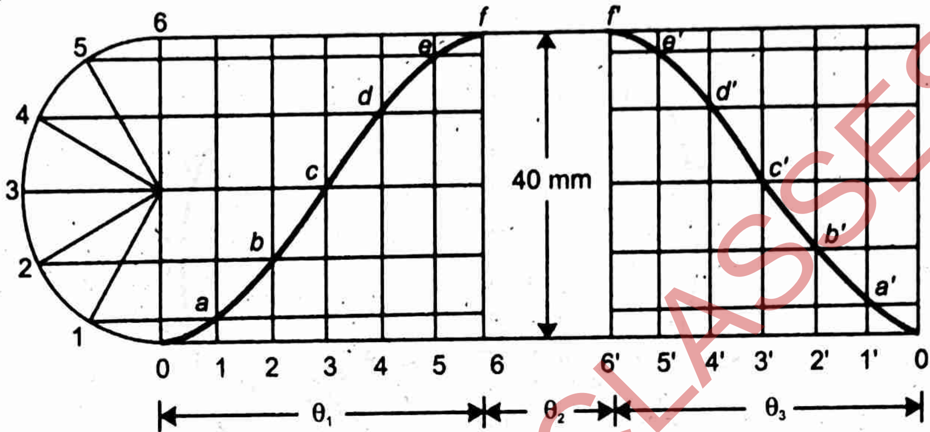
1. अनुगामी के सिरे पर लगे रोलर का व्यास = 20 mm
2. कैम की न्यूनतम त्रिज्या = 30 mm
3. अनुगामी का उत्थान (lift) = 40 mm
4. अनुगामी की उत्थान तथा उतार में गति = सरल आवर्त गति (SHM)
5. उत्थान कोण $(\theta_1) = 60°$
6. विश्राम कोण $(\theta_2) = 60°$

AKC TECHNICAL CLASSES

7. पतन या उतार कोण $(\theta_3) = 90°$

8. क्रिया कोण $(\theta_4) = 150°$

(i) सर्वप्रथम फालोअर के उत्थान (rise) एवं उतार (fall) में सरल आवर्त गति के लिये विस्थापन आरेख §6.5 (ii) में दी गई विधि के अनुसार बनाते हैं। विस्थापन आरेख अग्र चित्र 6.23 (a) में दिखाया गया है।



क्षैतिज पैमाना 60° = 10 mm

(a) विस्थापन आरेख (Displacement diagram)

चित्र 6.23.

(ii) इसके पश्चात् 30 mm त्रिज्या से आधार वृत्त (base circle) बनाते हैं।

(iii) इसके बाद 'O' केन्द्र पर ही आधार वृत्त त्रिज्या में रोलर के अर्धव्यास 10 mm को जोड़कर पिच वृत्त बनाते हैं।

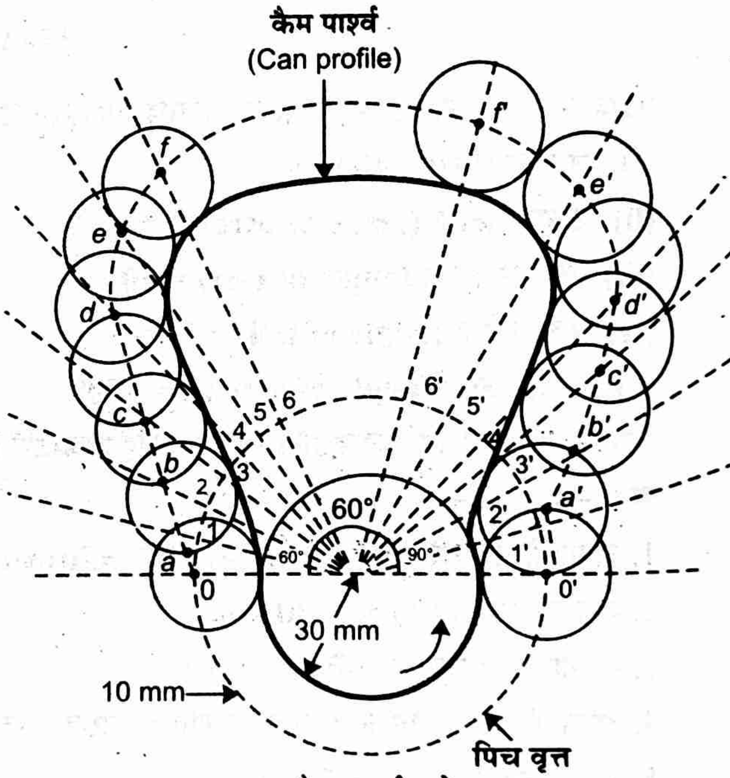
(iv) इसके पश्चात् आधार वृत्त की घुमाव की दिशा के विपरीत कोणीय विस्थापन θ_1, θ_2 एवं θ_3 को पिच वृत्त पर चित्रानुसार अंकित करते हैं।

(v) अब कोणीय विस्थापन θ_1 एवं θ_3 को, विस्थापन आरेख के अनुरूप समभागों में विभक्त करते हैं। यहाँ प्रत्येक को छः भागों में विभक्त करते हैं।

(vi) इस प्रकार रोलर वृत्त पर विभक्त भागों को, विभिन्न रेखाओं से, आधार वृत्त के केन्द्र से मिलाते हैं तथा इन रेखाओं को पिच वृत्त से बाहर की ओर बढ़ाते हैं।

(vii) इन बढ़ी हुई रेखाओं (extended lines) पर पिच वृत्त (pitch circle) से बाहर की ओर, विस्थापन ओरख से प्राप्त, विस्थापन की दूरियाँ $1a$, $2b$, $3c$, $4d$, $5e$, $6f$, $6'f'$, $5'e'$, $4'd'$, $3'c'$, $2'b'$, $1'a'$ को अंकित करते हैं।

(viii) इस प्रकार इन बढ़ी हुई रेखाओं पर क्रमशः प्राप्त बिन्दुओं a, b, c, d, e, f, f', e', d', c', b', a' को केन्द्र मानकर तथा रोलर के अर्धव्यास को लेकर विभिन्न वृत्तों की रचना करते हैं।



(b) कैम पार्श्व आरेख

चित्र 6.23.

AKC TECHNICAL CLASSES

(ix) इन विभिन्न वृत्तों को अन्दर की तरफ से स्पर्श करता हुआ वक्र (curve) बनाते हैं जो आधार वृत्त को दोनों ओर शून्य पर मिलेगा, यही कैम पार्श्व (profile) होगा। देखिये चित्र 6.23 (b)।

उदाहरण 6.9—एक कैम का प्रोफाइल खींचिये जो एक क्षुरधार ऑफसेट अनुगामी (knife edged offset follower) को निम्न प्रकार चलायमान करती है—

(a) कैम के 60° घुमाव में अनुगामी बाहर की ओर गति करता है।

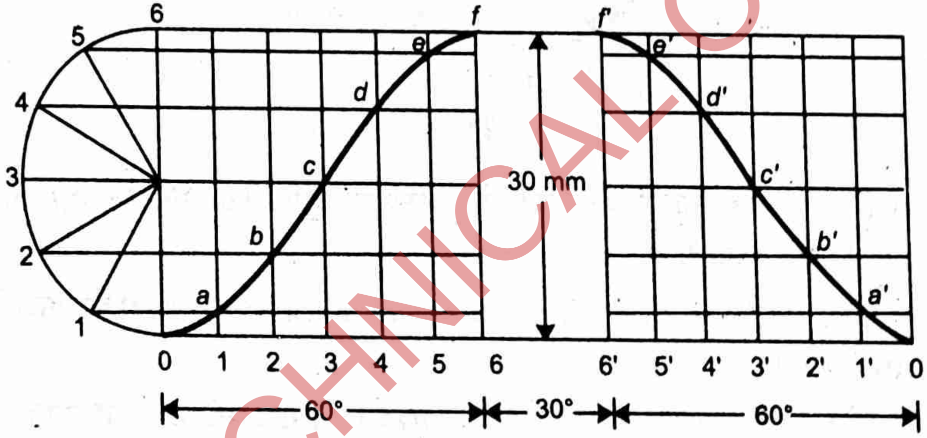
(b) 30° के घुमाव में फालोअर विश्रामावस्था में रहता है।

(c) कैम के 90° घुमाव के दौरान अनुगामी अन्दर की ओर चलता है।

(d) बचे हुए 180° घुमाव में फिर विश्राम अवस्था में रहता है।

अनुगामी का अवघात (stroke) 30 mm है; कैम की न्यूनतम आधार वृत्त त्रिज्या 50 mm है। अनुगामी दोनों अवघातों में सरल आवर्त गति (S. H. M.) से चलायमान होता है। अनुगामी का ऑफसेट 18 mm है तथा कैम वामावर्त दिशा (anticlockwise direction) में घूमती है।

हल—1. सर्वप्रथम उत्थान व उतार में सरल आवर्त गति (S.H.M.) के लिये विस्थापन आरेख § 6.5 (ii) में दी गई विधि के अनुसार खींचते हैं। देखिये चित्र 6.24 (a)।



(a) विस्थापन आरेख (Displacement diagram)

चित्र 6.24.

2. इसके पश्चात् 50 mm त्रिज्या से आधार वृत्त (base circle) बनाता हैं। आधार वृत्त पर दी गई दिशा वामावर्त (anticlockwise) प्रदर्शित करते हैं।

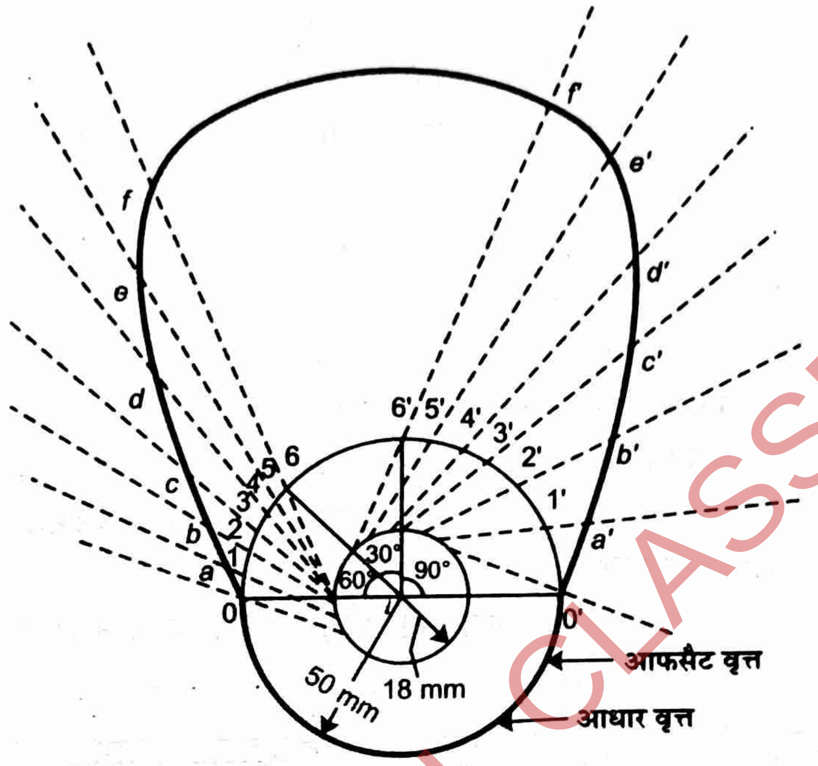
3. अब आधार वृत्त की घुमाव की दिशा के विपरीत, आधार वृत्त पर क्रमशः $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ को अंकित करते हैं।

4. उत्थान कोण (θ_1) एवं उतार कोण (θ_3) में से प्रत्येक को आधार वृत्त पर छः भागों में विभक्त करते हैं।

5. आधार वृत्त के केन्द्र पर ही अनुगामी के दिये गये ऑफसेट 1.8 मिमी को अर्धव्यास मानकर एक अन्य वृत्त की रचना करते हैं।

6. अब आधार वृत्त पर प्राप्त विभिन्न बिन्दुओं 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6′, 5′, 4′, 3′, 2′, 1′, 0′ से रेखायें इस प्रकार खींचते हैं कि वह क्रमशः प्रत्येक बिन्दु से होकर गुजरे तथा ऑफसेट वृत्त पर स्पर्शी हो। इन रेखाओं को आधार वृत्त से बाहर की ओर चित्र 6.24 (b) में दिखाये अनुसार बढ़ाते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES



(b) कैम पार्श्व आरेख

चित्र 6.24.

AKC TECHNICAL CLASSES

7. इसके बाद इन रेखाओं पर आधार वृत्त से बाहर की ओर विस्थापन दूरियाँ $1a$, $2b$, $3c$, $4d$, $5e$, $6f$, $6'f'$, $5'e'$, $4'd'$, $3'c'$, $2'b'$, $1'a'$ अंकित करते हैं।

8. इन बढ़ी रेखाओं पर प्राप्त बिन्दुओं a, b, c, d, e, f, f', e', d', c', b', a', 0 को मिलाते हुए एक वक्र बनाये जो कैम पार्श्व (profile) होगा।

उदाहरण 6.10—निम्न आँकड़ों की सहायता से उस कैम का पार्श्व चित्र खींचिये जोकि एक रोलर फालोअर को चला रही है और फालोअर दोलन कर रहा है तथा उत्थान तथा उतार दोनों ही सरल आवर्त गति में होते हैं।

(a) रोलर का अर्धव्यास = 20 mm

(b) कैम के केन्द्र से फालोअर पिन की दूरी = 90 mm

(c) फालोअर पिन से रोलर केन्द्र तक फालोअर भुजा की दूरी = 75 mm

(d) कैम के आधार वृत्त या न्यूनतम अर्धव्यास वृत्त की त्रिज्या = 30 mm

(e) उत्थान में कैम का घुमाव = 80°

(f) विश्राम में कैम का घुमाव = 50°

(g) उतार में कैम का घुमाव = 100°

(h) फालोअर की भुजा का उत्थान या उतार में पिन पर घुमाव = 20°

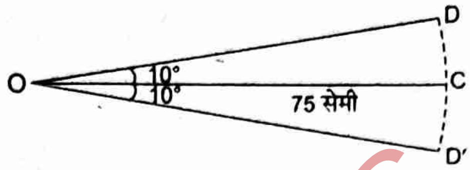
हल—1. सर्वप्रथम फालोअर की भुजा के 20° घुमाव से रोलर पिन द्वारा बनाये गये चाप की लम्बाई ज्ञात करते हैं।

$$DD' \text{ की लम्बाई } = 75 \times \left[\frac{20}{180} \times \pi\right] \text{mm} = 26.18 \text{ mm}$$

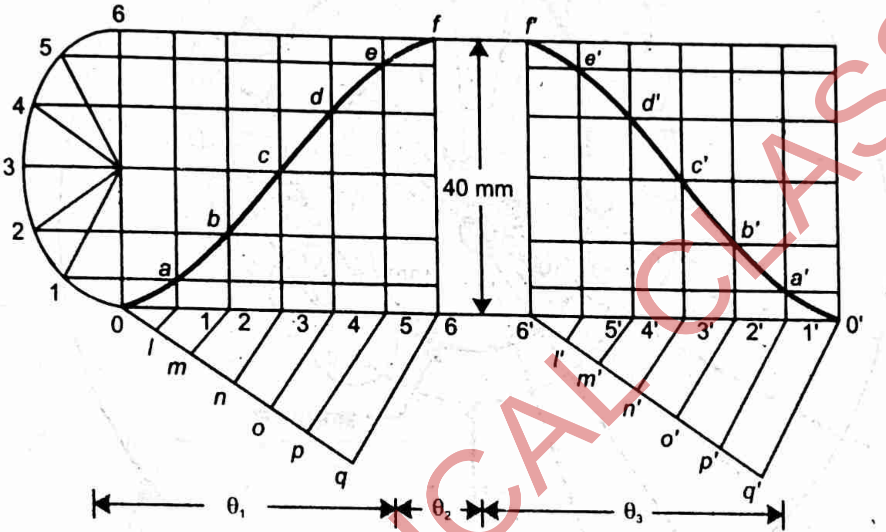
चित्र 6.25 (a) के अनुसार DD' की लम्बाई

$$= 75 \times \sin 20^\circ = 75 \times 0.342 = 25.65\,\text{mm}$$

क्योंकि उपरोक्त दोनों ही प्रकार से गणना करने पर रोलर पिन द्वारा बनाई गई चाप की लम्बाई में अन्तर नगण्य है अतः फालोअर रोलर का उत्थान 25.65 mm मानकर सरल आवर्त गति के लिये विस्थापन आरेख बनाते हैं। देखिये चित्र 6.25 (b)।



चित्र 6.25(a).



(b) विस्थापन आरेख (Displacement diagram)

चित्र 6.25.

2. इसके पश्चात् फालोअर का उत्थान 25.65 mm लेकर उत्थान एवं उतार में सरल आवर्त गति के लिए विस्थापन आरेख बनाते हैं।

3. अब किसी बिन्दु 'O' को केन्द्र मानकर 30 mm अर्धव्यास के आधारवृत्त की रचना करते हैं।

4. इसके बाद 'O' केन्द्र पर ही आधारवृत्त त्रिज्या में रोलर के अर्धव्यास को जोड़कर 40 mm से पिचवृत्त (pitch circle) को बनाते हैं।

5. अब 'O' केन्द्र पर कैम के केन्द्र से फालोअर के पिन की दूरी 90 mm के अर्धव्यास से एक अन्य वृत्त की रचना करते हैं। इसी वृत्त पर हमेशा पिन का केन्द्र रहेगा।

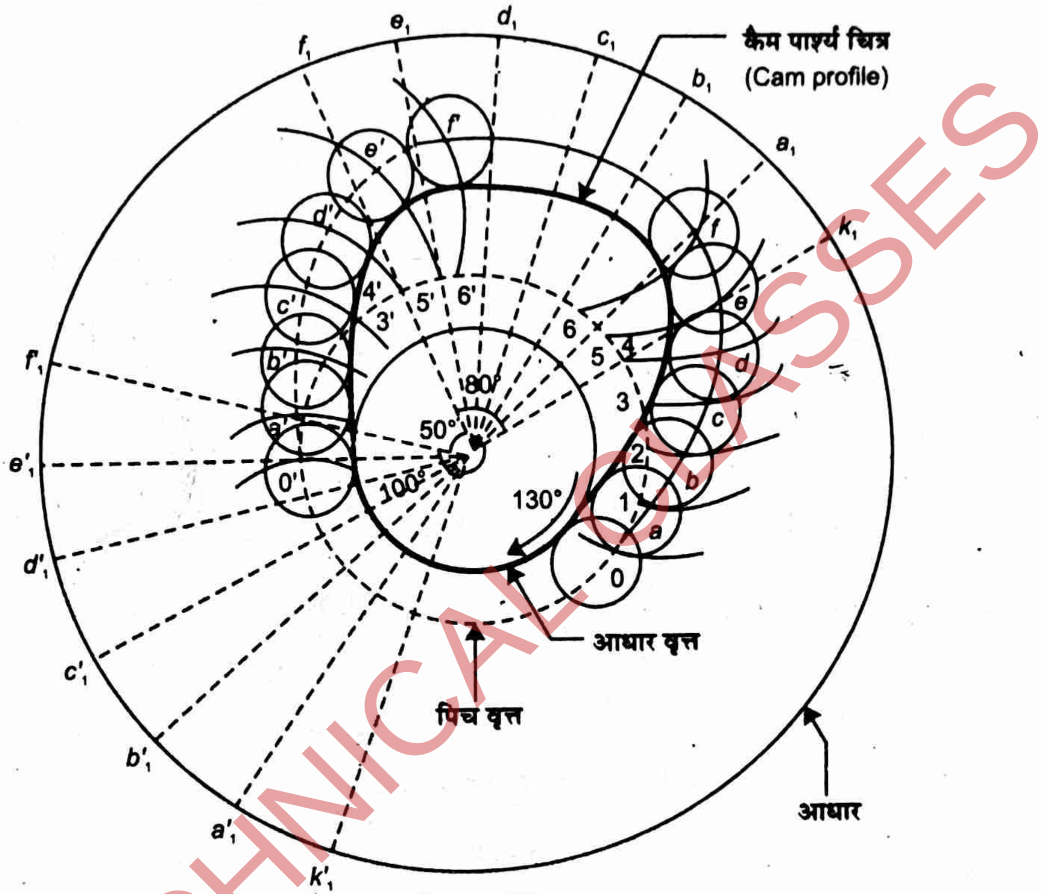
6. इसके पश्चात् पिच वृत्त (pitch circle) पर किसी बिन्दु N को केन्द्र मानकर तथा फालोअर की भुजा की लम्बाई 75 mm के बराबर अर्धव्यास लेकर एक चाप लगाते हैं जो पिन के केन्द्र वाले वृत्त को K_1 पर काटता है। K_1 का आधार वृत्त के केन्द्र O से मिलाते हैं।

7. अब K_1O अर्धव्यास से शुरू करके कैम के घुमाव की विपरीत दिशा में उत्थान कोण $(\theta_1) = 80^\circ$, विश्राम कोण $(\theta_2) = 50^\circ$ एवं उतार कोण $(\theta_3) = 100^\circ$ बनाते हैं।

8. इसके पश्चात् उत्थान कोण (θ_1) एवं उतार कोण (θ_2) को उतने ही भागों में विभक्त करते हैं जितने में विस्थापन आरेख में विभक्त किया गया है। यहाँ हमने प्रत्येक को छः भागों में बाँटा है।

AKC TECHNICAL CLASSES

9. इसके बाद पिन के केन्द्र पर प्राप्त विभक्त भागों क्रमशः $K_1, a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$ एवं $f'_1, e'_1, d'_1, c'_1, b'_1, a'_1, K'_1$ को केन्द्र मानकर तथा 75 mm का अर्धव्यास लेकर पिच वृत्त (pitch circle) पर चाप लगाते हैं जो पिच वृत्त को क्रमशः 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6′, 5′, 4′, 3′, 2′, 1′ पर काटते हैं।



(c) कैम पार्श्व चित्र

चित्र 6.25.

10. अब इन्हीं चापों पर पिच वृत्त से, विस्थापन आरेख से प्राप्त दूरियाँ $1a$, $2b$, $3c$, $4d$, $5e$, $6f$, $6'f'$, $5'e'$, $4'd'$, $3'c'$, $2'b'$, $1'a'$ को अंकित करते हैं।

11. इसके पश्चात इन चापों पर प्राप्त बिन्दुओं क्रमशः $a, b, c, d, e, f, f', e', d', c', b', a'$ पर 10 mm अर्धव्यास को लेकर रोलर वृत्त बनाते हैं।

12. इस रोलर वृत्तों को अन्दर से स्पर्श करता हुआ कैम पार्श्व (profile) खींचते हैं जो आधार वृत्त को दोनों ओर शून्य पर मिलेगा। देखिये चित्र 6.25(c)।

उदाहरण 6.11—फालोअर की दोलन (Oscillating) गति के लिए एक कैम प्रोफाइल बनाइये जिसके लिए निम्न आँकड़े दिये गये हैं–

(i) कैम के पहले 90° घुमाव के लिए फालोअर बाहर की ओर 20° का कोणीय विस्थापन करता है।

(ii) कैम के अगले 45° घुमाव के लिए फालोअर स्थिर रहता है।

(iii) कैम के अगले 75° घुमाव के लिए फालोअर अपनी पूर्व अवस्था (शून्य विस्थापन) में आ जाता है तथा,

AKG TECHNICAL CLASSES

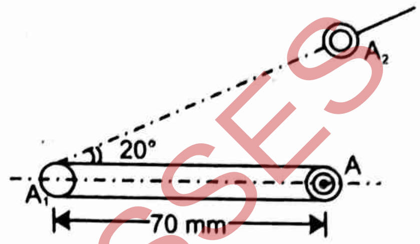
(iv) कैम के शेष घुमाव के लिए फालोअर स्थिर रहता है।

पिवट केन्द्र तथा रोलर केन्द्र के मध्य 70 mm की दूरी है तथा रोलर का व्यास 20 mm है। कैम की न्यूनतम त्रिज्या फालोअर की प्रारम्भिक स्थिति के अनुरूप है। पिवेट की स्थिति, कैम की घूर्णन अक्ष से 60 mm ऊपर तथा 70 mm बायें है। उत्थान के समय फालोअर सरल आवर्तगति तथा उतार के समय एक समान त्वरण एवं मंदन से गति करता है।

हल—हम जानते हैं कि, रोलर फालोअर का कोणीय त्वरण

$$= 20° = \frac{20 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{9} \text{ rad.}$$

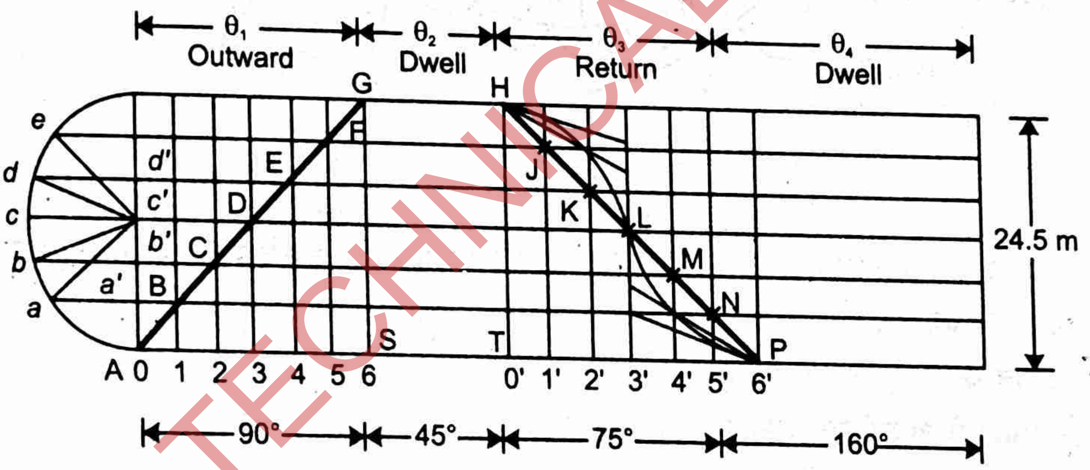
चित्र 6.26 (a) की ज्यामिति से, चाप AA_2 की लम्बाई $= \frac{70 \times \pi}{9} = 24.5 \text{ mm.}$



चित्र 6.26 (a)

क्योंकि कोण बहुत छोटा है अत: जीवा AA_2 की लम्बाई को चाप AA_2 की लम्बाई के बराबर माना जा सकता है। इस प्रकार विस्थापन आरेख बनाने के लिए, फालोअर के उठान को जीवा AA_2 की लम्बाई अर्थात् 24.5 mm के बराबर माना जा सकता है।

क्योंकि फालोअर उठान के समय SHM तथा उतार में एक समान त्वरण तथा मंदन से गति करता है अत: इसका विस्थापन आरेख चित्र 6.26 (b) के अनुसार बनाया जायेगा।



चित्र 6.26 (b)

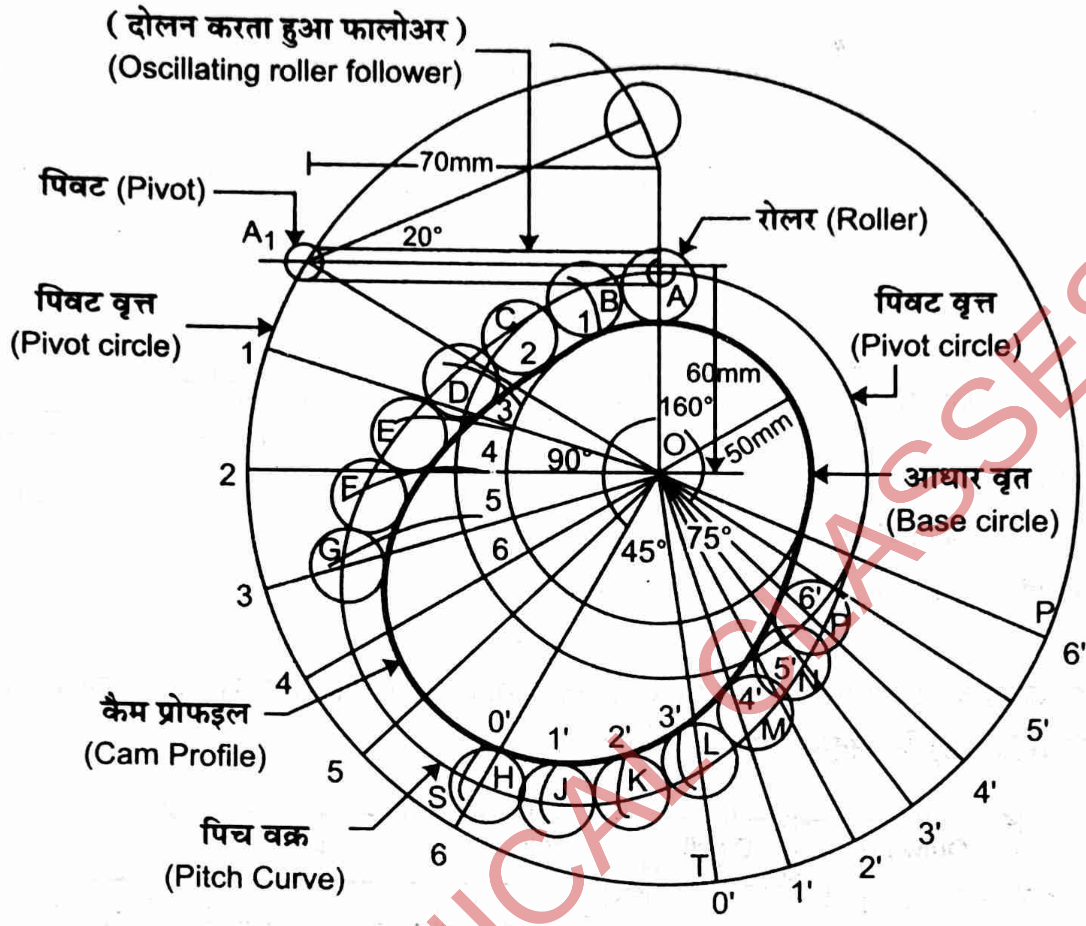
कैम का प्रोफाइल चित्र 6.29 (c) के अनुसार निम्न पदों में बनाया जाता है—

1. सर्वप्रथम कैम के केन्द्र से 60 mm ऊपर तथा 70 mm बायें बिन्दु A_1 लगाते हैं।
2. क्योंकि फालोअर का केन्द्र A तथा पिवेट केन्द्र A_1 के मध्य 70 mm की दूरी है तथा रोलर का व्यास 20 mm है, अत: A के केन्द्र तथा त्रिज्या 10 mm मानते हुए एकवृत्त खींचते हैं।
3. कैम का न्यूनतम अर्धव्यास (देखें चित्र 6.26 (c)) $= 60 - 10 = 50$ min

$$\text{प्राइम अथवा पिचवृत्त की त्रिज्या} = \text{कैम की न्यूनतम त्रिज्या} + \text{रोलर की त्रिज्या}$$
$$= 50 + 10 = 60 \text{ mm}$$

4. अब पूर्व उदाहरण की भाँति कैम प्रोफाइल तैयार कर लेते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES



चित्र 6.26 (c)

उदाहरण 6.12—एक कैम प्रोफाइल बनाइये, जब उठान तथा उतार में रोलर फालोअर साइक्लोइडल गति करता है। सम्बन्धित आँकड़े निम्न प्रकार हैं—

(i) 31.4 mm उठान के लिए कैम 180° घूमता है।

(ii) कैम अगले 150° में अपनी पूर्व स्थिति में आ जाता है।

(iii) शेष 30° घुमाव के लिये फालोअर स्थिर रहता है।

कैम का न्यूनतम अर्धव्यास 15 mm तथा रोलर का व्यास 10 mm है। रोलर फालोअर की अक्ष, कैम शॉफ्ट की अक्ष के दायीं ओर 10 mm ऑफसेट (Offset) है।

रचना—सर्वप्रथम दिये गये आँकड़ों की मदद से चित्र 6.27 (a) के अनुसार निम्न पदों में विस्थापन आरेख बनाते हैं—

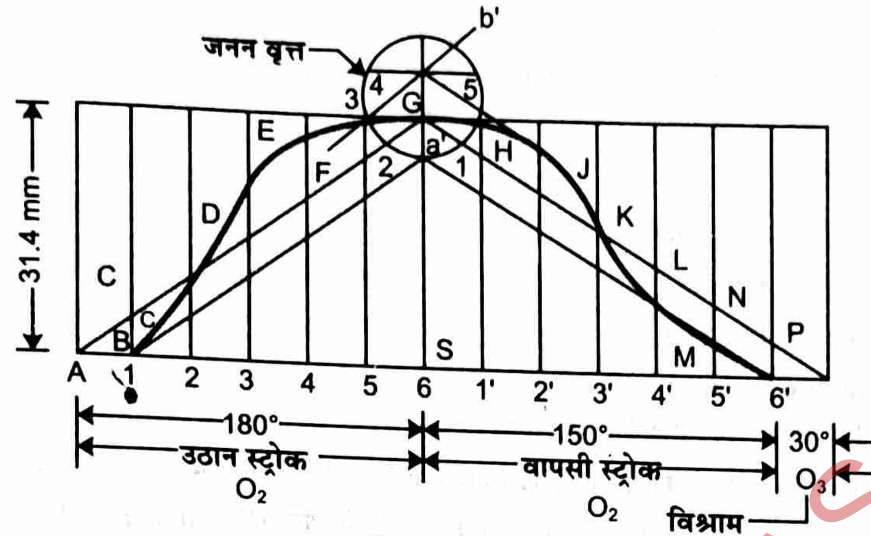
1. सर्वप्रथम रेखा ASP को उचित पैमाना मानकर इस प्रकार खींचते हैं कि $AS = 180°$, $SN = 150°$ तथा $NP = 10°$ को प्रदर्शित करते हैं।

2. AS तथा SN को कोई संख्या (माना 6) में विभक्त करते हैं।

3. बिन्दुओं 1, 2, 3... आदि से ऊर्ध्वाधर रेखाएँ खींचते हैं जिसकी ऊँचाइयाँ फालोअर के स्ट्रोक अर्थात् 31.4 mm के बराबर होगी।

4. अब बिन्दु G से एक वृत्त खींचते हैं जिसकी त्रिज्या

AKC TECHNICAL CLASSES



चित्र 6.27 (a)

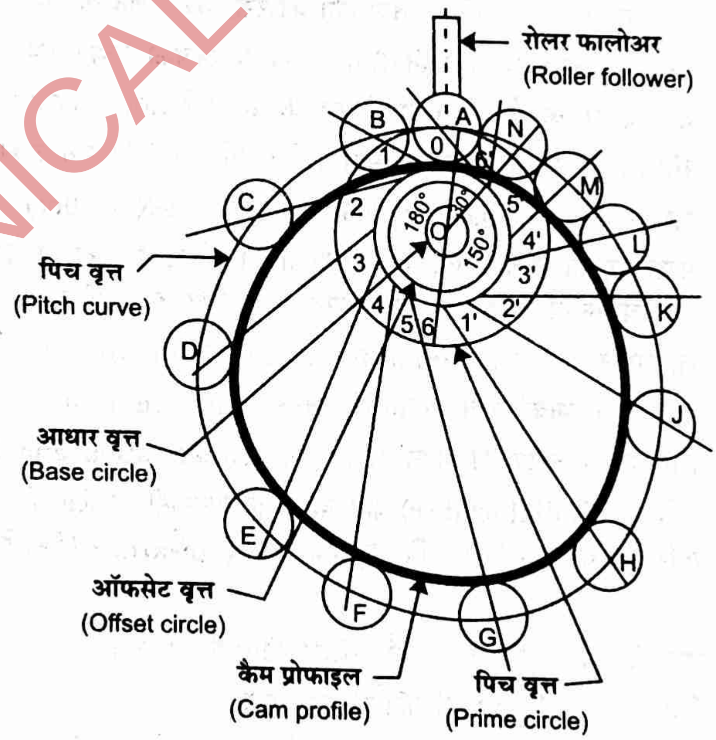
$$r = \frac{\text{स्ट्रोक}}{2\pi} = \frac{31.4}{2\pi} = 5 \text{ mm होगी}$$

5. इस वृत्त को 6 बराबर भागों में विभक्त करते हैं तथा इन बिन्दुओं से क्षैतिज रेखायें खींचते हैं जो ऊर्ध्वाधर व्यास के बिन्दु a', G तथा b' पर मिलती हैं।

6. AG तथा GN को मिलाते हैं। बिन्दु a' से AG तथा GN के समानान्तर रेखाएँ खींचते हैं जो 1, 2, 4' तथा 5' पर बिन्दु B, C, L तथा M पर काटती हैं। इसी प्रकार b' से भी समानान्तर रेखायें खींचते हैं जो ऊर्ध्वाधर रेखाओं 4, 5, 1' तथा 2' को E, F, H तथा J पर काटती है।

7. बिन्दु A, B, C, ...L, M, N को एक वक्र (Smooth Curve) से मिलाते हैं। यही अभिष्ठ विस्थापन आरेख होगा।

8. अब पूर्व उदाहरण 6.7 की भाँति इस कैम का प्रोफाइल चित्र 6.27 (b) के अनुसार प्राप्त करते हैं।



चित्र 6.27 (b)

AKC TECHNICAL CLASSES

प्रश्नवाली

1. कैम से आप क्या समझते हैं? कैम का वर्गीकरण कीजिये।
2. फालोअर कितने प्रकार के होते हैं? चित्र सहित वर्णन कीजिये। (UP 2010, 16)
3. विभिन्न प्रकारों के कैमों (cams) का वर्णन संक्षेप में कीजिए। (UP 2015)

4. फालोअर के संचालन के अनुसार कैमों (cams) का वर्गीकरण कीजिए। **(UP 2016)**

5. कैम से सम्बन्धित निम्न तकनीकी पदों (Technical Terms) को समझाइये— **(UP 2003)**

(i) आधार वृत्त त्रिज्या

(ii) उठान (lift)

(iii) उठान कोण (angle of ascent)

(iv) विश्राम कोण (angle of rest)

(v) उतार कोण (angle of descent)

(vi) क्रिया कोण (angle of action)

6. कैम के सम्बन्ध में निम्न पदों को परिभाषित कीजिये—

(अ) आधारवृत्त (Base circle)। (ब) पिचवृत्त (Pitch circle)। (स) दाब कोण (Pressure angle)।

(द) अनुगामी का स्ट्रोक (Stroke of follower)। (य) ड्वेल पीरियड (Dwell period)।

7. निम्नलिखित कैमों (cams) को समझाइए— **(UP 2012)**

(i) वेज कैम (wedge cam) (ii) डिस्क कैम (Disc cam) (iii) बेलनाकार कैम (Cylindrical cam)

8. मशीनों में प्रयोग में लाये जाने वाले cam के कार्य की व्याख्या कीजिए। विभिन्न प्रकार के cam फालोअर यन्त्र रचनाओं की व्याख्या कीजिए। **(UP 2018)**

9. कैम फालोअरों को गति के तथा गति की रेखा की स्थिति के अनुसार वर्गीकृत कीजिए। **(UP 2014)**

10. विस्थिति फालोअर (offset follower) से आपका क्या तात्पर्य है? चित्र सहित समझइये।

11. तीन प्रकार के कैम एवं फालोअर्स के सरल रेखाचित्र बनाइये।

12. रेडियल या डिस्क कैम के साथ प्रयोग होने वाले विभिन्न प्रकार के फालोअर्स कौन-से हैं?

13. क्षुरधार (knife-edged) अनुगामी की अपेक्षा रोलर (roller) अनुगामी क्यों पसंद किया जाता है?

14. फालोअर की निम्न गतियों को समझाइये। इन गतियों में फालोअर के उत्थान व उतार में अधिकतम वेग एवं अधिकतम त्वरण का व्यजंक प्राप्त कीजिये एवं विस्थापन आरेख भी खींचिये—

(i) समान वेग गति (Uniform Velocity Motion)।

(ii) सरल आवर्त गति (Simple Harmonic Motion)।

(iii) समान त्वरण व मंदन (Uniform Acceleration and Deacceleration)।

15. चक्रिका (Radial or disc) कैम के रोलर अनुगामी के लिए विस्थापन आरेख, वेग ओरख तथा त्वरण आरेख बनाने की विधि का वर्णन कीजिए। यदि अनुगामी ऊर्ध्व (upward) तथा अधोगति (downward), SHM के साथ सम्पन्न करता है। **(UP 2013)**

16. कैम के गतिक विश्लेषण पर संक्षिप्त टिप्पणी कीजिए।

17. कैम-फालोअर सिस्टम की गति की समझाइये। **(UP 2014)**

18. एक कैम क्षुरधार फालोअर (knife edged follower) को समान वेग (uniform velcoity) से गति कराती है। निम्न आँकड़ों की सहायता से कैम का पार्श्व चित्र (cam profile) खींचिये—

(i) कैम के 110° घुमाव में फालोअर 30 mm ऊपर उठता है।

(ii) कैम के अगले 30° के घुमाव में फालोअर विश्राम में रहता है।

(iii) कैम के 80° घुमाव में फालोअर अपनी पूर्व स्थिति पर आ जाता है।

(iv) कैम का न्यूनतम अर्धव्यास 35 mm है।

AKC TECHNICAL CLASSES

19. एक क्षुरधार फालोअर समान त्वरण व मंदन से चढ़ता है तथा सरल आवर्त गति से उतरता है। निम्नलिखित मान के लिये कैम प्रोफाइल खीचिए—

(i) कैम की न्यूनतम त्रिज्या = 50 mm.

(ii) चढ़ाव व उतार कोण = 90° प्रत्येक;

(iii) विश्राम कोण (Dwell angle) = 90° प्रत्येक;

(iv) फालोअर का उत्थान = 30 mm.

20. एक कैम का पार्श्व चित्र खीचिए जिसमें क्षुरधार अनुगामी सरल आवर्त गति से गतिमान है जैसा नीचे दिया है—

(i) कैम के 180° घूमने पर बाह्य स्ट्रोक पर अधिकतम विस्थापन 18 mm है।

(ii) कैम के अगले 150° घूमने पर वापसी पर, और

(iii) कैम के बाकी 30° घूमने पर विश्राम।

अनुगामी का अक्ष कैम शाफ्ट के अक्ष से होकर जाता है। कैम का न्यूनतम अर्धव्यास 15 mm है।

21. एक कैम का पार्श्व चित्र खींचिये जिसमें रोलर अनुगामी का व्यास 20 mm है। अन्य आँकड़े निम्नानुसार हैं—

उत्थान = 40 mm, उत्थान कोण $(\theta_1) = 60°$, विश्राम कोण $(\theta_2) = 60°$, उतार कोण $(\theta_3) = 90°$।

कैम का न्यूनतम अर्धव्यास 50 mm है तथा वह वामावर्त दिशा में घूम रही है। अनुगामी की गति सरल आवर्त (S. H. M.) है।

22. एक रेडियल ट्रांसलेटिंग फ्लैट फेस फालोअर का उत्थान (lift) 30 mm है। कैम के 180° घुमाव पर उत्थान सरल आवर्त गति में होता है। इसके पश्चात् 30° तक विश्राम (dwell) एवं वापसी भी सरल आवर्त गति से 120° तक होती है। शेष 30° तक कैम फिर विश्राम अवस्था में रहता है। कैम की आधारवृत्त त्रिज्या 30 mm है। कैम का पार्श्व खींचिये। कैम का घुमाव वामावर्ती है।

23. एक क्षुरधार अनुगामी की निम्न आँकड़ों के द्वारा कैम प्रोफाइल बनाइये— **(UP 2001, 05)**

(a) कैम के 90° घूर्णन पर कैम लिफ्ट = 40 mm, अनुगामी सरल आवर्त गति से चल रहा है।

(b) अगले 30° घूर्णन के दौरान विश्राम अवस्था।

(c) अगले 60° घूर्णन पर कैम अपनी पुरानी अवस्था में सरल आवर्त गति से आ जाता है।

(d) कैम के शेष घूर्णन के दौरान कैम की विश्राम अवस्था रहती है। कैम के आधार वृत्त का अर्द्धव्यास 40 mm है तथा यह 240 rpm पर घूर्णन कर रहा है।

अनुगामी की अधिकतम गति तथा त्वरण की गणना कीजिये जबकि वह ऊपर जाता है तथा नीचे उतरता है।

[उत्तर—$1.00478\,m/s, 50.481\,m/s^2, 1.5072\,m/s, 113.5826\,m/s^2$]

24. किसी रोलर फालोअर को अग्रलिखित दशाओं में गति देने के लिए कैम का पार्श्व चित्र खींचिये—

(i) रोलर फालोअर पश्चाग्र गति करता है।

(ii) फालोअर के उत्थान, विश्राम व उतार में कैम के घुमाव क्रमशः 60°, 30° एवं 90° हैं।

(iii) रोलर का व्यास 20 mm है।

(iv) उत्थान में फालोअर समान वेग और उतार में सरल आवर्त गति से गति करता है।

(v) कैम का न्यूनतम अर्धव्यास 40 mm है।

(vi) फालोअर का उत्थान 35 mm है।

25. नीचे दिये हुए आँकड़ों के लिए रोलर फालोअर को गतिमान करने के लिये कैम प्रोफाइल खींचिये। फालोअर सरल आवर्त गति से ऊपर उठता है तथा नीचे की तरफ स्थिर त्वरण व मन्दन से गति करता है—

(i) कैम की न्यूनतम त्रिज्या = 50 mm

(ii) उत्थान कोण $(\theta_1) = 48°$

AKC TECHNICAL CLASSES

(iii) विश्राम कोण $(\theta_2) = 42°$
(iv) उतार कोण $(\theta_3) = 60°$
(v) फालोअर का उठान $= 40\,mm$
(vi) रोलर का व्यास $= 30\,mm$
स्ट्रोक रेखा एवं कैम के केन्द्र से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर रेखा के बीच की दूरी 20mm है।

26. एक कैम क्षुरधार फालोअर (knife edged follower) को सरल आवर्त गति (S. H. M.) में गति कराती है। निम्न दशाओं में कैम का पार्श्व चित्र खींचिये—
(i) कैम के 110° घुमाव में फालोअर 20mm ऊपर आ जाता है।
(ii) कैम के अगले 60° के घुमाव में फालोअर विश्राम में रहता है।
(iii) कैम के 90° घुमाव में फालोअर अपनी पूर्व स्थिति पर आ जाता है।
(iv) कैम का न्यूनतम अर्धव्यास 40mm है।
यदि फालोअर की क्रिया रेखा कैम के केन्द्र से होती हुई ऊर्ध्वाधर रेखा से 15mm की विस्थिति (offset) पर हो, तो कैम का पार्श्व चित्र खींचिये।

27. एक त्रैज्यिक कैम की परिच्छेदिका (profile) खींचिये जिसके द्वारा एक टैपेट का उत्थान 30mm सरल आवर्त गति से होना है। टैपेट में लगे रोलर का व्यास 20mm है। कैम के $\frac{1}{4}$ चक्कर में टैपेट ऊपर उठता है, इसके बाद $\frac{1}{12}$ चक्कर में विश्राम अवस्था में तथा अगले $\frac{1}{4}$ चक्कर में सरल आवर्तगति से नीचे उतरता है।
कैम के आधारवृत्त की त्रिज्या 40mm है। टैपेट की कार्य रेखा तथा कैम की ऊर्ध्वाधर रेखा के मध्य की दूरी 15mm है। कैम वामावर्त दिशा में समान कोणीय वेग से घूमती है।

28. एक कैम प्रोफाइल ख़ींचिये, जो एक पश्चाग्र गति क्षुरधार आफसेट अनुगामी को निम्न प्रकार चलायमान करती है—
(UP 2002)
(a) कैम के 120° घुमाव के दौरान अनुगामी बाहर की ओर 30 mm दूरी चलता है।
(b) कैम के 30° घुमाव पर अनुगामी विश्राम अवस्था में रहता है।
(c) कैम के 90° घुमाव के दौरान अनुगामी अपनी आरम्भिक स्थिति में वापिस आ जाता है।
(d) कैम के शेष घुमाव पर अनुगामी विश्रामावस्था में रहता है।
कैम के आधार वृत्त का न्यूनतम अर्द्धव्यास 45mm है तथा ऑफसेट 20mm है, दोनों अवघातों में अनुगामी की गति सरल आवर्त गति (S. H. M.) से होती है। कैम वामावर्त दिशा में घूमती है।

29. एक चपटे मुख फालोअर को निम्न दिशाअें में समान वेग से गति कराने के लिये कैम का पार्श्व चित्र बनाइये—
(i) कैम का न्यूनतम अर्द्धव्यास 30mm है।
(ii) फालोअर का उत्थान कैम 90° के घुमाव में होता है।
(iii) अगले 30° घुमाव में फालोअर विश्राम में रहता है।
(iv) इसके बाद 80° के घुमाव में फालोअर अपनी पूर्व अवस्था में आ जाता है।
(v) कैम के शेष घुमाव में फालोअर फिर स्थिर अवस्था में रहता है।
(vi) फालोअर का उत्थान (lift) 40 mm है।

30. निम्न आंकड़ों की सहायता से एक क्षुरधार (knife edged) फालोअर के लिये कैम का पार्श्व (profile) बनाइये—
(i) कैम के 60° के घुमाव के लिये फालोअर का बाह्य स्ट्रोक (out stroke) होता है।

AKG TECHNICAL CLASSES

(ii) कैम के अगले 30° घुमाव मे फालोअर विश्राम अवस्था में रहता है।

(iii) इसके पश्चात् 60° घुमाव में फालोअर का वापसी स्ट्रोक (return stroke) होता है।

(iv) अगले 210° कैम के घुमाव में फालोअर फिर विश्राम की अवस्था में रहता है।

फालोअर का स्ट्रोक 20 mm है तथा कैम का न्यूनतम अर्द्धव्यास 50 mm है। फालोअर की अक्ष कैम की अक्ष से 20 mm विस्थिति (offset) में हैं। फालोअर समान वेग (uniform velocity) से बाह्य स्ट्रोक (out stroke) एवं वापसी स्ट्रोक (return stroke) में गति करता है।

31. एक वाल्व को सरल आवर्त गति में 50 mm उठाने (raise) के लिये कैम पार्श्व (profile) का अभिकल्पन कीजिये। कैम अपने घुमाव के एक-तिहाई भाग में वाल्व को उठाती है तथा अगले $\frac{1}{12}$ घुमाव में पूर्ण खुली अवस्था में तथा सरल आवर्त गति में ही अगले $\frac{1}{6}$ घुमाव में वाल्व को अपनी पूर्व स्थिति में ले आती है। कैम के शेष घुमाव में वाल्व विश्राम अवस्था में रहता है। कैम का न्यूनतम अर्द्धव्यास 25 mm तथा फालोअर के रोलर का व्यास 20 mm है। कैम शाफ्ट का व्यास 25 mm है। वाल्व की छड़ की अक्ष कैम की अक्ष से होकर गुजरती है। कैम की कोणीय गति 100 च०प्र०मि० है। वाल्व के उठान एवं उतार में अधिकतम गति व त्वरण भी ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—391.5 mm/s, 785.2 mm/s, 61.34 m/s^2, 24.67 m/s^2]

32. निम्न आँकड़ों की सहायता से एक दोलित (oscillating) बेलन को गतिमान करने वाली कैम की पार्शिविका (cam profile) खींचिये—

(i) बेलन का व्यास = 40 mm

(ii) बेलन के केन्द्र से फालोअर आलम्ब की दूरी = 100 mm

(iii) आलम्ब केन्द्र से बेलन केन्द्र तक फालोअर भुजा की लम्बाई = 80 mm

(iv) आरोहण (ascent) के प्रारम्भ पर कैम के केन्द्र से फालोअर केन्द्र की दूरी = 60 mm

(v) फालोअर के आरोहण में कैम द्वारा चला गया कोण = 60°

(vi) कैम द्वारा चला गया कोण जब फालोअर उच्चतम स्थिति में रहता है = 45°

(vii) फालोअर के अवरोहण में कैम द्वारा चला गया कोण = 90°

(viii) आरोहण एवं अवरोहण में फालोअर भुजा के दोलन का कोण = 15°, आरोहण तथा अवरोहण दोनों सरल आवर्त गति में होते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

अध्याय 7

सन्तुलन
(Balancing)

- Concept of balancing
- Introduction to balancing of rotating masses (simple numericals)

§ 7.1 परिचय (Introduction) :

किसी भी मशीन में दो प्रकार के पुर्जे (parts) जिनको क्रमशः स्थिर पुर्जे एवं गतिमान पुर्जे कहते हैं, होते हैं। गतिमान पुर्जे भी दो प्रकार के होते हैं जिनको घुमाँऊ पुर्जे (rotating parts) एवं पश्चाग्र गति पुर्जे (reciprocating parts) कहते हैं। अन्तर्दहन इन्जन में क्रैंक-शाफ्ट, गतिपाल पहिया (fly wheel), भाप व गैस टरबाइन में रोटर (rotor) एवं अपकेन्द्रीय पम्पों में इम्पेलर (impeller) इत्यादि घुमाँऊ पुर्जे होते हैं। जबकि पश्चाग्र गति करने वाले पुर्जों में पिस्टन, पिस्टन रॉड, क्रॉस हैड इत्यादि प्रमुख हैं।

इन सभी स्थिर एवं गतिमान पुर्जों पर शक्ति उत्पादन (power development) या शक्ति संचरण (power transmission) के समय विभिन्न परिमाण के बल क्रिया करते हैं। वर्तमान समय में मशीनें एवं इन्जन बहुत अधिक गति पर कार्य करते हैं। अतः इन बलों का परिमाण और भी अधिक होता है। विभिन्न स्थिर एवं गतिमान पुर्जों के सुचारू रूप से कार्य करने के लिये यह आवश्यक है कि उन पर ऐसा कोई भी बल न लगा हो जिसकी उन परिस्थितियों में आवश्यकता न हो तथा जो बल लगे हो वे भी पूर्ण सन्तुलन में हो।

प्रायः यह देखा गया है कि घूमती हुई (rotating) और पश्चाग्र गति (reciprocating motion) करती हुई मशीनों में कम्पन (vibrations) होते हैं। यदि घूमने वाले अंग का गुरुत्व केन्द्र घुमाँऊ केन्द्र पर नहीं है तो केन्द्र पर या बियरिंग पर, जहाँ घूमने वाले अंग को सहारा गया है, एक अतिरिक्त बल लगता है जिससे मशीन के फ्रेम और नींव आदि में ये कम्पन उपजते हैं और मशीन के चालन में शोर, घिसाई तथा टूट-फूट की सम्भावना बढ़ जाती है। इसी प्रकार पश्चाग्र गति करते हुये मशीनी अंग पर जड़त्व बलों के कारण एक असन्तुलित बल (unbalanced force or shaking force) कार्य करता है। यदि जड़त्व के कारण लगने वाले बलों का परिणामी शून्य भी हो जाये जो भी एक असन्तुलित बलयुग्म अंग पर कार्य करेगा जो मशीन की नींव तथा फ्रेम आदि में अवांछित कम्पन उत्पन्न करेगा।

7.1.1 असन्तुलन का प्रभाव तथा सन्तुलन की आवश्यकता (Effect of Unbalancing and Need of Balancing)

हम जानते हैं कि घूमते हुये अथवा पश्चाग्र गति करते हुए मशीनी अंगों पर असन्तुलित बलों के प्रभाव में कम्पन उपजते हैं। इन कम्पनों के निम्न दुष्प्रभाव होते हैं—

1. कम्पनों के कारण मशीन के चालन में शोर (noise), अंगों का ढीला होना (loosening), अतिरिक्त घिसाई तथा टूट-फूट (Wear & Tear) होता है।

2. कम्पनों के कारण ऊर्जा ह्रास (energy loss) होता है।

3. मशीनों अंगों के कम्पन के कारण उनसे सम्बन्धित अन्य पुर्जों, बियरिंगों, मशीन के फ्रेम तथा नींव आदि में अतिरिक्त प्रतिबल उपजते हैं।

AKG TECHNICAL CLASSES

4. कम्पनों के कारण असुविधा तथा ध्वनि प्रदूषण होता है।

5. विभिन्न मापन यन्त्रों के संकेतकों (Pointers) आदि के कम्पनों के कारण पाठ्यांक पढ़ना सरल नहीं होता।

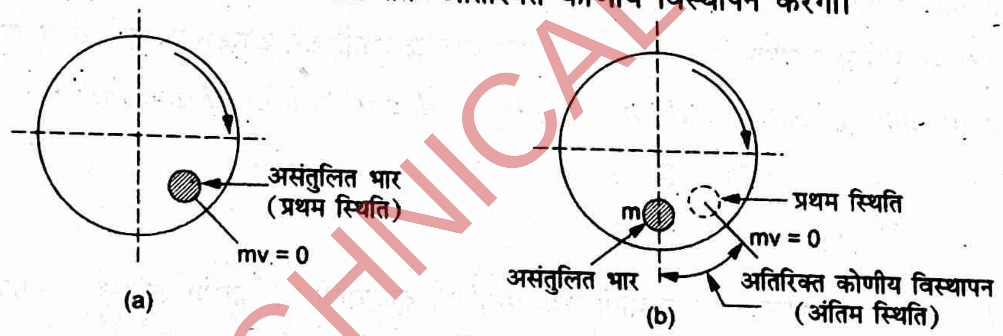
उपरोक्त दुष्प्रभावों को समाप्त करने अथवा न्यूनतम करने के लिए सन्तुलन की आवश्यकता पड़ती है। कोई भी मशीन तब पूर्ण सन्तुलन में होती है जब उसके फ्रेम तथा नींव पर लगने वाले सभी अवाँछनीय बल तथा बलयुग्म शून्य कर दिये जायें। परन्तु वास्तविक परिस्थितियों में ऐसा करना संभव नहीं हो पाता, अतः जहाँ तक सम्भव हो इन बलों तथा बलयुग्मों को कम करने का प्रयत्न किया जाता है।

7.1.2 स्थैतिक तथा गतिक सन्तुलन (Static & Dynamic Balancing)

यदि घूमने वाले पिण्ड स्थिर दशा में किसी भी स्थिति में रहने पर सन्तुलन में रहें तो पिण्ड स्थैतिक सन्तुलन (statically balanced) में कहे जाते हैं। इस अवस्था में पिण्डों की सभी स्थितियों में उनका गुरुत्व केन्द्र सदैव घूर्णन अक्ष (axis of rotation) पर रहता है।

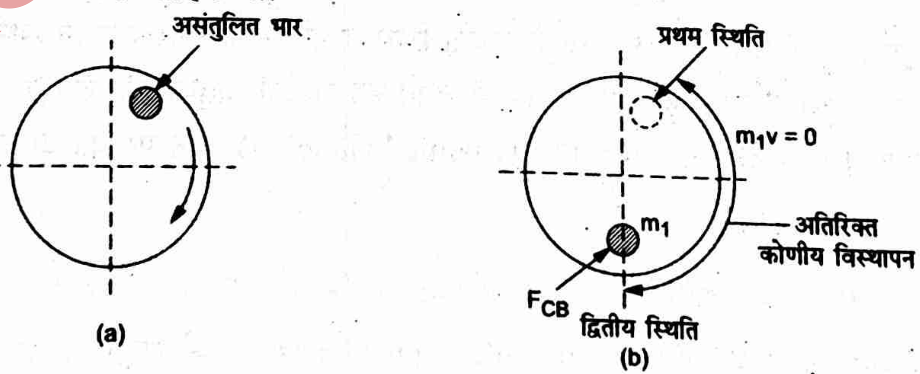
"If a rotating body, in static state remains in equilibrium in any condition, then the body is called statically balanced. In this state, for all conditions of the body, its centre of gravity lies always on its axis of rotation."

चित्र 7.1 (a) में एक शाफ्ट का पार्श्व दृश्य (end view) दिखाया गया है। शाफ्ट पर एक असन्तुलित पदार्थ की मात्रा 'm' को लगा हुआ प्रदर्शित किया गया है। माना शाफ्ट का संवेग (momentum) दिखाई गई स्थिति में शून्य हो जाता है, तो इस शाफ्ट को इसी स्थिति में रुक जाना चाहिये किन्तु इस पर लगे असन्तुलित पदार्थ की मात्रा (m) के कारण यह चित्र 7.1 (b) की स्थिति में रुकेगा। इस प्रकार शाफ्ट, असंतुलित पदार्थ की मात्रा के लगा होने के कारण चित्र 7.1 (a) की प्रथम स्थिति से अपने रुकने वाली द्वितीय स्थिति तक अतिरिक्त कोणीय विस्थापन करेगी।



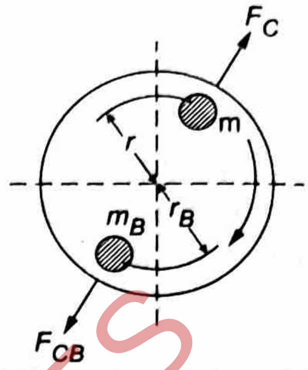
चित्र 7.1

इसी प्रकार चित्र 7.2 (b) में शाफ्ट को, अपने संवेग (momentum) के शून्य होने पर अपनी प्रथम स्थिति में रुक जाना चाहिये परन्तु असन्तुलित पदार्थ की मात्रा m_1 के लगा होने से यह द्वितीय स्थिति, जो चित्र 7.2 (b) में प्रदर्शित की गई हैं, में ही रुकेगी। इस प्रकार अपनी प्रथम स्थिति से द्वितीय स्थिति तक आने में यह उपरोक्त की भाँति अतिरिक्त कोणीय विस्थापन चित्रानुसार करेगी, जो वांछनीय नहीं है। अभियान्त्रिकी दृष्टि से, शाफ्ट को अपनी प्रथम स्थिति में जहाँ शाफ्ट का संवेग ($mV = 0$) शून्य हुआ, रुक जाना चाहिये था।



चित्र 7.2

AKC TECHNICAL CLASSES



चित्र 7.3

इस अतिरिक्त कोणीय विस्थापन को न होने देने के लिये यह आवश्यक है कि उसी अक्षीय एवं घूर्णन समतल (axial and rotational plane) में एक सन्तुलित पदार्थ की मात्रा (m_B) को इस प्रकार लगाया जाये कि असन्तुलित पदार्थ की मात्रा के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बल (F_C) एवं सन्तुलित भार के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बल (F_{C_B}) का परिमाण बराबर हो जाये। (देखिये चित्र 7.3)

$$F_C = F_{C_B}$$

$$m\omega^2 r = m_B \omega^2 r_B$$

$$mr = m_B \, r_B$$

यहाँ 'r' एवं 'r_B' क्रमशः m एवं m_B भारों के घूमने के अर्द्धव्यास हैं। इस स्थिति में घूमने वाला भाग उसी स्थिति में रुक जायेगा जहाँ उसका संवेग (momentum) शून्य होगा। स्थैतिक सन्तुलन के लिये यह आवश्यक है कि **"असन्तुलित भार के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बल (F_C) एवं सन्तुलित भार के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बल F_{C_B} के परिमाणों का बीजगणितीय योग शून्य हो।"**

(ii) गतिज सन्तुलन (Dynamic balancing)—गतिज सन्तुलन का तात्पर्य किसी मशीनी अवयव के घूमती हुई अवस्था में सन्तुलन करने से है, अर्थात् जब कोई मशीनी अवयव घुमाँऊ गति (rotational motion) कर रहा हो, तो उस पर लगने वाले बलों का परिणामी सन्तुलन में हो। इसके लिये निम्न दो नियमों को सन्तुष्ट करना आवश्यक है—

1. **असन्तुलित व सन्तुलित भारों के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बलों का बीजगणितीय योग शून्य हो।**

"The algebraic sum of centrifugal forces induced due to balanced and unbalanced weights."

अर्थात्
$$\Sigma F = 0$$

या
$$F_C - F_{C_B} = 0 \qquad \ldots(i)$$

जहाँ F_C एवं F_{C_B} क्रमशः असन्तुलित द्रव्यमानों एवं सन्तुलित द्रव्यमानों के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बल हैं।

2. **असन्तुलित व सन्तुलित द्रव्यमानों के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बलों का उसी समतल के किसी बिन्दु के सापेक्ष, घूर्णों का बीजगणितीय योग शून्य हो।**

"The algebraic sum of moments of centrifugal forces induced due to balanced and unbalanced masses about a point in the same plane should be zero."

अर्थात्
$$\Sigma M = 0 \qquad \ldots(ii)$$

क्योंकि गतिज सन्तुलन में भी हम $\Sigma F = 0$ करते हैं अर्थात् किसी घूमते सिस्टम पर कार्यरत सभी अपकेन्द्रीय बलों का बीजगतिणतीय योग शून्य के बराबर करते हैं। इसलिये किसी घूमते हुए मशीनी अवयव के लिये स्थैतिक सन्तुलन (static balancing) की आवश्यकता नहीं है। गतिज सन्तुलन (dynamic balancing) करने पर वह अवयव स्थैतिज सन्तुलन में स्वयं ही हो जाता है।

§ 7.2 घूमते हुए द्रव्यमानों का सन्तुलन (Balancing of Rotating Masses)

विभिन्न घूमते हुए असन्तुलित द्रव्यमानों (rotating unbablanced masses) को सन्तुलित करने के अग्र प्रकार हैं—

AKC TECHNICAL CLASSES

1. एक घूमते हुए असन्तुलित द्रव्यमान (mass) को सन्तुलित करना। इनकी दो विधियाँ हैं—
   (a) एक सन्तुलित द्रव्यमान (mass) को उसी घूर्णन समतल में लगाकर।
   (b) दो सन्तुलित द्रव्यमानों (masses) को विभिन्न घूर्णन समतलों में लगाकर।
2. विभिन्न असन्तुलित द्रव्यमानों (masses) को, जो एक ही घूर्णन समतल में हैं, को सन्तुलित करना।
3. विभिन्न असन्तुलित द्रव्यमानों (masses) को, जो विभिन्न अक्षीय एवं घूर्णन समतलों में है, को सन्तुलित करना।

7.2.1 (a) असन्तुलित घूमते भार के घूर्णन समतल में सन्तुलित भार लगाना

चित्र 7.4 का अवलोकन कीजिये यहाँ असन्तुलित द्रव्यमान (mass) (m) व सन्तुलक द्रव्यमान (m_B) एक ही अक्षीय व घूर्णन समतल (axial and rotational plane) में लगाये गये हैं।

अत: अपकेन्द्रीय बलों के प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट होना चाहिये,

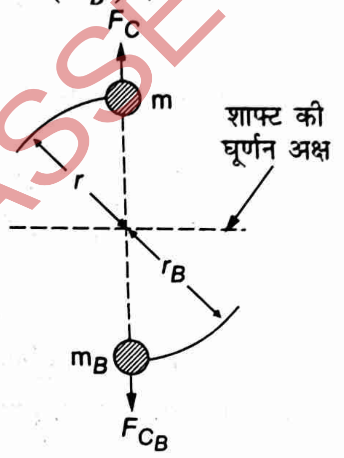
$$F_C = F_{C_B}$$

$$m\omega^2 r = m_B \omega^2 r_B$$

या

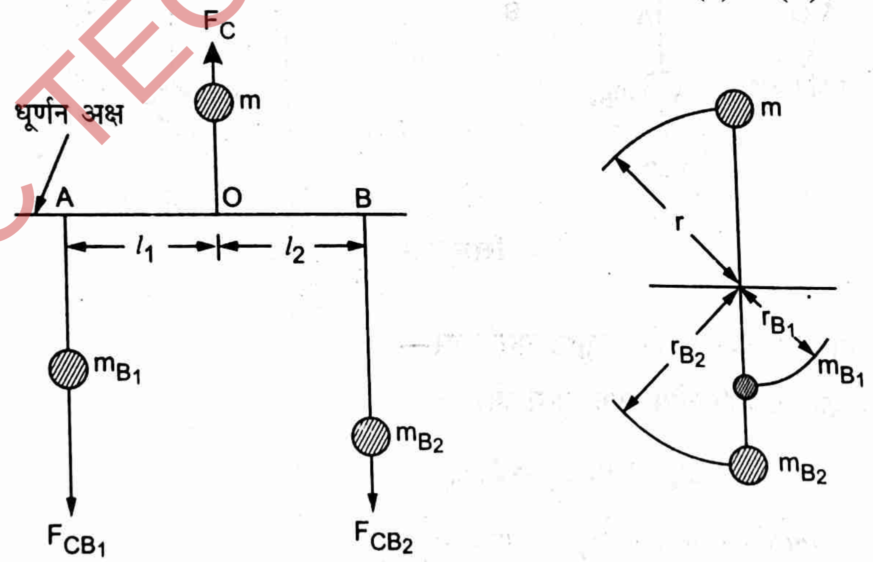
$$mr = m_B r_B$$

यहाँ असन्तुलित द्रव्यमान (mass) m एवं सन्तुलित द्रव्यमान (mass) m_B एक ही घूर्णन समतल में होने के कारण, असन्तुलित द्रव्यमान m के कारण अपकेन्द्रीय बल (F_C) एवं सन्तुलित द्रव्यमान (mass) m_B के कारण अपकेन्द्रीय बल (F_{C_B}) का शाफ्ट की घूर्णन अक्ष (rotational axis) पर किसी भी घूर्णन समतल के सापेक्ष घूर्णों का बीजगतिणतीय योग शून्य होगा।



चित्र 7.4

(b) असन्तुलित द्रव्यमान (Unbalanced mass) के घूर्णन समतल से अन्य घूर्णन समतल में सन्तुलित द्रव्यमान (balanced mass) लगाना—इस प्रकार के सन्तुलन की उस समय आवश्यकता होती हैं, जब एक सन्तुलन द्रव्यमान (balancing mass) का परिमाण अधिक आता हो या सन्तुलन द्रव्यमान (mass) को अधिक अर्धव्यास पर घुमाना सम्भव न हो। इस प्रकार के सन्तुलन को हम दो प्रकार से कर सकते हैं। देखिये चित्र 7.5 (a) व (b) व चित्र 7.6 (a) व (b)।



(a) (b)

चित्र 7.5

AKC TECHNICAL CLASSES

चित्र 7.5 (a) में दोनों सन्तुलित द्रव्यमान (balancing masses) को समान अक्षीय समतल (same axial plane) तथा विभिन्न घूर्णन समतलों (different rotational planes) में लगा हुआ प्रदर्शित किया गया है। यहाँ दोनों सन्तुलित द्रव्यमानों (masses) में से प्रत्येक को असन्तुलित द्रव्यमान (mass) के दाँयी व बाँयी ओर लगाया गया है।

सन्तुलन के लिये उपरोक्त दोनों प्रतिबन्ध सन्तुष्ट करने पर—

(i) अपकेन्द्रीय बलों का बीजगणितीय योग शून्य हो,

$$F_C = F_{C_{B_1}} + F_{C_{B_2}}$$

$$m\omega^2 r = \omega^2 r_{B_1} + m_{B_2}\omega^2 r_{B_2}$$

या $$\boldsymbol{mr = m_{B_1} r_{B_1} + m_{B_2} r_{B_1}} \quad \ldots(i)$$

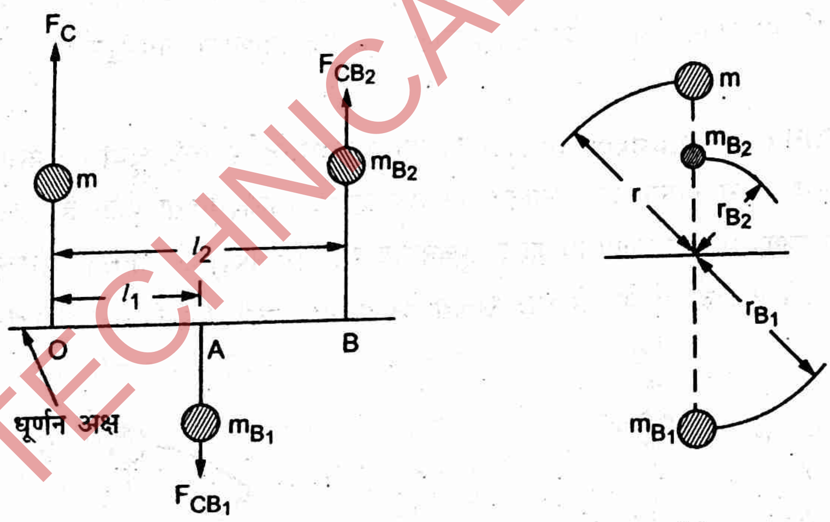
(ii) असन्तुलित भार के घूर्णन समतल के सापेक्ष घूर्ण लेने पर,

$$F_{C_{B_1}} \times l_1 = F_{C_{B_2}} \times l_2$$

या $$(m_{B_1} \times \omega^2 \times r_{B_1}) \times l_1 = (m_{B_2} \times \omega^2 \times r_{B_2}) \times l_2$$

या $$\boldsymbol{m_{B_1} r_{B_1} l_1 = m_{B_2} r_{B_2} l_2} \quad \ldots(ii)$$

चित्र 7.6 में दोनों सन्तुलित द्रव्यमान, असन्तुलित द्रव्यमान (m) के एक ही ओर विपरीत दिशाओं में लगाये गये हैं। यहाँ पर भी सभी भारों का अक्षीय समतल समान (same axial plane) है किन्तु घूर्णन समतल (rotational planes) भिन्न हैं।



(a) (b)

चित्र 7.6

यहाँ भी सन्तुलन के दोनों प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करने पर—

(i) अपकेन्द्रीय बलों का बीजगणितीय योग शून्य हो।

$$F_C + F_{C_{B_2}} = F_{C_{B_1}}$$

या $$m\omega^2 r + m_{B_2}\omega^2 r_{B_2} = m_{B_1}\omega^2 r_{B_1}$$

या $$\boldsymbol{m.r + m_{B_2} r_{B_2} = m_{B_1} r_{B_1}} \quad \ldots(i)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

(ii) असन्तुलित भार के घूर्णन समतल के सापेक्ष घूर्ण लेने पर—

$$F_{C_{B_1}} \times l_1 = F_{C_{B_2}} \times l_2$$

या

$$m_{B_1}\omega^2 r_{B_1} \times l_1 = m_{B_2}\omega^2 r_{B_2} \times l_2$$

या

$$m_{B_1} r_{B_1} l_1 = m_{B_2} r_{B_2} l_2 \quad \ldots(ii)$$

आवश्यक (Important)—यहाँ यह आवश्यक नहीं कि असन्तुलित द्रव्यमान के सापेक्ष ही घूर्ण लिया जाये। अपकेन्द्रीय बलों का घूर्ण किसी भी द्रव्यमान के घूर्णन समतल के सापेक्ष लिया जा सकता है।

7.2.2. एक ही घूर्णन समतल में घूमने वाले कई द्रव्यमानों का सन्तुलन (Balancing of Several Masses Rotating in One Rotational Plane)

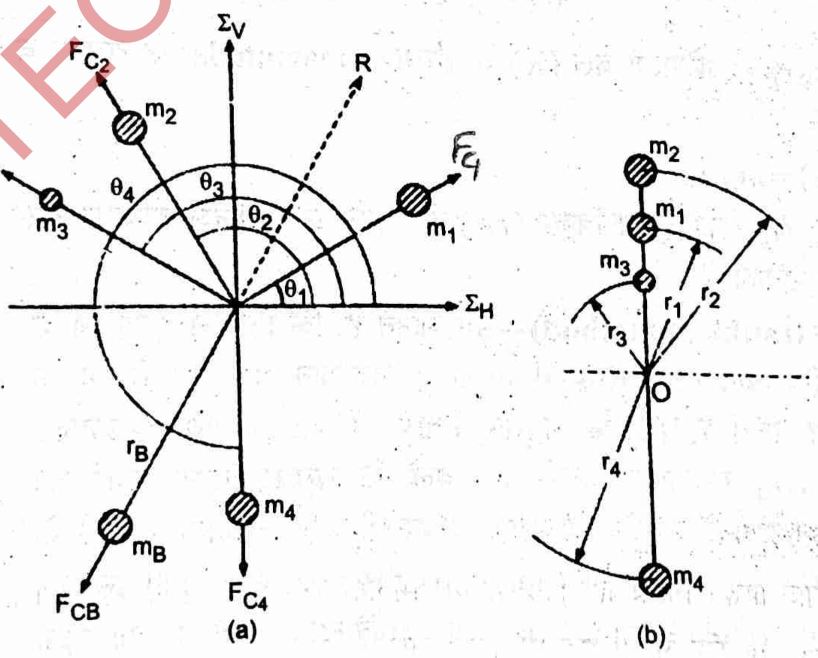
इस तरह के असन्तुलित द्रव्यमानों के प्रकार में, विभिन्न द्रव्यमानों के अक्षीय समतल अलग-अलग परन्तु घूर्णन समतल एक ही होता है। चित्र 7.7 (a) व (b) का अवलोकन करें। यहाँ चार द्रव्यमान m_1, m_2, m_3 व m_4 एक ही घूर्णन समतल पर r_1, r_2, r_3 तथा r_4 घूर्णन त्रिज्याओं पर लगे हैं। शाफ्ट या रोटर ω रेडियन/सेकिण्ड की कोणीय गति से घूम रहा है। शाफ्ट के घूमने पर इन चारों द्रव्यमानों के कारण चार अपकेन्द्रीय बल (centrifugal forces) उत्पन्न हो जायेगी जिनका क्रिया बिन्दु एक ही होगा।

इस प्रकार के असन्तुलित द्रव्यमानों को सन्तुलन करने के लिये दो विधियाँ प्रयोग की जाती हैं—

(a) गणनात्मक विधि (Analytical method)

(b) ग्राफ विधि (Graphical method)

(a) गणनात्मक विधि (Analytical method)—इस विधि में असन्तुलित द्रव्यमानों के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बलों को ऊर्ध्वाधर एवं क्षैतिज दिशा में वियोजित (resolve) करके क्रमशः इन वियोजित बलों के बीजगणितीय योग (ΣH व ΣV) को ज्ञात करके बलों का परिणामी बल (resultant) ज्ञात करते हैं। इस परिणामी बल के विपरीत दिशा में उसी परिमाण का सन्तुलक द्रव्यमान (balancing mass) लगाकर निकाय का सन्तुलन किया जाता है। चित्र 7.7 (a) का अवलोकन करें।



चित्र 7.7

AKC TECHNICAL CLASSES

क्षैतिज संघटकों का बीजीय योग,

$$\Sigma H = F_{C_1} \cos\theta_1 + F_{C_2} \cos\theta_2 + F_{C_3} \cos\theta_3 + F_{C_4} \cos\theta_4$$
$$= m_1\omega^2 r_1 \cos\theta_1 + m_2\omega^2 r_2 \cos\theta_2 + m_3\omega^2 r_3 \cos\theta_3 + m_4\omega^2 r_4 \cos\theta_4$$
$$= m_1 r_1 \cos\theta_1 + m_2 r_2 \cos\theta_2 + m_3 r_3 \cos\theta_3 + m_4 r_4 \cos\theta_4 \quad \ldots(i)$$

इसी प्रकार ऊर्ध्वाधर संघटकों का बीजीय योग,

$$\Sigma V = F_{C_1} \sin\theta_1 + F_{C_2} \sin\theta_2 + F_{C_3} \sin\theta_3 + F_{C_4} \sin\theta_4$$
$$= m_1\omega^2 r_1 \sin\theta_1 + m_2\omega^2 r_2 \sin\theta_2 + m_3\omega^2 r_3 \sin\theta_3 + m_4\omega^2 r_4 \sin\theta_4$$
$$= m_1 r_1 \sin\theta_1 + m_2 r_2 \sin\theta_2 + m_3 r_3 \sin\theta_3 + m_4 r_4 \sin\theta_4 \quad \ldots(ii)$$

यहाँ यह बात ध्यान देने योग्य है कि ω^2 / g सभी अपकेन्द्रीय बलों के साथ गुणनफल में है। अत: अपकेन्द्रीय बलों को क्रमश: द्रव्यमान एवं उनकी घूर्णन त्रिज्या के गुणनफल के समानुपाती लिया गया है।

समी (i) व (ii) से परिणामी बल (R)

$$R = \sqrt{(\Sigma H)^2 + (\Sigma V)^2 + 2\Sigma H\, \Sigma V \cos 90°}$$
$$R = \sqrt{(\Sigma H)^2 + (\Sigma V)^2} \quad \ldots(iii)$$

तथा परिणामी बल (R) की दिशा

$$\tan\theta = \frac{\Sigma V}{\Sigma H}$$

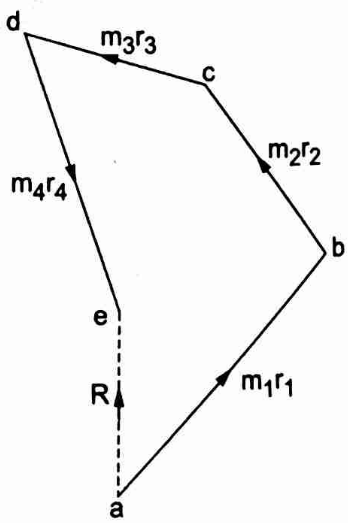
या
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\Sigma V}{\Sigma H}\right) \quad \ldots(iv)$$

सन्तुलक बल ($m_B r_B$), परिणामी बल (R) के परिमाण (magnitude) के बराबर व विपरीत दिशा (direction) में लगेगा।

अत: परिणामी $(R) = m_B\, r_B$

सन्तुलक द्रव्यमान (m_B) की घूर्णन त्रिज्या (r_B) ज्ञात होने पर सन्तुलक द्रव्यमान का परिमाण ज्ञात किया जा सकता है।

(b) ग्राफ विधि (Graphical method)—हम जानते हैं, कि विभिन्न द्रव्यमानों के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बल (centrifugal forces), द्रव्यमान × घूर्णन त्रिज्या के समानुपाती होते हैं। अत: चित्र 7.7 (c) के अनुसार रेखायें ab, bc, cd एवं de क्रमश: $m_1 r_1, m_2 r_2, m_3 r_3, m_4 r_4$ समानुपाती अपकेन्द्रीय बलों के बराबर किसी पैमाने को मानकर खींची जायेंगी। इन रेखाओं की दिशायें क्रमश: अपकेन्द्री बलों की क्रिया रेखाओं के समान होगी। इस प्रकार हमें एक बल बहुभुज (polygon of forces) प्राप्त होगा। इस बल बहुभुज की बन्धक रेखा (closing line) ae सभी अपकेन्द्रीय बलों के परिणामी (resultant) को परिमाण व दिशा में प्रदर्शित करेगी।



चित्र 7.7 (c)

AYC TECHNICAL CLASSES

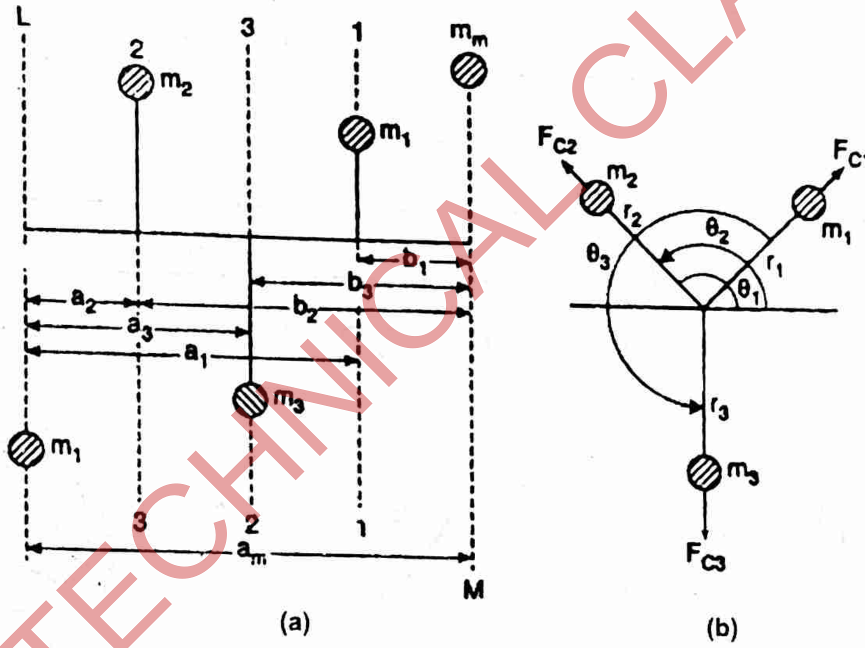
सन्तुलक बल, परिणामी बल के परिमाण (magnitude) के बराबर व विपरीत दिशा में क्रिया करेगा।

अतः $ae \times$ पैमाना $= m_B\, r_B$ होगा।

घूर्णन त्रिज्या (r_B) ज्ञात होने पर, सन्तुलक द्रव्यमान (m_B) का परिमाण ज्ञात हो जायेगा।

7.2.3 विभिन्न अक्षीय एवं घूर्णन समतलों में घूमते हुए द्रव्यमानों का सन्तुलन (Balancing of Several Masses Rotating in Different Axial and Rotational Planes)

चित्र 7.8 (a) व (b) का अवलोकन करें। यहाँ प्रदर्शित तीन असन्तुलित द्रव्यमानों m_1, m_2, m_3 क्रमशः r_1, r_2, r_3 घूर्णन त्रिज्या पर लगे हैं। निकाय की कोणीय गति ω रेडियन/से० है। यहाँ द्रव्यमानों के अक्षीय व घूर्णन समतल भिन्न हैं। माना द्रव्यमानों m_1, m_2, m_3 क्रमशः 1, 2, 3 घूर्णन समतलों में घूम रहे हैं। इन असन्तुलित द्रव्यमानों को एक या दो सन्तुलित द्रव्यमान लगाकर सन्तुलित किया जा सकता है। एक या अधिक सन्तुलित द्रव्यमान लगाना इस बात पर निर्भर करता है कि सन्तुलित द्रव्यमान व घूर्णन त्रिज्या का परिमाण कितना प्राप्त होता है।



चित्र 7.8

यहाँ हम दो द्रव्यमानों को लगाकर निकाय को सन्तुलित करेंगे। माना असन्तुलित द्रव्यमानों की क्रमशः L व M समतलों से दूरियाँ क्रमशः a_1, a_2, a_3 व a_m तथा क्रमशः b_1, b_2, b_3 हैं।

यहाँ हम दो विधियों का अध्ययन करेंगे—

1. एक बल बहुभुज (force polygon) एवं एक बलयुग्म बहुभुज (couple polygon) को बनाकर।
2. दो बलयुग्म बहुभुजों (couple polygons) को बनाकर।

सर्वप्रथम दी गई सारणी 7.1 को बनाते हैं।

प्रथम विधि—इस विधि में उपरोक्त सारणी के कॉलम नं० 6 व 4 का प्रयोग किया जायेगा।

सर्वप्रथम कॉलम नं० 6 का प्रयोग करके बलयुग्म बहुभुज बनायेंगे। इस प्रकार हमें $m_m\, r_m\, a_m$ का परिमाण ज्ञात हो जायेगा।

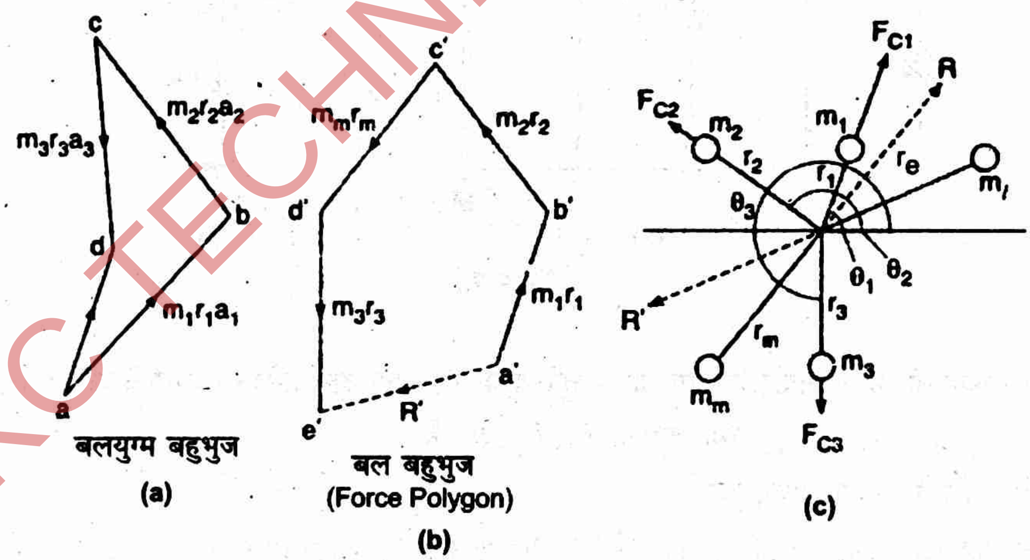
AKC TECHNICAL CLASSES

बलयुग्म बहुभुज (couple polygon) चित्र 7.9 (a) में दिखाया गया है। ab, bc, cd क्रमशः $m_1 r_1 a_1, m_2 r_2 a_2, m_3 r_3 a_3$ के परिमाण के बराबर किसी पैमाने पर चित्र 7.8 (b) में प्रदर्शित बलों की दिशा में खींचते है। बन्धक रेखा ad को लिये गये पैमाने से गुणा करने पर $m_m r_m a_m$ का मान प्राप्त होगा। 'a_m' का का मान हमें ज्ञात है तथा 'r_m' का मान रखकर 'm_m' सन्तुलित भार की गणना की जा सकती है।

सारणी 7.1

1	2	3	4	5	6	7	8
क्र० सं०	असन्तुलित पदार्थ की मात्रा (Kg.)	घूर्णन त्रिज्या (m)	समानुपाती अपकेन्द्रीय बल (kg-m)	L – समतल से दूरी (m)	L – समतल पर बलयुग्म (kg-m)	M – समतल से दूरी (m)	M – समतल पर बलयुग्म (kg-m)
1.	m_m	r_m	$m_m r_m$	a_m	$m_m r_m r_m$	0	0
2.	m_1	r_1	$m_1 r_1$	a_1	$m_1 r_1 r_1$	b_1	$m_1 r_1 b_1$
3.	m_2	r_2	$m_2 r_2$	a_2	$m_2 r_2 r_2$	b_2	$m_2 r_2 b_2$
4.	m_3	r_3	$m_3 r_3$	a_3	$m_3 r_3 r_3$	b_3	$m_3 r_3 b_3$
5.	m_l	r_l	$m_l r_l$	0	0	a_m	$m_l r_l b_m$

अब हम कॉलम नं० 4 का प्रयोग करके चित्र 7.9 (b) के अनुसार बल बहुभुज (force polygon) की रचना करेंगे।



चित्र 7.9

बल बहुभुज की रेखायें $a'b', b'c', c'd', d'e'$ क्रमशः समानुपाती बल $m_1r_1, m_2r_2, m_m r_m$ के परिमाण के बराबर किसी उचित पैमाने पर एवं दिशा के अनुरूप खींचते हैं। बन्धक रेखा (closing line) $a'e'$, बलों के परिणामी एवं दिशा को निरूपित करेंगी। परिणामी R' के विपरीत दिशा में सन्तुलक द्रव्यमान m_l क्रिया करेगा। m_l का परिमाण (magnitude) अग्र प्रकार ज्ञात करेंगे—

AKC TECHNICAL CLASSES

$$e' a' \times \text{पैमाना} = m_l\, r_l$$

'r_l' ज्ञात होने पर 'm_l' का परिमाण ज्ञात हो जायेगा।

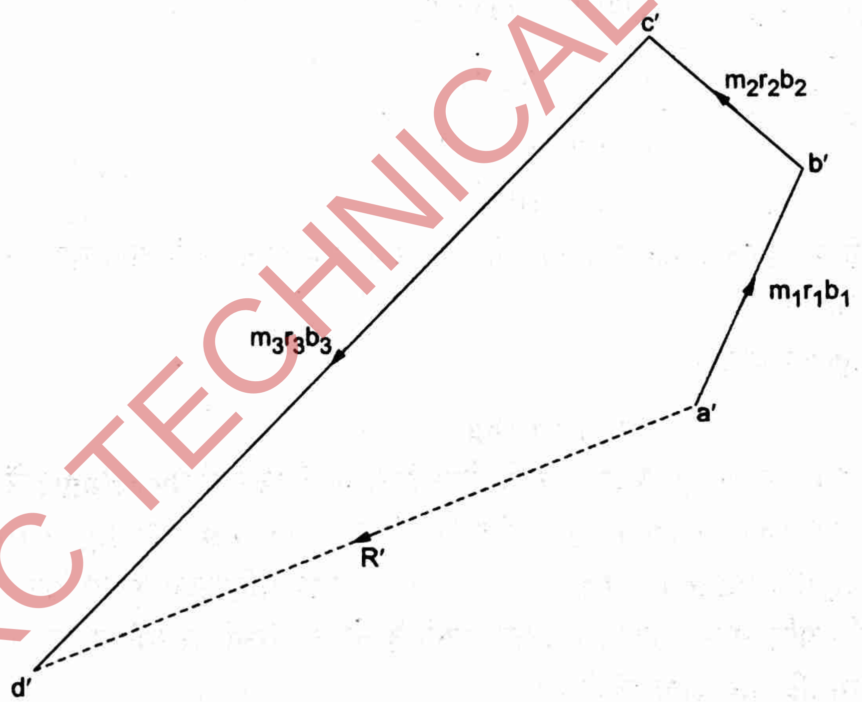
द्वितीय विधि—इस विधि में उपरोक्त सारणी के कॉलम नं० 6 एवं 8 का प्रयोग होगा। सर्वप्रथम कॉलम नं० 6 के विभिन्न परिमाणों को प्रयोग करके बलयुग्म बहुभुज चित्र 7.9(a) के अनुसार बनायेंगे। यहाँ से हम बन्धक रेखा ad को पैमाने से गुणा करके $m_m\, r_m\, a_m$ का मान प्राप्त करेंगे। a_m एवं r_m का मान ज्ञात होने पर पूर्व की भाँति सन्तुलक पदार्थ की मात्रा m_m का परिमाण ज्ञात हो जायेगा।

इसके पश्चात् कॉलम नं० 8 के विभिन्न परिमाणों को उपयोग करके एक अन्य बलयुग्म बहुभुज चित्र 7.10 के अनुसार अग्र प्रकार बनायेंगे—

किसी उचित पैमाने को मानकर रेखा $a' b', b' c', c' d'$ क्रमशः $m_1\, r_1\, b_1, m_2\, r_2\, b_2$ एवं $m_3\, r_3\, b_3$ के परिमाण एवं दिशा के अनुरूप खींचते हैं। बन्धक रेखा $a' d'$ तीनों बलयुग्मों के परिणामी (R') को परिमाण एवं दिशा में प्रदर्शित करेगी। इस परिणामी (R') का परिमाण $m_l\, r_l\, a_m$ के बराबर होगा।

$$a' d' \times \text{पैमाना} = m_l\, r_l\, a_m$$

a_m का मान हमें ज्ञात है तथा 'r_l' का परिमाण मानने पर m_l सन्तुलक द्रव्यमान की गणना की जा सकती है। सन्तुलक द्रव्यमान m_1 की दिशा (direction) परिणामी R' की दिशा के विपरीत होगी। देखिये चित्र 7.10।



चित्र 7.10. बलयुग्म बहुभुज (Couple Polygon)

उदाहरण 7.1—5 kg का एक द्रव्यमान शाफ्ट की घूर्णन अक्ष (rotational axis) से 0.4 m की दूरी पर घूर्णन समतल में लगा है। द्रव्यमान सहित शाफ्ट अपनी घूर्णन अक्ष पर 300 rpm पर घूम रही है। शाफ्ट को सन्तुलन में रखने के लिये 0.2 m की त्रिज्या पर आवश्यक सन्तुलक द्रव्यमान की गणना करें।

हल—दिया है— (i) असन्तुलित द्रव्यमान (unbalanced mass) = 5 kg,

AKC TECHNICAL CLASSES

(ii) असन्तुलित भार की घूर्णन त्रिज्या $r = 0.4$ m,

(iii) शाफ्ट की कोणीय गति $N = 300$ rpm,

(iv) सन्तुलक द्रव्यमान की घूर्णन त्रिज्या $r_B = 0.2$ m,

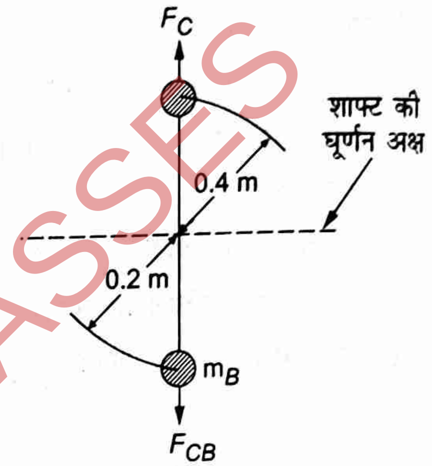
(v) सन्तुलक पदार्थ की मात्रा (balancing mass) $= m_B$

चित्र 7.11 में असन्तुलित भार (m) तथा सन्तुलित द्रव्यमान (m_B) की स्थितियों को प्रदर्शित किया गया है। अब, शाफ्ट की कोणीय गति (ω)

$$= \frac{2\pi N}{60} \text{ रेडियन/से॰}$$

$$= \frac{2 \times 3.14 \times 300}{60} \text{ rad / sec}$$

$$= 31.4 \text{ rad / sec}$$



चित्र 7.11.

हम जानते हैं, कि

असन्तुलित अपकेन्द्रीय बल (F_C) = सन्तुलित अपकेन्द्रीय बल (F_{C_B})

$$m\omega^2 r = m_B\, \omega^2 r_B$$

या $$m \times r = m_B\, r_B$$

या $$5 \times 0.4 = m_B \times 0.2$$

या $$m_B = 10 \text{ kg}$$

यहाँ दोनों द्रव्यमानों का घूर्णन समतल एक ही होने के कारण बलों के कारण उत्पन्न घूर्णों का बीजगणितीय योग शून्य करने की आवश्यकता नहीं है।

अत: आवश्यक संतुलक द्रव्यमान

$$(m_B) = 10 \text{ kg}$$ **उत्तर**

उदाहरण 7.2—1.2 m लम्बी एक शाफ्ट अपने दोनों सिरों पर बियरिंगों (bearings) में चित्रानुसार घूम रही है। बाँये सिरे की बियरिंग से 0.7 m की दूरी पर एक गतिपाल पहिया (flywheel) 100 kg द्रव्यमान का, शाफ्ट पर लगा है। पहिये के निर्माण में अशुद्धि (manufacturing defect) के कारण पहिये का गुरुत्व केन्द्र शाफ्ट की घूर्णन अक्ष से 0.8 mm की दूरी पर है। यदि शाफ्ट 800 rpm पर घूमती है तो बियरिंगों पर गतिज बल (dynamic force) एवं अधिकतम व न्यूनतम प्रतिक्रियायें ज्ञात कीजिये।

हल—चित्र 7.12 में शाफ्ट के दोनों सिरों पर लगी बियरिंगों को क्रमश: A तथा B द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

दिया है—

(i) शाफ्ट की लम्बाई $(l) = 1.2$ m

(ii) गतिपाल पहिये की बाँये सिरे से स्थिति $= 0.7$ m

(iii) पहिये का गुरुत्व केन्द्र एवं शाफ्ट की घूर्णन अक्ष में अन्तर (difference) = 0.8 mm

(iv) शाफ्ट की कोणीय गति $= 800$ rpm

AKC TECHNICAL CLASSES

(v) पहिये के द्रव्यमान (mass) = 100 kg

(vi) बाँये सिरे व दाँये सिरे पर गतिज बल एवं अधिकतम एवं न्यूनतम प्रक्रियायें ज्ञात करनी हैं।

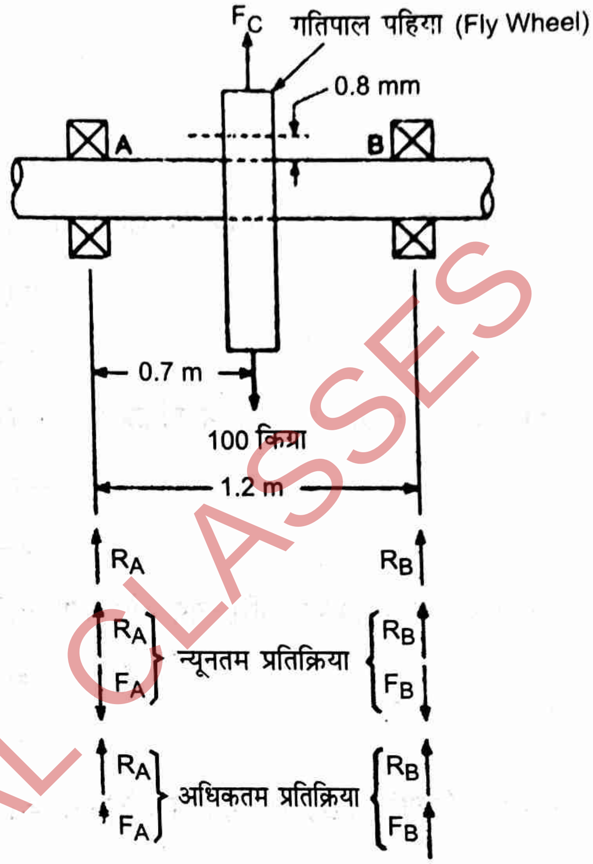
हम जानते हैं, कि शाफ्ट के घूमने पर बाहर की ओर पहिये पर लगा अपकेन्द्रीय बल,

$$F_C = m\omega^2 r$$

$$= 100\left(\frac{2\pi \times 800}{60}\right)^2 \times 0.008$$

$$= 100 \times (83.733)^2 \times 0.008$$

$$= 5608.97 \text{N}$$



चित्र 7.12.

माना कि अपकेन्द्रीय बल (F_C) के कारण बियरिंगों पर क्रमशः प्रतिक्रियायें F_A एवं F_B हैं, तब A के सापेक्ष घूर्ण लेने पर,

$$F_B \times 1.2 = F_C \times 0.7$$

$$F_B = \frac{5608.97 \times 0.7}{12} = 3271.9 \text{N}$$

B के सापेक्ष घूर्ण लेने पर,

$$F_A \times 1.2 = F_C \times 0.5$$

$$F_A = \frac{5608.97 \times 0.5}{1.2}$$

$$= 2337 \text{N}$$

गतिज प्रतिक्रियायें F_A एवं F_B अपकेन्द्रीय बल (F_C) के हमेशा विपरीत लगेंगी क्योंकि अपकेन्द्रीय बल (F_C) शाफ्ट की घूर्णन की गति के साथ-साथ अपनी दिशा बदलता रहता है, अतः गतिज प्रतिक्रियाओं की दिशा भी बदलती रहेगी।

स्थैतिक प्रतिक्रियाओं R_A एवं R_B हमेशा ऊपर की ओर ही क्रिया करेगी क्योंकि गतिपाल पहिये का द्रव्यमान $(m) = 100$ किग्रा नीचे की ओर ही रहेगा।

शाफ्ट के सिरे 'A' के सापेक्ष घूर्ण लेने पर,

$$R_B \times 1.2 = 100 \times 9.81 \times 0.7$$

$$R_B = \frac{70 \times 9.81}{1.2} = 572.24 \text{ N}$$

अब शाफ्ट के सिरे 'B' के सापेक्ष घूर्ण लेने पर,

$$R_A \times 1.2 = 100 \times 9.81 \times 0.5$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$$R_A = \frac{490.5}{1.2}$$

अत: $= 408.75 \text{N}$

(i) बियरिंग (A) पर अधिकतम प्रतिक्रिया $= (F_A + R_A)$

$= (2337 + 408.75) \text{N}$

$= \mathbf{2745.75 N}$ **उत्तर**

(ii) बियरिंग (A) पर न्यूनतम प्रतिक्रिया $= (-F_A + R_A)$

$= (-2337 + 408.75) \text{N}$

$= \mathbf{-1928.25 M}$ **उत्तर**

(iii) बियरिंग (B) पर अधिकतम प्रतिक्रिया $= (F_B + R_B)$

$= (3271.9 + 572.24) \text{N}$

$= \mathbf{3844.14 N}$ **उत्तर**

(iv) बियरिंग (B) पर न्यूनतम प्रतिक्रिया $= (-F_B + R_B)$

$= (-3271.9 + 572.24) \text{N}$

$= \mathbf{-2699.66 N}$ **उत्तर**

उदाहरण 7.3—एक शाफ्ट पर 20 kg का द्रव्यमान (mass) 1.2 m त्रिज्या पर शाफ्ट के साथ ही घूमता है। सन्तुलन के लिये इस द्रव्यमान (mass) के दोनों ओर विपरीत दिशा में दो द्रव्यमान (mass) लगाये जाते हैं। यदि इन द्रव्यमानों के घूर्णन समतल, असन्तुलित द्रव्यमान (mass) के घूर्णन समतल से 400 mm व 500 mm की दूरी पर हो तथा इन द्रव्यमानों (mass) की घूर्णन त्रिज्यायें क्रमश: 1.5 m व 1.6 m हो, तो सन्तुलक द्रव्यमानों (masses) के परिमाण ज्ञात कीजिये।

हल—

1. असन्तुलित द्रव्यमान $(m) = 20 \text{kg}$
2. सन्तुलित द्रव्यमान की घूर्णन त्रिज्या $(r) = 1.2 \text{m}$
3. सन्तुलित द्रव्यमानों के घूर्णन तल, असन्तुलित पदार्थ की मात्रा से क्रमश: 400 mm व 500 mm की दूरी पर हैं।
4. सन्तुलित द्रव्यमानों की घूर्णन त्रिज्यायें क्रमश: 1.5 m व 1.6 m हैं।

चित्र 7.13 का अवलोकन करते हैं। चित्र में एक ही अक्षीय समतल (axial plane) एवं विभिन्न घूर्णन समतल (rotational planes) में द्रव्यमानों को लगा हुआ प्रदर्शित किया गया है।

माना असन्तुलित द्रव्यमान (unbalanced mass) के दोनों ओर दो सन्तुलित द्रव्यमान (balanced mass) m_{B_1}, एवं m_{B_2} लगाने पर निकाय (system) सन्तुलन में हो जाता है।

गतिज सन्तुलन (dynamic equilibrium) के लिये

$$F_C = F_{C_{B_1}} + F_{C_{B_2}}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

अर्थात् $$m\omega^2 r = m_{B_1}\omega^2 r_{B_1} + m_{B_2}\omega^2 r_{B_2}$$

या $$mr = m_{B_1} r_{B_1} + m_{B_2} r_{B_2}$$

या $$20 \times 1.2 = m_{B_1} \times 1.5 + m_{B_2} \times 1.6$$

$$24 = 1.5 m_{B_1} + 1.6 m_{B_2} \quad \ldots(i)$$

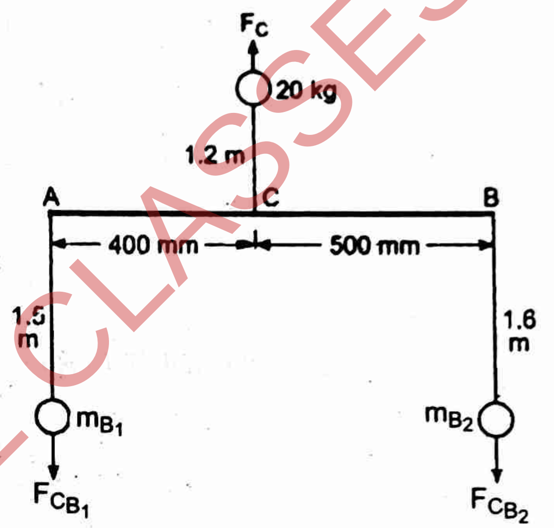
अब असन्तुलित भार (m) के घूर्णन समतल के सापेक्ष निकाय पर कार्यरत सभी अपकेन्द्रीय बलों का घूर्ण लेने पर,

$$F_{CB_1} \times 0.40 = F_{CB_2} \times 0.50$$

या $$[m_{B_1} \times \omega^2 \times 1.5] \times 0.40 = [m_{B_2} \times \omega^2 \times 1.6] \times 0.50$$

या $$m_{B_1} \times 0.6 = m_{B_2} \times 0.8$$

या $$m_{B_1} = 1.33 m_{B_2} \quad \ldots(ii)$$



चित्र 7.13.

m_{B_1} का परिमाण समी० (ii) से उपरोक्त समी० (i) में रखने पर,

$$24 = 1.5 \times 1.333 m_{B_2} + 1.6 m_{B_2}$$

या $$24 = 1.995 m_{B_2} + 1.6 m_{B_2}$$

या $$24 = 3.595 m_{B_2}$$

या $$\mathbf{m_{B_2} = 6.67\ kg}$$ उत्तर

समी० (ii) से, $$m_{B_1} = 1.333 \times 6.67$$

$$\mathbf{= 8.87\ kg}$$ उत्तर

उदाहरण 7.4—एक वृत्ताकार प्लेट अपने केन्द्र पर 150 rpm से घूम रही है। जिसमें एक 5 kg की संहति 100 mm के अर्द्धव्यास और एक 4 kg की संहति 150 mm अर्धव्यास पर सम्बद्ध है। इन दोनों पिण्डों में 90° का कोण है। संतुलित द्रव्यमान की दिशा तथा मान ज्ञात कीजिये।

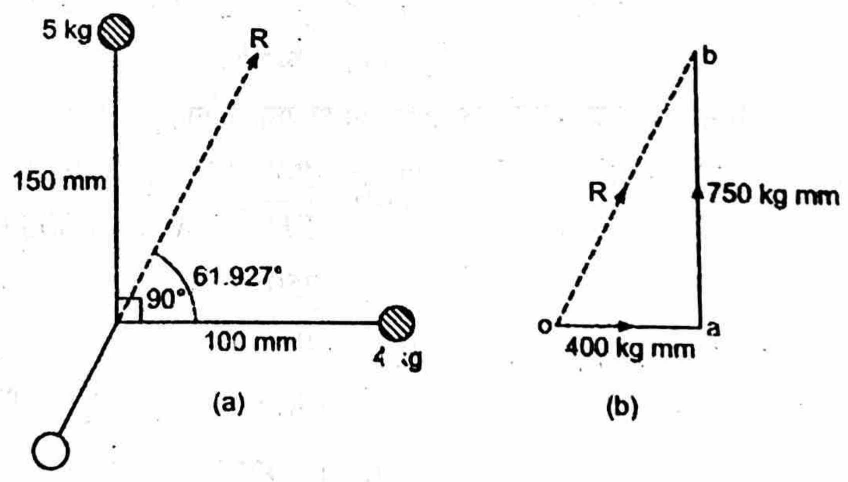
हल— चित्र 7.14 में सभी द्रव्यमानों की कोणीय स्थितियाँ प्रदर्शित की गयी हैं। सभी द्रव्यमान एक ही घूर्णन समतल में घूम रहे हैं।

यह प्रश्न दो विधियों से हल किया जा सकता है—

(a) गणनात्मक विधि (Analytical method)।

(b) ग्राफ विधि (Graphical method)।

(a) गणनात्मक विधि (Analytical method)—चित्र 7.14 (a) का अवलोकन करें। सभी द्रव्यमानों का घूर्णन समतल समान है तथा अक्षीय समतल भिन्न है।



चित्र 7.14.

इस विधि में सभी असन्तुलित द्रव्यमानों (masses) के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बलों के ऊर्ध्वाधर अवयवों का बीजगणितीय योग,

$$\Sigma V = m_1 r_1 \sin\theta_1 + m_2 r_2 \sin\theta_2$$
$$= 4 \times 100 \sin 0° + 5 \times 150 \sin 90°$$
$$= 400(0) + 750(1)$$
$$= 750 \text{ kg mm}$$

इसी प्रकार क्षैतिज अवयवों का बीजगणितीय योग

$$\Sigma H = m_1 r_1 \cos\theta_1 + m_2 r_2 \cos\theta_2$$
$$= 4 \times 100 \cos 0° + 5 \times 150 \cos 90°$$
$$= 400(1) + 750(0)$$
$$= 400 \text{ kg mm}$$

परिणामी बल $(R) = \sqrt{[(\Sigma H)^2 + (\Sigma V)^2 + 2\Sigma H . \Sigma V \cos 90°]}$

$$= \sqrt{[(\Sigma H)^2 + (\Sigma V)^2]}$$ (क्योंकि $\cos 90° = 0$)

$$= \sqrt{[(400)^2 + (750)^2]}$$
$$= \sqrt{16 \times 10^4 + 56.25 \times 10^4}$$
$$= \sqrt{72.25 \times 10^4}$$
$$= 8.5 \times 100$$
$$= 850 \text{ kg mm}$$

अत: सन्तुलित द्रव्यमान $m_B r_B = 850$ ($r_B = 100$ mm मानने पर, क्योंकि प्रश्न में नहीं दिया है।)

$m_B =$ **8.5 kg** **उत्तर**

परिणामी (R) का क्षैतिज के साथ बनाया गया कोण,

$$\tan\theta = \frac{\Sigma V}{\Sigma H}$$
$$= \frac{750}{400}$$
$$= 1.875$$
$$\theta = 61.927°$$

AKC TECHNICAL CLASSES

अत: सन्तुलित द्रव्यमान का क्षैतिज के साथ बनाया गया कोण,

$$\theta' = 180° + \theta$$

$$= 180° + 61.927°$$

$$= \mathbf{241.927°}$$ **उत्तर**

(b) ग्राफ विधि (Graphical method)—असन्तुलित भारों के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बलों के समानुपाती परिमाण,

(i) $m_1 r_1 = 4 \times 100 = 400$ kg mm

(ii) $m_2 r_2 = 5 \times 150 = 750$ kg mm

200 kg mm = 10 mm पैमाना मानकर उपरोक्त समानुपाती अपकेन्द्रीय बलों के लिये क्रमश: (0-a), (a-b) रेखाओं को, अपकेन्द्रीय बलों की क्रिया रेखाओं के समान्तर बनाते हैं। बन्धक रेखा (0-b) परिणामी बल का परिमाण एवं दिशा को प्रदर्शित करेगी। इसके विपरीत दिशा में सन्तुलित बल की क्रिया रेखा होगी।

$$m_B \times 100 = (0 - b) \times \text{पैमाना}$$

यहाँ $r_B = 100$ mm मानने पर, क्योंकि प्रश्न में सन्तुलित बल के घूमने का अर्धव्यास नहीं दिया गया है।

$$100 m_B = 4.25 \times 200$$

अत: $m_B = \mathbf{8.5\ kg}$ **उत्तर**

चित्र 7.14 (b) में परिणामी (R) का कोण नापने पर **61.927°** है। अत: सन्तुलित द्रव्यमान का कोण **241.927°** होगा। **उत्तर**

उदाहरण 7.5—16 kg, 9 kg एवं 10 kg के तीन द्रव्यमान (mass) क्रमश: 40 mm, 100 mm एवं 80 mm घूर्णन त्रिज्याओं पर एक ही समतल में घूमते हैं। पहले द्रव्यमान से दूसरे तथा तीसरे द्रव्यमान की कोणीय स्थिति क्रमश: 75° एवं 135° हैं। इन्हें सन्तुलन में रखने के लिये 60 mm घूर्णन त्रिज्या पर कितने द्रव्यमान की आवश्यकता होगी?

हल—इस प्रश्न में सभी असन्तुलित द्रव्यमान एवं सन्तुलित द्रव्यमान एक ही घूर्णन समतल (rotational plane) में घूमेंगे। यहाँ सभी द्रव्यमानों (mass) के अक्षीय समतल (axial planes) विभिन्न होंगे। (चित्र 7.15 (a, b))।

(a) गणनात्मक विधि (Analytical method)—इस विधि में सभी असन्तुलित द्रव्यमानों के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बलों के ऊर्ध्वाधर अवयवों का बीजगणितीय योग

$$\Sigma V = m_1 r_1 \sin\theta_1 + m_2 r_2 \sin\theta_2 + m_3 r_3 \sin\theta_3$$

$$= 16 \times 40 \sin 0° + 9 \times 100 \sin 75° + 10 \times 80 \sin 135°$$

$$= 0 + 900 \times 0.965 + 800 \times 0.707$$

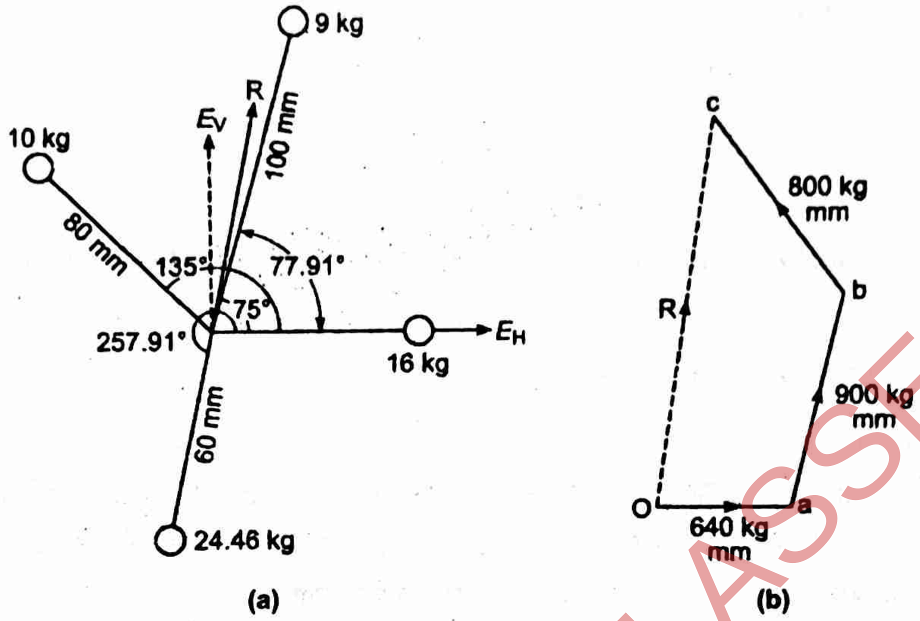
$$= 869.32 + 565.68$$

$$= 1435 \text{ kg mm}$$

इसी प्रकार क्षैतिज अवयवों का बीजगणितीय योग

$$\Sigma H = m_1 r_1 \cos\theta_1 + m_2 r_2 \cos\theta_2 + m_3 r_3 \cos\theta_3$$

AKTU TECHNICAL CLASSES



चित्र 7.15.

$$= 16 \times 40 \cos 0° + 9 \times 100 \cos 75° + 10 \times 80 \cos 135°$$

$$= 640 \cos 0° + 900 \cos 75° + 800 \times \cos 135°$$

$$= 640 \times 1 + 900 \times 0.258 + 800 \times (-0.707)$$

$$= 640 + 232.92 - 565.68$$

$$= 307.24 \text{ kg mm}$$

परिणामी बल $(R) = \sqrt{[(\Sigma H)^2 + (\Sigma V)^2 + 2\Sigma H.\Sigma V \cos 90°]}$

$$= \sqrt{[(\Sigma H)^2 + (\Sigma V)^2]}$$ (क्योंकि $\cos 90° = 0$)

$$= \sqrt{[(307.24)^2 + (1435)^2]}$$

$$= \sqrt{(94396 + 2059225 1)}$$

$$= \sqrt{2153621}$$

$$= 1467.57 \text{ kg mm}$$

परिणामी बल (R) का क्षैतिज के साथ बनाया गया कोण

$$\tan\theta = \frac{\Sigma V}{\Sigma H}$$

$$= \frac{1435}{307} = 4.67$$

अत: $\theta = 77.91°$

AKC TECHNICAL CLASSES

अत: सन्तुलित भार,

$$m_B\, r_B = 1467.57$$

$$m_B \times 60 = 1467.57$$

$$\boldsymbol{m_B = 24.46\ kg}$$

उत्तर

एवं सन्तुलित भार का क्षैतिज के साथ बनाया गया कोण,

$$\theta' = 180° + \theta = 180° + 77.91$$

$$= \mathbf{257.91°}$$

उत्तर

(b) ग्राफ विधि (Graphical method)—असन्तुलित भारों के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बलों के समानुपाती परिणाम,

(i) $m_1 r_1 = 16 \times 40 = 640\ kg\ mm$

(ii) $m_2 r_2 = 9 \times 100 = 900\ kg\ mm$

(iii) $m_3 r_3 = 10 \times 80 = 800\ kg\ mm$

160 kg mm = 10 mm पैमाना मान कर उपरोक्त समानुपाती अपकेन्द्रीय बलों के लिये क्रमश: रेखायें (0-*a*), (*a*-*b*), (*b*-*c*) चित्र 7.15 (a) के अनुसार खींचते हैं। रेखायें (0-*a*), (*a*-*b*), (*b*-*c*) क्रमश: समानुपाती अपकेन्द्रीय बलों की क्रिया रेखाओं के समानान्तर खींची जाती हैं। बन्धक रेखा (0-*c*) परिणामी बल का परिमाण एवं दिशा को प्रदर्शित करेगी। इस रेखा के विपरीत दिशा में परिणामी बल की क्रिया रेखा होगी। परिणामी पदार्थ की मात्रा का परिमाण,

$$m_B \times 60 = (0\text{-}c) \text{ रेखा की लम्बाई} \times \text{पैमाना}$$

$$= 9.172 \times 60$$

अत:

$$\boldsymbol{m_B = 24.45\ kg}$$

उत्तर

सन्तुलित पदार्थ की मात्रा (m_B) की क्षैतिज रेखा से कोणीय विस्थापन (नापने पर)

$$= \mathbf{257.91°}$$

उत्तर

उदाहरण 7.6—8, 6, 5, m_1 एवं m_2 kg के पाँच द्रव्यमान (mass) एक ही घूर्णन समतल (rotational plane) में क्रमश: 50, 40, 70, 80 एवं 70 mm की त्रिज्याओं पर घूमते हैं। इन द्रव्यमानों की क्षैतिज से वामावर्त दिशा (anticlockwise direction) में मापने पर कोणीय स्थितियाँ क्रमश: 0°, 35°, 130°, 180° तथा 270° हैं। m_1 एवं m_2 द्रव्यमानों के परिमाण ज्ञात कीजिये।

हल—चित्र 7.16 का अवलोकन कीजिये। सभी द्रव्यमानों (masses) का घूर्णन समतल समान है तथा अक्षीय समतल विभिन्न है।

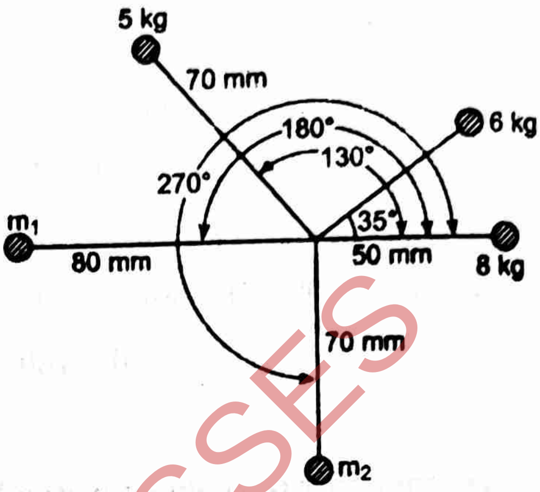
यह प्रश्न भी निम्न दो विधियों से हल किया जा सकता है—

(1) गणनात्मक विधि (Analytical method)

(2) ग्राफ विधि (Graphical method)

AKC TECHNICAL CLASSES

1. गणनात्मक विधि (Analytical method)—प्रश्न में उपरोक्त द्रव्यमानों (masses) का निकाय सन्तुलन में हैं अत: द्रव्यमानों (masses) के घूमने के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बलों के ऊर्ध्वाधर एवं क्षैतिज अवयवों के बीजगणित योग क्रमशः शून्य होने चाहिये। (देखें चित्र 7.16 (a))।



चित्र 7.16 (a)

उर्ध्व अवयवों ($\Sigma V = 0$) के जोड़ को शून्य रखने पर,

$$0 = (8 \times 50)\sin 0° + (6 \times 40)\sin 35° + (5 \times 70)\sin 130° + (m_1 \times 80)\sin 180° + (m_2 \times 70)\sin 270° \quad \text{... (i)}$$

या $0 = 0 + 240 \times 0.573 + 350 \times 0.766 + 0 + 70 m_2 \times (-1)$

या $0 = 137.65 + 268.11 - 70 m_2$

या $70 m_2 = 405.77$

या $m_2 = \mathbf{5.79\ kg}$ उत्तर

अब क्षैतिज अवयवों ($\Sigma H = 0$) के जोड़ को शून्य रखने पर,

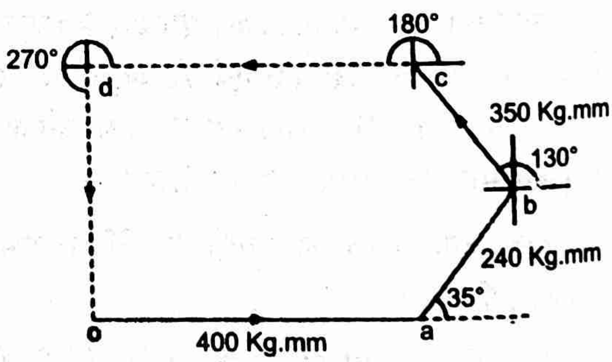
$$0 = (8 \times 50)\cos 0° + (6 \times 40)\cos 35° + (5 \times 70)\cos 130° + (m_1 \times 80)\cos 180° + (m_2 \times 70)\cos 270° \quad \text{... (ii)}$$

$$0 = 400 \times 1 + 240 \times 0.819 + 350 \times (-0.64) + 80 m_1(-1) + 70 m_2 \times 0$$

$$0 = 400 + 196.59 - 224.97 - 80 m_1$$

$80 m_1 = 371.62$ या $m_1 = \mathbf{4.64\ kg}$ उत्तर

2. ग्राफ विधि (Graphical method)—क्योंकि सभी द्रव्यमान संतुलन में हैं। अत: चित्र 7.16 (b) में बहुभुज (0-*a*-*b*-*c*-*d*) एक बन्द बहुभुज होगा। इस बहुभुज की रेखायें (0-*a*), (*a*-*b*), (*b*-*c*) क्रमशः 8 kg, 6 kg एवं 5 kg द्रव्यमानों (masses) के कारण उत्पन्न समानुपाती अपकेन्द्रीय बलों में परिमाण के बराबर तथा उपरोक्त तीनों द्रव्यमानों (masses) की क्रिया रेखाओं के क्रमशः समानान्तर खींची जायेगी। रेखा (*c*-*d*) को m_1 पदार्थ की मात्रा (mass) की क्रिया रेखा के समानान्तर तथा रेखा (0-*d*) को m_2 द्रव्यमान (mass) की क्रिया रेखा के समानान्तर खीचते हैं। दोनों रेखाओं का कटान बिन्दु *d* होगा। इस प्रकार रेखा (*c*-*d*) एवं (0-*d*) को मापकर तथा माने गये पैमाने से गुणा करके पदार्थ की मात्राओं m_1 एवं m_2 को ज्ञात किया जा सकता है।



चित्र 7.16 (b)

चित्र 7.16 (b) के आरेख को बनाने के लिये 10 kg mm = 1 mm पैमाना लिया गया है—

$$\text{रेखा } (c\text{-}d) \times \text{पैमाना} = m_1 \times 80$$

$$37.16 \times 10 = 80\ m_1$$

$$m_1 = \mathbf{4.64\ kg}$$ **उत्तर**

रेखा (d-0) × पैमाना $= m_2 \times 70$

$$40.57 \times 10 = 70\ m_2$$

$$m_2 = \mathbf{5.79\ kg}$$ **उत्तर**

उदाहरण 7.7—चार द्रव्यमानों m_1, m_2, m_3 व m_4 के द्रव्यमान (masses) क्रमशः 200 kg, 300 kg, 240 kg तथा 260 kg हैं। उसी क्रम में घूमने के अर्द्धव्यास क्रमशः 200 mm, 150 mm, 250 mm और 300 mm हैं तथा द्रव्यमानों के बीच के कोण 45°, 75° व 135° हैं। सन्तुलक द्रव्यमान की स्थिति एवं परिमाण ज्ञात कीजिये यदि इसकी घूर्णन त्रिज्या 200 mm है। सभी भार एक ही घूर्णन समतल में घूम रहे हैं।

हल—चित्र 7.17 (a) में सभी द्रव्यमानों (masses) की कोणीय स्थितियाँ प्रदर्शित की गई हैं। सभी द्रव्यमान (masses) एक ही घूर्णन समतल में घूम रहे हैं।

यह प्रश्न दो विधियों से हल किया जा सकता है—

(a) गणनात्मक विधि (Analytical method)—चित्र 7.17 (a) का अवलोकन करें। सभी द्रव्यमानों (masses) का घूर्णन समतल समान है तथा अक्षीय समतल भिन्न है।

इस विधि में सभी असन्तुलित द्रव्यमानों (masses) के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बलों के ऊर्ध्वाधर अवयवों का बीजगणितीय योग

$$\Sigma V = m_1 r_1 \sin\theta_1 + m_2 r_2 \sin\theta_2 + m_3 r_3 \sin\theta_3 + m_4 r_4 \sin\theta_4$$

$$= 200 \times 200 \sin 0° + 300 \times 150 \sin 45° + 240 \times 250 \sin 120° + 260 \times 300 \sin 255°$$

$$= 0 + 300 \times 150 \times 0.707 + 240 \times 250 \times 0.866 + 260 \times 300 \times (-0.96)$$

$$= 31815 + 51960 - 75340.32$$

$$= 8434.78 \text{ kg mm}$$

इसी प्रकार क्षैतिज अवयवों का बीजगणितीय योग

$$\Sigma H = m_1 r_1 \cos\theta_1 + m_2 r_2 \cos\theta_2 + m_3 r_3 \cos\theta_3 + m_4 r_4 \cos\theta_4$$

$$= 200 \times 200 \cos 0° + 300 \times 150 \cos 45° + 240 \times 250 \cos 120° + 260 \times 300 \cos 255°$$

$$= 200 \times 200 \times 1 + 300 \times 150 \times 0.707 + 240 \times 250 \times (-0.5) + 260 \times 300(-0.258)$$

$$= 40000 + 31815 - 30000 - 20186.4$$

$$= 21628.6 \text{ kg mm}$$

परिणामी बल $(R) = \sqrt{(\Sigma H)^2 + (\Sigma V)^2 + 2\Sigma H\, \Sigma V \cos 90°}$

$$= \sqrt{(\Sigma H)^2 + (\Sigma V)^2}$$ (क्योंकि $\cos 90° = 0$)

$$= \sqrt{(21628.6)^2 + (8434.78)^2}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$$= \sqrt{(467796340 + 71145514)}$$

$$= \sqrt{538941854} = 23215 \text{ kg mm}$$

परिणामी बल (R) का क्षैतिज के साथ बनाया गया कोण

$$\tan\theta = \frac{\Sigma_V}{\Sigma_H} = \frac{8434.78}{21628.6} = 0.39$$

अत: $\theta = 21.3°$

अत: सन्तुलित द्रव्यमान

$$m_B r_B = 23215$$

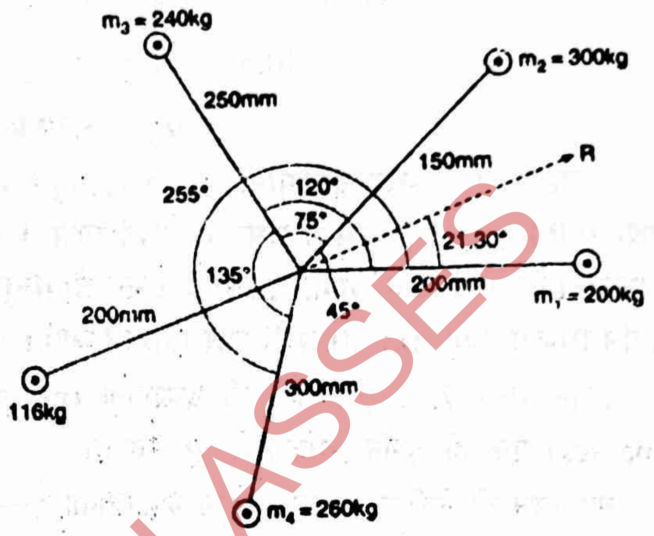
$$m_B \times 200 = 23215$$

$$m_B = \mathbf{116 \text{ kg}}$$ **उत्तर**

एवं सन्तुलित द्रव्यमान का क्षैतिज के साथ बनाया गया कोण

$$\theta' = 180° + \theta$$

$$= 180° + 21.3° = \mathbf{201.3°}$$ **उत्तर**



चित्र 7.17 (a)

(b) ग्राफ विधि (Graphical method)—असन्तुलित भारों के कारण उत्पन्न अपकेन्द्रीय बलों के समानुपाती परिमाण,

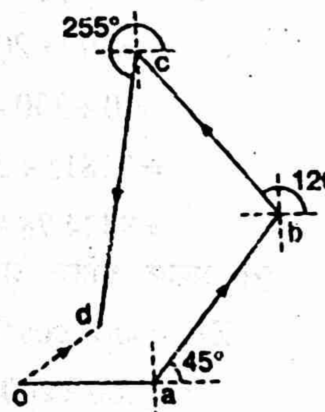
(i) $m_1 r_1 = 200 \times 200 = 4 \times 10^4$ kg mm

(ii) $m_2 r_2 = 300 \times 150 = 4.5 \times 10^4$ kg mm

(iii) $m_3 r_3 = 240 \times 250 = 6 \times 10^4$ kg mm

(iv) $m_4 r_4 = 260 \times 300 = 7.8 \times 10^4$ kg mm

1000 kg mm = 1 mm पैमाना मानकर उपरोक्त समानुपाती अपकेन्द्रीय बलों के लिए क्रमश: रेखायें (0-a), (a-b), (b-c), (c-d) के समानुपाती अपकेन्द्रीय बलों की क्रिया रेखाओं के समानान्तर खींचिये। (देखें चित्र 17(b))। बन्धक रेखा (0-d) परिणामी बल का परिमाण एवं दिशा को प्रदर्शित करेगी। इसके विपरीत दिशा में सन्तुलित बल की क्रिया रेखा होगी। सन्तुलित द्रव्यमान (mass) का परिमाण,



चित्र 7.17 (b)

$$m_B \times 200 = (0\text{-}d) \text{ रेखा की लम्बाई} \times \text{पैमाना}$$

$$m_B \times 200 = 0d \times 1000$$

$$200 m_B = 23.2 \times 1000$$

$$m_B = \mathbf{116 \text{ kg}}$$ **उत्तर**

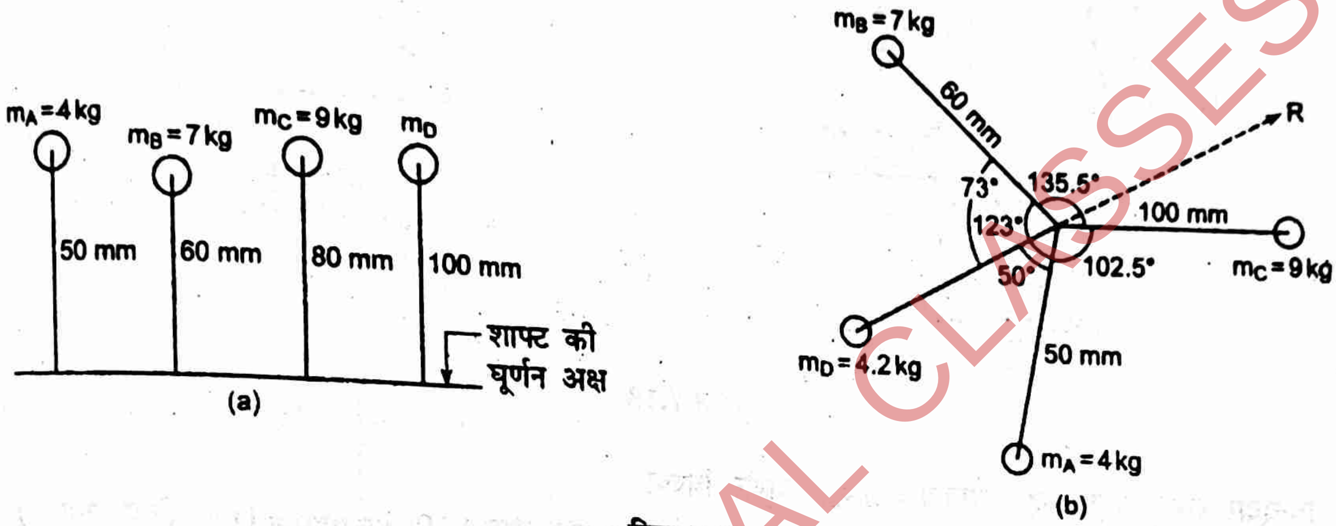
सन्तुलक भार m_B का क्षैतिज रेखा से कोणीय विस्थापन (नापने पर)

$$= \mathbf{201.3°}$$ **उत्तर**

AKC TECHNICAL CLASSES

उदाहरण 7.8—एक घूमती शाफ्ट पर चार द्रव्यमान (masses) m_A, m_B, m_C तथा m_D क्रमशः 50, 60, 80 तथा 100 mm घूर्णन त्रिज्याओं पर लगे हैं। इन भारों के घूर्णन तलों (planes of rotation) के मध्य 500 mm की दूरी है। यदि m_A, m_B, m_C के परिमाण 4, 7 तथा 9 kg हैं तो m_D का परिमाण तथा सभी द्रव्यमानों (masses) की कोणीय स्थितियाँ ज्ञात कीजिये जिससे कि शाफ्ट सन्तुलन में रहे।

हल—सभी द्रव्यमानों (masses) के तलों का प्रबन्ध चित्र 7.18(a) में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 7.18

सर्वप्रथम नीचे दी गई सारणी 7.2 बनाइये। माना सन्तुलक द्रव्यमान (mass) m_D है।

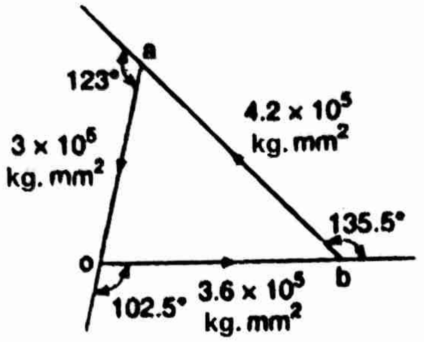
सारणी 7.2

क्रम संख्या	द्रव्यमान kg	घूर्णन त्रिज्या mm	समानुपाती अपकेन्द्रीय बल kg mm	m_D द्रव्यमान के तल से दूरी mm	m_D द्रव्यमान के तल पर घूर्ण kg mm^2
1.	m_D	100	$m_D \times 100$	0	0
2.	9	80	$9 \times 80 = 720$	500	3.6×10^5
3.	7	60	$7 \times 60 = 420$	1000	4.2×10^5
4.	4	50	$4 \times 50 = 200$	1500	3.0×10^5

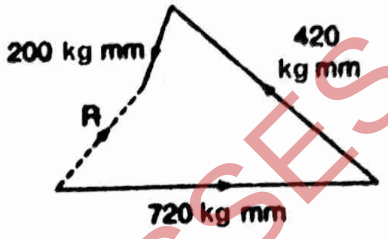
द्रव्यमान m_D के तल के सापेक्ष सभी समानुपाती अपकेन्द्रीय बलों का घूर्ण लेते हैं। तीनों घूर्णों 3.6×10^5, 4.2×10^5, 3×10^5 kg mm^2 के लिये बलयुग्म बहुभुज (couple polygon) चित्र 7.18 (b) के अनुसार बनाते हैं। इस बहुभुज को बनाने के लिये किसी पैमाने पर 3.6×10^5 kg mm^2 की क्षैतिज रेखा खींचते हैं। इसके पश्चात् इस रेखा के दांये बिन्दु को केन्द्र मानकर तथा उसी पैमाने पर 4.2×10^5 kg mm^2 की दूरी लेकर एक अन्य चाप लगाते हैं तथा इसी रेखा के बाँये बिन्दु को केन्द्र मानकर तथा 3×10^5 kg mm^2 की दूरी लेकर एक अन्य चाप लगाते हैं, जो पहले चाप को C बिन्दु पर काटेगा। a तथा b बिन्दुओं को c से बनाते हैं। इस प्रकार प्राप्त बहुभुज, बलयुग्म बहुभुज होगा। इस बहुभुज की सहायता से चित्र 7.18(c) में प्रदर्शित m_A, m_B, m_C द्रव्यमानों (masses) की कोणीय स्थितियाँ प्राप्त हो जाती हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

द्रव्यमानों (masses) की कोणीय स्थितियाँ प्राप्त होने के पश्चात् चित्र 7.18 (d) के अनुसार बल बहुभुज (force polygon) बनाते हैं। इस बल बहुभुज की बन्धक रेखा (closing line) दिखाई गई दिशा में तीनों बलों के परिणामी को प्रदर्शित करेगी। पदार्थ की मात्रा m_D का परिमाण अग्र प्रकार ज्ञात किया जाता है।



बलयुग्म बहुभुज
(Couple Polygon)
(c)



बल बहुभुज
(Force Polygon)
(d)

चित्र 7.18

बिन्दुदार रेखा की लम्बाई × पैमाना $= m_D \times$ घूर्णन त्रिज्या

$4.2 \times 100 = m_D \times 100$ (यहाँ माना गया पैमाना $100 \, \text{kg mm} = 1 \, \text{mm}$ लिया गया है)

अत: $m_D = \mathbf{4.2 \, kg}$ उत्तर

m_D भार की दिशा परिणामी की दिशा के विपरीत होगी।

उदाहरण 7.9—चार द्रव्यमान m_A, m_B, m_C तथा m_D क्रमशः 40, 50, 60 तथा M किग्रा पदार्थों की मात्रा के एक शाफ्ट पर दृढ़ता से सम्बद्ध हैं तथा द्रव्यमानों की त्रिज्यायें शाफ्ट अक्ष से क्रमशः 300, 280, 240 mm पर हैं। शाफ्ट अपनी अक्ष पर घूमती है तथा द्रव्यमानों के घूर्णन तल आपस से समान दूरी पर हैं। द्रव्यमान M का परिमाण तथा द्रव्यमानों m_A के सन्दर्भ में m_B, m_C, m_D की कोणीय स्थितियाँ ज्ञात कीजिये जिससे कि शाफ्ट पूर्ण सन्तुलन में रहे।

हल—सभी द्रव्यमानों के घूर्णन तलों का प्रबन्ध चित्र 7.19 (a) में प्रदर्शित किया गया है।

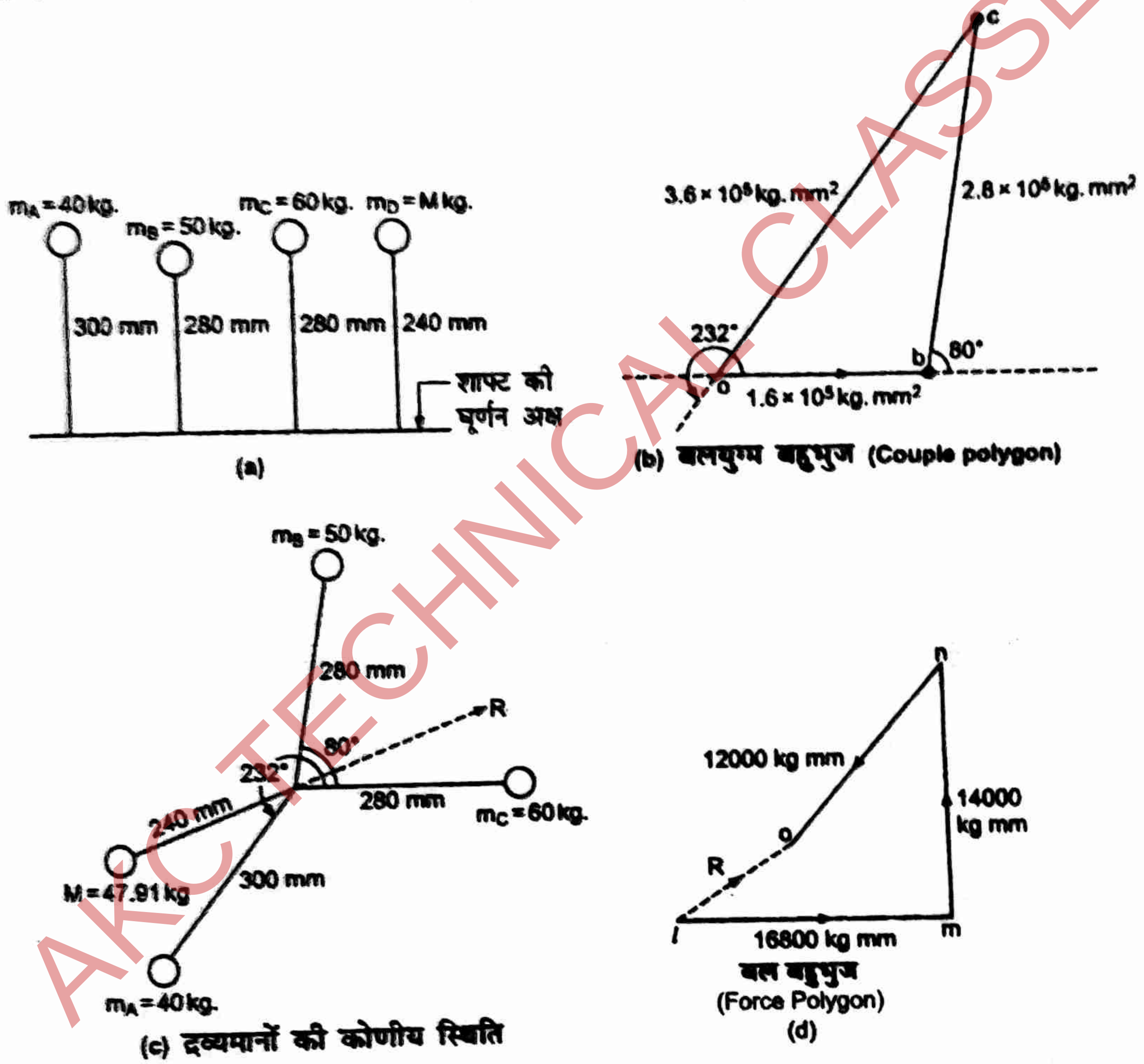
सर्वप्रथम नीचे दी गई सारणी 7.3 बनाते हैं।

सारणी 7.3

क्रम संख्या	द्रव्यमान kg	घूर्णन त्रिज्या mm	समानुपाती अपकेन्द्रीय बल kg mm	m_D द्रव्यमान के तल से दूरी mm	m_D द्रव्यमान के तल पर घूर्ण kg mm²
1.	M	240	$240M$	0	0
2.	60	280	16800	$+l$	$1.6 \times 10^5 \, l$
3.	50	280	14000	$2l$	$2.8 \times 10^5 \, l$
4.	40	300	12000	$3l$	$3.6 \times 10^5 \, l$

AKC TECHNICAL CLASSES

द्रव्यमान M के तल के सापेक्ष सभी समानुपाती अपकेन्द्रीय बलों का घूर्ण ज्ञात करते हैं, जो क्रमश: $0, 1.6\times10^5\ l$, $2.8\times10^5\ l$, $3.6\times10^5\ l$ होगा। अब घूर्णों $1.6\times10^5\ l$, $2.8\times10^5\ l$, $3.6\times10^5\ l$ को लेकर एक बलयुग्म बहुभुज (couple polygon) की चित्र 7.19(b) के अनुसार रचना करते हैं। बलयुग्म बहुभुज को बनाने की विधि पूर्व में वर्णित उदाहरण के समान है। इस बलयुग्म बहुभुज की सहायता से द्रव्यमान m_A, m_B, m_C की कोणीय स्थितियाँ प्राप्त करते हैं। देखिये चित्र 7.19(c)। द्रव्यमानों की कोणीय स्थितियाँ प्राप्त होने के पश्चात् चित्र 7.19 (c) के अनुसार बल बहुभुज (force polygon) बनाते हैं। इस बल बहुभुज की बन्धक रेखा (closing line) दिखाई गई दिशा में तीनों बलों के परिणामी को प्रदर्शित करेगी। M के परिणाम को निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं। चित्र 7.19 (d) से,



चित्र 7.19

बिन्दुदार रेखा की लम्बाई × पैमाना = M × घूर्णन त्रिज्या

$$23\times500 = M\times240$$ (यहाँ माना गया पैमाना 500 kg mm = 1 mm है।)

$$M = 47.91\ \text{kg}$$ उत्तर

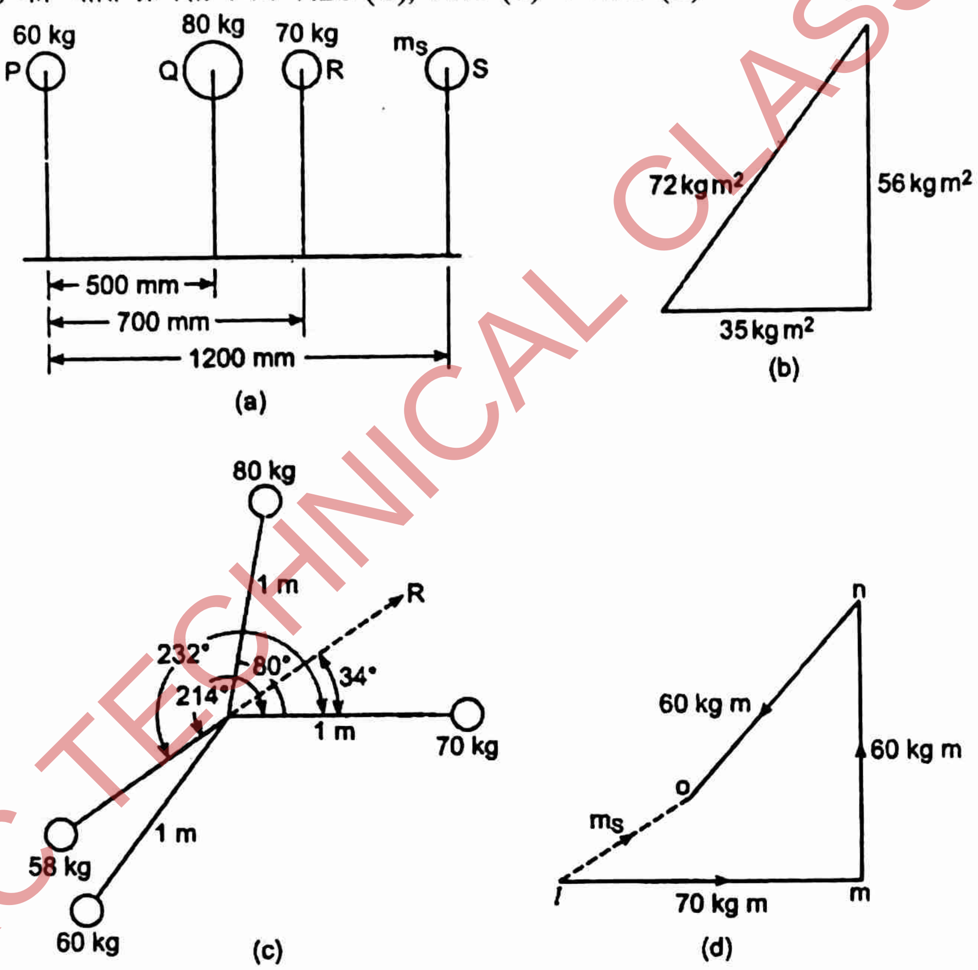
AKC TECHNICAL CLASSES

M के मान की क्रिया रेखा परिणामी (R) की क्रिया रेखा के विपरीत होगी। 60 kg भार से इसकी कोणीय दूरी 194° वामावर्त (anticlockwise) होगी।

उदाहरण 7.10—चार द्रव्यमानों को एक शाफ्ट के साथ P, Q, R तथा S तलों में त्रिज्याओं पर संलग्न किया गया है। तल P से, तलों Q, R तथा S की दूरियाँ क्रमशः 500, 700 तथा 1200 mm है। P, Q तथा R तलों पर क्रमशः 60, 80 तथा 70 kg के द्रव्यमान हैं। पूर्ण गतिज सन्तुलन के लिये S पर लगे द्रव्यमान का भार तथा P के द्रव्यमान के सापेक्ष Q, R तथा S पर लगे द्रव्यमानों की कोणीय स्थिति ज्ञात कीजिये।

हल—सभी द्रव्यमानों के घूर्णन तलों का प्रबन्ध चित्र 7.20(a) में प्रदर्शित किया गया है। सर्वप्रथम आगे दी गई सारणी 7.4 बनाइये।

उदाहरण 7.8 की भाँति क्रमशः चित्र 7.20 (b), 7.20 (c) व 7.20 (d) को बनाते हैं।



चित्र 7.20

चित्र 7.20 (d) से,

बिन्दुदार रेखा (Ol) की लम्बाई × पैमाना $= m_S \times$ घूर्णन त्रिज्या

$$28 \times 2 = m_S \times 1$$

अतः $$m_S = 56 \text{ kg}$$

(यहाँ पैमाना 2 kgm = 1 mm माना गया है।) **उत्तर**

AKC TECHNICAL CLASSES

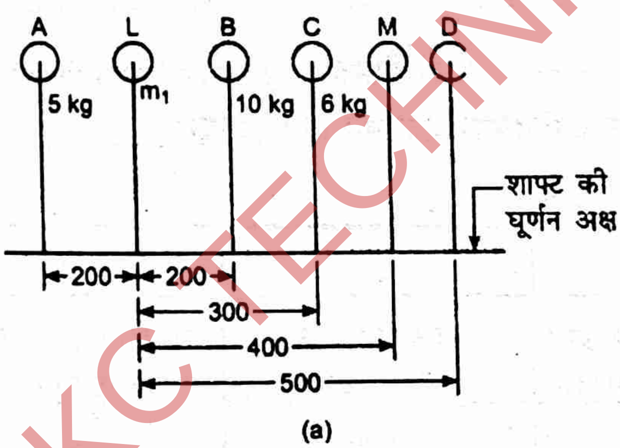
सारणी 7.4

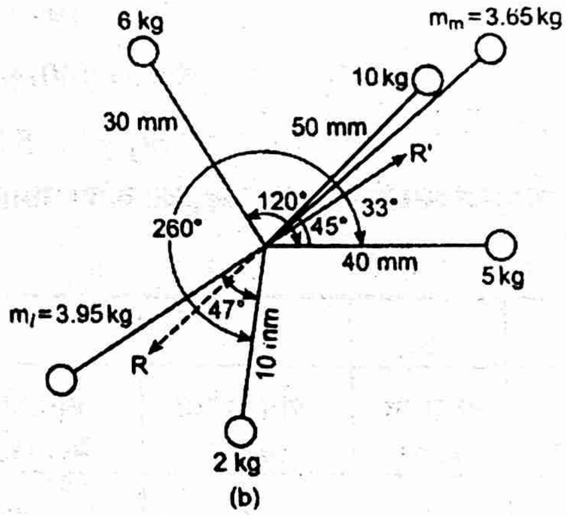
क्रम संख्या	द्रव्यमान (kg)	घूर्णन त्रिज्या (mm)	समानुपाती बल (kg mm)	S तल से दूरी (m)	S तल पर घूर्ण (kg mm^2)
1.	m_S	1.0	m_S	0	0
2.	70	1.0	70	0.50	35
3.	80	1.0	80	0.70	56
4.	60	1.0	60	1.20	72

m_S द्रव्यमान की दिशा परिणामी (R) की दिशा के विपरीत होगी। परिणामी (R) 70 kg के द्रव्यमान से 34° वामावर्त दिशा में होगा। अतः m_S द्रव्यमान 70 kg के द्रव्यमान की रेखा से 214° कोणीय दूरी पर लगाया जायेगा।

उदाहरण 7.11—एक शाफ्ट के लम्बरूप घूर्णन समतलों *A, L, B, C, M, D* में द्रव्यमान पूर्ण सन्तुलन में है। समतलों *A, B, C* तथा *D* में क्रमशः 5, 10, 6 तथा 2 kg के द्रव्यमान हैं और *A* द्रव्यमान के सापेक्ष इनकी कोणीय स्थिति क्रमशः 45°, 120°, तथा 260° पर है। यदि समतलों *A, L, B, C, M, D* में द्रव्यमान क्रमशः 40, 100, 20, 30, 50 तथा 100 mm की घूर्णन त्रिज्याओं पर हैं तो समतलों *L* तथा *M* में द्रव्यमानों के मान और उनकी कोणीय स्थितियाँ ज्ञात कीजिये। समतल *L* से विभिन्न द्रव्यमानों की दूरियाँ चित्र 7.21 (a) में प्रदर्शित की गयी हैं।

हल—प्रश्न के अनुसार सारणी 7.5 बनाइये। चित्र 7.21 (b) में द्रव्यमानों की कोणीय स्थितियाँ प्रदर्शित की गई हैं।





चित्र 7.21

चित्र 7.21 (c) में प्रदर्शित बलयुग्म बहुभुज (Couple Polygon) को सारणी 7.5 के कालम नं० 6 में दिये परिमाणों एवं चित्र 7.21 (d) में प्रदर्शित बल बहुभुज (force polygon) को कालम नं० 4 में दिये गये परिमाणों को लेकर पिछले उदाहरण में दी गई विधि के द्वारा बनाया गया है।

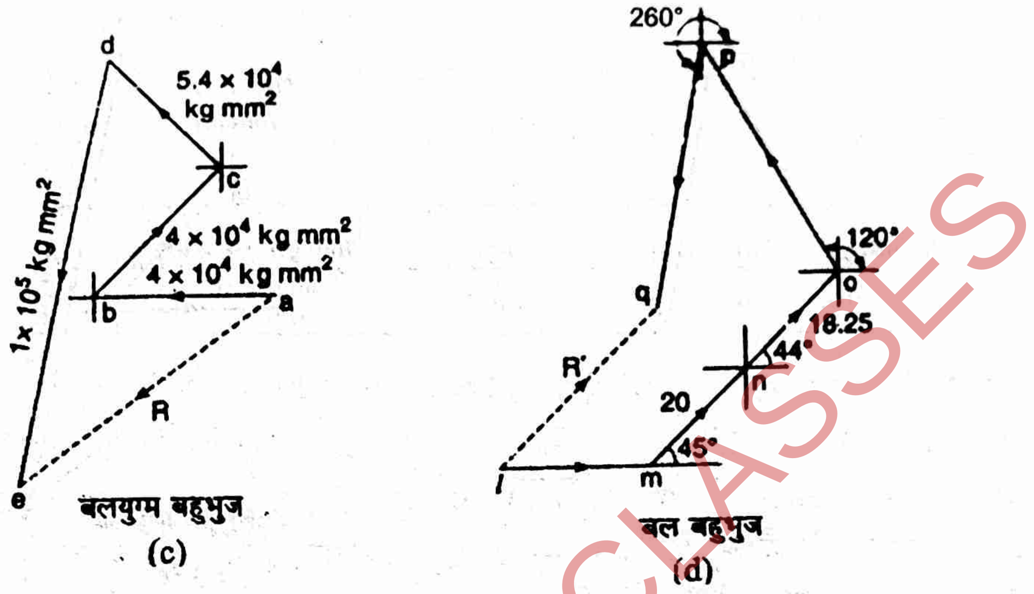
भार m_m ज्ञात करने के लिये चित्र 7.21 (c) से,

$$ea \times \text{पैमाना} = 2 \times 10^4 \, m_m$$

$$73 \times 1000 = 2 \times 10^4 \, m_m$$

AKG TECHNICAL CLASSES

$m_m = \mathbf{3.65\ kg}$ (यहाँ पैमाना $1000\ \text{kg mm}^2 = 1\ \text{mm}$ माना गया है।)



चित्र 7.21

एवं भार m_l ज्ञात करने के लिये चित्र 7.21(d) से,

$$ql \times \text{पैमाना} = 100\, m_l$$

$$79 \times 5 = 100\, m_l$$

$$\mathbf{m_l = 3.95\ kg}$$ (यहाँ पैमाना $5\ \text{kg mm} = 1\ \text{mm}$ माना गया है।)

5 किग्रा के भार से m_m तथा m_l का कोण वामावर्त दिशा में क्रमशः 42° एवं 213° होगा। उत्तर

सारणी 7.5

1	2	3	4	5	6
क्रम संख्या	**द्रव्यमान (kg)**	**घूर्णन त्रिज्या (mm)**	**समानुपाती अपकेन्द्रीय बल (kg mm)**	**समतल 'L' से दूरी (mm)**	**समतल 'L' पर घूर्णन (kg mm^2)**
A	5	40	200	–200	-4×10^4
L	m_l	100	$100\, m_l$	0	0
B	10	20	200	+200	$+4 \times 10^4$
C	6	30	180	+300	$+5.4 \times 10^4$
M	m_m	50	$50\, m_m$	+400	$+2 \times 10^4 m_m$
D	2	100	200	+500	$+1 \times 10^5$

AKC TECHNICAL CLASSES

उदाहरण 7.12—चार द्रव्यमान *A, B, C, D* पूर्णतया संतुलित हैं। द्रव्यमान *C* तथा *D*, द्रव्यमान *B* से क्रमशः 90° तथा 195° का कोण उसी अभिदिशा में बनाते हैं। घूमने वाले द्रव्यमान हैं–

$$m_B = 25\text{ kg},\ r_B = 200\text{ mm}$$

$$m_C = 40\text{ kg},\ r_C = 100\text{ mm}$$

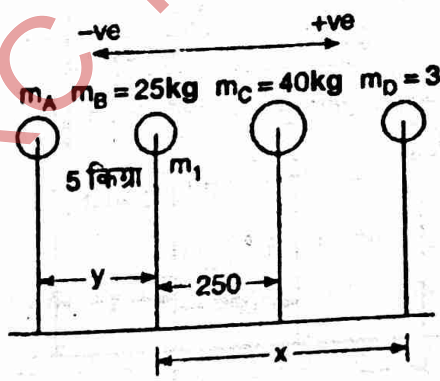
$$m_D = 35\text{ kg},\ r_D = 180\text{ mm}$$

$r_B = 150$ mm के लिये द्रव्यमान *A* तथा उसकी कोणीय स्थिति ज्ञात कीजिये। तल *B* तथा *C* परस्पर 250 mm दूर हैं। तल *A* तथा *C* की स्थिति भी ज्ञात कीजिये।

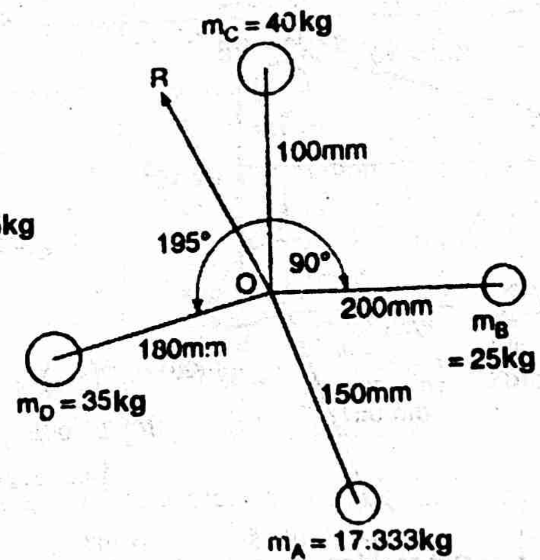
हल—सभी द्रव्यमानों के तलों का प्रबन्ध चित्र 7.22 (a) में प्रदर्शित किया गया है। द्रव्यमान m_B के तल को निर्देशक तल (reference plane) मान कर प्रश्न को हल किया है। सर्वप्रथम दी गई सारणी बनाइये। माना सन्तुलक द्रव्यमान m_A है।

सारणी 7.6

1	2	3	4	5	6
क्रम संख्या	**द्रव्यमान kg**	**घूर्णन त्रिज्या mm**	**समानुपाती अपकेन्द्रीय बल kg mm**	**m_B के द्रव्यमान के समतल से दूरी (mm)**	**m_B द्रव्यमान के समानुपाती बलयुग्म (kg mm²)**
1.	m_A	150	$150\,m_A$	$-y$	$-150\,m_A y$
2.	25	200	5×10^3	0	0
3.	40	100	4×10^3	250	1×10^6
4.	35	180	6.3×10^3	x	$6.3\times10^3 x$



(a)



(b)

चित्र 7.22

(a) द्रव्यमान A तथा उसकी कोणीय स्थिति ज्ञात करना—सारणी के कॉलम (4) का प्रयोग कर हम एक बलयुग्म बहुभुज (force polygon) चित्र 7.22 (b) के अनुसार उचित पैमाना मानते हुए बनाते हैं क्योंकि सभी द्रव्यमान पूर्ण सन्तुलन में हैं इसलिये बल बहुभुज एक बन्द आरेख (closed diagram) बनना चाहिये। बन्द रेखा do को नापने पर,

[माना गया पैमाना 1×10^3 kg mm $= 10$ mm है।]

$$150 m_A = od \times \text{पैमाना}$$

अत:
$$m_A = 17.333 \text{ kg}$$

द्रव्यमान m_A की द्रव्यमान m_B से कोणीय स्थिति

$$\theta = (180° + 110°) = 290° \text{ होगी।}$$

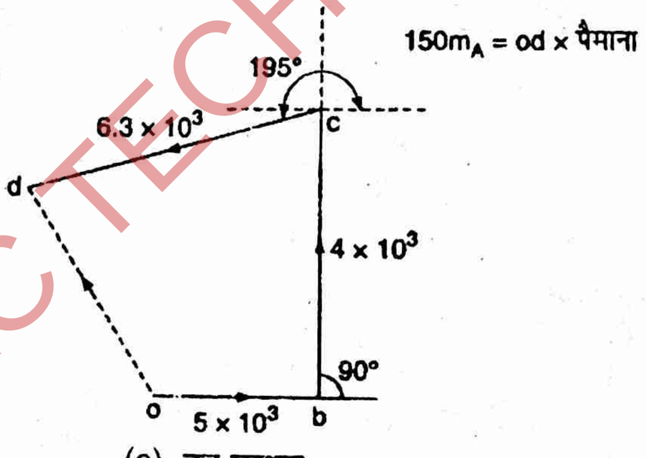
(b) समतल A व D की स्थितियाँ ज्ञात करना—समतल A व D की स्थितियाँ ज्ञात करने के लिये सारणी के कॉलम (6) को प्रयोग करके बलयुग्म बहुभुज (couple polygon) चित्र 7.22 (d) के अनुसार निम्न प्रकार बनायेंगे—

1. वेक्टर $O'C'$ किसी उचित पैमाने को मानकर $m_C = 40$ kg वाली रेखा के समानान्तर 1×10^6 kg mm^2 के बराबर खीचिये। यहाँ पैमाना 1×10^6 kg mm^2 $= 30$ mm माना गया है।

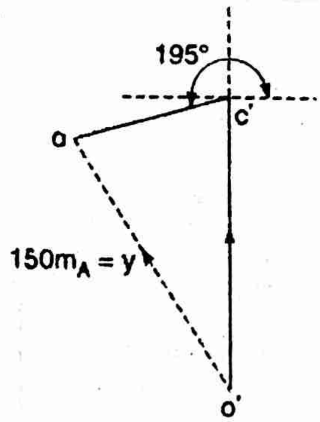
2. बिन्दु C' व O' से रेखायें $C'd'$ व $O'd'$ द्रव्यमान $m_D = 35$ kg व $m_A = 17.333$ kg के समानान्तर खींचते हैं जो बिन्दु d' पर एक-दूसरे को काटेगी। नापने पर,

$$11 \times \left(\frac{1 \times 10^6}{30} \right) = 6.3 \times 10^3 x$$

या
$$x = 58.2 \text{ mm}$$



(c) बल बहुभुज



(d) बलयुग्म बहुभुज

चित्र 7.22

क्योंकि x का मान द्रव्यमान C के समतल 250 mm के कम 58.2 mm प्राप्त हुआ है। अत: द्रव्यमान D का समतल द्रव्यमान C के समतल के बाँयी ओर स्थित होगा, न कि द्रव्यमान C के दाँयी ओर जैसा कि माना गया है।

दूरी Y को ज्ञात करने के लिए—$O'd' \times$ पैमाना $= -150 m_A y$

AKC TECHNICAL CLASSES

$$30\times\left(\frac{10\times10^6}{30}\right)=-150\times17.333\times y$$

$$y=-384.62\text{ mm}$$

ऋणात्मक चिन्ह (negative sign) प्रदर्शित करता है कि समतल A, द्रव्यमान B के बाँयी ओर स्थित नहीं है जैसा कि माना (assumed) गया हैं, किन्तु 384.62 mm द्रव्यमान B के दाँयी ओर स्थित है।

उदाहरण 7.13—एक घूमती हुई शाफ्ट पर चार असन्तुलित द्रव्यमान 18 kg, 14 kg, 16 kg एवं 12 kg क्रमशः 50 mm, 60 mm, 70 mm, एवं 60 mm की घूर्णन त्रिज्याओं पर लगे हैं। द्वितीय, तृतीय एवं चतुर्थ द्रव्यमानों के घूर्णन तल, प्रथम द्रव्यमान के घूर्णन तल से क्रमशः 80 mm, 160 mm तथा 280 mm की दूरी पर है। 18 kg के द्रव्यमान से इन द्रव्यमानों का कोणीय विस्थापन क्रमशः 60°, 135° तथा 270° है। शाफ्ट का गतिज सन्तुलन दो द्रव्यमानों से किया जाना है। दोनों सन्तुलित द्रव्यमानों की घूर्णन त्रिज्या 50 mm है तथा इनके घूर्णन तल क्रमशः प्रथम एवं द्वितीय व तृतीय एवं चतुर्थ द्रव्यमानों के मध्य में स्थित हैं। ग्राफ विधि या गणनात्मक विधि से सन्तुलित द्रव्यमानों के परिमाण एवं कोणीय स्थितियाँ ज्ञात कीजिये।

हल—चित्र 7.23 (a) व (b) में विभिन्न भारों की घूर्णन अक्ष परिस्थितियाँ एवं कोणीय स्थितियाँ प्रदर्शित की गई हैं।

1. सर्वप्रथम सारणी 7.7 पिछले प्रश्नों की भाँति बनाते हैं।

सारणी 7.7

1	2	3	4	5	6
क्रम संख्या	**द्रव्यमान (kg)**	**घूर्णन त्रिज्या (mm)**	**समानुपाती अपकेन्द्रीय बल (kg mm)**	**m_{B_1} के द्रव्यमान के समतल से दूरी (mm)**	**m_{B_1} के समानुपाती घूर्ण (kg mm^2)**
1.	18	50	900	−40	−36000
2.	m_{B_1}	50	$50\,m_{B_1}$	0	0
3.	14	60	840	40	33600
4.	16	70	1120	120	134400
5.	m_{B_2}	50	$50\,m_{B_2}$	180	$9000\,m_{B_2}$
6.	12	60	720	240	172800

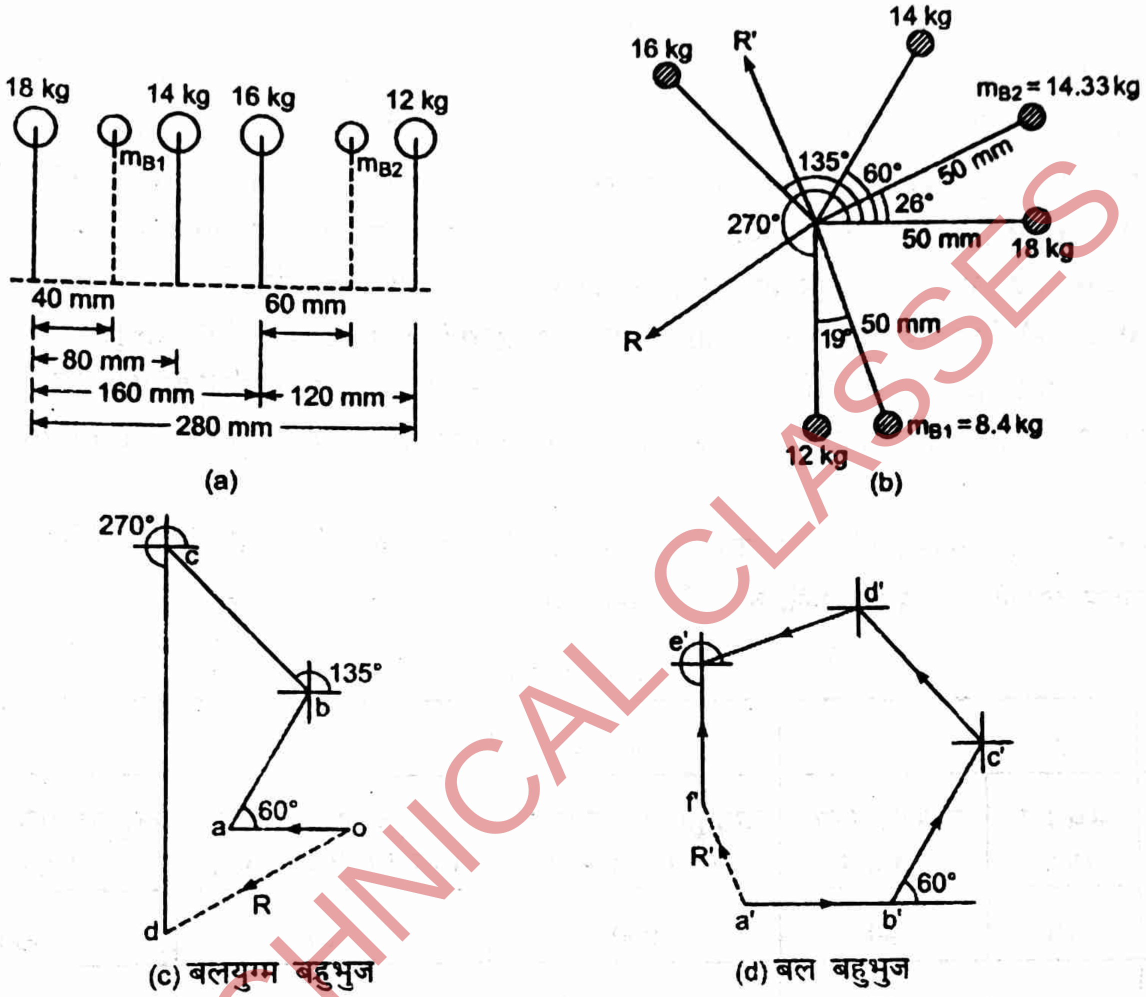
2. कॉलम नं० 6 में दिये बलयुग्म के परिमाणों (magnitudes) को प्रयोग करके किसी उचित पैमाने को मानकर चित्र 7.23 (c) को बनाते हैं। यहाँ माना गया पैमाना $3000\text{ kg mm}^2 = 1\text{ mm}$ है।

3. बन्धक रेखा od को नापकर माने गये पैमाने से गुणा करके परिणामी बलयुग्म (R) का परिमाण निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं—

$$R = od \times \text{पैमाना}$$

$$R = 43 \times 3000$$

$$R = 129000 \, \text{kg mm}^2$$



चित्र 7.23

4. संतुलित भार (m_{B_2}) की दिशा परिणामी बलयुग्म (R) की दिशा के विपरीत होगी तथा सन्तुलित भार का परिमाण निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है—

$$9 \times 10^3 \, m_{B_2} = 129 \times 10^3$$

$$m_{B_2} = \mathbf{14.33 \ kg}$$ **उत्तर**

इस द्रव्यमान का 18 kg के द्रव्यमान से कोण 26° वामावर्त दिशा में है।

5. अब उपरोक्त सारणी के कॉलम 4 के बलों के परिणामों को प्रयोग करके किसी उचित पैमाने का आरेख 7.23(d) को पिछले प्रश्नों में प्रयोग की गई विधि से बनाये। यहाँ पैमाना 30 kg mm = 1 mm है।

6. बन्धक रेखा $a'f'$ को नापकर माने गये पैमाने से गुणा करके परिणामी बलयुग्म (R') का परिमाण ज्ञात करते हैं—

$$R' = a'f' \times \text{पैमाना} = 14 \times 30$$

$$= 420 \, \text{kg mm}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

7. सन्तुलित भार (m_{B_1}) की दिशा परिणामी बलयुग्म (R') के विपरीत होगी। द्रव्यमान का परिणाम निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं—

$$50\, m_{B_1} = 420$$

$$m_{B_1} = \frac{420}{50} = \mathbf{8.4\ kg}$$ उत्तर

इस द्रव्यमान का 18 kg द्रव्यमान से कोण 289° वामावर्त दिशा (anticlockwise direction) में है।

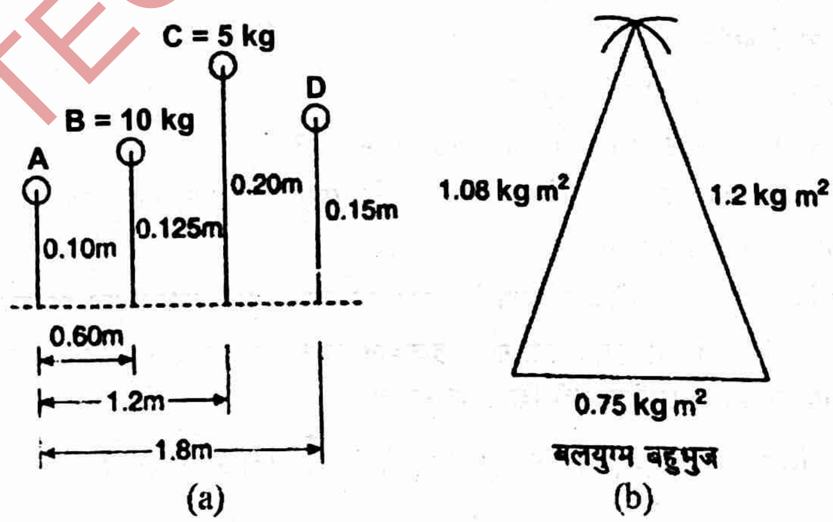
उदाहरण 7.14—*A, B, C* और *D* चार द्रव्यमान एक शाफ्ट पर 0.10 m, 0.125 m, 0.20 m और 0.15 m पर क्रमशः आबद्ध हैं। द्रव्यमानों के तल एक दूसरे से 0.60 m की दूरी पर हैं तथा *B, C* तथा *D* द्रव्यमान क्रमशः 10 kg, 5 kg और 4 kg हैं। *A* का आवश्यक भार एवं चारों द्रव्यमानों की कोणीय स्थितियाँ शाफ्ट के पूर्ण सन्तुलन के लिये ज्ञात कीजिये।

हल—सभी भारों के घूर्णन तलों का प्रबन्ध चित्र 7.24 (a) में प्रदर्शित किया गया है।

सर्वप्रथम आगे दी गई सारणी 7.8 बनाइये।

सारणी 7.8

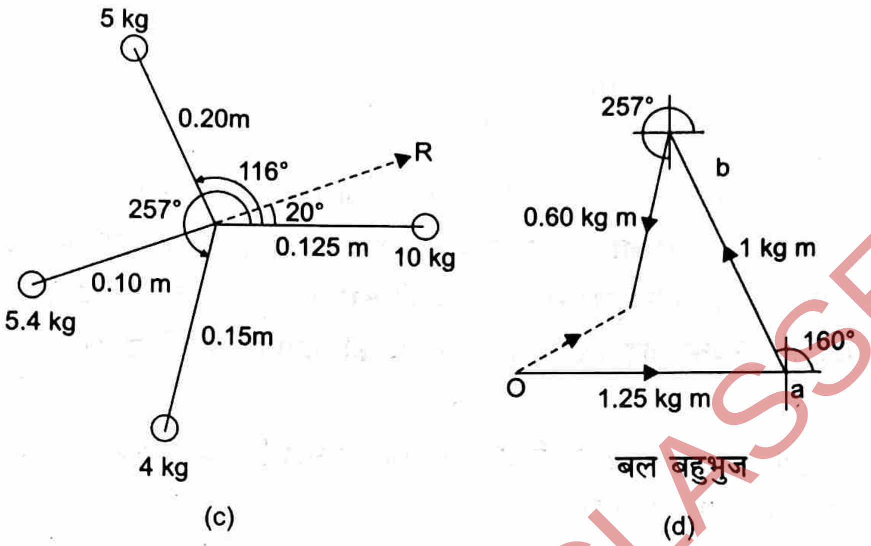
क्रम संख्या	द्रव्यमान (kg)	घूर्णन त्रिज्या (mm)	समानुपाती बल (kg mm)	*A* भार के तल से दूरी (m)	*A* भार के तल पर घूर्ण (kg m²)
1.	A	0.10	0.10 A	0	0
2.	10	0.125	1.25	0.60	0.75
3.	5	0.20	1.00	1.20	1.2
4.	4	0.15	0.60	1.80	1.08



चित्र 7.24

AKC TECHNICAL CLASSES

इसके पश्चात् पूर्व उदाहरणों की भाँति क्रमशः चित्र 7.24(a), 7.24 (b) व 7.24 (c) को बनाते हैं। चित्र 7.24 (d) से—



चित्र 7.24

बिन्दुदार रेखा OC की लम्बाई × पैमाना $= A \times 0.10$

$$2.7 \times 0.2 = 0.10\, A$$

$$A = \mathbf{5.4} \text{ किग्रा}$$ **उत्तर**

द्रव्यमान A की, द्रव्यमान B से कोणीय दूरी 200° वामावर्त (anticlockwise) है।

प्रश्नावली

1. सन्तुलन से आप क्या समझते हैं? इसकी क्यों आवश्यकता है?
2. स्थैतिक एवं गतिज सन्तुलन (balancing) में क्या विभेद है? समझाये।
3. सन्तुलन की परिभाषा दीजिये। गतिज सन्तुलन किस प्रकार किया जाता है?
4. निम्न को स्पष्ट समझाइये—
   (i) स्थैतिक सन्तुलन (ii) गतिज सन्तुलन
5. सन्तुलन मे प्रयुक्त पद "निर्देश तल" से आप क्या समझते हैं?
6. एक सामान्य अक्ष पर घूमते हुए द्रव्यमानों की प्रणाली के सम्पूर्ण सन्तुलन की आवश्यक शर्तें क्या हैं?
7. मशीनों के सन्तुलन की आवश्यकता को समझाइये। **(UP 2003)**
8. एक रोटर सिस्टम के स्थैतिक एवं गतिज सन्तुलन में अन्तर समझाइये। घूर्णी संहतियों का सन्तुलन क्यों आवश्यक है?
9. सिद्ध कीजिए कि यदि विभिन्न समानान्तर समतलों में द्रव्यमान घूर्णन कर रहे हैं, तो उनका सन्तुलन किसी एक समान्तर तल में संतुलक बल लगाकर इनको संतुलित नहीं किया जा सकता। **(UP 2007)**
10. एक ईषा (shaft) जिस पर एक द्रव्यमान संलग्न है, $\omega \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ की चाल से घूर्णन कर रहा है। इस द्रव्यमान को विभिन्न समतल पर दो द्रव्यमानों द्वारा सन्तुलन में लाने की किसी एक विधि का सविस्तार वर्णन कीजिए। **(UP 2009)**
11. असन्तुलित बल तथा घूर्ण के मूल (origin) तथा असन्तुलित बल के प्रभाव की व्याख्या करे। **(UP 2016)**
12. रोटेटिंग बॉडी के असंतुलन के कारणों का वर्णन करे। **(UP 2016)**

AKC TECHNICAL CLASSES

13. स्थैतिक तथा गतिक बलों के विश्लेषण की व्याख्या करे।

14. असंतुलन के प्रभाव की व्याख्या करे। **(UP 2017)**

15. मशीनों में असंतुलन से क्या तात्पर्य है? एकल रेवोल्विंग भार के बैलेसिंग की विधि की व्याख्या कीजिए। **(UP 2017)**

16. 0.8 m त्रिज्या पर 10 kg के एक द्रव्यमान को सन्तुलन में रखने के लिये उसके ही घूर्णन समतल में 1 m घूर्णन त्रिज्या पर कितने सन्तुलित द्रव्यमान की आवश्यकता होगी? **(UP 2018)**

[उत्तर—8 kg]

17. 3 m लम्बी शाफ्ट, जो अपने दोनों सिरों पर बियरिंगों में लगी है, 600 rpm पर घूम रही है। इस शाफ्ट के मध्य में एक गतिपाल पहिया (flywheel) लगा है। गतिपाल पहिये का द्रव्यमान (mass) 60 kg है। निर्माण में अशुद्धि के कारण शाफ्ट एवं पहिये के छिद्र की घूर्णन अक्ष में 3 mm का अन्तर है। बियरिंगों पर स्थैतिज एवं गतिज प्रतिक्रियायें (static and dynamic reactions) ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—30 kg, 36.18 kg]

18. एक 1200 kg का असन्तुलित द्रव्यमान (mass) अपने घूर्णन अक्ष से 5 mm की दूरी पर घूम रहा है। इसे सन्तुलन में रखने के लिये 100 किग्रा का द्रव्यमान (mass) उसी घूर्णन तल पर, घूर्णन तल से कितनी दूरी पर लगाना आवश्यक होगा?

[उत्तर—60 mm]

19. एक शाफ्ट पर 50 kg किग्रा का एक पिण्ड 0.80 m त्रिज्या पर लगा हुआ, शाफ्ट के साथ घूमता है। सन्तुलन के लिये दो सन्तुलन द्रव्यमानों को इस द्रव्यमान के दोनों ओर, द्रव्यमान के विपरीत दिशा में लगाया जाता है। यदि इनकी घूर्णन त्रिज्यायें क्रमश: 0.30 m एवं 0.25 m हों तथा इनके घूर्णन समतल पिण्ड के घूर्णन समतल से 0.20 m एवं 0.30 m की दूरी पर हो, तो इन द्रव्यमानों के परिमाण ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—80 kg व 64 kg]

20. 6, 8 तथा 12 kg के तीन द्रव्यमान एक ही समतल में घूमते हैं और क्रमश: 100 mm, 70 mm तथा 40 mm की त्रिज्याओं पर एक शाफ्ट पर घूमते हैं। 6 kg के द्रव्यमान से 8 और 12 kg के द्रव्यमान क्रमश: 30° तथा 120° की कोणीय स्थितियों पर हैं। इन निकाय के सन्तुलन के लिये 110 mm त्रिज्या पर कितना द्रव्यमान किस कोणीय स्थिति पर लगाया जाना चाहिये?

[उत्तर—9.95 kg, क्षैतिज से 39.4°]

21. एक वृत्तीय डिस्क अपनी धुरी पर केन्द्र 'O' पर घूम रही है और तीन पिण्ड जिनका द्रव्यमान क्रमश: 3, 4 और 5 kg है इसके तीन स्थान 'A' 'B' और 'C' पर क्रमश: जुड़े हैं जहाँ पर $OA = 0.25$ m, $OB = 0.30$ m, $OC = 0.20$ m है। OA से कोणीय दूरी दक्षिणावर्त (clockwise) क्रमश: 0°, 65° और 150° है। इस धुरी को 200 rpm के घूमने से उस पर असंतुलित बल ज्ञात कीजिये। एक ऐसे संतुलक द्रव्यमान की कोणीय स्थिति और परिमाण भी ज्ञात कीजिये जो 0.25 m त्रिज्या पर स्थित हैं।

[उत्तर—6.54 kg, 3kg द्रव्यमान की क्षैतिज दिशा से 256.166°]

22. एक शाफ्ट के साथ तीन द्रव्यमान लगा दिये गये हैं। जिनका विवरण निम्नलिखित है—

(i) 10 kg का द्रव्यमान 90 mm अर्द्धव्यास पर।

(ii) 15 kg का द्रव्यमान 120 mm अर्द्धव्यास पर।

(iii) 9 kg का द्रव्यमान 150 mm अर्द्धव्यास पर।

इन द्रव्यमानों को शाफ्ट पर इस प्रकार जोड़ा गया है, कि शाफ्ट पूर्ण रूप से संतुलित हो जाए, 10 kg द्रव्यमान के सापेक्ष शेष द्रव्यमानों के कोण निकालिये। सभी द्रव्यमान एक ही तल में हैं।

[उत्तर—133°, 284°]

AKC TECHNICAL CLASSES

23. चार द्रव्यमान A, B, C व D एक घूमती हुई शाफ्ट पर एक ही घूर्णन तल पर लगे हैं। द्रव्यमानों का परिमाण क्रमशः 12 kg, 10 kg, 18 kg एवं 15 kg तथा घूर्णन त्रिज्यायें क्रमशः 40 mm, 50 mm, 60 mm एवं 30 mm हैं। भार B, C व D की भार A के सापेक्ष कोणीय स्थितियाँ 60°, 135° एवं 270° हैं। सन्तुलित द्रव्यमान का परिमाण एवं कोणीय स्थिति ज्ञात कीजिये यदि इसकी घूर्णन त्रिज्या 100 mm है।

[उत्तर—7.47 kg, 87.33° दक्षिणावर्त भार A के सापेक्ष]

24. चार द्रव्यमानों को एक शाफ्ट के साथ A, B, C, D तलों के समान अर्धव्यास पर संलग्न किया गया है। तल A से तल B, C, D की दूरी क्रमशः 0.40 m, 0.50 m एवं 1.20 m है। तल A, B, C पर द्रव्यमान क्रमशः 60, 45 एवं 70 kg हैं। यदि प्रणाली पूर्ण सन्तुलन में है, तो D पर द्रव्यमान का भार निकालिये एवं द्रव्यमान A के सापेक्ष B, C, D पर द्रव्यमानों की कोणीय स्थिति भी निकालिये।

[उत्तर—39 kg, द्रव्यमान A से प्रवाम दिशा में द्रव्यमान D, B तथा C की कोणीय स्थितियाँ क्रमशः 5°, 142°, 206°]

25. A, B, C और D चार द्रव्यमान एक घूर्णी शाफ्ट पर 100 mm, 125 mm, 200 mm तथा 150 mm पर क्रमशः लगाये गये हैं। द्रव्यमानों के तल एक दूसरे से 600 mm की दूरी पर स्थित हैं तथा B, C, D द्रव्यमान क्रमशः 10 kgf, 5kgf तथा 4kgf हैं। 'A' का आवश्यक भार एवं चारों द्रव्यमानों की कोणीय स्थितियाँ जोकि शाफ्ट के सन्तुलन के लिये आवश्यक हैं, ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—8.8 kgf, द्रव्यमान B से द्रव्यमान C, D तथा A की कोणीय स्थितियाँ क्रमशः 117°, 247°, 224°]

26. चार द्रव्यमान M_1, M_2, M_3 एवं M_4 क्रमशः 10 kg, 200 kg, 240 kg तथा 180 kg के हैं। सम्बन्धित घूर्ण अर्द्धव्यास क्रमशः 0.2 m, 0.15 m, 0.25 m तथा 0.3 m है तथा क्रमिक द्रव्यमानों के मध्य कोण 45°, 90° एवं 135° हैं। आवश्यक सन्तुलन द्रव्यमान, जिसका कोण अर्द्धव्यास 0.2 m है, की मात्रा तथा स्थिति ज्ञात कीजिए।

[उत्तर—95.68 kg, 217°]

27. चार द्रव्यमान M_1, M_2, M_3 तथा M_4 क्रमशः 200 N, 300 N, 240 N तथा 260 N है। इसी क्रम में घूमने के अर्द्धव्यास क्रमशः 0.2 m, 0.15 m, 0.25 m और 0.3 m है तथा द्रव्यमानों के बीच कोण 45°, 75° तथा 135° है। सन्तुलन भार की स्थिति एवं परिमाण ज्ञात कीजिए यदि इसकी घूर्णन त्रिज्या 0.2 m है। **(UP 2005, 06, 08)**

[उत्तर—240 N भार से 260 N भार की ओर 80° पर, 120 N]

28. तीन भार 6N, 8N तथा 10 N एक ही समतल से समान त्रिज्याओं पर घूर्णन करते हैं। यदि ये स्वतः संतुलित तन्त्र व्यक्त करते है तो उनकी कोणीय अवस्थिति ज्ञात कीजिए।

[उत्तर—10 N से 8N तथा 6N के कोण क्रमशः 143° तथा 235°]

29. 16, 9 तथा 10 N के तीन भार क्रमशः 4, 10 तथा 8 cm घूर्णन त्रिज्याओं पर एक ही समतल में घूम रहे हैं और पहले भार से दूसरे भार तथा तीसरे भार की कोणीय स्थिति क्रमशः 75° तथा 135° है। इन्हे संतुलन में रखने के लिए 6 cm घूर्णन त्रिज्या पर कितने भार की आवश्यकता होगी?

[उत्तर—25.5 N]

AKC TECHNICAL CLASSES

अध्याय 8

कम्पन (Vibrations)

- Types-longitudinal, transverse and torsional vibrations (simple numericals)
- Dampening of vibrations
- Causes of vibrations in machines, their harmful effects and remedies

§ 8.1 परिचय (Introduction) :

मशीनों के विभिन्न अंग अथवा अवयव पूर्णयत: दृढ़ (rigid) न होकर प्रत्यास्थ पदार्थों (elastic materials) के बने होते हैं। आजकल विभिन्न मशीनें, टरबाइन व प्राइम मूवर (prime mover) आदि अधिक रेखीय व घुमाँऊ गति पर कार्य करते हैं। जिसके कारण मशीन के विभिन्न अवयवों में बलों तथा आघूर्णों आदि के रूप में विचलित (Disturbance) करने वाले कारक उत्पन्न हो जाते हैं। इन कारकों का परिमाण (magnitude) समय के साथ बदलता रहता है। जिसके फलस्वरूप इन अवयवों में दोलनकारी गतियाँ होने लगती हैं जिन्हें 'कम्पन' कहते हैं।

''कम्पन प्रत्यास्थ अवयव या अँग द्वारा, एक निश्चित समय अन्तराल पर असन्तुलित बल लगने के कारण की गई गति है।''

"Vibration can be defined as motion taken by an element or component due to unbalanced forces at a definite time Interval."

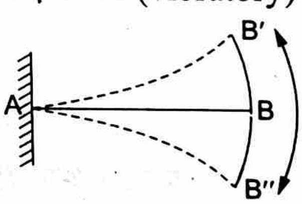
इन निश्चित समय अन्तराल पर लगने वाले असंतुलित बलों के कारण उत्पन्न होने वाले प्रतिबलों का मान बहुत अधिक हो सकता है जो अवयव में स्थायी विरूपण (permanent deformation) कर सकता है। अत: किसी निकाय के सफल डिजाइन के लिए निकाय में उत्पन्न होने वाले कम्पनों का गहन अध्ययन आवश्यक है।

8.1.1 कम्पन सम्बन्धी विभिन्न परिभाषाएँ (Different definitions related to Vibrations)

कम्पनों से सम्बन्धित प्रमुख परिभाषाएँ निम्न हैं—

(i) आवर्त या कालिक गति (Periodic motion)—ऐसी गति, जो निश्चित समय के पश्चात् बार-बार दोहराई (repeat) जाती है, आवर्त या कालिक गति (periodic motion) कहलाती है। उदाहरण के लिए कम्पन (vibratory) अथवा दोलन (oscillatory) गतियाँ।

(ii) आयाम (Amplitude)—कम्पन गति के अन्तर्गत अपनी संतुलन गति अथवा माध्य स्थिति (mean position) (चित्र 8.1 में प्रदर्शित स्थिति AB) से अंग (element) के अधिकतम विस्थापन (displacement) को आयाम (amplitude) कहते हैं। चित्र 8.1 में आयाम $= BB' = BB''$ से प्रदर्शित हैं।



चित्र 8.1

(iii) समय अन्तराल (Period)—दो लगातार कम्पनों के मध्य लगे समय को समय अन्तराल (period) कहते हैं। यह साधारणतया सेकिण्ड में प्रदर्शित किया जाता है। चित्र 8.1 में बिन्दु $B \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B'' \rightarrow B$ तक गति में लगा समय ही समय अन्तराल कहलाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

(iv) चक्र (Cycle)—यूनिट इकाई समय में पूर्ण की गई गति को एक चक्र (one cycle) कहते हैं। चित्र 8.1 में $B \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow B'' \rightarrow B$ तक की गई गति को एक पूर्ण चक्र कह सकते हैं।

(v) आवृत्ति (Frequency)—एक यूनिट समय में चक्रों (cycles) की संख्या को आवृत्ति कहते हैं। इसको हर्ट्ज (Hz) में प्रदर्शित करते हैं, जिसका तात्पर्य एक चक्र गति सेकिण्ड (one cycle per second) है। यदि किसी कम्पन की आवृत्ति (frequency) को n तथा समय या आवृतकाल (periodic time) को T से प्रदर्शित किया जाये, तब $\left[n = \frac{1}{T}\right]$।

(vi) कम्पन का सामान्य मोड (Normal mode of vibrations)—अव्यवस्थित एवं जटिल प्रकृति के कम्पनों में से वह कम्पन, जो व्यवस्थित (arranged) एवं सरल (simple) प्रकार का हो, उसे कम्पन का सामान्य (normal) मोड कहते हैं।

8.1.2 कम्पनों का वर्गीकरण (Classification of Vibrations) *

कम्पनों का वर्गीकरण हम निम्न दो प्रकार से कर सकते हैं—

(a) प्रत्यास्थ पिण्ड या पुर्जे पर लगने वाले बलों के आधार पर।

(b) प्रत्यास्थ पिण्डों या पुर्जे को आधार प्रदान करने वाले वातावरण (medium) या पिण्डों (bodies) में उत्पन्न प्रतिबलों के आधार पर।

(a) प्रत्यास्थ पिण्ड या पुर्जों पर लगने वाले बलों के आधार पर

कम्पन (Vibrations)
- (i) स्वतन्त्र या प्राकृतिक कम्पन (Free or natural vibrations)
  - सम्पीडित (Damped)
  - असम्पीडित (Undamped)
- (ii) बल कम्पन (Forced vibrations)
  - सम्पीडित (Damped)
  - असम्पीडित (Undamped)

(b) प्रत्यास्थ पिण्ड या पुर्जे को आधार प्रदान करने वाले वातावरण (medium) या पिण्डों (bodies) में उत्पन्न प्रतिबलों के आधार पर

कम्पन (Vibrations)
- (i) अनुदैर्ध्य कम्पन (Longitudinal vibrations)
- (ii) लम्बकोणीय कम्पन (Transverse vibrations)
- (iii) घुमॉऊ कम्पन (Torsional vibrations)

1. स्वतन्त्र कम्पन (Free or natural vibrations)—ऐसे कम्पन जो किसी पिण्ड (body) को आरम्भिक विस्थापन देने से ही उत्पन्न हो जाते हैं एवं पिण्ड पर कोई बाह्य बल नहीं लगता है, को स्वतन्त्र कम्पन कहते हैं। इन कम्पनों में ऊर्जा का क्षय नहीं होता है, अत: ये कम्पन किसी पिण्ड या पुर्जे में लगातार होते रहते हैं।

2. बल कम्पन (Forced vibrations)—**जब कोई पिण्ड या पुर्जा किसी बाह्य बल के कारण कम्पन करता है, तो इस प्रकार के कम्पनों को, बल कम्पन कहते हैं।** बाह्य बल, एक समय अन्तराल (period) पर पिण्ड के असन्तुलन के

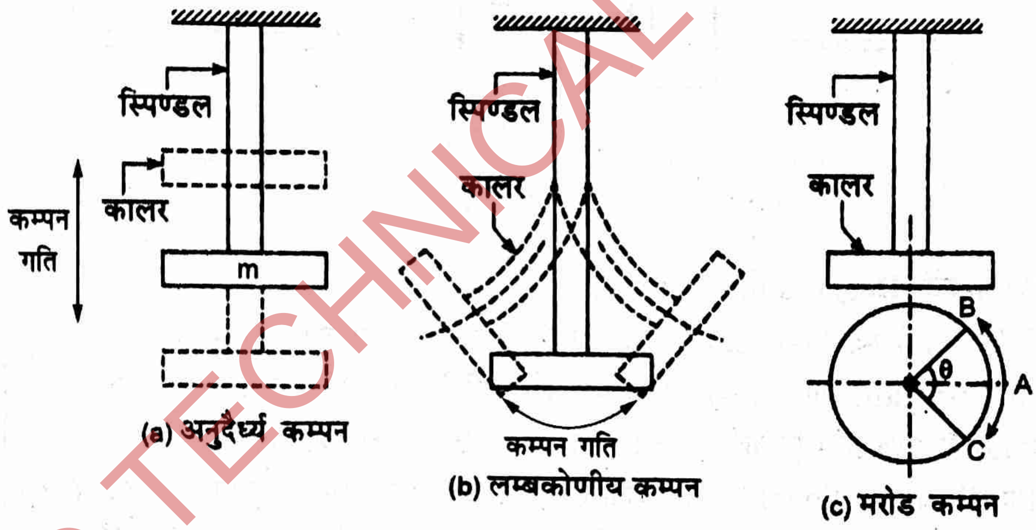
AKC TECHNICAL CLASSES

कारण लगातार उपजते हैं। इन कम्पनों में ऊर्जा का क्षय होता है, जो उन्हें असन्तुलन के कारण, बाह्य बलों से लगातार प्राप्त होती रहती है। अतः ये कम्पन स्थायी रूप से कठिनाई उत्पन्न करते रहते हैं।

3. सम्पीडित कम्पन (Damped vibrations)—ऐसे कम्पन जिसका आयाम (amplitude) प्रत्येक कम्पन चक्र (vibration cycle) में कम होता रहता है, सम्पीडित कम्पन कहलाते हैं। वास्तव में स्वतन्त्र कम्पन (free vibrations) कभी भी उत्पन्न नहीं होते हैं, क्योंकि पिण्ड या पुर्जे के चारों ओर पूर्ण शून्य (perfect vacuum) एवं घर्षण रहित गति प्राप्त करना सम्भव नहीं है। घर्षण व हवा के द्वारा उत्पन्न प्रतिरोध में, ऊर्जा की एक निश्चित मात्रा की खपत हो जाती है। अतः पिण्ड या पुर्जे में कम्पन का परिमाण बहुत ही कम पैदा होता है। इस प्रकार के कम्पनों को संपीडित कम्पन कहते हैं।

उपरोक्त कम्पनों को निम्न प्रकार से उपविभाजित (subdivide) किया जा सकता है—

(i) अनुदैर्ध्य कम्पन (Longitudinal vibrations)—चित्र 8.2 (a) का अवलोकन कीजिये। स्पिण्डल के एक सिरे पर एक कालर जिसकी मात्रा m kg है, लगा हुआ दर्शाया गया है व दूसरा सिरा बद्ध है। यदि कालर को उर्ध्वाधर खींच कर छोड़ दिया जाए तो यह दर्शाये गये अनुसार ऊपर व नीचे को गति करने लगेगा। इस प्रकार की गति से स्पिण्डल में तनाव व संपीडन बल उत्पन्न हो जायेंगे। इस प्रकार के कम्पनों को अनुदैर्ध्य कम्पन कहेंगे। इन कम्पनों में कालर स्पिण्डल की अनुदैर्ध्य अक्ष के अनुरूप गति करेगा।



चित्र 8.2

(ii) लम्बकोणीय कम्पन (Transverse vibrations)—चित्र 8.2 (b) का अवलोकन करें। यदि स्पिण्डल से लगे कॉलर को दाँये या बाँये गति करा दी जाए तब स्पिण्डल में नमन के कारण तनाव व संपीडन बल उत्पन्न हो जायेंगें। इस प्रकार के कम्पनों को जिसमें कालर या पिण्ड (body) अनुदैर्ध्य अक्ष के लम्बरूप गति करता है, लम्बकोणीय कम्पन कहते हैं।

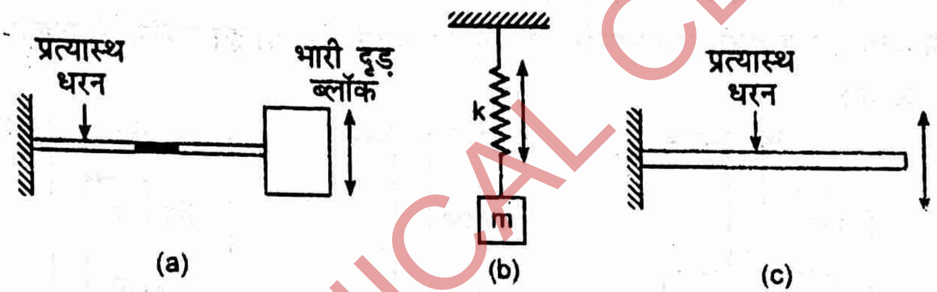
(iii) मरोड़ कम्पन (Torsional vibrations)—चित्र 8.2 (c) का अवलोकन करें। यदि स्पिण्डल लगे कॉलर पर मरोड़ घूर्ण लगाकर मरोड़ा जाए तथा कुछ समय पश्चात् मरोड़ घूर्ण को हटा लिया जाए, तो ऐसा करने पर स्पिण्डल व कॉलर में मरोड़ कम्पन उत्पन्न हो जाएँगे। इन कम्पनों के कारण स्पिण्डल व कॉलर में कर्तन प्रतिबल उत्पन्न हो जाते हैं।

8.1.3 एक कम्पन करने वाले निकाय के मूल लक्षण (Basic Features of Vibratory Systems)

एक यांत्रिक निकाय के कम्पनों के गणनात्मक विश्लेषण के लिए यह आवश्यक है एक मिलता जुलता या आदर्श मॉडल बनाया जाये जो निकाय को प्रदर्शित कर सके। इसके लिए यह भी आवश्यक है कि निकायों तथा कम्पन पैदा करने वाले कारकों का वर्गीकरण किया जाये तथा कुछ निष्कर्ष स्थापित किये जाये।

AKC TECHNICAL CLASSES

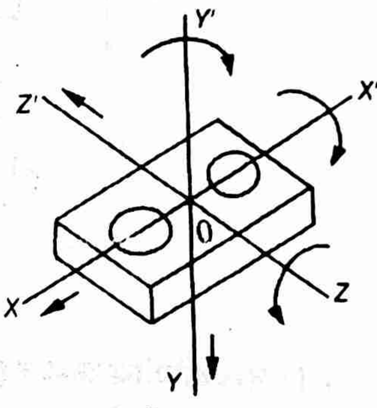
कम्पन करने वाले प्रत्येक निकाय में जड़त्व (inertial) तथा पुन: स्थापित (restoring) करने वाले अवयव होते हैं। ऐसे निकायों में ऊर्जा निर्गत (disssipate) करने वाला विन्यास भी होता है। ऐसे विन्यास एक अवमंदक (damper) के समान आदर्श होता है। गणनाओं को सरल बनाने के लिए जड़त्व गुणों को रेखीय गति के लिए एक भारी द्रव्यमान द्वारा प्रदर्शित किया जाता है तथा कोणीय गति के लिए जड़त्व आघूर्ण द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। इसी प्रकार पुन: स्थापित (restoring) करने वाले अवयवों को नगण्य द्रव्यमान के रेखीय अथवा मरोड़ स्प्रिंग द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। यह गति की प्रकृति पर निर्भर करता है। इस प्रकार एक दृढ़ अवयव से बने हुए नगण्य द्रव्यमान के मन्दक से ऊर्जा अन्तण की गणना की जाती है। विभिन्न राशियों जैसे जड़त्व, कड़ापन तथा मन्दन गति का अधिक मान निकाय में इन राशियों के वितरण पर निर्भर करता है। उदाहरण के लिए चित्र 8.3 (a) में दिखाये गये निकाय पर विचार करते हैं। यदि सिरे पर लगे भारी दृढ़ ब्लॉक की तुलना में धरन का द्रव्यमान बहुत कम है तब चित्र 8.3 (a) के अनुसार विभिन्न राशियों के स्थूल मान (Lumping of Parameters) न्यायोचित है। दूसरी तरफ चित्र 8.3(b) में दिखाये गये निकाय में इस प्रकार के स्थूल मान (Lumping) अर्थहीन हैं।



चित्र 8.3

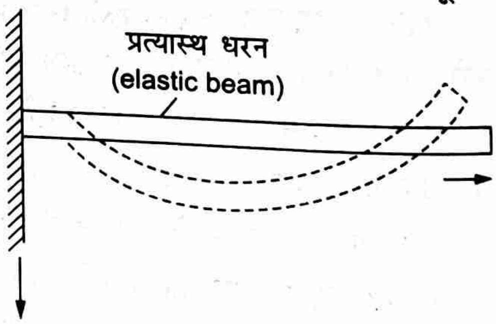
8.1.4 स्वातंत्र्य संख्यायें (Degrees of freedom)

हम जानते हैं कि किसी स्थान (space) में वस्तु की स्थिति तीन परस्पर लम्ब अक्षों (three mutually perpendicular axes) द्वारा व्यक्त की जाती है। ये अक्षें चित्र 8.4 में OX, OY तथा OZ रेखाओं द्वारा दिखाई गयी हैं। वस्तु को इन तीनों अक्षों (axes) पर सरल रेखीय गतियाँ (linear motions) दी जा सकती हैं। इसके अतिरिक्त वस्तु को तीन अक्षों पर घूर्णन गतियाँ (rotational motions) भी दी जा सकती हैं। इसका प्रकार वस्तु की **छ: स्वातन्त्र्य संख्यायें (degrees of freedom) हुई, तीन सरल रेखीय (linear) तथा तीन घूर्णन (rotational) । ऐसी वस्तु वाला सिस्टम बहु स्वातन्त्र्य संख्याओं (multi degrees of freedom) वाला होगा।**



चित्र 8.4

उपरोक्त आधार पर **किसी सिस्टम (system) की गति (motion) को व्यक्त करने के लिए आवश्यक न्यूनतम निर्देशांक (coordinates) की संख्या को स्वातन्त्र्य संख्यायें (degrees of freedom) कहते हैं।** चित्र 8.2 (a) में सिंगल अथवा एक स्वातन्त्र्य संख्या single or one degree of freedom) वाला सिस्टम प्रदर्शित है जो एक सरल रेखा में गति करता है। इस प्रकार किसी समय इस सिस्टम की गति व्यक्त करने के लिए केवल एक ही निर्देशांक (coordinate) आवश्यक है। चित्र 8.2 (a) तथा (c) में दो स्वातन्त्र्य संख्याओं (two degrees of freedom) वाला सिस्टम है क्योंकि यह सिस्टम एक समतल में गति करता है। किसी समय सिस्टम की



चित्र 8.5

AKG TECHNICAL CLASSES

गति व्यक्त करने के लिए केवल दो निर्देशांक ही आवश्यक हैं। चित्र 8.5 में एक प्रत्यास्थ (elastic) कैंटीलीवर धरन प्रदर्शित है जो ऊर्ध्व समतल में कम्पन करती है। इस प्रकार प्रत्यास्थ होने के कारण किसी समय इसकी गति को पूर्णतया व्यक्त करने के लिए एक सतत फलन या फंक्शन (continuous function), $x = x(z)$ की आवश्यकता होगी, अर्थात z अक्ष पर प्रत्येक बिन्दु की गति व्यक्त करने के लिए एक निर्देशांक (coordinate) की आवश्यकता है। इस प्रकार यह **एक अनन्त स्वातन्त्र्य संख्याओं (infinite degrees of freedom)** वाला सिस्टम है। क्योंकि प्रत्येक पदार्थ में कुछ प्रत्यास्थता होती है अत: वास्तव में प्रत्येक सिस्टम अनन्त स्वातन्त्र्य संख्याओं वाला होगा। ऐसे सिस्टम का विश्लेषण अव्यावहारिक होगा अत: प्रत्येक सिस्टम को सीमित स्वातन्त्र्य संख्याओं (degrees of freedom) वाला बनाने हेतु कुछ मान्यताओं का सहारा लिया जाता है। इस प्रकार **यदि कोई सिस्टम दो से अधिक स्वातन्त्र्य संख्याओं वाला बन जाता है तो इसे बहु-स्वातन्त्र्य संख्याओं (multi degrees of freedom) वाला कहते हैं।**

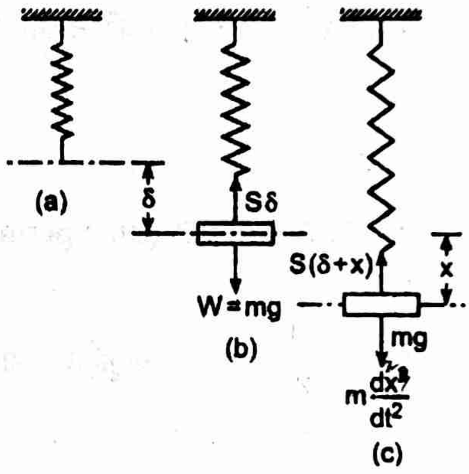
8.2.1 स्वतन्त्र अनुदैर्ध्य कम्पनों की प्राकृतिक आवृत्ति
(Natural Frequency of Free Longitudinal Vibrations)

स्वतन्त्र अनुदैर्ध्य कम्पनों की प्राकृतिक आवृत्ति ज्ञात करने की निम्न तीन विधियाँ हैं—

1. सन्तुलन विधि (Equilibrium method)
2. ऊर्जा विधि (Energy method)
3. रेले विधि (Rayleigh's method)

उपरोक्त विधियों में जड़त्व बलों (Inertia forces) को नगण्य माना गया है।

1. सन्तुलन विधि (Equilibrium method)—एक स्प्रिंग जिसका द्रव्यमान नगण्य है, को बिना खिंचाव की स्थिति में चित्र 8.6 (a) के अनुसार लेकर गणना करेंगे।



चित्र 8.6

यदि S = स्प्रिंग का कड़ापन (stiffness)। यह एक बल है, जो स्प्रिंग में यूनिट विस्थापन उत्पन्न करता है। इसकी इकाई N/m हैं।

m = स्प्रिंग से लटकाया गया द्रव्यमान kg में।

W = वस्तु का भार newton में।

$= mg$

δ = स्प्रिंग का स्थैतिक विस्थापन m में।

x = बाह्य बलों द्वारा वस्तु को दिया गया विस्थापन m में।

सन्तुलन की अवस्था में जैसा चित्र 8.6 (b) में प्रदर्शित किया गया है गुरुत्व खिंचाव $W = mg$, स्प्रिंग के बल द्वारा सन्तुलन में हैं, अर्थात् $W = S.\delta$।

क्योंकि अब वस्तु को सन्तुलन की अवस्था से x विस्थापन देकर छोड़ दिया गया है, इसलिये t समय के बाद वस्तु की वापसी का बल (Restoring force) $= W - S(\delta + x)$

$$= W - S\delta - S$$

$$= S\delta - S\delta - Sx \qquad \ldots(1)$$

$$= -S\,x$$

AKC TECHNICAL CLASSES

यह बल ऊपर की ओर क्रिया करेगा जिसको ऋणात्मक चिन्ह के साथ प्रदर्शित किया गया है।

त्वरण बल (Accelerating force) = द्रव्यमान × त्वरण

$$= m \times \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \ldots(2)$$

यह बल नीचे की ओर क्रिया करेगा जिसको धनात्मक लिया गया है।

समीकरण (1) व (2) को बराबर रखने पर

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -S.x$$

या $$m\frac{d^2x}{dt^2} + S.x = 0 \qquad \ldots(3)$$

या $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{S}{m}x = 0$$

हम जानते हैं कि, सरल आवर्त गति की मौलिक समीकरण (standard equation),

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \ldots(4)$$

समीकरण (3) व (4) की तुलना करने पर

$$\omega^2 = \frac{S}{m} \quad \text{या} \quad \omega = \sqrt{\frac{S}{m}}$$

∴ समय अन्तराल (time period) $t = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{S}}$

एवं प्राकृतिक आवृत्ति $f_n = \dfrac{1}{t_p} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{S}{m}}$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta}} \qquad (\text{क्योंकि } mg = S.\delta)$$

$g = 9.81\,\text{m/s}^2$ लेने पर,

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.81}{\delta}}$$

$$f_n = \frac{0.4985}{\sqrt{\delta}}\,\text{Hz}$$

यहाँ $\delta = \dfrac{Wl}{AE}$ होगा। स्प्रिंग के विस्थापन 'δ' को निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं—

$$\frac{\text{प्रतिबल (stress)}}{\text{विकृति (strain)}} = E \quad \text{या} \quad \frac{\frac{W}{A}}{\frac{\delta}{l}} = E$$

या
$$\frac{Wl}{AE} = \delta$$

जहाँ δ = स्प्रिंग का विस्थापन m में।

W = स्प्रिंग पर लगाया गया भार N में।

l = स्प्रिंग की लम्बाई m में।

A = अनुप्रस्थ काट m^2 में।

E = स्प्रिंग के पदार्थ का यंग मापांक N/m^2 में।

2. ऊर्जा विधि (Energy method)—हम यह जानते हैं, कि गतिज ऊर्जा, किसी पिण्ड (body) की गति के कारण व स्थैतिज ऊर्जा, वस्तु की किसी शून्य स्थिति (datum) से ऊंचाई पर स्थिति के कारण होती है। कम्पनों की स्थिति में पिण्ड की सन्तुलन की स्थिति को शून्य स्थिति (datum) माना जाता है। स्वतन्त्र कम्पनों की स्थिति में किसी पिण्ड या सिस्टम से ऊर्जा का अन्तरण (transfer) नहीं होता है, अर्थात् गतिज ऊर्जा व स्थितिज ऊर्जा का योग कम्पन की किसी भी स्थिति में समान रहता है। दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं, कि

$$\frac{d}{dt}(K.E.+P.E) = 0$$

हम जानते हैं, कि गतिज ऊर्जा,

$$K.E. = \frac{1}{2} \times m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad \ldots(1)$$

एवं स्थितिज ऊर्जा,

$$P.E. = \text{औसत बल} \times \text{विस्थापन}$$

$$= \left(\frac{O+Sx}{2}\right)x$$

$$= \frac{1}{2}Sx^2 \qquad \ldots(2)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} \times m \times \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}Sx^2\right] = 0$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$$\frac{1}{2}\times m\times 2\times\frac{dx}{dt}\times\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{1}{2}\times S\times 2x\times\frac{dx}{dt}=0$$

या
$$m\times\frac{d^2x}{dt^2}+Sx=0$$

या
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{S}{m}\times x=0 \qquad \ldots(3)$$

हम जानते हैं कि सरल आवृत गति (simple harmonic motion) का मौलिक समीकरण (standard equation)

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2 x=0 \qquad \ldots(4)$$

समीकरण (3) व (4) की तुलना करने पर,

$$\omega=\sqrt{\frac{S}{m}}$$

$\therefore$ समय अन्तराल (time period) $t_p=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{S}{m}}$

एवं प्राकृतिक आवृत्ति (natural frequency),

$$f_n=\frac{1}{t_p}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{m}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta}} \qquad (\because mg=S\,\delta)$$

अत:
$$f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.81}{\delta}}$$

$$f_n=\frac{0.4985}{\sqrt{\delta}}\text{ Hz}$$

3. रेले विधि (Rayleigh's method)—इसके सन्निकट विधि (Approximate method) भी कहते हैं। इस विधि में यह माना जाता है कि कम्पन गति, सरल आवर्त (Simple harmonic) है तथा माध्य स्थिति (mean position) में अधिकतम गतिज ऊर्जा, सिरा स्थितियों (end positions) में अधिकतम स्थितिज अथवा विकृति ऊर्जा (strain energy) के बराबर हैं।

यदि x = माध्य स्थिति से t समय पश्चात् पिण्ड का विस्थापन

X = माध्य स्थिति से सिरा स्थिति तक हुआ अधिकतम विस्थापन

तब सरल आवर्त गति के लिए,

$$x=X.\sin\omega t$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$\therefore$ पिण्ड का वेग $v = \dfrac{dx}{dt} = \omega x \cos \omega t$

माध्य स्थिति पर अधिकतम वेग $v = \omega x$ $(\because t = 0)$

$\therefore$ अधिकतम गतिज ऊर्जा $= \dfrac{1}{2}.m.\omega^2 X^2$

फिर अधिकतम स्थितिज ऊर्जा $= \dfrac{0+SX}{2}.X = \dfrac{1}{2}S.X^2$

अधिक गतिज ऊर्जा = अधिकमत स्थितिज ऊर्जा

अब, $$\frac{1}{2}m\omega^2 X^2 = \frac{1}{2}S.X^2$$

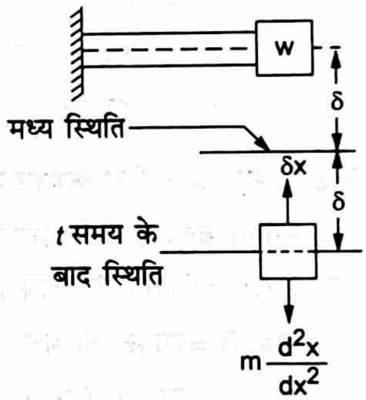
$\therefore$ $$\omega = \sqrt{\frac{S}{m}}$$

अत: आर्वतकाल $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S}}$$

तथा आवृत्ति $$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{m}}$$

यहाँ $\omega = \omega_n$ = प्राथमिक वृत्तीय आवृत्ति (natural circular frequency)

8.2.2 स्वतन्त्र लम्बकोणीय कम्पन की प्राकृतिक आवृति (Free Transverse Vibration's Natural Frequency)



चित्र 8.7

नगण्य द्रव्यमान (mass) की एक शाफ्ट जिसका एक सिरा बद्ध तथा जिसके दूसरे सिरे पर एक पिण्ड जिसका भार W किग्रा है, चित्र 8.7 में प्रदर्शित की गई है।

यदि S = शाफ्ट का कड़ापन (stiffness)।

m = पिण्ड का द्रव्यमान।

δ = पिण्ड के भार के द्वारा स्थैतिक विस्थापन।

x = पिण्ड का मध्य स्थिति से t समय बाद का विस्थापन।

हम जानते हैं कि पिण्ड की वापसी का बल (restoring force) $= -Sx$ ...(1)

एवं त्वरण बल (accelerating force) $= m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से, गति का समीकरण

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Sx$$

AKC TECHNICAL CLASSES

या $$m\frac{d^2x}{dt^2}+Sx=0$$

या $$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{S}{m}x=0 \qquad ...(3)$$

यह समीकरण (3) अनुदैर्ध्य कम्पनां (longitudinal vibrations) की समीकरण के समान है, अतः समय अन्तराल (time period) एवं प्राकृतिक आवृत्ति (natural frequency) का परिमाण,

$$\text{समय अन्तराल } (t_p)=2\pi\sqrt{\frac{m}{S}}$$

एवं $$\text{प्राकृतिक आवृत्ति } f_n=\frac{1}{t_p}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{m}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta}}$$

यहाँ शाफ्ट को कैण्टीलीवर धरन जिसके स्वतन्त्र सिरे पर भार (W) लगा है, की तरह मानकर गणना की गई है। अतः $\delta=\frac{Wl}{3EI}$ होगा,

जहाँ W = कैण्टीलीवर के स्वतन्त्र सिरे पर भार।

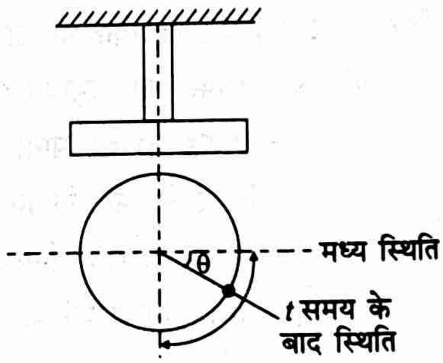
l = शाफ्ट या कैण्टीलीवर की लम्बाई।

E = शाफ्ट या कैण्टीलीवर के पदार्थ का यंग मापांक।

I = शाफ्ट या कैण्टीलीवर की अनुप्रस्थ काट का द्रव्यमान जड़ताघूर्ण।

8.2.3 स्वतन्त्र मरोड़ कम्पन की प्राकृतिक आवृत्ति (Natural frequency of free torsional vibrations)

नगण्य द्रव्यमान की एक शाफ्ट जिसका एक सिरा बद्ध व दूसरे सिरे पर एक चकती (disc) लगी है, चित्र 8.8 में दर्शायी गयी है।



चित्र 8.8

यदि, θ = शाफ्ट की मध्य स्थिति से t समय पश्चात् कोणीय विस्थापन rad में।

m = चकती (disc) का द्रव्यमान kg में।

I = चकती (disc) का मात्रा जड़त्व आघूर्ण (mass moment of inertia) $kg-m^2$ में।

$= mk^2$

K = विघूर्णन अर्द्धव्यास m में।

q = शाफ्ट का मरोड़ कड़ापन (torsional stiffness) Nm में।

∴ चकती (disc) वापसी बल (restoring force) $= q\theta$ ...(1)

एवं त्वरण बल (accelerating force) $= I\times\frac{d^2\theta}{dt^2}$ ...(2)

समीकरण (1) व (2) से, गति का समीकरण

या $$I \times \frac{d^2\theta}{dt^2} = -q\theta$$

या $$I \times \frac{d^2\theta}{dt^2} + q\theta = 0$$

या $$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{q}{I}\theta = 0 \qquad \text{...(3)}$$

सरल आवर्तगति का मौलिक समीकरण

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \text{... (4)}$$

समीकरण (3) व (4) की तुलना करने पर, $\omega = \sqrt{\frac{q}{I}}$

∴ समय अन्तराल (Time period) $t_p = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{q}}$

एवं प्राकृतिक आवृत्ति (natural frequency) $f_n = \frac{1}{t_p} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{q}{I}}$

नोट—मरोड़ कड़ापन (torsional stiffness) q को मरोड़घूर्ण समीकरण से निम्न प्रकार प्राप्त किया जा सकता है—

$$\frac{T}{J} = \frac{G\theta}{l} \quad \text{या} \quad \frac{T}{\theta} = \frac{GJ}{l}$$

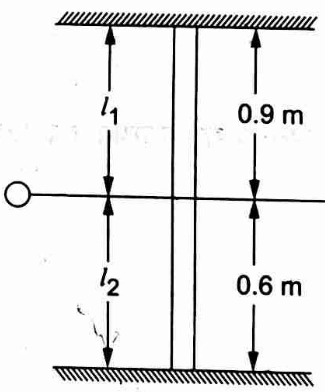
अत: $$q = \frac{FJ}{l} \qquad \left(\text{क्योंकि } \frac{T}{\theta} = q\right)$$

यहाँ G = शाफ्ट के पदार्थ का दृढ़ता मापांक।

J = शाफ्ट के अनुप्रस्थ काट का ध्रुवीय जड़त्व घूर्ण (Polar Moment of Inertia)

l = शाफ्ट की लम्बाई।

उदाहरण 8.1—एक गतिपाल पहिया, एक ऊर्ध्वाधर शाफ्ट पर चित्र 8.9 में दर्शाये अनुसार लगा है। शाफ्ट का व्यास 50 mm व दोनों सिरे बद्ध हैं। गतिपाल पहिये का द्रव्यमान 600 kg है तथा विघूर्णन त्रिज्या 0.5 m है। यदि शाफ्ट के पदार्थ का दृढ़ता मापांक $(G) = 80 \times 10^9 \text{N/m}^2$ हो तो मरोड़ कम्पन की प्राकृतिक आवृति ज्ञात कीजिये।



चित्र 8.9

हल—(i) शाफ्ट का व्यास $(d) = 50\,\text{mm} = 0.05\,\text{m}$

(ii) गतिपाल पहिये का द्रव्यमान $(m) = 600\,\text{kg}$

AKC TECHNICAL CLASSES

(iii) विघूर्णन त्रिज्या $(K) = 0.5\,\text{m}$

(iv) दृढ़ता मापांक $(G) = 80 \times 10^9\,\text{N/m}^2$

हम जानते हैं कि शाफ्ट का पोलर जड़त्व आघूर्ण (polar moment of inertia)

$$J = \frac{\pi}{32} d^4 = \frac{\pi}{32}(50)^4$$

$$= 613281.25\,\text{mm}^4$$

$$= 0.61328125 \times 10^{-6}\,\text{m}^4$$

शाफ्ट की लम्बाई l_1 का मरोड़ कड़ापन, $q_1 = \dfrac{GJ}{l_1}$

$$= \frac{80 \times 10^9 \times 0.61328125 \times 10^{-6}}{0.9}$$

$$= 54513.884\,\text{Nm}$$

शाफ्ट की लम्बाई l_2 का मरोड़ कड़ापन, $q_2 = \dfrac{GJ}{l_2}$

$$= \frac{80 \times 10^9 \times 0.61328125 \times 10^{-6}}{0.6}$$

$$= 81770.826\,\text{Nm}$$

शाफ्ट का कुल मरोड़ कड़ापन $q = q_1 + q_2 = 54513.884 + 81770.826$

$$= 136284.71\,\text{Nm}$$

गतिपाल (flywheel) का मात्रा जड़त्व आघूर्ण,

$$I = mK^2$$

$$= 600(0.5)^2$$

$$= 150\,\text{kg m}^2$$

अत: मरोड़ कम्पन की प्राकृतिक आवृत्ति $f_n = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{q}{I}}$

$$= \frac{1}{2 \times 3.14}\sqrt{\frac{136284.71}{150}}$$

$$= \mathbf{4.79\,Hz}$$

उत्त

AKC TECHNICAL CLASSES

8.2.4 अनुदैर्ध्य कम्पनों पर शाफ्ट के जड़त्व का प्रभाव
(Effect of Inertia of the Shaft on Longitudinal Vibration)

अनुदैर्ध्य कम्पनों की गणना में अभी तक हमने शाफ्ट के जड़त्व के प्रभाव को प्राकृतिक आवृति (natural frequency) ज्ञात करने में नगण्य माना है। अब हम शाफ्ट के जड़त्व के प्रभाव को निम्न प्रकार ज्ञात करेंगे—

शाफ्ट जिसका एक सिरा बद्ध व दूसरा स्वतन्त्र है चित्र 8.10 में प्रदर्शित किया गया है।

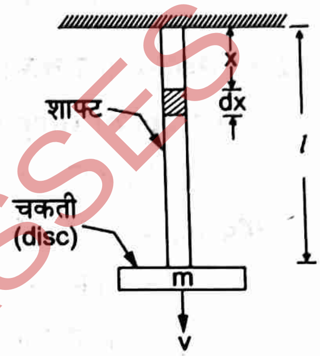
यदि m_1 = शाफ्ट की प्रति यूनिट लम्बाई का द्रव्यमान

l = शाफ्ट की लम्बाई।

m_c = शाफ्ट का कुल द्रव्यमान।

$= m_1 l$

एवं v = स्वतन्त्र सिरे का अनुदैर्ध्य वेग।



चित्र 8.10

शाफ्ट की लम्बाई के बद्ध सिरे से x की दूरी पर 'δx' लम्बाई को लेने पर,

$\therefore$ शाफ्ट की लम्बाई 'δx' का वेग $= \frac{x}{l} \times v$

एवं इस अवयव (δx) की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} \times$ द्रव्यमान $\times$ (वेग)^2

$$= \frac{1}{2} \times m_1 \delta x \left(\frac{x}{l} \times v\right)^2 = \frac{m_1 v^2 x^2}{2l^2} \times \delta x$$

शाफ्ट की कुल गतिज ऊर्जा $= \int_0^l \frac{m_1 v^2 x^2}{2l^2} \times dx$

$$= \frac{m_1 v^2}{2l^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{m_1 v^2}{2l^2} \times \frac{l^3}{3} = \frac{1}{2} m_1 v^2 \times \frac{l}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 l}{3}\right) \times v^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_c}{3}\right) \times v^2 \quad \text{... (1)}$$

(यहाँ $m_1 l = m_c$ है)

यदि एक द्रव्यमान $\frac{m_c}{3}$ को नगण्य द्रव्यमान की शाफ्ट के स्वतन्त्र सिरे पर लगाया जाए तो शाफ्ट की गतिज ऊर्जा,

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m_c}{3}\right) v^2 \quad \text{...(2)}$$

समीकरण (1) व (2) गतिज रूप (dynamically) में समान हैं, अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचे कि शाफ्ट के जड़त्व को इस तरह सम्मिलित करें कि शाफ्ट के स्वन्त्र सिरे पर चकती (disc) के रूप में शाफ्ट के जड़त्व का एक तिहाई द्रव्यमान लगाया जाये। अतः अनुदैर्ध्य कम्पनों की प्राकृतिक आवृत्ति,

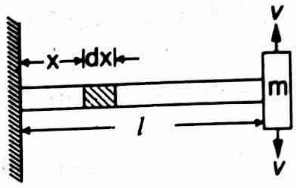
$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{\left(m + \frac{m_c}{3}\right)}} \qquad \ldots(3)$$

जहाँ m_c = शाफ्ट का द्रव्यमान।

एवं m = शाफ्ट के स्वतन्त्र सिरे पर लगी चकती (disc) का द्रव्यमान।

8.2.5 लम्बकोणीय कम्पनों पर शाफ्ट के जड़त्व का प्रभाव
(Effect of Inertia of the Shaft on Transverse Vibrations)

एक शाफ्ट l लम्बाई का चित्र 8.11 में प्रदर्शित किया गया है। शाफ्ट का एक सिरा बद्ध व दूसरा सिरा स्वतन्त्र है।



चित्र 8.11

यदि m_l = शाफ्ट की प्रति यूनिट लम्बाई का द्रव्यमान।

l = शाफ्ट की लम्बाई।

m_c = शाफ्ट का कुल भार।

$= m_1 l$

एवं, v = शाफ्ट के स्वतन्त्र सिरे पर लम्बकोणीय वेग।

शाफ्ट की बद्ध सिरे से x दूरी पर 'δx' लम्बाई को लेने पर,

इस अवयव 'δx' का वेग $= \left[\left(\frac{3lx^2 - x^3}{2l^3}\right) \times v\right]$

इस अवयव की गतिज ऊर्जा,

$$= \frac{1}{2} m.\delta x \left[\left(\frac{3lx^2 - x^3}{2l^3}\right) \times v\right]^2$$

एवं शाफ्ट की कुल ऊर्जा,

$$= \int_0^l \frac{1}{2} \times m_1 \times \left[\left(\frac{3lx^2 - x^3}{2l^3}\right) \times v\right]^2 dx$$

$$= \frac{m_1 \times v^2}{8l^6} \int_0^l (9l^2 x^4 + x^6 - 6lx^5)\, dx$$

$$= \frac{m_1 \times v^2}{8l^6} \left[\frac{9l^2 x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{6lx^6}{6}\right]_0^l$$

$$= \frac{m_1 \times v^2}{8l^6} \left[\frac{9l^7}{5} + \frac{l^7}{7} - \frac{6l^7}{6}\right]$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$$= \frac{m_1 \times v^2}{8l^6}\left[\frac{33l^7}{35}\right]$$

$$= \frac{33}{280} m_1 l v^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{33}{140} \times m_1 l\right) v^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{33}{140} \times m_c\right) v^2 \qquad \ldots(1)$$

(यहाँ $m_1\, l = m_c$ है।)

यदि नगण्य द्रव्यमान की शाफ्ट के स्वतन्त्र सिरे पर $\frac{33\,m_c}{140}$ द्रव्यमान को पिण्ड (body) के रूप में लगाया जाए, तब शाफ्ट की गतिज ऊर्जा,

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{33\,m_c}{140}\right) v^2 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व (2) गतिज रूप में समान हैं अत: नगण्य द्रव्यमान की शाफ्ट के स्वतन्त्र सिरे पर शाफ्ट के द्रव्यमान का, $\frac{33}{140}$ द्रव्यमान को पिण्ड (body) या चकती (disc) के रूप में लगाया जाए।

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{\left(m + \frac{33\,m_c}{140}\right)}}$$

अत: लम्बकोणीय कम्पनों की प्राकृतिक आवृत्ति

जहाँ $m =$ शाफ्ट के स्वतन्त्र सिरे पर चकती (disc) का द्रव्यमान।

$m_c =$ शाफ्ट का द्रव्यमान।

8.2.6 मरोड़ कम्पनों पर शाफ्ट (Constraint) के जड़त्व का प्रभाव

एक शाफ्ट, जिसका एक सिरा बद्ध व दूसरा सिरा स्वतन्त्र है को, चित्र 8.12 में प्रदर्शित किया गया है।

यदि $\omega =$ शाफ्ट के स्वतन्त्र सिरे का कोणीय वेग।

$m =$ शाफ्ट की प्रति यूनिट लम्बाई का द्रव्यमान।

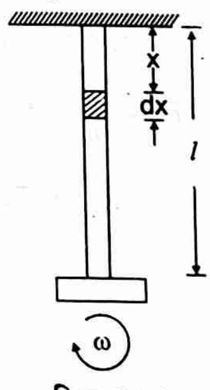
$l =$ शाफ्ट की लम्बाई।

$m_c =$ शाफ्ट की कुल लम्बाई का द्रव्यमान $= ml$

$K =$ शाफ्ट की विघूर्णन त्रिज्या।

$I_C =$ शाफ्ट का मात्रा जड़त्व आघूर्ण।

$= m_c K^2 = mlK^2$



चित्र 8.12

AKC TECHNICAL CLASSES

शाफ्ट के बद्ध सिरे से x दूरी पर छोटा अवयव 'δx' लेकर गणना करने पर, लिये गये अवयव का मात्रा जड़त्व आघूर्ण (mass moment of inertia)

$$=(m\delta x)K^2$$

$$=\frac{\delta x}{l}\times mK^2 l \qquad (l \text{ से गुणा व भाग देने पर})$$

$$=\frac{\delta x}{l}\times I_c \qquad (mK^2 l = I_c \text{ रखने पर})$$

एवं अवयव का कोणीय वेग, $=\frac{\omega}{l}\times x$

अवयव की गतिज ऊर्जा, $=\frac{1}{2}\left(\frac{\delta x}{l}\times I_c\right)\left(\frac{\omega}{l}\times x\right)^2$

$$=\frac{I_c\omega^2 x^2}{2l^3}\times\delta x$$

शाफ्ट (constraint) की कुल गतिज ऊर्जा,

$$=\int_0^l \frac{I_c\omega^2 x^2}{2l^3}\times\delta x$$

$$=\frac{I_c\omega^2}{2l^3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{I_c}{3}\right)\omega^2 \qquad \ldots(1)$$

यदि स्वतन्त्र सिरे पर एक पिण्ड या डिस्क (disc) जिसका जड़त्व आघूर्ण $\frac{I_c}{3}$ हो तथा शाफ्ट (constraint) का द्रव्यमान नगण्य हो, तब

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{I_c}{3}\right)\omega^2 \qquad \ldots(2)$$

समीकरण (1) व समीकरण (2) समान हैं इसलिये शाफ्ट सिरे पर, पिण्ड या चकती (disc) जिसका जड़त्व आघूर्ण $(I)=\frac{I_c}{3}$ हो, को लगाया जा सकता है।

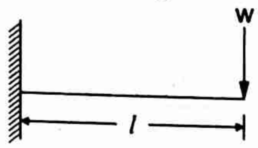
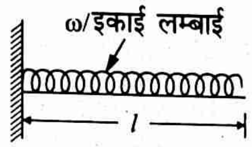
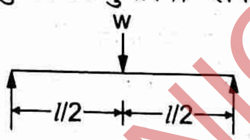
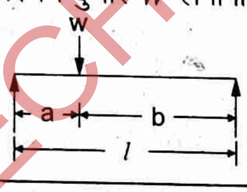
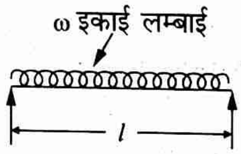
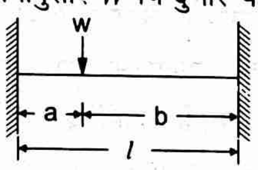
अत: शाफ्ट (constraint) के मरोड़ कम्पन की प्राकृतिक आवृत्ति

$$f_n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{q}{\left(I+\frac{I_c}{3}\right)}} \qquad \ldots(3)$$

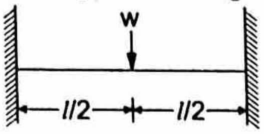
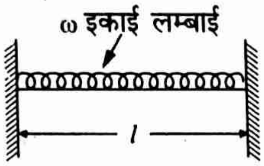
AKC TECHNICAL CLASSES

8.3.1 विभिन्न प्रकार की धरनों पर भिन्न प्रकार के भारों के अन्तर्गत स्थैतिक विस्थापन (Static Deflection) सारणी 8.1 में प्रदर्शित किये गये हैं

सारणी 8.1

क्र० सं०	धरन का प्रकार	विस्थापन (δ)
1.	कैन्टीलीवर धरन से स्वतन्त्र सिरे पर बिन्दु भार 	$\delta = \dfrac{Wl^3}{3EI}$ (स्वतन्त्र सिरे पर)
2.	कैन्टीलीवर की सम्पूर्ण लम्बाई पर समवितरित भार 	$\delta = \dfrac{\omega l^4}{8EI}$ (स्वतन्त्र सिरे पर)
3.	साधारण धरन के मध्य बिन्दु पर बिन्दुभार W लगाना 	$\delta = \dfrac{Wl^3}{48EI}$ (धरन के मध्य में)
4.	साधारण धरन के बिन्दु C पर बिन्दुभार W लगाना 	$\delta = \dfrac{Wa^2b^2}{3EIl}$ (बिन्दुभार के नीचे)
5.	साधारण धरन की सम्पूर्ण लम्बाई पर ω/इकाई लम्बाई का समवितरित भार 	$\delta = \dfrac{5}{384} \times \dfrac{\omega l^4}{EI}$ (धरन के मध्य में)
6.	दोनों सिरे बद्ध धरन पर चित्रानुसार W बिन्दुभार का लगा होना 	$\delta = \dfrac{Wa^3b^3}{3EIl^3}$ (बिन्दु भार के नीचे)

AKC TECHNICAL CLASSES

7.	दोनों सिरे बद्ध धरन के मध्य बिन्दु पर W बिन्दुभार लगाना 	$\delta = \frac{Wl^3}{48\,EI}$ (धरन के मध्य पर)
8.	दोनों सिरे बद्ध धरन की सम्पूर्ण लम्बाई पर समवितरित भार का लगाना W इकाई लम्बाई 	$\delta = \frac{\omega l^4}{384EI}$ (धरन के मध्य पर)

8.3.2. (A) कम्पनों के कारण (Causes of Vibrations)

मशीनों में कम्पनों के प्रमुख कारण निम्न हैं—

1. मशीनों के पुर्जों (parts) या पिण्डों (bodies) पर असन्तुलित बलों का लगना।
2. गति करने वाले पुर्जों का प्रत्यास्थ पदार्थ (elastic materials) से बना होना।
3. गति करने वाले पुर्जों का अधिक परिमाण (magnitude) से रेखीय व घुमाँऊ गति करना। अधिक भार (overload) होने पर भी मशीन में कम्पन्न उपजते हैं।
4. मशीन की नींव व उसमें लगे नींव बोल्टों का समान समतल पर न होना।
5. गति करने वाले पुर्जों के अधिक घिस जाने के कारण दोनों सम्पर्क वाली सतहों में अधिक अन्तराल (clearance) का हो जाना।
6. मशीन के साथ कम्पनशोषक यन्त्रावली (vibration absorber) का कम शक्ति का होना या न लगा होना।
7. किसी मशीन के नजदीक ही यदि कोई अन्य मशीन अथवा उपकरण में कम्पन हो रहे हो तो भी उसमें कम्पन अन्तरित (transmit) होकर आ सकते हैं।
8. मशीन में ढीले अथवा दोषयुक्त अंगों की गति के कारण कम्पन उपजते हैं।
9. मशीन में पश्चाग्र-गति (reciprocating motion) करने वाले अंग गतिक बल उपजाते हैं जिससे भी कम्पन उत्पन्न होते हैं।

(B) कम्पनों का हानिकारक प्रभाव (Harmful Effect of Vibrations)

कम्पनों के कुछ प्रमुख हानिकारक प्रभाव निम्न हैं—

1. मशीन व मशीन यन्त्रावलियों में अधिक टूट-फूट का होना।
2. मशीन की नींव (foundations) में दरारें पड़ना जिसके कारण मशीन का असन्तुलित हो जाना।
3. शक्ति संचारित करती शाफ्ट के मुड़ने (bend) की सम्भावना का होना।
4. रेखीय, दोलन या घुमाँऊ गति करने वाले पुर्जों की सम्पर्क सतहों के मध्य कम्पन के कारण अधिक घिसाई (wear) व उनके द्वारा कम क्षमता पर कार्य करना। मशीनी अंग भी ढीले पड़ जाते हैं।
5. कम्पनों के कारण गति करते पुर्जों में अनावश्यक शोर का होना। इससे श्रमिकों को असुविधा होती है तथा उनके व्यवहार में भी चिड़चिड़ापन आता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

6. उपरोक्त सभी कारणों से दुर्घटना होने की सम्भावना का रहना।
7. मापन यन्त्रों के संकेतकों (pointers) आदि का, कम्पनों के कारण सही पाठयाँक (correct reading) न ले पाना।
8. कम्पनों के कारण ऊर्जा का कुछ भाग व्यर्थ चला जाता है।

उपरोक्त हानिकारक प्रभावों के विपरीत कम्पनों के कुछ लाभदायक उपयोग भी हैं—

(i) सीमेन्ट कंक्रीट में से वायु के बुलबुलों को बाहर निकालने तथा उसे सघन (compact) बनाने वाले याँत्रिक शेकर (mechanical shaker) में।
(ii) विभिन्न प्रकार के संगीत उपकरणों या वाद्य-यन्त्रों (musical instruments) में।
(iii) विभिन्न प्रकार के स्वास्थ्य सम्बन्धी उपकरणों में।

(C) कम्पनों से बचाव (Remedies of Vibrations)

एक असन्तुलित मशीन, नींव (foundation) व उस संरचना जिस पर यह लगाई गई है, कम्पन पैदा करती है। उदाहरण के रूप में एयरकण्डीशनर एवं अस्पताल में विद्युतीय लिफ्ट, आटोमोबाइल्स में लगे पश्चाग्र गति कम्प्रेशर के कारण कम्पन उत्पन्न होते हैं। इन कम्पनों को उत्पन्न न होने देने के लिये यह उनके प्रभाव को कम करने के लिये इन मशीनों या युक्तियों (devices) को स्प्रिंग्स या कम्पन शोषक पदार्थों के ऊपर लगाया जाता है।

अभियान्त्रिकी कार्यों में कम्पन को साधारणतया कठिनाई उत्पन्न होने का स्रोत (source) मानते हैं। अत: यह आवश्यक हो जाता है कि मशीनों में इनको उत्पन्न ही न होने दिया जाए या निश्चित सीमा तक नियन्त्रित किया जाये। कभी-कभी मशीन के डिजाइन में परिवर्तन कर इनको नियन्त्रित किया जाता है या विभिन्न कम्पन शोषक पदार्थों को प्रयोग कर इनके परिमाण को कम किया जाता है किसी भी कम्पनरोधी पदार्थ का प्रभावी होना इस बात पर निर्भर करता है कि उसकी कम्पन प्रतिरोधकता कितनी है। कम्पन प्रतिरोधकता, दो बातों, बल एवं गति, जो वस्तु को कम्पन से सुरक्षित रखने के लिये आवश्यक हैं। कम्पन करने वाले माध्यम की बल या गति के अनुपात पर निर्भर करती है। इसको एक आटोमोबाइल्स के उदाहरण से समझा जा सकता है। बल से हमारा तात्पर्य उन बलों से है, जो इंजन में कम्पनों के कारण होते हैं। ये बल, आटोमोबाइल में बैठे यात्रियों तक नहीं पहुँचने चाहिये। गति से हमारा तात्पर्य यह है कि इंजन में उत्पन्न ये कम्पन आटोमोबाइल के रेडियो को प्रभावित न कर सके।

कम्पन शोषक पदार्थों को मुख्य रूप से दो भागों में विभक्त किया जा सकता है।

1. (a) धात्विक कम्पनशोषक (Metallic absorbers)—ये कम्पन शोषक धातु (metal) के बने होते हैं। इनका लाभ यह है कि ये लम्बे समय तक ठीक प्रकार से काम करते रहते हैं। इसके अतिरिक्त इन पर पानी व तेल के सम्पर्क में आने पर कोई प्रभाव नहीं होते हैं। ये अधिक भारों (heavy loads) के अन्तर्गत भी अपने गुणों को बनाये रखते हैं। इनके अन्तर्गत पत्तीदार, कुण्डलीदार व डिस्क स्प्रिंग्स आदि का प्रयोग किया जाता है। इनका प्रयोग उसी अवस्था में किया जाता है, जब इनकी आवृत्ति का अनुपात $\frac{\omega}{\omega_o} > \sqrt{2}$ हो, क्योंकि यहाँ अनुपात $\frac{f}{f'}$ लगभग शून्य होता है। यहाँ f वास्तविक व f' क्रिटिकल (critical) अवशोषक प्रतिरोध (damping resistance) है।

(b) आर्गेनिक पदार्थ कम्पन अवशोषक (Organic meterials absorbers)—इनमें मुख्य रूप से रबर, कार्क एवं रेशेदार पदार्थों का प्रयोग किया जाता है। इनका अलाभ यह है कि इनको अधिक तापक्रम व दबाव पर प्रयोग करने में कठिनाई आती है एवं इन पदार्थों के गुण आवृत्ति, तापक्रम व भार में परिवर्तन के साथ परिवर्तित होते रहते हैं। इन पर तेल व

AKC TECHNICAL CLASSES

पानी का भी प्रभाव पड़ता है। इनका लाभ यह है कि झटके शोषक गुणांक (damping fatocr) अधिक होने के कारण, कम आवृत्ति अनुपात $\frac{\omega}{\omega_n}$ होने पर भी इनको प्रयोग किया जा सकता है।

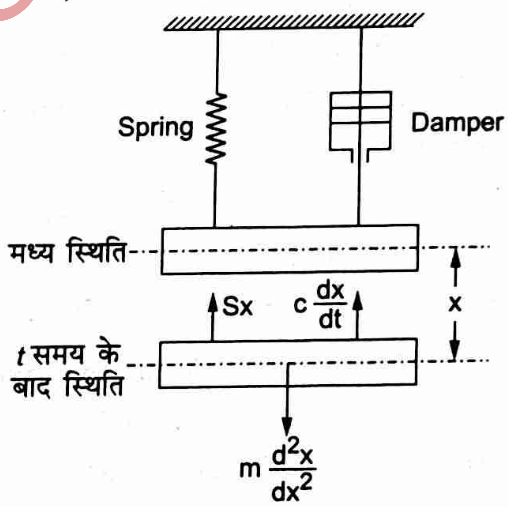
यहाँ, ω = किसी कम्पन करते सिस्टम की वृत्तीय आवृत्ति (circular frequency) रेडियन/सेकण्ड में।

तथा ω_n = प्राकृतिक वृत्तीय आवृत्ति (natural circular frequency) रेडियन/सेकिण्ड में।

2. मशीनों में कम्पनों के प्रभाव को कम करने के लिए द्रवीय अवशोषक विधि (viscous damping method) का भी प्रयोग किया जाता है। इस विधि में द्रवीय घर्षण प्रतिरोध (fluid frictional resistance) के द्वारा कम्पनों के परिमाण (magnitude) को धीरे-धीरे कम किया जाता है। इस विधि में कम्पनों की ऊर्जा का कुछ भाग, द्रवीय घर्षण के प्रतिरोध के कारण कम हो जाता है। कम्पनों की गति का प्रतिरोध, उस वातावरण जिसमें कम्पन हो रहे हैं, के घर्षण के कारण भी होता है तथा कुछ प्रतिरोध मशीन के आन्तरिक घर्षण के कारण होता है। कभी-कभी ब्राह्य अवशोषक युक्तियों जैसे डैश पोट (dash pot) के द्वारा भी कम्पनों के प्रभाव को कम किया जा सकता है।

8.3.3. स्वतन्त्र अवमंदित कम्पन (Free Damped Vibrations) अथवा श्यान अवमंदन (Viscous Damping)

क्योंकि मंदित कम्पन के अन्तर्गत धीरे-धीरे कम्पन का आयाम (amplitiude) कम होता जाता है और कुछ समय पश्चात अन्त में शून्य हो जाता है। फलस्वरूप कम्पन भी समाप्त हो जाते हैं। इस मंदन का प्रमुख कारण प्रतिरोध (resistance) है। वास्तव में यह प्रतिरोध वायु अथवा माध्यम (medium) का घर्षण, अंग के पदार्थ का आन्तरिक घर्षण (internal friction), डैश पॉट (desh pot or damper) अथवा अन्य प्रयुक्त अवमंदन युक्तियों (damping devices) का सम्मिलित प्रभाव होता है।



चित्र 8.13

चित्र 8.13 में एक कम्पन करता द्रव्यमान (vibrating mass) दर्शाया गया है। इस द्रव्यमान को एक स्पाइरल स्प्रिंग से लटकाया हुआ है। स्प्रिंग का दूसरा सिरा एक दृढ़ भाग से बद्ध है। चित्र में एक कम्पन अवशोषक (damper) को, द्रव्यमान व बद्ध भाग के मध्य लगा हुआ प्रदर्शित किया गया है।

यहाँ, m = स्प्रिंग से लटकाया गया द्रव्यमान।

S = स्प्रिंग का कड़ापन।

x = द्रव्यमान (m) का अपनी मध्य स्थिति से t समय के बाद विस्थापन।

δ = स्थैतिक विस्थापन (static deflection)।

C = अवशोषक गुणांक (damping coefficient) या शोषक बल प्रति यूनिट वेग।

अब, पिण्ड पर लगने वाले बल,

$C\frac{dx}{dt}$ = शोषक बल (damping force) या घर्षण बल (frictional force)

$m\frac{d^2x}{dx^2}$ = त्वरण वृद्धि बल (accelerating force)।

δx = स्प्रिंग बल (spring force)।

AKC TECHNICAL CLASSES

पिण्ड पर लगने वाले बलों के सन्तुलन द्वारा गति समीकरण (equations of motion) :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\left[C \times \frac{dx}{dt} + Sx\right]$$

या $$m\frac{d^2x}{dt^2} + C \times \frac{dx}{dt} + S.x = 0$$

या $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{C}{m} \times \frac{dx}{dt} + \frac{S}{m} \times x = 0$$

यह एक द्विघातीय डिफ्रेन्शियल समीकरण (second order differential equation) है। इसका उपयोग एक डिग्री स्वतन्त्र सरल आवृत्ति दोलन द्रवीय शोषक मशीन के कम्पनों (single degree of freedom harmonic oscillator with viscous damping) की आवृत्ति (frequency) ज्ञात करने के लिए किया जाता है।

समीकरण (i) के हल की निम्न प्रकार तीन स्थितियाँ हो सकती हैं—

(i) $\frac{s}{m} > \left(\frac{c}{2m}\right)^2$ अण्डर या स्माल डैम्पिंग (under damping or small damping)

(ii) $\frac{s}{m} = \left(\frac{c}{2m}\right)^2$ क्रांतिक या क्रिटीकल डैम्पिंग (critical damping)

(iii) $\frac{s}{m} < \left(\frac{c}{2m}\right)^2$ अति या ओवर या लार्ज डैम्पिंग (over or large damping)

I. $\boxed{\frac{s}{m} < \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$ **कम्पन की इस स्थिति को अण्डर डैम्पिंग (under damping) या स्माल डैम्पिंग (small damping) कहते हैं।**

यह अधिकतम व्यवहारिक स्थिति है।

आगे अध्ययन से ज्ञात होता है कि अण्डर डैम्पिंग में गति सरल आवर्त (simple harmonic) होती है।

इस कम्पन का आयाम (amplitude) धीरे-धीरे कम होता जाता है तथा कुछ समय पश्चात् संहति के जड़त्व (inertia) के कारण संतुलन स्थिति प्राप्त हो जाती है।

इस प्रकार के अवमंदित कम्पन का आवर्त काल (time period)

$$\boxed{T_d = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{s}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\omega_n^2 - a^2)}}} \quad \ldots(2)$$

जहाँ $\sqrt{\frac{s}{m}} = \omega_n$ तथा $\frac{c}{2m} = a$

AKC TECHNICAL CLASSES

इस अवमंदित कम्पन की आवृति (frequency)

$$n_d = \frac{1}{T_d} = \frac{\sqrt{\frac{s}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}}{2\pi} \quad \ldots(3)$$

II. $\frac{s}{m} = \left(\frac{c}{2m}\right)^2$ **, कम्पन की इस स्थिति को क्रांतिक या क्रिटीकल डैम्पिंग (critical damping) तथा गति को अनावर्ती या अपीरियोडियक गति (aperiodic motion) कहते हैं क्योंकि कम्पन की आवृत्ति (frequency) शून्य होती है।**

इसमें संहति शीघ्रता से अपनी संतुलन स्थिति मे पीछे लौट आती है। अत: वास्तव में कम्पन नहीं होता।

अधिकतर मापन उपकरणों में सूचक (pointer) द्वारा तुरन्त ही माप को प्रदर्शित करने हेतु उनका क्रिटीकल डैम्पिंग करना आवश्यक होता है।

क्रिटीकल डैम्पिंग के लिए $\frac{s}{m} = \left(\frac{c}{2m}\right)^2$

परन्तु $\frac{s}{m} = (2m)^2$ जहाँ $n =$ कम्पन की प्राकृतिक आवृत्ति

$\therefore$ क्रिटीकल डैम्पिंग हेतु $\frac{c}{2m} = 2\pi n$

III. $\frac{s}{m} < \left(\frac{c}{2m}\right)^2$ **, कम्पन की इस स्थिति को अति या ओवर या लार्ज डैम्पिंग (over or large damping) तथा गति को अनावर्ती या अपीरियोडिक गति (aperiodic motion) कहते हैं।**

इसमें संहति धीरे-धीरे अपनी संतुलन स्थिति में आ जाती है। कम्पन की ओवर डैम्पिंग स्थिति को व्यवहार में नहीं होने दिया जाता।

अमंदित कम्पन (Undamped vibrations)

उपरोक्तानुसार **यदि कम्पन का मंदन नहीं होता तब ये अमंदित कम्पन कहलाते हैं।** इनमें डैम्पर नहीं लगाया जाता है। इन कम्पनों के लिए $c = 0$ होगा। अत: सम्बन्धों 2 तथा 3 से अमंदित कम्पन का आवर्त काल (time perod)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{s}} \quad \ldots(4)$$

तथा आवत्ति (frequency),

$$n = \frac{2}{2\pi}\sqrt{\frac{s}{m}} \quad \ldots(5)$$

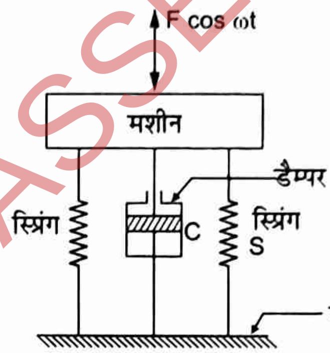
यह सम्बन्ध § 8.2.1 में स्वतन्त्र कम्पन के अन्तर्गत प्राप्त सम्बन्ध के ही समान है।

AKC TECHNICAL CLASSES

8.3.4 कम्पन की पारगमनीयता एवं पृथक्करण (Transmissibility and Isolation of Vibration) :

(A) पारगमनीयता (Transmissiblity):

हम जानते हैं कि जब एक असन्तुलित (unbalanced) मशीन को नींव (foundation) पर संस्थापित (installed) कर दिया जाता है तब यह नींव में कम्पन उत्पन्न करती है। इन कम्पनों को न होने देने के लिए अथवा इन असन्तुलित गतिक बलों (Unbalanced dynamic forces) को मशीन की नींव पर पारेषित न होने देने के लिए मशीनों को स्प्रिंगों, डैम्परों (dampers) अथवा किसी अन्य कम्पन पृथक्करण पदार्थों पर स्थापित किया जाता है, जैसा कि चित्र 8.14 (a) में प्रदर्शित हैं।



चित्र 8.14 (a) कम्पन पृथक्करण

इसके ठीक विपरीत यदि किसी आलम्ब (support) अथवा नींव में आवर्त गति (periodic motion) होती है तो यह भी उस पर टिकी मशीन अथवा सिस्टम पर पारेषित हो जाती है। बलों अथवा गति के इसी प्रकार पारेषण के गुण को पारगमनीयता (Transmissibility) कहते हैं।

पारेषित चित्र 8.4 (a) में प्रदर्शित निकाय को स्वतन्त्रता की एक कोटि (one degree of freedom) का माना जा सकता है। अर्थात् यह केवल ऊपर तथा नीचे गति करता है।

यहाँ यह बात नोट करने योग्य है कि जब एक कॉलिक (अर्थात् सरल आवर्त) असन्तुलित बल $F\cos\omega t$ को जब मशीन पर आरोपित किया जाता है जबकि मशीन का द्रव्यमान 'm' है और वह 's' कड़ेपन (stiffness) वाले स्प्रिंग पर आधारित (supported) है तब बल स्थिर आधार (fixed support) अथवा नींव (foundation) पर लगे डैम्पर अथवा डैशपॉट (dashpot) तथा स्प्रिंग के माध्यम से पारेषित होता है।

''**पारेषित हुए बल (F_T) तथा लगाये गये बल (F) के अनुपात को स्प्रिंग की पारगमनीयता (transmissibility of spring) अथवा पृथक्करण गुणाँक (isolation factor) अथवा पारगमनीयता अनुपात (transmissiblity ratio) कहते हैं।**'' इसे $\in$ से प्रदर्शित करते हैं।

"The ratio of the force transmitted (F_T) to the force applied (F) is known as the isolation factor or transmissiblity ratio of spring suppport".

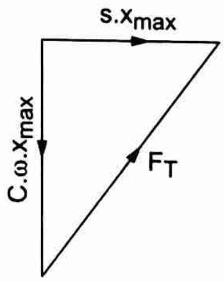
$$\in = \left[\frac{F_T}{F}\right] \qquad \ldots(1)$$

यदि मशीन तथा आधार (आलम्ब) सीधे सम्पर्क में हैं तब मशीन अथवा सिस्टम का पूर्ण असन्तुलित बल नींव को या नींव के असन्तुलित बल मशीन अथवा सिस्टम पर पारेषित होते हैं। अब चित्र 8.12 (a) के अनुसार, नींव पर पारगमित बल निम्न प्रकार दो बलों का परिणामी होता है—

(i) स्प्रिंगों का प्रत्यास्थ बल $= S.x_{max}$

(ii) मन्दन (Damping) बल $= C.\omega x_{max}$

चित्र 8.4 (b) के अनुसार स्प्रिंग बल तथा मन्दन बल परस्पर लम्ब होते हैं। अत: दोनों का परिणामी पारगमित बल (F_T) होगा।



चित्र 8.14 (b)

$$\therefore \qquad F_T = \sqrt{(sx_{max})^2 + (C.\omega x_{max})^2}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

या

$$F_T = x_{max}\sqrt{s^2 + c^2\omega^2}$$

∴ बलों की पारगमनीयता (Transmissiblity) $\varepsilon = \frac{F_T}{F} = \left[\frac{x_{max}\cdot\sqrt{s^2 + c^2\omega^2}}{F}\right]$

यदि डम्पर न हो तो $C = 0$ ...(ii)

तब पारगमनीयता $\in = \left[\frac{sx_{max}}{F}\right]$ ...(iii)

(B) कम्पन पृथक्करण (Vibration Isolation)

हम जानते हैं कि असन्तुलित बलों के नींव पर भी पारगमित (transmit) हो जाने के कारण नींव में कम्पन होते हैं। इन कम्पनों से असुविधा होती है और टूट-फूट भी अधिक होती है। वाहन होने की दिशा में तो यह कम्पन अवाँछित होते हैं। इन कम्पनों को शून्य करने अथवा न्यूनतम करने का प्रयास किया जाता है। इसके लिए मशीन तथा नींव के बीच में किन्ही पृथक्कारी (isolating) पदार्थों अथवा युक्तियों जैसे-डैम्पर या कम्पन अवशोषकों का प्रयोग किया जाता है। किसी पृथक्कारी युक्ति की प्रभावशीलता उसकी पारगमनीयता द्वारा मापी जाती है।

उदाहरण 8.2—एक कैन्टीलीवर शाफ्ट का व्यास 55 mm एवं लम्बाई 300 mm है। इसके स्वतन्त्र सिरे पर 110 kg का पिण्ड (body) लगा है। शाफ्ट के पदार्थ का यंग मापांक $(E) = 200\,\text{GN/m}^2$ है। अनुदैर्ध्य कम्पनों एवं लम्बकोणीय कम्पनों की प्राकृतिक आवृत्ति ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है—

(i) व्यास $(d) = 55\,\text{mm} = 0.055\,\text{m}$

(ii) लम्बाई $(l) = 300\,\text{mm} = 0.3\,\text{m}$

(iii) द्रव्यमान $(m) = 110\,\text{kg}$

(iv) यंग मापांक $(E) = 200\,\text{GN/m}^2 = 200\times10^9\,\text{N/m}^2$

शाफ्ट की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल, $A = \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{4}(0.055)^2 = 0.002374\,\text{m}^2$

एवं शाफ्ट का जड़त्व आघूर्ण $(I) = \frac{\pi}{64}d^4 = \frac{\pi}{64}(0.055)^4 = 4.489\times10^{-7}\,\text{mm}^4$

1. अनुदैर्ध्य कम्पन की प्राकृतिक आवृत्ति (Natural frequency of longitudinal vibrations)—हम जानते हैं कि शाफ्ट का स्थैतिक विस्थापन (deflection),

$$\delta = \frac{Wl}{AE} = \frac{110\times9.81\times0.3}{0.00237\times200\times10^9}$$

$$= 0.6829\times10^{-6}\,\text{m}$$

अत: अनुदैर्ध्य कम्पन की प्राकृतिक आवृत्ति

$$f_n = \frac{0.4985}{\sqrt{\delta}} = \frac{0.4985}{\sqrt{0.6829\times10^{-6}}}$$

AKG TECHNICAL CLASSES

$$= \frac{0.4985}{0.8264 \times 10^{-3}}$$

$$= \mathbf{603.2\,Hz}$$ उत्तर

2. लम्बकोणीय कम्पन की प्राकृतिक आवृत्ति (Natural frequency)—हम यह भी जानते हैं कि लम्बकोणीय कम्पन की दशा में शाफ्ट का स्थैतिक विस्थापन (deflection),

$$\delta = \frac{Wl^3}{3EI} = \frac{110 \times 9.81 \times 03^3}{3 \times 200 \times 10^9 \times 4.489 \times 10^{-7}}$$

$$= 1.08 \times 10^{-4}\,\text{m}$$

अतः लम्बकोणीय कम्पन की प्राकृतिक आवृत्ति

$$f_n = \frac{0.4985}{\sqrt{\delta}} = \frac{0.4985}{\sqrt{1.08 \times 10^{-4}}}$$

$$= \frac{0.4985}{1.04 \times 10^{-2}} = \mathbf{47.93\,Hz}$$ उत्तर

उदाहरण 8.3—एक शाफ्ट जिसका व्यास 100 mm तथा लम्बाई 1 m है, का एक सिरा बद्ध तथा दूसरे सिरे पर 550 kg का द्रव्यमान जिसकी विघूर्णन त्रिज्या 400 mm^2 है, लगा है। शाफ्ट के पदार्थ का दृढ़ता मापांक $(G) = 80\,\text{GN/m}^2$ है। मरोड़ कम्पनों की प्राकृतिक आवृत्ति ज्ञात कीजिये।

हल— (i) शाफ्ट का व्यास $(d) = 100\,\text{mm}$

(ii) शाफ्ट की लम्बाई $(l) = 1\text{m}$

(iii) द्रव्यमान $(m) = 550\,\text{kg}$

(iv) विघूर्णन त्रिज्या $(K) = 450\,\text{mm}$

(v) दृढ़ता मापांक $(G) = 80 \times 10^9\,\text{N/mm}^2$

हम जानते हैं, कि शाफ्ट का ध्रुवीय जड़त्व आघूर्ण (polar moment of inertia)

$$J = \frac{\pi}{32} d^4$$

$$= \frac{\pi}{32}(0.1)^4 = 9.82 \times 10^{-6}\,\text{m}^4$$

∴ शाफ्ट का मरोड़ कड़ापन (torsional stiffness),

$$q = \frac{GJ}{l} = \frac{80 \times 10^9 \times 9.82 \times 10^{-6}}{1}$$

$$= 785.6 \times 10^3\,\text{Nm}$$

AKG TECHNICAL CLASSES

एवं शाफ्ट का मात्रा जड़त्व आघूर्ण (mass moment of inertia),

$$I = mK^2 = 550(0.40)^2$$

$$= 88 \text{ kg-m}^2$$

$\therefore$ मरोड़ कम्पन की प्राकृतिक आवृत्ति,

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{q}{I}}$$

$$= \frac{1}{2 \times 3.14}\sqrt{\frac{785.6 \times 10^3}{88}}$$

$$= \mathbf{15.045\ Hz}$$

उत्तर

उदाहरण 8.4—एक शाफ्ट जिसकी लम्बाई 1 m है, अपने दोनों सिरों पर शुद्ध आलम्बित है। इस शाफ्ट पर अपने एक सिरे से 0.3 m की दूरी पर 90 Kg का द्रव्यमान लगा है। लम्बकोणीय कम्पनों की प्राकृतिक आवृत्ति ज्ञात कीजिये। शाफ्ट का व्यास 50 mm है तथा $E = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$।

हल—दिया है—

(i) शाफ्ट की लम्बाई $(l) = 1 \text{ m}$

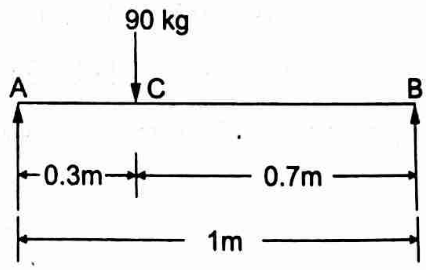
(ii) द्रव्यमान $(m) = 90 \text{ kg}$

(iii) लम्बाई $(AC) = 0.3 \text{ m}$

(iv) यंग मापांक $(E) = 200 \times 10^9 \text{ N/m}^2$

(v) शाफ्ट का व्यास $(d) = 50 \text{ mm} = 0.05 \text{ m}$

भारित शाफ्ट को चित्र 8.15 में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 8.15

शाफ्ट की अनुप्रस्थ काट का जड़त्व आघूर्ण, $I = \frac{\pi}{64} d^4$

$$= \frac{\pi}{64}(0.05)^4$$

$$= 0.307 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

एवं बिन्दु C पर स्थैतिक विस्थापन, $\delta = \frac{Wa^2b^2}{3EIl}$

$$= \frac{90 \times 9.81 \times (0.3)^2 \times (0.7)^2}{3 \times 200 \times 10^9 \times 0.307 \times 10^{-6} \times 1}$$

$$= 2.11 \times 10^{-4} \text{ m}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

लम्बकोणीय कम्पन की प्राकृतिक आवृत्ति $f_n = \dfrac{0.4985}{\sqrt{\delta}}$

$$= \frac{0.4985}{\sqrt{2.1137834 \times 10^{-4}}}$$

$$= \frac{0.4985}{0.014538} = \mathbf{34.28\,Hz}$$ उत्तर

उदाहरण 8.5—एक गतिपाल पहिये को, ऊर्ध्वाधर शाफ्ट जिसका व्यास 60 mm तथा जिसके दोनों सिरे बद्ध हैं, पर चित्रानुसार लगाया गया है। गतिपाल पहिये का द्रव्यमान 560 kg है। अनुदैर्ध्य व लम्बकोणीय कम्पनों की प्राकृतिक आवृत्ति ज्ञात कीजिये। $E = 200\ \text{GN/m}^2$ है।

हल—दिया है—(i) शाफ्ट का व्यास $(d) = 60\,\text{mm} = 0.06\,\text{m}$

(ii) द्रव्यमान $(m) = 560\,\text{kg}$

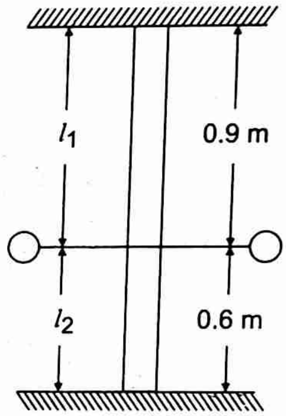
(iii) यंग मापांक $(E) = 200\,\text{GN/m}^2 = 200 \times 10^9\ \text{N/m}^2$

शाफ्ट की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल,

$$A = \frac{\pi}{4}(0.06)^2 = 2.826 \times 10^{-3}\ \text{m}^2$$

एवं शाफ्ट की अनुप्रस्थ काट का जड़त्व आघूर्ण,

$$I = \frac{\pi}{64}(0.06)^4 = 0.63585 \times 10^{-6}\ \text{m}^4$$



चित्र 8.16

(i) अनुदैर्ध्य कम्पनों की प्राकृतिक आवृत्ति

यदि m_1 = शाफ्ट की लम्बाई l_1 का द्रव्यमान।

$\therefore$ $(m - m_1)$ = शाफ्ट की लम्बाई l_2 का द्रव्यमान।

लम्बाई l_1 में लम्बाई में वृद्धि

$$\delta_1 = \frac{W_1 l_1}{AE} = \frac{m_1 g l_1}{AE}$$

लम्बाई l_2 की लम्बाई में सम्पीडन

$$\delta_2 = \frac{(W - W_1)\,l_2}{AE} = \frac{(m - m_1)\,g\,l_2}{AE}$$

क्योंकि $\delta_1 = \delta_2$ $\quad \dfrac{m_1 g l_1}{AE} = \dfrac{(m - m_1)\,g\,l_2}{AE}$

अत: $\quad m_1 l_1 = (m - m_1)\,l_2$

$$m_1 \times 0.9 = (560 - m_1) \times 0.6$$

AKC TECHNICAL CLASSES

$$1.5\,m_1 = 336$$

या

$$m_1 = 224\,\text{kg}$$

शाफ्ट की लम्बाई l_1 में वृद्धि

$$\delta_1 = \frac{m_1 g l_1}{AE} = \frac{224 \times 9.81 \times 0.9}{2.826 \times 10^{-3} \times 200 \times 10^9}$$

$$= 3.499 \times 10^{-6}\,\text{m}$$

अत: अनुदैर्ध्य कम्पनों की प्राकृतिक आवृत्ति

$$f_n = \frac{0.4985}{\sqrt{\delta_1}} = \frac{0.4985}{\sqrt{3.499 \times 10^{-6}}}$$

$$= \frac{0.4985}{1.87 \times 10^{-3}} = \mathbf{266.5\ Hz}$$ **उत्तर**

(i) लम्बकोणीय कम्पनों की प्राकृतिक आवृत्ति—हम जानते हैं, कि एक शाफ्ट जो दोनों सिरों पर बद्ध है तथा जिस पर एक सिरे से a दूरी पर व दूसरे सिरे से b दूरी पर बिन्दुभार लगा है, में स्थैतिक विस्थापन—

$$\delta = \frac{Wa^3b^3}{3EIl^3} = \frac{560 \times 9.81 \times 0.9^3 \times 0.6^3}{3 \times 200 \times 10^9 \times 0.6385 \times 10^{-6} \times 1.5^3}$$

$$= 0.669 \times 10^{-3}\,\text{m}$$

लम्बकोणीय कम्पनों की प्राकृतिक आवृत्ति

$$f_n = \frac{0.4985}{\sqrt{\delta}} = \frac{0.4985}{\sqrt{0.669 \times 10^{-3}}} = \frac{0.4985}{0.0258} = \mathbf{19.27\ Hz}$$ **उत्तर**

प्रश्नावली

1. यांत्रिक कम्पनों (mechanical vibrations) से आपका क्या तात्पर्य है?
2. यांत्रिक कम्पनों का वर्गीकरण कीजिये।
3. स्वतन्त्र कम्पन (free vibrations), बल कम्पन (forced vibrations), शोषित कम्पन (damped vibrations) को संक्षेप में परिभाषित कीजिये।
4. अनुदैर्ध्य (longitudinal) लम्बकोणीय (transverse) व मरोड़ कम्पनों (torsional vibrations) को चित्रों सहित समझाइये।
5. स्वतन्त्र अनुदैर्ध्य (longitudinal) एवं लम्बकोणीय (transverse) कम्पनों के लिये प्राकृतिक आवृत्ति (natural frequency) का संतुलन विधि से व्यंजक व्युत्पन्न कीजिये।
6. अनुदैर्ध्य व लम्बकोणीय कम्पनों पर शाफ्ट के जड़त्व के प्रभाव को समझाइये।

AKC TECHNICAL CLASSES

7. यांत्रिक कम्पनों के होने के क्या कारण (causes) हैं तथा पिण्ड या मशीन पर इनके क्या हानिकारक प्रभाव (harmful effects) हैं? **(U.P. 2008)**

8. यांत्रिक कम्पनों से सम्बन्धित निम्न तकनीकी पदों (technical terms) को परिभाषित कीजिये—
   (i) समय अन्तराल (time period) (ii) चक्र (cycle)
   (iii) आवृत्ति (frequency)

9. कम्पन अवशोषक (vibrations absorbers) क्या हैं? विभिन्न प्रकार के कम्पन अवशोषकों को बताइये।

10. आर्गेनिक कम्पन अवशोषकों (organic vibrations absorbers) की तुलना में धात्विक कम्पन अवशोषकों (metallic vibrations absorbers) के क्या लाभ व हानि हैं?

11. किसी एक विधि द्वारा अनुदैर्ध्य कम्पन की प्राकृतिक आवृत्ति (natural frequency) $n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{s}{m}}$ का व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए।

12. एक स्पष्ट चित्र बनाकर प्राकृतिक अनुप्रस्थ कम्पन सम्बन्धी निम्न गति समीकरण व्युत्पन्न कीजिए—

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{sx}{m} = 0$$

13. कम्पन की **पारगमनीयता (transmissiblity)** तथा **पृथक्करण (isolation)** को संक्षेप में समझाइये। **(U.P. 2010)**

14. कम्पनों से सम्बन्धित निम्न पदों की परिभाषा दीजिये—
   (a) कम्पन शोषक (vibration absorber) (b) पृथक्करण (isolation)
   (c) क्राँतिक अवमंदन (critical damping) (d) अण्डर-डैम्पिग (Under-damping)
   (e) अति डैम्पिंग (overdamping)

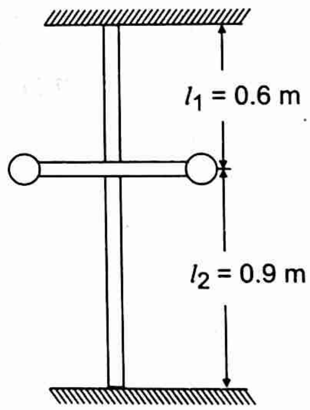
15. स्वतन्त्र अनुदैर्ध्य कम्पन के प्राकृतिक आवृत्ति ज्ञात करने की कौन-कौन सी विधियाँ हैं? उनमें से किसी एक को स्पष्टत: समझाइये। **(U.P. 2009)**

16. मुक्त अनुदैर्ध्य कम्पनों वाले एक कम्पन सिस्टम की प्राकृतिक आवृत्ति ज्ञात करने की ऊर्जा विधि समझाइये। **(U.P. 2014)**

17. शाफ्ट की जड़ता के प्रभाव को विचार किये बिना स्वतन्त्र ऐंठन कम्पन (free torsioal vibrations) की प्राकृतिक बारम्बारता (Natural frequency) ज्ञात करने हेतू व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए। **(U.P. 2009)**

18. एक छड़ की लम्बाई 0.9 m तथा व्यास 75 mm है। छड़ एक सिरे पर बद्ध (fix) है। इसके स्वतन्त्र सिरे पर एक गतिपालक पहिया (flywheel) लगा है जिसका द्रव्यमान 1000 kg है। यदि $E = 2 \times 10^{15}$ N/mm^2 हो, तो स्वतन्त्र कम्पनों की आवृत्ति तथा आवर्तकाल ज्ञात कीजिए।
   [**उत्तर**—157.7 Hz, 0.00635 sec]

19. 500 kg द्रव्यमान के एक गतिपालक पहिये को चित्र के अनुसार एक दोनों सिरों पर बद्ध शाफ्ट पर लगाया गया है। यदि शाफ्ट का व्यास 50 mm और उसके पदार्थ का यंग मापांक $E = 200\,\frac{\text{GN}}{\text{m}^2}$ हो, तो शाफ्ट के अनुदैर्ध्य तथा अनुप्रस्थ कम्पन की आवृत्ति ज्ञात कीजिए। (चित्र 8.17)
   [**उत्तर**—235 Hz, 14.14 Hz]



चित्र 8.17

20. एक शुद्धलम्ब शाफ्ट के एक सिरे से 0.3 m दूरी पर 100 kg का एक गियर लगा है तो धरन के स्वतन्त्र अनुप्रस्थ कम्पन की आवृत्ति ज्ञात कीजिए। जबकि शाफ्ट की कुल लम्बाई 1 m; व्यास 50 mm तथा $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 मानी जाये।
   [**उत्तर**—32.5 Hz]

AKC TECHNICAL CLASSES

21. एक स्पिण्डल की लम्बाई 1 m तथा व्यास 100 mm है। इसका ऊपरी सिरा बद्ध है तथा निचले सिरे पर 0.5 Ton की एक चकती लगी है। यदि स्पिण्डल का प्रत्यास्थता गुणाँक $2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ हो, तो स्पिण्डल की अनुदैर्ध्य तथा अनुप्रस्थ कम्पन की आवृत्ति कितनी होगी?

[उत्तर—282 Hz, 12.2 Hz]

22. एक 2 m लम्बी तथा 2.5 cm व्यास की छड़ से 2.50 N भार लटक रहा है। छड़ का भार नगण्य मानते हुए मुक्त अनुदैर्ध्य कम्पन की बारम्बारता ज्ञात कीजिए। छड़ के पदार्थ का प्रत्यास्थता गुणाँक $2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ है। **(U.P. 2010)**

[उत्तर—221 चक्र/से०]

23. चित्र 8.18 में दिखाये सिस्टम की कम्पन आवृत्ति ज्ञात कीजिए। घिरनियों के भार नगण्य मान लीजिये।

[उत्तर—$\sqrt{\dfrac{4S_1S_2}{(S_1+4S_2)\,m}}$] **(U.P. 2015)**

Hint : स्प्रिंग (1) में बल $= W$

स्प्रिंग (2) में बल $= W/2$

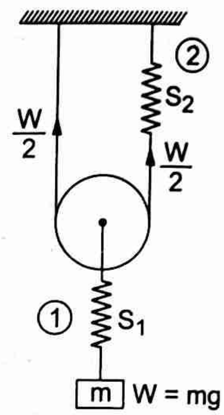
द्रव्यमान (m) का विक्षेप = स्प्रिंग (1) का विक्षेप + स्प्रिंग (2) का विक्षेप

$$\therefore \quad \delta = \frac{W}{S_1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(W/2)}{S_2} = \text{mg}\left[\frac{1}{S_1} + \frac{1}{4S_2}\right]$$

$$= \text{mg}\left[\frac{4S_2 + S_1}{4S_1S_2}\right]$$

$$\therefore \quad \text{कम्पन आवृत्ति } \omega_n = \sqrt{g/\delta} = \sqrt{\frac{g}{mg\left[\dfrac{4S_2+S_1}{4S_1S_2}\right]}}$$

$$= \sqrt{\frac{4S_1S_2}{(S_1+4S_2)\,m}} \quad \text{उत्तर}$$



चित्र 8.18

24. चित्र 8.19 में प्रदर्शित सिस्टम की कम्पन आवृत्ति ज्ञात कीजिए। घिरनियों के भार को नगण्य मानिये।

[उत्तर—$\sqrt{\dfrac{S_1S_2}{4(S_1+S_1)\,m}}$]

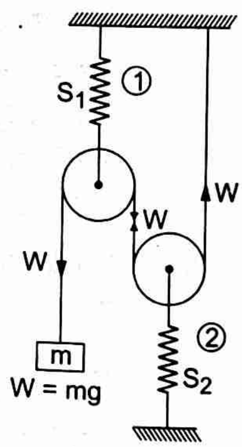
Hint : प्रत्येक स्प्रिंग में बल $= 2W$

द्रव्यमान (m) का विक्षेप $\delta = 2$ [स्प्रिंग (1) का विक्षेप + स्प्रिंग (2) का विक्षेप]

$$= 2\left[\frac{2W}{S_1} + \frac{2W}{S_2}\right] = 4\,\text{mg}\left[\frac{S_1+S_2}{S_1S_2}\right]$$

$$\therefore \quad \text{कम्पन आवृत्ति } \omega_n = \sqrt{g/\delta}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{4mg\left(\dfrac{S_1+S_2}{S_1S_2}\right)}} = \sqrt{\frac{S_1S_2}{4m(S_1+S_2)}} \quad \text{उत्तर}$$



चित्र 8.19

AKC TECHNICAL CLASSES

मॉडल पेपर

नोट—सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। दिये गये प्रश्नों में से प्रत्येक प्रश्न के किन्हीं दो भागों को हल करें।

1. (अ) स्लाइडर क्रेंक यंत्रावाली मं त्वरण ज्ञान करने हेतु आरेख खींचने की विधि का वर्णन कीजिये।

(ब) मशीनों में फ्लाईव्हील विश्लेषण को अभिव्यक्त कीजिये। तथा समझाइये।

(स) यंत्रविन्यास के संश्लेषण को अभिव्यक्त कीजिये तथा स्पष्ट कीजिये। उसके प्रयोगों का उल्लेख कीजिये।

[2×5=10]

2. (अ) (i) गवर्नर का क्या कार्य है? गुरूत्वाकर्षण नियंत्रित गवर्नर की कार्यप्रणाली समझाइये। [5]

(ii) स्थिर तथा गतिशील बल विश्लेषण से आप क्या समझते हैं? उचित उदाहरण सहित समझाइये। [5]

या

(ब) हार्टनेल गवर्नर के प्रत्येक गोला का द्रव्यमान 1.4 कि.ग्रा. है। बेल-क्रेंक लिवर के गोलों के भुजाओं की लम्बाई 100 मि.मी. है। जबकि स्लीव के ओर की भुजा की लम्बाई 50 मि.मी. है। घूर्णन अक्ष से बेल क्रेंक लिवर के आलम्ब की दूरी 80 मि.मी. है। गोलों के घूर्णन की न्यूनतम तथा अधिकतम अर्धव्यास क्रमशः 75 मि.मी. तथा 112.5 मि.मी. हैं अधिकतम साम्य गति, न्यूनतमक साम्य गति से जो 300 rpm है, से 6% अधिक है तो ज्ञात कीजिये।

(i) कमानी का कड़ापन तथा

(ii) जब गोले का घूर्णन परिवहन त्रिज्या 90 मि.मी. हो तब, साम्य गति।

3. (अ) (i) एक घूर्णी द्रव्यमान को संतुलित करने की क्या आवश्यकता है? संदर्भ समतल से आप क्या समझते हैं? समझाइये।

(ii) स्थैतिक तथा गतिक संतुलन हेतु आवश्यकता शर्तों का उल्लेख कीजिये।

(ब) एक ईषा पर आबद्ध ार द्रव्यमान एक समतल पर ω रेडियन/से. के घूर्णन गति पर है। सिर्फ एक द्रव्यमान द्वारा इन द्रव्यमानों को संतुलित करने हेतु वैश्लेषिक तथा रेखाचित्रीय विधियों को समझाइये।

(स) बेलन अनुगामी सहित एक स्पर्श कैम को रेखाचित्र बनाइये तथा उसके विभिन्न भागों को नामांकित कीजिये।

[2×5=10]

4. (अ) एक मशीन में कैम अनुगामी के लिये चित्रमय तथा विश्लेषणात्मक पद्धतियों के बीच विभेद कीजिये। किसी एक प्रकार के कैम अनुगामी हेतु विश्लेषणात्मक पद्धति की व्याख्या कीजिये।

(ब) विभिन्न प्रकार के गियरों को सूचीबद्ध कीजिये। उलनमें से किसी एक का स्वच्छ आरेख बनाइये तथा विभिन्न भागों को नामांकित कीजिये।

(स) गियर माला में निष्कार्य गियर के क्या कार्य हैं? साधारण गियर माना की अपेक्षा संयुक्त गियर माना के लाभों का उल्लेख कीजिये।

[2×5=10]

AKC TECHNICAL CLASSES

5. (अ) कंपन किन कारणों से होता है? कंपन के कौन-कौन से दुष्प्रभाव हैं?

(ब) सक्रिय ध्वनि तथा कंपन नियंत्रण पर विवरण दीजिये।

(स) कंपन के संदर्भ में निम्नांकित को समझाइये।

(i) कंपन की स्वतंत्र एवं मजबूर प्रतिक्रया।

(ii) निरंतर प्रणाली का कंपन।

[2×5=10]

AKC TECHNICAL CLASSES