Study PowerPoint

सार्थक

प्राविधिक शिक्षा परिषद् उ० प्र० द्वारा
स्वीकृत नवीनतम् पाठ्यक्रमानुसार

ठोस यान्त्रिकी

Mechanics of Solids (In S.I. Unit)

प्रयोगात्मक भाग सहित

C.M. Verma

Jai Prakash Nath Publications
Meerut

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

SYLLABUS

ठोस यांत्रिकी

(MECHANICS OF SLIDS)

w.e.f. July 2019

Rational :

Diploma holders in this course are required to analyze reasons for failure of different components and select the required material for different applications. For this purpose, it is essential to teach them concepts, principles, applications and practices covering stress, strain, bending moment, shearing force, shafts and columns. It is expected that efforts will be made to provide appropriate learning experiences in the use of basic principles in the solution of applied problems to develop the required competencies.

DETAILED CONTENTS

1. Stresses and Strains **(10 Periods)**

1.1. Basic assumptions; Concept of load, stress and strain

1.2. Tensile compressive and shear stresses and strains

1.3 Concept of Elasticity, Elastic limit and limit of proportionality.

- 1.3.1. Nominal and true stress-strain diagrams.
- 1.3.2 Hook's Law
- 1.3.3. Young Modulus of elasticity
- 1.3.4. Nominal stress
- 1.3.5. Yield point, plastic stage
- 1.3.6. Ultimate strength and breaking stress
- 1.3.7. Percentage elongation
- 1.3.8. Proof stress and working stress
- 1.3.9. Factor of safety
- 1.3.10 Poisson's Ratio
- 1.3.11 Shear modulus
- 1.3.12 Deflection and stiffness

1.4. Concepts of fatigue, creep and stress concentration

1.5. Thermal stresses

1.6. Principal stress, principal plane under direct and shear stress, graphical determination by Mohr's method.

(04 periods)

2. Resilience

2.1 Resilience, proof resilience and modulus of resilience

2.2 Strain energy due to direct stresses

2.3 Stresses due to gradual, sudden and falling load.

(05 Periods)

3. Moment of Inertia

3.1. Concept of moment of inertia and second moment of area

3.2. Radius of gyration

3.3. Theorem of perpendicular axis and parallel axis (without derivation)

Chaurasia

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

3.4. Second moment of area of common geometrical sections : Rectangle, Triangle, Circle (without derivation); Second moment of area for L, T and I section.

3.5. Section modulus

(06 Periods)

4. **Bending Stresses**
   4.1. Concept of Bending stresses
   4.2. Theory of simple bending
   4.3. Use of the equation $\sigma/y = M/I = E/R$
   4.4. Concept of moment of resistance
   4.5. Bending stress diagram
   4.6. Calculation of maximum bending stress in beams of rectangular, circular, and T section.
   4.7. Permissible bending stress Section modulus for rectangular, circular, and symmetrical I section.

(04 Periods)

5. **Torsion**
   5.1. Concept of torsion- difference between torque and torsion.
   5.2. Use of torque equation for circular shaft
   5.3. Comparison between solid and hollow shaft with regard to their strength and weight.
   5.4. Power transmitted by shaft
   5.5. Concept of mean and maximum torque

(10 Periods)

6. **Shear Force and Bending Moment**
   6.1. Concept of beam and form of loading
   6.2. Concept of end supports-Roller, hinged and fixed
   6.3. Concept of bending moment and shearing force
   6.4. S.F. and B.M. Diagram for cantilever and simply supported beams with and without overhang subjected to concentrated load and U.D.L.

(05 Periods)

7. **Columns**
   7.1. Concept of column, modes of failure
   7.2. Types of columns
   7.3. Buckling load, crushing load
   7.4. Slenderness ratio
   7.5. Factors effecting strength of a column
   7.6. End restraints
   7.7. Effective length
   7.8. Strength of column by Euler Formula without derivation
   7.9. Rankine Gourdan formula (without derivation)

8. **Thin Cylinder and Spherical Shells**

(04 Periods)

   8.1. Introduction to longitudinal stresses, circumferential or hoop stresses and radial stresses
   8.2. Longitudinal and circumferential stresses in thin cylinder
   8.3. Longitudinal and circumferential stresses in thin Spherical shells

9. **Slope and Deflections of Beams**

(08 Periods)

   9.1. Definition of slope and deflection, sign convention. Circular bending. Calculation of maximum slope and deflection for the following standard cases by double integration or moment area method.
      (a) Cantilever having point load at the free end
      (b) Cantilever having paint load at any point of the span
      (c) Cantilever with uniformly distributed load over the entire span

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

(d) Cantilever having U.D.L. over part of the span from free end
(e) Cantilever having U.D.L. over a part of span from fixed end
(f) Simply supported beam with point load at centre of the span.
(g) Simply supported beam with U.D. L. over entire span.

Note : All examples will be for constant moment of inertia without derivation of formula.

LIST OF PRACTICALS

1. To find the sheer force at a given section of simply supported beam for different loading.
2. To find the value of 'E' for a steel beam by method of deflection for different loads.
3. To determine the Max-Fiber stress in X-section of simply supported beam with concentrated loads and to find the neutral axis of the section.
4. To determine the ultimate tensile strength, its modulus of Elasticity, stress at yield point. Elongation and contraction in X-sectinal area of the specimen by U.T.M. through necking phenomenon.
5. To determine the ultimate crushing strength of materials like steel and copper and compare their strength.
6. To determine Rockwell Hardness No. and Brinell Hardness No. of a sample.
7. To estimate the Shock Resistance of different qualities of materials by Izods test and Charpy test.
8. To determine the bending moment at a given section of a simply supported beam for different loading.
9. Top determine the various parameters of helical coil spring.
10. To determine the angle of twist for a given torque by torsion apparatus and to plot a graph between torque and angle of twist.

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

विषय-सूची

क्रम सं.	अध्याय	पृष्ठ संख्या
1.	प्रतिबल तथा विकृति (Stresses and Strains)	1-51(xxxxxxvi)
2.	जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia)	 52-82
3.	कर्तन बल एवं नमन आघूर्ण (Shear Force and Bending Moment)	 83-168
4.	सरल नमन का सिद्धान्त (Bending Stresses)	 169-214
5.	विकृति ऊर्जा (Resilience)	 215-247
6.	मरोड़ (Torsion)	 248-272
7.	ढलान एवं विक्षेप या विस्थापन (Slope and Deflection)	 273-316
8.	कॉलम (Column)	 317-342
9.	पतले बेलनाकार एवं गोलीय खोल (Thin Cylindrical and Spherical Shell)	 343-360
10.	प्रयोगात्मक भाग (Experiments)	 361-398
●	सभी प्रयोगों से सम्बन्धित मौखिक प्रश्न	 399-401
●	मॉडल टैस्ट पेपर	 402-405
●	परीक्षा प्रश्न-पत्र	 406

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

1 प्रतिबल तथा विकृति (STRESSES AND STRAINS)

§ 1.1.1 परिचय (Introduction)

हम जानते हैं कि इंजीनियरिंग दृष्टिकोण के अनुसार कोई भी पिण्ड पूर्ण दृढ़ (Perfectly Rigid) नहीं है क्योंकि पिण्ड पर बाह्य बल लगाने से उसके रूप एवं आकार में कुछ-न-कुछ परिवर्तन (या विरूपण-Deformation) अवश्य होता है और ऐसा, पदार्थ में प्रत्यास्थता (Elasticity) का गुण होने के कारण होता है।

किसी भी मशीन या ढाँचे (Structure) का निर्माण तथा उसके प्रयोग करने से पूर्व सुरक्षा की दृष्टि से यह जानना परम आवश्यक है कि उस वस्तु पर लगने वाले बल या प्रतिबल कितने मान के तथा किस प्रकृति (Nature) के होंगे ताकि उसके अनुकूल सामर्थ्य की वस्तु का निर्माण किया जा सके और वह अपने कार्य को सफलतापूर्वक पूर्ण कर सके।

§ 1.1.2 बल (Force)

"बल वह बाह्य कारण है, जो पिण्ड की विरामावस्था या एक समान गति की अवस्था को बदल देता है या बदलने का प्रयास करता है।" यह एक सदिश राशि है। हम यह भी कह सकते हैं कि "बिना बल के कोई भी भौतिक क्रिया सम्भव ही नहीं है। अत: **"बल वह साधन है, जिसके द्वारा कार्य (Work) किया जाता है।"**

मीटरी प्रणाली (M.K.S.) में बल की इकाई किलोग्राम kg_f है, परन्तु प्राय: इससे किग्रा० (kg) ही लिखा जाता है। इसे गुरुत्वीय इकाई (Gravitational Unit) कहते हैं।

अन्तर्राष्ट्रीय प्रणाली (S.I. Unit) में बल की इकाई न्यूटन (Newton) होती है जिसे N द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

$$\mathbf{1\ kg_f = 9{\cdot}81\ N = 10\ N} \text{ लगभग}$$

कुछ मुख्य इकाइयाँ (Units)

$$1\,kN = 1000\,N = 100\,kg$$

$$1\,Ton = 1000\,kg = 10^4\,N = 10\,kN$$

$$1\,MN \text{ (मेगा न्यूटन)} = 10^6\,N = 10^3\,kN = 10^5\,kg_f$$

$$1\,KPa \text{ (किलो पास्कल)} = 1\,kN/m^2 = 10^3\,N/m^2 = 10^3\,Pa$$

$$1\,MPa = 1\,MN/m^2 = 1\,N/mm^2 = 10^6\,Pa = 10^6\,N/m^2 \qquad (\because 1\,Pa = 1\,N/m^2)$$

$$1\,GPa \text{ (गीगा पास्कल)} = 1\,GN/m^2 = 10^3\,N/mm^2 = 10^9\,Pa = 10^9\,N/m^2$$

इस अध्याय में हम मशीन या ढाँचे (Structure) के पुर्जों या अवयवों (Parts or Elements) पर बलों के प्रभाव के बारे में जानकारी करेंगे। **"अवयवों पर लगने वाले विभिन्न प्रकार के बलों को ही उन पर बोझ (Load) कहते हैं।"** जैसे—कॉलम या दीवारों पर धरन (Beam) या ट्रस का भार तथा पुल पर चलती गाड़ी या बस का चल भार आदि।

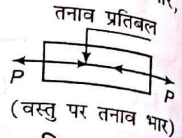
§ 1.2. भार या बोझ के प्रकार (Types of Load)

(1) अचल तथा चल भार (Dead & Live Loads)—जो भार या बोझ, सदैव अपना मान बिना बदले किसी निश्चित स्थान पर क्रिया करते हैं, अचल भार या बोझ (Dead Load) कहलाते हैं। प्राय: अचल भार ऊर्ध्वाधर दिशा में कार्य करते हैं; जैसे—किसी एक स्थान पर रखी मशीन का भार, ट्रस का भार, टेकों पर टिकी हुई धरन (Beam) का भार, कॉलम पर छत का भार, खम्बे पर तार या केबिल के भार बल आदि।

Scanned with CamScanner

यदि समय के साथ-साथ भूमि या धरन पर भार का क्रिया-बिन्दु भी बदलता है, तो उसे चल भार कहते हैं; जैसे—पुल पर चलती हुई रेलगाड़ी या बस-ट्रक के पहियों द्वारा भूमि पर लगा भार, क्रेन-मार्गों पर क्रेन का भार आदि। अत: चल भार, अस्थायी रूप से क्रिया करते हैं। इनका मान तथा क्रिया-बिन्दु भी स्थिर नहीं रहते।

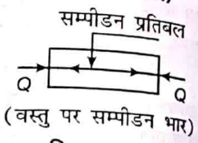
(2) अक्षीय तथा अनुप्रस्थ भार (Axial & Transverse Loads)—जो भार किसी अवयव या धरन की लम्बाई की अक्ष पर तथा अक्ष के समान्तर दिशा में लगे होते हैं, **अक्षीय भार** कहलाते हैं तथा जो भार धरन की अक्ष के लम्ब रूप अर्थात् अनुप्रस्थ काट के ही तल में लगे होते हैं, **अनुप्रस्थ भार** कहलाते हैं। अक्षीय भारों को सीधे भार तथा अनुप्रस्थ भारों को **कर्तन भार** भी कहा जाता है।



चित्र 1.1 (अ)

(3) तनाव तथा सम्पीडन भार (Tensile & Compressive Loads)—किसी वस्तु या अवयव को खींचने वाले बल को तनाव भार (Tensile Load) कहते हैं। जैसे चित्र 1.1 (अ) में बल P, वस्तु पर तनाव भार के रूप में कार्य कर रहा है।

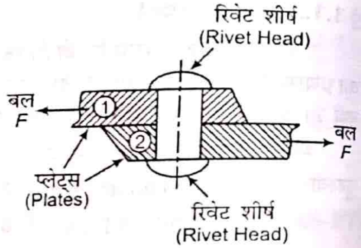
किसी वस्तु या अवयव को दोनों ओर से दबाने वाले बल को सम्पीडन भार (Compressive Load) कहते हैं। जैसे चित्र 1.1 (ब) में बल Q, वस्तु पर सम्पीडन भार के रूप में कार्य कर रहा है।



चित्र 1.1 (ब)

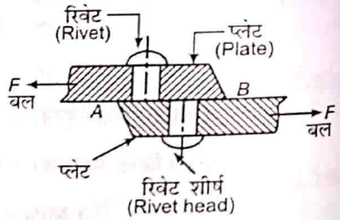
तनाव तथा सम्पीडन के भार यदि छड़ की अक्ष के समान्तर कार्य करते हैं तो इन्हें **अक्षीय भार** या **सीधे भार** (Direct Load) भी कहते हैं।

(4) कर्तन भार या कर्तन बल (Shear Load or Shear इदेम)—यदि किसी वस्तु पर बल या भार इस प्रकार कार्य करें कि उससे पदार्थ में कर्तन (Shearing) होता हो या कर्तन होने की सम्भावना होती हो तो लगे बलों को कर्तन भार का कर्तन बल कहते हैं। इसे निम्न उदाहरण से समझा जा सकता है—



चित्र 1.2 (अ)

चित्र 1.2 (अ) में एक रिवेट जोड़ (Riveted Joint) दिखाया गया है। इसमें दोनों प्लेट पर खिंचाव बल (तनाव बल) F विपरीत दिशाओं में लग रहे हैं। यदि ये बल रिवेट को तोड़ने के लिये पर्याप्त हैं तो रिवेट चित्र 1.2 (ब) के अनुसार टूट जायेगी। इस अवस्था में ऊपरी प्लेट में रिवेट का आधा भाग बायीं ओर तथा नीचे वाली प्लेट में रिवेट का आधा भाग दायीं ओर खिसक जाता है, अर्थात् दोनों प्लेटों के बीच रिवेट, समतल सतह AB पर काटकर फिसल जाता है। इस क्रिया को रिवेट का **कर्तन** (Shear) कहते हैं। यह क्रिया होने के कारण ही लगाये गये बल F को **कर्तन बल** (Shear Force) या **कर्तन भार** (Shear Load) कहते हैं।



चित्र 1.2 (ब)

§ 1.3. बाह्य बलों या भारों के प्रभाव में पदार्थों का व्यवहार (Behaviour of Materials subjected to External Loads)

(a) प्रतिबल तथा विकृति की संकल्पना (Concept of Stress & Strain)—जब किसी वस्तु पर बाहर से बल क्रिया करते हैं तो उसके आकार में कुछ परिवर्तन या विरूपण (Deformation) होता है। इस विरूपण का विरोध करने के लिये वस्तु के पदार्थ में प्रतिरोधी बल उपजते हैं। इन प्रतिरोधी बलों का मान विरूपण के साथ-साथ बढ़ता जाता है और अन्त में पिण्ड के स्थैतिक सन्तुलन में आ जाने पर विरूपण होना रुक जाता है।

अत: **वस्तु के आकार में परिवर्तन या विरूपण को विकृति** (Strain) **तथा वस्तु के पदार्थ में उपजे प्रतिरोध को प्रतिबल** (Stress) **कहते हैं।**

जब कोई वस्तु या पिण्ड बाह्य बलों का पूर्ण प्रतिरोध न कर सके तब उसका विरूपण अधिक होता है और अन्त में वह पिण्ड या वस्तु टूटकर असफल (Fail) हो जाती है।

(b) प्रतिबल-तीव्रता (Intensity of Stress)—किसी वस्तु पर बाहर से बल लगाने पर, साम्यावस्था में, "**वस्तु में उसकी अनुप्रस्थ काट के इकाई क्षेत्रफल पर कार्य करने वाले आन्तरिक प्रतिरोधी बल (Resisting Force) को प्रतिबल-तीव्रता या प्रतिबल (Stress) कहते हैं।** इसे p या f या σ से प्रदर्शित करते हैं।" यदि वस्तु पर लगाया गया बाह्य बल F तथा काट का क्षेत्रफल A हो, तो

$\therefore$ प्रतिबल-तीव्रता या प्रतिबल,
$$\sigma \text{ या } p = \frac{\text{बल}(F)}{\text{क्षेत्रफल}(A)} \quad \text{(सूत्र)}$$

प्रतिबल की इकाई (Unit of Stress)—प्रतिबल की निम्न इकाइयाँ प्रयोग की जाती हैं—

किग्राबल/सेमी^{2} (kg$_f$/cm^2), न्यूटन/मिमी^{2} (N/mm^2)

कभी-कभी प्रतिबल की निम्न इकाइयाँ भी प्रयोग की जाती हैं—

किलोन्यूटन/मिमी^{2} (kN/mm^2) या मेगा पास्कल (MPa) या गेगा पास्कल (GPa) आदि।

(c) प्रत्यास्थ (Elastic), प्लास्टिक (Plastic) तथा दृढ़ (Rigid) पिण्ड—किसी वस्तु या पिण्ड पर बाह्य बलों के कारण, उत्पन्न होने वाले प्रतिरोधी बलों के आधार पर पिण्डों को निम्न तीन वर्गों में वर्गीकृत किया जा सकता है—

(i) प्रत्यास्थ पिण्ड (Elastic Body),
(ii) प्लास्टिक पिण्ड (Plastic Body),
(iii) दृढ़ पिण्ड (Rigid Body)।

(1) प्रत्यास्थ पिण्ड (Elastic Body)—जब किसी वस्तु पर कोई बाह्य बल लगाया जाता है तो उसके रूप व आकार (Shape and Size) अथवा दोनों में परिवर्तन (विरूपण) हो जाता है। यदि बाह्य बल को हटा लेने पर वस्तु पुन: अपना प्रारम्भिक मूल रूप व आकार धारण कर लेती है तो पदार्थ के इस गुण को **प्रत्यास्थता** (Elasticity) कहते हैं। जिस वस्तु या पिण्ड में यह गुण पाया जाता है उसे प्रत्यास्थ पिण्ड (Elastic Body) कहते हैं।

(2) प्लास्टिक पिण्ड (Plastic Body)—जब किसी वस्तु पर बाह्य बल लगाने से उसके आकार में स्थायी परिवर्तन (विरूपण) आ जाता है और यदि बल हटा लेने पर वह वस्तु या पिण्ड अपने प्रारम्भिक रूप व आकार में वापस न आ सके अर्थात् स्थायी रूप से विरूपित (Permanently Deformed) हो जाती है, तो उसे प्लास्टिक पिण्ड या पूर्णत: **सुघट्य पिण्ड** (Perfectly Plastic Body) कहते हैं। पदार्थ के इस गुण को प्लास्टिकता या सुघट्यता का गुण कहते हैं।

(3) दृढ़ पिण्ड (Rigid Body)—जब पिण्ड पर बल लगाने से उसके आकार में नगण्य परिवर्तन होता है और शीघ्र ही प्रतिरोधी बल उपजते हैं तो उसे दृढ़ पिण्ड कहते हैं।

§ 1.4. प्रतिबलों के प्रकार (Types of Stresses)

बाह्य बलों अथवा भारों के कारण उत्पन्न प्रतिबल प्राय: तीन प्रकार के होते हैं—

(1) तनाव तथा सम्पीडन प्रतिबल (Tensile and Compressive Stresses),
(2) कर्तन या अपरूपण प्रतिबल (Shear Stresses),
(3) सीधे तथा नमन प्रतिबल (Direct and Bending Stresses)।

(1) तनाव तथा सम्पीडन प्रतिबल

(अ) तनाव प्रतिबल (Tensile Stress)—जब वस्तु पर भार या बल खिंचाव (या तनाव) में लगाया जाता है तो वस्तु में उत्पन्न हुए प्रतिबल को तनाव प्रतिबल कहते हैं [देखें चित्र 1.1 (अ)]।

(ब) सम्पीडन प्रतिबल (Compressive Stress)—जब वस्तु पर भार या बल सम्पीडन में लगाया जाता है अर्थात् बलों द्वारा वस्तु को दबाया जाता है, तब वस्तु में उत्पन्न प्रतिबल को सम्पीडन प्रतिबल कहते हैं [देखें चित्र 1.1 (ब)]।

(2) कर्तन प्रतिबल या अपरूपण प्रतिबल (Shear Stress)—यदि किसी अवयव पर कर्तन भार या कर्तन बल (Shear Force) कार्य करता है तो उसमें उत्पन्न हुए प्रतिबल को कर्तन प्रतिबल या अपरूपण प्रतिबल (Shear Stress) कहते हैं। इसे स्पर्शीय प्रतिबल के नाम से भी पुकारते हैं तथा इसे τ (टो) या q या f_s या Q से प्रदर्शित करते हैं।

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

∴ कर्तन प्रतिबल, τ या $q = \dfrac{\text{कर्तन बल } (F)}{\text{कर्तन सतह का क्षेत्रफल } (A)}$

सभी प्रतिबलों की इकाई अधिकतर kg_f/cm^2 तथा N/mm^2 अथवा kN/mm^2 प्रयोग की जाती है।

(3) सीधे तथा नमन प्रतिबल (Direct & Bending Stress)—चूँकि अक्षीय तनाव या अक्षीय सम्पीडन भार, सीधे भार (Direct Load) कहलाते हैं इसलिये इनके कारण उत्पन्न हुए प्रतिबलों को सीधे प्रतिबल (Direct Stress) कहते हैं। ये भार या बल लगाने वाले तल (Plane) के लम्बवत् कार्य करते हैं। इन्हें f_d या σ_d से दर्शाते हैं।

जब किसी धरन (Beam) पर बाहर से अनुप्रस्थ भार (Transverse Load) अर्थात् अक्ष के लम्बवत् भार कार्य करता है तो धरन का झुकाव या नमन (Bending) होता है। इस दशा में नमन के रूप में हुए विरूपण के विरोध में पदार्थ के अन्दर उत्पन्न हुये आन्तरिक प्रतिरोधी बल (Resisting Force) को नमन प्रतिबल कहते हैं। इसे f_b से दर्शाते हैं।

जब किसी कॉलम या अवयव पर उत्केन्द्रित भार (Eccentric Load) क्रिया करते हैं तो उसका झुकाव होता है तो उसमें सीधे तथा नमन प्रतिबल दोनों एक साथ उत्पन्न होते हैं। अत: इन दोनों प्रतिबलों से पदार्थ में अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल भी ज्ञात किये जा सकते हैं; जैसे—

$$\begin{bmatrix} f_{max} = f_d + f_b \\ f_{min} = f_d - f_b \end{bmatrix} \quad \text{अथवा} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b \\ \sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b \end{bmatrix}$$

§ 1.5. विकृति (Strain)

यदि बाह्य बलों के प्रभाव में वस्तु के रूप व आकार (Shape and Size) में परिवर्तन (विरूपण) होता है, तो इस परिवर्तन की माप को ही विकृति कहते हैं। इसे निम्न प्रकार मापा जाता है—

विकृति, $$e = \frac{\text{आकार में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक आकार}}$$ (सूत्र)

क्योंकि विकृति एक ही प्रकार की दो राशियों का अनुपात होता है, अत: इसकी कोई इकाई नहीं होती।

1.5-1. विकृति के प्रकार (Types of Strain)

विकृति मुख्य रूप से निम्न चार प्रकार की होती है—

(i) अनुदैर्ध्य विकृति (Longitudinal Strain),

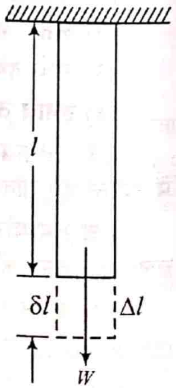
(ii) कर्तन विकृति (Shear Strain),

(iii) पार्श्व विकृति (Lateral Strain),

(iv) आयतन विकृति (Volume Strain)।

(i) अनुदैर्ध्य विकृति या लम्बाई में विकृति (Longitudinal Strain)—किसी छड़ या वस्तु पर अक्षीय भार या बल (Axial Load) लगाने से उसकी लम्बाई में हुए परिवर्तन (Δl) तथा प्रारम्भिक लम्बाई (l) के अनुपात को अनुदैर्ध्य विकृति कहते हैं।

∴ अनुदैर्ध्य विकृति, $$e_x = \frac{\Delta l}{l}$$



चित्र 1.3

चित्र 1.3 के अनुसार माना छड़ की लम्बाई l है और इस पर तनाव बल या भार W लगाने से लम्बाई बढ़कर $(l+\delta l)$ हो जाती है। इस प्रकार लम्बाई में तनाव विकृति,

$$e_t = \frac{\delta l}{l} \quad \text{या} \quad \frac{\Delta l}{l}$$

इसके विपरीत, यदि छड़ या वस्तु पर सम्पीडन बल लगाने से लम्बाई घटकर $(l-\delta l)$ हो जाती है।

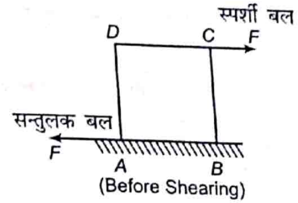
तब लम्बाई में परिवर्तत, $$\Delta l = l-(l-\delta l) = \delta l$$

∴ लम्बाई में संपीडन विकृति, $$e_c = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{या} \quad \frac{\delta l}{l}$$

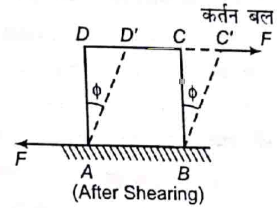
हम पढ़ चुके हैं कि तनाव या सम्पीडन के बलों को सीधे बल कहते हैं। इसीलिये इनके कारण हुई विकृति को **सीधी विकृति** (Direct Strain) कहते हैं।

(ii) कर्तन विकृति (Shear Strain)—किसी वस्तु पर लगे हुये कर्तन बलों (Shear Forces) के कारण उत्पन्न हुई विकृति को कर्तन विकृति कहते हैं तथा इसे ϕ या e_s से प्रदर्शित करते हैं।

चित्र 1.4 (अ) में एक घन के फलक का सम्मुख दृश्य (Front View) $ABCD$ दिखाया गया है जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई l है। इसके नीचे का तल AB बद्ध (Fixed) है और ऊपरी तल CD में एक स्पर्शी बल F कार्य करता है। हम जानते हैं कि सन्तुलन के लिये बद्ध तल AB पर भी एक स्पर्शी बल F, ऊपरी तल CD में लगे हुए बल के समान्तर व विपरीत कार्य करेगा। अब चित्र 1.4 (ब) के अनुसार, निचला तल AB, बद्ध होने के कारण स्थिर रहेगा परन्तु ऊपरी तल कोण ϕ से हटकर $C'D'$ स्थिति में आ जाता है अर्थात् घन का फलक (Face) $ABC'D'$ आकार में हो जायेगा। घन पर लगा यह कर्तन बल F, घन में कर्तन प्रतिबल q तथा कर्तन विकृति ϕ उत्पन्न करता है।



चित्र 1.4 (अ)



चित्र 1.4 (ब)

∴ कर्तन विकृति $$e_s = \frac{CC'}{BC} = \frac{DD'}{AD}$$

और $$\tan\phi = \frac{CC'}{BC} = \frac{DD'}{AD}$$

∴ कर्तन विकृति, $$e_s = \tan\phi$$

प्राय: कोण ϕ का मान बहुत छोटा होता है, अत: $\tan\phi = \phi$ रेडियन

∴ कर्तन विकृति $$e_s = \phi$$

कर्तन विकृति को निम्न प्रकार भी परिभाषित किया जा सकता है :

यदि किसी वस्तु पर कर्तन बल (Shear Force) कार्य करता है तो इससे उत्पन्न कर्तन प्रतिबल q, तथा वस्तु के पदार्थ के कर्तन मापांक (Modulus of Rigidity) G, के अनुपात को कर्तन विकृति (Shear Strain) कहते हैं, इसे ϕ से प्रदर्शित करते हैं। अत:

कर्तन विकृति, $$\phi = \frac{q}{G}$$ (सूत्र)

(iii) पार्श्व विकृति (Lateral Strain)—किसी वस्तु पर लगे बल की दिशा के लम्ब-रूप माप में उत्पन्न हुयी विकृति को पार्श्व विकृति कहते हैं। यदि d व्यास की छड़ (Rod) में बल लगाने से व्यास में परिवर्तन (Δd) होता है तब पार्श्व विकृति,

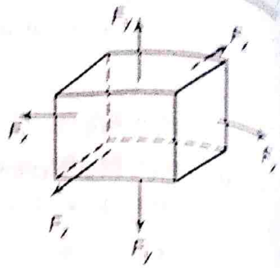
$$e_d = \frac{\Delta d}{d}$$ (सूत्र)

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

(iv) **आयतन विकृति (Volume Strain)**—किसी वस्तु पर लगे बलों के कारण उसके आयतन में हुये परिवर्तन (ΔV) तथा प्रारम्भिक आयतन (V) के अनुपात को आयतन विकृति कहते हैं।

आयतन में विकृति, $e_v = \frac{\Delta V}{V}$



चित्र 1.5

चित्र 1.5 के अनुसार, यदि किसी आयताकार ठोस वस्तु के सभी फलकों (Faces) पर बल लगाये जायें तो उसके आयतन में परिवर्तन होगा। यदि यह परिवर्तन δV या ΔV है तथा प्रारम्भिक आयतन V है, तब

आयतन विकृति,

$$e_v = \frac{\text{आयतन में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक आयतन}} = \frac{\delta V}{V} \quad \text{या} \quad \frac{\Delta V}{V}$$ (सूत्र)

§ 1.6. प्रत्यास्थता की सीमा (Elastic Limit)

हम जानते हैं कि प्रत्यास्थता, पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण, वस्तु को विकृत (Deform) करने वाले बाह्य बलों को हटा लेने पर वस्तु अपने पहले रूप व आकार (Shape and Size) को पुन: धारण कर लेती है। परन्तु वस्तु पर बल या प्रतिबल धीरे-धीरे बढ़ाते जाने पर एक अवस्था ऐसी भी आती है जबकि वस्तु प्रत्यास्थ नहीं रहती, अर्थात् विरूपक बल को हटा लेने पर भी वस्तु अपने पूर्व आकार व अवस्था को पुन: धारण नहीं कर पाती। अत: हम कह सकते हैं—

वह अधिकतम बल या प्रतिबल तीव्रता, जिस पर कोई वस्तु पूर्ण प्रत्यास्थ रहती है अर्थात् बल को हटा लेने पर पुन: अपने वास्तविक रूप व आकार में वापस आ जाती है, पदार्थ की प्रत्यास्थता की सीमा (Elastic Limit) कहते हैं।

प्रत्येक पदार्थ के लिये प्रत्यास्थता-सीमा (Elastic Limit) का मान भिन्न होता है। सामान्यतया प्रत्यास्थता सीमा को, **समानुपाती सीमा** (Limit of Proportionality) कहते हैं और समानुपाती सीमा से अर्थ प्रतिबल तथा विकृति में समानुपाती की सीमा से है। अत: इस सीमा के पश्चात् प्रतिबल एवं विकृति का आपस में समानुपाती सम्बन्ध भी समाप्त हो जाता है।

§ 1.7. हुक का नियम (Hooke's Law)

इस नियम के अनुसार, प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर उत्पन्न हुए प्रतिबल (Stress), उससे सम्बन्धित विकृति (Strain) के सीधे समानुपाती (Directly Proportional) होते हैं।

अर्थात् प्रतिबल (p) $\propto$ विकृति (e)

या प्रतिबल (p) = स्थिरांक $\times$ विकृति (e)

या $\frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$ = स्थिरांक (Constant) $\Rightarrow E$

या $$\boxed{E = \frac{p}{e}}$$ (सूत्र)

इस स्थिरांक को हुक स्थिरांक (Hooke's Constant) या प्रत्यास्थता गुणांक (Modulus of Elasticity) कहते हैं तथा इसे E या Y से प्रदर्शित करते हैं।

किसी पदार्थ के लिये प्रत्यास्थता गुणांक का मान प्रतिबल और उससे सम्बन्धित विकृति के प्रकार पर निर्भर करता है। अत: इस आधार पर विभिन्न मापांक या हुक स्थिरांक निम्न प्रकार के होते हैं—

(1) प्रत्यास्थता गुणांक या यंग मापांक (Modulus of Elasticity or Young's Modulus),
(2) दृढ़ता मापांक या कर्तन मापांक या अपरूपण मापांक (Modulus of Rigidity or Shear Modulus),
(3) आयतन मापांक (Bulk Modulus)।

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

(1) यंग मापांक (Young's Modulus)—प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर किसी वस्तु पर अक्षीय बल लगाने से उत्पन्न सीधे प्रतिबल (Direct Stress) तथा लम्बाई में विकृति के अनुपात को प्रत्यास्थता गुणांक या यंग मापांक कहते हैं तथा इसे 'E' से प्रदर्शित करते हैं।

∴ यंग मापांक, $$E = \frac{\text{सीधा प्रतिबल या प्रतिबल तीव्रता } (p)}{\text{लम्बाई में विकृति } (e)}$$

या $$E = \frac{p}{e}$$

विकृति (e) की कोई इकाई न होने के कारण, यंग मापांक E की इकाई वही होती है जो प्रतिबल p की होती है, अर्थात् किग्रा बल/(सेमी)^2, टन/(सेमी)^2, न्यूटन/(मिमी)^2, गेगा पास्कल (GPa), मेगा पास्कल (MPa), किलोन्यूटन/(मीटर)^2 आदि।

(2) कर्तन मापांक (Modulus of Rigidity or Shear Modulus)—प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर कर्तन प्रतिबल (Shear Stress) q और इसके द्वारा उत्पन्न कर्तन विकृति (Shear Strain) ϕ के अनुपात को कर्तन मापांक कहते हैं तथा इसे 'G' या 'C' से प्रदर्शित करते हैं।

अतः कर्तन मापांक $$G = \frac{\text{कर्तन प्रतिबल } (q)}{\text{कर्तन विकृति } (\phi)}$$

(3) आयतन मापांक (Bulk Modulus)—यदि प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर किसी अवयव पर परस्पर लम्ब दिशाओं में समान मान तथा प्रकृति के तीन बल लगे हुए हों तो इनसे उत्पन्न सीधे प्रतिबल तथा उत्पन्न आयतन विकृति (Volume Strain) के अनुपात को आयतन मापांक कहते हैं। इसे K से प्रदर्शित करते हैं।

∴ आयतन मापांक, $$K = \frac{\text{सीधा प्रतिबल (Direct Stress)}}{\text{आयतन विकृति (Volume Strain)}}$$

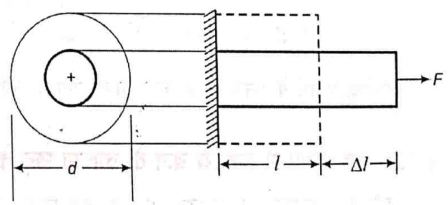
नोट—प्रतिबल की ऐसी स्थिति, पिण्ड को किसी द्रव के अन्दर डुबोकर प्राप्त की जा सकती है ताकि तीनों लम्ब दिशाओं से पिण्ड पर दाब बल समान रहे।

§ 1.8. पॉयजन अनुपात (Poisson's Ratio)

यदि किसी छड़ पर तनाव में, अक्षीय बल (Axial Force) लगाया जाये तो छड़ की लम्बाई में वृद्धि हो जाती है परन्तु साथ-ही-साथ इसके व्यास में कमी आ जाती है। यदि बल सम्पीडन में लगाया जाये तो लम्बाई में कमी तथा व्यास में वृद्धि हो जाती है। अतः बल की दिशा से लम्ब दिशा में जो विकृति होती है, उसे **पार्श्व विकृति** (Lateral Strain) कहते हैं।

हालाँकि बल की लम्बवत् दिशा में कोई अन्य बल नहीं लगता, फिर भी माप में परिवर्तन हो जाता है।

"प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर पार्श्व विकृति (Lateral Strain) तथा अनुदैर्ध्य विकृति (Longitudinal Strain) का अनुपात सदैव स्थिर रहता है। इन अनुपात को पॉयजन अनुपात (Poisson's Ratio) कहते हैं" तथा इसे $\frac{1}{m}$ या μ से प्रदर्शित करते हैं। इसका मान $\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{3}$ के बीच होता है। चित्र 1.6 में यदि किसी छड़ की लम्बाई l तथा व्यास d है और इस पर अक्षीय तनाव बल (F) लगाने से लम्बाई में वृद्धि Δl तथा व्यास में कमी Δd हो जाती है, तब



चित्र 1.6

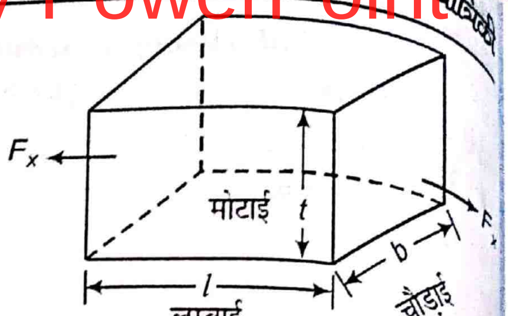
$$\text{लम्बाई में विकृति (Longitudinal Strain)} = \frac{\Delta l}{l}$$

तथा $$\text{पार्श्व विकृति (Lateral Strain)} = \frac{\Delta d}{d}$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

चित्र 1.7 (अ) में आयताकार ठोस (Cuboid) दिखाया गया है जिसकी लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई क्रमशः l, b तथा t हैं। इसकी x–अक्ष की दिशा में बल लगाने से लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई की मापों में परिवर्तन क्रमशः Δl, Δb तथा Δt होते हैं।

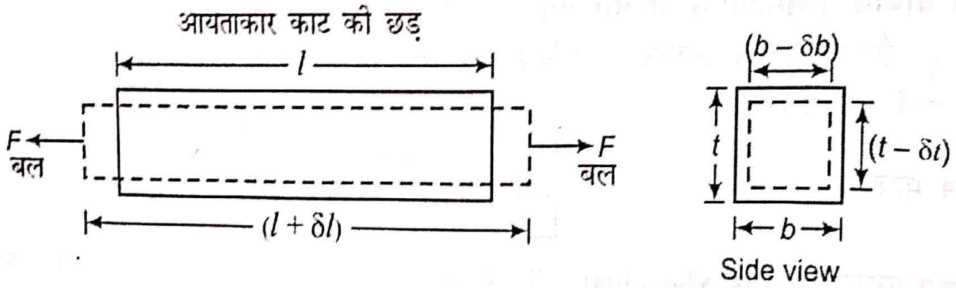


चित्र 1.7 (अ)

जहाँ Δl = (लम्बाई में वृद्धि), क्योंकि बल लम्बाई की दिशा में तनाव का है।

Δb = चौड़ाई में कमी। (मापों में परिवर्तन Δb तथा Δt बल की दिशा के लम्ब दिशा में हैं।)।

Δt = ऊँचाई या मोटाई में कमी होगी।



चित्र 1.7 (ब)

$\therefore$ लम्बाई में विकृति $= \dfrac{\Delta l}{l}$

पार्श्व विकृति $= \dfrac{\Delta b}{b} = \dfrac{\Delta t}{t}$

चूँकि चौड़ाई तथा मोटाई की मापें, लम्बाई की माप के लम्ब दिशा में हैं इसीलिये इन मापों में विकृति, पार्श्व विकृति कहलायेगी।

पार्श्व विकृति तथा अनुदैर्ध्य विकृति में सम्बन्ध (Relation between Lateral Strain & Longitudinal Strain)

पार्श्व विकृति सदैव अनुदैर्ध्य विकृति के समानुपाती होती है।

अर्थात्

पार्श्व विकृति $\propto$ अनुदैर्ध्य विकृति

या

पार्श्व आकृति $= \dfrac{1}{m} \times$ अनुदैर्ध्य विकृति

या

$$\boxed{\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{m} \times e}$$

(सूत्र)

यहाँ $\frac{1}{m}$ को पॉइजन अनुपात कहते हैं तथा m को **पॉइजन स्थिरांक** कहते हैं।

प्रत्येक पदार्थ के लिये इसका मान भिन्न होता है। अधिकतर धातुओं के लिये $\frac{1}{m}$ का मान $\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{3}$ के बीच होता है।

§ 1.9. एक दिशा में अक्षीय बल के कारण छड़ के आयतन में परिवर्तन तथा आयतन विकृति ज्ञात करना

पॉयजन अनुपात की सहायता से यहाँ हम किसी छड़ की मापों में परिवर्तन के साथ-साथ आयतन में परिवर्तन तथा आयतन-विकृति (Volume Strain) ज्ञात करेंगे–

(1) आयताकार छड़–यदि एक छड़ की लम्बाई, चौड़ाई तथा मोटाई क्रमशः l, b तथा t है। (देखिये चित्र 1.7) छड़ पर लम्बाई की अक्ष में एक तनाव बल F लगा है।

छड़ के पदार्थ में पॉइजन अनुपात $\frac{1}{m}$ है।

$\because$ छड़ की लम्बाई में विकृति $e = \dfrac{\Delta l}{l}$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

तथा छड़ में पार्श्व विकृति $= \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta t}{t}$

$\therefore$ पार्श्व विकृति $= \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{m} \times$ अनुदैर्ध्य विकृति

$$= \frac{1}{m} \times e$$

$\because$ छड़ का प्रारम्भिक आयतन $V = l \times b \times t$ है।

आंशिक अवकलन करने पर,

$$\delta V = \delta l \times b \times t + \delta b \times l \times t + \delta t \times l \times b$$

V से दोनों ओर भाग करने पर, (जबकि $V = l \times b \times t$ है)

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta l}{l} + \frac{\delta b}{b} + \frac{\delta t}{t} = e_x + e_z + e_y \quad ...(i)$$

अर्थात् **"आयतन में विकृति (Volume Strain) तीनों दिशाओं में विकृतियों के बीजगणितीय योग के बराबर होती है।"**

परन्तु वास्तव में, $\frac{\delta b}{b} = \frac{\delta t}{t} = -\frac{e}{m}$

$\because$ पार्श्व विकृति, अनुदैर्ध्य विकृति (e) के सदैव विपरीत होती है अत: यदि e धनात्मक (+ve) है तो पार्श्व विकृति $\frac{e}{m}$ ऋणात्मक (–ve) होगी।

समीकरण (i) में $\frac{\delta b}{b}$ तथा $\frac{\delta t}{t}$ का मान रखने पर,

$$\frac{\delta V}{V} = e - \frac{e}{m} - \frac{e}{m} = e\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

$\therefore$ आयतन विकृति $\boxed{\frac{\delta V}{V} = e\left(1 - \frac{2}{m}\right)}$ (सूत्र) ...(ii)

(2) वृत्ताकार काट वाली छड़—माना वृत्ताकार छड़ की लम्बाई l तथा व्यास d है, तो छड़ का प्रारम्भिक आयतन,

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \times 1$$

आंशिक अवकलन करने पर,

$$\delta V = \frac{\pi}{4} [\delta l \cdot d^2 + 2d \cdot \delta d \cdot l]$$

अब V से दोनों ओर भाग करने पर,

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta l}{l} + 2\frac{\delta d}{d} \quad \left(\text{जबकि } V = \frac{\pi d^2}{4} \times l \text{ है}\right)$$

परन्तु, पार्श्व विकृति (Lateral Strain) $= \frac{\delta d}{d} = -\frac{e}{m}$

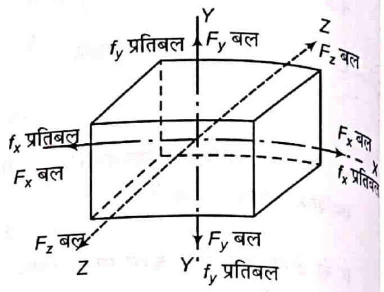
$\therefore$ $\boxed{\frac{\delta V}{V} = e - 2\frac{e}{m} = e\left(1 - \frac{2}{m}\right)}$ (सूत्र) ...(iii)

स्पष्ट है कि दोनों प्रकार की छड़ों में आयतन विकृति का मान समान है।

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

§ 1.10. सभी दिशाओं में बलों के कारण आयतन विकृति



चित्र 1.8

चित्र 1.8 के अनुसार माना कि धातु के किसी आयताकार ठोस पर $X-X, Y-Y$ तथा $Z-Z$ दिशाओं में तनाव बल क्रमश: F_x, F_y तथा F_z लग रहे हैं। इनके कारण आयताकार ठोस में सभी दिशाओं में सीधे तनाव-प्रतिबल (Direct Tensile Stress) उत्पन्न होंगे।

माना कि बल F_x के कारण $X-X$ दिशा में प्रतिबल तीव्रता $= f_x$

बल F_y के कारण $Y-Y$ दिशा में प्रतिबल तीव्रता $= f_y$

बल F_z के कारण $Z-Z$ दिशा में प्रतिबल तीव्रता $= f_z$

माना ठोस के पदार्थ का यंग मापांक $= E$ एवं पॉइजन अनुपात $= \frac{1}{m}$ है। सदैव तनाव विकृति को धनात्मक (+ve) और सम्पीडन विकृति को ऋणात्मक (–ve) माना जाता है। e_x, e_y तथा e_z क्रमश: X, Y तथा Z की दिशाओं में उत्पन्न विकृतियाँ हैं।

अत: $X-X$ दिशा में प्रतिबल f_x के कारण अनुदैर्ध्य विकृति e_x धनात्मक (+ve) तथा f_y तथा f_z के कारण पार्श्व विकृतियाँ ऋणात्मक (–ve) होंगी।

∴ $X-X$ दिशा में कुल विकृति,

$e_x = f_x$ के कारण विकृति $-f_y$ के कारण पार्श्व विकृति $-f_z$ के कारण पार्श्व विकृति

$$e_x = \frac{f_x}{E} - \frac{f_y}{mE} - \frac{f_z}{mE} \quad ...(i)$$

इसी प्रकार यदि हम $Y-Y$ तथा $Z-Z$ दिशाओं में विकृतियाँ ज्ञात करें तो वे क्रमश: निम्न प्रकार होंगी–

$$e_y = \frac{f_y}{E} - \frac{f_x}{mE} - \frac{f_z}{mE} \quad ...(ii)$$

तथा

$$e_z = \frac{f_z}{E} - \frac{f_x}{mE} - \frac{f_y}{mE} \quad ...(iii)$$

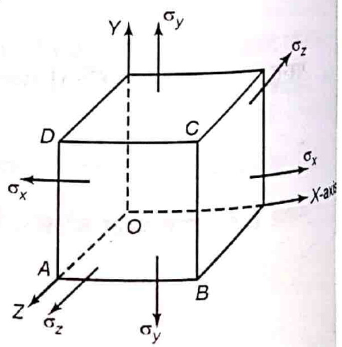
∵ आयतन विकृति, इन तीनों दिशाओं में उत्पन्न विकृतियों का योग होगा।

इसलिये आयतन विकृति,

$$\boxed{\frac{\delta V}{V} = e_x + e_y + e_z} \quad \text{(सूत्र)}$$

§ 1.11. प्रत्यास्थता के विभिन्न स्थिरांकों E, K तथा G में सम्बन्ध (Relation between Different Elastic Constants)

1. प्रत्यास्थता मापांक (Modulus of Elasticity) E तथा आयतन मापांक (Bulk Modulus) K में सम्बन्ध —चित्र 1.9 में पदार्थ घन (Cube) के रूप में दिखाया गया है। इसके फलकों के लम्बरूप प्रतिबल (आयतन परिवर्तन के लिये) क्रमश: X–axis, Y–axis तथा Z–axis की दिशाओं में कार्य कर रहे हैं।



चित्र 1.9

घन के पदार्थ का यंग मापांक E, आयतन मापांक (K) तथा पॉइजन अनुपात (Poisson's Ratio) $= \frac{1}{m}$ या μ है। घन की प्रत्येक भुजा की लम्बाई (l) है और सभी फलक (faces) भी समान हैं।

अत: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$ (माना)

∵ $X-X$ अक्ष की दिशा में सीधा प्रतिबल (तनाव में) σ है

∴ इस दिशा (X–axis) में तनाव विकृति, $e_x = \frac{\sigma}{E}$

तथा शेष दो दिशाओं में सीधे प्रतिबलों के कारण $(X-X)$ axis की दिशा में परिणामी विकृति (Total strain)

e_x = Strain in x-direction due to σ_x–Strain in x-direction due to σ_y – Strain in x-direction due to σ_z

$$= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{1}{m} \times \frac{\sigma_y}{E} - \frac{1}{m} \times \frac{\sigma_z}{E} \qquad \text{परन्तु } \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \text{ है।}$$

$$= \frac{\sigma}{E} - \frac{\sigma}{mE} - \frac{\sigma}{mE} = \left(\frac{\sigma}{E} - 2 \times \frac{\sigma}{mE}\right)$$

$$= \frac{\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right) \Rightarrow e\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

इसी प्रकार $(Y-Y)$ axis की दिशा में परिणामी विकृति (Total Strain)

$$e_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{1}{m} \times \frac{\sigma_x}{E} - \frac{1}{m} \times \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

तथा $(Z-Z)$ axis की दिशा में परिणामी विकृति

$$e_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{1}{m} \times \frac{\sigma_x}{E} - \frac{1}{m} \times \frac{\sigma_y}{E} = \frac{\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

अब आयतन विकृति (Volumetric Strain)

$$e_v = (e_x + e_y + e_z) = \frac{3\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

∴ आयतन मापांक (Bulk Modulus) $K = \dfrac{\text{आयतन प्रतिबल अथवा (सीधा प्रतिबल)}}{\text{आयतन विकृति}}$

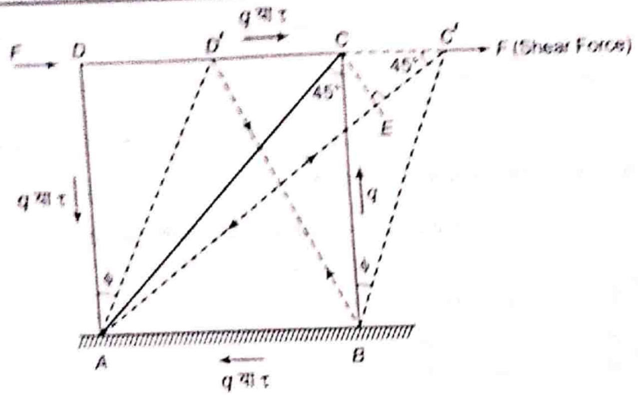
$$K = \frac{\sigma}{\frac{3\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)} = \frac{E}{3 \times \left(1 - \frac{2}{m}\right)}$$

$$\boxed{E = 3K\left(1 - \frac{2}{m}\right)}$$

Proved.

2. यंग मापांक (E) तथा दृढ़ता मापांक (G) में सम्बन्ध—(E तथा K) में सम्बन्ध के घन (cube) के चित्र 1.10 में यहाँ सुविधा के लिये केवल घन के सामने वाले फलक (Front face) $ABCD$ को दर्शाया गया है। यह तली (bottom) पर बद्ध (Fixed) है और ऊपरी सतह (Face) पर एक कर्तन बल (Shearing Force) F लगा है।

Scanned with CamScanner



चित्र 1.10

इस बल के कारण कर्तन प्रतिबल (Shear Force) q या τ पैदा होता है। कर्तन बल (F) के कारण $ABCD$ का नया आकार $ABC'D'$ हो जाता है। अर्थात् $ABCD$ में कर्तन विकृति (Shear Strain) ϕ उत्पन्न होती है जिससे विकर्ण (Diagonal) BD छोटा तथा विकर्ण AC बड़ा हो जाता है। अब C से AC' पर लम्ब CE डाला जिससे $AC = AE$ होगा।

$\therefore$ विकर्ण AC में अनुदैर्ध्य विकृति (Longitudinal Strain in AC)

$$= \frac{AC' - AC}{AC} = \frac{AC' - AE}{AC} = \frac{EC'}{AC} \quad \text{...(I)}$$

$\because$ CC' लम्बाई-वृद्धि (extension) बहुत कम है (CC' is very small)

$\therefore$ $$\angle AC'B = \angle ACB \Rightarrow 45^\circ$$

$\Delta CC'E$ में,

$$EC' = CC' \cos 45^\circ = \frac{CC'}{\sqrt{2}}$$

ΔACB में,

$$\cos 45^\circ = \frac{BC}{AC} \quad \text{या} \quad AC = \frac{BC}{\cos 45^\circ} = BC\sqrt{2}$$

$\therefore$ विकर्ण (Diagonal) AC में अनुदैर्ध्य विकृति (Longitudinal strain)

$$= \frac{EC'}{AC} = \frac{CC'}{\sqrt{2}.AC} = \frac{CC'}{\sqrt{2} \times BC\sqrt{2}} = \frac{CC'}{2BC}$$

परन्तु $\Delta BCC'$ में, $\tan\phi = \frac{CC'}{BC}$

कोण (ϕ) बहुत छोटा होने पर, $\tan\phi = \phi = \frac{CC'}{BC}$

$\therefore$ अब AC में अनुदैर्ध्य विकृति (Longitudinal strain)

$$= \frac{CC'}{2BC} = \frac{\phi}{2} = \frac{\text{कर्तन विकृति (Shear strain)}}{2}$$

$\because$ दृढ़ता मापांक $G = \frac{\text{कर्तन प्रतिबल } (q)}{\text{कर्तन विकृति } (\phi)}$

$\therefore$ $\phi = \frac{q}{G}$ होगा।

या $$e_{AC} = \frac{q}{2G} \quad \text{...(II)}$$

परन्तु AC में विकृति निम्न प्रकार भी प्राप्त की जा सकती है,

अब पुनः AC में विकृति

= AC में तनाव प्रतिबल के कारण विकृति

− BD में सम्पीडन प्रतिबल के कारण विकृति

$$e_{AC} = \frac{q}{E} - \left(-\frac{q}{mE}\right) = \frac{q}{E}\left[1 + \frac{1}{m}\right] \quad \text{...(III)}$$

$\because$ सम्बन्ध II = III है (दोनों ही AC में विकृति के मान हैं)

$\therefore$ $$\frac{q}{2G} = \frac{q}{E}\left[1 + \frac{1}{m}\right] \quad \text{या} \quad E = 2G\left[1 + \frac{1}{m}\right]$$

अथवा $\boxed{E = 2C\,[1 + \mu]}$ यहाँ $\frac{1}{m}$ को μ से तथा G को C से दर्शाया गया है।

Proved

3. E, G तथा K में सम्बन्ध (Relation between E, G and K)—

$\because$ हमने सिद्ध किया है कि

$$E = 2G\left[1 + \frac{1}{m}\right] = 3K\left[1 - \frac{2}{m}\right]$$

अब E तथा G के सम्बन्ध से,

$\because$ पॉइजन अनुपात (Poisson's Ratio) $\Rightarrow \frac{1}{m}$ or μ होता है

$\therefore$ $\frac{1}{m} = \left(\frac{E}{2G} - 1\right)$, यह मान E तथा K में सम्बन्ध में रखा

$\therefore$ $$E = 3K\left[1 - 2\left(\frac{E}{2G} - 1\right)\right] = 3K\left[1 - \left(\frac{E}{G} - 2\right)\right]$$

$$= 3K\left[3 - \frac{E}{G}\right] = 9K - \frac{3KE}{G}$$

या $$E + \frac{3KE}{G} = 9K \quad \text{या} \quad E\left[1 + \frac{3K}{G}\right] = 9K$$

या $$E = \frac{9KG}{G + 3K} \quad \text{(सूत्र)}$$

$\therefore$ $$\boxed{E = 2G\left(1 + \frac{1}{m}\right) = 3K\left[1 - \frac{2}{m}\right] = \frac{9KG}{G + 3K}} \quad \text{(सूत्र)}$$

यही अभीष्ट सम्बन्ध है।

यहाँ यदि G के स्थान पर C तथा $\frac{1}{m}$ के स्थान पर μ लिखा जाये तो

$$\boxed{\mathbf{E = 2C\,(1 + \mu) = 3K\,[1 - 2\mu] = \frac{9KC}{C + 3K}}} \quad \textbf{(सूत्र)}$$

Study PowerPoint

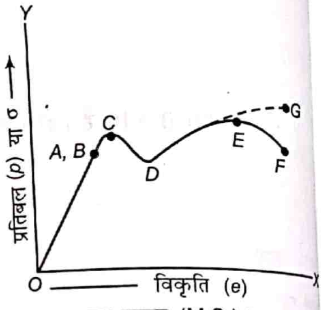
Scanned with CamScanner

§ 1.12. धातुओं का खिंचाव में व्यवहार (Behaviour of Metals in Tension)

इस अनुच्छेद में हम मृदु इस्पात (Mild Steel) तथा ढलवाँ लोहे (Cast Iron) पर तनाव बल लगाकर उसके व्यवहार का अध्ययन करेंगे।

मृदु इस्पात (Mild Steel) के लिये तनाव परीक्षण में प्राप्त प्रतिबल-विकृति वक्र (Stress-Strain Curve) को चित्र 1.11 में दर्शाया गया है।

इस वक्र में बिन्दु O पर छड़ में कोई प्रतिबल तथा विकृति नहीं है। जब छड़ पर धीरे-धीरे खिंचाव बल बढ़ाया जाता है तो पदार्थ के प्रतिबल p तथा विकृति e में वृद्धि होती है। बिन्दु O से A तक प्रतिबल p तथा विकृति e में समानुपात का सम्बन्ध रहता है और पदार्थ हुक के नियम का पालन करता है। **इसीलिये बिन्दु A को समानुपाती सीमा (Limit of Proportionality) कहते हैं।** प्रतिबल (p) तथा विकृति (e) में समानुपात के सम्बन्ध के कारण ही O से A तक आरेख में सरल रेखा प्राप्त होती है। बिन्दु A के पश्चात् p तथा e में समानुपाती का सम्बन्ध समाप्त हो जाता है।



मृदु इस्पात (M.S.) का प्रतिबल-विकृति वक्र

चित्र 1.11

A → समानुपाती सीमा (Proportional limit)
B → प्रत्यास्थता सीमा (Elastic limit)
C → उच्च पराभव बिन्दु (Higher Yield Point)
D → निम्न पराभव बिन्दु (Lower Yield Point)
$(C-D)$ → पराभव परास (Yield Range)
E → अधिकतम प्रतिबल बिन्दु (Max. Stress Point or Neck Formation Point)
F → भंजक या अन्तिम प्रतिबल बिन्दु (Breaking or ultimate Stress Point)

लगभग A पर ही बिन्दु B प्राप्त होता है। A तथा B को अत्यन्त सावधानी एवं सूक्ष्ममापी यन्त्रों द्वारा ही अलग-अलग स्थान पर प्राप्त किया जा सकता है। O से B तक पदार्थ में प्रत्यास्थता का गुण पूर्ण रूप से पाया जाता है। इस बीच किसी भी समय बल को हटा लेने पर छड़ पुन: अपने प्रारम्भिक आकार को धारण कर लेती है। **इसीलिए बिन्दु B को प्रत्यास्थता की सीमा कहते हैं।**

इसके पश्चात् छड़ पर बल और अधिक बढ़ाने से विकृति e भी बढ़ती है परन्तु अब प्रतिबल तथा विकृति में सरल रेखीय सम्बन्ध नहीं रहता, बल्कि एक वक्र प्राप्त होता है। यह वक्र B से C तक दर्शाया गया है। B तथा C के बीच में यदि छड़ पर से बल हटा लिया जाये तो छड़ में कुछ विकृति शेष रह जाती है, क्योंकि प्रत्यास्थता के गुण में कमी आ जाती है। **बिन्दु C को पराभव बिन्दु (Yield Point) कहते हैं।**

बिन्दु C पर पहुँचने पर पदार्थ बिना बल बढ़ाये ही बढ़ने लगता है जिसे **पराभव** (Yielding) कहते हैं। बिन्दु C से D तक पदार्थ की आन्तरिक रचना (Internal Structure) में परिवर्तन होता है और प्रतिरोधी शक्ति बदलती है। इस समय के प्रतिबल को **पराभव प्रतिबल** (Yield Stress) कहते हैं। पराभव क्रिया-बिन्दु C से D तक चलती है। C पर प्रतिबल को उच्च **पराभव** बिन्दु (Higher Yield Point) तथा D पर प्रतिबल को निम्न **पराभव बिन्दु** (Lower Yield Point) कहते हैं। प्रायोगिक दृष्टि से निम्न पराभव बिन्दु अधिक महत्त्वपूर्ण होता है।

पराभव के पश्चात् पदार्थ प्लास्टिक अवस्था (Plastic Stage) में आ जाता है। अब पुन: बल को बढ़ाने पर पदार्थ अधिक तेजी से विकृत होता है और पदार्थ में यह परिवर्तन स्थायी होता है। बिन्दु D से E तक पदार्थ में परिवर्तन स्थायी होता है। बिन्दु **E पर छड़ की काट किसी एक स्थान पर बहुत कम हो जाती है जिसे कटि (Waist) या गर्दन बनना (Neck Formation) कहते हैं।** इस कटि के बनने के कारण, थोड़े बल से ही छड़ की लम्बाई में वृद्धि होती रहती है। लम्बाई बढ़ते जाने से (कटि

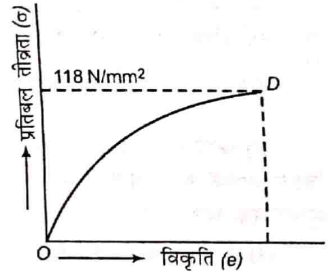
बनने के स्थान पर) छड़ की काट और भी कम होती जाती है और अन्त में छड़ इसी बिन्दु F पर टूट जाती है। कटि पर छड़ की काट कम होते जाने से लगाये गये आवश्यक बल को भी धीरे-धीरे कम करना पड़ता है। **बिन्दु F को भंजन बिन्दु (Breaking Point) कहते हैं। छड़ पर अधिकतम या चरम प्रतिबल बिन्दु E पर प्राप्त होता है।** F पर छड़ टूटने के कारण यहाँ पर प्रतिबल को **भंजक प्रतिबल** (Breaking Stress) या **अन्तिम प्रतिबल** कहते हैं।

§ 1.13. ढलवाँ लोहे के लिये तनाव परीक्षण तथा प्रतिबल-विकृति वक्र (Tensile Test & Stress-Strain Curve for Cast Iron)

ढलवाँ लोहे के मानक नमूने पर तनाव परीक्षण के लिये प्रतिबल-विकृति वक्र चित्र 1.12 की भाँति प्राप्त होता है। ढलवाँ लोहा एक भँगुर (Brittle) पदार्थ है, अत: कम तनाव प्रतिबल पर ही टूट जाता है।

इसके वक्र से स्पष्ट है कि इसकी समानुपाती सीमा तथा प्रत्यास्थता की सीमा बहुत कम है, अर्थात् लगभग शून्य (Zero) होती है। इसमें पराभव (Yielding) भी नहीं होता। इसकी कुल विकृति भी मृदु इस्पात की तुलना में बहुत कम होती है।

परीक्षण के दौरान पाया जाता है कि ढलवाँ लोहे का नमूना चरम प्रतिबल पहुँचने पर अचानक ही टूट जाता है और किसी प्रकार की कटि बनने की क्रिया इस पदार्थ में नहीं पायी जाती है। यह आरेख से भी स्पष्ट है, क्योंकि अन्तिम प्रतिबल D के पश्चात् आरेख नीचे नहीं आता बल्कि लगभग वहीं पर भंजन प्रतिबल भी प्राप्त होता है। ढलवाँ लोहे (C. I.) में अधिक प्रतिबल पर खिंचाव की दर भी अधिक होती है। खिंचाव में E का मान भी प्रतिबल तीव्रता के साथ बदलता है।



प्रतिबल-विकृति वक्र (ढलवाँ लोहे के लिए)

चित्र 1.12

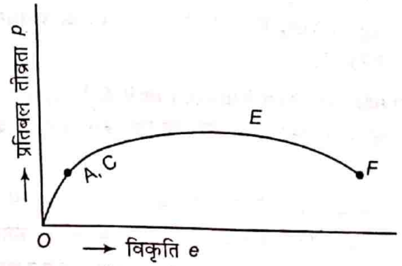
ढलवाँ लोहे का अन्तिम प्रतिबल (ultimate stress) तनाव में 70·2 से 210 N/mm^2 तक होता है इस समय विकृति लगभग $\frac{1}{400}$ होती है। अधिक प्रतिबल पर खिंचाव की दर भी अधिक होती है। खिंचाव में इसका प्रत्यास्थता गुणांक भी प्रतिबल तीव्रता के साथ बदलता है। इसका यंग मापांक 162 kN/mm^2 तक होता है।

§ 1.14. एल्युमीनियम के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र (Stress-Strain curve for Al)

इसके लिये तनाव में प्रतिबल-विकृति वक्र चित्र 1.13 के अनुसार प्राप्त होता है। इसमें समानुपाती सीमा A तथा पराभव बिन्दु (yield point) C एक ही स्थान पर होते हैं। वक्र में F भंजन बिन्दु है।

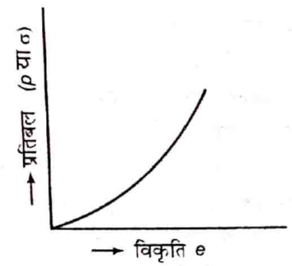
इसका तनाव में अन्तिम प्रतिबल लगभग 127 N/mm^2 होता है।

ढले रूप में एल्युमीनियम की तनाव शक्ति 78·6 से 94 N/mm^2 तक होती है। परन्तु एल्युमीनियम के रोलिंग और खींचने से इसका मान बढ़ाया जा सकता है। एल्युमीनियम की प्रत्यास्थता सीमा कम होती है। इसका यंग मापांक लगभग 80 kN/mm^2 तक होता है।



एल्युमीनियम के लिये p-e वक्र

चित्र 1.13



चमड़ा तथा रबड़ के लिए p-e वक्र

चित्र 1.14

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

§ 1.15. चमड़ा तथा रबड़ के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र

दोनों पदार्थों के लिए $p-e$ वक्र चित्र 1.14 के अनुसार प्राप्त होते हैं।

§ 1.16. अन्तिम प्रतिबल, कार्यकारी प्रतिबल तथा सुरक्षा गुणांक (Ultimate Stress, Working Stress & Factor of Safety)

(1) चरम प्रतिबल या अन्तिम प्रतिबल (Ultimate Stress)—जिस भार पर पदार्थ ठीक टूटने (Just Failure) की स्थिति में होता है, उसे अन्तिम भार कहते हैं तथा इस समय अवयव में उत्पन्न होने वाले प्रतिबल को अन्तिम प्रतिबल कहते हैं।

इसे निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है—

अन्तिम भार (Ultimate Load) (W_2) को नमूने (Specimen) के प्रारम्भिक अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल (A_1) से भाग देने पर चरम प्रतिबल या अन्तिम प्रतिबल प्राप्त होता है।

अत:
$$\text{अन्तिम तनाव प्रतिबल} = \frac{\text{अन्तिम तनाव भार } (W_1)}{\text{काट का क्षेत्रफल } (A_1)} = \ldots MPa$$

(2) कार्यकारी प्रतिबल (Working Stress)—कार्य करते समय किसी पदार्थ या अवयव पर सुरक्षा की दृष्टि से जितना अधिकतम प्रतिबल मान्य होता है, उसे कार्यकारी प्रतिबल कहते हैं और इस समय पदार्थ या अवयव पर लगे भार को सुरक्षात्मक भार (Safe load) कहते हैं।

(3) सुरक्षा गुणांक (Factor of Safety)—अन्तिम प्रतिबल (Ultimate Stress) तथा कार्यकारी प्रतिबल (Working Stress) के अनुपात को सुरक्षा गुणांक कहते हैं। इसे प्राय: 'S' द्वारा प्रदर्शित करते हैं। इसकी कोई इकाई (Unit) नहीं होती।

$$\text{सुरक्षा गुणांक,} \quad S = \frac{\text{अन्तिम प्रतिबल (Ultimate Stress)}}{\text{कार्यकारी प्रतिबल (Working Stress)}} = \frac{\text{अधिकतम बल (Maximum Load)}}{\text{सुरक्षात्मक बल (Safe Load)}}$$

§ 1.17. कुछ मुख्य परिभाषायें एवं विवरण

(1) पराभव बिन्दु (Yield Point) एवं पराभव बिन्दु पर प्रतिबल—जिस बिन्दु पर पदार्थ की प्रत्यास्थता (Elasticity) समाप्त हो जाती है, उसे पराभव बिन्दु (Yield Point) कहते हैं। इस बिन्दु पर लगे भार को पराभव भार (Yield Load) कहते हैं। पराभव बिन्दु पर पदार्थ प्रत्यास्थता से अर्द्ध-सुघट्यता (Semi-plastic) अवस्था में परिवर्तित हो जाता है।

पराभव बिन्दु पर प्रतिबल निम्न सूत्र से ज्ञात किया जाता है—

$$\text{पराभव बिन्दु पर प्रतिबल} = \frac{\text{पराभव बिन्दु पर भार (Load at Yield Point)}}{\text{काट का क्षेत्रफल (Area of Section)}}$$

(2) पराभव प्रतिबल (Yield Stress)—तनाव परीक्षण के समय प्रतिबल-विकृति वक्र में एक पराभव बिन्दु 'C' पर ऐसी स्थिति आती है कि पदार्थ बिना बल बढ़ाये ही बढ़ने लगता है, इसे पराभव क्रिया (Yielding Process) कहते हैं। इस समय पदार्थ की आन्तरिक संरचना (Internal Structure) में परिवर्तन होता है और पदार्थ की आन्तरिक संरचना (Resisting Power) में परिवर्तन होता है और पदार्थ की प्रतिरोधी शक्ति (Resisting Power) बदलती है। इस समय के प्रतिबल को पराभव प्रतिबल कहते हैं। पराभव क्रिया वक्र के बिन्दु C से D तक चलती है।

(3) प्रत्यास्थता सीमा तथा समानुपाती सीमा में अन्तर (Difference between Elastic Limit & Proportional Limit)—प्रतिबल-विकृति आरेख में जिस बिन्दु A तक प्रतिबल एवं विकृति में समानुपाती सम्बन्ध विद्यमान रहता है अर्थात् पदार्थ हुक के नियम का पालन करता है, उसे समानुपाती सीमा कहते हैं।

समानुपाती सीमा के बिन्दु A के बहुत पास मे [लगभग सम्पाती (Coincidental) स्थिति मे] बिन्दु B होता है। इस बिन्दु के बाद पदार्थ मे प्रत्यास्थता (Elasticity) का गुण समाप्त हो जाता है। इस बिन्दु की स्थिति को प्रत्यास्थता की सीमा कहते हैं। अत: स्पष्ट है कि तनाव परीक्षण (Tensile Test) में जिस बिन्दु तक पदार्थ प्रत्यास्थता के गुण को पूर्ण रूप से बनाये रखता है उस बिन्दु की स्थिति पर अधिकतम बल को प्रत्यास्थता की सीमा (Elastic Limit) कहते हैं।

Note—[व्यावहारिक दृष्टि से A तथा B बिन्दु, दोनों एक ही बिन्दु माने जाते हैं, परन्तु परीक्षण के अन्तर्गत अत्यन्त सावधानी एवं सूक्ष्ममापी यंत्रों की सहायता से बिन्दुओं A तथा B में अन्तर प्राप्त किया जा सकता है।]

(4) क्रीप (Creep)—उच्च तापमानों पर अधिक समय तक भारों अथवा प्रतिबलों के प्रभाव में पदार्थों में लगातार विरूपण (Deformation) होता है, जिसे क्रीप कहते हैं।

(5) फटीग (Fatigue)—किसी पदार्थ पर बार-बार भार लगाने के कारण पदार्थ की प्रतिरोधकता (Resistance) में हुई कमी को फटीग कहते हैं।

(6) प्रतिशत दैर्ध्य वृद्धि (% Elongation) ज्ञात करना—प्रतिशत अनुदैर्ध्य वृद्धि (% Elongation)

$$= \left[\frac{\text{नमूने की अन्तिम लम्बाई} - \text{प्रारम्भिक लम्बाई}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}} \times 100\right]$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{प्रतिशत दैर्ध्य वृद्धि} = \frac{l_2 - l_1}{l_1} \times 100\%} \quad \text{(सूत्र)}$$

(7) प्रतिशत सिकुड़न (% Contraction) ज्ञात करना—प्रतिशत सिकुड़न (% contraction)

$$= \left[\frac{\text{नमूने की काट का प्रारम्भिक क्षेत्रफल} - \text{काट का अन्तिम क्षेत्रफल}}{\text{काट का प्रारम्भिक क्षेत्रफल}} \times 100\%\right]$$

$$\boxed{\text{प्रतिशत सिकुड़न} = \frac{A_1 \sim A_2}{A_1} \times 100\%} \quad \text{(सूत्र)}$$

§ 1.18. (A) समान काट की छड़ का लम्बाई में परिवर्तन (Change in Length of Uniform Rod)

$\because$ हम जानते है कि, यंग मापांक $\quad E = \dfrac{\text{प्रतिबल } (p)}{\text{विकृति } (e)}$ या σ

या $\quad E = \dfrac{F/A}{\Delta l/l} = \dfrac{F\,l}{A.\Delta l}$

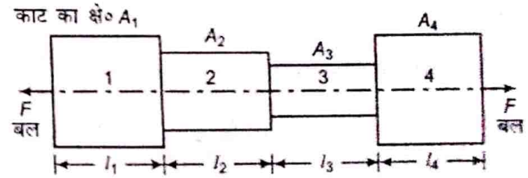
या लम्बाई में परिवर्तन $\quad \boxed{\Delta l = \dfrac{Fl}{AE}}$ (सूत्र)

यहाँ, F = छड़ पर लगाया गया बल, $\quad l$ = छड़ की प्रारम्भिक लम्बाई,

A = छड़ की काट का क्षेत्रफल, तथा $\quad E$ = छड़ के पदार्थ का यंग मापांक।

§ 1.18. (B) विभिन्न काट वाली छड़ (Bar of Varying Section)

चित्र 1.15 (i) में एक शाफ्ट दिखायी गयी है जिसकी चार भिन्न काटें हैं। माना चारों भिन्न-भिन्न काटों के क्षेत्रफल क्रमश: A_1, A_2, A_3 तथा A_4 हैं और लम्बाइयाँ क्रमश: l_1, l_2, l_3 तथा l_4 हैं। इस शाफ्ट पर F मान का बल तनाव या सम्पीडन में कार्य करता है। (यहाँ माना बल F तनाव का है)।



चित्र 1.15 (i)

अत: छड़ों की कुल लम्बाई में परिवर्तन, उनकी अलग-अलग लम्बाइयों में परिवर्तन के योग के बराबर होता है, चाहे बल तनाव में हो या सम्पीडन में।

माना छड़ के भागों की लम्बाइयों में परिवर्तन (वृद्धि या कमी) δl_1, δl_2, δl_3 तथा δl_4 होते हैं। तब छड़ की लम्बाई में यदि कुल परिवर्तन Δl या δl हो तो

$$\Delta l \quad \text{या} \quad \delta l = \delta l_1 + \delta l_2 + \delta l_3 + \delta l_4 \quad \ldots(i)$$

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

माना छड़ के भागों के पदार्थ भिन्न-भिन्न हैं इसलिये माना यंग-मापांक के मान क्रमशः E_1, E_2, E_3 तथा E_4 है।
हम जानते है कि छड़ के प्रत्येक भाग में लम्बाई में परिवर्तन निम्न होगे–

$$\delta l_1 = \frac{Fl_1}{A_1E_1}, \qquad \delta l_2 = \frac{Fl_2}{A_2E_2}$$

$$\delta l_3 = \frac{Fl_3}{A_3E_3}, \qquad \delta l_4 = \frac{Fl_4}{A_4E_4}$$

इन सभी मानों को समीकरण (i) में रखने पर,

कुल लम्बाई में परिवर्तन, $$\delta l = \frac{Fl_1}{A_1E_1} + \frac{Fl_2}{A_2E_2} + \frac{Fl_3}{A_3E_3} + \frac{Fl_4}{A_4E_4}$$

यदि छड़ एक ही पदार्थ की बनी हो तो

$$E = E_1 = E_2 = E_3 = E_4$$

$$\therefore \quad \Delta l \text{ या } \delta l = \frac{F}{E}\left[\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{l_3}{A_3} + \frac{l_4}{A_4}\right] \qquad \text{(सूत्र)}$$

1.18 टेपरित छड़ (अर्थात् समान रूप से बदलते व्यास की छड़) की लम्बाई में वृद्धि (Extension of a Tapered Bar/Rod)

चित्र 1.15 (ii) के अनुसार माना वृत्ताकार काट (Circular Section) वाली छड़ (L) लम्बाई की है और यह बड़े सिरे A पर व्यास (diameter) d_1 से दूसरे छोटे सिरे B पर व्यास (diameter) d_2 तक समान रूप से टेपरित है। इस छड़ पर खिंचाव बल (Pull) P या F कार्य करता है।

माना बड़े सिरे A से x दूरी पर कोई पट्टी (strip) d_x लम्बाई की है।

$\because$ छड़ की L लम्बाई मे व्यास (diameter) में परिवर्तन $= (d_1 - d_2)$

$\therefore$ छड़ की x लम्बाई में व्यास (diameter) में हुआ परिवर्तन $= \left(\frac{d_1 - d_2}{L}\right)x$

अतः पट्टी (strip) का व्यास (diameter), $d' = d_1 - \left(\frac{d_1 - d_2}{L}\right)x$

या $$d' = d_1 - K.x \qquad \text{जहाँ } K = \left(\frac{d_1 - d_2}{L}\right) \text{ है।}$$

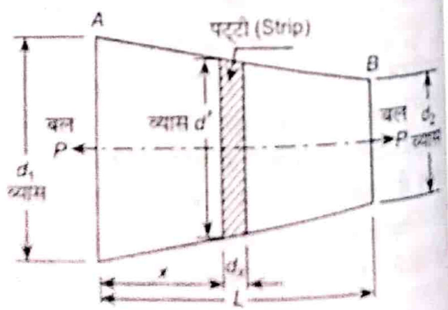
$\therefore$ पट्टी पर अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल (Cross-sectional area of strip)

$$\Rightarrow \quad A_x = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi}{4}(d_1 - K.x)^2$$

अब पट्टी में प्रतिबल (Stress in Strip), $\sigma_x = \frac{P \text{ या } F}{A_x}$

$$\Rightarrow \quad \sigma_x = \frac{4P}{\pi(d_1 - K.x)^2} \text{ तथा विकृति}$$

$$\text{(strain) } e = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{4P}{\pi E(d_1 - Kx)^2}$$



चित्र 1.15 (ii)

परन्तु Strain $$(e) = \frac{\Delta l}{L} \frac{\text{(Change in Length or Elongation)}}{\text{(original or Initial Length)}}$$

अतः पट्टी (strip) की लम्बाई में परिवर्तन (elongation)

$$\Delta l_x = e.dx = \frac{4P}{\pi E(d_1 - Kx)^2}.dx$$

अब सम्पूर्ण टेपरित छड़ की लम्बाई में वृद्धि (Extension in Tapered Bar)

$$\Delta L = \int_0^L \frac{4P}{\pi E(d_1 - K.x)^2}dx = \frac{4P}{\pi E}\int_0^L (d_1 - Kx)^{-2}dx$$

$$= \frac{4P}{\pi E}\left[\frac{(d_1 - Kx)^{-1}}{(-1)(-K)}\right]_0^L = \frac{4P}{\pi EK}\left[\frac{1}{(d_1 - Kx)}\right]_0^L$$

$$= \frac{4P}{\pi E\left(\frac{d_1 - d_2}{L}\right)}\left[\frac{1}{d_1 - \frac{d_1 - d_2}{L} \times L} - \frac{1}{d_1}\right]$$

$$= \frac{4PL}{\pi E(d_1 - d_2)}\left[\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right]$$

$$= \frac{4PL}{\pi E(d_1 - d_2)}\left[\frac{(d_1 - d_2)}{d_1.d_2}\right] = \frac{4PL}{\pi E.d_1d_2} \qquad \text{सूत्र (Formula)}$$

§ 1.19. संयुक्त काट वाली छड़ें तथा स्तम्भ (Bars & Columns of Composite Section)

संयुक्त काट (Composite Bar)–दो या दो से अधिक पदार्थों की बनी होती हैं तथा दोनों सिरों पर आपस में दृढ़ता से जुड़ी होती है ताकि उन पर तनाव या सम्पीडन बल लगाने से लम्बाई में वृद्धि या कमी एक समान हो। इस प्रकार की छड़ों को संयुक्त छड़ें कहते हैं।

इस प्रकार की छड़ों मे सन्तुलन के लिये निम्न दो प्रतिबन्ध होते है–

(1) संयुक्त छड़ की लम्बाई मे वृद्धि या कमी एक समान होती है।

$$\Delta l_1 = \Delta l_2$$

(2) छड़ पर लगने वाला कुल बाह्य बल, उसके सभी पदार्थों द्वारा सहन किये गये बलों के योग के बराबर होता है।

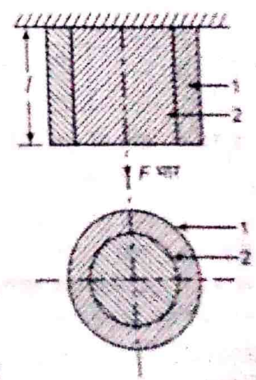
$$F = F_1 + F_2$$

1.19-1. यदि ट्यूब में छड़ फँसाकर संयुक्त छड़ बनायी गयी हो

चित्र 1.16 मे दिखायी गयी संयुक्त काट का ऊपरी सिरा बद्ध (Fixed) है तथा निचले सिरे पर भार F लटका है। यह छड़ दो भिन्न पदार्थों की बनी है। संयुक्त छड़ बनाने के लिये ट्यूब (1) में छड़ (2) घुसाकर दोनों को एक दूसरे के साथ दृढ़ता से जकड़ा गया है ताकि भार F दोनों द्वारा सहन किया जा सके। इस संयुक्त छड़ की लम्बाई l है।

माना ट्यूब (1) की काट का क्षेत्रफल A_1 तथा छड़ (2) की काट का क्षेत्रफल A_2 है और दोनों के पदार्थों के यंग-मापांक क्रमशः E_1 तथा E_2 है।

माना ट्यूब (1) द्वारा भार या बल F_1 तथा छड़ (2) द्वारा भार या बल F_2 सहन किया जाता है। अतः संयुक्त छड़ द्वारा सहन किया जाने वाला कुल भार



चित्र 1.16

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

$$F = F_1 + F_2 \quad \text{...(i)}$$

∵ ट्यूब (1) की लम्बाई में परिवर्तन

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 l}{A_1 E_1}$$

तथा छड़ (2) की लम्बाई में परिवर्तन,

$$\Delta l_2 = \frac{F_2 l}{A_2 E_2}$$

परन्तु संयुक्त छड़ के प्रतिबन्ध से, $\Delta l_1 = \Delta l_2$

$$\therefore \quad \frac{F_1 l}{A_1 E_1} = \frac{F_2 l}{A_2 E_2} \quad \text{या} \quad F_1 = F_2 \times \frac{A_1 E_1}{A_2 E_2} \quad \text{...(ii)}$$

अतः समीकरण (i) से,

$$F = F_1 + F_2$$

$$= F_2 \times \frac{A_1 E_1}{A_2 E_2} + F_2 = F_2\left[\frac{A_1 E_1}{A_2 E_2} + 1\right]$$

या $$F = F_2\left[\frac{A_1 E_1 + A_2 E_2}{A_2 E_2}\right]$$

या $$F_2 = F \times \frac{A_2 E_2}{(A_1 E_1 + A_2 E_2)} \quad \text{...(iii)}$$

इसी प्रकार, $$F_1 = F \times \frac{A_1 E_1}{(A_1 E_1 + A_2 E_2)} \quad \text{...(iv)}$$

परन्तु बल = प्रतिबल × क्षेत्रफल द्वारा

$$F_1 = p_1 A_1 \quad \text{या} \quad F_1 = \sigma_1 \times A_1$$

तथा $$F_2 = p_2 A_2 \quad \text{या} \quad F_2 = \sigma_2 \times A_2$$

∴ समीकरण (i) से, $$\boxed{F = p_1 A_1 + p_2 A_2} \quad \text{या} \quad \boxed{F = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2} \quad \text{(सूत्र)}$$

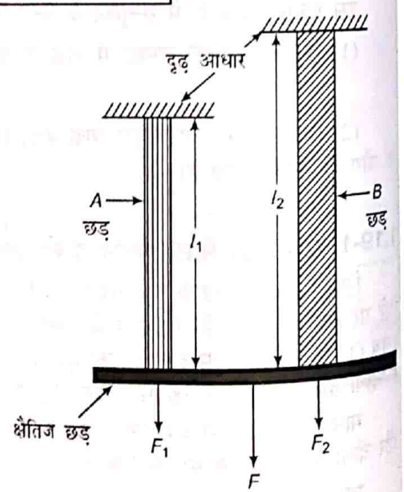
तथा $\Delta l_1 = \Delta l_2$ से, $$\frac{F_1 l}{A_1 E_1} = \frac{F_2 l}{A_2 E_2}$$

या $$\frac{p_1 l}{E_1} = \frac{p_2 l}{E_2} \quad \text{या} \quad \frac{\sigma_1 l}{E_1} = \frac{\sigma_2 l}{E_2}$$

या $$\boxed{\frac{p_1}{E_1} = \frac{p_2}{E_2}} \quad \text{या} \quad \boxed{\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}} \quad \text{(सूत्र)}$$

1.19-2. यदि दो छड़ों को दृढ़ आधारों से लटकाकर संयुक्त छड़ बनायी गयी हो

माना चित्र 1.17 में छड़ों A तथा B की लम्बाइयाँ l_1 तथा l_2, काट के क्षेत्रफल A_1 तथा A_2, यंग-मापांक E_1 व E_2 हैं। दोनों छड़ें दृढ़ आधार से लटकी हैं तथा नीचे एक क्षैतिज छड़ या धरन (Horizontal Beam) से जुड़ी है। यह क्षैतिज छड़ सदैव क्षैतिज ही रहती है और इस प्रकार एक संयुक्त छड़ के रूप में कार्य करती है। माना A तथा B द्वारा सहन किये गये खिंचाव भार या बल क्रमशः F_1 तथा F_2 हैं।



चित्र 1.17

संयुक्त छड़ के प्रतिबन्ध (1) से,

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \quad \text{या} \quad \frac{F_1 l_1}{A_1 E_1} = \frac{F_2 l_2}{A_2 E_2}$$

या $$\frac{p_1 l_1}{E_1} = \frac{p_2 l_2}{E_2} \quad \text{(सूत्र)}$$

यदि दोनों छड़ों में प्रतिबल क्रमशः σ_1 या p_1 तथा σ_2 या p_2 हों तो $\left[\because \; p_1 = \frac{F_1}{A_1} \text{ तथा } P_2 = \frac{F_2}{E_2}\right]$

यदि दोनों छड़ों की लम्बाइयाँ बराबर हों अर्थात् $l_1 = l_2$ हो तो निम्न सूत्र प्रयोग होता है।

$$\boxed{\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}} \quad \text{अथवा} \quad \boxed{\frac{p_1}{E_1} = \frac{p_2}{E_2}} \quad \text{(सूत्र)} \quad \text{...(i)}$$

अब संयुक्त छड़ के प्रतिबन्ध (2) से,

$$F = F_1 + F_2$$

$$\therefore \quad \boxed{F = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2} \quad \text{अथवा} \quad \boxed{F = p_1 A_1 + p_2 A_2} \quad \text{...(ii)}$$

दोनों सूत्रों (i) तथा (ii) की सहायता से धातुओं में प्रतिबल ज्ञात किये जाते हैं तथा दोनों छड़ों की लम्बाई में परिवर्तन समान होगा जिसे निम्न सूत्र से ज्ञात करते हैं—

$$\boxed{\Delta l = \frac{Fl}{AE} = \frac{pl}{E}} \quad \text{अथवा} \quad \boxed{\Delta l = \frac{\sigma\, l}{E}} \quad \text{(सूत्र)}$$

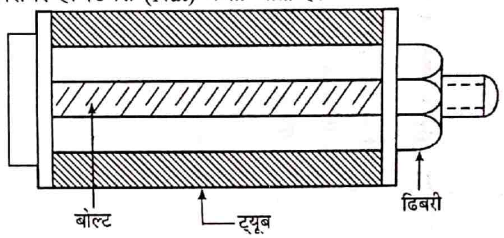
§ 1.20. बोल्ट पर अक्षीय बल के कारण उत्पन्न प्रतिबल तथा लम्बाई में परिवर्तन

चित्र 1.18 के अनुसार, यदि हम एक बोल्ट की रॉड (Shank) में नली पिरोकर एक ढिबरी (Nut) कसें तो बोल्ट पर अक्षीय तनाव बल F कार्य करता है, जिसके कारण ट्यूब पर इतने ही मान का सम्पीडन बल कार्य करता है। अतः बोल्ट पर तनाव बल के कारण लम्बाई में वृद्धि होती है, जबकि ट्यूब में सम्पीडन बल के कारण लम्बाई में कमी होती है और ट्यूब की लम्बाई में कमी तथा बोल्ट की लम्बाई में वृद्धि के योग के बराबर ही ढिबरी (Nut) कसी जाती है।

अतः नट-बोल्ट से सम्बन्धित प्रश्नों में निम्न दो प्रतिबन्ध प्रयोग किये जाते हैं—

(1) बोल्ट में तनाव बल = ट्यूब में सम्पीडन बल

(2) बोल्ट की अक्ष पर ढिबरी द्वारा चली दूरी
= बोल्ट की लम्बाई में वृद्धि
+ ट्यूब की लम्बाई में कमी



चित्र 1.18

§ 1.21-(i) मृदु इस्पात के यांत्रिक गुण (Mechanical Properties of Mild Steel)

1. यह इन्जीनियरिंग के क्षेत्र में सर्वाधिक उपयोगी लौह धातु है। इसका उपयोग नट-बोल्ट, कुँजी, रिवेट, कपलिंग्स, मशीनों की बॉडी, पुलों के ढाँचे, बॉयलर प्लेटें, पाइप, इस्पात काटें; जैसे—टी, एंगल, चैनल, चादरें तथा सरिये आदि बनाने में होता है।
2. इसमें कार्बन की मात्रा 0·15 से 0·25% तक होती है।
3. इसकी ब्रिनेल कठोरता संख्या लगभग 130 है।
4. इस पर आसानी से फोर्जन तथा वैल्ड किया जा सकता है।
5. इसे पायनीकृत (Tempered) तथा कठोरीकृत (Harden) नहीं किया जा सकता।

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

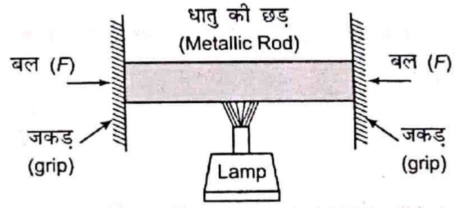
1.21–(ii) तालिका 1.1–सामान्य इन्जीनियरी पदार्थों के सामान्य गुण

क्र० सं०	पदार्थ	अन्तिम प्रतिबल या अन्तिम सामर्थ्य (Ultimate Strength N/mm^2)			E यंग मापांक N/mm^2	G कर्तन मापांक N/mm^2	घनत्व kg/m^2	तापमान प्रसार गुणांक α प्रति °C	ब्रिनेल कठोरता संख्या H_B
		तनाव	सम्पीडन	कर्तन					
1.	मृदु-इस्पात (0·1% कार्बन) (Mild Steel)	439	455	350	$2 \cdot 03 \times 10^5$	$0 \cdot 90 \times 10^5$	$7 \cdot 7 \times 10^3$	$11 \cdot 4 \times 10^{-6}$	130
2.	पिटवाँ लोहा (Wrought Iron)	350	420	280	$1 \cdot 90 \times 10^5$	$0 \cdot 7 \times 10^5$	$7 \cdot 7 \times 10^3$	12×10^{-6}	105
3.	भूरा ढलवाँ लोहा (Gray Cast Iron)	140	560	112	$1 \cdot 05 \times 10^5$	$0 \cdot 4 \times 10^5$	$7 \cdot 2 \times 10^3$	$11 \cdot 8 \times 10^{-6}$	180
4.	आघातवर्ध्य ढलवाँ लोहा (Malleable Cast Iron)	378	—	336	$1 \cdot 75 \times 10^5$	$0 \cdot 85 \times 10^5$	$7 \cdot 2 \times 10^3$	$11 \cdot 9 \times 10^{-6}$	230
5.	इस्पात (0·2% कार्बन) (ठण्डा रोलित)	560	—	420	$2 \cdot 1 \times 10^5$	$0 \cdot 84 \times 10^5$	$7 \cdot 84 \times 10^3$	—	160
6.	इस्पात (0·2% कार्बन) (गर्म रोलित)	420	630	315	$2 \cdot 1 \times 10^5$	$0 \cdot 84 \times 10^5$	$7 \cdot 84 \times 10^3$	$11 \cdot 7 \times 10^{-6}$	125
7.	इस्पात (1% कार्बन) (गर्म रोलित)	840	—	735	$2 \cdot 1 \times 10^5$	$0 \cdot 84 \times 10^5$	$7 \cdot 84 \times 10^3$	13×10^{-6}	290
8.	ऐल्यूमीनियम (ढलवाँ)	90	—	73·5	$0 \cdot 7 \times 10^5$	$0 \cdot 3 \times 10^5$	$2 \cdot 6 \times 10^3$	23×10^{-6}	40
9.	ताँबा (ढलवाँ)	210	315	189	$0 \cdot 9 \times 10^5$	$0 \cdot 4 \times 10^5$	$8 \cdot 9 \times 10^3$	$16 \cdot 7 \times 10^{-6}$	—

6. मृदु इस्पात में कठोरता तथा कड़ापन (Hardness and Toughness), प्रत्यास्थता (Elasticity), तन्यता (Ductility) तथा मशीनन (Machinability) के गुण विद्यमान होते हैं।
7. इसका रेखीय प्रसार गुणांक लगभग $11 \cdot 4 \times 10^{-6}$ प्रति °K होता है।
8. इस धातु के यंग-मापांक (E) तथा कर्तन मापांक (G) के मान लगभग $2 \cdot 03 \times 10^5$ N/mm^2 तथा $0 \cdot 9 \times 10^5$ N/mm^2 होते हैं।
9. मृदु इस्पात की अन्तिम तनाव सामर्थ्य, सम्पीडन सामर्थ्य तथा कर्तन सामर्थ्य लगभग 440, 455 तथा 350 N/mm^2 होती हैं।
10. इसका गलनांक लगभग 1400°C और घनत्व 7700 kg/m^3 होता है।

§ 1.22. तापीय प्रतिबल (Temperature Stresses or Thermal Stresses)

यदि किसी धातु की छड़ को दोनों सिरों पर मजबूती से जकड़ दिया जाये और तब इसके तापमान में परिवर्तन किया जाये तो छड़ की लम्बाई में परिवर्तन को रोकने के लिये जकड़ (grip) बल लगायेगी जिसके कारण छड़ में प्रतिबल उत्पन्न होते हैं, ये प्रतिबल ही तापीय प्रतिबल कहलाते हैं। इसे निम्न प्रकार भी परिभाषित किया जा सकता है—



चित्र 1.19

"किसी छड़ में तापान्तर के कारण उत्पन्न हुए प्रतिबल, तापीय प्रतिबल कहलाते हैं, जबकि छड़ दोनों सिरों पर मजबूती से जकड़ी गई हो।"

"When a Rod/Bar is gripped at the both ends, the stress developed in the bar due to the temperature difference, is called thermal stress or temperature stress."

∵ भौतिक विज्ञान (Physics) में ऊष्मा (Heat) के चैप्टर से हम जानते हैं कि छड़ की लम्बाई में परिवर्तन

$$\boxed{\Delta l = l\alpha t} \quad \text{(सूत्र)} \qquad \text{... (i)}$$

जहाँ α = रेखीय प्रसार गुणांक (Coefficient of linear expansion) /°C में

t = तापान्तर (temperature difference)

l = छड़ की लम्बाई (length of bar)

अब तापीय विकृति (Temperature strain)

$$e = \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \frac{l\alpha t}{l} \Rightarrow \alpha t$$

$$\therefore \quad \boxed{e = \alpha t} \quad \text{(सूत्र)} \qquad \text{... (ii)}$$

∴ तापीय प्रतिबल (Temperature Stress)

$$p = eE \qquad \left(\text{Young's Modulus } E = \frac{p}{e} \text{ से}\right)$$

$$\boxed{p = \alpha t E} \quad \text{(सूत्र)} \qquad \text{... (iii)}$$

अब छड़ पर जकड़ द्वारा लगाया गया बल (F) हो तो

$$F = \text{प्रतिबल} \times \text{क्षेत्रफल}$$

$$= p \times A$$

$$\boxed{F = (\alpha\, t\, E)\, A \quad \text{(सूत्र)}} \qquad \text{... (iv)}$$

Scanned with CamScanner

विशेष—यदि जकड़ δ लम्बाई से ढीली (loose) हो जाये तो सूत्रों में निम्न परिवर्तन हो जाते हैं—

∴ लम्बाई में शुद्ध परिवर्तन, $\boxed{\Delta l = l\alpha t - \delta}$ ... (v)

∴ तापीय विकृति,
$$e = \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \frac{l\alpha t - \delta}{l}$$

∴ $e = \alpha t - \frac{\delta}{l}$ (सूत्र) ... (vi)

तथा तापीय प्रतिबल (Temperature Stress)

$$p = e.E$$

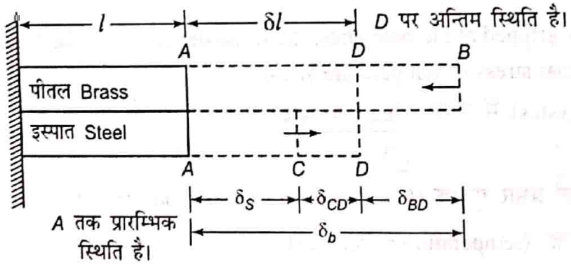
$$\boxed{p = \left(\alpha t - \frac{\delta}{l}\right) E}$$ (सूत्र) ... (vii)

अब जकड़ द्वारा लगाया गया बल (F) हो तो,

$$F = p \times A$$

$$\boxed{F = \left(\alpha t - \frac{\delta}{l}\right) E.A}$$ (सूत्र) ... (viii)

§ 1.23. संयुक्त छड़ों में तापीय प्रतिबल (Temperature or Thermal Stresses in Compound Bars)



चित्र 1.20

चित्र में इस्पात (Steel) तथा पीतल (Brass) की दो छड़ों को आपस में मजबूती से जकड़ (rigidly fastened to each other) कर संयुक्त छड़ (Composite Bar) बनाई गई है। माना कि

(1) दोनों छड़ों की आरम्भ में लम्बाई = l है।

(2) इस्पात (Steel) तथा पीतल (Brass) के रेखीय प्रसार गुणांक = α_s तथा α_b हैं।

(3) इस्पात तथा पीतल के प्रत्यास्थता गुणांक = E_s तथा E_b हैं।

(4) इस्पात तथा पीतल की काट के क्षेत्रफल = A_s तथा A_b हैं।

(5) संयुक्त छड़ के तापमान में परिवर्तन = t°C बढ़ाया जाता है।

हम जानते हैं कि तापमान परिवर्तन से इस्पात की अपेक्षा पीतल अधिक बढ़ता है या घटता है। यदि पीतल A सिरे पर बढ़ने के लिये स्वतन्त्र (Free) होता है तो यह B तक बढ़ता है। इसी प्रकार यदि इस्पात A सिरे पर बढ़ने के लिये मुक्त (Free) होता है तो वह C तक बढ़ता है। क्योंकि इस्पात कम बढ़ता है और पीतल अधिक, इसलिये सिरे पर बद्ध होने के कारण ये स्वतन्त्रतापूर्वक नहीं बढ़ पाते।

पीतल, इस्पात को खींचकर अपने जितना बढ़ाने का प्रयत्न करता है तथा इस्पात (Steel), पीतल (Brass) को दबाकर अपने जितना लम्बाई में रखने का प्रयत्न करता है। इन सब कारण वश पीतल, इस्पात (Steel) को खींचकर C से D तक ले जाता है और इस्पात (Steel), पीतल (Brass) को दबाकर B से D तक ले आता है और इस प्रकार अन्तिम स्थिति D पर प्राप्त हो जाती है।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि इस्पात, पीतल पर सम्पीडन बल (Compressive Force) लगाता है तथा पीतल, इस्पात पर तनाव बल (Tensile Force) लगाता है। माना इस्पात स्वतन्त्र रूप से δ_s बढ़ता है जबकि पीतल स्वतन्त्र रूप से δ_b बढ़ता है।

∴ $\delta_s = l.\alpha_s.t$ तथा $\delta_b = l.\alpha_b.t.$

चित्र से ज्ञात होता है कि इस्पात में C से D तक खिंचने के कारण तनाव विकृति (tensile strain) और पीतल B से D तक सिकुड़ने के कारण संपीडन विकृति (Compressive strain) उत्पन्न होती है। अत: लम्बाइयों में वृद्धि व कमी क्रमश: δ_{CD} तथा δ_{BD} होती है।

∴ $\delta_{CD} = \delta l - \delta_s$ ... (1)

$\delta_{BD} = \delta_b - \delta l$ ... (2)

दोनों समीकरणों को जोड़ने पर,

$\delta_{CD} + \delta_{BD} = \delta_b - \delta_s$ ... (3)

यदि इस्पात में विकृति e_s तथा प्रतिबल p_s होते हैं और पीतल में विकृति e_b तथा प्रतिबल p_b हैं तब

$$e_s = \frac{\delta_{CD}}{l} \quad \text{और} \quad E_s = \frac{p_s}{e_s} \quad \text{या} \quad e_s = \frac{p_s}{E_s}$$

∴ $\delta_{CD} = e_s \times l \Rightarrow \frac{p_s}{E_s} \times l$ ... (4)

इसी प्रकार, $\delta_{BD} = \frac{p_b}{E_b} \times l$ ... (5)

समी० (4) तथा (5) के मान, समी० (3) में रखने पर,

$$\frac{p_s}{E_s} \times l + \frac{p_b}{E_b} \times l = \delta_b - \delta_s$$

$$= l\alpha_b t - l\alpha_s t$$

या $\boxed{\frac{p_s}{E_s} + \frac{p_b}{E_b} = t\,(\alpha_b \sim \alpha_s)}$ (सूत्र) ... (6)

∵ छड़ के सन्तुलन के लिये

इस्पात पर पीतल द्वारा खिंचाव बल = पीतल पर इस्पात द्वारा दबाव बल

या $\boxed{p_s \times A_s = p_b \times A_b}$ (सूत्र) ... (7)

संयुक्त छड़ की लम्बाई में कुल परिवर्तन,

$\Delta l = l\alpha_s t + \frac{p_s l}{E_s}$ (सूत्र) ... (8)

तथा कुल विकृति $e = \alpha_s t + \frac{p_s}{E_s}$ (सूत्र) ... (9)

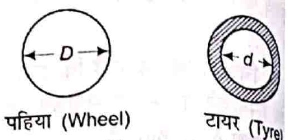
Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

§ 1.24. पहिये पर टायर की सिकुड़न (Shrinkage of a tyre on a Wheel)

क्योंकि धातु के बने टायर को गर्म करके गर्म अवस्था में ही गाड़ी के लकड़ी के दृढ़ पहिये की परिधि (circumference) पर चढ़ाया जाता है परन्तु जब टायर ठण्डा हो जाता है तो इसका व्यास (Dia) कम हो जाता है जिससे वह पहिये की परिधि पर जकड़ जाता है। माना पहिये का व्यास D तथा टायर का आन्तरिक व्यास d है तथा $D > d$ है।

अतः
$$\pi D > \pi d$$

अब टायर को इतना गर्म करना होगा कि $\pi D = \pi d$ हो जाये। फिर इस दशा में टायर को दृढ़ पहिये पर हथौड़ों से ठोक कर चढ़ा दिया जाता है। टायर के ठण्डा होने पर यह पहिये की पूरी परिधि पर जकड़ जाता है और सम्पर्क की लकड़ी को झुलसाकर एक खाँचा (cavity) बना लेता है, जिससे बैलगाड़ी या ताँगा के पहिये चलने पर यह लोहे की पत्ती या टायर उतरता नहीं है।



चित्र 1.21

∴ टायर में परिधीय विकृति (Circumferential Strain)

$$e = \frac{\pi D - \pi d}{\pi d} = \frac{D - d}{d}$$

∴
$$e = \frac{D - d}{d} \quad \text{(सूत्र)}$$

अब टायर में परिधीय प्रतिबल (Hoop Stress or Circumferential Stress)

∴
$$p = eE \quad \left[\because E = \frac{p}{e}\right]$$

∴
$$p = \left(\frac{D - d}{d}\right)E \quad \text{(सूत्र)}$$

∵ विकृतियों को समान रखने पर,
$$\alpha t = \frac{D - d}{d}$$

या
$$t = \left(\frac{D - d}{d}\right)\frac{1}{\alpha} \quad \text{(सूत्र)}$$

इस सूत्र से ज्ञात होता है कि टायर को चढ़ाने के लिये तापमान में कितना परिवर्तन करना होगा।

महत्त्वपूर्ण उदाहरण (Imp. Examples)

**विशेष : प्रतिबल-विकृति तथा लम्बाई में परिवर्तन पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 1. एक 4 मीटर लम्बी लोहे की छड़ जिसका अनुक्षेप (Section) 3 cm × 2 cm है, पर 50 kN का अक्षीय तनाव बल लगाया गया है। प्रतिबल, विकृति एवं छड़ की लम्बाई में वृद्धि निकालिये, यदि $E = 2 \times 10^5$ N/mm² है।

हल— यहाँ $l = 4\text{ m} = 4000\text{ mm}$,

क्षेत्रफल $A = 3 \times 2 = 6\text{ cm}^2 = 600\text{ mm}^2$

बल $F = 50\text{ kN} = 50 \times 1000\text{ N}$

प्रतिबल $p = \dfrac{F}{A} = \dfrac{50 \times 1000}{600} = \mathbf{83 \cdot 33\ N/mm^2}$ उत्तर

विकृति $e = \dfrac{P}{E} = \dfrac{83 \cdot 33}{2 \times 10^5} = \mathbf{4 \cdot 167 \times 10^{-4}}$ उत्तर

∴ लम्बाई में वृद्धि $\Delta l = \dfrac{F \times l}{AE} = \dfrac{50 \times 1000 \times 4000}{600 \times 2 \times 10^5} = \mathbf{1 \cdot 667\ mm}$ उत्तर

उदाहरण 2. एक इस्पात के तार द्वारा 2·5 kN भार को उठाना है। तार का न्यूनतम व्यास कितना होना चाहिये जिससे उसमें प्रतिबल 100 kN/mm² से अधिक न हो, यदि तार की लम्बाई 5 मीटर हो तो तार की बढ़ोत्तरी को भी ज्ञात कीजिये। $E = 2 \times 10^5$ N/mm² मान लीजिये।

हल—तार पर भार बल $F = 2 \cdot 5\text{ kN} = 2500\text{ N}$

तार की लम्बाई $= 5\text{ m}$

तार में प्रतिबल $p = 100\text{ kN/mm}^2$

माना तार का न्यूनतम व्यास d है। अतः क्षेत्रफल $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$ होगा।

अब प्रतिबल
$$p = \frac{\text{बल}\ (F)}{\text{क्षेत्रफल}\ (A)}$$

या
$$A = \frac{F}{p}$$

या
$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{2500}{100 \times 1000}$$

या
$$d^2 = \frac{4 \times 2500}{\pi \times 100 \times 1000} = 0 \cdot 0318$$

∴ तार का व्यास $d = 0 \cdot 1784\text{ mm} = \mathbf{0 \cdot 18\ mm}$ उत्तर

अब तार की लम्बाई में बढ़ोत्तरी,
$$\Delta l = \frac{Fl}{AE} = \frac{2500 \times 5000 \times 4}{\pi (\cdot 18)^2 \times 2 \times 10^5}$$
$$= 2456 \cdot 09\text{ mm} = \mathbf{2456\ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 3. इस्पात की 2 सेमी व्यास की गोल छड़ पर 30 kN का तनन बल या भार लगा है। छड़ में तनन प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये। यदि छड़ की लम्बाई 30 सेमी हो तो छड़ की लम्बाई में हुयी वृद्धि की गणना कीजिए। ($E = 2 \times 10^5$ kN/mm²)

हल— दिया है व्यास $d = 20\text{ mm}$, बल $F = 30\text{ kN}$, लम्बाई $l = 300\text{ mm}$

प्रतिबल $p = ?$ तथा लम्बाई में वृद्धि $\Delta l = ?$

प्रतिबल,
$$p = \frac{\text{बल}\ (F)}{\text{क्षेत्रफल}\ (A)}$$
$$= \frac{30}{\pi (20)^2 / 4}$$
$$= \frac{30 \times 4}{3 \cdot 14 \times 400} = 0 \cdot 0955\text{ kN/mm}^2$$
$$= \mathbf{95 \cdot 5\ N/mm^2}$$ उत्तर

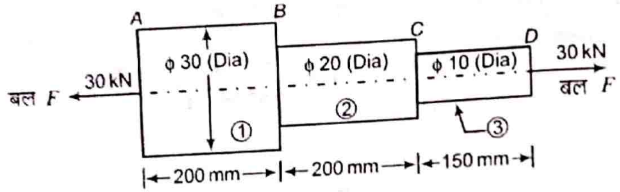
लम्बाई में परिवर्तन,
$$\Delta l = \frac{Fl}{AE} = \frac{30 \times 300}{\pi (20)^2 / 4 \times 2 \times 10^5}$$
$$= \mathbf{0 \cdot 0001432\ mm}$$ उत्तर

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

उदाहरण 4. एक 550 mm लम्बी ताँबे की रॉड, जिसका 200 mm हिस्सा 30 mm व्यास का, 200 mm लम्बा हिस्सा 20 mm व्यास का तथा बाकी हिस्सा 10 mm व्यास का है। प्रत्येक हिस्से में प्रतिबल का मान बताइये तथा रॉड का सम्पूर्ण खिंचाव भी बताइए, यदि भार 30 kN का लगा है? मानिये $E = 100 \text{ kN/mm}^2$।

(ब) अधिकतम विकृति (Max. Strain) तथा न्यूनतम विकृति (Min. Strain) भी ज्ञात कीजिये। (उ० प्र० 2012)

हल—चित्र 1.22 देखें।



चित्र 1.22

प्रथम भाग की काट का क्षेत्रफल, $A_1 = \frac{\pi(30)^2}{4} = 706 \cdot 5 \text{ mm}^2$

दूसरे भाग की काट का क्षेत्रफल, $A_2 = \frac{\pi(20)^2}{4} = 314 \text{ mm}^2$

तीसरे भाग की काट का क्षेत्रफल, $A_3 = \frac{\pi(10)^2}{4} = 78 \cdot 5 \text{ mm}^2$

∴ प्रथम हिस्से (AB) में प्रतिबल प्रतिबल $p_1 = \frac{F}{A_1} = \frac{30 \times 1000}{706 \cdot 5} = \mathbf{42 \cdot 463 \text{ N/mm}^2}$ (न्यूनतम प्रतिबल)

दूसरे हिस्से (BC) में प्रतिबल $p_2 = \frac{F}{A_2} = \frac{30 \times 1000}{314} = \mathbf{95 \cdot 54 \text{ N/mm}^2}$

तीसरे हिस्से (CD) में प्रतिबल $p_3 = \frac{F}{A_3} = \frac{30 \times 1000}{78 \cdot 5} = \mathbf{382 \cdot 165 \text{ N/mm}^2}$ (अधिकतम प्रतिबल)

∵ सम्पूर्ण खिंचाव (Total Δl) $= \frac{p_1 l_1}{E} + \frac{p_2 l_2}{E} + \frac{p_3 l_3}{E}$

∴ $\Delta l = \frac{1}{1 \times 10^5}[42 \cdot 46 \times 200 + 95 \cdot 54 \times 200 + 382 \cdot 16 \times 150]$

$= \mathbf{0 \cdot 8492 \text{ mm}}$

उदाहरण 4 (ब) का हल—

अधिकतम विकृति (Maximum Strain), $e_{max.} = \frac{\text{अधिकतम प्रतिबल}}{E}$

$= \frac{382 \cdot 165}{1 \times 10^5} = 3 \cdot 82 \times 10^{-3}$

न्यूनतम विकृति (Minimum Strain), $e_{min.} = \frac{\text{न्यूनतम प्रतिबल}}{E}$

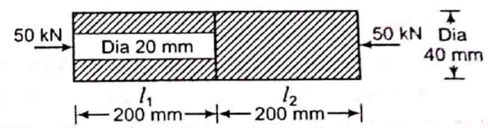
$= \frac{42 \cdot 463}{1 \times 10^5} = 4 \cdot 246 \times 10^{-4}$

उदाहरण 5. चित्र 1.23 में एक गोल छड़ दिखायी गयी है, जिसका व्यास 40 mm तथा लम्बाई 400 mm है। इसकी आधी लम्बाई तक यह छड़ खोखली है जिसके छिद्र का व्यास 20 mm है। यदि यंग मापांक $E = 100 \text{ kN/mm}^2$ ($1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$) है तो 50 kN के अक्षीय सम्पीडन के लिये निम्न ज्ञात कीजिये—

(i) अधिकतम प्रतिबल,

(ii) न्यूनतम प्रतिबल,

(iii) लम्बाई में सम्पूर्ण परिवर्तन (Δl)।



चित्र 1.23

हल—हम जानते हैं कि प्रतिबल $p = \frac{\text{बल } (F)}{\text{क्षेत्रफल}(A)}$

अतः क्षेत्रफल A का मान न्यूनतम होने पर, प्रतिबल p अधिकतम होगा तथा A का मान अधिकतम होने पर, प्रतिबल न्यूनतम होगा।

∴ न्यूनतम क्षेत्रफल = खोखली काट का क्षेत्रफल

∴ $A_1 = \frac{\pi(d_0^2 - d_1^2)}{4}$

∴ क्षेत्रफल $A_{min} = \frac{\pi(40^2 - 20^2)}{4} = 300\pi \text{ mm}^2$

तथा अधिकतम क्षेत्रफल = ठोस काट का क्षेत्रफल

∴ $A_2 = \frac{\pi D^2}{4}$

∴ क्षेत्रफल $A_{max} = \frac{\pi(40)^2}{4} = 400\pi \text{ mm}^2$

∴ **(i) अधिकतम प्रतिबल** $P_{max} = \frac{F}{A_{min}} = \frac{50 \times 1000}{300\pi} = \mathbf{53 \cdot 05 \text{ N/mm}^2}$ **उत्तर**

(ii) न्यूनतम प्रतिबल $P_{min} = \frac{F}{A_{max}} = \frac{50 \times 1000}{400\pi} = \mathbf{39 \cdot 788 \text{ N/mm}^2}$ **उत्तर**

(iii) लम्बाई में सम्पूर्ण परिवर्तन

$$\Delta l = \frac{F}{E}\left[\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2}\right] = \frac{50 \times 1000}{1 \times 10^5} \times \left[\frac{200}{300\pi} + \frac{200}{400\pi}\right]$$

$$= \frac{50 \times 1000 \times 200}{1 \times 10^5 \times 100 \times \pi} \times \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] = 0 \cdot 1856 \text{ mm}$$ **उत्तर**

उदाहरण 6. 30 mm मोटी प्लेट में 25 mm व्यास का छिद्र किया जाता है। यदि प्लेट के पदार्थ का अधिकतम कर्तन प्रतिबल 300 N/mm² है तो प्लेट में छिद्र करने के लिये आवश्यक बल ज्ञात कीजिये।

हल—कर्तन सतह का क्षेत्रफल,

$A = \pi dt$ (सूत्र)

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

या $A = 3{\cdot}14 \times 25 \times 30$

$= 2356{\cdot}1945 \text{ mm}^2$

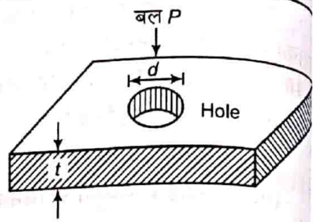
पंचिंग मशीन द्वारा छिद्र (Hole) करने में लगा बल,

P = प्रतिबल × क्षेत्रफल

$= 300 \times 2356{\cdot}1945$

$= 706858{\cdot}35$ N

$= 706{\cdot}86$ kN



चित्र 1.24

उदाहरण 7. किसी डीजल इन्जन के पिस्टन का व्यास 300 mm है। सिलिण्डर में गैसों का अधिकतम दाब 3.5 N/mm² है। इस सिलिण्डर को चार बोल्टों (Bolts) की सहायता से कसा जाता है। यदि प्रत्येक Bolt का व्यास = 25 mm तथा लम्बाई 700 mm है तो प्रत्येक Bolt में अधिकतम तनाव प्रतिबल और लम्बाई में वृद्धि ज्ञात कीजिये। दिया E = 2×10⁵ N/mm²।
(उ० प्र० 2003, 2008)

हल— सिलिण्डर में दाब द्वारा लगा बल,

P = दाब × क्षेत्रफल

$$P = 3{\cdot}5 \times \frac{\pi\,(300)^2}{4} = 78750\pi \text{ N}$$

∵ यह बल 4-Bolts सहन करते हैं। अतः प्रत्येक Bolt द्वारा सहन किया गया बल

$$F = \frac{P}{4} = \frac{78750\pi}{4} = 19687{\cdot}5\pi \text{ N}$$

∴ प्रत्येक Bolt में तनाव प्रतिबल

$$P = \frac{F}{A_{bolt}} = \frac{19687{\cdot}5\pi}{\pi\,(25)^2/4}$$

या $$P_{bolt} = \frac{19687{\cdot}5 \times 4}{625}$$

$= \mathbf{126\ N/mm^2}$ उत्तर

तब Bolt की लम्बाई में वृद्धि $\Delta l = \frac{Fl}{AE}$ या $\left(\Delta l = \frac{pl}{E}\right)$

∴ $$\Delta l = \frac{19687{\cdot}5\pi \times 700}{\frac{\pi\,(25)^2}{4} \times 2 \times 10^5} = \mathbf{0{\cdot}441\ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 8. किसी भाप इन्जन (Steam Engine) में पिस्टन का व्यास 200 mm है। संयोजक दण्ड (Connecting Rod) की लम्बाई 1.5 मीटर तथा इसकी अनुप्रस्थ काट (Cross-section) का क्षेत्रफल 20 cm² (20 × 100 mm²) है। यदि सिलिण्डर में भाप का अधिकतम दाब 4 N/mm² हो तो संयोजक दण्ड की लम्बाई में कमी तथा प्रतिबल ज्ञात कीजिये। E = 2×10⁵ N/mm² है।

हल—∵ पिस्टन का व्यास, $D = 200$ mm

∴ पिस्टन की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल,

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi\,(200)^2}{4}$$

$$= \frac{3{\cdot}14 \times 40000}{4} = 31400 \text{ mm}^2$$

∵ सिलिण्डर में अधिकतम दाब, $p = 4 \text{ N/mm}^2$ (दिया है)

∴ पिस्टन द्वारा संयोजक दण्ड पर लगा दाब बल

F = दाब × क्षेत्रफल

$= 4 \times 31400 = 125600$ न्यूटन (N)

∴ **संयोजक दण्ड में प्रतिबल,** $f = \dfrac{\text{संयोजक दण्ड पर बल } (F)}{\text{संयोजक दण्ड की काट का क्षेत्रफल}}$

$$= \frac{125600}{20 \times 100} = \mathbf{62{\cdot}8\ N/mm^2}$$ उत्तर

संयोजक दण्ड की लम्बाई में कमी,

$$\Delta l = \frac{Fl}{AE}$$ (सूत्र : ध्यान दें)

∴ $$\Delta l = \frac{125600 \times 1{\cdot}5 \times 1000}{20 \times 100 \times 2 \times 10^5} = \mathbf{0{\cdot}471\ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 9. एक पिस्टन तथा पिस्टन छड़ चित्र में दर्शायी गयी है। पिस्टन छड़ का व्यास ज्ञात कीजिये यदि प्रतिबल 120 N/mm² तक सीमित है। पिस्टन का व्यास 300 mm तथा सिलिण्डर में दाब 4 N/mm² है।
(उ० प्र० 2009, 10 पूरक परीक्षा)

हल— पिस्टन की काट का क्षेत्रफल (Cross-section Area),

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi\,(300)^2}{4}$$

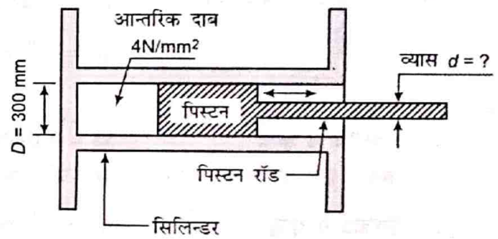
$= 22500\,\pi \text{ mm}^2$

∴ पिस्टन द्वारा पिस्टन छड़ पर लगा बल,

F = दाब × क्षेत्रफल

$= 4 \times 22500\pi$ न्यूटन (N)

$= 90000\pi$ न्यूटन



चित्र 1.25

∵ पिस्टन छड़ में बल = प्रतिबल × छड़ का क्षेत्रफल

सभी मान रखने पर,

$$90000\pi = 120 \times \frac{\pi d^2}{4}$$

या $$d^2 = \frac{90000\pi \times 4}{120 \times \pi} = 3000$$

∴ छड़ का व्यास $d = \sqrt{(3000)} = 54{\cdot}772 \text{ mm} = \mathbf{54{\cdot}8\ mm}$ उत्तर

उदाहरण 10. पीतल तथा इस्पात की छड़ों की लम्बाई तथा अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल समान हैं। जब पीतल की छड़ पर कोई भार लगाया जाता है तो इसकी लम्बाई में 2 mm की विकृति हो जाती है। यदि यही भार इस्पात की छड़ पर लगाया जाये तो इसकी अक्षीय विकृति ज्ञात कीजिये। यदि $E_{Steel} = 2 \times 10^5$ N/mm² तथा $E_{Brass} = 0{\cdot}8 \times 10^5$ N/mm² है।

हल—	पीतल की छड़	स्टील की छड़
माना	बल F	बल F
	लम्बाई l	लम्बाई l
	काट का क्षेत्रफल A	काट का क्षेत्रफल A

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

लम्बाई में परिवर्तन Δl_b (2 mm) लम्बाई में परिवर्तन $\Delta l_s = ?$

$(E_b = 0{\cdot}8\times10^5\ N/mm^2)$ $(E_s = 2\times10^5\ N/mm^2)$

$$\Delta l_b = \frac{Fl}{AE_b} \quad ...(i)$$

तथा

$$\Delta l_s = \frac{Fl}{AE_s} \quad ...(ii)$$

समीकरण (ii) को (i) से भाग देने पर,

$$\frac{\Delta l_s}{\Delta l_b} = \frac{E_b}{E_s}$$

या

$$\Delta l_s = \Delta l_b \times \frac{E_b}{E_s}$$

$$\therefore \Delta l_s = 2\times\frac{0{\cdot}8\times10^5}{2\times10^5} = \mathbf{0{\cdot}8\ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 11. एक इस्पात की छड़ पर, जिसका व्यास 30 mm तथा लम्बाई 300 mm है, एक प्रत्यावर्ती (Alternating) भार अधिकतम 20 kN सम्पीडन से अधिकतम 8 kN तनाव के मध्य लगाया जाता है। छड़ की अधिकतम तथा न्यूनतम लम्बाई में अन्तर को ज्ञात कीजिये। $E = 210\ kN/mm^2$ लें। (U.P. 2004; U.K. 2014, S)

हल—20 kN के सम्पीडन बल (Compressive Force) से छड़ की लम्बाई में कमी,

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 l_1}{AE} = \frac{20\times1000\times300}{\frac{\pi\,(30)^2}{4}\times210\times1000}$$

$\therefore$ लम्बाई में कमी $\Delta l_1 = 0{\cdot}04044$ mm

$\because$ अब 8 kN का तनाव लगने पर छड़ की लम्बाई में वृद्धि होगी।

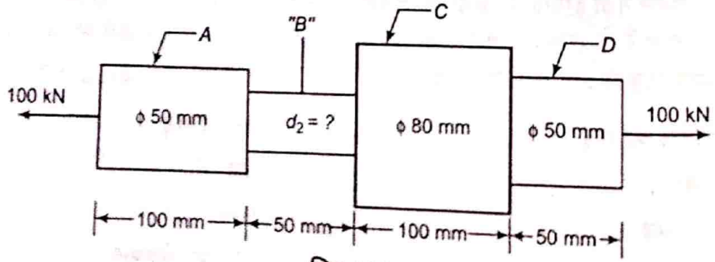
$\therefore$ लम्बाई में वृद्धि

$$\Delta l_2 = \frac{F_2 l}{AE} = \frac{8000\times300}{\frac{\pi\,(30)^2}{4}\times210\times1000} = 0{\cdot}0162$$

$\therefore$ अतः लम्बाई में अन्तर (दबने तथा खिंचने के बाद बीच का गैप)

$$= \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0{\cdot}04044 + 0{\cdot}0162 = \mathbf{0{\cdot}0566\,mm}$$ उत्तर

उदाहरण 12. चित्र 1.26 में दिखायी गई छड़ पर 100 kN का भार लगा है। छड़ के 'B' भाग का व्यास ज्ञात कीजिये यदि वहाँ उत्पन्न प्रतिबल का मान 100 MPa से ज्यादा न हो। छड़ की कुल लम्बाई में वृद्धि भी ज्ञात कीजिये। *E = 200 GPa* है। (U.K. 2012)



चित्र 1.26

हल—माना भाग B का व्यास d_2 है। इस भाग में प्रतिबल $p_B = 100$ MPa है।

$\therefore$ प्रतिबल $p_B = \dfrac{F}{area}$ या $100 = \dfrac{100\times1000}{\pi d_2^2/4}$

$\therefore$ B का व्यास $d_2 = \sqrt{1273{\cdot}88} = 35{\cdot}69 \approx \mathbf{35{\cdot}7\ mm}$ उत्तर

$\therefore$ छड़ की लम्बाई में कुल वृद्धि $(\Delta l) = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4$

$$\therefore \Delta l = \frac{F}{E}\left[\frac{l_1}{A_1}+\frac{l_2}{A_2}+\frac{l_3}{A_3}+\frac{l_4}{A_4}\right]$$

$$= \frac{100\times1000}{2\times10^5}\left[\frac{100}{\pi\,(50)^2/4}+\frac{50}{\pi\,(35{\cdot}69)^2/4}+\frac{100}{\pi\,(80)^2/4}+\frac{50}{\pi\,(50)^2/4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{4}{\pi}\left[\frac{100}{2500}+\frac{50}{1273{\cdot}77}+\frac{100}{6400}+\frac{1}{50}\right]$$

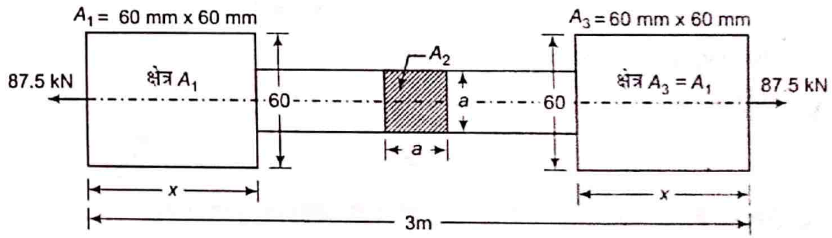
$$= \mathbf{0{\cdot}07317\,mm}$$ उत्तर

उदाहरण 13. चित्र 1.27 में एक तान छड़ दिखाई गई है जिसके दोनों सिरे वर्गाकार काट के हैं। यदि छड़ का मध्य भाग भी वर्गाकार काट (Sq. section) का हो तो मध्य भाग (middle part) की लम्बाई तथा मध्य भाग के काट की माप (Size of section of middle) ज्ञात कीजिये जबकि मध्य भाग में प्रतिबल 140 MN / m² तथा छड़ की लम्बाई में कुल वृद्धि 1·4 mm है। E = 200 GN/m² मानिये। [U.K. 2010, 2012 (W), 2013 (S), U.K. 2013 (W)]

हल—

$\because$ प्रतिबल, $p = \dfrac{F}{A_2}$ या $A_2 = \dfrac{87{\cdot}5\times1000}{140}$

$\therefore$ $A_2 = a\times a = 625$ या $\boxed{a = 25\ mm}$ उत्तर



चित्र 1.27

$\because$ लम्बाई में कुल परिवर्तन (Total change in length of Bar)

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$$ [परन्तु $\Delta l_1 = \Delta l_3$ होगा]

$$= 2\,\Delta l_1 + \Delta l_2$$

$$= \frac{F}{E}\left[2\times\frac{l_1}{A_1}+\frac{l_2}{A_2}\right]$$

$$1{\cdot}4 = \frac{87{\cdot}5\times1000}{2\times10^5}\times\left[2\times\frac{x}{60\times60}+\frac{3000-2x}{625}\right]$$

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

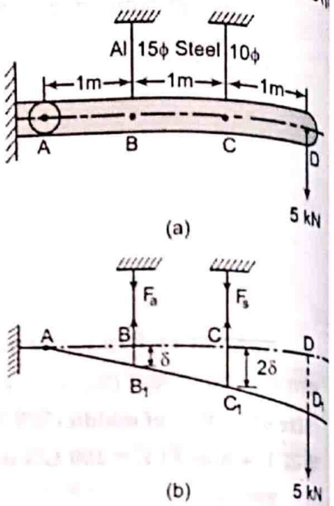
या
$$3.2 = \frac{x}{30 \times 60} + \frac{3000 - 2x}{625} = \frac{25x + 216000 - 144x}{45000}$$

या
$$144000 = -119x + 216000 \text{ या } x = 605.04 \text{ mm} = 0.605 \text{ m}$$

$\therefore$ छड़ के बीच के भाग की लम्बाई $= 3 - 2x = 3 - 2 \times 0.605 = 1.79$ metre

Study PowerPoint

उदाहरण 14. एक दृढ़ (rigid) छड़ *ABCD* सिरे *A* पर हिंज की गई है तथा बिन्दुओं *B* एवं *C* पर दो समान लम्बाई की छड़ों द्वारा आधारित है जैसा कि चित्र 1.28 (a) में दिखाया गया है। एल्युमीनियम की छड़ का व्यास 15 mm तथा इस्पात की छड़ का व्यास 10 mm है। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, इसके सिरे *D* पर 5 kN का भार लगाया गया है। एल्युमीनियम तथा इस्पात की छड़ों में उत्पन्न प्रतिबल एवं विकृति का मान ज्ञात कीजिये। $E_s = 2 \times 10^5$ N/mm² तथा $E = 1.25 \times 10^5$ N/mm² मान लीजिये। **(UP 2000)**



चित्र 1.28

हल—*ABCD* छड़ दृढ़ (rigid) होने के कारण मुड़ेगी नहीं, बल्कि चित्र 1.28 (b) की भाँति $AB_1C_1D_1$ स्थिति पर नत (inclined) हो जायेगी और एल्युमीनियम तथा इस्पात की छड़ें प्रत्यास्थ होने के कारण क्रमशः BB_1 तथा CC_1 से खिंच जायेंगी।

माना कि एल्युमीनियम तथा इस्पात छड़ों में खिंचाव बल क्रमशः F_a तथा F_s है।

अब समरूप त्रिभुजों ABB_1 तथा ACC_1 से,
$$\frac{CC_1}{AC} = \frac{BB_1}{AB}$$

यदि $BB_1 = \delta$ है, तब
$$CC_1 = \delta \times \frac{AC}{AB} = \delta \times \frac{2}{1} = 2\delta$$

माना कि दोनों छड़ों की प्रारम्भिक लम्बाइयाँ L हैं, तब

सूत्र $\Delta l = \frac{Fl}{AE}$ से,
$$\delta = \frac{F_a L}{A_a E_a} \qquad \text{तथा} \qquad 2\delta = \frac{F_s L}{A_s E_s}$$

जहाँ A_a तथा A_s क्रमशः एल्युमीनियम तथा इस्पात छड़ों के अनुप्रस्थ क्षेत्रफल हैं।

फिर,
$$\delta = \frac{F_a L}{A_a E_a} = \frac{F_s L}{2 A_s E_s}$$

या
$$\frac{F_a}{F_s} = \frac{A_a E_a}{2 A_s E_s}$$
$$= \frac{\pi}{4} \times 15^2 \times 1.25 \times 10^5 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{10^2 \times 2 \times 10^5}$$

$\therefore$
$$F_a = 0.703 F_s$$

अब दृढ़ छड़ के संतुलन के लिये इस पर सभी बलों का *A* पर आघूर्ण लेने से,
$$F_a \times 1 + F_s \times 2 = 5 \times 3$$

या
$$0.703 F_s + 2 F_s = 15$$

$\therefore$
$$F_s = 5.549 \text{ kN} = 5549 \text{ N}$$

तथा
$$F_a = 3.901 \text{ kN} = 3901 \text{ N}$$

अब, एल्युमीनियम में प्रतिबल, σ_a या $p_a = \frac{F_a}{A_a} = \frac{3901 \times 4}{\pi \times 15^2} = 22.075$ N/mm² **उत्तर**

फिर इस्पात में प्रतिबल, σ_s या $p_s = \frac{F_s}{A_s} = \frac{5549 \times 4}{\pi \times 10^2} = 70.652$ N/mm² **उत्तर**

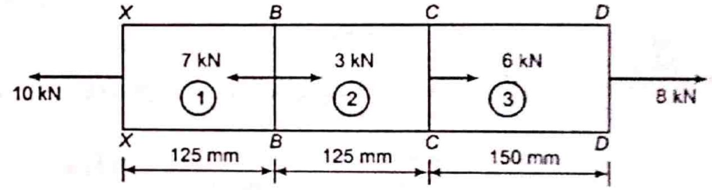
एल्युमीनियम में विकृति, $e_a = \frac{p_a}{E_a} = \frac{22.075}{1.25 \times 10^5} = 0.1766 \times 10^{-3}$

उत्तर

तथा इस्पात में विकृति, $e_s = \frac{p_s}{E_s} = \frac{70.652}{2 \times 10^5} = 0.3532 \times 10^{-3}$

उत्तर

उदाहरण 15. 40 mm व्यास तथा 400 mm लम्बाई की एक छड़ पर चित्र 1.29 (अ) के अनुसार बल लग रहे हैं। $E = 2 \times 10^5$ N/mm² है तो छड़ की लम्बाई में कुल परिवर्तन ज्ञात कीजिये।



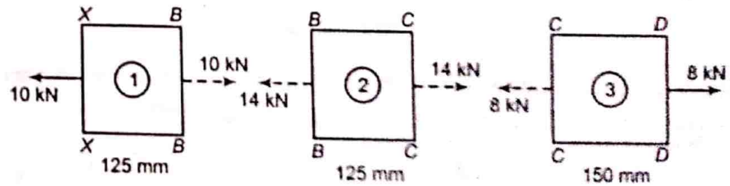
चित्र 1.29 (अ)

हल—छड़ की काट का क्षेत्रफल
$$A = \frac{\pi (40)^2}{4} = 400\pi \text{ mm}^2$$

इस प्रकार के प्रश्नों में सर्वप्रथम छड़ के अलग-अलग भागों का सन्तुलन देखकर उन पर लगने वाले बल ज्ञात करते हैं।

छड़ के भाग X—B के लिये :

दिये गये चित्र 1.29 (ब) के अनुसार X—X पर 10 kN का तनाव बायीं ओर लगा रहा है। इसलिये इस भाग के सन्तुलन के लिए भाग B—B पर 10 kN का तनाव बल दायीं ओर लगाते है जिससे भाग X—B सन्तुलन में हो जाता है।



चित्र 1.29 (ब)

छड़ के भाग B—C के लिये :

B—B, भाग X—B तथा B—C दोनों में समान है और संयुक्त भाग B—B पर पहले से ही 3 kN का बल दायीं ओर लग रहा था। परन्तु हम 3 kN के बदले दायीं ओर 10 kN का बल भाग (1) के B—B पर लगा चुके हैं जिससे स्पष्ट है कि हम

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

7 kN का बल दायीं ओर अधिक लगा चुके हैं। अतः इसे सन्तुलित करने के लिये भाग (2) के B—B पर बायीं ओर 7 kN का बल लगाना होगा परन्तु संयुक्त चित्र में B—B पर बायीं ओर 7 kN का बल पहले से ही लगा है। अतः भाग (2) के B—B पर बायीं ओर 7 + 7 = 14 kN का बल लगाते हैं। इसे सन्तुलित करने के लिए भाग (2) के C—C पर दायीं ओर 14 kN का बल लगाते हैं। परन्तु संयुक्त चित्र में C—C पर दायीं ओर 6 kN का बल लगा है जिससे स्पष्ट है कि C—C पर दायीं ओर 14 – 6 = 8 kN का बल अधिक लग चुका है। अब इसे सन्तुलित करने के लिये भाग C—D के बायें तथा दायें सिरों C—C तथा D—D पर भी 8 kN का तनाव बल लगाना पड़ेगा। इस प्रकार हम देखते हैं कि अब छड़ का प्रत्येक भाग सन्तुलन में है और सभी भागों को जोड़ने पर संयुक्त चित्र जैसी छड़ प्राप्त हो जाती है। प्रश्न के ठीक होने की जाँच करने के लिये सबसे पहले संयुक्त चित्र में ही देख सकते है कि पूरी छड़ निम्न प्रकार सन्तुलन में है। **(अर्थात् दायीं ओर लगे बलों का योग = बायीं ओर लगे बलों का योग होना चाहिए।)**

अतः छड़ पर बायीं ओर की दिशा में लगने वाले बल = 10 + 14 + 8 = 32 kN

इसी प्रकार छड़ पर दायीं ओर लगने वाले बल = 10 + 14 + 8 = 32 kN

अब कुल लम्बाई में परिवर्तन,

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$$

या

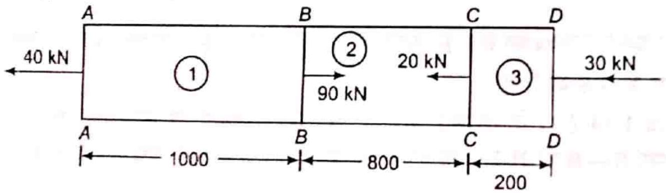
$$\Delta l = \frac{F_1 l_1}{AE} + \frac{F_2 l_2}{AE} + \frac{F_3 l_3}{AE}$$

$$= \frac{1}{AE}[F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3]$$

$$= \frac{1}{400\,\pi \times 2 \times 10^5} \times [10 \times 1000 \times 125 + 14 \times 1000 \times 125 + 8000 \times 150]$$

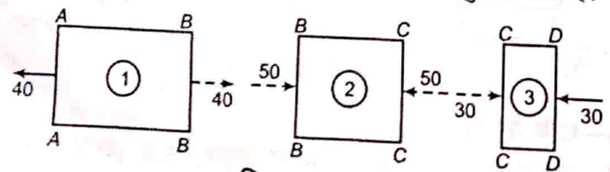
$$= \frac{1250 + 1750 + 120}{80000\,\pi} = \frac{3120}{80000\,\pi} = \mathbf{0 \cdot 0124\,mm}$$ उत्तर

****उदाहरण 16.** चित्र 1.30 (अ) में दिखायी गयी इस्पात की एक छड़ पर भिन्न दिशाओं में बल लग रहे हैं। यदि छड़ का व्यास 30 mm हो और इस्पात के लिये $E = 2 \cdot 0 \times 10^5$ N / mm^2 तो छड़ की लम्बाई में परिवर्तन ज्ञात कीजिये तथा बताइये कि छड़ की कुल लम्बाई में वृद्धि होगी या कमी?** **(U.K. 2010, 19)**



चित्र 1.30 (अ)

हल—सर्वप्रथम छड़ के अलग-अलग भागों का सन्तुलन करके उन पर लगने वाले बल ज्ञात करते हैं जिसके लिए चित्र 1.30 (ब) के अनुसार सभी भागों के अलग-अलग चित्र बनाकर बलों को सन्तुलित करते हैं।



चित्र 1.30 (ब)

छड़ के भाग A—B के लिये,

काट (*A*—*A*) पर 40 kN का खिंचाव बल लग रहा है इसलिए इसके सन्तुलन के लिये (*B*—*B*) पर भी 40 kN का खिंचाव बल दायीं ओर लगना चाहिये जिससे *A*—*B* सन्तुलन में हो जाता है।

छड़ के भाग B—C के लिये,

इसके बायीं ओर के सिरे *B*—*B* पर दायीं ओर बल (90 – 40) = 50 kN लगना चाहिये। फिर इस भाग के सन्तुलन के लिये इस भाग के दूसरे सिरे (*C*—*C*) पर भी 50 kN का दबाव बल लगाना होगा।

छड़ के भाग C—D के लिये,

इस भाग *C*—*D* के सिरे (*C*—*C*) पर बायीं ओर 20 kN का बल दिया था और 50 kN का बल उसी दिशा में हम प्रयोग कर चुके हैं। अतः हमने बायीं ओर 50 – 20 = 30 kN बल अधिक प्रयोग किया जिसे सन्तुलित करने के लिये दायीं ओर 30 kN का बल *C*—*C* पर लगाना होगा जिसके कारण *C*—*D* भाग को सन्तुलित करने के लिये इसके दायें सिरे *D*—*D* पर भी 30 kN का बल, *C*—*C* पर लगे बल के विपरीत दिशा में सम्पीडन का लगाना होगा।

इस प्रकार हम देखते हैं कि छड़ का प्रत्येक भाग सन्तुलन में हो चुका है। सन्तुलन के परीक्षण के लिये हम चित्र में देख सकते हैं कि :

छड़ पर बायीं ओर की दिशा में लगे हुए बल = 40 + 20 + 30 = 90 kN

इसी प्रकार दायीं ओर लगने वाला बल = 90 kN है।

विशेष : छड़ के जिन भागों पर तनाव बल लगे हैं (जैसे भाग *AB* पर) उन्हें (+ve) तथा जिन पर सम्पीडन बल लगे हैं (जैसे *BC* तथा *CD* भाग) उन्हें (–ve) चिह्न का प्रयोग कर कुल लम्बाई में परिवर्तन को ज्ञात करते हैं।

∴ **कुल लम्बाई में परिवर्तन**

$$\Delta l = \Delta l_1 - \Delta l_2 - \Delta l_3 \qquad \left[\because \Delta l = \frac{Fl}{AE}\right]$$

$$= \frac{1}{AE}[F_1 l_1 - F_2 l_2 - F_3 l_3]$$

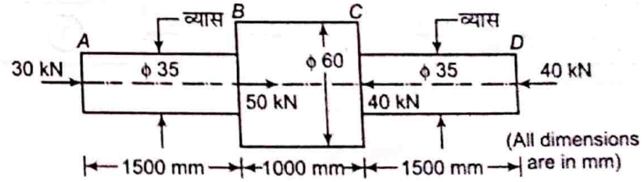
$$= \frac{1}{\frac{\pi\,(30)^2}{4} \times 2 \times 10^5} \times [40 \times 1000 \times 1000 - 50 \times 1000 \times 800 - 30 \times 1000 \times 200]$$

$$= \frac{4}{\pi \times 900 \times 2} \times [400 - 400 - 60]$$

$$= \frac{4 \times 60}{1800\,\pi} = -\,\mathbf{0 \cdot 0424\,mm}$$ उत्तर

∵ छड़ की लम्बाई में वृद्धि को धन (+ve) तथा कमी को ऋण (–ve) माना जाता है। अतः प्राप्त उत्तर (–ve) होने के कारण छड़ की लम्बाई में **0·024 mm की कमी** होगी।

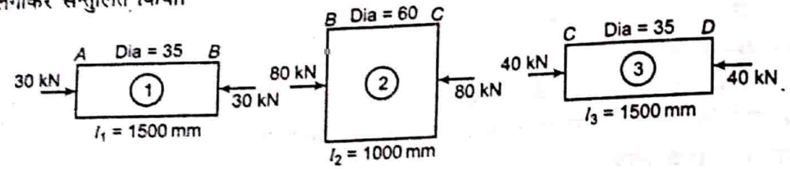
उदाहरण 17. एक स्टैण्ड छड़ पर चित्र 1.31 (अ) के अनुसार बल लगे हैं। छड़ की पूर्ण लम्बाई में परिवर्तन ज्ञात कीजिये। E = 200 GPa है। **(U.P. 2007), (U.K. 2014, S)**



चित्र 1.31 (अ)

Scanned with CamScanner

हल— चित्र 1.31 (ब) में तीनों भागों AB, BC तथा CD को अलग-अलग बनाकर पिछले उदाहरण 15 व 16 की भाँति बल लगाकर सन्तुलित किया।



चित्र 1.31 (ब)

∴ कुल $\Delta l = -\Delta l_1 - \Delta l_2 - \Delta l_3$ [∵ तीनों पर सम्पीडन बल है, ∴ लम्बाई में कमी होगी]

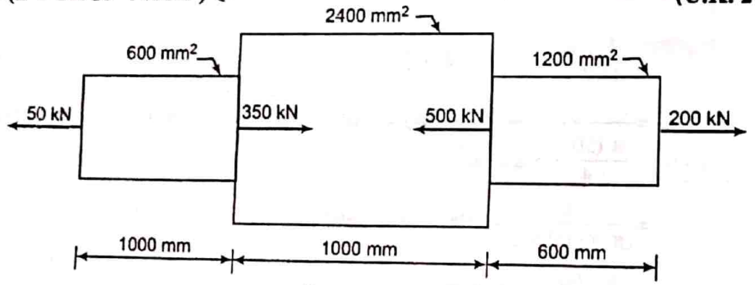
$$= -\left[\frac{30\times1000\times1500}{\frac{\pi(35)^2}{4}\times200\times10^3}+\frac{80\times1000\times1000}{\frac{\pi(60)^2}{4}\times2\times10^5}+\frac{40\times1000\times1500}{\frac{\pi(35)^2}{4}\times2\times10^5}\right]$$

$$= -[0{\cdot}234+0{\cdot}1415+0{\cdot}312]$$

$$= -0{\cdot}6875 \text{ mm}$$

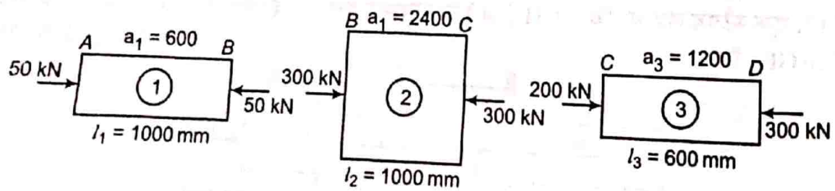
उत्तर ∴ दी गई छड़ पर बलों के प्रभाव में लम्बाई में $0{\cdot}6875$ mm की कमी होगी।

उदाहरण 18. चित्र 1.32 (अ) में दर्शाई गई छड़ की पूर्ण लम्बाई में परिवर्तन (Change in lenght or extension) ज्ञात कीजिये। ($E = 2\times10^5$ N/mm²) है। (U.K. 2013) B.P. (S)



चित्र 1.32 (अ)

हल—चित्र 1.32 (ब) में तीनों भागों AB, BC तथा CD को अलग-अलग बनाकर पिछले उदाहरण 1.31 की भाँति सन्तुलित बल लगाकर सन्तुलित (Balanced) करते हैं।



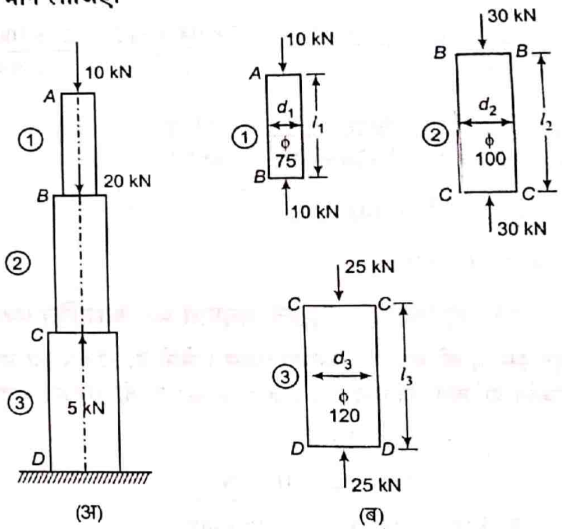
चित्र 1.32 (ब)

∴ लम्बाई में कुल परिवर्तन $\Delta l = \Delta l_1 - \Delta l_2 + \Delta l_3$ [तनाव बल (+ ve) तथा सम्पीडन बल (−ve) लेते हैं।

$$\Delta l = \left(\frac{50\times1000\times1000}{600\times2\times10^5}\right)-\left(\frac{300\times1000\times1000}{2400\times2\times10^5}\right)+\left(\frac{200\times1000\times600}{1200\times2\times10^5}\right)$$

$$= 0{\cdot}4166 - 0{\cdot}625 + 0{\cdot}5 = 0{\cdot}2916 \text{mm}$$ (अर्थात् लम्बाई में 0·2916 mm की वृद्धि होगी)

उदाहरण 19. चित्र 1.33 (अ) में एक छोटे सोपानी दंड (Stepped Rod) को दर्शाया गया है जिस पर अक्षीय भार लगाया गया है। AB, BC तथा CD खंडों के व्यास क्रमशः 75 mm, 100 mm तथा 150 mm जबकि उनकी लंबाइयाँ क्रमशः 100 mm, 150 mm तथा 200 mm हैं। इस दंड में अधिकतम प्रतिबल तथा कुल लम्बाई में कमी ज्ञात कीजिए। $E = 200\times10^3$ N/mm² मान लीजिए। (UP 2012)



चित्र 1.33

हल—दिया है: AB लम्बाई $l_1 = 100$ mm में व्यास (dia) $d_1 = 75$ mm

BC लम्बाई $l_2 = 150$ mm में व्यास (dia) $d_2 = 100$ mm

CD लम्बाई $l_3 = 200$ mm में व्यास (dia) $d_3 = 150$ mm

चित्र 1.32 (अ) के भागों (Parts) को चित्र 1.32 (ब) के अनुसार अलग-अलग बनाकर बलों (Forces) को लगाकर सन्तुलित किया।

(1) पहले भाग AB में प्रतिबल (Stress) $p_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{10\times1000}{\pi(75)^2/4}$

∴ $p_1^{AB} = 2{\cdot}265$ N/mm²

(2) दूसरे भाग BC में प्रतिबल $p_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{30\times1000}{\pi(100)^2/4}$

∴ $p_2^{BC} = 3{\cdot}822$ N/mm²

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

(3) तीसरे भाग CD में प्रतिबल $P_3 = \frac{F_3}{A_3} = \frac{25000 \text{N}}{\pi (150)^2/4}$

$\therefore \quad P_3^{CD} = 1{\cdot}415 \text{ N/mm}^2$

अतः छड़ के तीनों भागों में से बीच के भाग BC में प्रतिबल अधिकतम (max. stress) है जो कि $3{\cdot}822 \text{ N/mm}^2$ है।

(4) अब संयुक्त छड़ की लम्बाई में कुल कमी

$$\Delta l = \frac{1}{E}\left[\frac{F_1 l_1}{A_1} + \frac{F_2 l_2}{A_2} + \frac{F_3 l_3}{A_3}\right] \text{ सूत्र से}$$

$$= \frac{1}{2 \times 10^5}\left[\frac{100 \times 1000 \times 100}{\pi (75)^2/4} + \frac{30 \times 1000 \times 150}{\pi (100)^2/4} + \frac{25 \times 1000 \times 200}{\pi (15)^2/4}\right]$$

$$= \frac{10^5 \times 4}{\pi \times 2 \times 10^5}\left[\frac{10}{(75)^2} + \frac{45}{(100)^2} + \frac{50}{(15)^2}\right]$$

$$\Delta l = \frac{2}{\pi}[0{\cdot}2285] = 0{\cdot}1455 \text{ mm}$$

$\therefore$ छड़ की लम्बाई में कुल कमी = **0·1455 mm** उत्तर

विशेष : पार्श्व विकृति तथा पॉइजन अनुपात पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 20. (A) एक मृदु इस्पात की छड़ पर जिसका व्यास 1 सेमी है, 22 kN का भार लगाये जाने से उसके व्यास में 0·0004 सेमी का परिवर्तन हो जाता है। यदि $E = 200 \text{ GN/m}^2$ हो तो पॉइजन अनुपात ज्ञात करें।

हल— $\because$ व्यास $\quad d = 1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$

भार या बल $\quad F = 22 \text{ kN} = 22 \times 1000 \text{ N}$

व्यास में परिवर्तन $\quad \Delta d$ (या δd) $= 0{\cdot}0004 \text{ cm} = 0{\cdot}004 \text{ mm}$

$$E = 200 \text{ GN/m}^2 = 200 \times 1000 \text{ N/mm}^2$$

विकृति, $\quad e = \frac{p}{E} = \frac{F}{AE} = \frac{22 \times 1000 \times 4}{\pi (10)^2 \times 2 \times 10^5} = 1{\cdot}4 \times 10^{-3}$

अब सूत्र $\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{m} \times e$ द्वारा,

$$\frac{0{\cdot}004}{10} = \frac{1}{m} \times 1{\cdot}4 \times 10^{-3}$$

या $\quad \frac{1}{m} = \frac{0{\cdot}004}{10 \times 1{\cdot}4 \times 10^{-3}}$

$\therefore$ पॉइजन अनुपात, $\quad \frac{1}{m} = 0{\cdot}2856$ उत्तर

***उदाहरण 20. (B) 20 mm व्यास की एक वृत्ताकार अनुप्रस्थ काट तथा 3 मीटर लम्बाई की एक ऊर्ध्वाधर धातु की छड़ पर 150 kN का तनाव बल लगा है। यदि पॉइजन अनुपात 0·25 तथा $E = 0{\cdot}9 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ हो तो व्यास में कमी की गणना कीजिये।**

हल—काट का क्षेत्रफल $\quad A = \frac{\pi (20)^2}{4} = 314{\cdot}16 \text{ mm}^2$

लम्बाई $\quad l = 3000 \text{ mm}$

बल $\quad F = 150 \text{ kN} = 150 \times 1000 \text{ N}$

पॉइजन अनुपात, $\quad \frac{1}{m} = 0{\cdot}25, \; E = 0{\cdot}9 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

$\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{m} \times e$ सूत्र द्वारा $\quad \left(\text{जहाँ } e = \frac{p}{E} = \frac{F}{AE}\right)$

व्यास में कमी $\quad \Delta d = 20 \times 0{\cdot}25 \times \frac{150 \times 1000}{314{\cdot}16 \times 0{\cdot}9 \times 10^5}$

$$= \mathbf{0{\cdot}0265 \text{ mm}}$$ उत्तर

उदाहरण 21. एक 20 mm व्यास की धातु की छड़ पर 5 kN का अक्षीय भार लगाया जाता है। इसके 50 mm लम्बाई में उत्पन्न दैर्ध्यवृद्धि 220 µm है। यदि छड़ के पद का पॉइजन अनुपात (Poisson's Ratio) 0·28 है, तब ज्ञात कीजिये :

(i) छड़ के व्यास में उत्पन्न कमी, तथा

(ii) छड़ के पदार्थ का दृढ़ता मापांक (G)। (U.P. 2011)

हल— दिया है, $\quad \Delta l = 220 \,\mu\text{m} = 220 \times 10^{-3} \text{ mm}, \; d = 20 \text{ mm}$

पॉइजन अनुपात = 0·28, बल $F = 5 \text{ kN} = 5000 \text{ N}$ और $l = 50 \text{ mm}$

अनुदैर्ध्य विकृति $\quad (e) = \frac{\Delta l}{l} = \frac{220 \times 10^{-3}}{50} = 4{\cdot}4 \times 10^{-3}$

पार्श्व विकृति (Lateral Strain) $\Rightarrow \quad \frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{m} \times e$ सूत्र से

$\therefore$ व्यास में कमी $\quad \Delta d = d \times \frac{1}{m} \times e$

$$= 20 \times 0{\cdot}28 \times 4{\cdot}4 \times 10^{-3}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}02464 \text{ mm}}$$ उत्तर

अब सूत्र $\Delta l = \frac{Fl}{AE}$ से $\quad E = \frac{5000 \times 50}{220 \times 10^{-3} \times \pi (20)^2/4} = 3618{\cdot}99$

$\therefore \quad E = 0{\cdot}362 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$

अब सूत्र $E = 2G\left[1 + \frac{1}{m}\right]$ से,

$$0{\cdot}362 \times 10^4 = 2 \times G \times 1{\cdot}28$$

या $\quad G = 1413{\cdot}6689$

या $\quad G = \mathbf{1{\cdot}41 \times 10^3 \text{ N/mm}^2}$ उत्तर

उदाहरण 22. इस्पात (Steel) की एक छड़ 5 m लम्बी, 20 cm चौड़ी तथा 10 cm मोटी है। 400 kN के बल से इसे लम्बाई में खींचा जाता है। यदि इस्पात के लिये पॉइजन अनुपात 0·28, E = 200 GPa हो तो छड़ की लम्बाई में वृद्धि, चौड़ाई एवं मोटाई में कमी तथा आयतन में परिवर्तन ज्ञात कीजिये तथा बताइये कि आयतन में वृद्धि होती है या कमी ? (U.K. 2004)

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

हल—$E = 200\ GPa = 200\ kN/mm^2 = 2\times10^5\ N/mm^2$

$l = 5\ m = 5000\ mm$

$b = 20\ cm = 200\ mm,\quad t = 10\ cm = 100\ mm$

$A = 200\times100 = 2\times10^4\ mm^2$

$F = 400\ kN = 4\times10^5\ N$

छड़ का आरम्भिक आयतन,

$$V = 5000\times200\times100 = 1\times10^8\ mm^3$$

छड़ में उत्पन्न प्रतिबल (Stress), $f = \frac{F}{A} = \frac{4\times10^5}{2\times10^4} = \mathbf{20\ N/mm^2}$

क्योंकि $E = \frac{f}{e}$

∴ लम्बाई में विकृति, $e = \frac{f}{E} = \frac{20}{2\times10^5} = 1\times10^{-4}$

क्योंकि $e = \frac{\Delta l}{l}$

∴ $\Delta l = e.l$

∴ लम्बाई में वृद्धि, $\Delta l = 1\times10^{-4}\times5000 = \mathbf{0{\cdot}5\ mm}$

अब, पार्श्व विकृति $= \frac{e}{m} = 10^{-4}\times0{\cdot}28 = 2{\cdot}8\times10^{-5}$

अत: पार्श्व विकृति $\frac{e}{m} = \frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta b}{b} = 2{\cdot}8\times10^{-5}$

∴ चौड़ाई में कमी $\Delta b = 2{\cdot}8\times10^{-5}\times b$

$= 2{\cdot}8\times10^{-5}\times200 = \mathbf{5{\cdot}6\times10^{-3}\ mm}$ उत्तर

मोटाई में कमी, $\Delta t = 2{\cdot}8\times10^{-5}\times t$

$= 2{\cdot}8\times10^{-5}\times100 = \mathbf{2{\cdot}8\times10^{-3}}$ उत्तर

हम जानते हैं कि आयतन विकृति,

$$e_v = \frac{\Delta V}{V} = e\left(1-\frac{2}{m}\right)$$

$= 10^{-4}(1-2\times0{\cdot}28)$

$= 10^{-4}\times0{\cdot}44 = \mathbf{4{\cdot}4\times10^{-5}}$ उत्तर

∴ आयतन में परिवर्तन, $\Delta V = 4{\cdot}4\times10^{-5}\times V$

$= 4{\cdot}4\times10^{-5}\times10^8$

$= \mathbf{4{\cdot}4\times10^3\ mm^3}$

क्योंकि यह मान धन (+ve) है इसलिये यह आयतन में वृद्धि है। उत्तर

उदाहरण 23. धातु के एक बेलन की लम्बाई 600 mm तथा व्यास 300 mm है। इसे लम्बाई में 200 kN के बल द्वारा दबाया जाता है। यदि बेलन की लम्बाई में 0·03 mm की कमी और आयतन में 10^3 mm की कमी हुई हो तो धातु के लिये प्रतिबल, पॉइजन अनुपात तथा E के मान ज्ञात कीजिये। बेलन के व्यास में वृद्धि की भी गणना कीजिये।

हल—$l = 600\ mm,\ d = 300\ mm,\ F = 200\ kN = 2\times10^5\ N,\ \Delta l = 0{\cdot}03\ mm,\ \Delta V = 10^3\ mm^3$

बेलन की काट का क्षेत्रफल, $A = \frac{\pi}{4}\times d^2 = \frac{\pi}{4}\times300^2 = 70650\ mm^2$

अब बेलन की लम्बाई में विकृति, $e = \frac{\Delta l}{l}$

$e = \frac{0{\cdot}03}{600} = 5\times10^{-5}$

बेलन में प्रतिबल (Stress) $f = \frac{F}{A} = \frac{2\times10^5}{70650} = \mathbf{2{\cdot}83\ N/mm^2}$ उत्तर

∴ यंग मापांक, $E = \frac{f}{e} = \frac{2{\cdot}83}{5\times10^{-5}} = 56600 = \mathbf{0{\cdot}566\times10^5\ N/mm^2}$ उत्तर

बेलन का आरम्भ में आयतन $V = \frac{\pi}{4}\times300^2\times600$

$= 4{\cdot}2408\times10^7\ mm^3$

बेलन में आयतन विकृति, $\boxed{\frac{\delta V}{V} = e\left(1-\frac{2}{m}\right)}$ सूत्र से

∴ बेलन के आयतन में कमी, $\delta V = e\times V\left(1-\frac{2}{m}\right)$

∴ मान रखने पर, $10^3 = 5\times10^{-5}\times4{\cdot}2408\times10^7\left(1-\frac{2}{m}\right)$

$\left(1-\frac{2}{m}\right) = 0{\cdot}472$

या $\frac{2}{m} = 0{\cdot}528$

∴ पॉइजन अनुपात, $\boxed{\frac{1}{m} = 0{\cdot}264 \approx \mathbf{0{\cdot}3}}$ उत्तर

अब $\boxed{\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{m}e}$ सूत्र से

व्यास में कमी, $\Delta d = d\times\frac{1}{m}\times e$

∴ $\Delta d = 300\times0{\cdot}264\times5\times10^{-5} = \mathbf{3{\cdot}96\times10^{-3}\ mm}$ उत्तर

उदाहरण 24. 40 mm × 30 mm की आयताकार काट की 0·5 मीटर लम्बी एक छड़ पर 12 T का अक्षीय सम्पीडन बल लगा है। छड़ की मापों में परिवर्तन की गणना कीजिए। मानिये m = 4 तथा $E = 2\times10^6\ kg/cm^2$ है।

हल—छड़ की लम्बाई $l = 0{\cdot}5\ m = 50\ cm$

छड़ की काट की चौड़ाई $b = 40\ mm = 4\ cm$

छड़ की काट की मोटाई $t = 30\ mm = 3\ cm$

अक्षीय सम्पीडन बल $F = 12\ T = 12000\ kg_f$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

∴ लम्बाई में परिवर्तन,

$$\Delta t = \frac{Fl}{AE} = \frac{12000 \times 50}{(4 \times 3) \times 2 \times 10^6} = 0{\cdot}025 \text{ cm}$$

या $\Delta l = 0{\cdot}25$ **mm** (सम्पीडन बल के कारण कमी होगी)

∵ पार्श्व विकृति, $\frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{m} \times e$ (सूत्र)

∴ $$\Delta b = b \times \frac{1}{m} \times e$$

$$= 4 \times \frac{1}{4} \times \frac{0{\cdot}025}{50} = \mathbf{0{\cdot}0005 \text{ cm}}$$

अतः काट की चौड़ाई में वृद्धि $\Delta b = \mathbf{0{\cdot}005 \text{ mm}}$

काट की मोटाई में परिवर्तन, $\Delta t = t \times \frac{1}{m} \times e$

$$= 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{0{\cdot}025}{50}$$

अतः मोटाई में वृद्धि $\Delta t = {\cdot}000375$ cm

$$= \mathbf{0{\cdot}00375 \text{ mm}}$$

****उदाहरण 25. एक 2 मीटर लम्बी छड़ जिसकी अनुप्रस्थ काट 60 mm × 50 mm है, 60 kN का अक्षीय तनाव भार वहन करती है। छड़ की परिवर्तित विमाओं की गणना कीजिए यदि $m = 3{\cdot}6$ तथा $E = 200$ GPa है।**

हल—अक्षीय तनाव प्रतिबल $f_x = \frac{F}{A} = \frac{60 \times 1000 \text{ N}}{60 \times 50} = 20 \text{ N/mm}^2$

अक्षीय (अनुदैर्ध्य) विकृति, $\boxed{e_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{f_x}{E}}$ (सूत्र)

∴ लम्बाई में परिवर्तन $\Delta l = \frac{l \times f_x}{E} = \frac{2000 \times 20}{200 \times 10^3}$

या $\Delta l = \mathbf{0{\cdot}2 \text{ mm}}$

परिवर्तित होने के पश्चात् छड़ की लम्बाई

$$L = l + \Delta l = 2000 + 0{\cdot}2$$

$$= 2000{\cdot}2 \text{ mm} = \mathbf{2{\cdot}0002 \text{ m}}$$

चौड़ाई में परिवर्तन, $\Delta b = b \times \frac{1}{m} \times e$ सूत्र से, $\left[\because \text{ पार्श्व विकृति} \left(\frac{\Delta b}{b} \text{ या } \frac{\Delta t}{t}\right) = \frac{1}{m} \times \right.$

$$\Delta b = 60 \times \frac{1}{3{\cdot}6} \times 1 \times 10^{-4} = 0{\cdot}001666 \text{ mm}$$

∴ परिवर्तित होने के बाद छड़ की कुल चौड़ाई $= b - \Delta b = 60 - {\cdot}001666$

$$= \mathbf{59{\cdot}9983}$$

काट की मोटाई में परिवर्तन, $\Delta t = t \times \frac{1}{m} \times e$ सूत्र से,

∴ $$\Delta t = 50 \times \frac{1}{3{\cdot}6} \times 1 \times 10^{-4} = \mathbf{0{\cdot}0013888 \text{ mm}}$$

अब परिवर्तित होने के पश्चात् कुल मोटाई $= t - \Delta t = 50 - 0{\cdot}0013888$

$$= \mathbf{49{\cdot}9986 \text{ mm}}$$ **उत्तर**

****उदाहरण 26. 250 mm लम्बी एक छड़ की अनुप्रस्थ काट 40 mm चौड़ी तथा 30 mm मोटाई की है। इस पर चौड़ाई की दिशा में 180 N/mm² का एक सम्पीडन प्रतिबल लगाया गया है। छड़ की मापों में परिवर्तन की गणना कीजिये। मानिए $E = 200$ GN/m² तथा $m = 4$ है।**

हल—$E = 200 \text{ GN/m}^2 = 200 \text{ kN/mm}^2 = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

छड़ में अनुदैर्ध्य विकृति (चौड़ाई की दिशा में) होगी।

∴ $$e_b = \frac{P_b}{E} = \frac{180}{2 \times 10^5}$$ (सम्पीडन विकृति)

या $$e_b = \frac{\Delta b}{b} = \frac{180}{2 \times 10^5}$$

या चौड़ाई में कमी, $$\Delta b = b \times \frac{180}{2 \times 10^5}$$

या $$\Delta b = 40 \times \frac{180}{2 \times 10^5}$$

$$= 3{\cdot}6 \times 10^{-2} \text{ mm} = \mathbf{0{\cdot}036 \text{ mm}}$$ **उत्तर**

अब पार्श्व विकृति, $\left(\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta l}{l}\right) = \frac{1}{m} \times e$ सूत्र द्वारा,

यहाँ (तनाव विकृति होगी)

∴ $$\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{4} \times \frac{180}{2 \times 10^5}$$

अतः मोटाई में वृद्धि

$$\Delta t = 30 \times \frac{1}{4} \times \frac{180}{2 \times 10^5}$$

$$= 0{\cdot}675 \times 10^{-2} \text{ mm} = \mathbf{0{\cdot}00675 \text{ mm}}$$ **उत्तर**

तथा लम्बाई में वृद्धि

$$\Delta l = 250 \times \frac{1}{4} \times \frac{180}{2 \times 10^5} = \mathbf{0{\cdot}05625 \text{ mm}}$$ **उत्तर**

jmo

उदाहरण 27. एक आयताकार काट की छड़ की लम्बाई 2 m, चौड़ाई 80 mm तथा गहराई 50 mm है। इस पर क्रमशः लम्बाई की दिशा में तनाव 150 N/mm², चौड़ाई की दिशा में 120 N/mm² का सम्पीडन तथा गहराई की दिशा में 100 N/mm² का तनाव प्रतिबल लगा है। छड़ की विमाओं तथा आयतन में परिवर्तन का मान ज्ञात कीजिए, जबकि : $E = 2 \times 10^5 \text{N/mm}^2, \frac{1}{m} = \frac{1}{4}$ है।

(U.K. 2018)

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

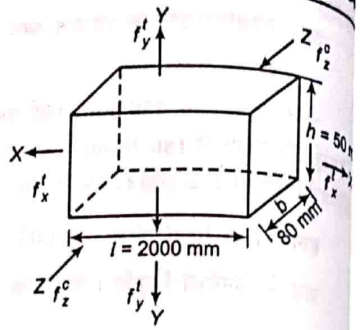
हल—दिया है,

$f_x^t = 150$ N/mm^2 (तनाव प्रतिबल)

$f_y^t = 100$ N/mm^2 (तनाव प्रतिबल)

$f_z^c = 120$ N/mm^2 (सम्पीडन प्रतिबल)

$\frac{1}{m} = \frac{1}{4}, E = 2\times10^5$ N/mm^2



चित्र 1.34

x-अक्ष की दिशा में अक्षीय विकृति

∴ $e_x = \left(\frac{f_x}{E} - \frac{f_y}{mE} + \frac{f_z}{mE}\right)$

या $e_x = \frac{150}{2\times10^5} - \frac{100}{4\times2\times10^5} + \frac{120}{4\times2\times10^5} = 0{\cdot}000775$

अब y-अक्ष की दिशा में विकृति

$e_y = \frac{f_y}{E} - \frac{f_x}{mE} + \frac{f_z}{mE}$

∴ $e_y = \frac{100}{2\times10^5} - \frac{150}{4\times2\times10^5} + \frac{120}{4\times2\times10^5} = 0{\cdot}0004625$

तथा z-अक्ष की दिशा में कुल विकृति

$e_z = -\frac{f_z}{E} - \frac{f_x}{mE} - \frac{f_y}{mE}$

∴ $e_z = -\frac{120}{2\times10^5} - \frac{150}{4\times2\times10^5} - \frac{100}{4\times2\times10^5} = -0{\cdot}0009125$

∴ आयतन विकृति

$e_v = e_x + e_y + e_z = {\cdot}000775 + {\cdot}0004625 - {\cdot}0009125$

या $\frac{\Delta V}{V} = e_v = 0{\cdot}000325$

या $\Delta V = V \times e_v = (2000\times80\times50)\times{\cdot}000325$

या आयतन में परिवर्तन, $\Delta V = 2600$ **mm^3**

अब $\frac{\Delta b}{b} = e_z$ या $\Delta b = b\times e_z = 80\times(-{\cdot}0009125)$

$= 0{\cdot}073$ mm (चौड़ाई में कमी)

तथा $\frac{\Delta h}{h} = e_y$ या $\Delta h = h\times e_y = 50\times0{\cdot}0004625$

$= 0{\cdot}023125$ mm (गहराई में वृद्धि)

∵ $\frac{\Delta l}{l} = e_x$ या $\Delta l = l\times e_x$

$= 2000\times0{\cdot}000775 = $ **1·55 mm**

∴ लम्बाई में 1·55 mm की वृद्धि होगी।

उदाहरण 28. चित्र 1.35 में आयताकार इस्पात का टुकड़ा दिखाया गया है। इसके पदार्थ का यंग मापांक $E = 200$ kN/mm^2 तथा $\frac{1}{m} = 0{\cdot}3$ है। इस पर दिखायी गयी दिशाओं में बल कार्य कर रहे हैं। टुकड़े के आयतन में परिवर्तन ज्ञात कीजिये और बताइये कि आयतन में वृद्धि होगी या कमी। **(U.K. 2017)**

हल—$X—X$ दिशा के लिये टुकड़े की काट का क्षेत्रफल = 100 mm × 200 mm

या $A_x = 2\times10^4$ mm^2

$Y—Y$ दिशा के लिये टुकड़े की काट का क्षेत्रफल

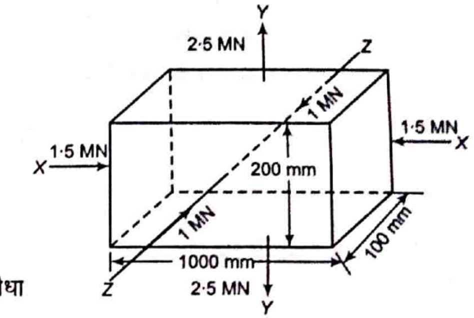
= 1000 mm × 100 mm

या $A_y = 1\times10^5$ mm^2

$Z—Z$ दिशा के लिये टुकड़े की काट का क्षेत्रफल

= 1000 mm × 200 mm

या $A_z = 2\times10^5$ mm^2



चित्र 1.35

1·5 MN के सम्पीडन बल के कारण $X — X$ दिशा में सीधा

प्रतिबल = बल/क्षेत्रफल $\left[\text{Stress} = \frac{\text{Force}}{\text{Area}}\right]$

$f_x = \frac{1{\cdot}5\times10^6}{A_x} = \frac{1{\cdot}5\times10^6}{2\times10^4} = 75$ N/mm^2

2·5 MN के तनाव बल के कारण $Y—Y$ दिशा में सीधा प्रतिबल

$f_y = \frac{2{\cdot}5\times10^6}{A_y} = \frac{2{\cdot}5\times10^6}{1\times10^5} = 25$ N/mm^2

1 MN के सम्पीडन बल के कारण $Z—Z$ दिशा में सीधा प्रतिबल

$f_z = \frac{1\times10^6}{A_z} = \frac{1\times10^6}{2\times10^5} = 5$ N/mm^2

प्रश्न के अनुसार $E = 200$ kN/mm$^2 = 2\times10^5$ N/mm^2

X—X दिशा में विकृति :

$X—X$ दिशा में f_x के कारण विकृति ऋणात्मक (–ve) होगी क्योंकि बल सम्पीडन (Compression) का है, परन्तु अन्य दिशाओं में यह वृद्धि करेगा।

∴ f_x के कारण विकृति $= -\frac{f_x}{E} = -\frac{75}{2\times10^5}$

f_y के कारण $X — X$ दिशा में पार्श्व विकृति ऋणात्मक (–ve) होगी क्योंकि बल तनाव (Tension) का है। अत: यह $Y—Y$ दिशा में वृद्धि करेगा, अन्य दिशाओं में कमी।

∴ f_y के कारण पार्श्व विकृति $= -\frac{f_y}{mE} = -\frac{25\times0{\cdot}3}{2\times10^5}$

f_z के कारण $X—X$ दिशा में पार्श्व विकृति धनात्मक (+ve) होगी क्योंकि बल सम्पीडन में है। अत: यह $Z—Z$ दिशा में विकृति को घटायेगा तथा अन्य दिशाओं में वृद्धि करेगा।

Scanned with CamScanner

$\therefore$ f_z के कारण पार्श्व विकृति $= \frac{f_z}{mE} = \frac{5 \times 0.3}{2 \times 10^5}$

$\therefore$ कुल विकृति,

$$e_x = -\frac{f_x}{E} - \frac{f_y}{mE} + \frac{f_z}{mE}$$

$$= -\frac{75}{2 \times 10^5} - \frac{25 \times 0.3}{2 \times 10^5} + \frac{5 \times 0.3}{2 \times 10^5} = -\frac{0.81}{2 \times 10^3}$$

Y—Y दिशा में विकृति :

ऊपर दिये गये विवरण के आधार पर,

$$e_y = \frac{f_y}{E} + \frac{f_x}{mE} + \frac{f_z}{mE}$$

$$= \frac{25}{2 \times 10^5} + \frac{5 \times 0.3}{2 \times 10^5} + \frac{75 \times 0.3}{2 \times 10^5} = \frac{0.49}{2 \times 10^3}$$

Z—Z दिशा में विकृति :

$$e_z = \frac{f_z}{E} - \frac{f_y}{mE} + \frac{f_x}{mE}$$

$$= -\frac{5}{2 \times 10^5} - \frac{25 \times 0.3}{2 \times 10^5} + \frac{75 \times 0.3}{2 \times 10^5} = \frac{0.1}{2 \times 10^3}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = e_x + e_y + e_z$$

$$= -\frac{0.81}{2 \times 10^3} + \frac{0.49}{2 \times 10^3} + \frac{0.1}{2 \times 10^3} = -\frac{0.22}{2 \times 10^3}$$

अत: आयतन में परिवर्तन $\Delta V = -\frac{0.22}{2 \times 10^3} \times V$

क्योंकि $V = 1000 \times 100 \times 200 = 2 \times 10^7$ mm^3

$$\Delta V = -\frac{0.22}{2 \times 10^3} \times 2 \times 10^7$$

अत: आयतन में परिवर्तन $\Delta V = -2.2 \times 10^3$ mm^3

क्योंकि यह ऋण (–ve) है इसलिये आयतन घटेगा।

अत: **आयतन में कमी $= 2.2 \times 10^3$ mm^3**

अत: अन्त में शेष आयतन $= V - \Delta V$

$$= 2 \times 10^7 - 2.2 \times 10^3$$

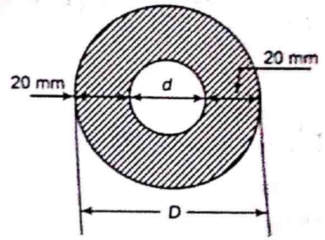
$$= \mathbf{19997.8 \times 10^3 \text{ mm}^3}$$

उदाहरण 29. *लोहे के बने खोखले खम्भे पर 800 kN का सम्पीडन बल (Compressive Force) लगाया जा... और लोहे का अन्तिम प्रतिबल (Ultimate Stress) 800 N/mm^2 है। यदि खम्भे की दीवार की मोटाई 20 mm रख... तो सुरक्षा गुणांक 8 के लिये खम्भे का अन्त:व्यास ज्ञात कीजिये।* **(U.P.20...**

हल—माना अन्त:व्यास d तथा बाह्य व्यास D है।

$$D = d + 2 \times \text{चादर की मोटाई}$$

$$= d + 2 \times 20 = (d + 40)$$



चित्र 1.36

सुरक्षा गुणांक

$$S = \frac{\text{अन्तिम प्रतिबल}}{\text{कार्यकारी प्रतिबल}}$$

या $8 = \frac{800}{p \text{ (माना)}}$

$\therefore$ कार्यकारी या सुरक्षात्मक प्रतिबल,

$$p = \frac{800}{8} = 100 \text{ N/mm}^2$$

परन्तु प्रतिबल $p = \frac{\text{बल } (F)}{\text{क्षेत्रफल } (A)}$

$\therefore$ $100 = \frac{800 \times 1000}{A}$

या $A = 8000$ mm^2

परन्तु खम्भे की काट का क्षेत्रफल,

$$A = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}$$

या $8000 = \frac{\pi [(d+40)^2 - d^2]}{4} = \frac{\pi [1600 + 80d]}{4}$

या $1600 + 80d = \frac{32000}{\pi} = 10185.92$

या $d = \frac{(10185.92 - 1600)}{80} = \frac{8585.92}{80} = 107.32$ mm उत्तर

विशेष : संयुक्त काट वाली छड़ तथा स्तम्भ पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 30. समान लम्बाई की दो छड़ें A तथा B आपस में 60 सेमी की दूरी पर ऊर्ध्वाधर लटकी हैं तथा एक क्षैतिज छड़ को आलम्बित करती हैं। एक 50 kN का भार A से 20 सेमी की दूरी पर क्षैतिज छड़ पर लटकाया जाता है। यदि छड़ B में 50 N/mm^2 का प्रतिबल उत्पन्न हो, तो छड़ A में प्रतिबल तथा A व B छड़ों की काट के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $E_A = 2 \times 10^5$ N/mm^2 तथा $E_B = 0.9 \times 10^5$ N/mm^2 है।

हल—दिया है, 50 kN का भार क्षैतिज छड़ पर A से 20 cm (200 mm) की दूरी पर (माना बिन्दु C पर) लटका है तो छड़ B से इसकी दूरी $= 60 - 20 = 40$ cm (400 mm) होगी।

माना छड़ A में खिंचाव बल F_A तथा छड़ B में खिंचाव बल F_B है।

छड़ A में प्रतिबल P_A तथा छड़ B में प्रतिबल P_B है।

छड़ A की काट का क्षेत्रफल A_a तथा छड़ B की काट का क्षेत्रफल A_b है।

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

अब भार के बिन्दु C पर घूर्ण लेने पर,

$$F_A \times 200 = F_B \times 400$$

या $$F_A = 2F_B$$

परन्तु $$F_A + F_B = F \text{ (कुल भार बल)}$$

या $$2F_B + F_B = F$$

या $$3F_B = F$$

या $$F_B = \frac{F}{3} = \frac{50}{3} \text{ kN}$$

$$F_A = 2F_B = 2 \times \frac{50}{3} = \frac{100}{3} \text{ kN}$$

अब $\frac{p_A}{E_A} = \frac{p_B}{E_B}$ सूत्र से,

$$p_A = p_B \times \frac{E_A}{E_B} = 50 \times \frac{2 \times 10^5}{0.9 \times 10^5}$$

छड़ A में प्रतिबल,

$$p_A = \frac{1000}{9} = \mathbf{111 \cdot 11 \ N/mm^2}$$ उत्तर

$$p_A = \frac{F_A}{A_a}$$

$$A_a = \frac{F_A}{p_A}$$

$\therefore$ $$A_a = \frac{\frac{100}{3} \times 1000}{1000/9} = \mathbf{300 \ mm^2}$$ उत्तर

तथा $$p_B = \frac{F_B}{A_b}$$

या $$A_b = \frac{F_B}{p_B}$$

$\therefore$ $$A_b = \frac{\frac{50}{3} \times 1000}{50} = \mathbf{333 \cdot 33 \ mm^2}$$ उत्तर

उदाहरण 31. इस्पात (Steel) तथा ताँबे (Copper) की एक संयुक्त छड़ की कुल काट का क्षेत्रफल 20 सेमी² है जिसमें $A_s = 8$ सेमी² है। प्रत्येक छड़ की लम्बाई 50 सेमी है। संयुक्त छड़ पर 28 T का तनाव बल लगा है। दोनों पदार्थों में प्रतिबल (p_s तथा p_c) तथा लम्बाई में वृद्धि का मान ज्ञात कीजिये, जबकि $E_s = 2 \times 10^6$ kg/cm² तथा $E_c = 1 \times 10^6$ kg/cm² है।

हल—$A_c + A_s = 20 \text{ cm}^2$ तथा $A_s = 8 \text{ cm}^2$ दिया है, तब

$$A_c = 20 - 8 = 12 \text{ cm}^2$$

अब $\frac{P_s}{E_s} = \frac{p_c}{E_c}$ सूत्र से,

$$p_s = p_c \times \frac{2 \times 10^6}{1 \times 10^6} = 2p_c$$

अतः $$p_s = 2p_c \qquad \ldots(1)$$

अब $p_s A_s + p_c A_c = F$ सूत्र से,

$$2p_c \times 8 + p_c \times 12 = 28000 \text{ kg}_f$$

या $p_c[16 + 12] = 28000$ या $p_c = \frac{28000}{28} = 1000 \text{ kg}_f/\text{cm}^2$

$\therefore$ **ताँबे की छड़ में प्रतिबल,**

$$p_c = 1000 \text{ kg/cm}^2 = \mathbf{100 \ N/mm^2}$$ उत्तर

तथा स्टील की छड़ में प्रतिबल,

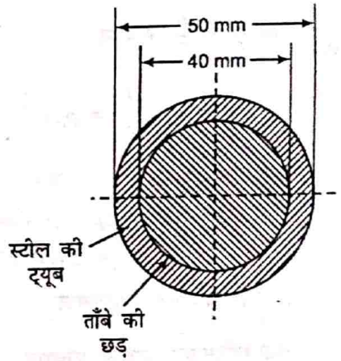
$$p_s = 2p_c = 2 \times 100 = \mathbf{200 \ N/mm^2}$$ उत्तर

$\because$ **संयुक्त छड़ की लम्बाई में परिवर्तन,** $\Delta l = \frac{p_s l}{E_s}$ (सूत्र)

$\therefore$ $$\Delta l = \frac{2000 \times 50}{2 \times 10^6} = 0 \cdot 05 \text{ cm} = \mathbf{0 \cdot 5 \ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 32. 40 mm व्यास की ताँबे की एक छड़ 40 mm आन्तरिक व्यास तथा 50 mm बाह्य व्यास की इस्पात की ट्यूब से घिरी हुई है। प्रत्येक की लम्बाई 800 mm है। इस समुच्चय (Assembly) को 165 kN के अक्षीय भार द्वारा सम्पीडित किया जाता है। प्रत्येक पदार्थ में उत्पन्न प्रतिबल तथा समुच्चय में उभयनिष्ठ संकुचन ज्ञात कीजिये।

$E = 2 \times 10^5$ N/mm², $E_c = 1 \times 10^5$ N/mm² **(उ० प्र० 2010)**



चित्र 1.37

हल—प्रश्न के अनुसार छड़ की काट चित्र 1.37 के अनुसार होगी।

माना ताँबे की छड़ तथा इस्पात की ट्यूब में प्रतिबल क्रमशः p_c तथा p_s उत्पन्न होते हैं तथा इनकी काट के क्षेत्रफल क्रमशः A_c तथा A_s हैं।

$\therefore$ ताँबे की छड़ की काट का क्षेत्रफल $A_c = \frac{\pi (40)^2}{4} = 1256 \cdot 64 \text{ mm}^2$

तथा स्टील ट्यूब की काट का क्षेत्रफल $A_s = \frac{\pi (d_0^2 - d_i^2)}{4}$

$$A_s = \frac{\pi (50^2 - 40^2)}{4} = 706 \cdot 86 \text{ mm}^2$$

अब सूत्र $\frac{p_s}{E_s} = \frac{p_c}{E_c}$ द्वारा,

$$p_s = p_c \times \frac{E_s}{E_c} = p_c \times \frac{2 \times 10^5}{1 \times 10^5} = 2p_c$$

$$p_s = 2p_c \qquad \ldots(i)$$

सूत्र $F = p_s A_s + p_c A_c$ द्वारा,

$$165000 = 2p_c \times 706 \cdot 86 + p_c \times 1256 \cdot 64$$

$$= p_c[1413 \cdot 72 + 1256 \cdot 64]$$

$$= 2670 \cdot 36 \times p_c$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

$$p_c = \frac{165000}{2670 \cdot 36} = 61 \cdot 789 \text{ N/mm}^2$$

या

$$p_s = 2p_c = 2 \times 61 \cdot 789 = 123 \cdot 58 \text{ N/mm}^2.$$

∴ समीकरण (i) से,

$$\Delta l = \frac{p_s l}{E_s} = \frac{123 \cdot 58 \times 800}{2 \times 10^5} = 0 \cdot 4940 \text{ mm}$$

उदाहरण 33. उदाहरण 32 में यदि छड़ का व्यास 30 mm हो और शेष बातें सब वही रहें और छड़ तथा ट्यूब दोनों सिरों पर दृढ़ता से जुड़ी हों तो छड़ तथा ट्यूब में प्रतिबल ज्ञात कीजिये।

हल—इस दशा में बनी संयुक्त काट चित्र 1.37 के अनुसार होगी।

छड़ की काट का क्षेत्रफल,

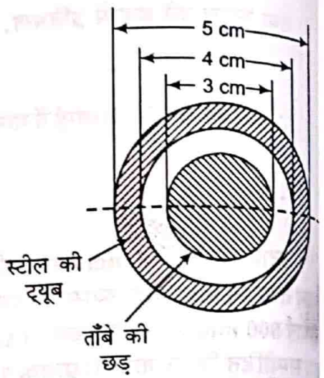
$$A_c = \frac{\pi (30)^2}{4} = 706 \cdot 86 \text{ mm}^2$$

स्टील ट्यूब काट का क्षेत्रफल,

$$A_s = \frac{\pi (50^2 - 40^2)}{4} = 706 \cdot 86 \text{ mm}^2$$

अब $\frac{p_s}{E_s} = \frac{p_c}{E_c}$ सूत्र से,

$$p_s = p_c \times \frac{E_s}{E_c} = p_c \times \frac{2 \times 10^5}{1 \times 10^5} = 2p_c \quad ...(i)$$



चित्र 1.38

तथा $F = p_s A_s + p_c A_c$ सूत्र से,

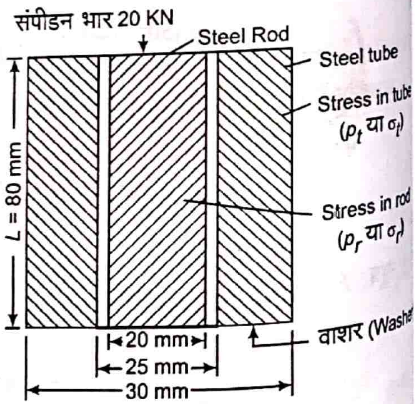
$$165 \times 1000 = 2p_c \times 706 \cdot 86 + p_c \times 706 \cdot 86$$

$$= p_c [2120 \cdot 575]$$

∴ **ताँबे की छड़ में प्रतिबल,** $p_c = \frac{165000}{2120 \cdot 575} = 77 \cdot 809 \text{ N/mm}^2$

तथा स्टील की ट्यूब में प्रतिबल, $p_s = 2 \times p_c = 155 \cdot 618 \text{ N/mm}^2$

उदाहरण 34. एक इस्पात की 20 मि०मी० व्यास की छड़ एक अन्य इस्पात की नलिका जिसका आन्तरिक व्यास 25 मि०मी० तथा बाह्य व्यास 30 मि०मी० है, के बीचों-बीच से गुजरती है। नलिका 80 मि०मी० लम्बी है तथा उसे नगण्य मोटाई के दृढ़ वाशरों के द्वारा जो कि पर कटी चूड़ी पर लगे नटों के द्वारा बाँधे हैं से बन्द किया गया है। नटों को तब तक कसा गया है जब तक कि नलिका पर संपीडित भार 20 KN न हो जाये तो नलिका व छड़ पर प्रतिबलों की गणना कीजिये। $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 **(U.P. 2010)**



चित्र 1.39

हल— $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

इस्पात की छड़ का क्षेत्रफल $(A_r) = \frac{\pi}{4} \times (20)^2$

$$A_r = 314 \cdot 16 \text{ mm}^2 \text{ (For Rod)}$$

इस्पात की नलिका का क्षेत्रफल

$$A_t = \frac{\pi}{4}(30^2 - 25^2)$$

$$A_t = 215 \cdot 98 \text{ mm}^2 \text{ (for tube)}$$

20 KN के संपीडन बल के कारण छड़ तथा नलिका की लम्बाई में समान कमी होगी।

तब $\delta L_r = \delta L_t$

∴ $\frac{p_r L}{E} = \frac{p_t L}{E}$ या $\frac{\sigma_r \times L}{E} = \frac{\sigma_t \times L}{E}$

$p_r = p_t$ या $\sigma_r = \sigma_t$

भार सन्तुलन नियम से

$$P = P_1 + P_2$$

$$20 \times 10^3 = \sigma_r A_r + \sigma_t A_t = \sigma_r \times 314 \cdot 16 + \sigma_t \times 215 \cdot 98$$

$$20 \times 10^3 = 530 \cdot 14 \, \sigma_r$$

∴ छड़ में प्रतिबल, $\sigma_r = 37 \cdot 73 \text{ N/mm}^2$

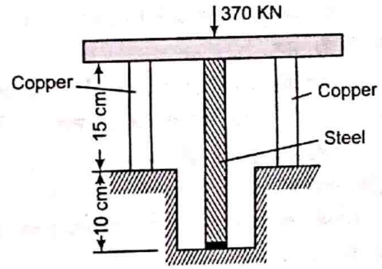
समीकरण (1) से

Tube में प्रतिबल $\sigma_t = 37 \cdot 73 \text{ N/mm}^2$

∴ इस्पात की छड़ में उत्पन्न प्रतिबल $(\sigma_r) = 37 \cdot 73 \text{ N/mm}^2$. उत्तर

इस्पात की नलिका में उत्पन्न प्रतिबल $(\sigma_t) = 37 \cdot 73 \text{ N/mm}^2$ उत्तर

उदाहरण 35. चित्र में दर्शाए अनुसार एक इस्पात की छड़ तथा दो ताँबे की छड़ मिलकर 370 KN भार को सहारा देते हैं। इस्पात की छड़ की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 2500 mm^2 तथा प्रत्येक ताँबे की छड़ का अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 1600 mm^2 है। छड़ों में प्रतिबलों को ज्ञात कीजिए। इस्पात के लिए $E_S = 2 \times 10^5$ N/mm^2 तथा ताँबे के लिए $E_c = 1 \times 10^5$ N/mm^2 मान लीजिए। **(U.P. 2010)**



चित्र 1.40

हल—इस्पात की छड़ का अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $(A_s) = 2500 \text{ mm}^2$

ताँबे की प्रत्येक छड़ की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल (A_{cu})

$$A_{cu} = 1600 \text{ mm}^2$$

इस्पात का यंगमापांक $(E_s) = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

ताँबे का यंगमापांक $(E_{cu}) = 1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

∵ 370 KN के संपीडन भार के कारण इस्पात तथा ताँबे की छड़ों की लम्बाई में कमी होगी।

∴ $\delta l_s = \delta l_{cu}$

$$\frac{\sigma_s l_s}{E_s} = \frac{\sigma_{cu} \, l_{cu}}{E_{cu}}$$

यहाँ σ_s तथा σ_{cu} इस्पात तथा ताँबे की छड़ों में अधिकतम प्रतिबल है।

$$\frac{\sigma_s \times 250}{2 \times 10^5} = \frac{\sigma_{cu} \times 150}{1 \times 10^5} \quad ... (1)$$

$$\sigma_{cu} = 0 \cdot 83 \, \sigma_s$$

Scanned with CamScanner

भार सन्तुलन नियम से,

$$P = 2P_{cu} + P_s$$

$$370 \times 10^3 = 2 \times \sigma_{cu} \times A_{cu} + \sigma_s \times A_s$$

$$= 2 \times \sigma_{cu} \times 1600 + \sigma_s \times 2500$$

$$370 \times 10^3 = 3200 \times 0{\cdot}83\, \sigma_s + 2500\, \sigma_s$$

$$370 \times 10^3 = 5156\, \sigma_s$$

$$\sigma_s = 71{\cdot}76\ \text{N/mm}^2$$

समीकरण (1) से $\sigma_{cu} = 0{\cdot}83 \times 71{\cdot}76 = 59{\cdot}56\ \text{N/mm}^2$

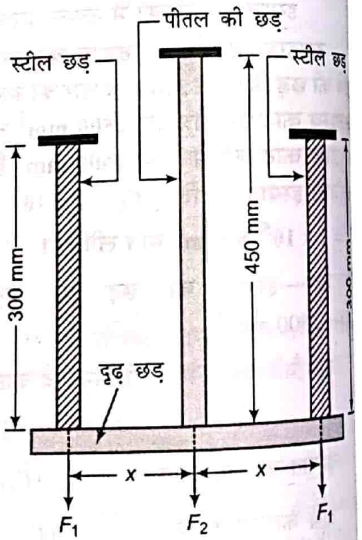
इस्पात की छड़ में प्रतिबल $(\sigma_s) = 71{\cdot}76\ \text{N/mm}^2$

ताँबे की प्रत्येक छड़ में उत्पन्न प्रतिबल $= 59{\cdot}56\ \text{N/mm}^2$

उदाहरण 36. चित्र 1.41 में एक दृढ़ छड़ तीन अन्य छड़ों द्वारा लटका हुआ है। तीन छड़ें एक ही ऊर्ध्वाधर समतल में हैं तथा एक दूसरे के बराबर दूरी पर हैं। दोनों बाहरी छड़ें इस्पात की बनी हैं, लम्बाई 300 mm है तथा व्यास 25 mm है। बीच की छड़ पीतल की है, लम्बाई 450 mm है तथा व्यास 20 mm है। 100 kN भार के कारण छड़ों में उत्पन्न बल ज्ञात कीजिए। भार लगने के बावजूद भी दृढ़ छड़ क्षैतिज रहती है।

$E_{इस्पात} = 2{\cdot}1 \times 10^5\ \text{N/mm}^2$, $E_{इस्पात} = 1{\cdot}05 \times 10^5\ \text{N/mm}^2$

हल—चूंकि तीनों छड़ें मिलकर एक संयुक्त छड़ (Composite Bar) बनती हैं। अब



चित्र 1.41

माना कि प्रत्येक इस्पात तथा पीतल की छड़ की काट का क्षेत्रफल A_s तथा A_b और उनके यंग मापांक E_s तथा E_b हैं।

माना कि इस्पात की प्रत्येक छड़ के द्वारा भार F_1 तथा पीतल की छड़ द्वारा भार F_2 सहन किया जाता है। [क्योंकि इस्पात की दोनों छड़ों की लम्बाइयाँ तथा व्यास बराबर हैं, इसलिये उनके द्वारा सहन किये भारों के मान बराबर होंगे।]

प्रश्नानुसार कुल भार,

$$F = 100\ \text{kN} = 10^5\ \text{N}$$

$$F = 2F_1 + F_2 = 2\, p_s A_s + p_b A_b \qquad \ldots (i)$$

यदि इस्पात तथा पीतल की छड़ में प्रतिबल क्रमशः p_s तथा p_b उत्पन्न होते हैं तब,

$$A_s = \frac{\pi\, (25)^2}{4} = 490{\cdot}87\ \text{mm}^2$$

$$A_b = \frac{\pi\, (20)^2}{4} = 314{\cdot}16\ \text{mm}^2$$

संयुक्त छड़ के प्रतिबन्ध से, $\Delta l_s = \Delta l_b$

$$\therefore \quad \frac{p_s l_s}{E_s} = \frac{P_b l_b}{E_b}$$

या $p_s = p_b \times \dfrac{E_s}{E_b} \times \dfrac{l_b}{l_s}$

$$p_s = p_b \times \frac{2{\cdot}1 \times 10^5}{1{\cdot}05 \times 10^5} \times \frac{450}{300} = 3p_b$$

$$\therefore \quad p_s = 3p_b \qquad \ldots (ii)$$

समीकरण (i) से, $10^5 = 2p_s A_s + P_b A_b$

$$= 2 \times 3p_b \times 490{\cdot}87 + p_b \times 314{\cdot}16$$

$$p_b\,[2945{\cdot}2 + 314{\cdot}16] = 3259{\cdot}38\ p_b$$

या $p_b = \dfrac{10^5}{3259{\cdot}38} = \mathbf{30{\cdot}68\ N/mm^2}$ उत्तर

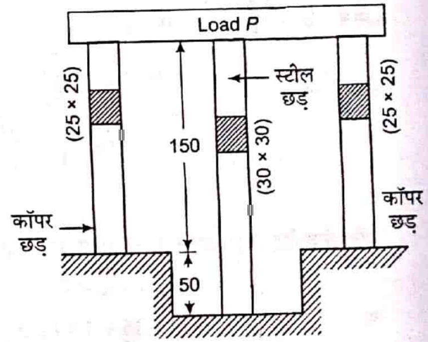
$\therefore$ $p_s = 3p_b = 3 \times 30{\cdot}68 = \mathbf{92{\cdot}04\ N/mm^2}$ उत्तर

$\therefore$ **स्टील की छड़ में प्रतिबल** $F_1 = p_s A_s = 92{\cdot}04 \times 490{\cdot}87 = \mathbf{45180{\cdot}6\ N}$ उत्तर

पीतल की छड़ में बल $F_2 =$ कुल भार $-$ 2 स्टील छड़ों में बल

$$= 10^5 - 2 \times 45180{\cdot}6 = \mathbf{9638{\cdot}64\ N}$$ उत्तर

उदाहरण 37. दो कॉपर रॉड तथा एक स्टील छड़ मिलकर एक भार (Load) P को चित्र 1.39 के अनुसार उठाती हैं। कॉपर की छड़ के काट का क्षेत्रफल 25 mm × 25 mm है तथा स्टील छड़ की काट का क्षेत्रफल 30 × 30 mm² है। यदि कॉपर तथा स्टील में प्रतिबल क्रमशः $60 \times 10^6\ \text{N/m}^2$ तथा $120 \times 10^6\ \text{N/m}^2$ से अधिक नहीं होने देना है। तब इस संयुक्त प्रबन्ध द्वारा उठाया गया सुरक्षित भार (Safe Load) ज्ञात करो। $E_s = 2\,E_c$ है। (U.P. 2011, S)



चित्र 1.42

हल—संयुक्त छड़ के सूत्र, $\boxed{\dfrac{p_s l_s}{E_s} = \dfrac{p_c l_c}{E_c}}$ के द्वारा,

या $p_s = p_c \times \dfrac{E_s}{E_c} \times \dfrac{l_c}{l_s}$

$$= p_c \times \frac{2E_c}{E_c} \times \frac{150}{200} = 1{\cdot}5\ p_c$$

$$\therefore \quad p_s = 1{\cdot}5\ p_c \qquad \ldots (i)$$

जब steel में प्रतिबल की दी गई सीमा $P_S = 120 \times 10^6\ \text{N/m}^2$ प्रयोग करते हैं तो कॉपर में प्रतिबल समीकरण (i) से $p_c = \dfrac{120 \times 10^6}{1{\cdot}5} = 80 \times 10^6\ \text{N/m}^2$ प्राप्त होता है, जो कि कॉपर की दी गई प्रतिबल सीमा 60×10^6 से अधिक है। अतः इसे प्रयोग नहीं कर सकते।

जब कॉपर में प्रतिबल की दी गई सीमा, $p_c = 60 \times 10^6\ \text{N/m}^2$ का प्रयोग करते हैं तो स्टील में प्रतिबल समीकरण (i) से $p_s = 1{\cdot}5 \times 60 \times 10^6 = 90 \times 10^6\ \text{N/m}^2$ प्राप्त होता है, जो कि स्टील की दी गई प्रतिबल सीमा से कम है। अतः यह मान सुरक्षित (safe) होगा (प्रयोग करेंगे)।

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

$\therefore$ सुरक्षित प्रतिबल (safe stresses), $p_s = 90\times10^6\ N/m^2$ तथा $p_c = 60\times10^6\ N/m^2$ [$\because$ Cu की दो छड़ें हैं]

अब संयुक्त छड़ या सुरक्षित बल, $P = p_s A_s + 2\, p_c A_c$

$$P = 90\times10^6 \times (0{\cdot}030\times0{\cdot}030) + 2\times60\times10^6\times(0{\cdot}025\times0{\cdot}025)$$

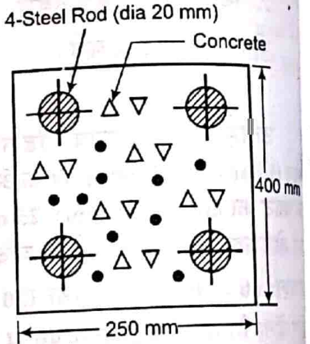
$\therefore$
$$= 156000\ N = \mathbf{156\ kN}$$

उदाहरण 38. कांक्रीट के बने एक स्तम्भ की काट 250 mm × 400 mm है। इसमें चार स्टील की छड़ें चारों कोनों पर सम्पूर्ण लम्बाई में लगी हैं। कॉलम पर 500 kN का अक्षीय सम्पीडन बल लगा है। यदि $E_s = 2{\cdot}0\times10^5\ N/mm^2$ तथा $E_c = 1{\cdot}6\times10^4\ N/mm^2$ है तो दोनों पदार्थों में प्रतिबल ज्ञात कीजिए, जबकि प्रत्येक छड़ का व्यास 20 mm है।

हल—माना इस्पात (Steel) की छड़ों में प्रतिबल p_s तथा कांक्रीट में प्रतिबल p_c है।

$\therefore$ इस्पात की प्रत्येक छड़ की काट का क्षेत्रफल

$$A_s = \frac{\pi\,(20)^2}{4} = 314{\cdot}16\ mm^2$$



चित्र 1.43

कांक्रीट के स्तम्भ का क्षेत्रफल

$$A_c = (250\times400) - 4\times314{\cdot}16$$
$$= 98743{\cdot}36\ mm^2$$

अब $\dfrac{p_s}{E_s} = \dfrac{p_c}{E_c}$ सूत्र से,

$$p_s = p_c \times \frac{E_s}{E_c}$$
$$= p_c \times \frac{2\times10^5}{1{\cdot}76\times10^4} = 12{\cdot}5\ p_c$$

$\therefore$
$$p_s = 12{\cdot}5\ p_c$$

यदि कँकरीट तथा स्टील में बलक्रम F_c तथा F_s माना जाये तो

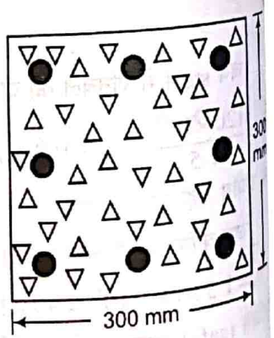
$$F_c + F_S = F$$

या $\quad p_c \times 98743{\cdot}36 + 4\times12{\cdot}5\ p_c\times314{\cdot}16 = 500\times1000N$

या $\quad p_c = \dfrac{500\times1000}{114451{\cdot}36} = \mathbf{4{\cdot}37 N/mm^2}$

अब (i) से $\quad p_s = 12{\cdot}5\times p_c = \mathbf{54{\cdot}61 N/mm^2}$

उदाहरण 39. एक कंक्रीट के बने स्तम्भ की काट 300 mm × 300 mm है। इसमें आठ (8) इस्पात की छड़ें आपस में बराबर-बराबर दूरी पर पूरी लम्बाई में लगी हैं। छड़ों का व्यास 20 mm है। कॉलम पर 360 KN का अक्षीय भार (बल) लगा है। कंक्रीट तथा इस्पात में उत्पन्न प्रतिबल ज्ञात कीजिये, जबकि E_{steel} = 210 GPa तथा $E_{concrete}$ = 14 GPa। (U.K. 2014, S)



चित्र 1.44

हल—माना इस्पात (steel) की छड़ों में प्रतिबल σ_s तथा कंक्रीट में प्रतिबल σ_c है।

$\therefore$ इस्पात की प्रत्येक छड़ की काट का क्षेत्रफल

$$A_s \Rightarrow A_{steel} = \frac{\pi\,(20)^2}{4} = 314{\cdot}16\ mm^2$$

तथा कंक्रीट के स्तम्भ (column) की काट का क्षेत्रफल,

$$A_c \Rightarrow A_{concrete} = (300\times300) - 4\times314{\cdot}16 = 88743 = 88743{\cdot}36\ mm^2$$

अब $\dfrac{\sigma_s}{E_s} = \dfrac{\sigma_c}{E_c}$ सूत्र से,

$$\sigma_s = \sigma_c\times\frac{E_s}{E_c} = \sigma_c\times\frac{210}{14} = 15\times\sigma_c$$

$$\sigma_s = 15\,\sigma_c \qquad ...(1)$$

माना प्रत्येक steel bar में बल F_s तथा कंक्रीट में बल F_c है

$$8F_s + F_c = \text{Total load applied on column}$$

$\therefore$
$$8\times\sigma_s A_s + \sigma_c A_c = F$$
$$8\times15\sigma_c\times314{\cdot}16 + \sigma_c\times88743{\cdot}36 = 360\times1000\ N$$

या $\quad \sigma_c\,(126442{\cdot}56) = 36\times10^4$ या $\sigma_c = 2{\cdot}847\ N/mm^2$

तथा $\quad \sigma_s = 15\,\sigma_c = 42{\cdot}707\ N/mm^2$

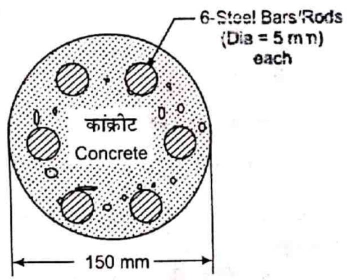
उदाहरण 40. एक प्रतिबलित कंक्रीट स्तंभ का व्यास 150 mm है। इसमें 6 इस्पात की छड़ें प्रतिबलन हेतु डाली गई हैं तथा इनमें प्रत्येक का व्यास 5 mm है। स्तंभ पर 20 kN का अक्षीय भार लगाया गया है। इस्पात तथा कंक्रीट में उत्पन्न प्रतिबलों का मान ज्ञात कीजिए। इस्पात तथा कंक्रीट के प्रत्यास्थता मापांक क्रमशः 200 GPa तथा 15 GPa हैं। (U.P. 2012)

हल—$\because$ प्रत्येक steel rod का व्यास $d = 5$ mm है।

$\therefore$
$$A_s = \frac{\pi\,(5)^2}{4} = 19{\cdot}625\ mm^2$$

कंक्रीट का क्षेत्रफल, $\quad A_c = \dfrac{\pi\,(150)^2}{4} - 6\,A_s$

$\therefore$
$$A_c = 17662{\cdot}5 - 6\times19{\cdot}625$$
$$= 17544{\cdot}75\ mm^2$$



चित्र 1.45

संयुक्त छड़ (Composite Bar) के सूत्र, $\dfrac{p_s}{E_s} = \dfrac{p_c}{E_c}$ से,

$$p_s = p_c\times\frac{E_s}{E_c} = p_c\times\frac{200}{15} = 13{\cdot}33\times p_c \qquad ...(I)$$

अब $\quad F = 6\,p_s A_s + p_c A_c$ सूत्र द्वारा, (यहाँ 6 इसलिये आया है क्योंकि 6 steel rods हैं)

$$20\times1000 = 6\times13{\cdot}33\ p_c\times19{\cdot}625 + p_c\times17544{\cdot}75$$
$$= p_c\,[19114{\cdot}3575]$$

या $\quad p_c = \dfrac{20000}{19114{\cdot}3575} = 1{\cdot}046\ N/mm^2$ (कंक्रीट में प्रतिबल) उत्तर

समी० (I) से प्रत्येक steel rod में प्रतिबल,

$$p_s = 13{\cdot}33\times1{\cdot}046$$

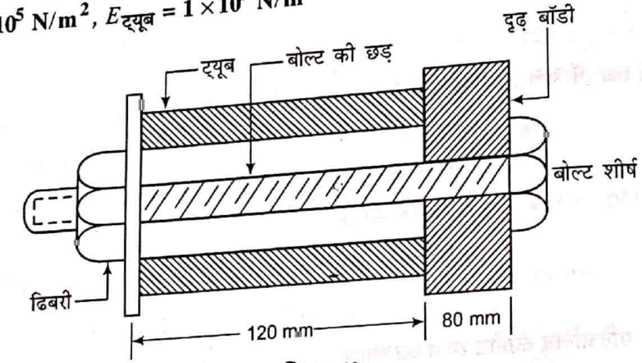
$\therefore$
$$\mathbf{p_s = 13{\cdot}9476\ N/mm^2}$$ उत्तर

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

उदाहरण 41. चित्र 1.46 के अनुसार ढलवाँ लोहे की दृढ़ बॉडी में से होकर एक बोल्ट गुजारा जाता है तथा यह ट्यूब के अन्दर से होता हुआ ढिबरी की सहायता से ट्यूब को जोड़ता है। बॉडी में बोल्ट की लम्बाई 80 mm तथा ट्यूब लम्बाई 120 mm है। बोल्ट का व्यास 24 mm तथा ट्यूब के अन्त: तथा बाह्य व्यास क्रमश: 28 mm तथा 36 mm हैं। यदि ढिबरी को 20° के घुमाव से कस दिया जाता है तो बोल्ट और ट्यूब में उपजे प्रतिबल ज्ञात कीजिये। ढिबरी का पिच 3 mm है।

$E_{\text{बोल्ट}} = 2\times10^5\ N/m^2$, $E_{\text{ट्यूब}} = 1\times10^5\ N/m^2$



चित्र 1.46

हल—माना बोल्ट तथा ट्यूब में प्रतिबल क्रमशः p_{Bolt} तथा p_{Tube} है।

∴ $$A_{Bolt} = \frac{\pi\,(24)^2}{4} = 452{\cdot}389\ mm^2$$

तथा $$A_{Tube} = \frac{\pi\,[36^2-28^2]}{4} = 402{\cdot}124\ mm^2$$

∵ ढिबरी (Nut) को 360° का कोण घुमाने पर चली दूरी = 3 mm (पिच)

∴ 360° का कोण घुमाने पर नट द्वारा चली दूरी = 3 mm

∴ 20° का कोण घुमाने पर नट द्वारा चली दूरी $= \frac{20\times3}{360} = 0{\cdot}1667$ mm

∴ नट-बोल्ट के प्रतिबन्ध से,

नट द्वारा चली दूरी = बोल्ट की लम्बाई में वृद्धि + ट्यूब की लम्बाई में कमी

या $$0{\cdot}1667 = \frac{F\times l_{bolt}}{A_{bolt}\times E_{bolt}} + \frac{F\times l_{tube}}{A_{tube}\times E_{tube}}$$

$$= F\left[\frac{(120+80)}{452{\cdot}39\times2\times10^5} + \frac{120}{402{\cdot}12\times1\times10^5}\right]$$

या $$0{\cdot}1667 = \frac{F}{10^5}[0{\cdot}221+0{\cdot}2984]$$

या $$0{\cdot}1667\times10^5 = F\times0{\cdot}5194$$

या $$F = \frac{16670}{0{\cdot}5194}$$

∴ बोल्ट में तनाव बल, $F = 32094{\cdot}725$ N

∴ बोल्ट में प्रतिबल, $P_{bolt} = \frac{F}{A_{bolt}} = \frac{32094{\cdot}725}{452{\cdot}389} = \mathbf{70{\cdot}945\ N/mm^2}$ उत्तर

तथा ट्यूब में प्रतिबल, $P_{tube} = \frac{F}{A_{tube}} = \frac{32094{\cdot}725}{402{\cdot}124} = \mathbf{79{\cdot}813\ N/mm^2}$ उत्तर

**विशेष : तापीय प्रतिबल पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 42. तापीय प्रतिबल की परिभाषा दीजिये। एक 400 mm लम्बी तथा 60 mm व्यास की एक ताँबे की छड़ दोनों सिरों पर दृढ़तापूर्वक टिकी (जुड़ी) है। छड़ में कोई प्रतिबल नहीं है जबकि कमरे का तापमान 25°C है। यदि छड़ का तापमान 50°C कर दिया जाये तो उसमें उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल तथा स्वभाव (प्रकृति-Nature) ज्ञात कीजिये यदि $\alpha_{Cu} = 18{\cdot}5\times10^{-6}/°C$ तथा $E_{Cu} = 110\ GN/m^2$ है। **(UP 2003; UK 2011, S)**

हल—तापीय प्रतिबल—"किसी छड़ में तापान्तर के कारण उत्पन्न हुए प्रतिबल को तापीय प्रतिबल कहते हैं, जबकि छड़ की लम्बाई में होने वाले परिवर्तनों को दृढ़तापूर्वक रोका जाये।"

दिया है, $l = 400$ mm, व्यास $d = 60$ mm, तापान्तर $t = 50°C - 25°C = 25°C$

$\alpha_{Cu} = 18{\cdot}5\times10^{-6}/°C$ तथा $E_{Cu} = 110\ GN/m^2 = 1{\cdot}1\times10^5\ N/mm^2$

∴ विकृति $(e) = \alpha\, t$ (सूत्र)

$= 18{\cdot}5\times10^{-6}\times25 = 4{\cdot}625\times10^{-4}$

अब तापीय प्रतिबल, $p = e\,E$ (सूत्र)

$= 4{\cdot}625\times10^{-4}\times1{\cdot}1\times10^5$

$= \mathbf{50{\cdot}875\ N/mm^2}$

तथा प्रतिबल की प्रकृति = संपीडन (compressive) उत्तर

उदाहरण 43. इस्पात की 500 mm लम्बी एक छड़, जिसका व्यास 20 mm है, दोनों सिरों पर मजबूती से जकड़ी हुई है। फिर इसका तापमान 200°C बढ़ा दिया जाता है। यदि इस्पात के लिए रैखिक प्रसार गुणांक $\alpha = 12\times10^{-6}$ प्रति °C हो तो छड़ में उत्पन्न हुई विकृति (strain), प्रतिबल (stress) तथा छड़ पर जकड़ (grips) द्वारा लगा सम्पीडन बल (compressive force) ज्ञात कीजिये। $E = 200$ GPa **(UK 2010, S)**

हल—यहाँ $l = 500$ mm, $\alpha = 12\times10^{-6}/°C$, $d = 20$ mm, $t = 200°C$ तथा $E = 200\ GPa = 200\ kN/mm^2$

छड़ की काट का क्षेत्रफल, $A = \frac{\pi}{4}\times d^2 = \frac{\pi}{4}\times20^2 = 314\ mm^2$

छड़ में उत्पन्न हुई विकृति, $e = \alpha t = 12\times10^{-6}\times200$

$= \mathbf{2{\cdot}4\times10^{-3}}$

फिर छड़ में उत्पन्न हुआ प्रतिबल, $p = \alpha.t.E = 2{\cdot}4\times10^{-3}\times200$

$= \mathbf{0{\cdot}48\ kN/mm^2}$

छड़ पर लगा सम्पीडन बल, $F = p\,.\,A = 0{\cdot}48\times314$

$= \mathbf{150{\cdot}72\ kN}$ उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 44. किसी छड़ को 373°C तक गर्म करके दोनों सिरों पर जकड़ दिया जाता है। फिर इसको ठण्डा करके 293°C तापमान पर लाया जाता है। यदि छड़ का व्यास 30 mm हो और उसके पदार्थ का रैखिक प्रसार गुणांक (coefficient of linear expansion) $\alpha = 18 \times 10^{-6}$ /°C हो तो छड़ में उत्पन्न विकृति, प्रतिबल तथा बल ज्ञात कीजिये। छड़ के पदार्थ का प्रत्यास्थता गुणांक (modulus of elasticity), $E = 100$ kN/mm² है। (UK 200...)

हल—छड़ के तापमान में परिवर्तन, $t = 373 - 293 = 80°C$

छड़ की काट का क्षेत्रफल, $A = \frac{\pi}{4} \times 30^2 = 706 \cdot 86 \text{ mm}^2$

हम देखते हैं कि इस उदाहरण में जकड़ (grips) छड़ की लम्बाई को घटने से रोक रही है। इसलिए जकड़, छड़ पर तनाव बल (tensile force) लगाती है।

अब छड़ में उत्पन्न हुई तनाव विकृति (strain) $= \alpha t = 18 \times 10^{-6} \times 80 = \mathbf{1 \cdot 44 \times 10^{-3}}$

छड़ में उत्पन्न हुआ तनाव प्रतिबल $p = e.E = \alpha.t.E$

$$= 1 \cdot 44 \times 10^{-3} \times 100 = \mathbf{0 \cdot 144 \text{ kN/mm}^2}$$

इसलिए छड़ पर लगाया गया तनाव बल (tensile force),

$$F = \alpha.t.E.A = 0 \cdot 144 \times 706 \cdot 86 = \mathbf{101 \cdot 79 \text{ kN}}$$

उदाहरण 45. एक छड़ 20°C पर 20 m लम्बी है। यदि तापमान 65°C तक बढ़ाया जाता है, तो छड़ का मुक्त प्रसार ज्ञात कीजिये। उत्पन्न तापीय प्रतिबल निम्न आधार पर ज्ञात कीजिये—

(i) जब छड़ के प्रसार को रोका जाता है।

(ii) जब छड़ को 5·8 mm बढ़ने दिया जाता है। (UP 20...)

हल—∵ तापमान में अन्तर, $t = 65°C - 20°C = 45°C$

∴ तापमान बढ़ने पर मुक्त प्रसार (Freely expansion),

$\Delta l = l \alpha t$ सूत्र में α = रेखीय प्रसार गुणांक है।

∴ मुक्त रूप से हुआ प्रसार, $\Delta l = (20 \times 1000) \times \alpha \times 45$

$$= 900000 . \alpha$$

(i) तापीय प्रतिबल, जबकि छड़ के प्रसार को रोका जाता है।

Stress, $p = \alpha t E$ (सूत्र)

प्रतिबल $p = \alpha . 45 . E$ जहाँ E = पदार्थ का यंग मापांक है।

तथा α = पदार्थ का रेखीय प्रसार गुणांक

(ii) जब छड़ को 5·8 mm बढ़ने दिया जाता है अर्थात् $\Delta l = 5 \cdot 8$ mm है।

$\Delta l = l \alpha t$ सूत्र में, $l = 20$ m $= 20 \times 1000$ mm

$$5 \cdot 8 = 20000 . \alpha . 45$$

∴ $\alpha = 6 \cdot 44 \times 10^{-6}$ /°C

∴ तापीय प्रतिबल $p = \alpha t E = 6 \cdot 44 \times 10^{-6} \times 45 \times E$

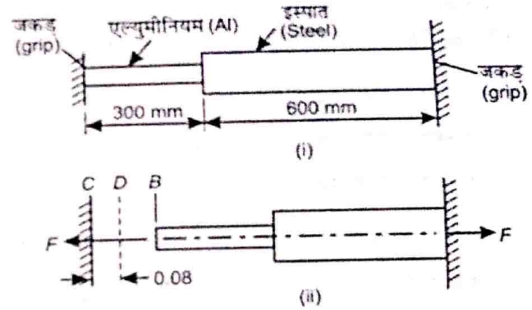
$$= \mathbf{2 \cdot 9 \times 10^{-4} \times E}$$

उदाहरण 46. एक संयुक्त छड़ एल्युमीनियम तथा इस्पात की चित्र 1.47 (i) के अनुसार बनी है। 310°C पर छड़ में कोई प्रतिबल भार या उस तापमान पर इसे दो जकड़ों (grips) के बीच जकड़ दिया जाता है। यदि तापमान 16°C से घटाया जाता है तब छड़ में अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये यदि (i) दोनों जकड़ पूर्णतया दृढ़ है (ii) जकड़ ढीली होकर परस्पर 0·08 mm निकट आ जाती हैं। जबकि आंकड़े निम्न प्रकार मानिये—इस्पात के लिए $E = 2 \cdot 1 \times 10^5$ N/mm², $\alpha_s = 11 \cdot 7 \times 10^{-6}$/°C, एल्युमीनियम के लिए $E_a = 20 \cdot 74 \times 10^5$ N/mm², $\alpha_a = 23 \cdot 4 \times 10^{-6}$/°C अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल, $A_s = 1964$ mm² तथा $A_a = 490$ mm²। (U.K. 2014-B.P.)

हल—16°C पर एल्युमीनियम छड़ में सिकुड़न (contraction) $= l_a \times \alpha_a \times t$

$$= 300 \times 23 \cdot 4 \times 10^{-6} \times 16$$

$$= 0 \cdot 1123 \text{ mm}$$



चित्र 1.47

तथा 16°C तापमान में कमी से इस्पात छड़ में सिकुड़न (contraction) $= l_s . \alpha_s . t = 600 \times 11 \cdot 7 \times 10^{-6} \times 16$

$$= 0 \cdot 1123 \text{ mm}$$

अत: संयुक्त छड़ में कुल सिकुड़न

$$= 0 \cdot 1123 + 0 \cdot 1123 = 0 \cdot 2246 \text{ mm}$$

(i) दृढ़ता से जकड़े होने के कारण छड़ सिकुड़ नहीं सकेगी, अत: जकड़े संयुक्त छड़ को खींचकर पूर्व स्थिति में ही रखेगी। ऐसी दशा में माना कि छड़ पर जकड़ तनाव बल F लगाती है जिससे उपरोक्त सिकुड़न का पूर्ण प्रभाव समाप्त हो जाता है।

तनाव बल (F) से एल्युमीनियम छड़ की लम्बाई में वृद्धि

$$= \frac{Fl_a}{A_a E_a} = \frac{F \times 300}{490 \times 74 \times 10^3} = 8 \cdot 2736 \times 10^{-6} \times F$$

तथा तनाव बल (F) से इस्पात छड़ की लम्बाई में वृद्धि

$$= \frac{Fl_s}{A_s E_s} = \frac{F \times 600}{1964 \times 2 \cdot 1 \times 10^5} = 1 \cdot 4547 \times 10^{-6} \times F$$

अत: संयुक्त छड़ की लम्बाई में कुल वृद्धि (जकड़ों में बद्ध होने के कारण)

$$= 8 \cdot 2736 \times 10^{-6} F + 1 \cdot 4547 \times 10^{-6} F = 9 \cdot 7283 \times 10^{-6} \times F$$

फिर जकड़ों द्वारा खींची गयी लम्बाई = तापमान घटने से कम हुई कुल लम्बाई

$9 \cdot 7283 \times 10^{-6} \times F = 0 \cdot 2246$ अत: $F = \mathbf{23087 \text{ N}}$

अब अधिकतम प्रतिबल (एल्युमीनियम में) $= \frac{F}{A_a} = \frac{23087}{490} = \mathbf{47 \cdot 12 \text{ N/mm}^2}$ **उत्तर**

(ii) जब जकड़े 0·08 mm निकट आ जाती है। [माना कि चित्र 1.47 (ii) के अनुसार बायीं जकड़ C से D पर)] है। तब तापमान घटने के कारण संयुक्त छड़ की लम्बाई में शुद्ध सिकुड़न (BD)

$$= 0 \cdot 2246 - 0 \cdot 08 = 0 \cdot 1446 \text{ mm}$$

अत: जकड़ों द्वारा खींची गयी लम्बाई $= 0 \cdot 1446$ है।

∴ $9 \cdot 7283 \times 10^{-6} F = 0 \cdot 1446$ अत: $F = \mathbf{14864 \text{ N}}$

अब एल्युमीनियम में अधिकतम प्रतिबल $= \frac{14864}{490} = \mathbf{30 \cdot 33 \text{ N/mm}^2}$ **उत्तर**

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

विशेष : तापीय प्रतिबल की संयुक्त छड़ों पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 47. एक इस्पाती छड़ एवं दो ताँबे की छड़ें हैं। सभी का क्षेत्रफल तथा लम्बाई समान है तथा जिनके सिरे दृढ़ता से जुड़े हुये हैं। इनका तापमान 15°C है। इस्पाती छड़ ताँबे की छड़ों के बीच में रखी है। इनका तापमान 2... तक बढ़ने पर प्रत्येक छड़ की लम्बाई 2 मिमी बढ़ जाती है। प्रत्येक छड़ की मूल लम्बाई तथा इनमें प्रतिबल ज्ञात कीजिये। $E_s = 2\times10^5$ N/mm², $E_c = 10^5$ N/mm², $\alpha_s = 12\times10^{-6}$/°C तथा $\alpha_c = 18\times10^{-6}$/°C लीजिये।

(UP ...)

हल—माना संयुक्त छड़ की लम्बाई l है और इसमें इस्पात (steel) की छड़ में प्रतिबल p_s तथा ताँबे (copper) की छड़ में प्रतिबल p_c है, दोनों धातुओं की छड़ों के काट के क्षेत्रफल समान हैं, माना A है।

दिया है, $l_s = l_c = l$ तथा $A_s = A_c = A$ है।

तापान्तर $t = 250°C - 15°C = 235°C$

लम्बाई में परिवर्तन, $\Delta l = 2$ mm

संयुक्त छड़ के सूत्र $p_sA_s = p_cA_c$ के द्वारा

$$p_s = 2p_c \quad [\because \text{ ताँबे की छड़ दो हैं।}]$$

अब सूत्र $\frac{p_s}{E_s} + \frac{p_c}{E_c} = t(\alpha_c \sim \alpha_s)$ के द्वारा

$$\frac{2p_c}{2\times10^5} + \frac{p_c}{1\times10^5} = 235\times\frac{1}{10^6}[18-12]$$

$\therefore$ $2p_c = 23{\cdot}5\times6$

या $p_c = 70{\cdot}5$ N/mm²

अब समी० (I) से, $p_s = 2p_c = 2\times70{\cdot}5 = 141$ N/mm²

$\therefore$ $\Delta l = l\alpha_s t + \frac{p_s l}{E_s}$ सूत्र से

$$2 = l\left[12\times10^{-6}\times235 + \frac{141}{2\times10^5}\right]$$

या $4\times10^6 = l[24\times235+1410]$

या $l = 567{\cdot}37$ mm

उदाहरण 48. आरम्भ में तीन छड़ें 2 m लम्बी तथा 20 mm व्यास की हैं। बीच वाली छड़ इस्पात (steel) तथा बाहरी छड़ें ताँबे (copper) की हैं। छड़ों के सिरे इतने जकड़े गए हैं कि सभी दशाओं में उनकी लम्बाइयाँ बराबर रहें। छड़ों में प्रतिबल ज्ञात कीजिए यदि उनका तापमान 50 K बढ़ा दिया जाता है।

$E_s = 200$ kN/mm² $\quad \alpha_s = 12\times10^{-6}$ /K

$E_c = 120$ kN/mm² $\quad \alpha_c = 18{\cdot}5\times10^{-6}$ /K

(U...

हल—प्रत्येक छड़ की काट का क्षेत्रफल, $A = \frac{\pi}{4}\times20^2 = 314$ mm²

माना इस्पात में प्रतिबल p_s तथा ताँबे में p_c पैदा होता है, तब

हम जानते है कि,

इस्पात में विकृति + ताँबे में विकृति = $t(\alpha_c - \alpha_s)$

$$\frac{p_s}{E_s} + \frac{p_c}{E_c} = t(\alpha_c - \alpha_s) \quad \text{(सूत्र)} \quad ...(1)$$

तथा इस्पात में खिंचाव बल = ताँबे में दबाव बल (सूत्र) ...(2)

अत: $p_s A_s = 2\,p_c A_c$ (क्योंकि ताँबे की दो छड़ें हैं)

$\therefore$ $p_s\times314 = 2\,p_c\times314$

$\therefore$ $p_s = 2\,p_c$ ...(3)

p_s का यह मान (1) में रखने पर,

$$\frac{2p_c}{2\times10^5} + \frac{p_c}{1{\cdot}2\times10^5} = \frac{50}{10^6}(18{\cdot}5-12)$$

$\therefore$ $p_c\left[1+\frac{1}{1{\cdot}2}\right] = 5\times6{\cdot}5$

या $p_c = 17{\cdot}727$ N/mm² **उत्तर**

$\therefore$ समी० (3) से, $p_s = 2\times17{\cdot}727$

$= 35{\cdot}45$ N/mm² **उत्तर**

उदाहरण 49. एक इस्पात नली, जिसका बाह्य व्यास 2·4 cm है तथा आन्तरिक व्यास 1·8 cm है, अपने अन्दर 1·5 cm व्यास वाली ताँबे की छड़ को बन्द रखती है तथा इस्पात नली छड़ के साथ दृढ़ता से दोनों सिरों पर जुड़ी है। यदि 283°C ताप पर कोई अनुदैर्ध्य प्रतिबल न हो तो छड़ व नली में प्रतिबलों की गणना कीजिये जबकि ताप 473°C पर हो जाये।

$E_s = 210000$ N/mm² $\quad \alpha_s = 11\times10^{-6}$ /°C

$E_c = 100000$ N/mm² $\quad \alpha_c = 18\times10^{-6}$ /°C **(U.K. 2012, S)**

हल—Tube में, steel का बाहरी व्यास (outer dia) $d_o = 24$ mm तथा आन्तरिक व्यास (Inner Dia) $d_i = 18$ mm है।

$\therefore$ क्षेत्रफल (Area), $A_s = \frac{\pi(d_o^2 - d_i^2)}{4}$ सूत्र से,

(In steel tube) $A_s = \frac{\pi(24^2-18^2)}{4} = 197{\cdot}82$ mm²

(In Cu rod) $A_c = \frac{\pi(15)^2}{4} = 176{\cdot}625$ mm²

तापान्तर (temperature difference) $t = 473 - 283 = 190°C$

Scanned with CamScanner

माना steel tube में प्रतिबल p_s तथा copper rod में प्रतिबल p_c है।

$$p_s A_s = p_c A_c \quad \text{सूत्र से,} \qquad p_c = \frac{p_s \times A_s}{A_c}$$

∴
$$p_c = 1{\cdot}12 \times p_s$$

∴ अब सूत्र से
$$\frac{p_s}{E_s} + \frac{p_c}{E_c} = t\,(\alpha_c \sim \alpha_s)$$

$$\frac{p_s}{2{\cdot}1\times10^5} + \frac{1{\cdot}12\,p_s}{1\times10^5} = 190\times\frac{1}{10^6}(18-11)$$

$$p_s\left[\frac{1}{2{\cdot}1}+\frac{1{\cdot}12}{1}\right] = 19\times 7$$

या
$$p_s = \mathbf{83{\cdot}32\ N/mm^2}$$

समी० (I) से,
$$p_c = 1{\cdot}12\times 83{\cdot}32 = \mathbf{93{\cdot}32\ N/mm^2}$$

उदाहरण 50. 8 cm बाह्य व्यास तथा 4 cm अन्त: व्यास की एक इस्पात की ट्यूब में 4 cm व्यास की एक ता... छड़ पूरी तरह से बन्द है। छड़ तथा ट्यूब की लम्बाइयाँ समान हैं। छड़ तथा ट्यूब के दोनों सिरे एक दूसरे से जकड़ दि... है जिससे उनमें कोई सापेक्ष (relative) विस्थापन (displacement) न हो। इस समुच्चय (assembly) का ता... 60°C बढ़ा दिया जाता है तो समुच्चय में विकृति तथा छड़ और ट्यूब में प्रतिबल ज्ञात कीजिए।

मानिए—

$E_s = 2\times10^5\ \text{N/mm}^2 \qquad \alpha_s = 12\times10^{-6}\ \text{per}^\circ\text{C}$

$E_c = 1\times10^5\ \text{N/mm}^2 \qquad \alpha_c = 18\times10^{-6}\ \text{per}^\circ\text{C}$

हल—ताँबे की छड़ की काट का क्षेत्रफल, $A_c = \frac{\pi}{4}\times4^2 = 12{\cdot}56\ \text{cm}^2 = 1256\ \text{mm}^2$

स्टील-ट्यूब की काट का क्षेत्रफल, $A_s = \frac{\pi}{4}(8^2-4^2) = 37{\cdot}68\ \text{cm}^2 = 3768\ \text{mm}^2$

माना कि इस्पात तथा ताँबे में प्रतिबल p_s तथा p_c पैदा होते हैं, तब हम जानते हैं कि

$$\frac{p_s}{E_s} + \frac{p_c}{E_c} = t\,(\alpha_c - \alpha_s)$$

या
$$\frac{p_s}{2\times10^5} + \frac{p_c}{1\times10^5} = 60\,(18\times10^{-6} - 12\times10^{-6})$$

या
$$\frac{p_s}{2} + p_c = 60\times6\times10^{-1} = 36$$

या
$$p_s + 2p_c = 72$$

फिर हम जानते हैं कि इस्पात में खिंचाव = ताँबे में दबाव बल

या
$$p_s\times A_s = p_c\times A_c$$

$$p_s = p_c\times\frac{A_c}{A_s} = p_c\times\frac{1256}{3768} = p_c\times0{\cdot}333$$

(II) से p_s का मान (I) में रखने पर,

$$p_c\times0{\cdot}333 + 2p_c = 72$$

$$p_c = \frac{72}{2{\cdot}333} = \mathbf{30{\cdot}86\ N/mm^2} \qquad \text{उत्तर}$$

∴
$$p_s = 30{\cdot}86\times0{\cdot}333 = \mathbf{10{\cdot}276\ N/mm^2} \qquad \text{उत्तर}$$

अब समुच्चय (assembly) में विकृति

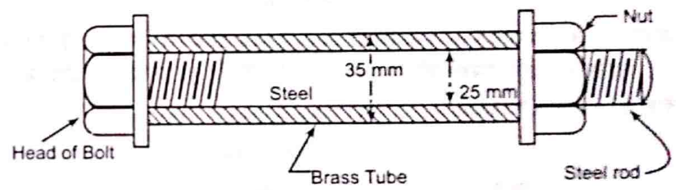
$$e = \frac{\delta l}{l} = \alpha_s t + \frac{p_s}{E_s} \quad \text{सूत्र से}$$

$$e = 12\times10^{-6}\times60 + \frac{10{\cdot}276}{2\times10^5}$$

$$= 7{\cdot}2\times10^{-4} + 5{\cdot}138\times10^{-5}$$

$$= 7{\cdot}7138\times10^{-4} \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 51. 25 mm व्यास की एक इस्पात की छड़ 25 mm आन्तरिक व्यास एवं 35 mm बाह्य व्यास की पीतल से बनी नली में जाती है (चित्र 1.48)। छड़ पर लगे नट को इतना कसा जाता है कि छड़ में 10 N/mm² का प्रतिबल उत्पन्न हो जाए। तदुपरान्त नली में तापमान 60°C बढ़ाया जाता है। छड़ एवं नली में अन्तिम प्रतिबल क्या होगा? $E_s = 2\times10^5\ \text{N/mm}^2, \alpha_s = 0{\cdot}0000117/^\circ\text{C}, E_b = 0{\cdot}8\times10^5\ \text{N/mm}^2$ तथा $\alpha_b = 0{\cdot}000019/^\circ\text{C}$ मानिये। **(U.P.)**



चित्र 1.48

हल—नट को कसने पर इस्पात में प्रतिबल = 10 N/mm² (तनाव)

∴ इस्पात छड़ का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल,

$$A_s = \frac{\pi}{4}\times25^2 = 490{\cdot}8\ \text{mm}^2$$

तथा पीतल की नली का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल,

$$A_b = \frac{\pi}{4}\times(35^2-25^2) = 471\ \text{mm}^2$$

Nut-Bolt के प्रतिबन्ध द्वारा, इस्पात छड़ पर तनाव बल = पीतल की नली पर संपीडन बल

$$p_s\times A_s = p_b\times A_b$$

अत: पीतल की नली में संपीडन प्रतिबल

$$p_b = \frac{p_s\times A_s}{A_b} = \frac{10\times490{\cdot}8}{471} = 10{\cdot}42\ \text{N/mm}^2 \text{ (संपीडन)}$$

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

माना कि, तापमान बढ़ने के कारण इस्पात में तनाव प्रतिबल p_s' तथा पीतल में संपीडन प्रतिबल p_b' पैदा होता है

$$\frac{p_s'}{E_s}+\frac{p_b'}{E_b}=t\,(\alpha_b-\alpha_s)$$ (सूत्र)

तथा $$p_s'\times A_s=p_b'\times A_b$$ (सूत्र)

∴ $$p_b'=\frac{p_s'\times A_s}{A_b}=\frac{p_s'\times 490\cdot 8}{471}=p_s'\times 0\cdot 042$$

p_b' का मान सम्बन्ध (1) में रखने पर

$$p_s'\left[\frac{1}{2\times10^5}+\frac{1\cdot042}{0\cdot8\times10^5}\right]=60\,(0\cdot000019-0\cdot0000117)$$

$$p_s'=24\cdot3\ \text{N/mm}^2\ \text{(तनाव)}$$

∴ $$p_b'=p_s'\times1\cdot042=24\cdot3\times1\cdot042$$

तथा $$=\mathbf{25\cdot32\ N/mm^2}\ \text{(संपीडन)}$$

∴ इस्पात छड़ में अन्तिम प्रतिबल $= 10+24\cdot3$

$$=\mathbf{34\cdot3\ N/mm^2}\ \text{(तनाव)}$$

तथा पीतल नली में अन्तिम प्रतिबल $= 10\cdot42+25\cdot32$

$$=\mathbf{35\cdot74\ N/mm^2}\ \text{(संपीडन)}$$

उदाहरण 52. किसी छड़ की लम्बाई 5 m तथा व्यास 2 cm है। यह दोनों सिरों पर जकड़ी है। इसका तापमान 30°C से 150°C तक बढ़ाया जाता है। यदि सिरों की जकड़ें 3 mm ढीली हो जायें तो छड़ पर बल ज्ञात कीजिये। $\alpha = 11\times10^{-6}$/°C तथा $E = 200$ kN/mm²।

हल—दिया है, $l = 5\ \text{m} = 5000\ \text{mm}$

व्यास (Dia) $d = 2\ \text{cm} = 20\ \text{mm}$

तापान्तर (Diff. in temperature), $t = 150-30 = 120°\text{C}$

∵ सिरों की जकड़ें (Grips) $\delta = 3$ mm लम्बाई से ढीली (yield) हो जाती हैं।

∴ $\Delta l = l\alpha t-\delta$ तथा विकृति (strain) $e=\frac{\Delta l}{l}\Rightarrow\left(\alpha t-\frac{\delta}{l}\right)$ (सूत्र)

तथा प्रतिबल (stress) $p = eE$ [∵ E = ...]

∴ $$p=\left(\alpha t-\frac{\delta}{l}\right)E$$ (सूत्र)

अब जकड़ द्वारा लगा बल, $F = p\times A$

$$F=\left(\alpha t-\frac{\delta}{l}\right)E\,A$$ (सूत्र)

∴ बल, $$F=\left(11\times10^{-6}\times120-\frac{3}{5000}\right)\times2\times10^5\times\frac{\pi\,(20)^2}{4}$$

$$=45216\ \text{N} = \mathbf{45\cdot216\ kN}$$

विशेष : पहिये तथा टायर से सम्बन्धित प्रश्न

उदाहरण 53. इस्पात के एक पतले टायर को 60°C पर गर्म कर लकड़ी के 1 मी० व्यास के पहिये पर चढ़ाया जाता है। गर्म करने के पूर्व टायर का आन्तरिक व्यास क्या होना चाहिये? पहिये पर टायर का तापमान सामान्य होने पर टायर में परिधि प्रतिबल भी ज्ञात कीजिये। मानिये $\alpha_s = 10^{-5}$ प्रति °C एवं $E_s = 200$ GPa। (U.P.)

हल—दिया है, तापान्तर, $t = 60°\text{C}$

पहिये का व्यास (Dia of wheel) $D = 1$ m

टायर (Tyre) का आन्तरिक व्यास $d = ?$

तथा टायर की परिधि में प्रतिबल (Hoop stress) = ?

∵ हम जानते हैं कि टायर में परिधीय विकृति $e=\frac{D-d}{d}$ (सूत्र)

तथा परिधीय प्रतिबल (circumferential stress) or Hoop stress

$$p=e\,E\Rightarrow\left(\frac{D-d}{d}\right)E$$ (सूत्र)

और तापान्तर $$t=\left(\frac{D-d}{d}\right)\times\frac{1}{\alpha}$$ (सूत्र)

∴ $$60=\left(\frac{1-d}{d}\right)\times\frac{1}{10^{-5}}$$

या $$\left(\frac{1-d}{d}\right)=\frac{60}{10^5}=\frac{6}{10000}$$

∴ $$10000-10000\,d=6d$$

या $$10006\,d=10000$$

या $$d=0\cdot9994\ \text{metre}$$

या $$d=\mathbf{999\cdot4\ mm}$$ उत्तर

∴ परिधि प्रतिबल (Hoop stress) $(p)=\left(\frac{D-d}{d}\right)E$ सूत्र से

$$=\left(\frac{1000-999\cdot4}{999\cdot4}\right)\times200\times1000\ \text{N/mm}^2$$

$$=120\cdot07 = \mathbf{120\ N/mm^2}$$ उत्तर

उदाहरण 54. एक दृढ़ पहिये पर, जिसका व्यास 1·2 m है, 1·19952 m अन्त: व्यास का टायर गर्म करके तथा सिकोड़कर चढ़ाया जाता है। चढ़ने के पश्चात् टायर में परिधीय प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये। टायर के लिये E = 200 GPa मानिये। टायर चढ़ाने के लिये उसे न्यूनतम कितने तापमान तक गर्म करने की आवश्यकता पड़ेगी? $\alpha = 1\times10^{-5}$/K

हल—दिया है, पहिये का व्यास $D = 1\cdot2$ m

टायर का व्यास $d = 1\cdot19952$ m

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

∴ परिधीय प्रतिबल (Hoop stress) $p = \left(\frac{D-d}{d}\right) E$ सूत्र से

$$p = \left(\frac{1{\cdot}2 - 1{\cdot}19952}{1{\cdot}19952}\right) \times 200 \times 1000 = 80{\cdot}03 \text{ N/mm}^2$$

प्रतिबल, $p = 80 \text{ N/mm}^2$

∴

अब तापान्तर, $t = \left(\frac{D-d}{d}\right)\frac{1}{\alpha}$ सूत्र से

$$t = \left(\frac{1{\cdot}2 - 1{\cdot}19952}{1{\cdot}19952}\right) \times \frac{1}{1 \times 10^{-5}} = 40°\text{C}$$

उदाहरण 55. 80 सेमी व्यास के एक पहिये पर गर्म करके इस्पात का टायर चढ़ाया जाता है। यदि पहिया दृढ़ माना जाए और सिकुड़ने के बाद टायर में परिधीय प्रतिबल 100 N/mm² हो तो टायर का आन्तरिक व्यास क्या होगा? पहिये पर टायर चढ़ाने के लिये उसे कितने तापमान तक गर्म करना होगा यदि पहिये का तापमान 25°C है। टायर के लिए $\alpha = 11 \times 10^{-6}$/°C तथा $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$।

हल—∵ पहिये का व्यास $D = 800$ mm (दिया है)

टायर का आन्तरिक व्यास, $d = ?$ (ज्ञात करना है)

तापान्तर, $t = 25°$C पर परिधीय प्रतिबल $p = 100 \text{ N/mm}^2$ है।

∴ प्रतिबल, $p = \left(\frac{D-d}{d}\right) E$ सूत्र से,

∴ $$100 = \left(\frac{800-d}{d}\right) \times 2 \times 10^5$$

या $$\frac{800-d}{d} = \frac{5}{10000}$$

या $$5d = 8 \times 10^6 - 10000\, d$$

या $$10005\, d = 8 \times 10^6$$

या $$d = 799{\cdot}6 \text{ mm}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}7996 \text{ metre}}$$

अब तापान्तर, $t = \frac{D-d}{d}\frac{1}{\alpha} = \frac{800 - 799{\cdot}6}{799{\cdot}6} \times \frac{1}{11 \times 10^{-6}} = 45{\cdot}47°\text{C}$

∴ अन्तिम तापमान (last temperature) $= 25°\text{C} + 45{\cdot}47°\text{C} = \mathbf{70{\cdot}47°C}$

PART-B : मुख्य प्रतिबल तथा मुख्य समतल (Principal Stress & Principal Plane)

1.25 परिचय (Introduction)

अब तक प्रतिबलों से सम्बन्धित हमारा अध्ययन केवल साधारण तनाव प्रतिबल (tensile stress), सम्पीडन प्रतिबल (compressive stress) तथा कर्तन प्रतिबलों (shear stresses) तक ही सीमित रहा है। परन्तु अनेक परिस्थितियों में ये सभी प्रतिबल एक साथ कार्य करते हैं। ये सभी प्रतिबल परस्पर लम्ब तीन समतलों को मिलाने पर बनी दिशाओं के समतलों में कार्य करते हैं। विभिन्न दिशाओं में कार्यरत सभी प्रतिबलों के अवयव (resolved parts) भी परस्पर लम्ब समतलों की दिशाओं में ज्ञात करते हैं। इस प्रणाली को त्रिविमितीय प्रणाली (Three dimensional system) कहते हैं। यह अध्ययन जटिल होने के कारण हमारे इस विषय के पाठ्यक्रम (syllabus of this subject) की सीमा से बाहर है। यदि किसी एक दिशा में प्रतिबल को न लगा हुआ माना जाये अथवा नगण्य (negligible) माना जाये तो प्रतिबलों की केवल दो दिशायें ही रह जाती हैं अर्थात् प्रतिबल केवल दो समतलों में ही कार्य करेंगे तो इस प्रणाली को द्विविमितीय प्रणाली (two dimensional system) कहते हैं अथवा हम यह भी कह सकते हैं कि किसी स्थान पर केवल दो ही समतलों में प्रतिबल कार्य कर रहे हैं और तीसरे समतल पर कार्य करने वाले सभी प्रतिबल शून्य हैं।

इस प्रकार सभी प्रतिबलों का प्रभाव ज्ञात करने पर पता चलता है कि पदार्थ में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल, पदार्थ की प्रतिबल-सीमा से अधिक है अथवा नहीं। पदार्थ की प्रतिबल सीमा से अधिक मान का प्रतिबल उत्पन्न होने पर पदार्थ असफल (fail) हो जाता है। असफलता की यह सीमा, पदार्थ की समानुपाती सीमा (proportional limit) पर होती है जिसके बाद यदि पदार्थ पर कार्य किया जाये तो उसमें स्थायी विरूपण (permanent deformation) होता है।

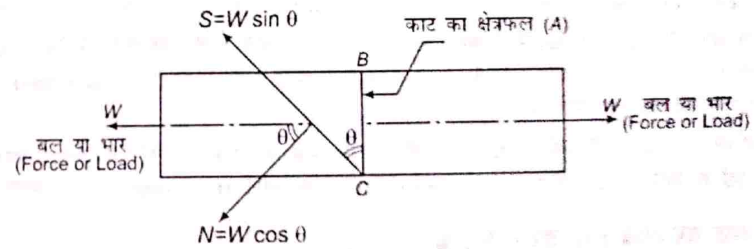
1.26 तिरछी काट पर लम्ब तथा कर्तन प्रतिबल (Normal and Shear Stresses on an inclined Plane)

(1) केवल एक ही अक्षीय बल के कारण

(Due to only one axial force)

चित्र 1.49 में किसी छड़ पर लगाये गये केवल एक ही अक्षीय बल या भार (Load) के कारण उसकी तिरछी काट (Oblique or inclined section) पर लम्ब तथा कर्तन प्रतिबल (Normal and Shear Stresses) ज्ञात करेंगे।

चित्र में ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाती हुई तिरछी काट CD पर, छड़ पर लगे अक्षीय भार W के, लम्ब घटक बल (Normal Force) N तथा CD के समान्तर घटक बल (S) हैं।



चित्र 1.49

छड़ में सीधा प्रतिबल (direct stress) σ_x या $f_x = \frac{W}{A}$

ΔBCD में, $\cos\theta = \frac{BC}{CD}$ या CD का क्षेत्रफल $= \frac{BC \text{ का क्षेत्रफल}}{\cos\theta}$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

$\therefore$ CD का क्षेत्रफल (area of CD) $= \dfrac{A}{\cos\theta}$

अब लम्ब प्रतिबल (Normal Stress), $\sigma_n = \dfrac{\text{लम्ब बल}}{CD \text{ का क्षेत्र०}} = \dfrac{W\cos\theta}{A/\cos\theta} = \dfrac{W}{A}\cos^2\theta$

$\therefore$ तिरछी काट पर लम्ब प्रतिबल (Normal Stress)

$$f_n \text{ या } \sigma_n = \frac{W}{A}\cos^2\theta \quad \text{सूत्र} \qquad ...(1)$$

कर्तन प्रतिबल $\qquad (q \text{ या } \sigma_S) = \dfrac{CD \text{ पर कर्तन बल } (S)}{CD \text{ का क्षेत्रफल}}$

$\therefore$ $\qquad (q \text{ या } \sigma_S) = \dfrac{W\sin\theta}{A/\cos\theta} = \dfrac{W}{2A}\times\sin 2\theta$ (सूत्र)

$\therefore$ $\qquad (\sigma_S \text{ या } q) = \dfrac{W}{2A}\sin 2\theta \qquad ...(2)$

समीकरण (1) में (f_n या σ_n') के अधिकतम मान के लिए

$$\cos\theta = 1 = \cos 0° \text{ या } \theta = 0°$$

$\therefore$ $\qquad f_n$ का अधिकतम मान $= \dfrac{W}{A}\times 1 = f_n \qquad ...(3)$

समीकरण (2) में q के अधिकतम मान के लिये

$$\sin 2\theta = 1 = \sin 90° \text{ या } 2\theta = 90°$$

या $\theta = 45°$ यह कर्तन प्रतिबल के अधिकतम मान के लिये प्रतिबन्ध है।

$\therefore$ $\qquad q_{max} = \dfrac{W}{2A} = \dfrac{f_x}{2} \qquad ...(4)$

अतः स्पष्ट है कि कोई भी लम्ब प्रतिबल (Direct stress) अपने समतल (Plane) से 45° के कोण पर अपने आधे मान का कर्तन प्रतिबल (Shear stress) उत्पन्न करता है।

****आवश्यक संकेत (Important Signs)**

(i) तनाव (tensile) वाले सभी लम्ब प्रतिबल (Normal stress) धनात्मक (+ve) माने जाते हैं।

(ii) सम्पीडन (Compressive) वाले सभी लम्ब प्रतिबल (Normal stress) ऋणात्मक (–ve) माने जाते हैं।

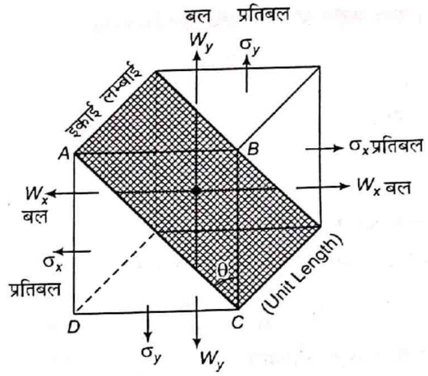
(iii) तिरछे तल (Oblique Plane) पर प्रवाम (Anticlockwise) कार्य करने वाले कर्तन प्रतिबल (q या σ_t या σ_s) धनात्मक (+ve) तथा प्रदक्षिण (clockwise) कार्य करने वाले कर्तन प्रतिबल (Shear stress) ⇒ (q या σ_t या σ_s) ऋणात्मक (–ve) माने जाते हैं।

(iv) ऊर्ध्वाधर (Vertical) से घड़ी की सुई की दिशा में (Clockwise) मापा गया कोण θ, Negative (–ve) तथा घड़ी की सुई के विपरीत दिशा में (Anticlockwise) मापा गया कोण (θ), Positive (+ve) माना जाता है।

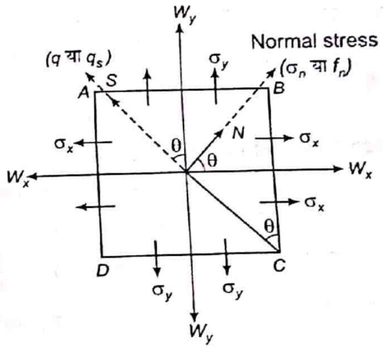
1.27 तिरछी काट पर लम्ब तथा कर्तन प्रतिबल (Normal and Shear Stresses on an inclined plane)

दशा (Condition)–

परस्पर लम्ब दो बलों के कारण (Due to two mutually perpendicular forces/stresses)



चित्र 1.50



चित्र 1.51

त्रिविमितीय (Three dimensional) चित्र 1.50 में छड़ की क्षैतिज अक्ष (x-Axis) की दिशा में क्षैतिज खिंचाव बल W_x कार्य करते हैं, जिसके कारण इस दिशा में प्रतिबल σ_x या f_x पैदा होते हैं। इसी प्रकार ऊर्ध्वाधर अक्ष (Vertical Axis) y–अक्ष की दिशा में खिंचाव बल W_y कार्य करते हैं, जिसके कारण इस दिशा में प्रतिबल σ_y या f_y उत्पन्न होते हैं।

चित्र 1.51 में सरलता के लिये केवल सम्मुख दृश्य (Front View) लेकर बलों को दिखाया गया है। इसमें तिरछा समतल AC द्वारा दिखाया गया है। इस तिरछे समतल पर परस्पर लम्ब दो बल W_x व W_y हैं जिनसे इन्हीं की दिशाओं में प्रतिबल क्रमश: (σ_x या f_x) और (σ_y या f_y) उत्पन्न होते हैं। तिरछी काट AC पर लम्ब प्रतिबल (σ_n या f_n) हैं जो कि लम्ब बल (Normal force) N के कारण होते हैं तथा तिरछी काट AC पर कर्तन प्रतिबल (Shear stress) (q या σ_s या σ_t) उत्पन्न होते हैं जो कि कर्तन बल (S) के कारण हैं। माना छड़ अथवा तिरछी काट की मोटाई इकाई (unit) है।

$\therefore$ $\qquad$ बल (W_x) = प्रतिबल × क्षेत्रफल (यहाँ लिखें)

क्षैतिज बल $\qquad W_x = \sigma_x \times (BC \times 1)$ (चित्र 1.2 से क्षेत्रफल देखें) ... (1)

इसी प्रकार ऊर्ध्वाधर बल $\qquad W_y = \sigma_y \times (AB \times 1)$ ... (2)

(1) तिरछी काट AC पर लम्ब बल (Normal Force) द्वारा लम्ब प्रतिबल (Normal Stress)

लम्ब बल, $N = W_x\cos\theta + W_y\sin\theta$ (चित्र 1.3 में देखें) ... (3)

परन्तु लम्ब बल (N) = प्रतिबल × क्षेत्रफल

अर्थात् $\qquad N = \sigma_n \times (AC \times 1)$ ... (4)

समीकरण (3) व (4) से N के मान समान रखने पर

$$\sigma_n \times AC \times 1 = W_x\cos\theta + W_y\sin\theta$$

$$= (\sigma_x \times BC \times 1)\times\cos\theta + (\sigma_y \times AB \times 1)\times\sin\theta$$

$\therefore$ $\qquad \sigma_n = \sigma_x \times \dfrac{BC}{AC}\times\cos\theta + \sigma_y \times \dfrac{AB}{AC}\times\sin\theta$

या $\qquad \boxed{\sigma_n = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta}$ (सूत्र) ... (5)

अथवा $\qquad f_n = f_x\cos^2\theta + f_y\sin^2\theta$ (सूत्र)

इस सूत्र से तिरछी काट पर लम्ब प्रतिबल (Normal Stress) ज्ञात किया जाता है।

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

(2) तिरछी काट AC पर कर्तन बल (Shear Force) द्वारा कर्तन प्रतिबल (Shear Stress)

चित्र 1.51 के अनुसार

$$\text{कर्तन बल, } S = W_y\cos\theta - W_x\sin\theta$$

$$S = \text{प्रतिबल} \times \text{क्षेत्रफल}$$

परन्तु

या $$S = \sigma_S \times (AC\times 1)$$

समीकरण (6) तथा (7) को समान रखने पर—

$$\sigma_S \times AC \times 1 = W_y\cos\theta - W_x\sin\theta$$

$$= (\sigma_y \times AB\times 1)\cos\theta - (\sigma_x \times BC\times 1)\sin\theta$$

$\therefore$ $$\sigma_S = \sigma_y \times \frac{AB}{AC}\times\cos\theta - \sigma_x\times\frac{BC}{AC}\times\sin\theta$$

$$= \sigma_y\sin\theta\cos\theta - \sigma_x\cos\theta\sin\theta$$

$$= (\sigma_y - \sigma_x)\sin\theta\cos\theta$$

$$\boxed{\sigma_S = \frac{(\sigma_y-\sigma_x)}{2}\times\sin 2\theta} \quad \text{(सूत्र)}$$

अथवा $$q = \left(\frac{f_y - f_x}{2}\right)\times\sin 2\theta \quad \text{(सूत्र)}$$

इस सूत्र द्वारा तिरछी काट पर कर्तन प्रतिबल (Shear Stress) ज्ञात किया जाता है।

(3) अधिकतम कर्तन प्रतिबल तथा लम्ब प्रतिबल (Max. Shearing Stress and Normal Stress)—

$\because$ $$q \text{ या } \sigma_S = \frac{(\sigma_y-\sigma_x)}{2}\times\sin 2\theta \quad \text{सूत्र में}$$

(q या σ_S) के अधिकतम मान के लिये $\sin 2\theta = 1$

$\therefore$ $$\sin 2\theta = \sin 90^\circ \text{ या } 2\theta = 90^\circ$$

या $$\theta = 45^\circ$$

$\therefore$ $$q_{\text{अधिकतम}} = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right) \quad \text{(सूत्र)}$$

अब सम्बन्ध सूत्र (5) से $\theta = 45^\circ$ पर लम्ब प्रतिबल

$$\sigma_n = \sigma_x(\cos^2 45^\circ) + \sigma_y(\sin^2 45^\circ)$$

$$\sigma_n = \frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2} \quad \text{...(}$$

(4) लम्ब तथा कर्तन प्रतिबलों का परिणामी (Resultant of Normal and Shear Stresses)—

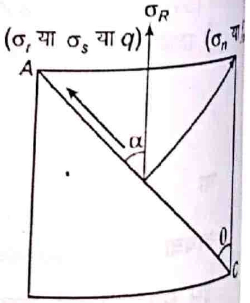
$$\sigma_R \text{ या } f_R = \sqrt{(\sigma_n^2+\sigma_s^2)} \text{ अथवा } \sqrt{(f_n^2+q^2)} \quad \text{...(11)}$$

अत: समीकरण (11) में (σ_n तथा σ_s) के मान अथवा (f_n तथा q) के मान रखकर परिणामी प्रतिबल का मान ज्ञात किया जा सकता है।

(5) परिणामी प्रतिबल का झुकाव (Direction angle of Resultant)·

माना परिणामी प्रतिबल σ_R या तिरछी काट AC से झुकाव कोण α है तब

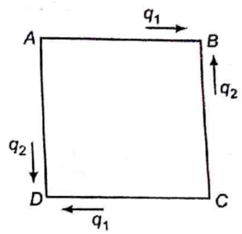
$$\tan\alpha = \frac{\sigma_n}{\sigma_s} \text{ या } \frac{f_n}{q}$$



चित्र 1.52

1.28 सन्तुलन के लिये आवश्यक पूरक कर्तन प्रतिबल (Complementary Shear Stresses for Equilibrium)

चित्र में $ABCD$ इकाई मोटाई वाले एक आयताकार (Rectangular) ब्लॉक का एक फलक (one face) दिखाया गया है। माना कि इसके समतलों AB तथा CD पर q_1 मान के कर्तन प्रतिबल (Shear stresses) लग रहे हैं। इन प्रतिबलों के सापेक्ष बलों के कारण घड़ी की विपरीत दिशा अर्थात् प्रवाम (anticlockwise) दिशा में बलयुग्म (couple) कार्य करता है। अत: ब्लॉक के सन्तुलन के लिये इसके विपरीत दिशा में भी एक बलयुग्म (couple), पहले वाले बलयुग्म (couple) के मान के बराबर लगना चाहिये। इस दूसरे बलयुग्म (couple) को सन्तुलक बलयुग्म (balancing couple) कहते हैं। दूसरे बलयुग्म के कारण माना q_2 मान के कर्तन प्रतिबल समतलों AD तथा CB पर कार्य करते हैं। अब सन्तुलन के लिये C पर सभी बलों का घूर्ण (moment) लेने पर, $q_1 \times$ समतल AB का क्षेत्रफल $\times CB$



चित्र 1.53

$$= q_2 \times \text{समतल } AD \text{ का क्षेत्रफल} \times CD$$

या $$q_1 \times a \times 1 \times b = q_2 \times b \times 1 \times a$$

जहाँ $$AB = CD = a \text{ लम्बाई}$$

तथा $$AD = BC = b \text{ लम्बाई}$$

$\therefore$ $$q_1 = q_2 \text{ i.e. } \tau_{xy}$$

अत: स्पष्ट है कि "किसी कर्तन प्रतिबल (Shear Stress) के साथ हमेशा उसी मान का परन्तु विपरीत घुमाऊ घूर्ण (Turning Moment) का कर्तन प्रतिबल, पहले प्रतिबल के लम्ब दिशा में स्वयं ही (Selfly) कार्य करने लगता है, जिसे पूरक प्रतिबल (Complementary Shear Stress) कहते हैं।"

1.29 मुख्य प्रतिबल तथा मुख्य समतल (Principal Stresses and Principal Planes)

इसके लिये ऐसी कल्पना कीजिये कि एक आयताकार ठोस (Cuboid) या घनाकार ठोस (Cube) का एक कोना है जिससे उसकी तीन दीवारें अथवा समतल जा रहे हैं जो कि प्रत्येक एक-दूसरे के लम्बरूप मिलते हैं।

अत: "वस्तु के किसी बिन्दु पर यदि अनेक प्रतिबल विभिन्न दिशाओं में लग रहे हैं और उस बिन्दु से होते हुए परस्पर लम्ब तीन समतल हैं जिन पर परिणामी प्रतिबल (Resultant Stress) लम्बरूप (Normally) ही हों तो परस्पर लम्ब इन समतलों को मुख्य समतल (Principal Planes) कहते हैं और इन पर लगने वाले लम्बरूप परिणामी प्रतिबलों को मुख्य प्रतिबल (Principal Stress) कहते हैं।"

"At any point of a strained body, there exist three planes (mutually prependicular to each other) which carry normal stresses only, no shear stresses act on these planes. These planes are called as principal planes and the normal stresses acting on the principal planes are called Principal Stresses."

यहाँ Two dimensional system के लिये तीन में से एक मुख्य प्रतिबल को शून्य मानने पर केवल दो ही मुख्य प्रतिबल (σ_1 या σ_2) रह जाते हैं, जिनमें से एक अधिकतम लम्ब प्रतिबल तथा दूसरा न्यूनतम लम्ब प्रतिबल कहलाता है।

माना चित्र 1.6 में एक आयताकार ठोस (Cuboid) का एक फलक (One Face) दिखाया गया है जिसमें ऊर्ध्वाधर (Vertical) से θ कोण पर झुका तिरछा तल (Inclined Plane) $T-S$ है।

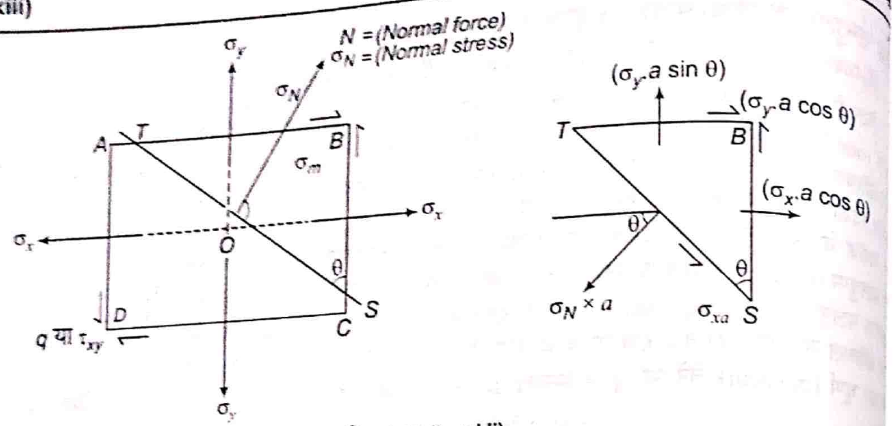
$T-S$ पर लम्ब बल (N) के कारण लम्ब प्रतिबल (Normal Stress) σ_n है।

$$\text{माना तिरछे समतल } (T\text{-}S) \text{ का क्षेत्रफल} = a$$

$\therefore$ $$\text{समतल } BS \text{ का क्षेत्रफल} = a\cos\theta$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint



चित्र 1.54 (i and ii)

तथा समतल BT का क्षेत्रफल $= a\sin\theta$

(1) ∴ **समतल *T-S* पर,** (बल = प्रतिबल × क्षेत्रफल)

लम्बरूप बल (Normal Force) $= \sigma_n \times a$

कर्तन बल (Shear Force) $= q_\theta \times a$

(2) समतल *BS* पर,

लम्बरूप बल (Normal Force) $= \sigma_x \times a\cos\theta$

कर्तन बल (Shear Force) $= q \times a\cos\theta$

(3) समतल *BT* पर,

लम्बरूप बल $= \sigma_y \times a\sin\theta$

कर्तन बल $= q \times a\sin\theta$

अब सन्तुलन के लिये

$\Sigma H = 0$ से,

$$\sigma_n \times a\cos\theta - q \times a\sin\theta - \sigma_x.a\cos\theta - q \times a\sin\theta = 0$$

या
$$\sigma_n\cos\theta - q\sin\theta = \sigma_x\cos\theta + q\sin\theta$$

तथा $\Sigma V = 0$ से

$$\sigma_n\, a\sin\theta + q \times a\cos\theta - \sigma_y\, a \times \sin\theta - q \times a\cos\theta = 0$$

या
$$\sigma_n\sin\theta + q\cos\theta = \sigma_y\sin\theta + q\cos\theta$$

समीकरण (1) को $\cos\theta$ से तथा समीकरण (2) को $\sin\theta$ से गुणा करके जोड़ने पर

$$\sigma_n = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + 2q\sin\theta\cos\theta \quad \text{... (3)}$$

अब समीकरण (1) को $\sin\theta$ से तथा समीकरण (2) को $\cos\theta$ से गुणा करके घटाने पर

$$q_\theta = (\sigma_y - \sigma_x)\sin\theta\cos\theta + q\,(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

समीकरण (3) व (4) में निम्न सूत्रों से मान रखने पर

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos2\theta}{2} \text{ तथा } \sin^2\theta = \frac{1-\cos2\theta}{2}$$

∴
$$\sigma_n = \sigma_x\left(\frac{1+\cos2\theta}{2}\right) + \sigma_y\left(\frac{1-\cos2\theta}{2}\right) + q\sin2\theta$$

अत: तिरछे तल पर लम्ब प्रतिबल (Normal Stress on an inclined Plane)

$$\boxed{\sigma_n = \frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\cos2\theta + q\sin2\theta} \quad \text{(सूत्र) ... (5)}$$

तथा नत समतल पर कर्तन प्रतिबल

(Shear Stress on the inclined Plane)

$$\boxed{q_\theta \text{ या } \sigma_s \text{ या } \sigma_t = \left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\right)\sin2\theta + q\cos2\theta} \quad \text{(सूत्र) ... (6)}$$

अब σ_n को θ के सापेक्ष अवकलित (differentiate) करके प्राप्त मान अर्थात् $\left(\frac{d}{d\theta}\sigma_n\right) = 0$ रखने पर

$$\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}(-\sin2\theta)\times2 + q\cos2\theta\times2 = 0$$

या
$$\sin2\theta = \frac{2q\cos2\theta}{(\sigma_x-\sigma_y)}$$

या
$$\tan2\theta = \left(\frac{2q}{\sigma_x-\sigma_y}\right) \quad \text{(सूत्र) ... (7)}$$

यदि q को τ_{xy} माना जाये तब
$$\tan2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \quad \text{(सूत्र)}$$

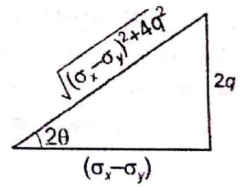
अब इस सम्बन्ध में (7) से θ के ऐसे दो मान प्राप्त होते हैं जोकि इसे संतुष्ट करते हैं। यदि ये मान θ_1 तथा θ_2 हैं तो

$$\theta_2 = \theta_1 + 90^\circ \quad \text{... (8)}$$

∵ समीकरण (7) से,
$$\tan2\theta = \frac{2q}{(\sigma_x-\sigma_y)}$$

∴
$$\sin2\theta = \pm\frac{2q}{\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4q^2}}$$

तथा
$$\cos2\theta = \pm\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4q^2}}$$



चित्र 1.55

यहाँ (+ve) मान एक समतल को तथा (–ve) मान दूसरे समतल को दर्शाता है।

समीकरण (5) में $\sin2\theta$ तथा $\cos2\theta$ के मान रखने पर (+ve) चिन्ह प्रयोग करने पर अधिकतम मुख्य प्रतिबल,

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_x+\sigma_y)}{2} + \frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\times\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{\sqrt{[(\sigma_x-\sigma_y)^2+4q^2]}} + q\times\frac{2q}{\sqrt{[(\sigma_x-\sigma_y)^2+4q^2]}}$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

∴ Max Principal Stress

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4q^2]} \quad \text{(सूत्र)}$$

अब (–ve) चिन्ह लेने पर न्यूनतम मुख्य प्रतिबल,

$$\sigma_2 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \times \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4q^2]}} - q \times \frac{2q}{\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4q^2]}}$$

या न्यूनतम मुख्य प्रतिबल (Minimum Principal Stress)

$$\sigma_2 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4q^2]} \quad \text{(सूत्र)}$$

ये मुख्य प्रतिबल, क्रान्तिक लम्ब प्रतिबल (Critical Normal Stress) भी कहलाते हैं।

महत्वपूर्ण (Important)

मुख्य समतलों (Principal Planes) पर कर्तन प्रतिबल (Shear Stress) शून्य (Zero) होता है।

∴ q_θ अर्थात् (σ_S या σ_t) $= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\sin 2\theta + q\cos 2\theta$ सूत्र में

q_θ अर्थात् (σ_S या σ_t) = 0 रखने पर,

$$\frac{(\sigma_y - \sigma_x)}{2}\sin 2\theta + q\cos 2\theta = 0$$

$$\therefore \quad \tan 2\theta = -\frac{2q}{(\sigma_y - \sigma_x)} = \frac{2q}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

$$\therefore \quad \tan 2\theta = \frac{2q}{(\sigma_x - \sigma_y)} \text{ या } \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \quad \text{(सूत्र)}$$

अतः दोनों मुख्य समतलों पर कर्तन प्रतिबल (Shear Stress) का मान शून्य (Zero) होता है।

1.30 अधिकतम तथा न्यूनतम कर्तन प्रतिबल (Max and Minimum Shear Stresses)

पिछले अनुच्छेद के समीकरण (9) तथा (10) के मानों को निम्न सूत्रों में रखकर अधिकतम कर्तन प्रतिबल (Max Shearing Stress) q_1 (अथवा τ_1) का मान और न्यूनतम कर्तन प्रतिबल (Minimum Shearing Stress) q_2 (अथवा τ_2) का मान ज्ञात कर लेते हैं।

(1) अधिकतम कर्तन प्रतिबल (Max Shearing Stress)

$$q_1 \text{ या } \tau_1 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}$$

(2) न्यूनतम कर्तन प्रतिबल (Minimum Shearing Stress)

$$q_2 \text{ या } \tau_2 = -\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}$$

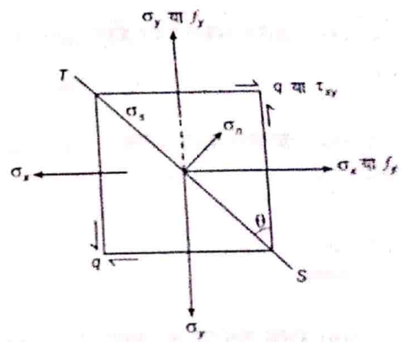
(3) अधिकतम तथा न्यूनतम कर्तन प्रतिबल वाले समतल अधिकतम मुख्य प्रतिबल वाले समतल से क्रमशः –45° व +45° के कोण बनाते है।

(4) कर्तन प्रतिबल वाले समतलों के लिये आवश्यक नहीं कि उन पर मुख्य प्रतिबल शून्य (Zero) हो।

सारांश (Summary) रूप में

विशेष (Important) बातें याद रखें—

1. अधिकतम तथा न्यूनतम कर्तन प्रतिबलों के मान आपस में बराबर परन्तु विपरीत दिशा में होते हैं।
2. (+ve) मान वाला अधिकतम तथा (–ve) मान वाला न्यूनतम कर्तन प्रतिबल कहलाता है।
3. मुख्य समतलों पर लम्ब तनाव प्रतिबल (Tensile Stress) (σ_x तथा σ_y) को (+ve) तथा मुख्य समतल पर लम्ब सम्पीडन प्रतिबल (Compressive Stress) (–ve) लेते हैं।
4. Block के चारों ओर दिये गये कर्तन प्रतिबल (Shear Stress) q या τ_{xy} को Anticlockwise होने पर (+ve) तथा clockwise होने पर (–ve) लेते हैं।
5. तिरछे बल (oblique or inclined plane) का Vertical से कोण (angle), anticlockwise मापने पर (+ve) तथा clockwise मापने पर (– ve) लेते हैं।
6. परस्पर लम्ब दो प्रतिबलों (σ_x व σ_y) तथा Block की चारों दीवारों पर कर्तन प्रतिबल व पूरक कर्तन प्रतिबल q या τ_{xy} लगे होने पर



चित्र 1.56

(i) नत समतल पर लम्ब प्रतिबल (σ_n या f_n होने पर)

(Normal Stress on an oblique inclined Plane)

$$\sigma_n = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \quad \text{(सूत्र)}$$

अथवा $$f_n = \left(\frac{f_x + f_y}{2}\right) + \left(\frac{f_x - f_y}{2}\right)\cos 2\theta + q\sin 2\theta$$

(ii) नत समतल पर कर्तन प्रतिबल (q_θ या σ_s या σ_t)

(Shear Stress on an inclined plane)

$$(\sigma_s \text{ अथवा } \sigma_t) = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \quad \text{(सूत्र)}$$

अथवा $$q_\theta = \left(\frac{f_y - f_x}{2}\right)\sin 2\theta + q\cos 2\theta \quad \text{(सूत्र)}$$

(iii) परिणामी प्रतिबल (Resultant Stress on inclined plane)

$$\sigma_R = \sqrt{(\sigma_n^2 + \sigma_s^2)} \text{ या } f_R = \sqrt{f_n^2 + q_\theta^2}$$

तथा नत समतल (Inclined Plane) से परिणामी (Resultant) का कोण α है।

तब $$\tan\alpha = \frac{\sigma_n}{\sigma_s} \text{ या } \tan\alpha = \frac{f_n}{q_\theta}$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

(iv) **अधिकतम मुख्य प्रतिबल** (Max. Principal Stress)

$$\sigma_1 = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \text{(सूत्र)}$$

अथवा

$$f_1 = \left(\frac{f_x + f_y}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{(f_x - f_y)^2 + 4q^2} \quad \text{(सूत्र)}$$

(v) **इसके समतल का कोण** (Direction of the Plane of Max. Principal Stress)

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{2q \text{ (या } 2\tau_{xy})}{\sigma_x - \sigma_y}\right]$$

(vi) **न्यूनतम मुख्य प्रतिबल** (Minimum Principal Stress)

$$\sigma_2 = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \text{(सूत्र)}$$

अथवा

$$f_2 = \left(\frac{f_x + f_y}{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{(f_x - f_y)^2 + 4q^2} \quad \text{(सूत्र)}$$

(vii) **इसके समतल का कोण** (Direction of the Plane of Minimum Principal Stress)

$$\theta_2 = \theta_1 + 90°$$

(viii) **अधिकतम कर्तन प्रतिबल** (Max. Shearing Stress)

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \text{ या } q_1 = \left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right) \quad \text{(सूत्र)}$$

(ix) **इस अधिकतम कर्तन प्रतिबल के समतल का कोण** (Direction of the Plane of (τ_1 or q_1)

$$\theta_3 = \theta_1 + 45° \quad \text{(सूत्र)}$$

(x) **न्यूनतम कर्तन प्रतिबल** (Mini. Shearing Stress)

$$\tau_2 = -\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \text{ या } q_2 = -\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right) \quad \text{(सूत्र)}$$

(xi) **इस न्यूनतम कर्तन प्रतिबल के समतल का कोण**

(Direction of the Plane of (τ_2 या q_2)

$$\theta_4 = \theta_2 + 45° \quad \text{(सूत्र)}$$

(xii) **केवल एक ही Axial Load के कारण नत समतल पर**

(a) **लम्ब-प्रतिबल** (Normal Stress)

$$(\sigma_n \text{ या } f_n) = \frac{W}{A}\cos^2\theta = f_x\cos^2\theta \quad \text{(सूत्र)}$$

(b) **कर्तन प्रतिबल** (Shear Stress),

$$q = \frac{W}{2A}\sin 2\theta \quad \text{(सूत्र)}$$

(c) Shear Stress (q) के अधिकतम मान (Max. Value) के लिये $\theta = 45°$ होता है तथा

$$q_{max} = \frac{W}{2A} = \frac{f_x}{2} \quad \text{(सूत्र)}$$

(xiii) मुख्य प्रतिबल तथा मुख्य समतल की परिभाषा (Definition of Principal Stress and Principal Plane)—वस्तु के किसी बिन्दु पर यदि अनेक प्रतिबल विभिन्न दिशाओं में लग रहे हैं और इस बिन्दु से होते हुए आपस में लम्ब (mutually perpendicular) तीन समतल (Planes) इस प्रकार हैं कि प्रत्येक समतल पर परिणामी प्रतिबल लम्बरूप ही हो। परस्पर लम्ब ऐसे समतलों को ही मुख्य समतल (Principal Planes) कहते हैं और इन मुख्य समतलों पर लम्ब परिणामी प्रतिबलों को मुख्य प्रतिबल (Principal Stress) कहते हैं।

"At any point of a strained body, there exist three planes (mutually prependicular to each other) which carry normal stresses only, no shear stresses act on these planes. These planes are called as principal planes and the normal stresses acting on the principal planes are called Principal Stresses."

अथवा (OR)

प्रतिबलों की Two-dimensional system में जब किसी बिन्दु पर अनेक प्रतिबल विभिन्न दिशाओं में कार्य करते हैं तो इनके परिणामी प्रतिबलों के अधिकतम तथा न्यूनतम लम्ब प्रतिबलों को मुख्य प्रतिबल (Principal Stresses) कहते हैं, जिनके साथ कर्तन प्रतिबल (Shear Stress) शून्य होते हैं। इनसे सम्बन्धित समतलों को मुख्य समतल कहते हैं।

"A plane, which is not subjected to shear stress is called as principal plane. The stress across this plane is called principal stress."

1.31 मोहर-वृत्त (Mohr's Circle)

यह एक ग्राफीय विधि (Graphical Method) है जिसकी सहायता से अधिकतम तथा न्यूनतम मुख्य प्रतिबल (Principal Stresses), अधिकतम व न्यूनतम कर्तन प्रतिबल (Shear Stresses) और किसी एक नत समतल (On an inclined plane) पर लम्ब प्रतिबल (Normal Stress) तथा नत समतल पर कर्तन प्रतिबल (Shear Stress on an inclined plane) आदि को ज्यामितीय विधि (Graphical Method) द्वारा अर्थात् मोहर वृत्त बनाकर ज्ञात किया जाता है।

विधि (Method)—सर्वप्रथम मूल बिन्दु O से होती हुई आपस में लम्ब दो रेखायें x-Axis तथा y-Axis की दिशा में खींचते हैं। प्रश्न में अथवा चित्र में दिए गए प्रतिबल निकाय (Stress System) में तनाव प्रतिबलों (Tensile Stresses) अर्थात् (σ_x या f_x) तथा (σ_y या f_y) को मूल बिन्दु O के दायीं ओर (Right Side) किसी पैमाने (Scale) (जैसे—1 cm = 10 kN/mm^2) पर काटते हैं। इस प्रकार प्राप्त बिन्दु से ऊर्ध्वाधर रेखा (Vertical Line) y-अक्ष की दिशा में (q अर्थात् τ_{xy}) का मान काटते हैं, σ_{xy} की दिशा clockwise होने पर मूलबिन्दु O से ऊपर की ओर (–ve) मानकर काटते हैं, और (q या τ_{xy}), Anticlockwise (+ve) होने पर ऊर्ध्वाधर (Vertical) रेखा पर नीचे की ओर काटते हैं।

(τ_x तथा τ_y) का मान सम्पीडन (compressive) होने पर मूल बिन्दु O के बायीं ओर (left side) क्षैतिज रेखा (x-अक्ष) पर काटते हैं। इस प्रकार (τ_x व τ_{xy}) से पहला एक बिन्दु (M) और (σ_y व τ_{xy}) से दूसरा बिन्दु (N) प्राप्त होगा। दोनों को मिलाने वाली रेखा, (x-axis) वाली रेखा को जिस बिन्दु पर काटती है, वह बिन्दु मोहर वृत्त का केन्द्र C होता है। अब C को केन्द्र मानकर CM या CN त्रिज्या (radius) लेकर एक वृत्त पूरा करते हैं, यही मोहर वृत्त कहलाता है। यह वृत्त x-अक्ष को चित्र के अनुसार D तथा E पर काटता है। मूलबिन्दु O से दूरियाँ OD तथा OE के द्वारा क्रमशः अधिकतम तथा न्यूनतम मुख्य प्रतिबल के मान प्रदर्शित होते हैं। केन्द्र C से लम्ब व्यास वृत्त की परिधि को Q तथा Q' पर मिलता है। तब $CQ = CQ' \Rightarrow$ अधिकतम व न्यूनतम कर्तन प्रतिबल (max. and mini. Shear Stress) के मान प्रदर्शित होते हैं जो आपस में समान होते हैं। इस वृत्त पर किसी भी बिन्दु के निर्देशांक (coordinates) (f_θ, q_θ) अथवा (σ_n,σ_s), उस बिन्दु द्वारा प्रदर्शित समतल पर क्रमशः लम्ब तथा कर्तन प्रतिबल होते हैं। मोहर वृत्त द्वारा मान निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं—

(1) Max. Principal Stress, (σ_1या f_1) = OD दूरी × Value of Scale

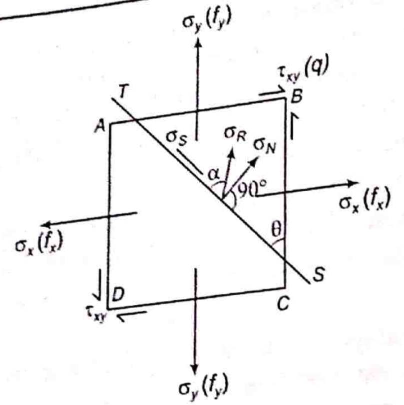
(2) Minimum Principal Stress, (σ_2 या f_2) = OE × Value of Scale

(3) Max. Shear Stress, (τ_1या q_1) = CQ दूरी × Scale

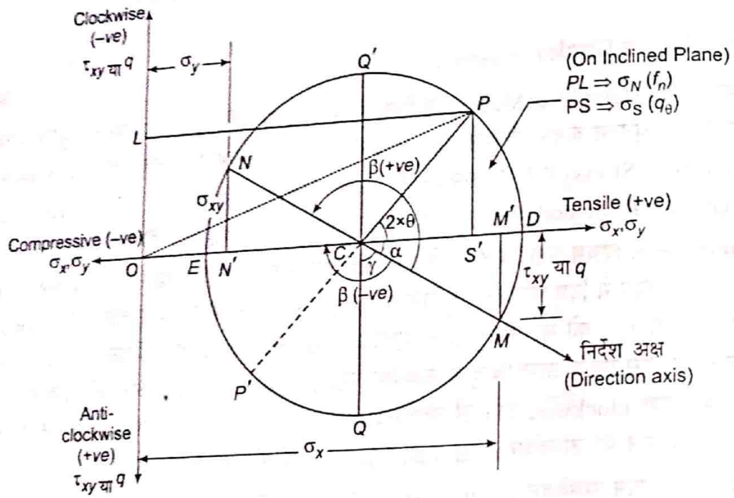
(4) Minimum Shear Stress, (σ_2या q_2) = CQ' × Scale

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint



चित्र 1.57



चित्र 1.58 : मोहर वृत्त (Mohr's Circle)

मोहर वृत्त में N से M की ओर रेखा निर्देश अक्ष (Direction Axis) होती है। इसी रेखा से OD, OE तथा CQ के α, β तथा γ नापकर प्रतिबलों के समतलों के कोण अथवा दिशा निम्न प्रकार उत्तर में दिये जाते हैं।

(a) अधिकतम मुख्य प्रतिबल के समतल का कोण

(Direction of the plane of Max. Principal Stress) (σ_1 या f_1) $= \frac{\alpha}{2}$ (+ve)

(b) न्यूनतम मुख्य प्रतिबल के समतल का कोण

(Direction of the Plane of Mini. Principal Stress) (σ_2 या f_2) $= \pm\frac{\beta}{2}$

(यहाँ यह कोण ↻ दिशा में मापा गया तो (+ve) और यदि ↺ दिशा में मापा गया तो (−ve) दर्शाया जाता है।)

(c) अधिकतम कर्तन प्रतिबल के समतल का कोण

Direction of the Plane of Max. Shear Stress (τ_1 या q_1) $= \frac{\gamma}{2}$

(5) प्रतिबलों के दिये गये ब्लॉक में ऊर्ध्वाधर (Vertical) से θ कोण पर झुके समतल (Inclined Plane) के लिये मोहर वृत्त में केन्द्र C से प्रवाम (Anticlockwise) दिशा में $2\times\theta$ कोण बनाती हुई रेखा खींचते हैं जो वृत्त की परिधि को P पर मिलती है। P से x-axis वाली OD रेखा पर लम्ब PS' डालते हैं तथा y-axis वाली रेखा पर लम्ब PL डालते हैं तब रेखा PL की लम्बाई को माने गये पैमाने (Scale) से गुणा करके प्राप्त मान तिरछे तल T-S पर लम्ब प्रतिबल (Normal Stress) $\Rightarrow \sigma_N$ को प्रदर्शित करता है। इसी प्रकार लम्ब PS' दूरी को Scale से गुणा करने पर प्राप्त मान तिरछे तल TS पर कर्तन प्रतिबल σ_S या q_θ को प्रदर्शित करता है।

दिये गये तिरछे समतल TS के लम्ब समतल पर σ_N तथा σ_s के मान ज्ञात करने के लिये, PC रेखा को पीछे बढ़ाकर वृत्त की परिधि पर P' बिन्दु प्राप्त करते हैं। फिर P की भाँति P' से लम्ब x-अक्ष व y-अक्ष पर डालकर प्रतिबल के मान ज्ञात करते हैं तथा लम्ब प्रतिबल σ_N तथा स्पर्श रेखीय (कर्तन प्रतिबल) (σ_t या σ_s) का परिणामी प्रतिबल (Resultant Stress) को OP रेखा द्वारा दर्शाया जाता है तथा $\sigma_R = OP$ लम्बाई × Scale द्वारा अथवा $\sigma_R = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_S^2}$ सूत्र द्वारा ज्ञात करते हैं।

महत्वपूर्ण उदाहरण (Important Example)

विशेष–तिरछी काट पर केवल एक ही अक्षीय बल या भार (W) के कारण लम्ब तथा कर्तन प्रतिबल पर आधारित प्रश्न (Normal & Shear Stesses on an oblique plane due to only one Axial Force)।

उदाहरण 56. किसी छड़ की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 100 mm^2 है। इसकी अक्ष से 45° पर झुके समतल पर कितना तनाव प्रतिबल (tensile stress) प्रेरित (induce) होगा यदि अनुप्रस्थ काट पर अक्षीय खिंचाव बल (Pull) 10 kN है। नत समतल पर अधिकतम स्पर्श रेखीय प्रतिबल भी ज्ञात करें।

हल—दिया है, क्षेत्रफल $A = 100 \text{ mm}^2$

अक्षीय बल (Axial Pull), $W = 10 \text{ kN} = 10\times1000 \text{ N}$

समतल का Vertical से कोण, $\theta = 90° - 45° = 45°$

(i) तनाव प्रतिबल, $\left(\sigma_n = \frac{W}{A}\cos^2\theta\right)$

$$= \frac{10\times1000}{100}\times\frac{1}{2} = 50 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

(ii) अधिकतम स्पर्श रेखीय प्रतिबल अर्थात् अपरूपण प्रतिबल (Shearing Stress)

Max. $\sigma_t \Rightarrow$ $\sigma_s = \frac{W}{2A}$ (सूत्र) ($\because \theta = 45°$ होता है)

$$= \frac{10000}{2\times100} = 50 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

उदाहरण 57. इस्पात (Steel) की किसी छड़ की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 1 cm^2 है। इसकी अक्ष से 45° पर झुकी हुई काट पर तनाव प्रतिबल 50 N/mm^2 के लिये छड़ पर आवश्यक अक्षीय खिंचाव बल (Axial Pull) ज्ञात कीजिये।

हल—तिरछी काट पर तनाव प्रतिबल (अथवा लम्ब प्रतिबल), σ_n

f_n या $\sigma_n = \frac{W}{A}\cos^2\theta$ सूत्र में

$\theta = 90° - 45° = 45°$

तथा $A = 1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

∴ तिरछी काट पर लम्ब प्रतिबल

∵ $\sigma_n = 50\ N/mm^2$ दिया है।

∴ अक्षीय खिंचाव बल,
$$W = \frac{\sigma_n \times A}{\cos^2\theta}$$ (σ_n के सूत्र से)

$$W = \frac{50 \times 100}{\cos^2 45^\circ} = 10000\ N = 10\ kN$$

उदाहरण 58. एक आयताकार काट की ऐल्यूमीनियम धातु (Al) की छड़ की चौड़ाई 6 cm तथा मोटाई 4cm है। छड़ पर 72 kN का अक्षीय भार लगा है। अभिलम्बीय (Normal), स्पर्श रेखीय (Tangential or Shearing) व परिणामी (Resultant) प्रतिबल (Stress) व दिशा उस समतल पर ज्ञात कीजिये जो छड़ की काट (Section) पर 30° अवनत (Inclined) है। (U.K. 2008)

हल—काट का क्षेत्रफल, $A = 60 \times 40 = 2400\ mm^2$

Axial Load $(W) = 72\ kN = 72000\ N$

समतल का ऊर्ध्वाधर (Vertical) से झुकाव कोण $\theta = 30^\circ$

(i) अभिलम्बीय प्रतिबल (Normal Stress),
$$\sigma_n = \frac{W}{A}\cos^2\theta \quad (\text{सूत्र})$$
$$= \frac{72000}{2400} \times \frac{3}{4} = 22{\cdot}5\ N/mm^2$$

(ii) स्पर्श रेखीय प्रतिबल (Shearing Stress),
$$\sigma_t = \frac{W}{2A}\sin 2\theta \quad (\text{सूत्र})$$
$$\sigma_t = \frac{72000}{2 \times 2400} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12{\cdot}99\ N/mm^2$$

(iii) परिणामी प्रतिबल,
$$\sigma_R = \sqrt{(\sigma_n^2 + \sigma_t^2)} \quad (\text{सूत्र})$$
$$= \sqrt{(22{\cdot}5)^2 + (12{\cdot}99)^2} = 25{\cdot}98\ N/mm^2$$

(iv) परिणामी की दिशा,
$$\tan\alpha = \frac{\sigma_n}{\sigma_t} = \frac{22{\cdot}5}{12{\cdot}99} = 1{\cdot}732$$

∴ तिरछी काट से झुकाव कोण $\alpha = \tan^{-1}(1{\cdot}732) = 60^\circ$

उदाहरण 59. एक तान छड़ (tie bar) पर एकसमान तनाव प्रतिबल (uniform tensile stress) 100 N/mm² है। एक ऐसी तिरछी काट, जिस पर लम्ब छड़ की अक्ष से 30° का कोण बनाता है, पर लम्ब प्रतिबल (Normal Stress), कर्तन प्रतिबल (Shear Stress) तथा परिणामी प्रतिबल (Resultant Stress) के मान ज्ञात कीजिये। अधिकतम कर्तन प्रतिबल (अपरूपण प्रतिबल) का मान भी ज्ञात कीजिये।

हल—f_n या $\sigma_n = \frac{W}{A}\cos^2\theta$ सूत्र में $\theta = 30^\circ$ (Angle of Plane with Vertical)

या
$$f_n = f_x \cos^2\theta$$
$$= 100 \times \cos^2 30^\circ = 75\ N/mm^2$$

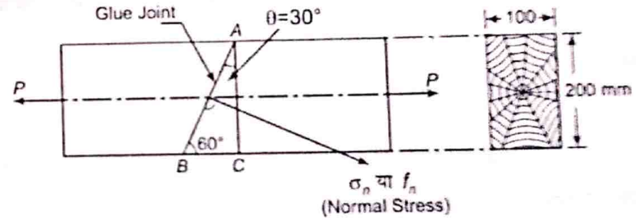
कर्तन प्रतिबल (q या σ_S या σ_t) $= \frac{W}{2A}\sin 2\theta = \frac{f_x}{2}\sin 2\theta$

∴
$$q = \frac{100}{2} \times \sin 60^\circ = 50 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 43{\cdot}3\ N/mm^2 \text{ (clockwise)}$$

परिणामी प्रतिबल (Resultant Stress)
$$\sigma_R \text{ या } f_R = \sqrt{f_n^2 + q^2} \text{ सूत्र से}$$
$$= \sqrt{(75)^2 + (43{\cdot}3)^2} = 86{\cdot}6\ N/mm^2$$

अधिकतम कर्तन प्रतिबल (Max. Shear Stress)
$$\theta = 45^\circ \text{ पर } q_{max} = \frac{f_x}{2} \text{ सूत्र से}$$
$$q_{max} = \frac{100}{2} = 50\ N/mm^2$$ उत्तर

उदाहरण 60. लकड़ी के दो टुकड़े, जिनकी काट (Section) 100 mm × 200 mm है, को चित्र के अनुसार क्षैतिज से 60° पर काटकर ग्ल्यू (Glue) द्वारा जोड़ कर एक छड़ (Bar) बनाई गई है। इस पर एक ही अक्षीय खिंचाव बल (Axial Pull) P लगा है। बल P का सुरक्षित मान (safe value) ज्ञात करें जबकि Glue जोड़ पर लम्ब तथा कर्तन प्रतिबल सीमा (Permissible limit of Normal and Shear Stress) के मान 2 N/mm² तथा 1 N/mm² है।



चित्र 1.59

हल—तिरछी काट AB का ऊर्ध्वाधर से कोण (Angle with vertical of the inclined Plane AB) θ है तो
$$\theta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

प्रश्न में दिया है, σ_n या $f_n = 2\ N/mm^2$

σ_s या $q = 1\ N/mm^2$

सुरक्षित बल (Safe load) $P = ?$

तिरछी काट पर लम्ब प्रतिबल f_n या $\sigma_n = \frac{W}{A}\cos^2\theta$ (सूत्र)

$$\Rightarrow \quad 2 = \frac{W = P}{100 \times 200} \times \cos^2 30^\circ$$

$$\Rightarrow \quad P = \frac{40000}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{160000}{3} = 53333{\cdot}33\ N$$

∴ $P = 53{\cdot}33\ kN$

Scanned with CamScanner

तिरछी काट पर कर्तन प्रतिबल

$$q \text{ या } \sigma_s = \frac{W}{2A}\sin 2\theta \quad \text{सूत्र द्वारा}$$

$$1 = \frac{P}{2\times(100\times200)}\times\sin(2\times30^\circ)$$

$$P = \frac{40000}{\sin 60^\circ} = \frac{80000}{\sqrt{3}} = 46188{\cdot}02 \text{ N}$$

⇒ $P = 46{\cdot}188$ kN

या

अत: उपरोक्त प्राप्त हुए खिंचाव बल (P) के मानों में से कम वाला मान सुरक्षित होगा (Less Value of P will be safe)।

सुरक्षित बल $P = 46{\cdot}188$ kN

विशेष—किसी तिरछी काट पर आपस में लम्ब दो बलों अथवा प्रतिबलों के कारण लम्ब तथा कर्तन प्रतिबल आधारित प्रश्न (Normal and Shear Stress on an oblique plane due to two mutually perpendicular forces/stresses)।

उदाहरण 61. एक छड़ के एक बिन्दु पर मुख्य प्रतिबल 200 N/mm² (तनन-Tensile) और 100 N/mm² (संपीडन-compressive) हैं। एक तल पर, जो दीर्घ मुख्य प्रतिबल अक्ष से 60° पर आनत (inclined) है, परिणामी प्रतिबल का परिमाण (magnitude) तथा दिशा ज्ञात कीजिये। उस विन्दु पर पदार्थ में अपरूपण बल की अधिकतम तीव्रता भी ज्ञात कीजिये। (U.P. 2013 (Mo...))

हल—प्रश्न में दिया है—

$\sigma_x = 200 \text{ N/mm}^2$,

$\sigma_y = -100 \text{ N/mm}^2$ (compressive)

समतल का ऊर्ध्वाधर (Vertical) से झुकाव कोण

$\theta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

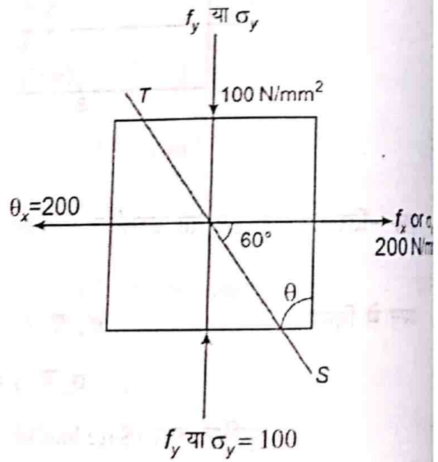
अब नत समतल (T-S) पर लम्ब प्रतिबल (Normal Stress)

$\boxed{\sigma_n = \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta}$ सूत्र से

$= 200\times\cos^2 30^\circ + (-100)\times\sin^2 30^\circ$

$= 200\times\frac{3}{4} - 100\times\frac{1}{4} = \frac{500}{4} = 125 \text{ N/mm}^2$

(तनाव)



चित्र 1.60 (a)

∴ $\sigma_n = 125 \text{ N/mm}^2$ उत्तर

नत समतल पर कर्तन प्रतिबल (Shear Stress on Inclined Plane)

$$(\sigma_s \text{ या } \sigma_t \text{ या } \tau_\theta \text{ या } q_\theta) = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)\sin 2\theta \text{ सूत्र से}$$

$$= \left(\frac{-100-200}{2}\right)\sin(2\times30^\circ)$$

$$= -150\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -129{\cdot}9 \text{ N/mm}^2$$

$= 129{\cdot}9 \text{ N/mm}^2$ (Clockwise) उत्तर

∴ परिणामी प्रतिबल (Resultant Stress),

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_S^2} \text{ सूत्र से}$$

$$\sigma_R = \sqrt{(125)^2 + (-129{\cdot}9)^2} = \sqrt{32499{\cdot}01}$$

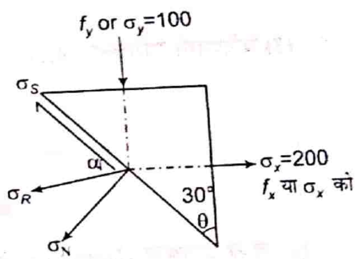
$= 180{\cdot}275 \text{ N/mm}^2$ उत्तर

परिणामी की दिशा (Direction of Resultant) नत समतल से

$$\tan\alpha = \frac{\sigma_N}{\sigma_S} \Rightarrow \frac{f_n}{q_\theta} = \frac{125}{129{\cdot}9} = 0{\cdot}9623$$

∴ $\alpha = \tan^{-1}(0{\cdot}9623) = 43{\cdot}898^\circ \cong 44^\circ$ उत्तर

चित्र 1.61 (b) में प्रतिबलों व कोण को दर्शाया गया है।



चित्र 1.61 (b)

अधिकतम अपरूपण प्रतिबल (Maximum Shear Stress) के लिए

$\theta = 45^\circ$ होता है, तब $q_{max} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}$ (सूत्र)

∴ $\sigma_S^{max} \Rightarrow q_{max} = \frac{-100-200}{2}$

$= -150 \text{ N/mm}^2$ (clockwise) उत्तर

उदाहरण 62. एक विकृत पदार्थ के किसी बिन्दु पर 100 MPa एवं 50 MPa के दो तनन प्रधान प्रतिबल परस्पर लम्बवत् तल पर कार्यरत हैं। मोहर वृत्त (Mohr's Circle Method) से अभिलम्बवत् स्पर्श रेखीय एवं परिणामी प्रतिबलों की गणना उस समतल पर कीजिये जो कि मुख्य प्रधान समतल से 30° के कोण पर झुका है। (U.P. 2011)

हल—यहाँ दिया है, f_x या $(\sigma_x) = 100$ MPa

f_y या $(\sigma_y) = 50$ MPa $\theta = 30^\circ$ (angle of inclined plane)

माना पैमाना (Scale), 1 cm = 10 MPa

अब मोहर वृत्त विधि में बताये अनुसार, माने गये उचित पैमाने (Scale) पर σ_x या σ_y के मानों के लिए बिन्दु D तथा E प्राप्त करके इनके बीच की दूरी DE का मध्य बिन्दु C ज्ञात करते हैं तथा C को केन्द्र मानकर CE या CD को त्रिज्या (radius) लेकर मोहर वृत्त खींचते हैं। फिर C पर $2\times\theta \Rightarrow 2\times30^\circ \Rightarrow 68^\circ$ का कोण बनाती हुई रेखा खींचकर वृत्त पर बिन्दु P प्राप्त करते हैं। फिर P से लम्ब PL तथा PS' खींचते हैं तथा निम्न प्रकार मान ज्ञात करते हैं।

चित्र 1.62 में, **(1) अभिलम्ब प्रतिबल (Normal Stress)**,

f_N या σ_N = PL लम्बाई × Scale

= 8·8 cm × 10 MPa = 88 MPa उ

(2) स्पर्श रेखीय या कर्तन प्रतिबल (Shear Stress)

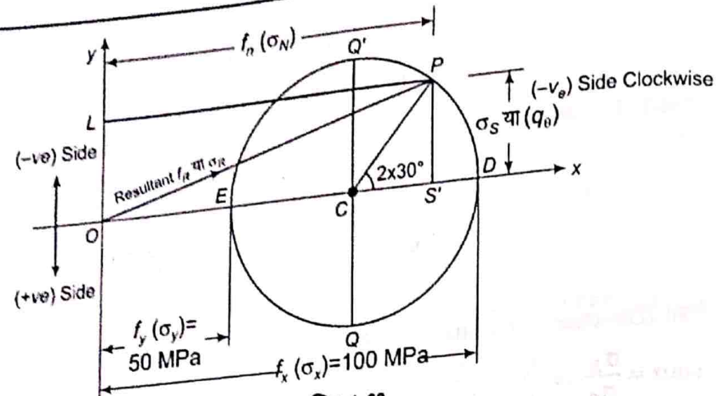
σ_t या σ_s या q_θ = PS' लम्बाई × Scale

= 2·2 cm × 10 MPa = 22 MPa

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint



चित्र 1.62

(3) परिणामी प्रतिबल (Resultant Stress)

$$f_R \text{ या } \sigma_R = OP \text{ लम्बाई} \times \text{Scale}$$

$$= 9{\cdot}05 \text{ cm} \times 10 \text{ MPa} = 90{\cdot}5 \text{ MPa}$$

Method-II (सूत्रों द्वारा गणना करना)

(1) लम्ब प्रतिबल (Normal Stress on an Oblique Plane)

$$f_N \text{ या } \sigma_N = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$= \left(\frac{100+50}{2}\right) + \left(\frac{100-50}{2}\right)\cos 60^\circ + 0$$

[∵ τ_{xy} = ... यहाँ नहीं दिया ...]

$$= 75 + 25 \times \frac{1}{2} = 87{\cdot}5 \text{ MPa}$$

अथवा (OR)

f_N या $\sigma_N = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta$ सूत्र से भी ज्ञात कर सकते हैं।

$$= 100 \cos^2 30^\circ + 50 \sin^2 30^\circ$$

$$= 100 \times \frac{3}{4} + 50 \times \frac{1}{4} = 75 + 12{\cdot}5 = 87{\cdot}5 \text{ MPa}$$

(2) स्पर्श रेखीय प्रतिबल (Tangential Stress) **अथवा कर्तन प्रतिबल** (Shear Stress)

$$\sigma_t \text{ या } \sigma_s \text{ या } q_\theta = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

$$= \left(\frac{50-100}{2}\right)\sin 60^\circ + 0 = -25 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

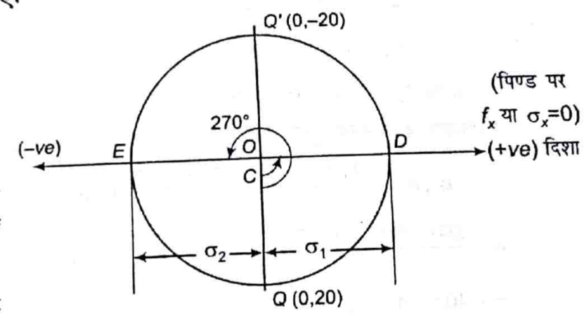
$$= -21{\cdot}66 \text{ MPa} = -22 \text{ MPa (clockwise)}$$

(3) परिणामी प्रतिबल (Resultant)

$$\sigma_R \text{ या } f_R = \sqrt{(\sigma_N^2 + \sigma_t^2)} = \sqrt{87{\cdot}5^2 + 22^2} = 90{\cdot}2 \text{ MPa}$$ उत्तर

उदाहरण 63. मोहर प्रतिबल वृत्त से क्या सूचना प्राप्त होती है? एक पिण्ड के किसी बिन्दु पर शुद्ध अपरूपण प्रतिबल (Shear Stress) लग रहा है जिसका परिमाण 20 KPa है। मोहर वृत्त का प्रयोग करते हुए इस बिन्दु पर मुख्य प्रतिबल तथा मुख्य समतलों की दिशा ज्ञात कीजिए। (U.P. 2009, 12 MOS)

हल—मोहर वृत्त (Mohr's Circle) द्वारा मुख्य समतलों की स्थिति, मुख्य समतलों पर लम्ब अधिकतम मुख्य प्रतिबल, लम्बरूप न्यूनतम मुख्य प्रतिबल, अधिकतम व न्यूनतम कर्तन (अपरूपण) प्रतिबल और छड़ की तिरछी काट (Oblique Plane) पर लम्ब तथा कर्तन प्रतिबल एवं इनके परिणामी प्रतिबल ज्ञात किये जाते हैं अथवा उपरोक्त सूचनायें प्राप्त होती हैं।



चित्र 1.63

मोहर वृत्त द्वारा हल—सीधे प्रतिबलों (direct stresses) को शून्य मानकर मोहर वृत्त, $CQ = 20$ KPa को किसी माने गये Scale पर खींचते हैं, जिससे मुख्य प्रतिबल के मान क्रमशः ±20 kPa प्राप्त होते हैं। उत्तर

माना पैमाना (Scale)

$$1 \text{ cm} = 5 \text{ Kpa}$$

अधिकतम मुख्य प्रतिबल (Max. Principal Stress)

$$\sigma_1 = OD \Rightarrow CQ = 20 \text{ KPa}$$

तथा न्यूनतम मुख्य प्रतिबल (Min. Principal Stress),

$$\sigma_2 = OE \Rightarrow -20 \text{ KPa}$$ उत्तर

हम जानते हैं कि मोहर वृत्त में प्रतिबलों के समतलों के कोण दुगुने ($2 \times \theta$) प्रदर्शित होते हैं, अतः उत्तर देने के लिए इनके आधे किये जाते हैं। अतः

(1) अधिकतम लम्ब प्रतिबल वाले समतल की निर्देश अक्ष से कोणीय स्थिति

$$\theta_1 = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$ उत्तर

(2) न्यूनतम लम्ब प्रतिबल वाले समतल की निर्देश अक्ष से कोणीय स्थिति

$$\theta_2 = \frac{270^\circ}{2} = 135^\circ$$ उत्तर

(3) अधिकतम कर्तन प्रतिबल वाले समतल की निर्देश अक्ष से कोणीय स्थिति,

$$\theta_3 = 0^\circ$$ उत्तर

(∵ CQ रेखा ही निर्देश अक्ष है)

(4) न्यूनतम कर्तन प्रतिबल वाले समतल की निर्देश अक्ष से कोणीय स्थिति,

$$\theta_4 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$ उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 64. चित्र 1.64 में दिखाये अनुसार एक विकृत पदार्थ के तल BC पर अभिलम्बीय तथा अपरूपक प्रतिबल (Normal and Shear Stress) क्रमशः $560\ N/mm^2$ तथा $140\ N/mm^2$ के लगे हैं। तल AC जो तल BC के लम्बवत् है पर अभिलम्बीय तथा अपरूपक प्रतिबल क्रमशः $280\ N/mm^2$ तथा $140\ N/mm^2$ लगे हैं, जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है। मुख्य प्रतिबल तथा उन तलों की स्थिति जहाँ पर वे लगे हैं, ज्ञात कीजिये। (UP 20..)

हल—प्रश्न में दिये गये अनुसार

$$\sigma_x = -280\ N/mm^2$$

$$\sigma_y = 560\ N/mm^2$$

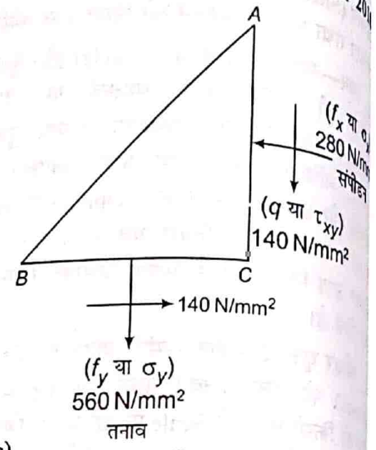
$$q \text{ या } \tau_{xy} = -140\ N/mm^2$$

∴ अधिकतम व न्यूनतम मुख्य प्रतिबल (Principal Stresses)

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4q^2}$$

$$= \frac{-280+560}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-280-560)^2 + 4(-140)^2}$$

$$= (140 \pm 442 \cdot 72)\ N/mm^2$$



चित्र 1.64

∴ Max Principal Stress,

$$\sigma_1 = 140 + 442 \cdot 72 = 582 \cdot 72\ N/mm^2 \text{ (tensile)}$$

तथा Minimum Principal Stress,

$$\sigma_2 = 140 - 442 \cdot 72 = -302 \cdot 72\ N/mm^2 \text{ (compressive)}$$

माना अधिकतम तथा न्यूनतम मुख्य प्रतिबलों के समतलों की ऊर्ध्वाधर (Vertical) से कोणीय स्थितियाँ θ_1 व θ_2 हैं।

∴ $\tan 2\theta = \left(\frac{2q}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$ सूत्र से

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{2 \times (-140)}{-280-560}\right] = 9 \cdot 22°$$

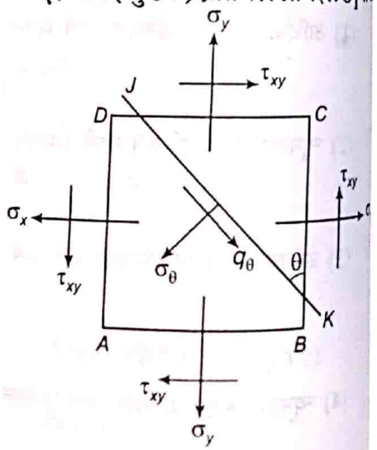
तथा $\theta_2 = \theta_1 + 90° = 9 \cdot 22 + 90° = 99 \cdot 22°$

उदाहरण 65. किसी बिन्दु पर प्रतिबल अवस्था σ_x, σ_y तथा τ_{xy} के लिए प्रधान (मुख्य) प्रतिबल क्रमशः σ_1 तथा σ_2 हों तब सिद्ध कीजिये कि (Prove that)

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$ **(U.P. 2009)**

हल—चित्र में एक ब्लॉक ABCD दिखाया गया है। इस पर दो लम्ब प्रतिबल (σ_x व σ_y) आपस में लम्ब दिशा में लगे हैं। तलों पर इनके साथ कर्तन प्रतिबल τ_{xy} भी चित्र के अनुसार लगे हैं।

माना ऊर्ध्वाधर समतल BC से θ कोण पर कोई तिरछा समतल JK है, इस तिरछी काट पर लम्ब प्रतिबल σ_θ तथा कर्तन प्रतिबल q_θ है।



चित्र 1.65

∵ हम जानते हैं कि

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \quad \ldots (1)$$

अब σ_θ के अधिकतम तथा न्यूनतम मान के लिये—

$$\frac{d}{d\theta}(\sigma_\theta) = 0 + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}(-\sin 2\theta) \times 2 + \tau_{xy}(\cos 2\theta) \times 2$$

$$0 = -(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta + 2\tau_{xy}\cos 2\theta$$

या $$(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\theta = 2\tau_{xy}\cos 2\theta$$

या $$\tan 2\theta = \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) \quad \ldots (2)$$

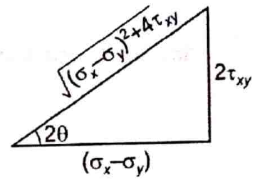
∴ अधिकतम मुख्य प्रतिबल के समतल का कोण

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$$

तथा न्यूनतम मुख्य प्रतिबल के समतल का कोण

$$\theta_2 = \theta_1 + 90° \Rightarrow \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) + \frac{\pi}{2}$$

अब समीकरण (2) से कोण व भुजाओं (angle and sides) द्वारा चित्र 1.66 में—



चित्र 1.66

$$\sin 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\pm\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

तथा $$\cos 2\theta = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{\pm\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

अब अधिकतम व न्यूनतम मुख्य प्रतिबल क्रमशः σ_1 व σ_2 हों तो समीकरण (1) से,

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \times \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{\pm\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}\right] + \tau_{xy}\left[\frac{2\tau_{xy}}{\pm\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}\right]$$

या $$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]}{\pm 2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

∴ $$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]}$$

तथा $$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2]}$$

∴ $$\sigma_1 + \sigma_2 = 2 \times \left[\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right] = (\sigma_x + \sigma_y)$$

∴ $$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$ **Proved**

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

इसे निम्न प्रकार भी हल कर सकते हैं—

Method II : ∵ हम जानते हैं कि,

$$\sigma_1 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

तथा
$$\sigma_2 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

जोड़ने पर
$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{1}{2}\{2\sigma_x + 2\sigma_y\}$$
$$= \frac{2}{2}\{\sigma_x + \sigma_y\}$$
$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$

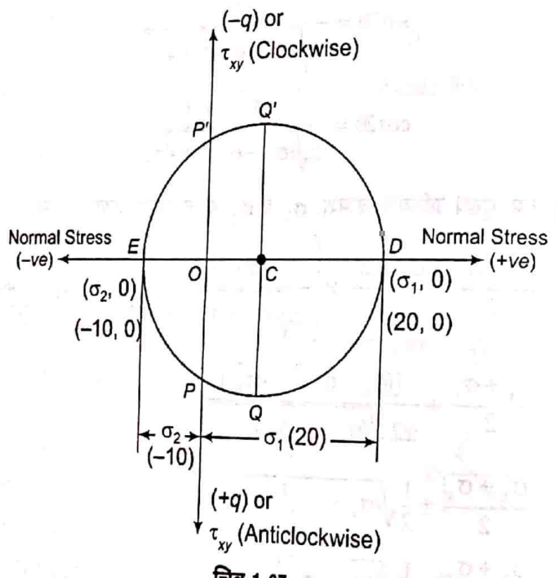
Hence...

उदाहरण 66. किसी बिन्दु पर प्रधान प्रतिबलों (Principal Stresses) के मान क्रमशः 20 MPa तथा –10 ... इसके लिये मोहर वृत्त (Mohr's Circle) बनाइये तथा उस समतल पर अपरूपण प्रतिबल (Shear Stress) ... कीजिये जिस पर अभिलम्ब प्रतिबल शून्य है। अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का मान भी ज्ञात कीजिये। (U.P. ...)

हल—प्रश्न में दिया है, $\sigma_1 = \sigma_x = 20$ MPa (तनाव Tensile)

$\sigma_2 = \sigma_y = -10$ MPa (संपीडन Compressive)

मोहर वृत्त के लिये माना, 1 cm = 5 MPa पैमाना (Scale)



चित्र 1.67

(1) मोहर वृत्त से अधिकतम अपरूपण प्रतिबल (Shear Stress)

q_1 या $\tau_1 = CQ \Rightarrow 3$ cm × Scale

⇒ $3 \times 5 = 15$ MPa

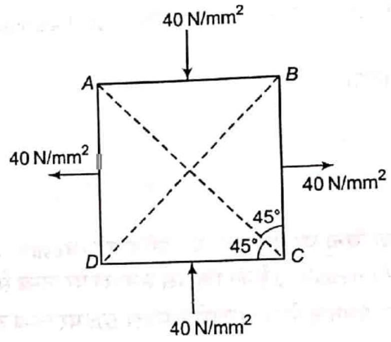
(2) जिस समतल पर अभिलम्ब प्रतिबल (Normal Stress) शून्य (zero) है (अर्थात् मूल बिन्दु से दायीं या बायीं ... नहीं चलना है), तब अपरूपण प्रतिबल (Shear Stress) वृत्त (circle) में OP या OP' दूरी द्वारा दर्शाया जायेगा।

q_{OP} का मान (+ve) = $q_{OP'}$ का मान (–ve)

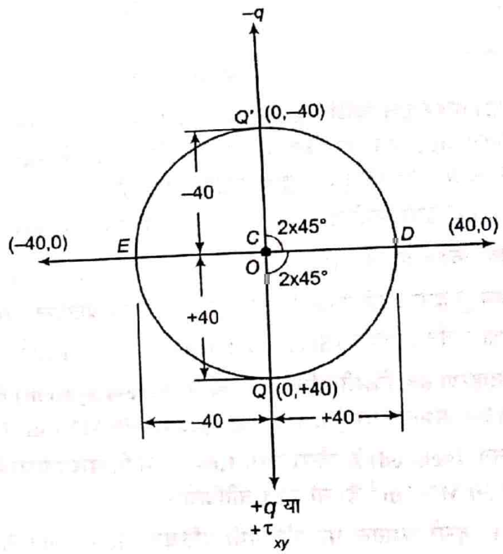
∴ अपरूपण प्रतिबल (Shear Stress) = OP लम्बाई × Scale

$\vec{OP}$ या $\vec{OP'} = 2{\cdot}8 \text{ cm} \times 5 = \pm 14$ MPa **उत्तर**

उदाहरण 67. पदार्थ के किसी बिन्दु पर चित्र 1.68 (a) में दिखाये गये प्रतिबल (Stresses) लग रहे हैं। समतलों AC तथा BD पर लगने वाले अभिलम्ब प्रतिबल (Normal Stress) तथा कर्तन प्रतिबल (Shearing Stress) का मान ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2007)**



चित्र 1.68 (a)



चित्र 1.68 (b) : Mohr's Circle

हल—**(1) वैश्लेषिक विधि** (Analytical Method)

माना $\sigma_x = 40 \text{ N/mm}^2$ (तनाव)

तथा $\sigma_y = -40 \text{ N/mm}^2$ (संपीडन)

BC समतल से कोण θ पर झुके समतल पर अभिलम्ब (Normal) तथा कर्तन प्रतिबल (Shearing Stress) के मान गणना द्वारा निम्न सूत्रों से ज्ञात करेंगे—

$$\sigma_n = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + q\sin 2\theta$$

तथा
$$\sigma_s \text{ या } \sigma_t \text{ या } q_\theta = \left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)\sin 2\theta + q\cos 2\theta$$

यहाँ q या $\tau_{xy} = 0$ रखा जायेगा (क्योंकि दिया नहीं है)

∴ AC समतल के लिए, θ = 45° (दिया है) (चित्र में)

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

$$\sigma_N^{AC} = \left(\frac{40-40}{2}\right) + \left(\frac{40+40}{2}\right)\cos 90° = 0\ N/mm^2$$

तथा

$$\therefore \quad q_{45°} = \sigma_s \text{ या } \sigma_t = \left(\frac{-40-40}{2}\right)\sin 90°$$

$$= -40\ N/mm^2 \text{ (Clockwise)}$$

अब समतल BC के लिये, ऊर्ध्वाधर (Vertical) से कोण $\theta = -45°$

$$\sigma_N^{BC} = \frac{40-40}{2} + \frac{40-(-40)}{2}\cos 2\times(-45°) = 0\ N/mm^2$$

तथा

$$\therefore \quad q_{(-45°)} = \sigma_s \text{ या } \sigma_t = \frac{(-40-40)}{2}\sin 2\times(-45°) = 40\ N/mm^2$$

(2) मोहर वृत्त विधि (Mohr's Circle Method)—चित्र 1.68 (b) में इस प्रश्न के हल के लिये मोहर वृत्त बना[...] है। समतल BC, वृत्त पर बिन्दु D द्वारा प्रदर्शित होता है तथा समतल AC, त्रिज्या CD से प्रवाम (anticlockwi[se]) $2\times 45° = 90°$ पर बिन्दु Q' द्वारा प्रदर्शित होता है।

$\therefore$ Q' द्वारा प्रदर्शित समतल AC पर अभिलम्ब प्रतिबल = 0 होगा।

तथा कर्तन प्रतिबल (Shearing Stress) = $-40\ N/mm^2$

अब Q द्वारा प्रदर्शित समतल BC पर, अभिलम्ब प्रतिबल = 0

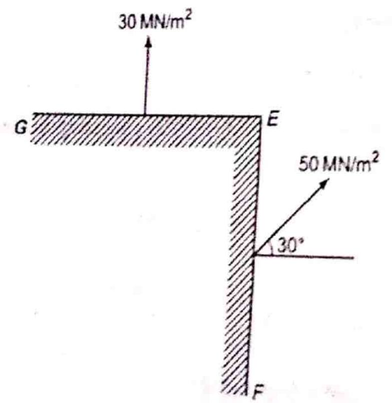
तथा कर्तन प्रतिबल (Shearing Stress) = $40\ N/mm^2$

उदाहरण 68. किसी प्रतिबल निकाय (Stress System) के एक बिन्दु पर प्रतिबलों का परिणामी (Resultan[t] Stress) एक समतल पर (on a certain plane) 50 MN/m² (तनाव-tensile) है जो कि उस समतल पर लम्ब[...] पर अवनत (inclined) है, जैसा चित्र 1.69 (a) में दिखाया गया है। उस समतल से लम्ब दूसरे समतल GE पर लम्ब[...] प्रतिबल 30 MN/m² है। तो ज्ञात कीजिये—

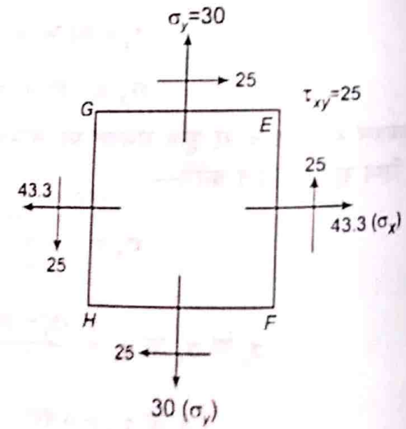
(1) दूसरे समतल पर परिणामी प्रतिबल (Resultant Stress on IInd Plane)

(2) मुख्य प्रतिबल तथा मुख्य समतल की स्थिति (Principal Stresses and Principal Planes)

(3) अधिकतम अपरूपण प्रतिबल तथा इसके समतल की स्थिति (Maximum Shear Stress and Positi[on of] its Plane)



चित्र 1.69 (a)



चित्र 1.69 (b)

हल—(1) वैश्लेषिक विधि (Analytical Method) चित्र 1.69 (a) व (b) देखें।

$\because$ प्रथम समतल EF पर लम्ब प्रतिबल (Normal Stress on Ist Plane)

$$= 50\cos 30° = 43\cdot 3\ MN/m^2$$

तथा प्रथम समतल EF पर स्पर्श रेखीय प्रतिबल (Tangential stress on Ist Plane EF)

$$\tau_{xy} = 50\sin 30° = 25\ MN/m^2$$

$\therefore$ IInd Plane पर संपूरक अपरूपण प्रतिबल (स्पर्शीय प्रतिबल)
(So, complementary Shear Stress on IInd Plane)

$$\tau_{xy} = 25\ MN/m^2$$

(i) दूसरे समतल पर परिणामी प्रतिबल (Resultant Stress on IInd Plane)

$$\Rightarrow \quad \sigma_R = \sqrt{(25)^2 + (30)^2} = \mathbf{39\ MN/m^2} \quad \text{उत्तर}$$

(ii) Principal Planes and Stresses :

हमें ज्ञात है,
$$\sigma_x = 43\cdot 3\ MN/m^2$$
$$\sigma_y = 30\ MN/m^2 \text{ तथा } \tau_{xy} = 25\ MN/m^2$$

$\therefore$ अधिकतम तथा न्यूनतम मुख्य प्रतिबल (Principal Stresses)

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \text{ सूत्र से}$$

$$\sigma_1, \sigma_2 = \left(\frac{43\cdot 3 + 30}{2}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(43\cdot 3 - 30)^2 + 4\times(25)^2}$$

$$= 3605 \pm 25\cdot 86$$

$\therefore$ अधिकतम मुख्य प्रतिबल (Max. Principal Stress)

$$\sigma_1 = 36\cdot 5 + 25\cdot 86 = \mathbf{62\cdot 51\ MN/m^2} \text{ (तनाव)} \quad \text{उत्तर}$$

तथा न्यूनतम मुख्य प्रतिबल (Minimum Principal Stress)

$$\sigma_2 = 36\cdot 5 - 25\cdot 86 = 10\cdot 79\ MN/m^2 \text{ (तनाव)}$$

$$\sigma_2 = \mathbf{10\cdot 79\ MN/m^2} \text{ (tensile)} \quad \text{उत्तर}$$

मुख्य प्रतिबलों के समतल की स्थितियाँ (θ_1, θ_2)
(Direction of the Planes of Principal Stresses)

$$\because \quad \tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} = \frac{2\times 25}{(43\cdot 3 - 30)} = 3\cdot 76$$

$$\therefore \quad 2\theta = \tan^{-1}(3\cdot 76) = 75\cdot 1° \text{ या } \theta = 37\cdot 5°$$

$$\therefore \quad \theta_1 = \theta = 37\cdot 5° \approx 37°\ 30'\ (30') \quad (\sigma_1 \text{ के समतल के लिए स्थिति})$$

अब σ_2 के समतल की कोणीय स्थिति,

$$\theta_2 = \theta_1 + 90° \text{ (सूत्र)}$$

$$\therefore \quad \theta_2 = 127\cdot 5° \approx 127°\ 30'\ (30') \quad \text{उत्तर}$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

अधिकतम कर्तन प्रतिबल (Max. Shearing Stress)

$$\tau_{max} = \tau_1 \ (\text{या } q_1) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \text{सूत्र से}$$

$$= \left(\frac{62 \cdot 51 - 10 \cdot 79}{2}\right) = \frac{51 \cdot 72}{2}$$

$$= 25 \cdot 86 \text{ MN/m}^2$$

Angle of the Plane of Max. Shearing Stress

$$\theta_3 = \theta_1 + 45° \ (\text{सूत्र})$$

$$= 37 \cdot 5° + 45° = 82 \cdot 5° \approx 82° 30' \quad \text{(With the Plane } EF)$$

उदाहरण 69. किसी बिन्दु पर प्रधान प्रतिबलों का मान 100 MPa तथा 45 MPa है। इसी बिन्दु से होकर जाने वाले दो अन्य अभिलम्बी समतलों पर अभिलम्ब प्रतिबल क्रमशः 75MPa तथा σ_n हैं एवं अपरूपण प्रतिबल 35 MPa है। σ_n का मान बताइये। अपने उत्तर को स्पष्ट कीजिए कि ऐसा क्यों है?

[उत्तर : $\sigma_n = -52$ MPa (अर्थात् संपीडन वाला)। प्रधान प्रतिबल क्रमशः 100 MPa तथा −45 MPa के होंगे, कारण अपरूपण प्रतिबल का मान $\frac{f_1 - f_2}{2}$ के मान से अधिक है।] (U.P.)

हल—माना $\sigma_1 = 100$ MPa तथा $\sigma_2 = 45$ MPa

और अन्य समतलों पर, $\sigma_x = 75$ तथा $\sigma_y = \sigma_n$, q या $\tau_{xy} = 35$ MPa है।

∴ अधिकतम अपरूपण प्रतिबल (Max. Shearing Stress)

$$q_{max} \text{ अर्थात् } \tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \quad \text{(सूत्र)}$$

∴ $$\frac{100 - 45}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(75 - \sigma_n)^2 + (2 \times 35)^2}$$

या $$55 = \sqrt{(75 - \sigma_n)^2 + 70^2}$$

या $$(55)^2 = (75 - \sigma_n)^2 + 70^2$$

∴ $$(75 - \sigma_n)^2 = 3025 - 4900 = -1875$$

अत: σ_n काल्पनिक (imaginary) होगा, जो असम्भव है।

पुन: माना कि मुख्य प्रतिबलों में से 100 MPa तनाव (tensile) का है तथा 45 MPa सम्पीडन (compressive) है

∴ अब $\sigma_1 = +100$ MPa तथा $\sigma_2 = -45$ MPa

उपरोक्त q_{max} के सूत्र में रखने पर—

$$\left(\frac{100 + 45}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{(75 - \sigma_n)^2 + (2 \times 35)^2}$$

या $$145 = \sqrt{(75 - \sigma_n)^2 + 70^2}$$

या $$(75 - \sigma_n)^2 = (145)^2 - (70)^2 = 16125$$

या $$75 - \sigma_n = \sqrt{16125} = 126 \cdot 98 = 127$$

या $$\sigma_n = 75 - 127 = -52 \text{ MPa}$$

अत: σ_n का मान 52 MPa होगा तथा सम्पीडन (Compression) वाला होगा।

उदाहरण 70. एक पिण्ड के एक बिन्दु पर $\sigma_x = +100$ MN/m², $\sigma_y = -80$ MN/m² तथा $\sigma_{xy} = +40$ MN/m² कार्यरत हैं तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिये :

(अ) मुख्य प्रतिबल तथा मुख्य प्रतिबलों के समतलों की दिशायें।

(ब) मुख्य अपरूपण प्रतिबल तथा तलों की दिशायें जिनमें ये प्रतिबल कार्यरत हैं।

(अ) 108·5 तथा −88·5 MN/m² ऊर्ध्व तल से क्रमशः 12° तथा 102° पर

(ब) ± 98·5 MN/m² ऊर्ध्व तल से क्रमशः -33° तथा -123° पर (U.P.S. 2010)

हल—(अ) मुख्य प्रतिबल (Principal Stresses)

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2} \quad \text{सूत्र से}$$

$$= \frac{100 - 80}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(100 + 80)^2 + (2 \times 40)^2}$$

$$= 10 \pm 98 \cdot 5$$

∴ अधिकतम मुख्य प्रतिबल (Maximum Principal Stress)

(i) $$\sigma_1 = 10 + 98 \cdot 5 = 108 \cdot 5 \text{ MN/m}^2 \ (\text{तनाव-Tensile})$$ उत्तर

(ii) न्यूनतम मुख्य प्रतिबल (Minimum Principal Stress)

$$\sigma_2 = 10 - 98 \cdot 5 = -88 \cdot 5 \text{ MN/m}^2 (\text{संपीडन Compressive})$$

$$= -89 \text{ MN/m}^2$$

(iii) अधिकतम मुख्य प्रतिबल (σ_1) के समतल का कोण (θ_1) हो तो

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right] \quad \text{सूत्र से}$$

$$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\left[\frac{2 \times 40}{100 + 80}\right] = \frac{1}{2}\tan^{-1}(0 \cdot 444) = \frac{1}{2} \times (23 \cdot 96°)$$

$$= \frac{1}{2} \times 24° = 12°$$ उत्तर

(iv) न्यूनतम मुख्य प्रतिबल (σ_2) के समतल का कोण (θ_2) हो तो

$$\theta_2 = \theta_1 + 90° \quad \text{सूत्र से}$$

$$\theta_2 = 12 + 90 = 102°$$ उत्तर

(ब) (i) मुख्य अपरूपण प्रतिबल (Max. and Mini. Shearing Stress)

$$q_1, q_2 \text{ अथवा } \tau_1, \tau_2 = \pm\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \text{ सूत्र से}$$

∴ $$q_1, q_2 \text{ अथवा } \tau_1, \tau_2 = \pm\left(\frac{108 \cdot 5 + 88 \cdot 5}{2}\right) = \pm 98 \cdot 5 \text{ MN/m}^2$$

(ii) अधिकतम अपरूपण प्रतिबल (q_1 या τ_1) के समतल (Plane) की कोणीय स्थिति (Direction of Plane of τ_1)

$$\theta_3 = (\theta_1 + 45°) \text{ सूत्र (मुख्य प्रतिबल } \sigma_1 \text{ के समतल से कोण है।)}$$

$$= 12° + 45° = 57°$$ उत्तर

तथा ऊर्ध्वाधर से कोण $$\theta_3 = \theta_1 - 45° = 12° - 45° = -33° \text{ (clockwise)}$$ उत्तर

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

(iii) न्यूनतम अपरूपण प्रतिबल (q_2 या τ_2) के समतल की कोणीय स्थिति (Direction of the Plane of q_2) सूत्र (σ_2 के समतल से कोण)

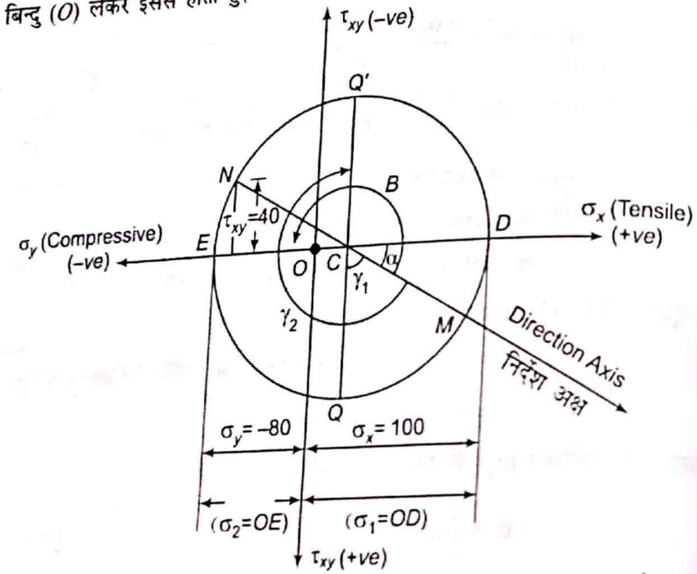
$$\theta_4 = \theta_2 + 45°$$
$$= 102° + 45° = 147°$$

या ऊर्ध्वाधर से कोण $\theta_4 = -90° - 33° = -123°$ (Clockwise)

मोहर वृत्त विधि द्वारा (Graphical Method by Mohr's Circle)

माना पैमाना (Scale) $1 \text{ cm} = 20 \text{ MN/m}^2$

अब मूल बिन्दु (O) लेकर इससे होती हुई क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर रेखायें (Horizontal and Vertical Lines)



चित्र 1.70 : Mohr's circle

मूल बिन्दु (Origin) O से दायीं ओर $\sigma_x = +100 \text{ MN/m}^2$ के लिये मापनी ($1 \text{ cm} = 20 \text{ MN/m}^2$) 5 cm पर बिन्दु लें फिर इस बिन्दु से नीचे Vertical distance पर $\sigma_x = +40 \text{ MN/m}^2$ के लिये मापनी (Sc... अनुसार 2 cm की दूरी पर बिन्दु (M) लें। इस बिन्दु (M) के निर्देशांक (Coordinate) $(\sigma_x, \tau_{xy}) \equiv (100, 40)$ है। दूसरे समतल पर लम्ब प्रतिबल $\sigma_y = -80 \text{ MN/m}^2$ (संपीडन) और $\tau_{xy} = -40 \text{ MN/m}^2$ (Clockwise) मूलबिन्दु O के बायीं ओर 4 cm की दूरी पर ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर (–ve दिशा Clockwise के कारण) τ_{xy} = ... लिए 2 cm की दूरी पर दूसरा बिन्दु $N(-80, -40)$ लें।

अब $M-N$ को मिलाने पर क्षैतिज रेखा से प्रतिच्छेद बिन्दु C प्राप्त होता है। अब मोहर वृत्त के केन्द्र C पर (Compass) रखकर OM या ON त्रिज्या (radius) से वृत्त (circle) खींचो। यही मोहर वृत्त है। इसमें N से M को ... अक्ष (Direction Axis) है।

O से क्षैतिज रेखा पर वृत्त के प्रतिच्छेद बिन्दु D व E की O से दूरियाँ OD तथा OE क्रमशः σ_1 व σ_2 को दर्शाती ... मोहर वृत्त में—

(अ) (i) अधिकतम मुख्य प्रतिबल (Max. Principal Stress)

$$\sigma_1 = OD \text{ लम्बाई} \times \text{Scale}$$

$$= 5{\cdot}4 \text{ सेमी०} \times 20 \text{ MN/m}^2$$
$$= 108 \text{ MN/m}^2$$ उत्तर

(ii) न्यूनतम मुख्य प्रतिबल (Mini. Principal Stress)

$$\sigma_2 = OE \text{ लम्बाई} \times \text{Scale}$$
$$= 4{\cdot}4 \text{ cm} \times 20 \text{ MN/m}^2$$
$$= 88 \text{ MN/m}^2$$ उत्तर

(iii) σ_1 के समतल की दिशा (DirESCtion of the Plane of σ_1)

$$\theta_1 = \frac{\alpha}{2} (+\text{ve}) = \frac{24°}{2} = 12°$$ उत्तर

(iv) σ_2 के समतल का कोण (दिशा) (Direction of the Plane of σ_2)

$$\theta_2 = +\frac{\beta}{2} = \frac{204°}{2} = 102°$$ उत्तर

(ब) मुख्य अपरूपण प्रतिबल (Max. and Minimum Shearing Stress)

(i) Max. Shearing Stress

$$(q_1 \text{ या } \tau_1) = +CQ \times \text{Scale}$$
$$= 4{\cdot}9 \text{ cm} \times 20 \text{ MN/m}^2$$
$$= 98 \text{ MN/m}^2$$ उत्तर

(ii) Minimum Shearing Stress

$$(q_2, \tau_2) = -CQ' \times \text{Scale}$$
$$= -4{\cdot}9 \times 20 = -98 \text{ MN/m}^2$$

(iii) (q_1 या τ_1) के समतल की दिशा,

$$\theta_3 = -\frac{\gamma_1}{2} = -\frac{66°}{2} = -33°$$ उत्त

(iv) (q_2 या τ_2) के समतल की दिशा

$$\theta_4 = -\frac{\gamma_2}{2} = -\frac{(180+66)}{2} = -\frac{246}{2} = -123°$$ उत्त

उदाहरण 71. चित्र 1.71 (a) में दिखाये गये N/mm² में प्रतिबल निकाय (stress system) के लिये समतल T... पर प्रतिबल ज्ञात कीजिये। **(U.P. 200...)**

हल—मोहर-वृत्त चित्र 1.71 (b) में दिखाया गया है। यहाँ $\sigma_x = 50 \text{ N/mm}^2$ का प्रतिबल तनाव (Tensile) में ... इसलिये यह O से दायीं ओर लिया गया है। $\sigma_y = 20 \text{ N/mm}^2$ का संपीडन (compression) में है, इसलिए O से बायीं ओर लिया गया है।

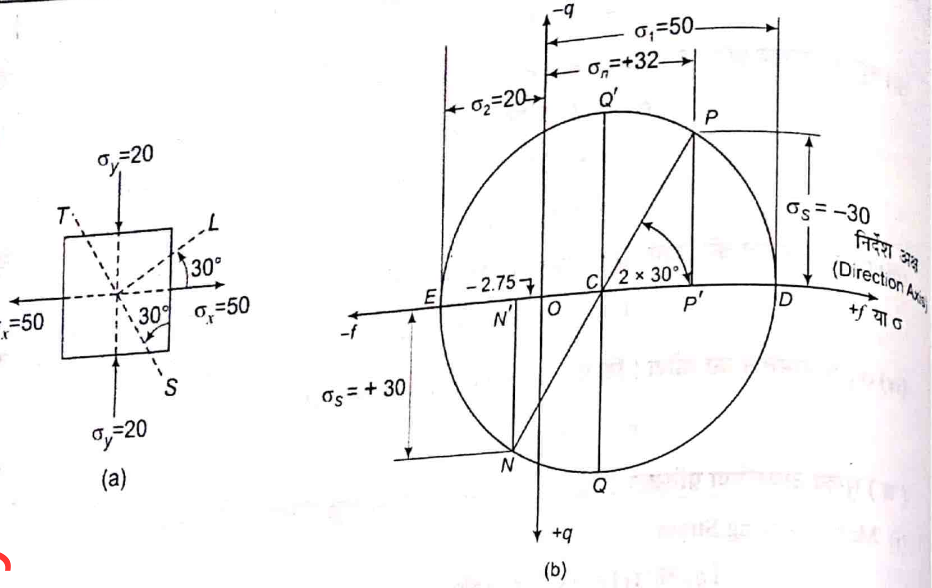
TS समतल त्रिज्या CP द्वारा दिखाया गया है जो कि CD से $2 \times 30°$ का कोण बनाता है। इस समतल पर प्रतिबल ... P द्वारा दर्शाये जाते हैं जो कि निम्न प्रकार हैं—

$$\sigma_n = +32 \text{ N/mm}^2 \text{ तनाव (tensile) में}$$

तथा $$\sigma_s = -30 \text{ N/mm}^2$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint



चित्र 1.71

फिर त्रिज्या CN द्वारा प्रदर्शित समतल पर प्रतिबल, जो कि TS समतल पर लम्ब समतल है।

$$\sigma_n' = -2.75\,\text{N/mm}^2, \text{ संपीडन (compressive)}$$

तथा $$q_\theta' = +30\,\text{N/mm}^2$$

उदाहरण 72. चित्र 1.72 (a) में दिखाये गये N/mm² में प्रतिबल निकाय (stress system) के लिये समतल TS पर प्रतिबल ज्ञात कीजिये तथा उन्हें इस समतल पर प्रदर्शित कीजिये। **(U.K. 2010, S)**

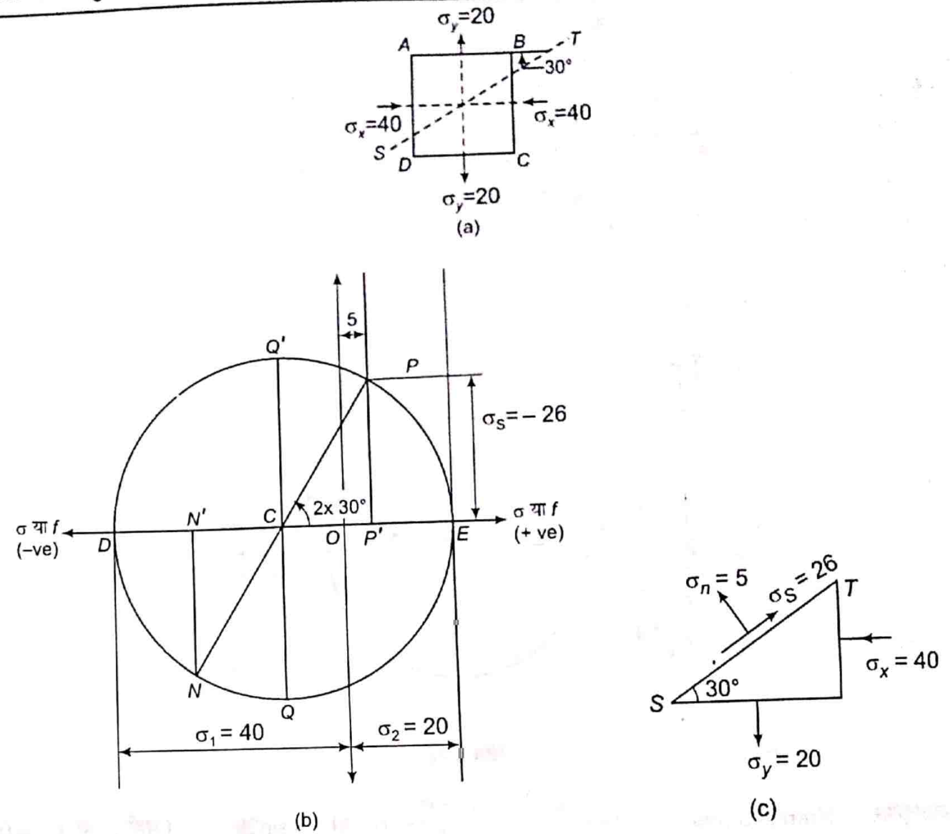
हल—हम $\sigma_y = 20\,\text{N/mm}^2$ वाले प्रतिबल को O से दायीं ओर बनायेंगे क्योंकि यह तनाव का है और $\sigma_x = 40\,\text{N/mm}^2$ को बायीं ओर बनायेंगे क्योंकि यह संपीडन (compression) में है। समतल AB, वृत्त पर बिन्दु E से प्रदर्शित होता है। चूँकि समतल TS का AB समतल से झुकाव 30° है, अतः यह झुकाव चित्र 1.72 (b) में रेखा CP द्वारा CE से $2\times30°$ के कोण द्वारा प्रदर्शित होगा।

मोहर-वृत्त (Mohr's circle) में P बिन्दु द्वारा TS समतल पर,

लम्ब प्रतिबल $\sigma_n = 5\,\text{N/mm}^2$, तनाव में (in tension)

तथा कर्तन प्रतिबल $\sigma_s = -26\,\text{N/mm}^2$

ये दोनों प्रतिबल चित्र 1.72 (c) में दिखाये गये हैं। σ_s ऋण (–ve) होने के कारण इसका प्रभाव टुकड़े पर प्रदक्षिणावर्त (clockwise) में है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।



चित्र 1.72

उदाहरण 73. यदि पदार्थ के एक बिन्दु पर न्यूनतम व अधिकतम मुख्य प्रतिबल क्रमशः 30 N/mm² एवं 90 N/mm² हों, तथा दोनों तनाव प्रतिबल हों तो इस बिन्दु से जाने वाले तल पर कर्तन प्रतिबल व लम्बवत् प्रतिबल ज्ञात कीजिए, जबकि यह तल इस बिन्दु पर मुख्य तल से कोण $\tan^{-1}(0.25)$ बनाता है। **(U.K. 2011, S)**

हल—**(1) वैश्लेषिक विधि** (Analytical method)—

प्रश्नानुसार प्रतिबल निकाय चित्र 1.73 (a) में प्रदर्शित अनुसार, माना कि

$$\sigma_x = 90\,\text{N/mm}^2,\ \sigma_y = 30\,\text{N/mm}^2,$$

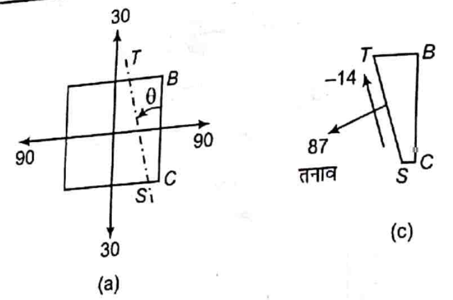
यहाँ मुख्य तल BC है।

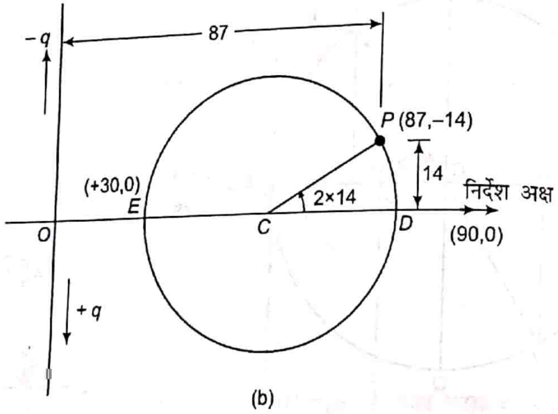
फिर T-S समतल का BC से कोण

$$\theta = \tan^{-1}(0.25) = 14.036°$$

अब समतल TS पर लम्ब तथा कर्तन प्रतिबल, माना कि क्रमशः σ_n तथा (σ_s या σ_t) हैं।

Scanned with CamScanner





चित्र 1.73

सूत्रानुसार, Normal Stress $\sigma_n = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + q \sin 2\theta$ (यहाँ q या τ_{xy} =

$$= \frac{90+30}{2} + \frac{(90-30)}{2}\cos 28{\cdot}072 = 60 + 26{\cdot}47$$

∴ लम्ब प्रतिबल $\sigma_n = 86{\cdot}47\ \text{N/mm}^2$ (तनाव)

तथा अपरूपण प्रतिबल σ_s या $\sigma_t = \frac{(\sigma_y - \sigma_x)}{2}\sin 2\theta + q\cos 2\theta$ (यहाँ $q = 0$ है)

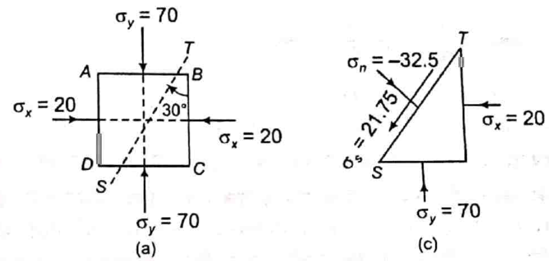
$$= \frac{(30-90)}{2}\sin 28{\cdot}072 = -30 \times 0{\cdot}47$$

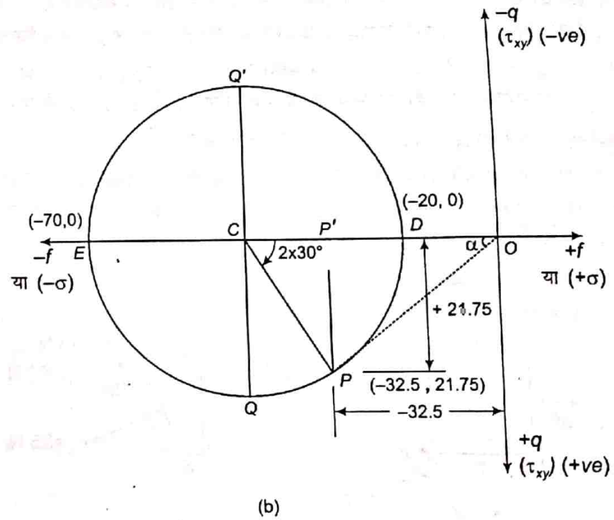
∴ $$q_\theta = -14{\cdot}12\ \text{N/mm}^2$$

(2) मोहर-वृत्त विधि—चित्र 1.73 (a) में प्रतिबल निकाय के लिए मोहर-वृत्त चित्र 1.73 (b) में प्रदर्शित है। आधार पर समतल *TS* (जो बिन्दु *P* द्वारा प्रदर्शित है) पर लम्ब तथा कर्तन प्रतिबल क्रमशः 87 तथा $-14\ \text{N/mm}^2$ प्र... हैं। ये चित्र 1.73 (c) में प्रदर्शित हैं।

उदाहरण 74. चित्र 1.74 (a) में दिखाये गये N/mm² में प्रतिबल निकाय (stress system) के लिये समत... पर प्रतिबल ज्ञात कीजिये और उन्हें चित्र पर दिखाइये। इस समतल पर परिणामी प्रतिबल तथा उसका समतल से ... भी ज्ञात कीजिए।

(U.K. 201...)





चित्र 1.74

हल—यहाँ पर सभी प्रतिबल संपीडन में हैं, इसलिये सभी मूल बिन्दु *O* से बायीं ओर बनाये जायेंगे। इस प्रकार समतल *BC*, वृत्त पर बिन्दु *D* से प्रदर्शित होता है। अतः *CD* से $2 \times 30°$ के कोण (Clockwise में) द्वारा *TS* समतल पर प्रतिबल *P* द्वारा प्रदर्शित होता है।

इस प्रकार, $\sigma_n = -32{\cdot}5\ \text{N/mm}^2$, संपीडन (compression) में

$$(\sigma_s \text{ या } \sigma_t) = +21{\cdot}75\ \text{N/mm}^2$$

(2) (σ_s या q_θ) का मान (+ve) है, इसलिये यह चित्र 1.74 (c) में टुकड़े पर प्रवाम (anticlockwise) दिशा में दिखाया गया है।

f_θ या σ_n ऋण (–ve) होने के कारण संपीडन (compression) में दिखाया गया है।

अब परिणामी प्रतिबल, $\sigma_R = \sqrt{(f_\theta^2 + q_\theta^2)} = OP$

$$= \sqrt{[(-32{\cdot}5)^2 + (21{\cdot}75)^2]} = 39{\cdot}11\ \text{N/mm}^2$$

अब परिणामी का σ_n या f_θ से झुकाव α होने पर

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

$$\tan\alpha = \frac{\sigma_s}{\sigma_n} = \frac{21\cdot75}{32\cdot5} = 0\cdot669$$

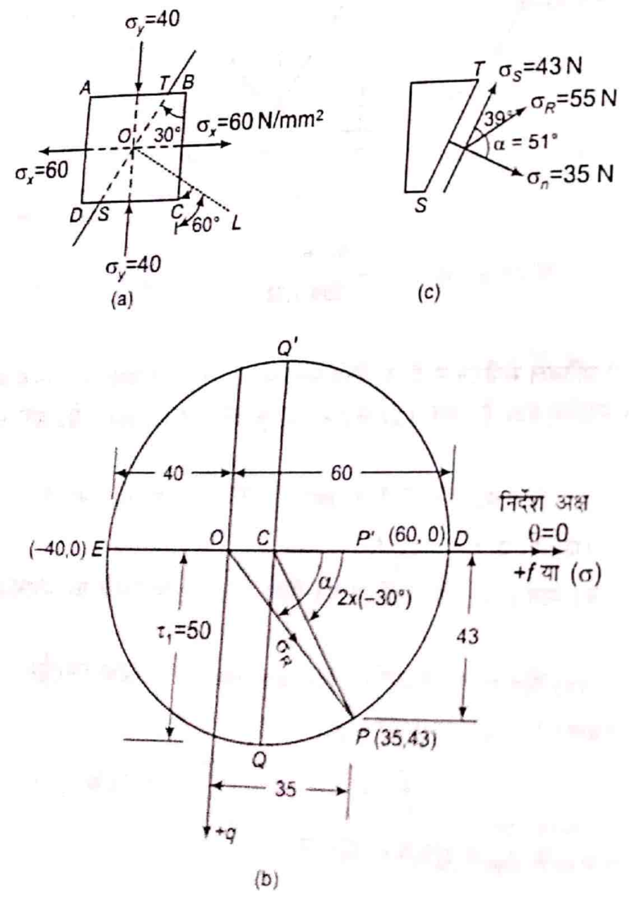
$$\alpha = 33\cdot7° = \angle POP'$$

∴ अतः परिणामी का समतल पर झुकाव $= 90° - 33\cdot7 = 56\cdot3°$

उदाहरण 75. एक पिण्ड पर दो लाम्बिक मुख्य प्रतिबल 60 N/mm² (तनाव) तथा 40 N/mm² (सम्पीड़न) कार्यरत हैं। उस अवनत तल पर, जिसका अभिलम्ब अधिक मुख्य प्रतिबल वाले मुख्य समतल से – 60° का कोण ब... है, ''मोहर-वृत्त'' विधि द्वारा (i) अभिलम्ब प्रतिबल, (ii) कर्तन प्रतिबल तथा (iii) परिणामी प्रतिबल के मान ज्ञात कीजिये। अवनत तल पर ज्ञात किये हुये प्रतिबल का झुकाव भी ज्ञात कीजिये। इसी अवनत तल पर परिणामी प्रतिबल का झुकाव भी ज्ञात कीजिये। पिण्ड में उत्पन्न अधिकतम कर्तन प्रतिबल कितना है? की स्थिति, एक पृथक् चित्र देते हुए दर्शाइये। (U.K. 2009)

हल—प्रश्नानुसार प्रतिबल निकाय 1.75 (a) के लिये मोहर वृत्त चित्र 1.75 (b) में बनाया गया है। इसमें अधिक प्रतिबल (60 N/mm²) वाला समतल BC है। इस समतल से 60° कोण पर रेखा OL है जो तिरछे समतल TS पर लम्ब... इस प्रकार, तिरछा (Inclined) समतल TS, BC से – 30° का कोण बनाता है।

D तथा E बिन्दु क्रमशः (60, 0) तथा (–40, 0) वाले हैं तथा समतलों BC तथा AB को प्रदर्शित करते हैं। मोहर वृ... CD की ओर निर्देश अक्ष (Direction Axis) है। अतः CD से $(2\times-30)°$ पर P द्वारा तिरछे तल TS पर लम्ब तथा क... प्रतिबल प्रदर्शित होता है। P के निर्देशांक (35, 43) हैं।



चित्र 1.75

इस प्रकार, तिरछे तल TS पर,

लम्ब प्रतिबल, $\sigma_n = 35 \text{ N/mm}^2$ (तनाव)

कर्तन प्रतिबल, $\sigma_s = 43 \text{ N/mm}^2$

परिणामी प्रतिबल, $\sigma_R = 55 \text{ N/mm}^2$ (OP द्वारा प्रदर्शित)

अब परिणामी के लिये, $\angle DOP = \alpha = \tan^{-1}\frac{43}{35} = 51° =$ परिणामी का अभिलम्ब प्रतिबल से कोण है।

अतः तिरछे तल पर परिणामी प्रतिबल का झुकाव $= 90° - \alpha = 90° - 51° = 39°$ (चित्र (c) में)

अधिकतम कर्तन प्रतिबल q_1 या $\tau_1 = CQ = 50 \text{ N/mm}^2$ **उत्तर**

1.75 (c) में अवनत (inclined) तल पर प्रतिबलों की स्थिति प्रदर्शित की गयी है।

उदाहरण 76. किसी छड़ की अनुप्रस्थ काट (cross-section) वृत्ताकार (Circular) है। इस पर 100 kN का अक्षीय तनाव बल (Axial tensile force) लग रहा है। छड़ में किसी भी समतल पर कर्तन प्रतिबल (Shear-stress) 0·1 kN/mm² से अधिक नहीं होनी चाहिए। छड़ का व्यास (diameter) ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि अधिकतम कर्तन प्रतिबल (shear stress),

$$q_1 = \frac{f_1 - f_2}{2} \quad \text{या} \quad \tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

जहाँ (f_1 या σ_1) तथा (f_2 या σ_2) क्रमशः अधिकतम तथा न्यूनतम मुख्य प्रतिबल हैं।

माना कि छड़ का व्यास d mm है, तब इसकी काट का क्षेत्रफल,

$$A = \pi d^2/4 \text{ mm}^2$$

इसलिए छड़ की अक्ष की दिशा में प्रतिबल f_x या $\sigma_x = \frac{100}{A}$ kN/mm²

छड़ में मुख्य प्रतिबल $f_1 = \frac{1}{2}f_x + \frac{1}{2}\sqrt{(f_x^2 + 4q^2)}$ या $\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2)}$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{100}{A} + \frac{1}{2}\times\frac{100}{A} \qquad [\text{क्योंकि } \tau_{xy} \text{ या } q = 0]$$

$$= \frac{100}{A} \text{ kN/mm}^2$$

फिर $f_2 = \frac{1}{2}f_x - \frac{1}{2}\sqrt{(f_x^2 + 4q^2)}$ या $\sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2)}$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{100}{A} - \frac{1}{2}\times\frac{100}{A} = 0$$

अब Max. Shear Stress (q_1 या τ_1) $= \frac{(100/A) - 0}{2} = \frac{100}{2A}$

परन्तु प्रश्न के अनुसार अधिकतम कर्तन प्रतिबल,

q_1 या $\tau_1 = 0\cdot1 \text{ kN/mm}^2$ है।

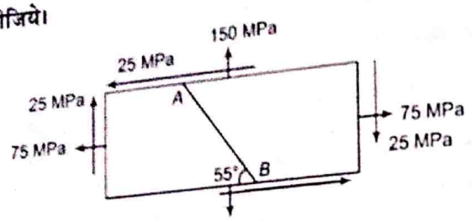
∴ $0\cdot1 = \frac{100}{2A}$ ∴ $A = \frac{100}{0\cdot20} = \frac{1000}{2}$

या $\frac{\pi d^2}{4} = \frac{1000}{2}$

∴ $d = \mathbf{25\cdot23 \text{ mm}}$

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

उदाहरण 77. एक विकृत पदार्थ के किसी बिन्दु पर चित्र 1.76 के अनुसार प्रतिबल लगे हैं। तिरछी काट (oblique section AB) पर अभिलम्ब तथा कर्तन प्रतिबल (Normal and Shear Stresses) ग्राफीय विधि (Mohr's circle method) से ज्ञात कीजिये।



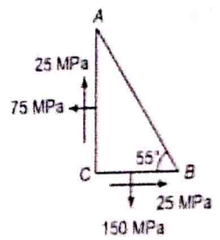
चित्र 1.76

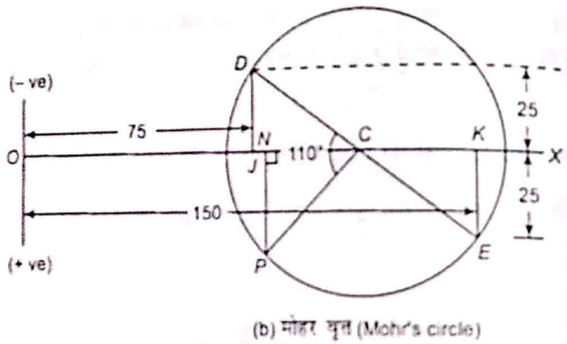
हल—चित्र के अनुसार, $\sigma_x = 75$ MPa (Tensile, + ve)

$\sigma_y = 150$ MPa (Tensile, +ve), shear stress, $\tau_{xy} = 25$ MPa

and Angle of section plane AB, $\theta = 55°$ (in clockwise),

अन्य उदाहरणों की भाँति मोहर वृत्त बनाते हैं।





चित्र 1.77

उत्तर— Normal stress $(\sigma_n) = ON = 76.1$ MPa (from Mohr's Circles)

Shear stress $(\tau) = PN = +26.1$ MPa

अभ्यास (Exercises)

1. निम्न रिक्त स्थानों की पूर्ति उचित शब्दों से कीजिये—

(i) प्रतिबल (Stress) का S.I. में मात्रक (Unit) .... होता है।

(ii) किसी वस्तु के इकाई क्षेत्रफल पर कार्य करने वाले आन्तरिक प्रतिरोधी बल को .... कहते हैं। (U.K. 2014, S)

(iii) प्रतिबल की इकाई प्रायः .... प्रयोग की जाती है।

(iv) बल के प्रभाव में किसी वस्तु के रूप व आकार में हुए परिवर्तन या विरूपण (Deformation) को .... कहते हैं।

(v) कर्तन या स्पर्शी प्रतिबल (Shear or Tangential Stress) भार के तल के .... कार्य करते हैं।

(vi) विकृति (Strain), $e = \frac{\text{............}}{\text{प्रारम्भिक आकार}}$

(vii) पॉइजन अनुपात (Poisson's Ratio) $\frac{1}{m} = \frac{\text{.........}}{\text{.........}}$ सूत्र होता है।

(viii) प्रतिबल या प्रतिबल तीव्रता = यंग मापांक $(E) \times$ ....

(ix) प्रत्यास्थता गुणांक, $E = \frac{\text{अनुदैर्ध्य प्रतिबल}}{\text{............}}$

(x) .... विकृति को .... विकृति से भाग देकर पॉइजन अनुपात $\left(\frac{1}{m}\right)$ ज्ञात किया जाता है।

(xi) अन्तिम प्रतिबल (Ultimate Stress) तथा कार्यकारी प्रतिबल (Working Stress) के अनुपात को .... कहते हैं।

(xii) प्रत्यास्थता की सीमा (Elastic Limit) के अन्दर उत्पन्न सीधे प्रतिबल एवं उसके कारण उपजी आयतन विकृति के अनुपात को .... कहते हैं।

(xiii) जिस गुण के कारण पदार्थ कटने, खरोंचे जाने या गड्ढा बनने का विरोध करता है, पदार्थ की .... कहलाती है।

(xiv) कर्तन प्रतिबल (Shear Stress) तथा कर्तन विकृति (Shear Strain) के अनुपात को .... कहते हैं।

(xv) E तथा G में सम्बन्ध सूत्र $E = 2G\,[1 + ...]$ है। (U.K. 2014, S)

(xvi) E तथा K में सम्बन्ध सूत्र $E = 3K\,[1 - .....]$ है। (U.K. 2014, S)

(xvii) अक्षीय भार की स्थिति में वस्तु (या पदार्थ) की लम्बाई में परिवर्तन (Δl) तथा प्रारम्भिक लम्बाई (l) के अनुपात को .... विकृति कहते हैं।

(xviii) परस्पर लम्बरूप तीनों दिशाओं में विकृतियों के बीजगणितीय योग को .... कहते हैं।

(xix) किसी धरन (Beam) में .... के कारण तनाव तथा सम्पीडन प्रतिबल उत्पन्न होते हैं।

(xx) नरम इस्पात (Mild Steel) के तनाव परीक्षण के समय प्रतिबल विकृति वक्र (Stress-strain curve) के जिस भाग में बिना बल बढ़ाये विकृति बढ़ती है, उस भाग (Range) को .... कहते हैं।

(xxi) तनाव भार वस्तु को .... है, जबकि संपीडन भार वस्तु को .... है।

(xxii) हुक के नियमानुसार, उत्पन्न अनुदैर्ध्य प्रतिबल ∝ .... ।

(xxiii) जब पिण्ड का तापमान बढ़ाया जाता है तो पिण्ड में .... प्रतिबल उत्पन्न होगा। (U.K. 2014, S)

(xxiv) पार्श्व विकृति तथा अनुदैर्ध्य विकृति के अनुपात को .... कहते हैं। (U.K. 2014, S)

(xxv) मुख्य समतलों (Principal Planes) पर .... प्रतिबल शून्य होते हैं।

(xxvi) अधिकतम कर्तन (अपरूपण) प्रतिबलों के समतल, मुख्य प्रतिबल के समतल से .... कोण पर झुके होते हैं।

(xxvii) अधिकतम तथा न्यूनतम कर्तन प्रतिबलों अर्थात् (अपरूपण प्रतिबलों) के मान .... होते हैं।

(xxviii) मुख्य प्रतिबलों के समतल आपस में .... के कोण पर झुके होते हैं।

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

(xix) कर्तन प्रतिबल के साथ सदैव उसी मान का परन्तु विपरीत घुमाऊ घूर्ण का कर्तन प्रतिबल पहले से .... दिशा में अपने आप ही कार्य करने लगता है।

(xx) कोई भी लम्ब प्रतिबल अपने समतल से 45° के कोण पर अपने से .... मान का कर्तन प्रतिबल ... करता है।

(xxi) अक्षीय भार W के कारण तिरछी काट का कोण $\theta = 45°$ पर अधिकतम अपरूपण प्रतिबल ... . होता है।

(xxii) मोहर वृत्त, प्रतिबलों के मान ज्ञात करने की .... विधि है।

उपरोक्त प्रश्न के उत्तर

(i) N/mm^2, (ii) प्रतिबल या प्रतिबल तीव्रता, (iii) N/mm^2, (iv) विकृति (Strain), (v) समानान्तर (Para... (vi) आकार में परिवर्तन, (vii) $\frac{\text{पार्श्व विकृति (Lateral Strain)}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति (Longitudinal Strain)}}$, (viii) विकृति (Strain), (ix) अनु... विकृति, (x) पार्श्व, अनुदैर्ध्य, (xi) सुरक्षा गुणांक (Factor of Safety), (xii) आयतन मापांक (Bulk Modu... (xiii) कठोरता (Hardness), (xiv) कर्तन मापांक या दृढ़ता गुणांक (G), (xv) $\frac{1}{m}$, (xvi) $\frac{2}{m}$, (xvii) अनु... (xviii) आयतन विकृति, (xix) अक्षीय भार या बल, (xx) पराभव (Yield), (xxi) खींचता, दबाता, (xxii) अ... विकृति, (xxiii) तापीय प्रतिबल (Thermal stress), (xxiv) पाइजन अनुपात (Poisson's Ra... (xxv) कर्तन (अर्थात्, अपरूपण) (Shearing Stress) (xxvi) 45° (xxvii) बराबर (Equal) (xxviii)... (xxix) लम्ब (Perpendicular) (xx) आधे ($\because q_{max} = \frac{f}{2}$) (xxi) $\frac{W}{2A}$ (xxii) ग्राफीय (Graphical)

2. निम्न की परिभाषित कीजिये एवं संक्षेप में समझाइये–

(i) प्रतिबल (Stress) एवं इसके प्रकार
(ii) विकृति (Strain) एवं इसके प्रकार
(iii) प्रत्यास्थता सीमा (Elastic Limit) (U.P....
(iv) हुक का नियम (Hooke's Law) (U.K. 2011, 12; U.K. 2013 W; U.K. 20...
(v) तापीय प्रतिबल (Thermal stress) (U.P. 2003; U.K. 20...
(vi) कर्तन विकृति (Shear Strain)
(vii) पार्श्व विकृति (Lateral Strain)
(viii) आयतन विकृति (Volumetric Strain) (U.P....
(ix) कर्तन प्रतिबल (Shear Stress)
(x) सीधे भार तथा सीधे प्रतिबल (Direct Load and Direct Stress)
(xi) यंग मापांक या प्रत्यास्थता गुणांक (U.P. 200...
(xii) कर्तन मापांक (Modulus of Rigidity) (U.P. 2000; U.K. 20...
(xiii) आयतन मापांक (Bulk Modulus)
(xiv) पॉइजन अनुपात (Poisson's Ratio) (U.P....
(xv) सुरक्षा गुणांक (Factor of Safety)
(xvi) पराभव बिन्दु एवं प्रतिबल (Yield Point & Stress) (U.P. 2003, 10, 11, 12-S; U.K. 20...
(xvii) प्रत्यास्थता (Elasticity) (U.P....
(xviii) प्लास्टिकता (Plasticity)

(xix) कठोरता (Hardness) (U.P. 2013)
(xx) तन्यता (Tenacity/Ductility) (U.P. 2013)
(xxi) कुट्टयता (Malleability)
(xxii) चीमड़पन-या कड़ापन (Toughness) (U.P. 2013; U.K. 2014 S)
(xxiii) भंगुरता (Brittleness) (U.P. 2013)

3. निम्न में अन्तर कीजिये–

(i) बल और प्रतिबल
(ii) प्रतिबल और विकृति
(iii) तन्य प्रतिबल और सम्पीड्य प्रतिबल
(iv) अन्तिम भार तथा कार्यकारी भार
(v) प्रत्यास्थता सीमा तथा समानुपाती सीमा
(vi) कठोरता तथा चीमड़पन (Hardness & Toughness)
(vii) अन्तिम प्रतिबल तथा कार्यकारी प्रतिबल (Ultimate Stress & Working Stress) (U.P. 2002, 10)

4. मृदु इस्पात के लिये तनन परीक्षण में प्रतिबल-विकृति (भार-विरूपण) आरेख बनाइये। इसके बिन्दुओं को अंकित कर नाम लिखिये तथा उनकी परिभाषा लिखिये। (U.P. 2006, 08, 11, 12)

5. संयुक्त छड़ (Composite Bar) को समझाइये तथा उपयोग लिखिये।

6. यदि मृदु इस्पात (Mild Steel) को स्थैतिक तनन में उसके विभाजन तक परीक्षण किया जाये तो उसके लिये प्रतिबल-विकृति वक्र दर्शाइये तथा स्पष्ट कीजिये– (U.P. 2006, 08, 11, 12)

(अ) पराभव प्रतिबल, (ब) समानुपाती सीमा,
(स) चरम प्रतिबल, तथा (द) विभंजन प्रतिबल।

7. (i) Young's Modulus (E) तथा Modulus of Rigidity (G) में सम्बन्ध सूत्र स्थापित कीजिए।
(ii) E तथा K में सम्बन्ध सूत्र स्थापित कीजिए।

8. निम्नलिखित को परिभाषित कीजिये–

(i) कार्यशील प्रतिबल (Working Stress)
(ii) अपरूपण विकृति (Shear Strain)
(iii) आयतन प्रत्यास्थता गुणांक (Bulk Modulus)
(iv) तनन प्रतिबल (Tensile Stress)
(v) पराभव बिन्दु (Yield Point) (U.P. 2010)
(vi) सुरक्षा गुणांक (Factor Safety) (U.P. 2010; U.K. 2014 S)

9. मृदु इस्पात (Mild Steel) के मुख्य यांत्रिक गुण लिखिये। उनके महत्व को समझाइये। (U.P. 2012)

विशेष : प्रतिबल-विकृति एवं लम्बाई में परिवर्तन (Δl) पर आधारित

10. एक इस्पात के तार द्वारा 2·5 kN भार को उठाना है। तार का न्यूनतम व्यास कितना होना चाहिये जिससे उसमें प्रतिबल 100 kN/mm^2 से अधिक न हो? यदि तार की लम्बाई 5 मीटर हो तो तार की बढ़ोत्तरी (Δl) को भी ज्ञात कीजिये। $E = 2\times10^5\ N/mm^2$ मान लीजिये।

[उत्तर : $d = 0{\cdot}18$ mm, $\Delta l = 2456$ mm]

11. इस्पात (Steel) की एक गोल छड़, जिसका व्यास 2 सेमी है, पर 30 kN का तनन बल लगा है। छड़ में तनन प्रतिबल ज्ञा... कीजिये। अगर उसकी लम्बाई 30 सेमी हो तो बढ़ोत्तरी (Δl) की गणना कीजिये। $E_s = 2\times10^5 N/mm^2$ मानिये।

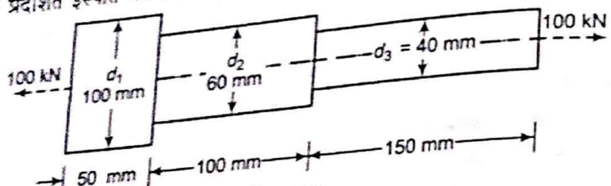
[उत्तर : $p = 95{\cdot}5\ N/mm^2$, $\Delta l = 0{\cdot}0001432$ mm]

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

12. एक 4 मीटर लम्बी इस्पात की छड़, जिसका अनुक्षेप (अनुप्रस्थ-काट) 3 cm × 2 cm है, पर 50 kN का अक्षीय भार वहन करती है। प्रतिबल, विकृति और छड़ की लम्बाई में परिवर्तन ज्ञात कीजिये, यदि $E = 2\times10^5\ N/mm^2$ है।
[उत्तर : $p = 83{\cdot}33\ N/mm^2$, $e = 4{\cdot}167\times10^{-4}$, $\Delta l = 1{\cdot}667$ mm]

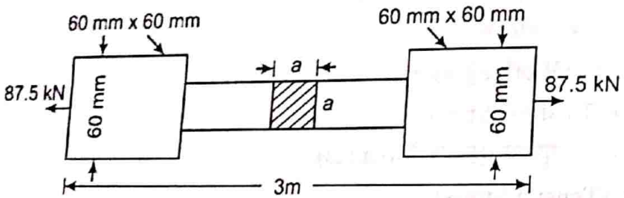
13. चित्र 1.78 में प्रदर्शित इस्पात की छड़ के लिये निम्नलिखित ज्ञात कीजिये– (U.P. 20..



चित्र 1.78

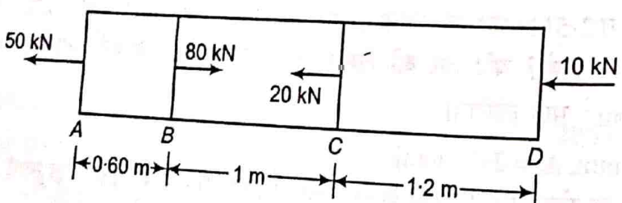
(i) अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल, (ii) अधिकतम तथा न्यूनतम विकृति,
(iii) छड़ की लम्बाई में परिवर्तन।
दिया है, तनन बल = 100 kN , $E = 2\times10^5\ N/mm^2$
[उत्तर : $79{\cdot}6\ N/mm^2$, $12{\cdot}7\ N/mm^2$, $3{\cdot}98\times10^{-4}$, $0{\cdot}635\times10^{-4}$, 0·0805 mm]

14. चित्रानुसार 60 mm × 60 mm के वर्गाकार काट (Square section) के सिरों (ends) वाली तान छड़ (Tie Bar) की लम्बाई 3 m है। यदि इसका बीच वाला भाग भी वर्गाकार काट (Square section) का है तो इस मध्य भाग (mid portion) के काट की माप (size) तथा लम्बाई ज्ञात कीजिए, यदि मध्य भाग में प्रतिबल (stress) 140 MN/m² है। के सिरों पर तनाव बल (tensile force) 87·5 KN है, छड़ की कुल लम्बाई में वृद्धि (total extension) 0·14 mm है।
$E = 200\ GN/m^2$ है। (U.K. 2013, W; U.K. 2012)
[उत्तर : 25 mm × 25 mm, 1·79 m]



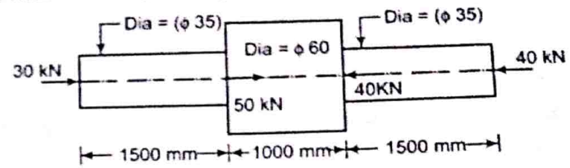
चित्र 1.79

15. एक पीतल की छड़ की अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल 1000 mm² है। इस छड़ पर चित्र 1.80 के अनुसार बल लगे हैं; छड़ की लम्बाई में कुल परिवर्तन ज्ञात कीजिये। $E = 1{\cdot}06\times10^5\ N/mm^2$ (U.P. 2010; U.K. 20..)
[उत्तर : $\Delta l = -0{\cdot}1132$ mm लम्बाई कम होगी।]



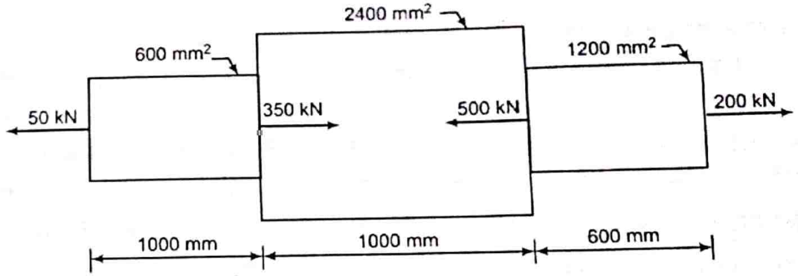
चित्र 1.80

16. एक स्टील की स्टैण्ड छड़ पर चित्र 1.81 के अनुसार बल लगे हैं। छड़ की पूर्ण लम्बाई में परिवर्तन ज्ञात कीजिये जबकि $E = 200$ GPa है। (U.P. 2002, U.K. 2014, S)
[उत्तर : $\Delta l = 0{\cdot}687$ mm की लम्बाई में कमी]



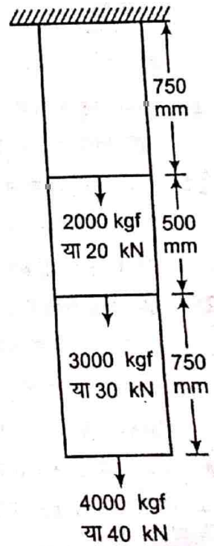
चित्र 1.81

17. चित्र 1.82 में दर्शाई गई छड़ की पूर्ण लम्बाई में परिवर्तन (Change in lenght or extension) ज्ञात कीजिये।($E = 2\times10^5\ N/mm^2$) है।



चित्र 1.82

18. चित्र 1.83 में दिखायी गयी इस्पात की बनी 2 मीटर लम्बी 6 वर्ग सेमी क्षेत्रफल वाली एकसमान काट की छड़ पर भार लगा है। छड़ की लम्बाई में कुल वृद्धि ज्ञात कीजिये।
$E = 2\times10^5\ N/mm^2$ है। [उत्तर : $\Delta l = 1{\cdot}1$ mm]



चित्र 1.83

19. 40 सेमी॰ लम्बाई, 4·5 सेमी॰ चौड़ाई और 5 सेमी॰ गहराई वाले धातु की एक छड़ के लिये प्रत्यास्थता गुणांक तथा पॉयजन का अनुपात ज्ञात कीजिये। छड़ पर 450 kN का अक्षीय सम्पीडन भार लगाया गया है। छड़ की लम्बाई में 0·09 सेमी॰ की कमी तथा चौड़ाई में 0·003 सेमी॰ की वृद्धि होती है। (U.P. 2002)
[उत्तर : $0{\cdot}9\times10^5\ N/mm^2$, $\frac{1}{m} = 0{\cdot}3$]

Scanned with CamScanner

20. एक 550 मिमी० लम्बा ताँबे का रॉड जिसका 200 मिमी० हिस्सा 30 मिमी० व्यास का, 200 मिमी० 20 मिमी० व्यास [illegible] बाकी हिस्सा 10 मिमी० व्यास का है। प्रत्येक हिस्से में प्रतिबल का मान बताइए तथा रॉड का सम्पूर्ण खिंचाव बताइए [illegible] भार 30 kN का लगा हो। मानिये $E = 100\ kN/mm^2$ है। (U.P. 20[illegible])

[उत्तर : $42 \cdot 46\ N/mm^2, 95 \cdot 54\ N/mm^2, 382 \cdot 16\ N/mm^2, \Delta l = 0 \cdot 84\ mm$]

21. किसी भाप इन्जन (Steam Engine) में पिस्टन का व्यास 200 mm है। संयोजक दण्ड (Connecting Rod) की लम्[illegible] 1·5 मीटर तथा इसकी अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 20 cm² है। यदि सिलिण्डर में भाप का अधिकतम दाब 4 N/mm² है [illegible] संयोजक दण्ड की लम्बाई में कमी तथा प्रतिबल ज्ञात कीजिये। $E = 2 \times 10^5\ N/mm^2$ है।

[उत्तर : $f = 62 \cdot 8\ N/mm^2, \Delta l = 0 \cdot 471\ mm$]

22. किसी पैट्रोल इंजन के पिस्टन का व्यास 20 सेमी है। सिलिण्डर में गैसों का दाब $2 \cdot 5\ N/mm^2$ है। सिलिण्डर कवर [illegible] चार बोल्ट लगाकर कसा गया है। यदि प्रत्येक बोल्ट का व्यास 2 सेमी तथा लम्बाई 60 सेमी है तो प्रत्येक बोल्ट में उत्[illegible] अधिकतम तनाव प्रतिबल एवं लम्बाई में वृद्धि ज्ञात कीजिये। दिया है $E = 2 \times 10^5\ N/mm^2$।

[उत्तर : $62 \cdot 5\ N/mm^2, \Delta l = 0 \cdot 1875\ mm$]

23. हाइड्रॉलिक लिफ्ट की छड़ का व्यास 3 सेमी तथा लम्बाई 12 मीटर है। इसके साथ जुड़े प्लंजर (Plunger) का व्यास [illegible] सेमी है और इस पर क्रियाकारी दाब $8\ N/mm^2$ है। यदि $E = 2 \times 10^5\ N/mm^2$ है तो छड़ की लम्बाई में परिवर्तन [illegible] कीजिये। [उत्तर : 7·68 m[illegible]

24. 3 सेमी मोटी प्लेट में 25 mm व्यास का छेद किया जाता है। यदि प्लेट के पदार्थ का अधिकतम कर्तन प्रतिबल 3[illegible] N/mm^2 हो तो प्लेट में छेद करने के लिये आवश्यक बल ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 706·5[illegible]

25. एक खोखला इस्पात के स्तंभ (column) पर $1 \cdot 9 \times 10^6$ N का अक्षीय भार लगा है, इसके लिये चरम प्रतिबल (Ultima[illegible] Stress) $480\ N/mm^2$ उत्पन्न होता है। यदि स्तंभ का बाहरी व्यास 20 सेमी० हो तो उसका आन्तरिक व्यास ज्ञात कीजि[illegible] सुरक्षा गुणांक (Factor of Safety) का मान 4 मान लीजिये। (U.P. 20[illegible])

[उत्तर : $d = 140 \cdot 8$ mm]

विशेष : पार्श्व विकृति तथा पॉइजन अनुपात पर आधारित प्रश्न

26. एक मृदु इस्पात छड़ पर जिसका व्यास 1 सेमी है। 22 kN का भार लगाये जाने से उसके व्यास में 0·0004 सेमी [illegible] परिवर्तन हो जाता है। यदि $E = 200\ GN/m^2$ हो तो पॉइजन अनुपात ज्ञात करें। [उत्तर : 0·28[illegible]

27. 20 mm व्यास की एक वृत्ताकार अनुप्रस्थ काट तथा 3 मीटर लम्बाई की एक ऊर्ध्वाधर ताँबे की छड़ पर 150 kN [illegible] तनाव बल लगा है। यदि पॉइजन अनुपात 0·25 तथा $E = 0 \cdot 9 \times 10^5\ N/mm^2$ हो तो व्यास में कमी की गणना कीजिये।

[उत्तर : 0·0265 mm]

28. 300 kN बल से एक 30 सेमी० लम्बाई, 5 सेमी० चौड़ाई और 4 सेमी० मोटाई वाले इस्पात की छड़ को इसकी लम्बाई [illegible] दिशा में खींचा जाता है। इसके आयतन में परिवर्तन का मान ज्ञात कीजिये। $E = 2 \times 10^5\ N/mm^2$ और पॉ[illegible] (Poisson's) अनुपात 0·25 मान लीजिये। (U.P. 20[illegible])

[उत्तर : $\Delta V = 2250\ mm^3$]

29. एक 2 मीटर लम्बी छड़, जिसका आयताकार अनुप्रस्थ काट 60 मिमी × 50 मिमी है, 60 कि० न्यूटन का अक्षीय तनाव [illegible] वहन करती है। छड़ की परिवर्तित विमाओं की गणना कीजिये, यदि $m = 3 \cdot 6$ एवं $E = 200$ GPa है।

[उत्तर : लम्बाई $= 2 \cdot 002$ m, अनुप्रस्थ काट $59 \cdot 9983 \times 49 \cdot 9986$ mm]

30. इस्पात की 20 mm व्यास व 200 mm लम्बी छड़ को 25 kN के तनाव बल से लम्बाई $7 \cdot 8 \times 10^{-2}$ mm बढ़ जाती है और उसके व्यास में $2 \cdot 32 \times 10^{-3}$ mm परिवर्तन होता है। पॉइजन अनुपात का मान ज्ञात करें। [उत्तर : 0·297]

31. एक आयताकार काट की छड़ की लम्बाई 2 मीटर, चौड़ाई 8 सेमी तथा गहराई 5 सेमी है। इस पर क्रमश: लम्बाई की दिशा में $150\ N/mm^2$ का तनाव, चौड़ाई की दिशा में $120\ N/mm^2$ का सम्पीडन तथा गहराई की दिशा में $100\ N/mm^2$ का तनाव प्रतिबल लगा है। छड़ की विमाओं तथा आयतन में परिवर्तन का मान ज्ञात कीजिये जबकि–

$E = 2 \times 10^6 kgf/cm^2 (2 \times 10^5\ N/mm^2)$ तथा $\frac{1}{m} = \frac{1}{4}$ है।

[उत्तर : $\Delta l = 1 \cdot 55$ mm वृद्धि, $\Delta b = 0 \cdot 073$ mm कमी,
$\Delta t = 0 \cdot 023125$ mm वृद्धि, $\Delta V = 2600\ mm^3$ वृद्धि]

32. एक 30 mm व्यास तथा 300 mm लम्बाई की छड़ (Bar) पर 56 kN का तनाव भार (Tensile Load) लगा है। पाठ्यांकों (Reading) से ज्ञात हुआ कि इसकी लम्बाई में वृद्धि 0·12 mm तथा व्यास में संकुचन (Contraction in Diameter) 0·0036 mm है। तो गणना कीजिये–(i) पॉइजन अनुपात (Poisson's Ratio), (ii) तीनों प्रकार के मापांकों के मान (Values of Three Moduli) अर्थात् E, G and K.

[उत्तर : $\frac{1}{m} = 0 \cdot 3$, $E = 1 \cdot 9815 \times 10^5\ N/mm^2$, G या $C = 0 \cdot 762 \times 10^5\ N/mm^2$ तथा $K = 1 \cdot 65 \times 10^5\ N/mm^2$]

विशेष : संयुक्त छड़ों पर आधारित प्रश्न

33. समान लम्बाई की दो छड़ें A तथा B 60 सेमी० की दूरी पर ऊर्ध्वाधर लटकी हैं तथा एक क्षैतिज छड़ को आलम्बित करती हैं। यह छड़ क्षैतिज ही रहती है। जब एक 50 kN का भार A से 20 सेमी की दूरी पर लगाया जाता है तो छड़ B में 50 N/mm^2 का प्रतिबल उत्पन्न होता है। छड़ A में प्रतिबल तथा A व B की काट के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये, जबकि पदार्थों के यंग मापांक इस प्रकार हैं–$E_A = 2 \times 10^5\ N/mm^2$ तथा $E_B = 0 \cdot 9 \times 10^5\ N/mm^2$।

[उत्तर : $111\ N/mm^2, 300\ mm^2, 333\ mm^2$]

34. इस्पात तथा ताँबे की एक संयुक्त छड़ की कुल काट का क्षेत्रफल 20 सेमी² है जिसमें इस्पात का क्षेत्रफल 8 सेमी² है। प्रत्येक छड़ की लम्बाई 50 सेमी है। संयुक्त छड़ पर 28 T का तनन बल लगाया गया है। दोनों पदार्थ में उत्पन्न प्रतिबल तथा छड़ की लम्बाई में वृद्धि ज्ञात कीजिये। $E_s = 2 \times 10^6\ kg/cm^2$ तथा $E_c = 1 \times 10^6\ kg/cm^2$ है।

[उत्तर : $1000\ kg/cm^2, 2000\ kg/cm^2, 0 \cdot 5$ mm]

35. 4 सेमी व्यास की एक ताँबे की छड़ 4 सेमी आन्तरिक व्यास तथा 5 सेमी बाह्य व्यास की इस्पात की ट्यूब से घिरी हुई है। प्रत्येक की लम्बाई 80 सेमी है। समुच्चय (Assembly) को 165 kN के अक्षीय भार द्वारा सम्पीडित किया जाता है। प्रत्येक पदार्थ में उत्पन्न प्रतिबल तथा समुच्चय में उभयनिष्ठ संकुचन ज्ञात कीजिये। $E_s = 2 \times 10^5\ N/mm^2$, $E_c = 1 \times 10^5\ N/mm^2$

[उत्तर : $123 \cdot 586\ N/mm^2, 61 \cdot 793\ N/mm^2, 0 \cdot 494$ mm] **(उ० प्र० 2010)**

36. एक इस्पात की बनी छड़ की लम्बाई 30 सेमी तथा व्यास 2 सेमी है। यह एक ट्यूब के अन्दर फिट की गयी है। ट्यूब का बाहरी व्यास 2·5 सेमी तथा भीतरी व्यास 2 सेमी है। इस समुच्चय (Assembly) पर 1000 kgf का अक्षीय दाब है। ट्यूब तथा छड़ में प्रतिबल ज्ञात करें तथा छड़ की लम्बाई का परिवर्तन ज्ञात करें। $E_{ट्यूब} = 0 \cdot 8 \times 10^6\ kgf/cm^2$, $E_{छड़} = 2 \times 10^6\ kgf/cm^2$

[उत्तर : $259 \cdot 79\ kgf/cm^2, 103 \cdot 9\ kgf/cm^2, 0 \cdot 0039$ cm]

37. एक प्रतिबलित कंक्रीट स्तंभ का व्यास 150 mm तथा लम्बाई 2·5 m है। इसमें मृदु इस्पात की 15 mm व्यास वाली छ: छड़ें परिच्छेद में सममितीय रूप से आबद्ध हैं। स्तम्भ पर 100 kN का भार लगाया गया है। कंक्रीट तथा इस्पात में उत्पन्न

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

अधिकतम प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए। स्तंभ की लम्बाई में परिवर्तन कितना होगा यह भी गणना कीजिए। इस्पात तथा कंक्रीट के प्रत्यास्थता मापांक क्रमशः 200 GPa तथा 10 GPa मान लीजिए तथा स्तंभ का भार नगण्य मान लीजिए।

[उत्तर : $2\cdot62\ N/mm^2$, $52\cdot4\ N/mm^2$, 0·69
(U.P. 2005,

38. एक सीमेन्ट-कंक्रीट कॉलम (reinforced concrete column) की काट (section) 300 mm × 300 mm है। इसकी लम्बाई में 20 mm व्यास (diameter) की 8 स्टील की छड़ें लगी हैं। इस कॉलम पर 360 kN का संपीडन (Compressive Load) लगा है। स्टील छड़ों में तथा कंक्रीट में प्रतिबल (Stresses in steel & concrete) ज्ञात कीजिए जबकि $E_s = 210\ GN/m^2$, $E_c = 14\ GN/m^2$ है।

(U.K. 20
[उत्तर : $2\cdot847\ MN/m^2$, $42\cdot707$ M

39. कंक्रीट (Concrete) के बने एक स्तम्भ की काट 200 × 300 mm है। इसमें चार इस्पात की छड़ें स्तम्भ के चारों कोनों पर उसकी पूरी लम्बाई में लगी हैं। इस स्तम्भ पर 400 kN का दबाव बल (Compressive Force) अक्षीय (Axial) लगता है। यदि इस्पात तथा कंक्रीट के लिये प्रत्यास्थता गुणांक क्रमशः $2\cdot0\times10^5$ तथा $1\cdot6\times10^4\ N/mm^2$ हो तो दोनों पदार्थों में प्रतिबल ज्ञात कीजिये। प्रत्येक छड़ का व्यास 15 mm है।

(U.K. 20
[उत्तर : $p_s = 73\cdot375\ N/mm^2$, $p_c = 5\cdot87$ N

40. कंक्रीट (Concrete) के बने एक खम्भे की काट 30 × 30 सेमी है। इसमें चार स्टील की छड़ें खम्भे के चारों कोनों पर लम्बाई में लगी हैं। इस खम्भे पर 520 kN का अक्षीय दबाव बल लगता है। प्रत्येक छड़ की अनुप्रस्थ काट 2·5 सेमी² है। स्टील के लिये E का मान कंक्रीट के E के मान से 15 गुना है। प्रत्येक स्टील छड़ तथा कंक्रीट में प्रतिबल ज्ञात कीजिए।

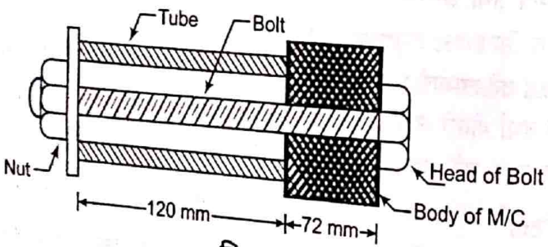
[उत्तर : $75\ N/mm^2$, 5 N

41. इस्पात (Steel) तथा ताँबे (Copper) की एक संयुक्त छड़ (Composite Bar) की कुल काट का क्षेत्रफल 2100 mm² है जिसमें इस्पात का क्षेत्रफल 900 mm² है। छड़ की कुल लम्बाई 300 mm है तथा इस पर 320 kN का तनन भार (Tensile load) लगता है। दोनों पदार्थों में प्रतिबल तथा छड़ की लम्बाई में वृद्धि ज्ञात कीजिये। यहाँ E_{steel} = kN/mm² तथा $E_{Copper} = 90\ kN/mm^2$ है।

(U.K. 2010
[उत्तर : $222\cdot139\ N/mm^2$, $100\cdot06\ N/mm^2$, 0·333

42. चित्र 1.84 के अनुसार ढलवाँ लोहे की दृढ़ बॉडी में से होकर एक बोल्ट गुजारा जाता है तथा यह एक ट्यूब के अन्दर होता हुआ ढिबरी की सहायता से ट्यूब को जोड़ता है। बॉडी में बोल्ट की लम्बाई 72 mm तथा ट्यूब की लम्बाई 120 mm है। बोल्ट का व्यास 24 mm तथा ट्यूब के अन्तः तथा बाह्य व्यास क्रमशः 28 mm तथा 36 mm हैं। चूड़ी की पिच 3 mm है। यदि ढिबरी को 20° के घुमाव से कस दिया जाता है तो बोल्ट और ट्यूब में उपजे प्रतिबल ज्ञात कीजिए। $E_{बोल्ट} = 210\ kN/mm^2$, $E_{ट्यूब} = 90\ kN/mm^2$ मानिये।

(U.P.S.
[उत्तर : ट्यूब में $77\cdot63\ N/mm^2$ सम्पीडन, बोल्ट में $69\cdot09\ N/mm^2$ त



चित्र 1.84

विशेष : तापीय प्रतिबल (Temperature Stress) पर आधारित प्रश्न

43. 400 mm लम्बी तथा 60 mm व्यास की एक ताँबे की छड़ दोनों सिरों पर दृढ़तापूर्वक टिकी है। छड़ में कोई प्रतिबल नहीं है जबकि कमरे का ताप 25°C है। यदि छड़ का तापमान 50°C कर दिया जाये तो उसमें उत्पन्न अभिलम्ब प्रतिबल का परिमाण तथा स्वभाव पता कीजिये। यदि $\alpha_{Cu} = 18\cdot5\times10^{-6}/°C$ तथा $E_{Cu} = 110\ GN/m^2$।

[उत्तर : $50\cdot875\ N/mm^2$, संपीडन]
(U.P. 2003)

44. एक छड़ 10°C पर 2 मीटर लम्बी है। छड़ का प्रसार ज्ञात कीजिये जब तापमान बढ़ाकर 80°C कर दिया जाता है। यदि प्रसार रोक दिया जाता है तो पदार्थ में प्रतिबलों को ज्ञात कीजिये। $E = 1\times10^5\ N/mm^2$ तथा $\alpha = 1\cdot2\times10^{-5}$ प्रति °C प्रति mm मान लीजिये।

[उत्तर : 1·68 mm, $84\ N/mm^2$]
(U.K. 2009, W)

45. समान लम्बाई की ताँबे तथा इस्पात की छड़ें दोनों सिरों पर आपस में मजबूती से जुड़ी हैं। ताँबे की छड़ का व्यास 3·51 cm तथा इस्पात की छड़ का व्यास 4·06 cm है। इस संयुक्त छड़ का तापमान 35°C से 146°C तब बढ़ाया जाता है। दोनों छड़ों में प्रतिबल तथा लम्बाई में विकृति (strain) ज्ञात कीजिये। इस्पात के लिये $\alpha = 11\cdot7\times10^{-6}/°C$ ताँबे के लिए $\alpha = 17\times10^{-6}/°C$, $E_s = 200\ kN/mm^2$, $E_c = 100\ kN/mm^2$।

[उत्तर : ताँबे में $42\cdot826\ N/mm^2$, इस्पात में $32\cdot008\ N/mm^2$, $1\cdot4587\times10^{-3}$]

46. एक इस्पाती छड़ एवं दो ताँबे की छड़ें हैं। सभी का क्षेत्रफल तथा लम्बाई समान है तथा जिनके दोनों सिरे दृढ़ता से जुड़े हुये हैं। इनका तापमान 15°C है। इस्पाती छड़ ताँबे की छड़ों के बीच में रखी है। इनका तापमान 250°C तक बढ़ाने पर प्रत्येक छड़ की लम्बाई 2 मिमी बढ़ जाती है। प्रत्येक छड़ की मूल लम्बाई तथा इनमें प्रतिबल ज्ञात करें। $E_s = 2\times10^5\ N/mm^2$, $E_c = 10^5\ N/mm^2$, $\alpha_s = 12\times10^{-6}/°C$ तथा $\alpha_c = 18\times10^{-6}/°C$ लीजिये।

[उत्तर : 567·37 mm, $p_s = 141\ N/mm^2$, $p_c = 70\cdot5\ N/mm^2$]
(U.P. 2001)

47. पीतल की एक ट्यूब का अन्तः व्यास 40 mm तथा दीवार की मोटाई 12·5 mm है। इसकी लम्बाई 1500 mm है। इतनी ही लम्बी तथा 40 mm व्यास की इस्पात की एक छड़ ट्यूब के अन्दर घुसाकर दोनों सिरों पर ट्यूब के साथ जकड़ दी गई है। यदि इस संयुक्त छड़ का तापमान 60 K बढ़ा दिया जाये तो ट्यूब में प्रतिबल ज्ञात कीजिये।
पीतल के लिये, $E = 100$ GPa, $\alpha = 18\times10^{-6}/°C$
तथा इस्पात के लिये, $E = 200$ GPa, $\alpha = 11\times10^{-6}/°C$ [उत्तर : 23·07 MPa]

48. एक 1·2 m व्यास के दृढ़ लकड़ी के पहिये पर पतले स्टील टायर (Tyre) को गर्म करके तथा सिकोड़कर चढ़ाया जाता है। चढ़ने के बाद टायर में परिधीय प्रतिबल (Hoop Stress) $120\ MN/m^2$ तक सीमित है तो टायर का आन्तरिक व्यास (inner dia) ज्ञात करें तथा टायर को चढ़ाने के लिये कितने न्यूनतम तापमान तक गर्म करने की आवश्यकता होगी? टायर के पदार्थ के लिये $E = 200\ GN/m^2$ तथा $\alpha = 12\times10^{-6}/°C$ मानिये। [उत्तर : $d = 1\cdot199$ m तथा $t = 69\cdot5°C$]

49. एक इस्पात (Steel) के घेरे (Ring) को 80°C तक गर्म करके पानी को एकत्र करने के लिये (For storing the water) बने एक ड्रम (Drum) पर चढ़ाया जाता है। ड्रम का व्यास 1·2 m है। इस्पात के Ring का गर्म करने से पूर्व का व्यास (d) ज्ञात करें तथा Ring में परिधीय प्रतिबल (Circumferential or Hoop Stress) ज्ञात कीजिये। $E = 210\ kN/mm^2$ तथा $\alpha_s = 12\times10^{-6}/°C$ है। [उत्तर : $d = 1\cdot19988$ metre, $p = 20\cdot16\ N/mm^2$]

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

50. एक इस्पात की छड़ को 'L_1' लम्बाई की अनुप्रस्थ काट A_1 तथा शेष बची लम्बाई 'L_2' की अनुप्रस्थ काट A_2 है। इस छड़ के दोनों सिरे दृढ़तापूर्वक बद्ध हैं। इस छड़ के ताप में t°C की वृद्धि की गई है। यदि छड़ की प्रत्यास्थता का मापांक E_S तथा रेखीय प्रसार का सह गुणांक α_S हो तो, छड़ में उत्पन्न बल एवं अधिकतम प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए। **(U.P. 2009)**

[उत्तर : बल $P = \dfrac{E_S A_1 A_2 \alpha_S t (L_1 + L_2)}{(L_1 A_2 + L_2 A_1)}$, प्रतिबल $(\sigma) = \dfrac{E_S A_1 \alpha_S t (L_1 + L_2)}{(L_1 A_2 + L_2 A_1)}$]

Hint : $\because L_1\alpha_S t + L_2\alpha_S t = \dfrac{P \times L_1}{A_1 E_S} + \dfrac{P \times L_2}{A_2 E_S} \quad \therefore P = ?$

$(\because A_2 < A_1) \quad \therefore$ stress max $= \dfrac{P}{A_2} = ?$

51. (i) मोहर के वृत्त को रेखांकित कीजिये तथा इसका वर्णन कीजिये। इससे क्या सूचनायें प्राप्त होती हैं? **(U.P. 2009, 10, 12)**

(ii) मोहर वृत्त विधि (Mohr's circle method) द्वारा मुख्य प्रतिबल (Principal stresses) आप किस प्रकार ज्ञात करेंगे? समझाइये। **(U.P. 2011, U.P. 2014, CIVIL)**

52. (i) जब दो समकोणीय समतलों पर अभिलम्बीय भार क्रियाशील हों तो उस द्रव्य के नत समतल पर अभिलम्ब एवं अपरूपण प्रतिबल हेतु सूत्र व्युत्पन्न कीजिये। **(U.P.S. 2010)**

(ii) एक भारित अवयव के किसी बिन्दु पर प्रतिबल अवस्था निम्नांकित द्वारा व्यक्त है : σ_x, σ_y तथा τ_{xy} उस बिन्दु पर निम्नलिखित के लिये व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए— **(U.P. 2012, CIVIL)**

(अ) मुख्य प्रतिबल (Principal stresses)

(ब) अधिकतम अपरूपण प्रतिबल (Max. shear stress)

(स) मुख्य समतलों की अवस्थिति (Direction of the principal planes)

53. मुख्य प्रतिबल (principal stress) तथा मुख्य समतल की परिभाषा दीजिए। **(U.P. 2001, 08, 13)**

54. आप 'मुख्य समतल' तथा 'मुख्य प्रतिबल' से क्या समझते हैं? मुख्य प्रतिबलों का महत्व क्या है? समझाइये। **(U.P. 2003)**

55. ग्राफीय अथवा विश्लेषण विधि से स्पष्ट कीजिये कि प्रधान समतल, अधिकतम अपरूपण प्रतिबल वाले समतलों से किसी बिन्दु पर 45° पर नत होते हैं। **(U.P. 2008)**

56. यदि किसी बिन्दु पर प्रतिबल अवस्था σ_x, σ_y तथा τ_{xy} के लिए प्रधान प्रतिबल क्रमशः σ_1 तथा σ_2 हों तब सिद्ध कीजिए—

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$$ **(U.P. 2009)**

57. किसी छड़ की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 100 mm^2 है। इसकी अक्ष से 45° पर झुके समतल पर कितना तनाव प्रतिबल प्रेरित (induce) होगा, यदि अनुप्रस्थ काट पर अक्षीय खिंचाव (tensile pull) 10 kN है? [उत्तर : 50 N / mm^2] **(U.K. 2007)**

58. आयताकार अनुप्रस्थ काट की एक एल्युमीनियम छड़ की चौड़ाई 6 सेमी एवं मोटाई 4 सेमी है। छड़ पर 75 kN का अक्षीय भार क्रियाशील है। अभिलम्बीय, स्पर्शरेखीय एवं परिणामी प्रतिबल उस समतल पर ज्ञात कीजिये जो छड़ के अनुप्रस्थ काट पर 30° पर अवनत है।

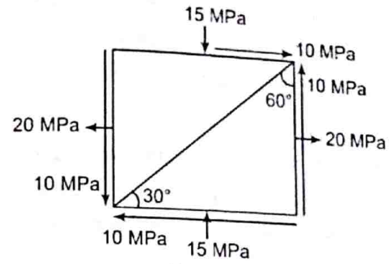
[उत्तर : 22·5 N / mm^2, 12·99 N / mm^2, 25·98 N / mm^2]

59. एक छड़ के एक बिन्दु पर मुख्य प्रतिबल 200 N / mm^2 (तनन, tensile) और 100 N / mm^2 (संपीडन compressive) है। एक तल पर, जो दीर्घ मुख्य प्रतिबल (max Principal stress) की अक्ष (axis) से 60° पर आनत (inclined) है, परिणामी प्रतिबल का परिमाण व दिशा (magnitude and direction of resultant stress) ज्ञात कीजिये। उस बिन्दु पर पदार्थ में अपरूपण प्रतिबल की अधिकतम तीव्रता भी ज्ञात कीजिये। **(U.P 2008, 11)** **(U.P. 2013, Mech.)**

[उत्तर : $\sigma_R = 180·275$ N / mm^2, 44°, –150 N / mm^2 clockwise]

60. चित्र 1.85 में दिखाई गई प्रतिबल अवस्था के लिये नत समतल AC पर अभिलम्ब एवं अपरूपण प्रतिबलों (Normal and Shear stresses) को ज्ञात कीजिये। मुख्य प्रतिबलों को भी ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2012, CIVIL)**

[उत्तर : $\sigma_n = -14·91$ MPa, $\sigma_S = 10·15$ MPa; $\sigma_1 = 22·65$ MPa, $\sigma_2 = -17·655$ MPa, τ_1 या $q_1 = 20·15$ MPa]



चित्र 1.85

61. एक पदार्थ खंडक पर विशुद्ध अपरूपण प्रतिबल 20 MPa का क्रियाशील है। मोहर प्रतिबल वृत्त बनाकर प्रधान प्रतिबल ज्ञात कीजिए तथा उन समतलों की दिशा भी बताइए जिन पर प्रधान प्रतिबल क्रियाशील हैं। **(U.P. 2009, 12)**

[उत्तर : 20 MPa, – 20 MPa, 20 MPa के कर्तन प्रतिबल वाले समतल से 45° पर दोनों ओर]

62. एक भारित अवयव (loaded part) के पदार्थ खण्ड पर 60 N / mm^2 का शुद्ध अपरूपण प्रतिबल (shear stress) लग रहा है। मोहर-वृत्त की सहायता से मुख्य प्रतिबल ज्ञात कीजिये तथा इनको एक समुचित दिशा में स्थित अवयव पर दर्शाइये।

[संकेत : सीधे प्रतिबलों (direct stresses) को शून्य मानकर मोहर-वृत्त खींचिये जिससे मुख्य प्रतिबल के मान ±60 N / mm^2 प्राप्त होंगे।] (U.P. 2012, S)

63. किसी बिन्दु पर प्रधान प्रतिबलों का मान क्रमशः 20 MPa तथा –10 MPa है। इसके लिए मोहर वृत्त बनाइये तथा उस समतल पर अपरूपण प्रतिबल ज्ञात कीजिये जिस पर अभिलम्ब प्रतिबल शून्य है। अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का मान भी बताइये। [उत्तर : 14·2 MPa, 15 MPa] **(U.P. 2008)**

64. किसी पिण्ड पर 80 N / mm^2 एवं 40 N / mm^2 के अभिलम्बीय तनन प्रतिबल दो लम्बवत् तलों पर क्रियाशील हैं। उस नत समतल पर, जिसका अभिलम्ब 40 N / mm^2 प्रतिबल की क्रिया रेखा पर 35° कोण पर झुका हुआ है, (i) अभिलम्ब प्रतिबल, (ii) स्पर्शरेखीय (tangential) प्रतिबल, तथा (iii) परिणामी प्रतिबल ज्ञात कीजिये। इनके अधिकतम मान भी निकालिये। **(U.K. 2010, S)**

[उत्तर : (i) 53·2, (ii) 18·8 तथा (iii) 56·4 N / mm^2 एवं इनके अधिकतम मान क्रमशः 80, 20 तथा 80 N / mm^2]

65. पदार्थ के एक बिन्दु पर 80 N / mm^2 एवं 160 N / mm^2 के दो अभिलम्ब तनन प्रतिबल कार्यरत हैं तथा तलों पर उनकी दिशा में 40 N / mm^2 का एक अपरूपण प्रतिबल भी क्रियाशील है। मोहर-वृत्त (Mohr's circle) की सहायता से उस द्रव्य में (i) मुख्य प्रतिबल, (ii) अधिकतम उत्पन्न अपरूपण प्रतिबल के मान एवं (iii) मुख्य समतलों की स्थिति ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : (i) 176·57 तथा 63·43 N / mm^2 (ii) 56·57 N / mm^2 (iii) 160 N / mm^2 वाले समतल से 22·5° तथा –67·5° पर] **(U.K. 2009)**

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

66. एक प्रत्यास्थ पदार्थ में विकृति के अन्तर्गत किसी बिन्दु पर 75 N / mm^2 एवं 25 N / mm^2 के दो तनन प्रतिबल एक-दूसरे के लम्बवत् एक 20 N / mm^2 के कर्तन प्रतिबल के साथ लगे हुये हैं। मोहर-वृत्त विधि अपनाते हुये मुख्य प्रतिबलों के मान, उनकी प्रकृति तथा दिशा ज्ञात कीजिये। अधिकतम कर्तन प्रतिबल का मान तथा इनके समतलों की स्थिति भी ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : 82 तथा 17·5 N / mm^2, 20°, 110°, 32 N / mm^2, 26°]

(U.P. 2006, 07)

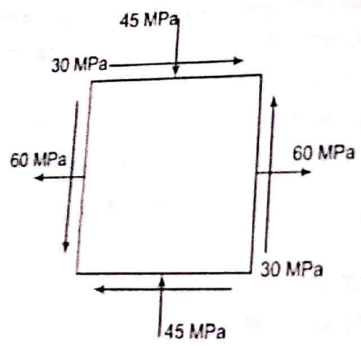
67. किसी बिन्दु से जाने वाले दो लम्बवत् तलों पर मुख्य प्रतिबलों के मान क्रमश: 75 MN / m^2 तथा 35 MN / m^2 हैं। मुख्य प्रतिबल तल से 30° पर झुके तल पर (i) अभिलम्ब प्रतिबल ज्ञात कीजिये, (ii) अपरूपण प्रतिबल ज्ञात कीजिये, (iii) परिणामी प्रतिबल ज्ञात कीजिये, तथा (iv) उस बिन्दु पर अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये। (U.P. 2003)

[उत्तर : (i) 65 MN / m^2, (ii) −17·32 MN / m^2, (iii) 67·27 MN / m^2, (iv) 20 MN / m^2]

68. एक भारित ठोस के किसी द्वि-विमीय अवयव पर चित्र 1.30 में दर्शाये अनुसार प्रतिबल क्रियाशील है। मोहर के प्रतिबल वृत्त अथवा किसी अन्य विधि द्वारा प्रधान प्रतिबल (Principal Stresses) का मान एवं प्रधान समतलों (Principal Planes) की स्थिति ज्ञात कीजिए। इस स्थल पर अधिकतम अपरूपण प्रतिबल (max. Shear Stress) का मान भी ज्ञात कीजिए।

(U.P. 2000, 05)

[उत्तर : 68 MPa, − 53 MPa, 60 MPa के समतल से 14·75° तथा 104·75° पर q_1 = 60·5 MPa]



चित्र 1.86

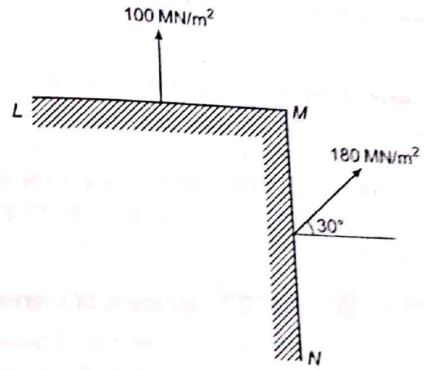
69. एक विकृत पदार्थ के किसी बिन्दु पर 100 MPa एवं 50 MPa के दो तनन प्रधान प्रतिबल (Tensile Principal Stress) परस्पर लम्बवत् तल पर कार्यरत है। मोहर वृत्त की सहायता से अभिलम्बवत्, स्पर्शरेखीय एवं परिणामी प्रतिबल (Normal, Shear and Resultant Stresses) की गणना उस समतल पर कीजिये जो कि मुख्य प्रधान समतल से 30° के कोण पर झुका है।

(U.P. 2011)

[उत्तर : 88 MPa, 22 MPa, 90·2 MPa]

70. चित्र 1.31 में देखें तथा अधिकतम व न्यूनतम मुख्य प्रतिबल, अधिकतम अपरूपण प्रतिबल और इनके समतलों की स्थितियाँ ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : 184·36 MN / m^2, 17° 33′
−128·48 MN / m^2, 107° 33′
156·42 MN / m^2, 62° 33′]



चित्र 1.87

71. एक वोल्ट पर 100 kN के अक्षीय खिचाव भार (Axial Tensile Load) के साथ-साथ 50 kN का अनुप्रस्थ कर्तन बल (Transverse Shear Force) भी लगा है। निम्नलिखित तर्क के अनुसार बोल्ट का आवश्यक व्यास ज्ञात कीजिए। (अधिकतम तनाव प्रतिबल 1000 N/mm^2 तथा अधिकतम कर्तन प्रतिबल 500 N/mm^2 मानिए। (i) अधिकतम प्रमुख प्रतिबल (Max. Principal Stress) (ii) अधिकतम कर्तन प्रतिबल (Max. Shear Stress)।

[उत्तर : Bolt का व्यास d = 12·4 mm, 13·42 mm]

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

Polytechnic study with Atul

Whatsapp No.- 9369290461

Subscribe, Like, Comment and Share

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

2 जड़त्व आघूर्ण (MOMENT OF INERTIA)

§ 2.1 जड़त्व (Inertia)

"वस्तुओं का वह गुण, जिसके कारण वे स्वंय अपनी अवस्था में परिवर्तन करने में असमर्थ रहती हैं, जड़त्व कहलाता है।" यह न्यूटन के गति सम्बन्धित प्रथम नियम (Newton's Ist Law of Motion) से भी स्पष्ट है कि "प्रत्येक वस्तु अपनी स्थिर अवस्था या गतिशील अवस्था में तब तक बनी रहती है जब तक कि उस पर कोई बाह्य बल (external force) उसकी अवस्था में परिवर्तन के लिये कार्य न करें।" वस्तुओं के इस गुण को, जिसके कारण वे स्वंय अपनी अवस्था में परिवर्तन करने में असमर्थ रहती हैं, "जड़त्व (Inertia)" कहते हैं। वस्तु का द्रव्यमान (mass) उसके जड़त्व की माप होता है। तथा जड़त्व के कारण ही वस्तु में बाह्य बल का विरोध करने का गुण आता है।

§ 2.2 जड़ताघूर्ण या जड़त्व आघूर्ण या द्वितीय आघूर्ण (Moment of Inertia or Seconf Moment)

परिभाषा—"किसी निश्चित अक्ष के चारों ओर घूमती हुई वस्तु का वह गुण, जो उसकी वृत्तीय गति में परिवर्तन का विरोध करता है, वस्तु का घूर्णन अक्ष (Rotational Axis) के परित:जड़त्व आघूर्ण या द्वितीय आघूर्ण कहलाता है।"

विशेष महत्वपूर्ण—(1) जड़त्व आघूर्ण प्राय:ठोस वस्तु के द्रव्यमान अर्थात् संहति (mass) के आधार पर उसके द्रव्यमान के अनुसार ज्ञात करते हैं।

(2) वस्तुओं की काट (sections) के जड़त्व आघूर्ण उनके क्षेत्रफल (area) के आधार पर उनके क्षेत्रफल के अनुसार ज्ञात करते हैं।

§ 2.3 जड़त्व आघूर्ण के भौतिक महत्व (Physical Significance of Moment of Inertia)

किसी वस्तु का जड़त्व आघूर्ण, लगाये गये बाह्य बलयुग्म (couple) की प्रवृत्ति (tandency) का विरोध करता है, अर्थात् उसके द्वारा होने वाले वृतीय गति में परिवर्तन का विरोध करता है। अत: बलयुग्म यदि वस्तु के कोणीय वेग में वृद्धि करने वाला है तो वस्तु का जड़त्व आघूर्ण इस वेग वृद्धि का विरोध करता है। इसी प्रकार यदि बलयुग्म कोणीय वेग में कमी करने वाला है तो वस्तु का जड़त्व आघूर्ण उसके वेग में कमी का विरोध करता है। अत: स्पष्ट है कि जड़त्व आघूर्ण गति में परिवर्तन का विरोध करता है।

जैसे उदाहरणार्थ—किसी इन्जन का गतिपालक पहिया (fly wheel) अपने जड़त्व के कारण घूर्णन-गति में परिवर्तन का विरोध करता है। इसलिये गतिपालक पहियों (fly wheels) को बड़ा व भारी बनाया जाता है।

जड़त्व आघूर्ण का प्रयोग "पिण्डों की गतिकी (dyanamics of rigid bidies) का अध्ययन (study) करने में, पदार्थों की सामर्थ्य (strength of materials) ज्ञात करने में तथा धरनों का विक्षेप (deflection of beams) अथवा किसी कॉलम आदि का बहकाव (buckling of column) को निर्धारित करने के लिये किया जाता है।"

§ 2.4 द्रव्यमान जड़त्व आघूर्ण या द्वितीय आघूर्ण

(Mass Moment of Intertia or Second Moment of Mass)

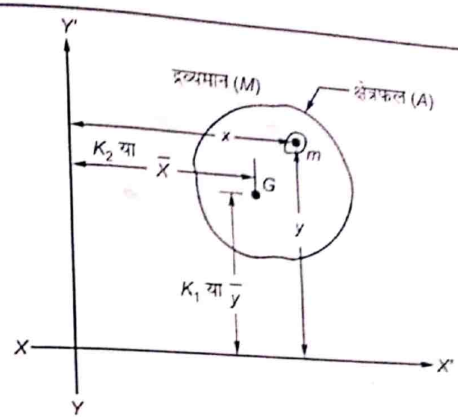
परिभाषा—"किसी अक्ष के सापेक्ष एक पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण या द्वितीय आघूर्ण उसके द्रव्यमान (mass) तथा अक्ष से उसकी दूरी (K) के वर्ग (K^2) के गुणनफल के बराबर होता है।"

अर्थात्

$$I = MK^2$$

किसी पिण्ड का द्रव्यमान जड़त्व आघूर्ण एक निश्चित घूर्णन अक्ष (Rotation -Axis) के सापेक्ष जैसे—$(X-X)$ अक्ष पर I_{XX} द्वारा तथा $(Y-Y)$ अक्ष पर I_{YY} द्वारा और पिण्ड के गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष पर I_G या केवल I द्वारा व्यक्त करते हैं।

माना द्रव्यमान m के एक पिण्ड का $X-X$ तथा $Y-Y$ अक्षों के परित: जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है। चित्र 2.1 के सम्पूर्ण पिण्ड के द्रव्यमान (M) में से एक छोटे से द्रव्यमान (m) पर विचार करना है। माना m की दोनों अक्षों से दूरियाँ y क्रमश: x तथा है।



चित्र 2.1

अत: परिभाषा के अनुसार, द्रव्यमान m का $X-X$ अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण $= my^2$ तथा $Y-Y$ अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण $= mx^2$ होगा।

क्योंकि पिण्ड (body) अनेक छोटे-छोटे द्रव्यमानों (masses) से मिलकर बना होता है। अत: इस प्रकार के सभी द्रव्यमानों का $X-X$ अक्ष तथा $Y-Y$ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण,

$$I_{XX} = \Sigma my^2 \quad \text{... (1)}$$

या $$I_{XX} = MK_1^2$$

तथा $$I_{YY} = \Sigma my^2 \quad \text{... (2)}$$

या $$I_{YY} = MK_2^2$$

इसका मात्रक किग्रा × मीटर^2 (kg - m^2) है। यह एक अदिश राशि (Scalar Quantity) है।

§ 2.5 परिभ्रमण त्रिज्या (Radius of Gyration)

परिभाषा (Defination)—"किसी घूर्णन अक्ष के परित: किसी पिण्ड की परिभ्रमण (अर्थात् घूर्णन) त्रिज्या (K), अक्ष से मापी गई वह दूरी है जिसके वर्ग को यदि पिण्ड के द्रव्यमान (M) से गुणा किया जाये तो गुणनफल उस अक्ष के परित: पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण (I) के बराबर होता है।"

इस प्रकार $$I = MK^2$$

अर्थात् $$K = \sqrt{\frac{I}{M}} \quad \text{(सूत्र)}$$

§ 2.6 क्षेत्रफल जड़त्व आघूर्ण या द्वितीय आघूर्ण

(Area Moment of Inertia) Or (Second Moment of Area)

परिभाषा (Defination)—"किसी अक्ष के सापेक्ष (परित:) एक क्षेत्रफल का जड़त्व आघूर्ण या द्वितीय आघूर्ण, उसके क्षेत्रफल (A) तथा अक्ष से उसकी दूरी के वर्ग के गुणनफल के बराबर होता है।"

माना सम्पूर्ण क्षेत्रफल A का जड़त्व आघूर्ण उसके समतल में ही दोनों अक्षों $X-X$ तथा $Y-Y$ के परित: ज्ञात करना है। चित्र 2.2 में सम्पूर्ण क्षेत्रफल A में से एक छोटे से क्षेत्रफल 'a' पर विचार करना है। माना छोटे क्षेत्रफल a की $X-X$ तथा $Y-Y$ अक्षों से दूरियाँ चित्र के अनुसार y तथा x है।

Scanned with CamScanner

$$I_{YY} = AK_2^{\,2} \quad \ldots (6)$$

अत: परिभ्रमण त्रिज्या (Radius of Gyration) को क्षेत्रफल के आधार पर निम्न प्रकार परिभाषित कर सकते हैं—

परिभ्रमण त्रिज्या—"किसी घूर्णन अक्ष के परित: किसी क्षेत्र की परिभ्रमण त्रिज्या (K) अक्ष से मापी गई वह दूरी है जिसके वर्ग को, क्षेत्र के सम्पूर्ण क्षेत्रफल (A) से गुणा किया जाये तो गुणनफल, उस अक्ष के परित: क्षेत्रफल आघूर्ण (I या I_{XX} या I_{YY}) के बराबर होता है।"

अर्थात्

$$I = AK^2$$

या

$$\boxed{K = \sqrt{\frac{I}{A}}}$$

सूत्र

§ 2.7 समान्तर अक्ष प्रमेय (Theorem Of Parallel Axis)

परिभाषा—इस प्रमेय के अनुसार, "यदि किसी समतल परिच्छेद के गुरुत्व केन्द्र से जाने वाले अक्ष के परित: (या अक्ष के सापेक्ष) उसके जड़त्व आघूर्ण को I_{XXG} (अथवा I_G) से प्रदर्शित किया जाये तथा इस अक्ष के समान्तर और उससे h दूरी पर रेखा AB के परित: (about AB) जड़त्व आघूर्ण को I_{AB} से प्रदर्शित किया जाये तब,

$$\boxed{I_{AB} = I_{XG} + Ah^2}$$ होता हैं।"

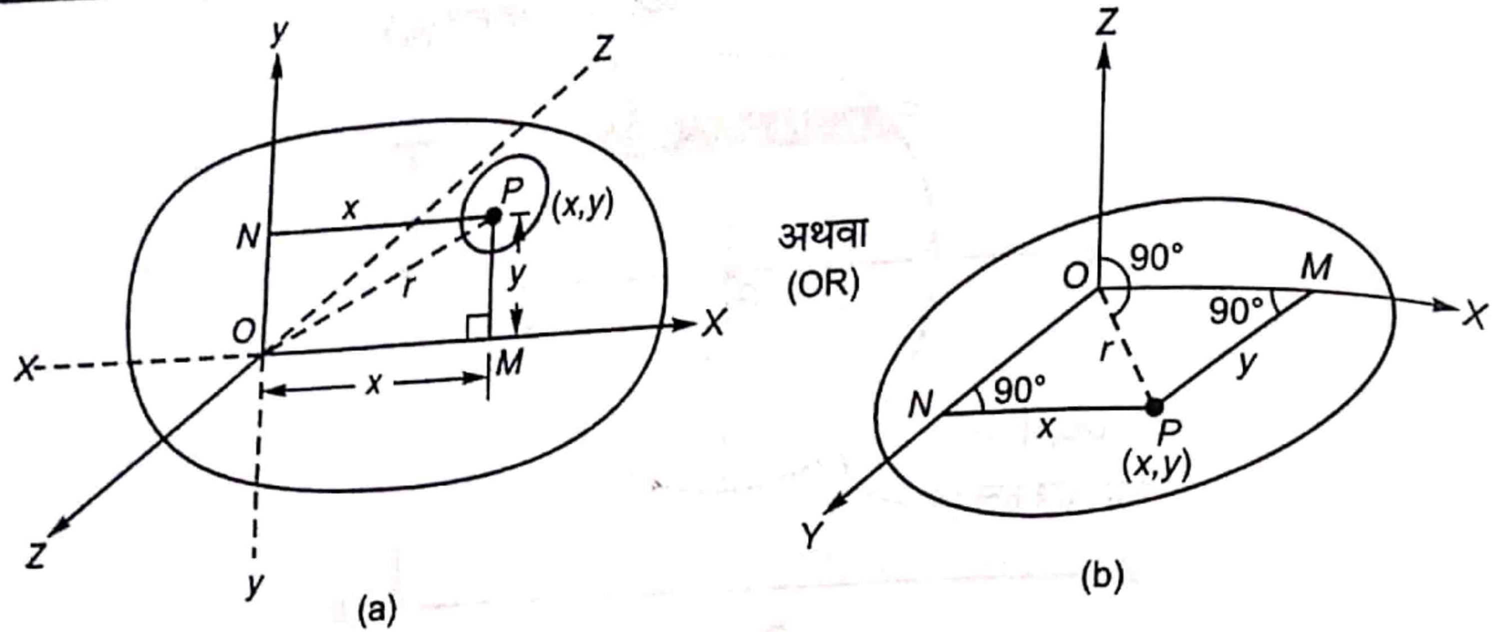
जहाँ A, समतल परिच्छेद का क्षेत्रफल है।

सत्यापन (Proof)—चित्र 2.3 में कोई समतल परिच्छेद दिखाया गया है। जिसका गुरुत्व केन्द्र G तथा क्षेत्रफल A है। हमें $X-X$ अक्ष के समान्तर रेखा AB पर समतल परिच्छेद का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है।

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint



चित्र 2.4

चित्र 2.4 में आपस में लम्ब (90° पर) तीन अक्षों $O-X, O-Y$ तथा $O-Z$ दिखाई गई हैं, जिसमें अक्ष $O-X$ तथा अक्ष $O-Y$ एक ही समतल में आपस में लम्बरूप हैं तथा अक्ष $O-Z$, समतल पर (अथवा $O-X$ तथा $O-Y$ के) लम्बवत् (perpendicular) है।

माना $P(x, y)$ पूरे क्षेत्रफल (area) का एक छोटा सा भाग है जिसका क्षेत्रफल δ_a है। माना कि P की ZOZ अक्ष (या OZ अक्ष) से लम्बवत् दूरी r है

अर्थात् $$OP = r$$

तब $$OP^2 = OM^2 + PM^2$$

या $$r^2 = x^2 + y^2 \quad ...(1)$$

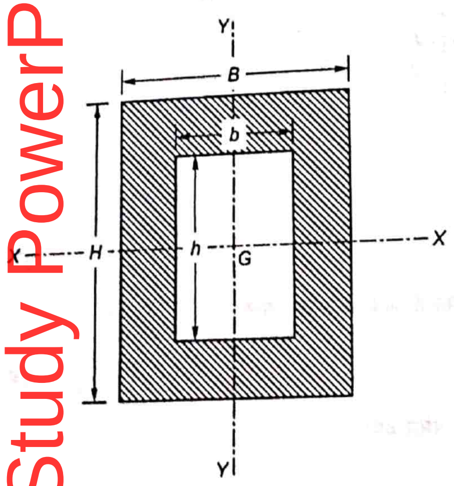
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

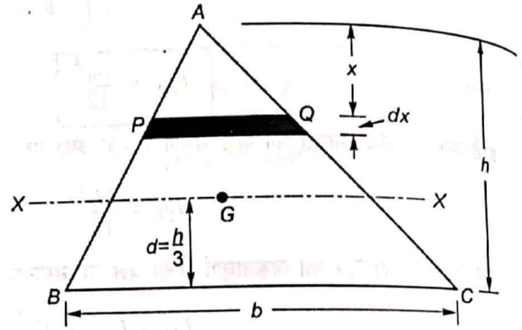
नोट—खोखले आयताकार (Hollow rectangular section) के M.O.I के लिए बाहर के बड़े आयत के जड़त्वाघूर्ण (जड़ताघूर्ण) में से अन्दर वाले छोटे आयत का जड़त्वाघूर्ण (M.O.I) को घटाकर प्राप्त करते हैं।

अर्थात् चित्र 2.6 में दिखाये गये खोखले आयत के लिये,

$$I_{XX} = \left[\frac{BXH^3}{12} - \frac{bXh^3}{12}\right]$$



चित्र 2.6



चित्र 2.7

(2) त्रिभुजाकार काट (Triangular Section)—माना चित्र 2.7 में दिखाई गई त्रिभुजाकार काट ABC का जड़त्व आघूर्ण (या जड़ताघूर्ण) ज्ञात करना है। इसमें b = त्रिभुजाकार काट का आधार तथा h = इस काट की ऊँचाई है। अब त्रिभुज के शीर्ष A से x दूरी पर dx मोटाई की एक पतली पट्टी PQ पर विचार करने पर

ज्यामिति से, समरूप त्रिभुज (similar triangles) APQ तथा ABC में,

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{x}{h}$$

$\therefore$ $$PQ = \frac{x}{h} \times BC = \frac{b \cdot x}{h}$$

$\because$ पट्टी PQ का क्षेत्रफल $= PQ \times dx$

$$= \frac{b \cdot x}{h} dx$$

अब इस पट्टी (strip) के आधार BC के परितः जड़त्व आघूर्ण

$$I_{BC} = \text{क्षेत्रफल} \times (\text{दूरी})^2$$

$\Rightarrow$ $$I_{BC} = \left[\frac{b \cdot x}{h} dx\right] \times (h-x)^2$$

$\because$ मानी गई पट्टी Δ की सम्पूर्ण ऊँचाई (h) में (अर्थात् 0 से h तक) कहीं भी मानी जा सकती हैं। अतः पूरे त्रिभुज का जड़त्व आघूर्ण (M.I) ज्ञात करने के लिये I_{BC} के प्राप्त मान को (0 से h) लिमिट तक समाकलन करने पर प्राप्त होगा। अर्थात्

Scanned with CamScanner

$$I_{BC} = \int_0^h \frac{b \cdot x}{h}(h-x)^2 \cdot dx$$

$$= \frac{b}{h}\int_0^h x\,(h^2 + x^2 - 2h \cdot x)\,dx$$

$$= \frac{b}{h}\left[h^2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - 2h \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \frac{b}{h}\left[\frac{h^4}{2} + \frac{h^4}{4} - \frac{2}{3} \cdot h^4\right] = \frac{bh^3}{12}$$

$\therefore$ $$I_{BC} = \frac{bh^3}{12} \qquad \text{... (I)}$$

हम जानते हैं कि त्रिभुज का गुरुत्व केन्द्र (G), इसके आधार से $\frac{h}{3}$ ऊँचाई पर होता है।

$\therefore$ ΔABC के गुरुत्व केन्द्र ($C, G \Rightarrow G$) से जाने वाली $X-X$ अक्ष पर त्रिभुजाकार काट ABC का जड़त्वाघूर्ण (M.O.I)

$$I_{XXG} = I_{BC} - Ad^2 \qquad [\because I_{XX} = I_G + Ah^2]$$

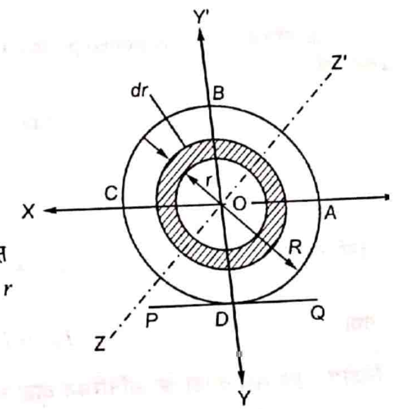
$$= \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{b \times h}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$

$$\boxed{I_{XXG} = \frac{bh^3}{36}} \qquad \text{... (सूत्र)}$$

(3) वृत्ताकार काट का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia of a Circular Section)—चित्र 2.8 में R त्रिज्या का एक वृत्त $ABCD$ है। इसके केन्द्र O से होकर दो लम्ब अक्षों $X-X$ तथा $Y-Y$ खींचते हैं। अब इस वृत्त केन्द्र O से r त्रिज्या (radius) पर बहुत कम मोटाई dr की एक पट्टी (strip) को एक रिंग (ring) रूप में माना।

अतः रिंग का क्षेत्रफल $= 2\pi r \times dr$

केन्द्र O से जाने वाली $Z-Z$ अक्ष, दोनों अक्षों, (X-अक्ष तथा Y-अक्ष अर्थात् रिंग के समतल) पर लम्ब होती है तथा $Z-Z$ अक्ष की रिंग से दूरी r है। अतः $Z-Z$ अक्ष के परितः रिंग का जड़त्व आघूर्ण,



चित्र 2.8

$$I_{ZZ} = \text{क्षेत्रफल} \times (\text{दूरी})^2$$

$$= [2\pi r \times dr] \times (r)^2$$

$$= 2\pi r^3 dr$$

अब ($Z-Z$) अक्ष के परितः पूरे वृत्ताकार काट का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करने के लिये उपरोक्त प्राप्त हुए I_{ZZ} के मान से R तक) सीमा (limit) में समाकलन (integrate) करना होगा। अतः

$$I_{ZZ} = \int_0^R 2\pi r^3\,dr = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$= \frac{\pi}{2}(R^4 - 0) = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi \times (D/2)^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

$\because$ हम जानते है कि, $\quad I_{XX} + I_{YY} = I_{ZZ}$

तथा वृत्त दोनों अक्षों पर सममित (symmetrical) है। अतः वृत्ताकार काट के लिए, $I_{XX} = I_{YY}$ होगा।

$$I_{XX} = I_{YY} = \frac{I_{ZZ}}{2} = \frac{\pi D^4}{32 \times 2}$$

$\therefore$
$$\boxed{I_{XX} = I_{YY} = \frac{\pi D^4}{64}}$$ (सूत्र)

नोट—$I_{PQ} = I_{XX} + A \times (OD)^2 = \frac{\pi D^4}{64} + \left(\frac{\pi D^2}{4}\right) \times \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{5\pi D^4}{64}$ (वृत्त को स्पर्श करती रेखा PQ पर)

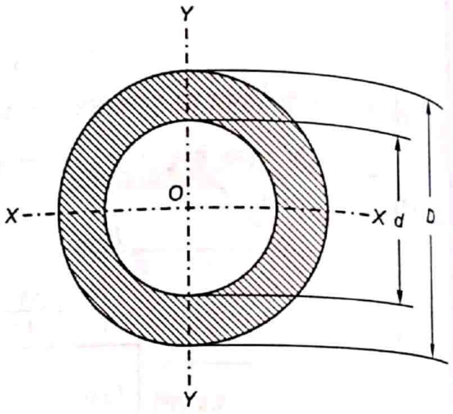
(4) खोखले वृत्ताकार काट का जड़त्व आघूर्ण (M.I of Hollow Circular Section)—चित्र 2.9 में एक खोखली वृत्ताकार काट दिखाई गई है। जिसका बाहरी व्यास (Outer Diameter) $= D$ तथा आन्तरिक व्यास (Inner Diameter) $= d$ है।

अब मुख्य बाहरी वृत्त (Main Outer Circle) का $X - X$ अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण,

$$I_{XX_1} = \frac{\pi D^4}{64}$$

इसी प्रकार अन्दर से काटकर निकाले गये d व्यास के वृत्ता का $X - X$ अक्ष के परितः जड़त्व आघूर्ण,

$$I_{XX_2} = \frac{\pi d^4}{64}$$



चित्र 2.9

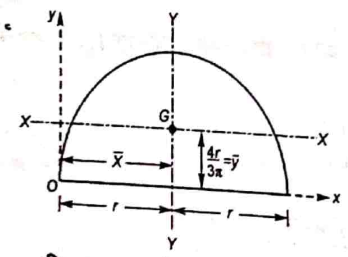
अतः खोखले काट (sectioned portion) का $X - X$ अक्ष पर जड़ताघूर्ण

$$I_{XX} = I_{XX_1} - I_{XX_2}$$
$$= \left(\frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}\right) = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$$ (सूत्र)

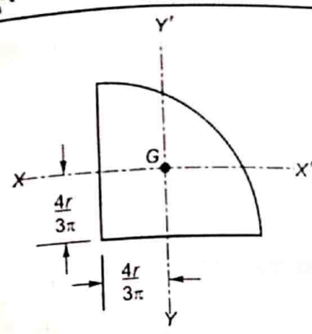
इसी प्रकार $\quad I_{YY} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$ (सूत्र)

तथा $\quad I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$ (सूत्र)

विशेष : इन सब काटों के अतिरिक्त कुछ अन्य काटों के जड़त्व आघूर्ण निम्न चित्रों में प्रदर्शित हैं।

चित्र (Fig.)	गु० के० (G) की स्थिति	जड़त्व आघूर्ण
	$\bar{Y} = \frac{4r}{3\pi}$ $\bar{X} + r$ व्यास $d = 2r$	$I_{XX} = 0.11 r^4$ $I_{YY} = \frac{\pi}{8} r^4$ $I_{YY} = 0.4 r^4$ $I_{OX} = \frac{\pi d^4}{128}$ (on Base)

चित्र 2.10 : अर्द्धवृत्त (Semi Circle)



$\left[\bar{X} = \bar{Y} = \frac{4r}{3\pi}\right]$ $\quad \left[I_{XX} = I_{YY} = 0.055 r^4\right]$

चित्र 2.11 : एक चौथाई वृत्त (Quarter circle)

§ 2.10 आकृति मापाँक (Modules of Section)

किसी काट में, उसके गुरुत्व केन्द्र से जाने वाली अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण (I) तथा अक्ष के काट के किनारे की अधिकतम दूरी (y) के अनुपात (ratio) को उस काट का आकृति मापाँक (modulus of section) कहते हैं, तथा Z द्वारा प्रदर्शित करते हैं। अर्थात्

$$\boxed{Z = \frac{I}{y}}$$ सूत्र, इसकी इकाई (मात्रक-Unit) mm^3 या m^3 प्रयोग की जाती है।

z का मान किसी धरन (beam) की सामर्थ्य (strength) को दर्शाता है।

महत्वपूर्ण उदाहरण
(Important Examples)

उदाहरण 1. किसी धरन (Beam) की काट (section) आयताकार (rectangular) है, यह चित्र 2.12 में दिखाई गई है। इस काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I) निम्न के सापेक्ष ज्ञात कीजिये—

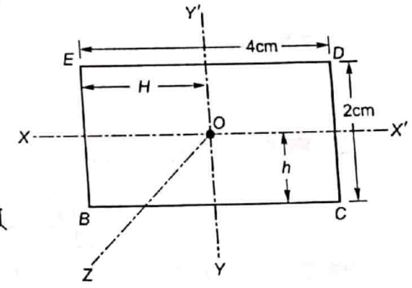
(1) $X - X$ अक्ष पर।

(2) $Y - Y$ अक्ष पर।

(3) केन्द्र से जाने वाली परन्तु काट के तल पर लम्ब अक्ष (अर्थात् OZ-अक्ष) पर।

(4) भुजा BC या भुजा DE के सापेक्ष।

(5) भुजा CD या भुजा BE के सापेक्ष।



चित्र 2.12

हल—$\because$ आयताकार काट में जड़त्वाघूर्ण (जड़ता घूर्ण), $I = \frac{\text{चौड़ाई} \times (\text{गहराई})^3}{12}$ (सूत्र)

(1) $\quad I_{XX} = \frac{4 \times 2^3}{12} = \frac{8}{3} cm^4$ उत्तर $\quad \left[I_{XX} = \frac{bh^3}{12}\right.$ सूत्र द्वारा]

(2) $\quad I_{YY} = \frac{2 \times 4^3}{12} = \frac{128}{12} = \frac{32}{3} cm^4$ उत्तर $\quad \left[I_{YY} = \frac{h \times b^3}{12}\right.$ सूत्र द्वारा]

(3) $\quad I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY}$ (लम्ब अक्ष प्रमेय सूत्र द्वारा)

$\therefore \quad I_{OZ} = \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = 13.33 cm^4$ उत्तर

(4) $\because$ भुजा BC या भुजा DE की काट केन्द्र O से दूरी, $h = \frac{2}{2} = 1$ cm है।

Scanned with CamScanner

StudyPowerPoint

Study PowerPoint

अब $I_{BC} \Rightarrow I_{DE} = I_{XX} + Ah^2$

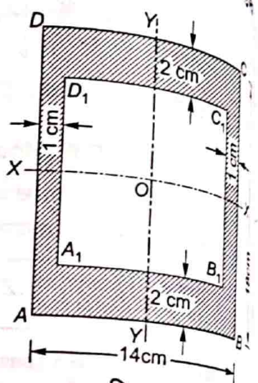
$$= \frac{8}{3} + (4\times2)\times1^2 = \frac{32}{3} = 10\cdot666 \text{ cm}^4$$

(5) $I_{CD} \Rightarrow I_{BE} = I_{YY} + AH^2$

$$= \frac{32}{3} + (4\times2)\times\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 42\cdot66 \text{cm}^4$$

उदाहरण 2. चित्र 2.13 में दिखाई गई खोखली आयताकार काट का जड़ताघूर्ण (M.O.I) X – X तथा Y – Y अक्षों (axes) के परित: ज्ञात कीजिये। **(U.K. 2006)**

हल—बड़ा आयत $ABCD$ तथा छोटा आयत $A_1 B_1 C_1 D_1$ दोनों ही अक्षों $X-X$ तथा $Y-Y$ पर सममित (symmetrical) हैं। अत: बड़े आयत $ABCD$ के $X-X$ तथा $Y-Y$ अक्षों पर जड़ताघूर्ण (M.O.I) ज्ञात करके इनमें से छोटे आयत $A_1 B_1 C_1 D_1$ के उन्हीं अक्षों पर जड़ताघूर्ण को घटाने से हमें खोखले आयत का जड़ताघूर्ण (M.O.I) प्राप्त होगा।



चित्र 2.13

∵ बड़े आयत $ABCD$ का $X-X$ अक्ष पर जड़ताघूर्ण (M.O.I)

$$I_{XX_1} = \frac{bh^3}{12} \quad \text{सूत्र से,}$$

$$= \frac{14\times18^3}{12} = 6804 \text{ cm}^4$$

इसी प्रकार छोटे आयत $A_1 B_1 C_1 D_1$ का $X-X$ अक्ष पर जड़ताघूर्ण (M.O.I)

$$I_{XX_2} = \frac{(14-2)\times(18-4)^3}{12} = \frac{12\times14^3}{12} = 2744 \text{ cm}^4$$

∴ खोखली आयताकार काट का $X-X$ अक्ष पर जड़ताघूर्ण

$$I_{XX} = I_{XX_1} - I_{XX_2} = 6804 - 2744 = 4060 \text{ cm}^4 = \mathbf{4060\times10^4 \ mm^4}$$ उत्तर

इसी प्रकार, $I_{YY_1} = \frac{hb^3}{12}$ (बड़े आयत का $Y-Y$ अक्ष प...)

$$= \frac{18\times14^3}{12} = 4116 \text{cm}^4$$

तथा छोटे आयत का $Y-Y$ अक्ष पर जड़ता घूर्ण (जड़त्व आघूर्ण)

$$I_{YY_2} = \frac{(18-4)\times(14-2)^3}{12} = \frac{14\times12^3}{12} = 2016 \text{ cm}^4$$

∴ खोखले काट (hollow section) का $Y-Y$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण

$$I_{YY} = I_{YY_1} - I_{YY_2} = 4116 - 2016 = 2100 \text{ cm}^4 = \mathbf{2100\times10^4 \ mm^4}$$ उत्तर

उदाहरण 3. चित्र 2.14 में दिखाई गई खोखली आयताकार काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I) X – X तथा Y – Y अक्षों पर ज्ञात करें।

हल—दी गई काट Y-अक्ष पर सममित है, अत: हमें $\bar{Y}$ ज्ञात करना होगा जो खोखली काट के गुरुत्व केन्द्र (G) की स्थिति को बतायेगा और G पर ही $X-X$ अक्ष तथा $Y-Y$ अक्ष प्रतिच्छेद करती हुई जायेंगी।

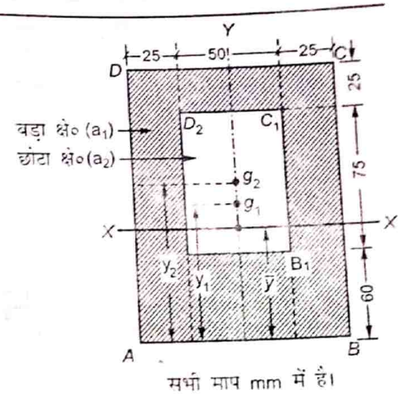
यहाँ बड़े आयत का केन्द्र g_1, क्षेत्रफल a_1 तथा AB से ऊँचाई y_1 है तथा छोटे आयत $A_1B_1C_1D_1$ का केन्द्र g_2 क्षेत्रफल a_2 तथा g_2 की AB से ऊँचाई y_2 है।

अत: $a_1 = 100\times160 = 16000 \text{mm}^2$

तथा $a_2 = 50\times75 = 3750 \text{mm}^2$

$$y_1 = \frac{160}{2} = 800 \text{ mm}$$

तथा $y_2 = 60 + \frac{75}{2} = 97\cdot5 \text{ mm}$



चित्र 2.14

गुरुत्व केन्द्र G की AB से ऊँचाई $\bar{y} = \frac{a_1 y_1 - a_2 y_2}{a_1 - a_2}$ सूत्र से,

$$\bar{y} = \frac{16000\times80 - 3750\times97\cdot5}{16000 - 3750}$$

$$= \frac{914375}{12250} = 74\cdot643 \text{ mm}$$

अब $h_1 = g_1$ व G के बीच दूरी

$$= y_1 - \bar{y} = 80 - 74\cdot64 = 5\cdot36 \text{mm}$$

$h_2 = g_2$ व G के बीच दूरी $= y_2 - \bar{y} = 97\cdot5 - 74\cdot64 = 22\cdot86 \text{mm}$

अत: $X-X$ अक्ष पर खोखले आयताकार काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I)

$$I_{XX} = [I_{X_{g1}} + a_1 h_1^2] - [I_{X_{g2}} + a_2 h_2^2]$$

$$= \left[\frac{100\times160^3}{12} + 16000\times5\cdot36^2\right] - \left[\frac{50\times75^3}{12} + 3750\times22\cdot86^2\right]$$

$$= [34593006\cdot93] - [3717486]$$

∴ $I_{XX} = 30875520\cdot93 \text{ mm}^4$

या $I_{XX} = 3\cdot0875\times10^7 \text{ mm}^4$ उत्तर

अब $Y-Y$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण के लिये $H_1 = 0, H_2 = 0$ होगा।

$$I_{YY} = [I_{Y_{g1}} + a_1 H_1^2] - [I_{Y_{g2}} + a_2 H_2^2]$$

$$= \left[\frac{160\times100^3}{12} + 0\right] - \left[\frac{75\times50^3}{12} + 0\right] = 13333333\cdot33 - 781250$$

$$I_{YY} = 12552083\cdot33 \text{ mm}^4 = 1\cdot25\times10^7 \text{mm}^4$$ उत्तर

उदाहरण 4. चित्र 2.15 (a) में दिखाई गई एक I-काट का I_{XX}, I_{YY} तथा आकृति मापांक (Modulus of Section) ज्ञात कीजिये। **(यू०के० 2014, S)**

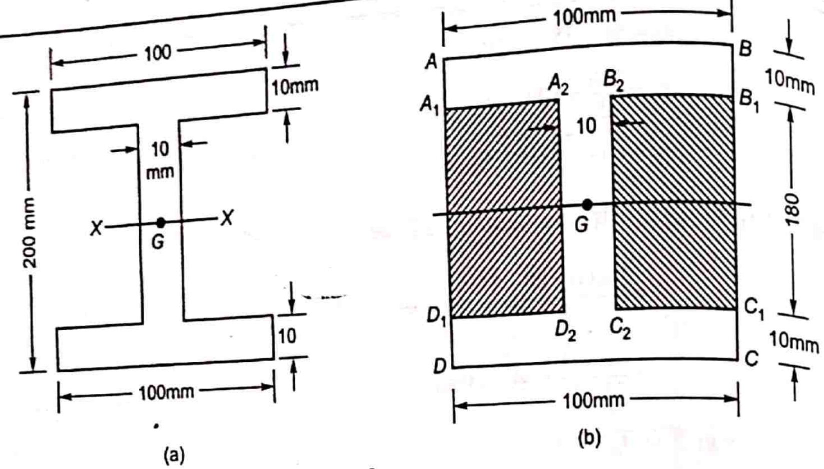
हल—चित्र 2.15 (b) देखें—

∵ दी गई I-काट (I-section), x-अक्ष (x-Axis) तथा y-अक्ष (y-Axis) दोनों के सममित (Symmetrical) है, इसलिये हमें गुरुत्व केन्द्र (C.G.) के लिये $\bar{X}$ या $\bar{Y}$ ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं है। क्योंकि गुरुत्व केन्द्र (G) कुल चौड़ाई (100 mm) तथा कुल गहराई (200 mm) के मध्य (middle) में होगा।

जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) ज्ञात करने के लिए बड़े आयत $ABCD$ के जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) में से अन्दर सिरों पर बने हैचिंग रेखाओं वाले आयतों (Rectangles) $A_1A_2D_2D_1$ तथा आयत $B_2B_1C_1C_2$ के जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.) को घटाकर प्राप्त करते हैं। जैसा कि नीचे गणना की गई हैं—

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint



चित्र 2.15

$$\bar{I}_{XX} = \left[\frac{100\times 200^3}{12} - \frac{90\times 180^3}{12}\right]$$

$$= 66666666{\cdot}67 - 43740000$$

$$= 22926666{\cdot}67 \text{ mm}^4$$

$$= 22{\cdot}92\times 10^6 \text{ mm}^4$$ उत्तर

अब $$I_{YY} = \frac{10\times 100^3}{12} + \frac{180\times 10^3}{12} + \frac{10\times 100^3}{12}$$

$$= 1681666{\cdot}667 \text{ mm}^4$$

$$= 1{\cdot}68\times 10^6 \text{ mm}^4$$ उत्तर

आकृति मापांक (Modulus of Section)

$Z = \frac{I_{XX}}{y}$ सूत्र से (जहाँ $y = \frac{\text{काट की गहराई}}{2} = \frac{200}{2} = 100$)

$$= \frac{22{\cdot}92\times 10^6}{100} = 22{\cdot}92\times 10^4 \text{ mm}^3$$ उत्तर

उदाहरण 5. चित्र 2.16 (a) में दिखाई गई I-काट (I-Section) का x-अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I. at x-axis) I_{XX} तथा y-अक्ष (y-axis) पर जड़त्व आघूर्ण (I_{YY}) ज्ञात कीजिये।

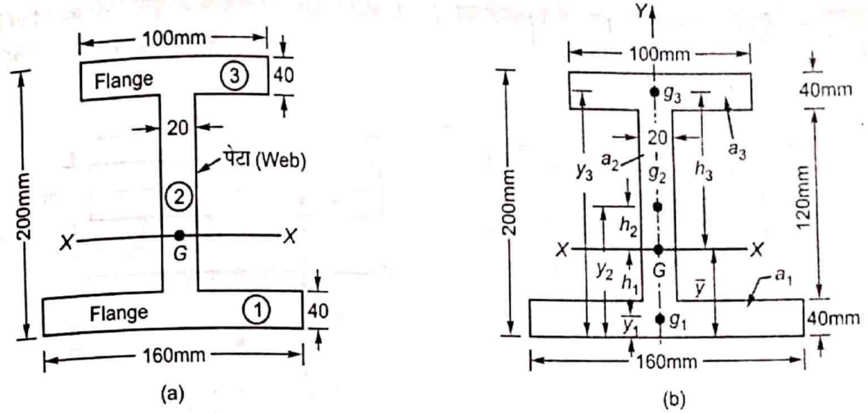
हल—चित्र 2.16 (b) में I-काट के तीनों आयताकार भागों के गुरुत्व केन्द्र (C.G.) क्रमशः g_1, g_2 तथा g_3 को प्रदर्शित कर, सबसे नीचे की रेखा से इनकी ऊँचाइयों को क्रमशः y_1, y_2 तथा y_3 को ज्ञात करते हैं तथा संयुक्त काट का गुरुत्व केन्द्र (C.G.) 'G' के लिये $\bar{y}$ ज्ञात करते हैं,

माना इनके क्षेत्रफल क्रमशः a_1, a_2 तथा a_3 हैं।

∴ (1) आयत (Rectangle) का क्षेत्रफल (area), $a_1 = 160\times 40 = 6400 \text{ mm}^2$

इसके गुरुत्व केन्द्र g_1 की ऊँचाई $(y_1) = \frac{40}{2} = 20$ mm

(2) आयत का क्षेत्रफल (area), $a_2 = 20\times 120 = 2400 \text{ mm}^2$



चित्र 2.16

इसके गुरुत्व केन्द्र g_2 की ऊँचाई $(y_2) = 40 + \frac{120}{2} = 100$ mm

(3) आयत (Rectangle) का क्षेत्रफल (area), $a_3 = 100\times 40 = 4000 \text{ mm}^2$

अब केन्द्र (g_3) की ऊँचाई $y_3 = 200 - 20 = 180$ mm

∴ $\bar{y} = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3}{a_1 + a_2 + a_3}$ सूत्र से

$$\bar{y} = \frac{(6400\times 20) + (2400\times 100) + (4000\times 180)}{6400 + 2400 + 400}$$

$$= 85 \text{ mm}$$

∴ चित्र 2.16 (b) के अनुसार $h_1 = \bar{y} - y_1 = 85 - 20 = 65$ mm

इसी प्रकार $h_2 = g_2$ तथा G के बीच दूरी (Gap) $= y_2 - \bar{y} = 100 - 85 = 15$ mm

तथा $h_3 = g_3$ और G के बीच दूरी (Gap) $= y_3 - \bar{y} = 180 - 85 = 95$ mm

अतः $I_{xx} = [I_{xg_1} + a_1h_1^2] + [I_{xg_2} + a_2h_2^2] + [I_{xg_3} + a_3h_3^2]$ सूत्र से

$$= \left[\frac{160\times 40^3}{12} + (6400\times 65^2)\right] + \left[\frac{20\times 120^3}{12} + (2400\times 15^2)\right] + \left[\frac{100\times 40^3}{12} + (4000\times 95^2)\right]$$

$$= 67946666{\cdot}67 \text{ mm}^4$$ उत्तर

अब $I_{yy} = I_{yg_1} + I_{yg_2} + I_{yg_3}$ सूत्र से

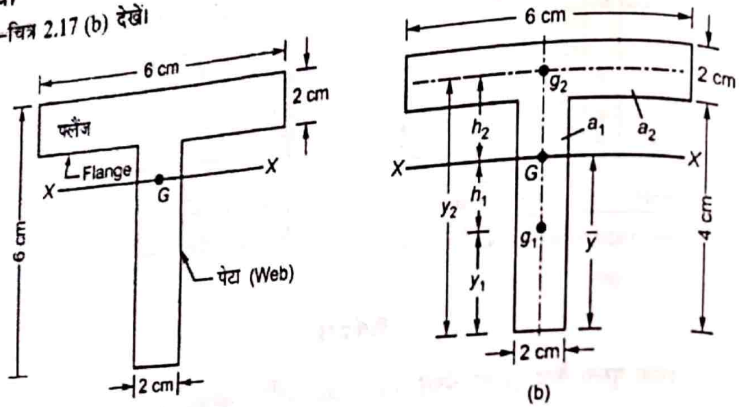
$$= \left[\frac{40\times 160^3}{12} + \frac{120\times 20^3}{12} + \frac{40\times 100^3}{12}\right]$$

$$= 17066666{\cdot}67 \text{ mm}^4$$ उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 6. चित्र 2.17 (a) में दिखाई गई T-काट का $X-X$ अक्ष (axis) पर जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) ज्ञात कीजिये। (यू०के० 2009 W; 12 S; 13 W)

हल—चित्र 2.17 (b) देखें।



चित्र 2.17

Web तथा Flange के आयत (Rectangle) के केन्द्र (centre) क्रमशः g_1 तथा g_2 की ऊचाईयाँ y_1 तथा y_2 (सबसे नीचे की रेखा से) हैं। इनके क्षेत्रफल (areas) a_2 तथा a_2 है।

∴ वैब (Web) का क्षेत्रफल (area), $a_1 = 2 \times 4 = 8\,cm^2$

तथा फ्लैंज (Flange) का क्षेत्रफल $a_2 = 6 \times 2 = 12\,cm^2$

अब नीचे के किनारे से g_1 की ऊँचाई $y_1 = \frac{4}{2} = 2\,cm$

तथा नीचे के किनारे से g_2 की ऊँचाई $y_2 = 4 + 1 = 5\,cm$

∴ $\bar{y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2}$ सूत्र से [∵ y-axis के symmetrical]

$$y = \frac{8\times 2 + 12 \times 5}{8+12} = \frac{16+60}{20} = \frac{76}{20} = 3\cdot 8\,cm$$

$= 38$ mm

अब g_1 व G के बीच दूरी (Gap), $h_1 = \bar{y} - y_1$

$= 3\cdot 8 - 2 = 1\cdot 8\,cm$

तथा g_2 व G के बीच दूरी (Gap), $h_2 = y_2 - \bar{y}$

$= 5 - 3\cdot 8 = 1\cdot 2\,cm$

∴ $(X-X)$ axis पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I. at $X-X$ axis)

$$I_{xx} = [I_{xg_1} + a_1 h_1^2] + [I_{xg_2} + a_2 h_2^2]$$

$$= \left[\frac{2\times 4^3}{12} + 8 \times 1\cdot 8^2\right] + \left[\frac{6 \times 2^3}{12} + 12 \times 1\cdot 2^2\right]$$

$= 57\cdot 8666\,cm^4 = 578666\cdot 66\,mm^4 = 5\cdot 78 \times 10^5\,mm^4$ उत्तर

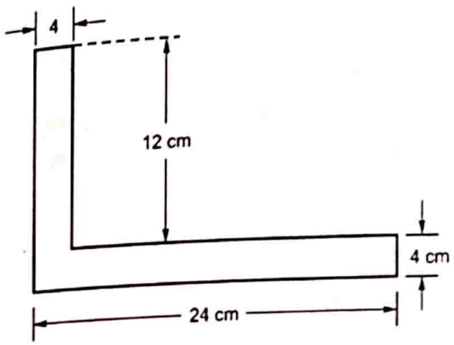
नोट—यदि हमें y-axix पर भी जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) अर्थात् I_{YY} ज्ञात करना हो तो निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं—

$I_{yy} = I_{yg1} + I_{yg2}$ सूत्र से

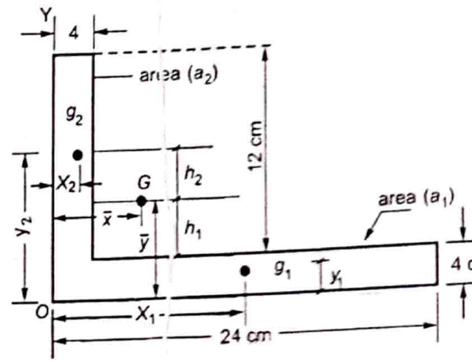
$$I_{yy} = \frac{4\times 2^3}{12} + \frac{2 \times 6^3}{12} = 38\cdot 66666\,cm^4$$

$= 38\cdot 66 \times 10^4\,mm^4$ उत्तर

उदाहरण 7. चित्र 2.18 (a) में दिखाई गई काट (section) का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिये। (U.K. 2012 W)



चित्र 2.18 (a)



चित्र 2.18 (b)

हल—केन्द्र g_1 वाले आयत (Rectangle) का क्षेत्रफल $(a_1) = 24 \times 4 = 96\,cm^2$

केन्द्र g_2 वाले आयत (Rectangle) का क्षेत्रफल $(a_2) = 12 \times 4 = 48\,cm^2$

यदि बिन्दु O से जाने वाली x-axis से g_1 तथा g_2 की दूरियाँ क्रमशः y_1 व y_2 है।

तब $y_1 = \frac{4}{2} = 2\,cm$ तथा $y_2 = 4 + \frac{12}{2} = 4 + 6 = 10\,cm$

इसी प्रकार y-axis से g_1 व g_2 की दूरियाँ क्रमशः x_1 तथा x_2 हैं।

तब $x_1 = \frac{24}{2} = 12\,cm$ तथा $x_2 = \frac{4}{2} = 2\,cm$ होगा।

∵ दी गई काट न तो x-axis के और न ही y-axis के सममित (symmetrical) है, अतः $\bar{X}$ तथा $\bar{Y}$ दोनों ज्ञात करने होंगे।

∴ $$\bar{X} = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{a_1 + a_2} = \frac{(96\times 12) + (48 \times 2)}{(96+48)} = \frac{1248}{144} = 8\cdot 6666\,cm$$

$= 86\cdot 67$ mm

$$\bar{Y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2} = \frac{(96 \times 2) + (48 \times 10)}{(96+48)} = \frac{672}{144} = 4\cdot 6666\,cm$$

$= 46\cdot 67$ mm

अब g_1 व G के बीच उर्ध्वाधर (vertical) दूरी h_1 है और g_2 व G के बीच उर्ध्वाधर (vertical) दूरी h_2 तब

$h_1 = \bar{y} - y_1 = 4\cdot 67 - 2 = 2\cdot 67\,cm$

$h_2 = y_2 - \bar{y} = 10 - 4\cdot 67 = 5\cdot 33\,cm$

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

$$\therefore \quad I_{xx} = [I_{xg_1} + a_1h_1^2] + [I_{xg_2} + a_2h_2^2]$$

$$= \left[\frac{24\times4^3}{12} + 96\times2{\cdot}67^2\right] + \left[\frac{4\times12^3}{12} + 48\times5{\cdot}33^2\right]$$

$$= 2752{\cdot}0016 = 2752\,\text{cm}^4$$

$$= 2752\times10^4\,\text{mm}^4$$

अब g_1 व G के बीच क्षैतिज (Horizontal) दूरी H_1 है और,
g_2 व G के बीच क्षैतिज (Horizontal) दूरी H_2 है तब

$$H_1 = x_1 - \bar{x} = 12 - 8{\cdot}67 = 3{\cdot}33\,\text{cm}$$

$$H_2 = \bar{x} - x_2 = 8{\cdot}67 - 2 = 6{\cdot}67\,\text{cm}$$

$\therefore \quad I_{yy} = [I_{yg_1} + a_1H_1^2] + [I_{yg_2} + a_2H_2^2]$ सूत्र से

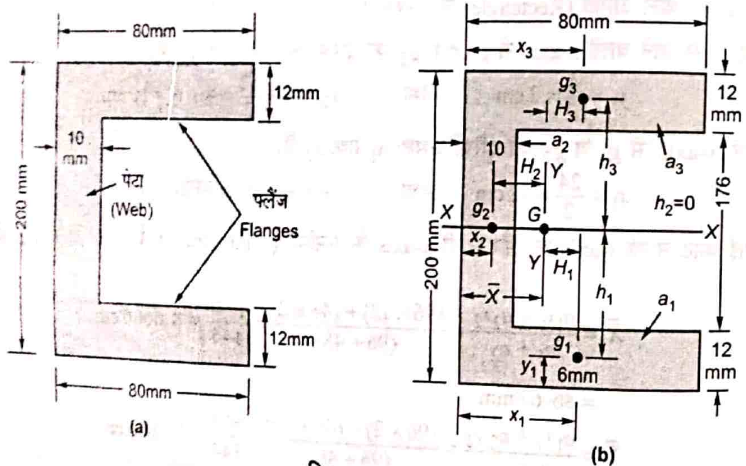
$$= \left[\frac{4\times24^3}{12} + 96\times3{\cdot}33^2\right] + \left[\frac{12\times4^3}{12} + 48\times6{\cdot}67^2\right]$$

$$= 7872{\cdot}0016\,\text{cm}^4 \Rightarrow 7872\,\text{cm}^4$$

$$= 7872\times10^4\,\text{mm}^4 \Rightarrow 78{\cdot}72\times10^6\,\text{mm}^4$$

उत्तर

उदाहरण 8. चित्र 2.19 (a) में दिखाये गए C-काट (चैनल सैक्शनों) का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) x-अक्ष तथा y-अक्ष पर ज्ञात करो। (Find I_{XX} & I_{YY} of given channel section in Fig. 2.19) **(यू०के० 2014, S)**



चित्र 2.19

हल—चित्र 2.19 (b) देखें।

चित्र में दी गई C-काट, x-axis के समस्ति (symmetrical) है अतः गुरुत्व केन्द्र (C.G.) की स्थिति के लिए केवल $\bar{X}$ ज्ञात करेंगे।

$$\therefore \quad \bar{X} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3}{a_1 + a_2 + a_3} \text{ से C.G. की स्थिति ज्ञात होगी।}$$

यहाँ $\quad x_1 = \frac{80}{2} = 40\,\text{mm} = x_3$ तथा $\quad x_2 = \frac{10}{2} = 5\,\text{mm}$

तथा $\quad a_1 = a_3 = 80\times12 = 960\,\text{mm}^2$

$$a_2 = 10\times176 = 1760\,\text{mm}^2$$

$$\therefore \quad \bar{X} = \frac{(960\times40)+(1760\times5)+(960\times40)}{960+1760+960} = \frac{85600}{3680}$$

$$\bar{X} = 23{\cdot}26\,\text{mm}$$

I_{XX} ज्ञात करने के लिए g_1 व G के बीच उर्ध्वाधर (Vertical) दूरी

$h_1 = 100 - 6 = 94$ mm, $h_2 = 0$ (g_2 व G के बीच Vertically गैप)

तथा g_3 व G के बीच ऊर्ध्वाधर दूरी (Vertical Gap) $h_3 = h_1 = 100 - 6 = 94$ mm

अब $\quad I_{xx} = [I_{xg_1} + a_1h_1^2] + [I_{xg_2} + a_2h_2^2] + [I_{xg_3} + a_3h_3^2]$ सूत्र से

$$= \left[\frac{80\times12^3}{12} + 960\times94^2\right] + \left[\frac{10\times176^3}{12} + 0\right] + \left[\frac{80\times12^3}{12} + 960\times94^2\right]$$

$$= [8494080]\times2 + [4543146{\cdot}667]$$

$$= 21531306{\cdot}67\,\text{mm}^4$$

उत्तर

I_{YY} ज्ञात करने के लिए g_1 व G के बीच क्षैतिज दूरी (Horizontal Gap) H_1 तथा g_2 व G के बीच क्षैतिज दूरी H_2 और g_3 व G के बीच क्षैतिज दूरी (Horizontal Gap) H_3 हैं, को ज्ञात करना होगा।

$$\therefore \quad H_1 = X_1 - \bar{X}$$

$$= 40 - 23{\cdot}26 = 16{\cdot}74\,\text{cm}$$

$$H_2 = \bar{X} - X_2$$

$$= 23{\cdot}26 - 5 = 18{\cdot}26\,\text{cm}$$

$$H_3 = X_3 - \bar{X}$$

$$= 40 - 23{\cdot}26 = 16{\cdot}74\,\text{cm}$$

$\therefore \quad I_{yy} = [I_{yg_1} + a_1H_1^2] + [I_{yg_2} + a_2H_2^2] + [I_{yg_3} + a_3H_3^2]$ सूत्र से

$$= \left[\frac{12\times80^3}{12} + 960\times16{\cdot}74^2\right] + \left[\frac{176\times10^3}{12} + 1760\times18{\cdot}26^2\right] + \left[\frac{12\times80^3}{12} + 960\times16{\cdot}74^2\right]$$

$$= (781018{\cdot}496) + (14666{\cdot}6667) + (781018{\cdot}496)$$

$$= 1576703{\cdot}659\,\text{mm}^4$$

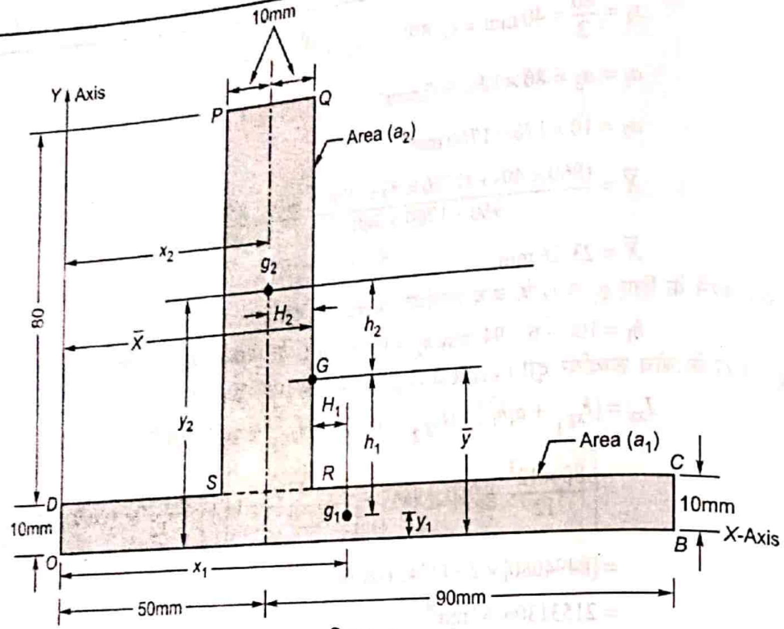
उत्तर

उदाहरण 2. चित्र 2.20 में दो L-काट (Angle Section) का संयोजन (combination) दिखया गया है। संयोजन का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) I_{XX} तथा I_{YY} के मान उसके केन्द्रक (centroid) के परितः ज्ञात कीजिये।

हल—चित्र 2.20 के अनुसार इस काट को दो भागों में विभाजित (divide) किया (जैसे आयत (Rectangle) $OBCD$ तथा आयत $PQRS$)

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint



चित्र 2.20

इन दोनों आयतों के केन्द्रक (centroid) क्रमशः g_1 तथा g_2 हैं और इनकी y-axis तथा x-axis से दूरियाँ क्रमशः x_1 व x_2 तथा y_1 व y_2 हैं।

$$x_1 = \frac{50+90}{2} = \frac{140}{2} = 70\,\text{mm} \quad \text{तथा } x_2 = 50\,\text{mm}$$

$$y_1 = \frac{10}{2} = 5\,\text{mm} \qquad \text{तथा } y_2 = 10 + \frac{80}{2} = 50\,\text{mm}$$

आयत (Rectangle) $OBCD$ का क्षेत्रफल (area) $a_1 = 140 \times 10 = 1400\,\text{mm}^2$

आयत (Rectangle) $PQRS$ का क्षेत्रफल (area) $a_2 = 20 \times 80 = 1600\,\text{mm}^2$

∵ यह संयुक्त काट (Combined Section) x-axis और y-axis में से किसी के भी सममित (symmetrical) नहीं हैं, अतः हमें $\bar{X}$ तथा $\bar{Y}$ दोनों ही ज्ञात करने होंगे।

∴ $$\bar{X} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2}{a_1 + a_2} = \frac{(1400 \times 70) + (1600 \times 50)}{(1400 + 1600)} = 59.33\,\text{mm}$$

तथा $$\bar{Y} = \frac{a_1y_1 + a_2y_2}{a_1 + a_2} = \frac{(1400 \times 5) + (1600 \times 50)}{(1400 + 1600)} = 29\,\text{mm}$$

अब g_1 व G की अक्षों (axes) के बीच दूरी (Gap) h_1 तथा H_1 हैं और g_2 व G की अक्षों (axes) के बीच दूसरी (Gap) h_2 तथा H_2 हैं।

∴ $$h_1 = \bar{y} - y_1 \text{ (चित्र से)}$$

$$= 29 - 5 = 24\,\text{mm}$$

$$H_1 = x_1 - \bar{x} \text{ (चित्र से)}$$

$$= 70 - 59.33 = 10.67\,\text{mm}$$

इसी प्रकार $$h_2 = y_2 - \bar{y} \text{(चित्र से)}$$

$$= 50 - 29 = 21\,\text{mm}$$

$$H_2 = \bar{x} - x_2 \text{ (चित्र से)}$$

$$= 59.33 - 50 = 9.33\,\text{mm}$$

अब $$I_{XX} = [I_{xg_1} + a_1h_1^2] + [I_{xg_2} + a_2h_2^2] \quad \text{(समान्तर अक्ष प्रमेय सूत्र से)}$$

$$= \left[\frac{140 \times 10^3}{12} + 1400 \times 24^2\right] + \left[\frac{20 \times 80^3}{12} + 1600 \times 21^2\right]$$

$$= 818066.6667 + 1558933.333$$

∴ $$I_{XX} = 2377000\,\text{mm}^4$$ उत्तर

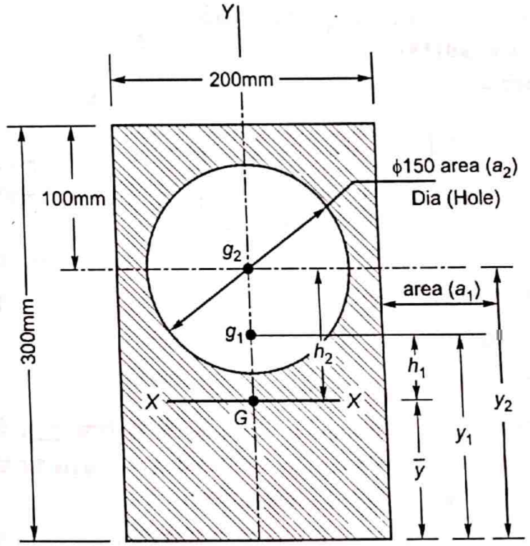
इसी प्रकार $$I_{YY} = [I_{yg_1} + a_1H_1^2] + [I_{yg_2} + a_2H_2^2] \quad \text{(समान्तर अक्ष प्रमेय सूत्र से)}$$

$$= \left[\frac{10 \times 140^3}{12} + 1400 \times 10.67^2\right] + \left[\frac{80 \times 20^3}{12} + 1600 \times 9.33^2\right]$$

$$= 2446055.127 + 192611.5733$$

$$= 2638666.7\,\text{mm}^4$$ उत्तर

उदाहरण 10. चित्र 2.21 में दिखाई गई छिद्र वाली काट (Hollow-section) का केन्द्रक (centroid) (G) ज्ञात कर इससे जाने वाली ($X - X$) axis पर जड़ताघूर्ण (M.O.I.) अर्थात् I_{XX} ज्ञात कीजिये।



चित्र 2.21

हल—(देखें चित्र 2.21) आयताकार भाग (Rectangular Part) का केन्द्रक (centroid) g_1, क्षेत्रफल (area) a_1 तथा नीचे के सिरे से ऊँचाई y_1 है। छिद्र (Hole) का केन्द्र g_2, क्षेत्रफल (a_2) तथा नीचे के सिरे से ऊँचाई y_2 है। आयताकर भाग से छिद्र (Hole) काटने के बाद शेष बचे भाग का गुरुत्व केन्द्र (C.G.) "G" है। इसी बिन्दु G से ($X - X$) अक्ष खींची जायेगी।

Scanned with CamScanner

आयत का क्षेत्रफल (area), $a_1 = 300 \times 200 = 60000 \text{ mm}^2$

काटे गये छिद्र का क्षेत्रफल (area) $a_2 = \frac{\pi (150)^2}{4} = 17662 \cdot 5 \text{ mm}^2$

g_1 की ऊँचाई $y_1 = \frac{300}{2} = 150 \text{ mm}$

g_2 की ऊँचाई $y_2 = (300 - 100) = 200 \text{ mm}$

केन्द्र G की ऊँचाई $\bar{y} = \frac{a_1 y_1 - a_2 y_2}{a_1 - a_2}$ सूत्र से (यहाँ काटे गये भाग के लिये (–ve) लेते हैं।)

$\therefore \quad \bar{y} = \frac{6000 \times 150 - 17662 \cdot 5 \times 200}{(60000 - 17662 \cdot 5)} = 129 \cdot 14$

$\therefore$

अब G से जाने वाली $(X-X)$ axis से g_1 की दूरी $(h_1) = y_1 - \bar{y} = 20 \cdot 86 \text{ mm}$

तथा G से जाने वाली $(X-X)$ अक्ष से g_2 की दूरी $(h_2) = y_2 - \bar{y} = 70 \cdot 86 \text{ mm}$

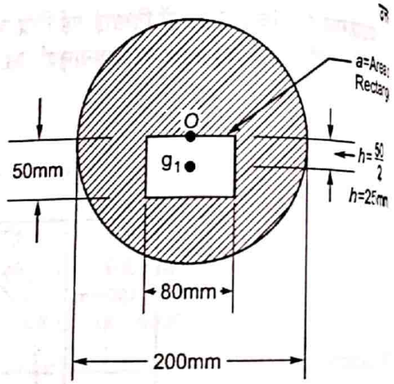
$I_{XX} = [I_{xg_1} + a_1 h_1^2] + [I_{xg_2} + a_2 h_2^2]$ सूत्र द्वारा

$$= \left[\frac{200 \times 300^3}{12} + 60000 \times 20 \cdot 86^2\right] + \left[\frac{\pi (150)^4}{64} + 17662 \cdot 5 \times 70 \cdot 86^2\right]$$

$= (476108376) + (113523768 \cdot 8) = 362584607 \cdot 2$

$= 362 \cdot 585 \times 10^6 \text{ mm}^4$

उदाहरण 11. चित्र 2.22 में दिखाई गई छाया दार (shaded) काट को वृत्त (circle) के केन्द्र O से जाने वाली क्षैतिज अक्ष (Horizontal axis) पर जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.), I_{XX} ज्ञात कीजिये। (U.K. B.T.E. 2011S)



चित्र 2.22

हल—चित्र 2.22 में देखिये—

$$I_{XX} = \frac{\pi D^4}{64} - [I_{xg_1} + ah^2]$$

$$= \frac{\pi (200)^4}{64} - \left[\frac{80 \times 50^3}{12} + (80 \times 50) \times 25^2\right]$$

$= (78500000) - (3333333 \cdot 33)$

$= 75166666 \cdot 67 \text{ mm}^4$

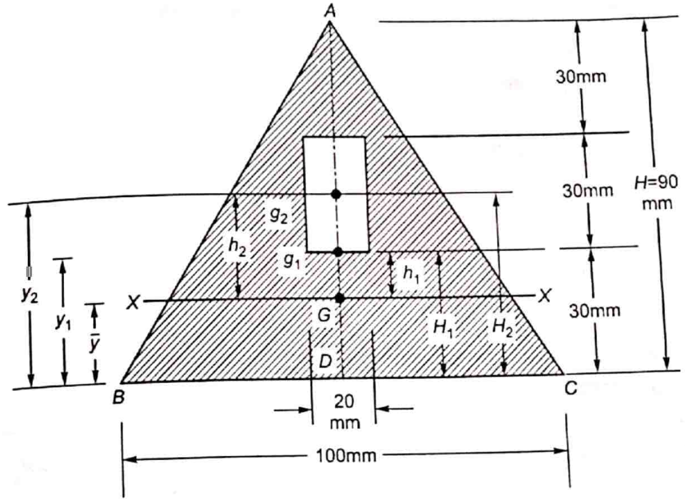
$= 75 \cdot 1667 \times 10^6 \text{ mm}^4$

उदाहरण 12. एक त्रिभुजाकार काट (Triangular Section) में से चित्र 2.23 के अनुसार आयताकार छिद्र (Rectangular Hole) किया गया है। गुरुत्व केन्द्र (C.G.) जाने वाली $X-X$ axis पर जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) तथा आधार BC पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) ज्ञात कीजिये।

हल—चित्र 2.23 में दी गई काट (section) $Y-Y$ axis पर सममित (symmetrical) है। अत: गुरुत्व केन्द्र (C.G.) y-axis पर होगा। जिसके लिये $\bar{y}$ ज्ञात करना होगा।

$\because \ \Delta ABC$ का गुरुत्व केन्द्र (C.G.) g_1, क्षेत्रफल (area) a_1 तथा BC से ऊँचाई y_1 है तथा आयत (Rectangle) का गुरुत्व केन्द्र g_2, क्षेत्रफल a_2 तथा BC से ऊँचाई y_2 है।

$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔABC), $\quad a_1 = \frac{\text{आधार} \times \text{ऊँचाई}}{2}$ सूत्र से



चित्र 2.23

$$a_1 = \frac{100 \times 90}{2} = 4500 \text{ mm}^2$$

आयत (Rectangle) का क्षेत्रफल $a_2 = 20 \times 30 = 600 \text{ mm}^2$

आधार BC से g_1 की ऊँचाई $y_1 = \frac{1}{3} \times H = \frac{1}{3} \times 90 = 30 \text{ mm}$

तथा आधार BC से g_2 की ऊँचाई $y_2 = 30 + \frac{30}{2} = 30 + 15 = 45 \text{ mm}$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{a_1 y_1 - a_2 y_2}{a_1 - a_2} = \frac{4500 \times 30 - 600 \times 45}{4500 - 600}$$

$= \frac{1080}{39} = 27 \cdot 69 \, mm \Rightarrow 27 \cdot 7 \text{ mm}$

अब G से जाने वाली $X-X$ अक्ष से g_1 व g_2 ऊर्ध्वाधर दूरियाँ क्रमश:

$h_1 = y_1 - \bar{y}$ तथा $h_2 = y_2 - \bar{y}$

$\therefore \quad h_1 = 30 - 27 \cdot 7$ तथा $h_2 = 45 - 27 \cdot 7$

$= 2 \cdot 3 \text{ mm}$ तथा $= 17 \cdot 3 \text{ mm}$

$\therefore \quad I_{XX} = [I_{xg_1} + a_1 h_1^2] - [I_{xg_2} + a_2 h_2^2]$

$$= \left[\frac{100 \times 90^3}{36} + 4500 \times 2 \cdot 3^2\right] - \left[\frac{20 \times 30^3}{12} + 600 \times 17 \cdot 3^2\right]$$

$= (2048805) - (224574) = 1824231 \text{ mm}^4$

$= 182 \cdot 42 \times 10^4 \text{ mm}^4$ उत्तर

$\because \ \Delta ABC$ के आधार BC पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) $= \frac{b \times H^3}{12}$ सूत्र है।

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

$\therefore$ Δ के गुरुत्व केन्द्र (g_1) की BC से दूरी $H_1 = 30\,mm$ (चित्र से)

तथा आयत (Rectangle) के केन्द्र (g_2) की BC से दूरी $H_2 = y_2 = 45\,mm$

$$\therefore \quad I_{BC} = [I_{xg1}^{tri\ at\ BC}] - [I_{xg2}^{Rect} + a_2 H_2^2]$$

$$= \left[\frac{100 \times 90^3}{12}\right] - \left[\frac{20 \times 30^3}{12} + 600 \times 45^2\right]$$

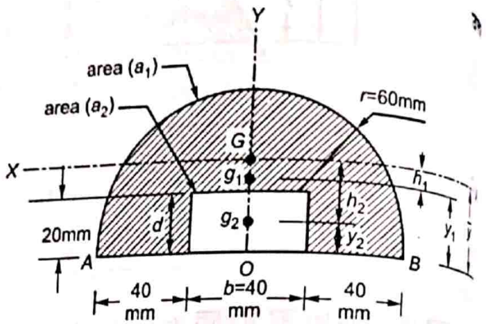
$$= [6075000] - [1260000]$$

$$= 4815000\ mm^4$$

$$= 481 \cdot 5 \times 10^4\ mm^4$$

उदाहरण 13. चित्र 2.24 में एक धरन की काट (cross-section of Beam) दिखाई गई है। इसके गुरुत्व केन्द्र (C.G.) से जाने वाली $X-X$ अक्ष (axis) पर जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) ज्ञात कीजिये।

हल—चित्र 2.24 में दी गई काट $Y-Y$ अक्ष (axis) के सममित (symmetrical) है, अतः $\bar{y}$ ज्ञात करना होगा। अब अर्द्धवृत्त (semicircle) का केन्द्र g_1, क्षेत्रफल (a_1) तथा $Og_1 = y_1$ है। तथा आयत (Rectangle) का केन्द्र g_2, $Og_2 = y_2$ है। शेष बचे भाग का क्षेत्रफल (area) a_2 तथा $Og_2 = y_2$ है। शेष बचे भाग का गुरुत्व केन्द्र (C.G.) G है जिसकी O से दूरी $OG = \bar{y}$ है।



चित्र 2.24

$\therefore$ अर्द्धवृत्त (Semicircle) के लिए, $a_1 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi (60)^2}{2} = 5652\ mm^2$

$$Og_1 = y_1 = \frac{4r}{3\pi} \text{ सूत्र से}$$

$$\therefore \quad y_1 = \frac{4 \times 60}{3 \times 3 \cdot 14} = 25 \cdot 4777 = 25 \cdot 5\,mm$$

आयत (Rectangle) का क्षेत्रफल (area), $a_2 = 40 \times 20 = 800\ mm^2$

तथा $\quad Og_2 = y_2 = \frac{20}{2} = 10\,mm$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{a_1 y_1 - a_2 y_2}{a_1 - a_2} = \frac{5652 \times 25 \cdot 5 - 800 \times 10}{5652 - 800}$$

$$= \frac{136126}{4852} = 28\,mm$$

$$h_1 = g_1 G = \bar{y} - y_1 = 28 - 25 \cdot 5 = 2 \cdot 5$$

$$h_2 = g_2 G = \bar{y} - y_2 = 28 - 10 = 18\,mm$$

$$\therefore \quad I_{XXG} = [I_{xg1}^{S.circle} + a_1 h_1^2] - [I_{xg2}^{Rect} + a_2 h_2^2]$$

$$= [0 \cdot 11 r^4 + a_1 h_1^2] - \left[\frac{bd^3}{12} + a_2 h_2^2\right]$$

$$= [0 \cdot 11 \times 60^4 + 5652 \times 2 \cdot 5^2] - \left[\frac{40 \times 20^3}{12} + 800 \times 18^2\right]$$

$$= (1460925) - (285866 \cdot 66)$$

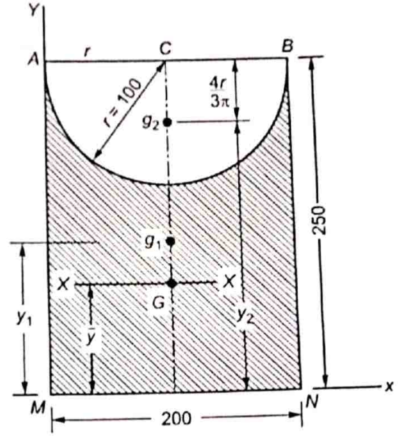
$$= 1175058 \cdot 34\ mm^4$$

$$= 1 \cdot 175 \times 10^6\ mm^4 = 1 \cdot 2 \times 10^6\ mm^4 \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 14. चित्र 2.25 में छाँयादार भाग (Shaded Area) का गुरुत्व केन्द्र (C.G.) ज्ञात करो तथा छाँयादार भाग (Hatched Area) का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) आधार MN के परितः (about MN) ज्ञात कीजिये।

हल—चित्र 2.25 में आयत (Rectangle) $ABNM$ में से AB को व्यास (Diameter) लेकर एक अर्द्धवृत्त (Semicircle) काटा गया है। अब शेष बचे छायादार भाग (Hatched Area) का गुरुत्व केन्द्र (C.G.) की स्थिति ज्ञात करके MN पर जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है।

यहाँ आयत (Rectangle) का केन्द्र (centre) g_1, क्षेत्रफल (area) a_1 तथा MN से ऊँचाई y_1 है तथा अर्द्धवृत्त (Semicircle) का गुरुत्व केन्द्र (Centre of gravity) g_2 (जो AB से $\frac{4r}{3\pi}$ दूरी पर सूत्र द्वारा होगा।) इसका क्षेत्रफल (area) a_2 तथा MN से ऊँचाई y_2 है।



चित्र 2.25

$\therefore$ क्षेत्रफल $a_1 = 200 \times 250 = 50{,}000\ mm^2$ (+ve)

क्षेत्रफल (area) $a_2 = \frac{\pi (100)^2}{2} = 15707 \cdot 96$ (–ve)

(यह भाग काटा गया है)

MN से g_1 की ऊँचाई $y_1 = \frac{250}{2} = 125\,mm$

MN से g_2 की ऊँचाई $y_2 = \left(250 - \frac{4r}{3\pi}\right) = \left(250 - \frac{4 \times 100}{3 \times 3 \cdot 14}\right) = 207 \cdot 54\,mm$

$$\therefore \quad y = \frac{a_1 y_1 - a_2 y_2}{a_1 - a_2} = \frac{(50000 \times 125 - 15707 \cdot 96 \times 207 \cdot 54)}{(50000 - 15707 \cdot 96)}$$

$$= \frac{2989969 \cdot 982}{34292 \cdot 04} = 87 \cdot 19\,mm \qquad \text{उत्तर}$$

I_{MN} = आयत (Rectangle) का MN के परितः जड़त्व-आघूर्ण – अर्द्धवृत्त (Semicircle) का MN के परितः जड़त्व आघूर्ण

$= [I_{xg1} + a_1 y_1^2] - [I_{xg2} + a_2 y_2^2]$, (जहाँ MN से g_1 व g_2 की दूरियाँ y_1 व y_2 हैं।)

$$= \left[\frac{200 \times 250^3}{12} + 50000 \times 125^2\right] - [0 \cdot 11 \times (100)^4 + 15707 \cdot 96 \times 207 \cdot 54^2]$$

$$= (1041666667) - (687586630)$$

$$= 354080037\ mm^4$$

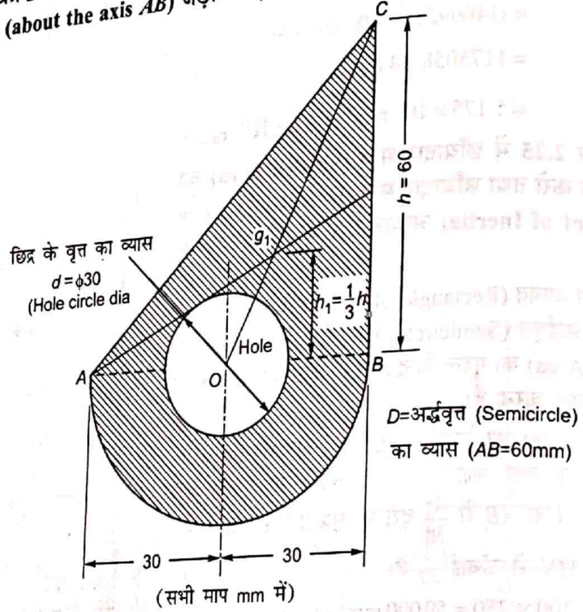
$$= 3 \cdot 54 \times 10^8\ mm^4 \qquad \text{उत्तर}$$

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

उदाहरण 15. चित्र 2.26 में दिखाये गये पटल (lamina) का छिद्र (Hole) के केन्द्र (Centre) O से जाने वाले (axis) AB के परितः (about the axis AB) जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) ज्ञात कीजिये।



चित्र 2.26

हल—माना I_{XX_1}, I_{XX_2} तथा I_{XX_3} क्रमशः त्रिभुज (Triangle) ABC, अर्द्धवृत्त (Semi Circle) तथा वृत्ताकार छिद्र (Circular Hole) के जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertial) AB, के परितः है।

$\therefore \quad I_{XX} = I_{XX_1} + I_{XX_2} - I_{XX_3}$ होगा।

यहाँ $\quad I_{XX_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{60 \times 60^3}{12} = 1080000 \text{ mm}^4$

$$I_{XX_2} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi D^4}{64} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi (60)^4}{64} = 317925 \text{ mm}^4$$

तथा $\quad I_{XX_3} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi (30)^4}{64} = 39740 \cdot 625 \text{ mm}^4$

$\therefore$ AB पर $\quad I_{XX} = I_{XX_1} + I_{XX_2} - I_{XX_3}$

$$= 1080000 + 317925 - 39740 \cdot 625$$

$$= 1358184 \cdot 375 \text{ mm}^4 = 13 \cdot 58 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

दूसरी विधि (IInd Method)

ΔABC के गुरुत्व केन्द्र (C.G.) अर्थात् g_1 पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.)

$$I_{Xg_1} = \frac{bh^3}{36} = \frac{60 \times (60)^3}{36} = 360000 \text{ mm}^4$$

अब ΔABC का AB पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I. about AB)

$I_{XX_1} = [I_{Xg_1} + a_1 h_1^2]$ (जहाँ $a_1 = \Delta ABC$ का क्षेत्रफल है। तथा h_1 = केन्द्र g_1 की AB से दूरी है।)

$$= 360000 + \frac{60 \times 60}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times 60\right)^2$$

$$= 360000 + 720000 = 1080000$$

अर्द्धवृत (Semi circle) का AB अक्ष (axis) पर जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.)

$$I_{XX_2} = 0 \cdot 11 \times (30)^4 + \frac{\pi (60)^2}{8} \times \left(\frac{4 \times 30}{3\pi}\right)^2$$

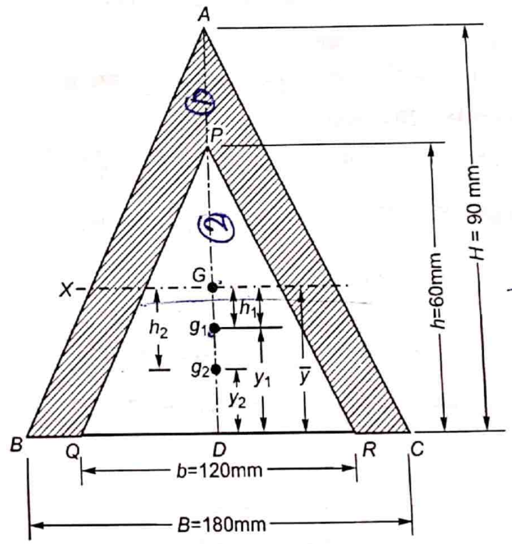
$$= 318399 \cdot 3631$$

$I_{XX_3} = \frac{\pi (30)^4}{64} = 39740 \cdot 625$ (वृत्ताकार छिद्र का)

$$I_{XX} = I_{XX_1} + I_{XX_2} - I_{XX_3}$$

$= 1358658 \cdot 738 \text{ mm}^4 = 13 \cdot 58 \times 10^5 \text{ mm}^4$ उत्तर

उदाहरण 16. चित्र 2.27 में एक खोखली त्रिभुजाकार काट (Hollow Triangular Section) दिखाया गया है। जो y-axis के सममित (Symmetrical) है। (i) इसके आधार (Base) BC पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) ज्ञात कीजिये।



चित्र 2.27

(ii) इसके गुरुत्व केन्द्र (C.G.) G से जाने वाली क्षैतिज अक्ष पर भी जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) I_G ज्ञात कीजिये।

हल—$\because$ हम जानते हैं कि आधार भुजा पर त्रिभुज का

$$\text{जड़त्व-आघूर्ण} = \frac{\text{चौड़ाई (Width)} \times \text{ऊँचाई (height)}^3}{12} \text{ सूत्र}$$

$\therefore \quad I_{BC}$ = बड़े Δ का BC पर M.O.I. – छोटे Δ का आधार भुजा पर M.O.I.

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

$$= \frac{B \times H^3}{12} - \frac{b \times h^3}{12}$$

$$= \frac{180 \times 90^3}{12} - \frac{120 \times 60^3}{12} = 10 \cdot 935 \times 10^6 - 2 \cdot 16 \times 10^6$$

$$= 8775000 = 8 \cdot 775 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

(ii) ∵ a_1 = बड़े Δ का क्षेत्रफल $= \frac{180 \times 90}{2} = 8100 \text{ mm}^2$

a_2 = छोटे Δ का क्षेत्रफल $= \frac{120 \times 60}{2} = 3600 \text{ mm}^2$

आधार BC से बड़े Δ के केन्द्र g_1 की ऊँचाई $y_1 = \frac{1}{3} \times 90 = 30 \text{mm}$

आधार BC से छोटे Δ के गुरुत्व केन्द्र g_2 की ऊँचाई $y_2 = \frac{1}{3} \times 60 = 20 \text{mm}$

BC से गुरुत्व केन्द्र (G) की ऊँचाई $\bar{y} = \frac{a_1 y_1 - a_2 y_2}{a_1 - a_2} = \frac{8100 \times 30 - 3600 \times 20}{8100 - 3600}$

∴ $\bar{y} = 38 \text{mm}$

∴ g_1 व G के बीच दूरी (Gap) $h_1 = \bar{y} - y_1$ (चित्र से)

$h_1 = 38 - 30 = 8 \text{mm}$

तथा g_2 व G के बीच दूरी (Gap) $h_2 = \bar{y} - y_2$ (चित्र से)

$h_2 = 38 - 20 = 18 \text{mm}$

∴ बड़े Δ ABC का G की अक्ष पर $I_{XX_1} = [I_{Xg_1} + a_1 h_1^2]$

तथा छोटे Δ PQR का G की अक्ष पर $I_{XX_2} = [I_{Xg_2} + a_2 h_2^2]$

∴ खोखले Δ का $I_{XX} = I_{XX_1} - I_{XX_2}$

$$I_{XX} = \left[\frac{180 \times 90^3}{36} + 8100 \times 8^2\right] - \left[\frac{120 \times 60^3}{36} + 3600 \times 18^2\right]$$

$$= 4163400 - 1886400 = 2277000 \text{ mm}^4$$

$$= 2 \cdot 277 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

प्रश्नावली

1. निम्न रिक्त स्थान भरो (Fill in the blanks)—

(a) किसी अक्ष (axis) के सापेक्ष एक छोटे पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) उसके द्रव्यमान (mass) तथा अक्ष से दूरी के .... के गुणनफल के बराबर होता है।

(b) समान्तर अक्ष प्रमेय (Parallel axis theorem) के अनुसार—

$I_{XX} = I_G + A.x$..............

(उत्तराखण्ड 2010-S)

(c) अभिलम्ब अक्ष प्रमेय (Perpendicular Axis Theorem) के अनुसार—

I_{ZZ} =...............+...............

(उत्तराखण्ड 2009-S)

(d) किसी समतल पटल (Lamina) का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) उसके क्षेत्रफल का .... कहलाता है। **(U.K. 2013-W)**

(e) किसी काट का जड़त्व आघूर्ण (I) तथा काट के गुरुत्व केन्द्र (G) से अधिकतम दूरी वाले किनारे (परत) की दूरी (y) के अनुपात को .... कहते हैं।

(f) एक आयताकार काट की आकृति मापांक (Modulus of section) .... होता है जबकि b चौड़ाई एवं d आयताकार काट की गहराई हो। **(U.K. 2011-S)**

(g) एक d व्यास (Diameter d) के वृत्त (circle) का आकृति मापांक (section modulus) .... होता है। **(U.K. 2010-W)**

(h) एक खोखले वृत्ताकार तल (Hollow Circular Lamina) का बाहरी व्यास (Outer diameter) D तथा आन्तरिक व्यास (Internal diameter) d है तब $I_{XX} = I_{YY}$ = ... होता है।

(i) एक खोखले आयताकार की बाहर से चौड़ाई (B) और गहराई D है तथा अन्दर से चौड़ाई b और गहराई d है तो चौड़ाई के समान्तर वाली $X - X$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण I_{XX} = ... होता है।

(j) किसी त्रिभुजाकार आकृति (Triangular Section) जिसका आधार (b) तथा ऊँचाई (h) है, की उसके केन्द्र (centroid) से जाने वाले अक्ष (axis), जो आधार के समानान्तर है, के परितः जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.), I_{XX} = ... होता है।

(k) एक त्रिभुजाकार काट (Triangular Section) का आधार (b) तथा ऊँचाई (h) है। इसके आधार भुजा पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) I_{Base} = ... होता है।

(l) एक अर्द्धवृत्तीय काट (Semi Circular Section) के गुरुत्व केन्द्र (G) से जाने वाली अक्ष (axis) पर I_{GXX} = ... होता है। यदि त्रिज्या (radius) R है।

(m) एक अर्द्धवृत्तीय पटल (Semi Circular Lamina) के आधार के व्यास (Diameter of base) d पर जड़त्व आघूर्ण I_{BASE} = ... होता है।

(n) एक d व्यास (dia) की वृत्ताकार काट (Circular Section) के लिए जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) .... होता है।

(p) जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) का मात्रक (Unit) .... होता है।

(q) आकृति मापांक (Section Modules) की इकाई (Unit) .... है। **(यू०के० 2014, S)**

रिक्त स्थानों के उत्तर

(a) वर्ग (Square) (b) h^2 (c) $I_{XX} + I_{YY}$ (d) द्वितीय घूर्ण (IInd Moment)

(e) आकृति मापाँक (Section Modulus) (f) $\frac{I}{y} = \frac{bd^2}{6}$ (g) $\frac{I}{y} = \frac{\pi d^3}{32}$ (h) $\frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$

(i) $I_{XX} = \left(\frac{BD^3}{12} - \frac{bd^3}{12}\right)$ (j) $\frac{b \times h^3}{36}$ (k) $\frac{b \times h^3}{12}$ (l) $0 \cdot 11 \times r^4$

(m) $\frac{1}{2} \times \frac{\pi d^4}{64} \Rightarrow \frac{\pi d^4}{128}$ (n) $\frac{\pi d^4}{64}$ (p) $(\text{mm})^4$ या m^4 (q) mm^3 या m^3

2. जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) से आप क्या समझते हैं?

3. आकृति मापांक (Section Modulus) को परिभाषित कीजिये तथा इसका मात्रक बताइये। **(यू०के० 2014, S)**

संकेत—$Z = \frac{I}{y}$

4. परिभ्रमण त्रिज्या (Radius of gyration) को समझाइये तथा मात्रक बताइये। **(यू०के० 2014, S, B.P.)**

संकेत—$K = \sqrt{\frac{I}{A}}$ सूत्र

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

5. समानान्तर अक्ष प्रमेय (Parallel Axis Theorem) को लिखिए तथा चित्र सहित सिद्ध कीजिए कि $I_{XX} = I_{GG} + Ah^2$ ...
(U.K. 2009-W; 11-S; 13...)

6. अभिलम्ब अक्ष प्रमेय (Perpendicular Axis Theorem) को परिभाषित कीजिये तथा सिद्ध कीजिये—
(U.K. 2008-S; 12-W; 13-S; 13-W...)

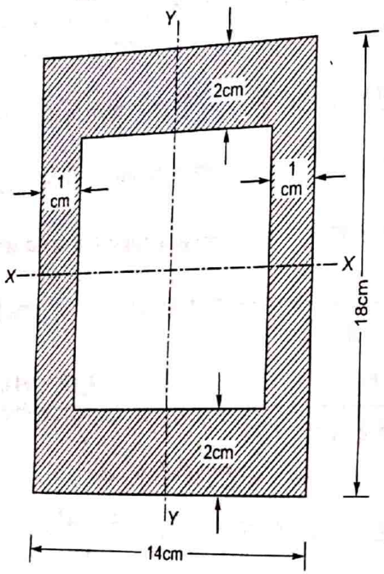
$$I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY}$$

जहाँ, $I_{ZZ} = Z-Z$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I. about $Z-Z$ axis)
$I_{XX} = X-X$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I. about $X-X$ axis)
$I_{YY} = Y-Y$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I. about $Y-Y$ axis)

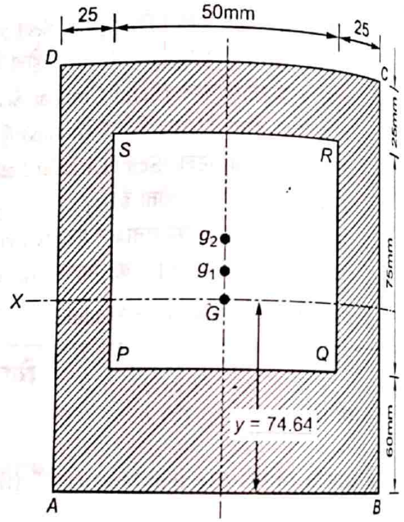
7. एक आयताकार काट (Rectangular Section) के आधार के सापेक्ष जड़ताघूर्ण (M.O.I.) हेतु सूत्र व्युत्पन्न कीजिये। ... आधार केन्द्रक से जाने वाली अक्ष के समान्तर (Parallal to axis) है। (U.K. 2013-W; 14-...)

8. चित्र 2.28 में दिखाई गई खोखली आयताकार काट (Hollow Rectangular Section) का जड़त्व आघूर्ण I_{XX} तथा I_{YY} ... कीजिये। (U.K. 2005-S...)

उत्तर—$I_{XX} = 4060\text{cm}^4$ तथा $I_{YY} = 2100\text{cm}^4$



चित्र 2.28



चित्र 2.29

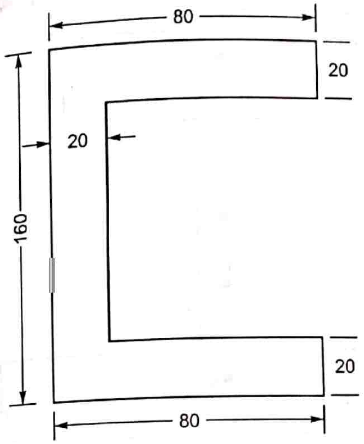
2. चित्र 2.29 में दिखाई गई खोखली आयताकार काट (Hollow Rectangular Section) के गुरुत्व केन्द्र से जाने वाली X-X axis पर जड़त्व आघूर्ण I_{XX} ज्ञात कीजिये। जबकि काट के निचले किनारे AB से गुरुत्व केन्द्र G की ऊँचाई 74·64mm है।

[संकेत—AB से g_1 की ऊँचाई $y_1 = 80\text{ mm}$
AB से g_2 की ऊँचाई $y_2 = 97{\cdot}5\text{ mm}$
अब g_1 व G के बीच दूरी (gap) $\Rightarrow h_1 = y_1 - \bar{y}$
तथा g_2 व G के बीच दूरी $h_2 = y_2 - \bar{y}$

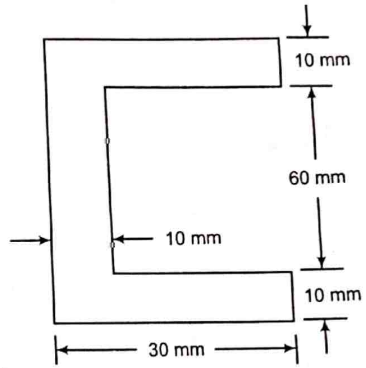
$$I_{XX} = [I_{Xg_1} + a_1h_1^2] - [I_{Xg_2} + a_2h_2^2]$$
$$= 34219093{\cdot}33 - 3717486$$
$$= 30501607{\cdot}33\text{mm}^4 \Rightarrow 30{\cdot}5 \times 10^6\ \text{mm}^4]$$

10. (i) चित्र 2.30 में दिखाई गई चैनल काट (channel section) का $\bar{X}, \bar{Y}, I_{XX}$ तथा I_{YY} ज्ञात कीजिये। (U.K. 2012-S)

उत्तर—$\bar{X} = 27{\cdot}14$ mm, $\bar{Y} = 80$ mm, $I_{XX} = 18{\cdot}666 \times 10^6\ \text{mm}^4$ तथा $I_{YY} = 3{\cdot}021 \times 10^6\ \text{mm}^4$



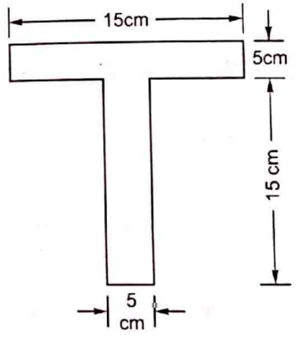
चित्र 2.30



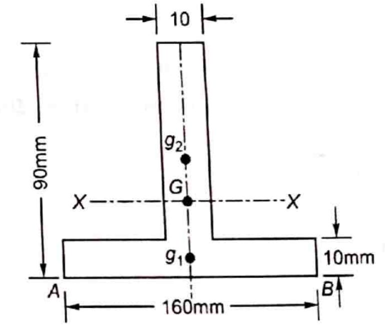
चित्र 2.31

(ii) दिये गये चैनल काट चित्र 2.31 का केन्द्रीय क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिये।
[उत्तर—$I_{xx} = 9{\cdot}2 \times 10^5\ \text{mm}^4$] (यू०के० 2014, SBP)

11. चित्र 2.32 में दिखाई गई T-काट (T-Section) का, उसके गुरुत्व केन्द्र (C.G.) से जाने वाली $X-X$ अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण I_{XX} ज्ञात कीजिये। I_{YY} भी ज्ञात कीजिये। (U.K. 2008-S, 09-W, 10-W)



चित्र 2.31



चित्र 2.32

उत्तर—$I_{XX} = 5312{\cdot}5 \times 10^4\ \text{mm}^4$, $I_{YY} = 1562{\cdot}5 \times 10^4\ \text{mm}^4$

12. चित्र 2.32 में दिखाई गई उल्टी टी-काट (Inverted T-Section) का उसके गुरुत्व केन्द्र (G) से होकर जाने वाली $X-X$ अक्ष के परित: (about the centroidal $X-X$ axis) जड़त्व-आघूर्ण (Moment of Inertia) ज्ञात कीजिये।
(U.K. 2011-S; 2014-S)

[उत्तर—$I_{XX} = 1520000\ \text{mm}^4 = 15{\cdot}2 \times 10^5\ \text{mm}^4$]

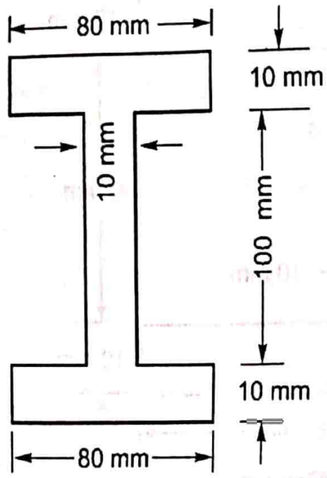
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

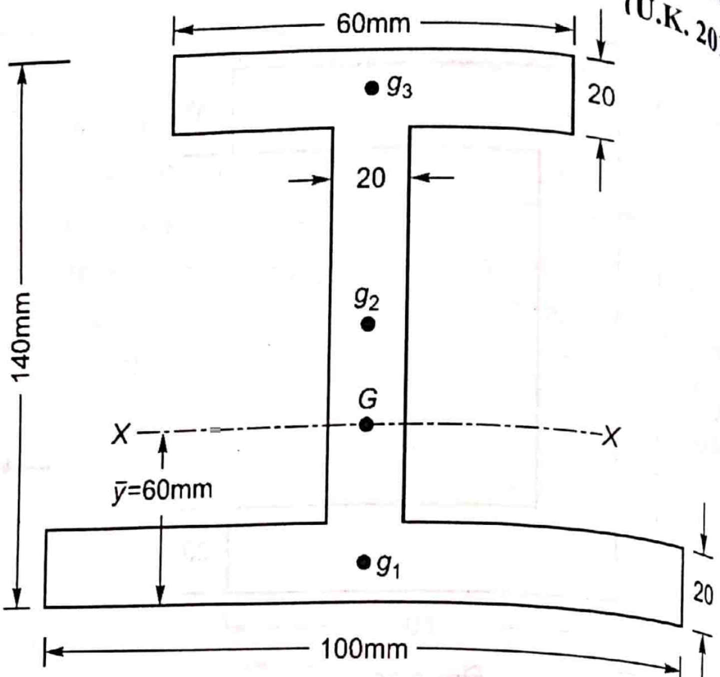
13. चित्र 2.33 में दिखाये गये I-काट के गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाली अक्षों के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (I_{XX} तथा I_{YY}) ज्ञात कीजिये। (U.K. 2013-S)

उत्तर— $I_{XX} = 5 \cdot 686 \times 10^6$ mm^4

$I_{YY} = 8 \cdot 6166 \times 10^5$ mm^4



चित्र 2.33



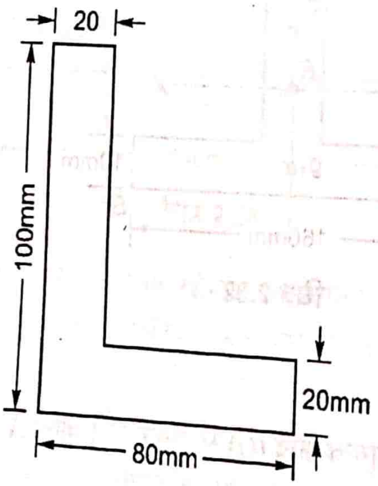
चित्र 2.34

14. चित्र 2.34 में दिखाई गई I-काट (I-Section) का $X-X$ अक्ष के परित: (about the $X-X$ axis) जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) ज्ञात कीजिये। इसका गुरुत्व केन्द्र (C.G.) निचले किनारे से 60 mm की दूरी पर है। I_{YY} भी ज्ञात कीजिये। (U.K. 2014-W)

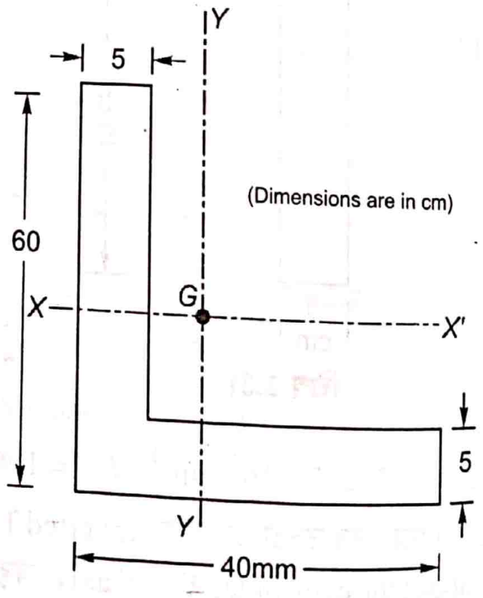
उत्तर—$I_{XX} = 12 \cdot 853 \times 10^6$ mm^4

$I_{YY} = 20 \cdot 93 \times 10^5$ mm^4

15. चित्र 2.35 में दिखाये गये L-परिच्छेद (L-Section) का $X-X$ axis के परित जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।
[उत्तर—$I_{XX} = 290 \cdot 66 \times 10^4$ mm^4] (U.K. 2013-S)



चित्र 2.35



चित्र 2.36

16. चित्र 2.36 में दिखाई गई L-काट (L-Section) के गुरुत्व केन्द्र (G) से जाने वाली अक्षों (axes) पर I_{XX} तथा I_{YY} ज्ञात कीजिये। (यूoकेo 2014 W)

उत्तर—$\bar{X} = 9 \cdot 87$ cm, $\bar{Y} = 19 \cdot 87$ cm, $I_{XX} = 173950 \cdot 11$ cm^4 तथा $I_{YY} = 62700 \cdot 11$ cm^4

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

Polytechnic study with Atul

Whatsapp No.- 9369290461

Subscribe, Like, Comment and Share

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

3 कर्तन बल एवं नमन आघूर्ण (SHEAR FORCE AND BENDING MOMENT)

3.1 परिचय (Introduction)

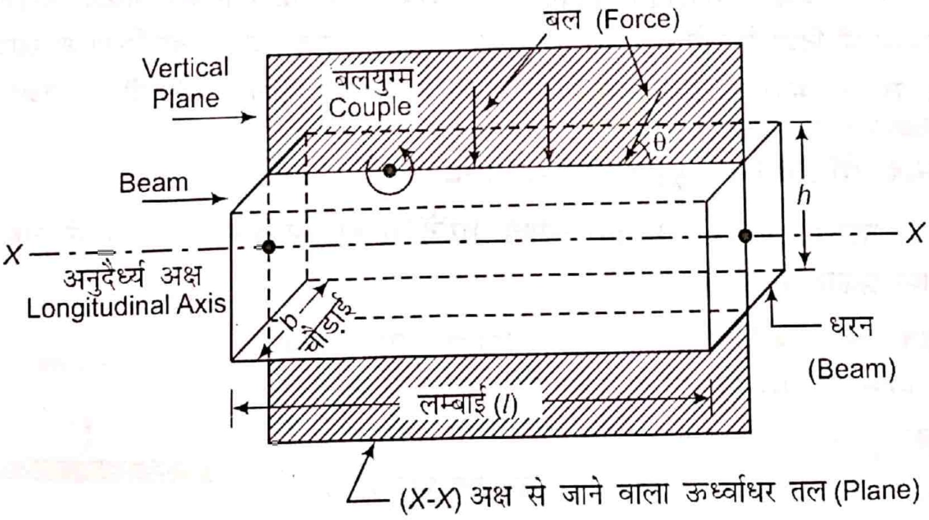
यदि किसी छड़ (Bar) या धरन (Beam) पर कुछ भार कार्य कर रहे हैं तो वह धरन (Beam) नीचे को लचक जाती है अर्थात् झुक जाती है अथवा हम कह सकते हैं कि धरन का नमन (Bending of beam) हो गया है। यह नमन (Bending) धरन (Beam) पर लगे भारों (Loads) या बलों के घूर्ण (Moments of Forces) के कारण होता है, जिसे नमन घूर्ण (Bending Moment) कहते हैं। धरन की नमन सामर्थ्य (Bending Strength of beam) के लिये धरन की विभिन्न अनुप्रस्थ काटों (at different sections of beam) पर नमन घूर्ण (Bending Moment) का मान जानना आवश्यक होता है, अधिकतम नमन आघूर्ण पर छड़ अथवा धरन अधिकतम झुकती है।

धरन पर लगे भार या बलों के कारण धरन की विभिन्न काटों पर कर्तन बल (Shear force) भी कार्य करता है, जिसको प्रत्येक काट पर बलों के बीजीय योग (Algebraic sum) से ज्ञात किया जाता है। इससे धरन की काटों पर कर्तन सामर्थ्य (Shearing Strength) का अनुमान लगाया जाता है।

3.2 धरन (Beam)

"धरन (Beam), समान काट (Uniform Section) वाली छड़ (Bar) है जिस पर लगने वाले भार (Loads) उसकी लम्बाई वाली अक्ष (Longitudinal Axis) के लम्बरूप (Perpendicular) कार्य करते हैं। अथवा जिस पर कार्य करने वाले सभी बल या बलयुग्म (Couple) छड़ की लम्बाई की अक्ष (Longitudinal Axis) से जाने वाले समतल (Plane) में होते हैं।" (देखें चित्र 3.1) छड़ या धरन पर लगने वाले सभी बल उसका नमन (bending) करते हैं अर्थात् झुकाते हैं।

धरन की लम्बाई उसकी काट की मापों की तुलना में बहुत अधिक होती है। धरन का उपयोग पुलों या छतों में (In Bridges & in Roofs) भारों को वहन करने के लिये किया जाता है। जैसे—कमरों की छतों में छत की कड़ियों के रूप में तथा मशीनों के आधारों (Beds) में धरनें (Beams) प्रायः इस्पात (steel), लकड़ी (wood) तथा कंक्रीट की बनाई जाती हैं।



चित्र 3.1

अधिक मजबूती (अथवा अधिक सामर्थ्यवान) होने के लिये धरन (Beam) के काट की गहराई (h), चौड़ाई (b) से अधिक होनी चाहिये अर्थात् $h > b$ होना चाहिये।

Scanned with CamScanner

3.3 धरन की टेकों की प्रकार (Types of Supports of the Beam)

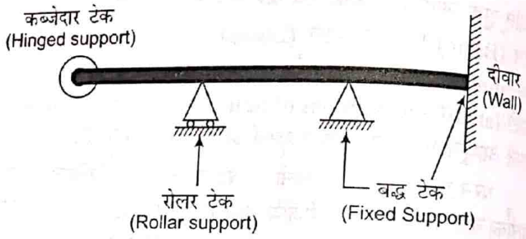
धरन की टेकें (Supports) मुख्य रूप से तीन प्रकार की होती हैं—

(1) सरल या रोलर टेक (Simple or Roller Support),

(2) कब्जेदार या पिन-टेक (Hinged or Pin Support),

(3) आबद्ध टेक (Fixed Support or Built-in Support)।

(1) सरल या रोलर टेक (Simple or Roller Support)—रोलर टेक, चित्र 3.2 के अनुसार एक समतल सतह पर रखे रोलर (Roller) से बनायी जाती है। रोलर टेक क्षैतिज बलों के लिये कोई भी प्रतिक्रिया उत्पन्न नहीं करती है और न ही संरचना (Structure) को अक्षीय (Longitudinal) दिशा में सरकने से रोकती है। रोलर की प्रतिक्रियायें सदैव धरन (Beam) की अक्ष के लम्ब-रूप होती है, चाहे भार किसी भी कोण पर अवनत (Inclined) लगे हों।



TYPES OF SUPPORTS
चित्र 3.2

(2) कब्जेदार या पिन-टेक (Hinged or Pin Support)—कब्जेदार एक कब्जे (Hinge) की तरह होती है। देखें चित्र 3.2 इस प्रकार की टेक किसी भी दिशा में प्रतिक्रिया दे सकती है। इस टेक पर प्रतिक्रिया (Reaction) के कार्य करने की दिशा धरन पर लगे भारों की स्थिति पर निर्भर करती है, अर्थात् किसी कोण पर तिरछे (Inclined) भार लगे होने पर प्रतिक्रिया भी क्षैतिज से अवनत या तिरछी होती है तथा अक्ष के लम्ब-रूप भार लगे होने पर प्रतिक्रिया भी ऊर्ध्वाधर होती है। कब्जेदार टेक पर धरन केवल घूम सकती है परन्तु दायें-बायें सरक नहीं सकती और न ही ऊपर उठ सकती है।

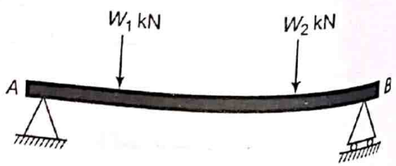
(3) आबद्ध टेक (Fixed Support or Built-in Support)—यदि किसी धरन के एक सिरे A को या दोनों सिरों A तथा B को किसी दीवार या स्तम्भ में बद्ध (Fixed or Built up) किया जाये तो सिरों की टेकों को आबद्ध टेक (Fixed Support) कहते हैं। यह टेक धरन पर किसी भी दिशा में लगे बलों को सहन कर सकती है। बद्ध टेक पर प्रतिक्रिया के कार्य करने की दिशा कब्जेदार टेक की भाँति धरन पर लगे भारों की स्थिति पर निर्भर करती है, अर्थात् प्रतिक्रियायें किसी भी दिशा में हो सकती हैं।

3.4 धरन पर भारों के प्रकार (Types of Loads on Beam)

(अ) धरन पर भार (Loads on Beam)—प्राय: धरनों पर भार अनुप्रस्थीय (धरन की अक्ष के लम्ब-रूप) की कार्य करते हैं जो कि निम्न प्रकार के हो सकते हैं—

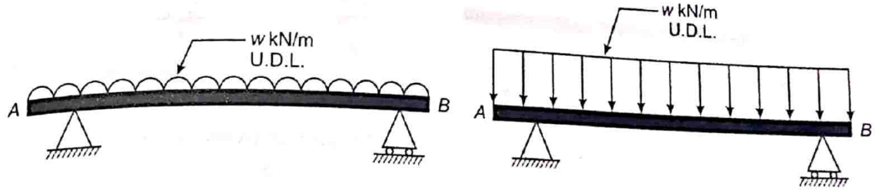
(i) संकेन्द्रित या बिन्दु भार (Concentrated or Point load)—वास्तव में बिन्दु भार सम्भव नहीं होता है परन्तु जिन भारों को धरन के एक बिन्दु पर क्रिया करता हुआ माना जा सके, उन्हें बिन्दु भार कहते हैं; जैसे—धरन (Beam) पर हैंगर की सहायता से लटकाये गये भार या छत से लटकाये गये पंखों के भार आदि।

इस भार की इकाई (Unit) किग्रा० (kg), टन (Ton) या किलोन्यूटन (kN) होती है। ये भार धरन पर ऊर्ध्वाधर (Vertical), तिरछे (Inclined) या क्षैतिज (Horizontal) कार्य कर सकते हैं। चित्र 3.3 के अनुसार तीर लगाकर बिन्दु भार को दर्शाया जाता है।



POINT LOADS ON BEAM
चित्र 3.3

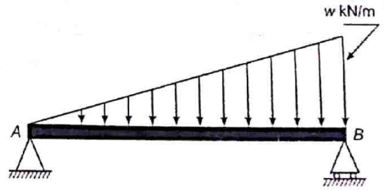
(ii) एक समान बँटा हुआ या समवितरित भार (Uniformly Distributed Loads or U.D.L)—इस प्रकार का भार धरन की कुछ या पूर्ण लम्बाई पर एक समान रूप से बँटा हुआ होता है। इसकी इकाई kg/m या Ton/m या kN/m प्रयोग की जाती है। किसी फर्श या धरन (Beam) का भार इसके प्रमुख उदाहरण हैं। U.D.L भार को चित्र 3.4 के अनुसार प्रदर्शित करते हैं।



U.D.L. ON BEAMS
चित्र 3.4

(iii) एक समान रूप से बदलता भार या परिवर्तनशील भार (Uniformly Varying load)—इस प्रकार के भार धरन की कुछ या पूर्ण लम्बाई पर समान रूप से नहीं लगते हैं बल्कि इनका मान प्राय: प्रत्येक बिन्दु पर बदलता जाता है। यदि दीवार के सहारे मिट्टी या रेत का ढेर लगा दिया जाये तो यह उस स्थान पर परिवर्तनशील भार का उदाहरण होगा।

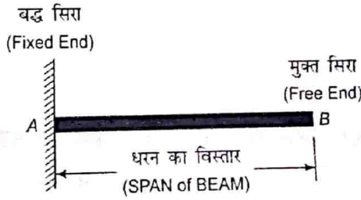
इस प्रकार के भार को चित्र 3.5 में दर्शाया गया है।



(VARYING LOAD)
चित्र 3.5

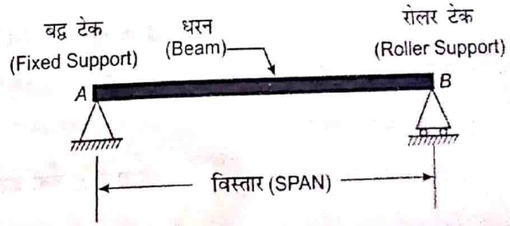
3.5 टेकों के आधार पर धरन के प्रकार (Types of Beams on the basis of supports)

(i) परास धरन (Cantilever Beam)—इस प्रकार की धरन का एक सिरा दीवार में चपटी सतह (Flat Surface) पर बद्ध (Fixed) होता है तथा दूसरा सिरा बिना टेक लगे हुए स्वतन्त्र (मुक्त Free) होता है। देखें चित्र 3.6 में। **उदाहरण (Examples)**—दरवाजे या खिड़की (door or window) के ऊपर लगे छज्जे (Sunshades) तथा किसी बड़ी बिल्डिंग के मुख्य द्वार (Main Entrance) पर लगे बड़े छज्जे (Big Shades) आदि।



चित्र 3.6

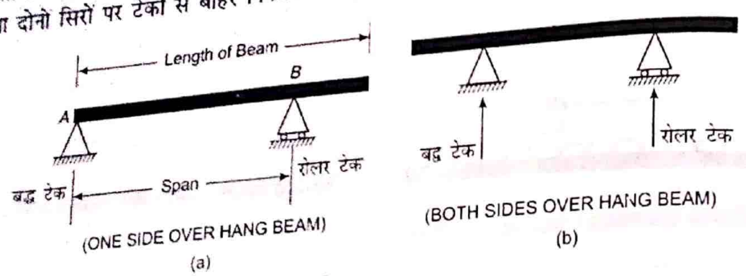
(ii) शुद्धालम्ब धरन या सरल आलम्बित धरन (Simply Supported Beam)—इस प्रकार की धरन (Beam) दोनों सिरों पर चित्र 3.7 के अनुसार टिकी होती है। एक रोलर टेक होने के कारण यह गर्मी के मौसम में फैलकर आगे बढ़ सकती है ताकि मुड़ (Bend) न हो पाये।



चित्र 3.7

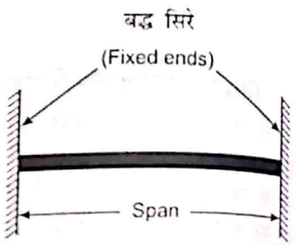
Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

(iii) टेकों से बाहर निकली धरन (Over hanging Beam)—इस प्रकार की धरन (beam) चित्र 3.8 के अनुसार एक सिरे पर अथवा दोनों सिरों पर टेकों से बाहर निकली होती है। देखें चित्र 3.8 (a) तथा (b)।



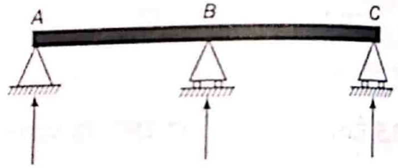
चित्र 3.8

(iv) आबद्ध धरन (Fixed Beam)—इस प्रकार की धरन चित्र 3.9 के अनुसार दोनों सिरों पर दीवार में चपटी सतहों (Flat Surfaces) पर जकड़ी हुई अथवा बद्ध (Built up or Fixed) होती है। जैसे Cantilever का बद्ध सिरा जकड़ा होता है। Buildings के कमरे (Rooms) की छत (roofs) में लगायी गई Beams इसका उदाहरण है।



चित्र 3.9 : FIXED BEAM

(v) सतत् धरन या अनेकाधार वाली धरन (Continuous Beam)—देखें चित्र 3.10 इस काट की धरन दो से अधिक टेकों पर टिकी हुई होती है। जैसे—किसी नदी पर बनने वाले लम्बे पुल (Long Bridge) को दो से अधिक गोले या खम्भों (Poles) पर टेकना पड़ता है।



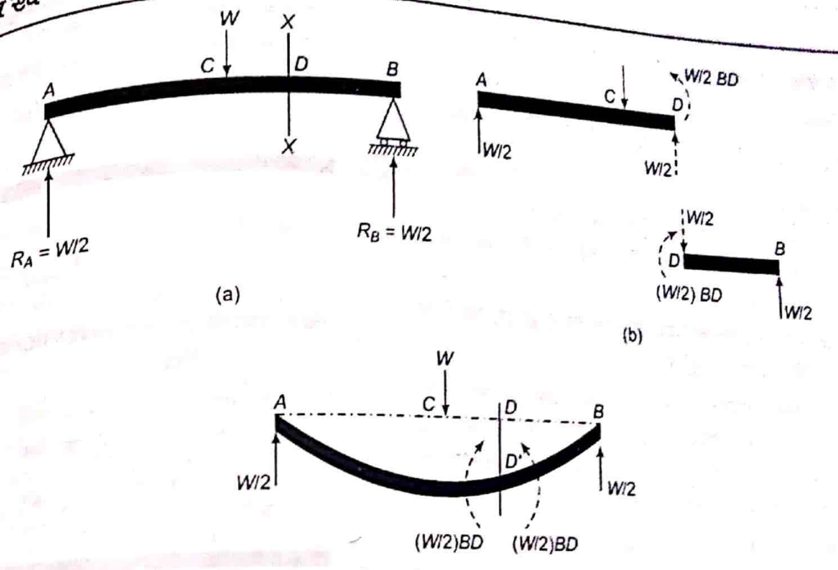
CONTINUOUS BEAM
चित्र 3.10

3.6 कर्तन बल तथा नमन घूर्ण की संकल्पना
(Concept of Shearing Force and Bending Moment)

जब किसी धरन (beam) पर भार लगाया जाता है तो उसकी टेकों में प्रतिक्रिया उत्पन्न (Develop) होती है और धरन पर लगे बाह्य बलों (External Loads) एवं इन प्रतिक्रियाओं के प्रभाव में भी धरन (Beam) सन्तुलित (Balanced) रहती है।

चित्र 3.11 में एक शुद्धालम्ब धरन AB के मध्य-बिन्दु C पर भार W नीचे की ओर कार्य कर रहा है तो दोनों टेकों की प्रतिक्रियायें $\frac{W}{2}, \frac{W}{2}$ ऊपर की ओर कार्य करेंगी। क्योंकि पूर्ण धरन सन्तुलन में है अत: धरन का प्रत्येक भाग जैसे (X-X) काट र BD भाग भी सन्तुलन में होगा।

अत: B पर प्रतिक्रिया $R_B = \frac{W}{2}\uparrow$ है जो B से C तक कर्तन बल (S.F.) रूप में ऊपर की ओर होगा। इस बीच किसी भी ट (D पर X-X काट) पर सन्तुलन के लिये उतने ही मान $\frac{W}{2}$ का बल नीचे की ओर कार्य करेगा।



चित्र 3.11

अब B पर $\frac{W}{2}$ बल ऊपर की ओर तथा D पर $\frac{W}{2}$ बल सन्तुलन के लिए नीचे की ओर लगा होने पर एक बलाघूर्ण $\left(\frac{W}{2} \times BD\right)$ मान का बनेगा जो BD भाग को प्रवाम (Anticlockwise) (↺) दिशा में घुमाने का प्रयास करेगा। इसे सन्तुलित करने के लिये इतने ही मान का एक बलाघूर्ण प्रदक्षिण (Clockwise) (↻) दिशा में D पर पैदा हो जाता है जिससे BD भाग पूर्ण सन्तुलन में हो जाता है।

अत: स्पष्ट होता है कि Beam के भाग BD के पूर्ण सन्तुलन के लिये काट D पर निम्न बल (Force) तथा बलाघूर्ण (Torque) कार्य करते हैं—

(i) धरन की काट D पर $\frac{W}{2}$ मान का बल नीचे की ओर कार्य करेगा जिसे कर्तन बल (Shear Force at D) कहते हैं।

(ii) काट D पर $\left(\frac{W}{2} \times BD\right)$ मान का प्रदक्षिण दिशा (Clockwise) में बलाघूर्ण (torque) कार्य करेगा जिसे (D) पर नमन आघूर्ण (BM at D) कहते हैं।

ये दोनों बल तथा बलाघूर्ण काट D पर Beam के भाग AD द्वारा लगाई जाती है। इसी प्रकार धरन के भाग AD को भी लेकर सन्तुलन को सिद्ध किया जा सकता है।

चित्र 3.11 (b) में काट D पर $\frac{W}{2}$ बल कार्य करता है (चाहे भाग BD को लिया जाये या भाग AD को) और यह बल काट के ही समतल में होता है, इसलिए इसे काट पर कर्तन बल (Shear Force) कहते हैं।

अत: धरन की प्रत्येक काट के लिये कर्तन बल (S.F.) को निम्न प्रकार परिभाषित (Define) किया जाता है—

(1) कर्तन बल (Shear Force)—"धरन की किसी काट पर कर्तन बल (S.F.) का मान उस काट के दायीं ओर या बायीं ओर लगे बलों का बीजगणितीय योग के बराबर होता है।"

Shear Force at any section of the beam is the algebraic sum of the forces acting either right side or left side of that section of beam. Or we can also say—

"Unbalanced force at any section of the beam is the Shear Force."

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

मात्रक (Unit)—किलोन्यूटन (kN) या टन (Ton)

10 kN = 1 Ton

Note :

चित्र 3.11 (b) में काट D पर $\frac{W}{2} \times BD$ मान का बलाघूर्ण (torque) कार्य करता है (चाहे BD भाग पर विचारें अथवा AD भाग पर)। यह घूर्ण धरन को झुकाने की प्रवृत्ति (Tendency) रखता है, अतः इसे उस काट पर नमन आघूर्ण (Bending Moment) कहते हैं।

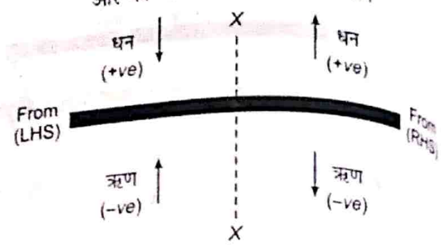
अतः धरन की प्रत्येक काट के लिये नमन आघूर्ण को निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है—

(2) नमन आघूर्ण (Bending Moment)—"धरन की किसी काट पर नमन आघूर्ण (BM) का मान, उस काट के दायीं ओर या बायीं ओर लगे बलों का उस काट पर आघूर्णों का बीजगणितीय योग के बराबर होता है।"

"Bending Moment at any section of the beam is the algebraic sum of the moments of the forces acting either right side or left side of that section."

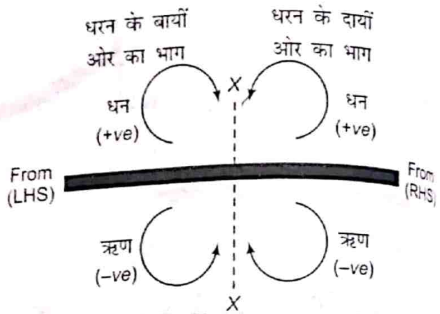
मात्रक (Unit)—किलोन्यूटन-मीटर (kN-m)

तथा टन-मीटर (Ton-m)



चिन्ह प्रणाली (SIGN CONVENTIONS)

चित्र 3.12

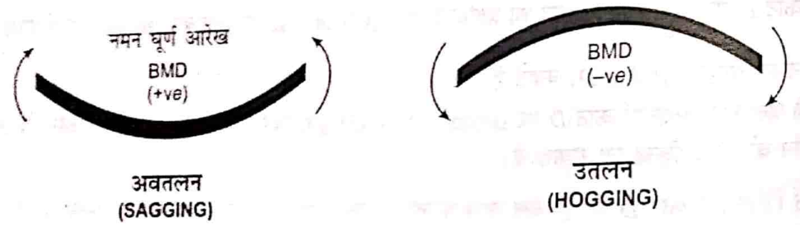


चिन्ह प्रणाली (SIGN CONVENTIONS)

चित्र 3.13

3.7 अवतलन (Sagging) तथा उत्तलन (Hogging) नमन आघूर्ण (B.M.)

जब कोई धरन (beam), भार (load) लगाने के कारण नीचे को झुकती है, तो धरन की इस स्थिति को उसका अवतलन (Sagging) कहते हैं और अवतलन (Sagging) की स्थिति में धरन (beam) का नमन घूर्ण (Bending Moment) धनात्मक (+ve) होता है। जैसे—सरल आलम्बित धरन (Simply supported Beam) भार लगने के कारण नमन स्थिति (bending position) में आती है।



चित्र 3.14

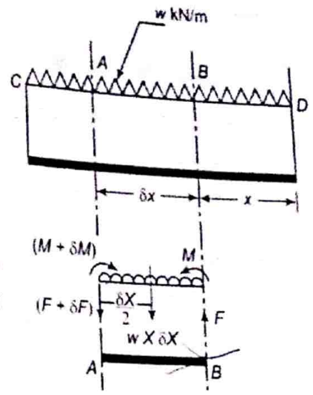
जब Beam पर भार लगाने से वह ऊपर की ओर वक्र रूप (cuved shape) में लचकती है (जैसे—cantilever beam में होता है) तो धरन की इस स्थिति को उसका उत्तलन (Hogging) कहते हैं। इस स्थिति में नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) ऋण (– ve) होता है। इस प्रकार का घूर्ण उत्तलन घूर्ण (Hogging moment) कहलाता है।

"The sign convention for bending moment is that a beam in "hogging" condition is subject to negative bending moment and in a "Sagging" condition to positive bending moment."

3.8 भार, कर्तन बल तथा नमन आघूर्ण में सम्बन्ध (Relation between Load, Shear Force and Bending Moment)

चित्र 3.15 में किसी धरन (beam) CD पर माना w kN/m का एक समान बंटा भार (U.D.L.) लगा है। अब इस धरन के दायें सिरे D से x दूरी पर धरन का बहुत छोटा भाग AB (लम्बाई δx) माना।

माना धरन के लिये गये छोटे भाग AB के सिरे (काट) B पर (सम्पर्क वाले भाग BD के कारण) ऊपर की ओर कर्तन बल (Shearing Force) F तथा नमन आघूर्ण (Bending Moment) M लग रहे हैं। इसी प्रकार माने गये छोटे भाग AB के सिरे (काट) A पर (सम्पर्क वाले भाग CA पर भार के कारण) कर्तन बल $(F + \delta F)$ नीचे की ओर तथा नमन आघूर्ण (B.M.) $M + \delta M$ लग रहे हैं। क्योंकि भाग AB पर समान बंटा भार (U.D.L.) w kN/m मान का भी लगा है अतः इस भाग की लम्बाई (δx) पर $(w \times \delta x)$ मान का कुल भार AB के मध्य में (at middle) कार्य करेगा।



चित्र 3.15

∴ सन्तुलन की स्थिति में— $(\Sigma V = 0$ द्वारा)

नीचे की ओर लगे बलों का योग = ऊपर की ओर लगे बल

अर्थात् $(F + \delta F) + w \times \delta x = F$

या $\delta F = -w \times \delta x$

या $\frac{\delta F}{\delta x} = -w$ अथवा $\frac{dF}{dx} = -w$ ... (i)

अतः सम्बन्ध (i) से हमें पता चलता है कि किसी काट पर, बल F के परिवर्तन की दर (rate of change of force) $\frac{dF}{dx}$ उस काट पर भार की दर (rate of load) w के बराबर होती है।

⇒ Rate of change of S.F. $\left(\frac{dF}{dx}\right) = -$ Rate of Load (w/unit length)

अब आघूर्ण (Moment) के सन्तुलन के लिये, $\Sigma M = 0$

अब A पर आघूर्ण (Moment) लेने पर—

Clockwise Moment = Anticlockwise Moment

$$F \times \delta x + M = (M + \delta M) + (w \times \delta x) \times \frac{\delta x}{2}$$

$$F \times \delta x = \delta M + 0$$ $\left(\because w \times \frac{(\delta x)^2}{2}\right.$ का मान बहुत कम होने पर नगण्य माना)

∴ $\frac{\delta M}{dx} = F$

या $\frac{dM}{dx} = F$ ... (ii)

अतः सम्बन्ध (ii) से हमें ज्ञात होता है कि किसी काट पर नमन घूर्ण M के परिवर्तन की दर $\frac{dM}{dx}$ उस काट पर कर्तन बल के बराबर होती है।

∴ "Rate of Change of B.M. at any section is equal to Shearing Force (F) at that section."

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

(i) संकेन्द्रित भार (Point Load) के लिए—

यदि किसी काट पर भार की दर w शून्य है, जैसे कि संकेन्द्रित भार (point load) की दशा में,

तब
$$\frac{dF}{dx} = 0$$

$\because$ Constant का $\frac{d}{dx} = 0$ होती है अतः यहाँ $F =$ स्थिर (constant)

अर्थात् धरन के लिये कर्तन बल (S.F.) स्थिर (Constant) रहता है।

अब सम्बन्ध (ii) से,
$$\frac{dM}{dc} = F = \text{स्थिरांक}$$

$\therefore$
$$dM = F\,dx$$

समाकलन करने पर (on integration)
$$\int dM = F\int dx$$

अतः $M = Fx + C_1$, यहाँ C_1 एक स्थिरांक है।

यह एक सरल रेखा का समीकरण है। **इसलिये संकेन्द्रित भार (Point Load) की दिशा में नमन घूर्ण M में सरल रैखिक परिवर्तन होता है।**

(ii) समवितरित भार (U.D.L.) के लिये—

यदि धरन पर w kN/metre मान का समान बँटा भार (U.D.L.) है, तब

सम्बन्ध (i) से,
$$\frac{dF}{dx} = -w$$

या
$$dF = -w\,dx$$

समाकलन करने पर (on integration)
$$\int dF = -w\int dx$$

अतः
$$F = -wx + C_2$$

जहाँ C_2 एक समाकलन स्थिरांक (constant of integration) है।

इस प्रकार बिन्दु भार की दशा में कर्तन बल (S.F.) में सरल रैखिक परिवर्तन (linearly change) होता है।

अतः
$$\frac{dM}{dx} = F = -wx + C_2$$

या
$$dM = (-wx + C_2)\,dx$$

समाकलन करने पर,
$$\int dM = \int(-wx + C_2)\,dx$$

अतः
$$M = -\frac{wx^2}{2} + C_2x + C_3$$

जहाँ C_3 भी कोई दूसरा समाकलन स्थिरांक है। यहां हम देखते हैं कि नमन घूर्ण M के लिये एक द्वितीय घात समीकरण (second degree equation) प्राप्त होती है जो कि एक परवलय (parabola) को प्रदर्शित करती है। इसलिये समान बँटे भार (U.D.L.) की दशा में नमन घूर्ण परवलयिक (parabolic) ढंग से बदलता है।

(iii) अधिकतम नमन घूर्ण—इस दशा में जहाँ कर्तन बल शून्य है वहाँ
$$F = 0$$

$\therefore$
$$\frac{dM}{dx} = F = 0 \qquad \left[\text{क्योंकि } \frac{dM}{dx} = F\right]$$

जो यह प्रदर्शित करता है कि नमन घूर्ण परिवर्तन की दर शून्य है। इसलिये $F = 0$ वाले बिन्दु पर नमन घूर्ण के परवलय (Parabolic form) पर स्पर्शी (tangent) क्षैतिज हो जाती है अतः वहाँ पर नमन घूर्ण (B.M.) का मान अधिकतम या न्यूनतम होगा।

जब M अधिकतम या न्यूनतम नमन घूर्ण (B.M.) है, तब
$$\frac{d\,[M_{\text{अधिकतम या न्यूनतम}}]}{dx} = 0$$

3.9 कर्तन बल तथा नमन घूर्ण आरेख (Shear force and Bending moment diagrams)

धरन (beam) पर लगने वाले भारों के आधार पर हम कह सकते हैं कि धरन की विभिन्न अनुप्रस्थ काटों (cross-sections) पर कर्तन बल (shear force) तथा नमन घूर्ण (bending moment) के मान भिन्न हो सकते हैं। और इनके मान धरन के विभिन्न भागों के लिये कर्तन बल तथा नमन घूर्ण के समीकरण बनाकर प्राप्त किये जा सकते हैं जिनसे धरन की विभिन्न काटों पर इनके मान ज्ञात हो जाते हैं। परन्तु समीकरण की सहायता से यह तुरन्त पता नहीं चल सकता कि धरन पर कर्तन बल और नमन घूर्णों के मान किस प्रकार बदलते हैं। इसके लिये ही कर्तन बल तथा नमन घूर्ण आरेख खींचे जाते हैं। ये आरेख धरन की लम्बाई को आधार मानकर, उसके विभिन्न बिन्दुओं पर कर्तन बल और नमन घूर्ण के मान लम्बवत् दिशा में काटकर खींचे जाते हैं।

इन आरेखों को देखने मात्र से ही यह पता चल जाता है कि धरन की लम्बाई पर कर्तन बल तथा नमन घूर्ण किस प्रकार बदल रहा है। इससे धरन के अभिकल्पन (design) में काफी सहायता मिलती है।

3.10 किसी धरन के लिए कर्तन बल आरेख तथा नमन घूर्ण आरेख खींचना (To Draw Shear Force Diagram and Bending Moment Diagram for a Beam)

धरन के किसी काट पर कर्तन बल (S.F.) तथा नमन घूर्ण (B.M.) की गणना निम्न पदों (Steps) में की जाती है। तत्पश्चात् SFD तथा BMD बनाये जाते हैं।

(i) शुद्ध आलम्बित धरन (S.S. Beam) की दशा में सर्वप्रथम सिरों पर प्रतिक्रियायें (Reactions) ज्ञात करते हैं।

(ii) धरन के दायें अथवा बायें तरफ का चयन करते हैं जहाँ से गणना प्रारम्भ करनी है। कैंटीलीवर धरन की दशा में गणना हमेशा मुक्त सिरे से गणना प्रारम्भ करनी चाहिये।

(iii) कर्तन बल ज्ञात करने के लिए, चयन किये गये धरन के भाग पर लगे ऊर्ध्वाधर बलों (Vertical Forces) एवं टेक (support) की प्रतिक्रिया का बीजगणितीय योग (algebraic sum) ज्ञात करते हैं। काट में एक तरफ के सभी ऊर्ध्वाधर बलों का बीजगणितीय योग, उस काट पर कर्तन बल (S.F.) का मान होता है।

(iv) नमन घूर्ण (B.M.) ज्ञात करने के लिए, चयनित भाग पर लगे सभी बलों के घूर्ण उस काट के सापेक्ष ज्ञात करते हैं, सभी बलघूर्णों का बीजगणितीय योग, उस काट पर बल घूर्ण (B.M.) का मान होता है।

(v) धरन की लम्बाई के समान्तर एक शून्य रेखा (Datum line) क्षैतिज दिशा में खींचते हैं। उपयुक्त पैमाना मानकर सभी काटों पर कर्तन बल के ज्ञात किये गये (calculated) मान अंकित करते हैं। रूढ़ि चिन्हों (Sign conventions) को ध्यान में रखते हुए धनात्मक मान शून्य रेखा के ऊपर तथा ऋणात्मक मान शून्य रेखा से नीचे लिये जाते हैं।

(vi) इसी प्रकार नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिए भी एक शून्य रेखा खींच कर उस पर उपरोक्त की भाँति नमन घूर्ण के ज्ञात किये गये मान अंकित करते हैं।

(vii) इन सभी मानों को कर्तन बल आरेख के लिए सीधी अथवा तिरछी सरल रेखाओं से तथा नमन घूर्ण आरेख के लिए तिरछी सरल रेखा या परवलय वक्र (Parabolic curve) के द्वारा मिलाते हैं। बिन्दु भारों (point loads) के S.F.D. में सीधी क्षैतिज रेखा तथा B.M.D. तिरछी सरल रेखा द्वारा बनाया जाता है जबकि समवितरित भारों (U.D.L.) के लिए S.F.D. मे तिरछी सरल रेखा तथा B.M.D. में वक्र रेखाओं (Parabolic curve) द्वारा बनाया जाता है।

Scanned with CamScanner

(viii) कर्तन बल एवं नमन घूर्ण (S.F. and B.M.) के अधिकतम मानों को भी इन आरेखों (diagrams) पर दर्शाया जाना चाहिए।

(ix) नमन घूर्ण आरेख पर नति परिवर्तन बिन्दु (Point of contraflexure) (यदि कोई हो तो) भी प्रदर्शित करते हैं।

नोट—"किसी Beam का B.M.D., जिस बिन्दु पर शून्य (Zero) होकर (– ve) से (+ ve) की ओर या (+ve) से (– ve) की ओर जाता है, उसे नति परिवर्तन बिन्दु (Point of contraflexure) कहते हैं।" यह Over-hanging Beam में प्राप्त हो सकता है।

महत्वपूर्ण उदाहरण
(Important Example)

विशेष—कैन्टीलीवर धरन (Cantilever beam) के लिये कर्तन बल (SF) तथा नमन घूर्ण (BM) आरेख

उदाहरण 1. एक L लम्बाई की Cantilever beam पर दिये गये भार (Load) के लिये कर्तन बल आरेख (Shear Force diagram) तथा नमन आघूर्ण आरेख (Bending Moment Diagram) खींचिये—

जबकि (i) Cantilever के मुक्त सिरे (Free end) पर भार W है।

(ii) इसकी पूर्ण लम्बाई (L) पर समवितरित भार w kN/m का (U.D.L.) है।

(iii) 4m लम्बे एक Cantilever के पूरे विस्तार पर समान रूप से वितरित भार 3 kN/m का धारण किये हुए है। SFD व BMD बनायें। **(U.P. 2013)**

हल—चित्र 3.16 (a) में Loaded Beam दिखाई गई है।

(i) माना स्वतन्त्र सिरे B से x दूरी पर कोई काट X-X है।

S.F.D. की गणना के पद—

$\because$ SF at Section $(X-X)$ $F_x = -W$

(1) कर्तन बल ठीक B से पहले अर्थात्

S.F. just before $B \Rightarrow \vec{F_B} = 0$

(2) कर्तन बल ठीक B पर अर्थात् S.F. at $B \Rightarrow F = -W$

(3) Beam के बद्ध सिरे A पर कर्तन बल का मान अर्थात् SF at fixed end $A = -W$

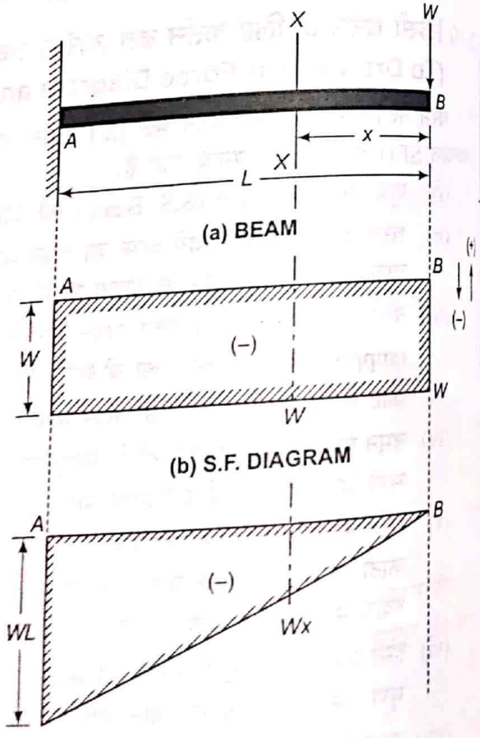
B.M.D. की गणना के पद (Steps for B.M.D.)—

$\because$ B.M. at Section $(X-X)$, $M_X = -W.x$

At $x = 0$, B.M. at $B \Rightarrow M_B = 0$

At $x = L$, B.M. at $A \Rightarrow M_A = -W \times L$

इसका कर्तन बल आरेख (SFD) चित्र (b) में तथा नमन आरेख (BMD) चित्र (c) में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 3.16

(ii) जब cantilever की पूर्ण लम्बाई (L) पर कोई U.D.L. लगा है। माना समवितरित भार (UDL) w/unit length (i.e. w kN/m) है।

For S.F.D (+)↓ ↑(–)

S.F. at $(X-X)$, $\quad F_X = -w.x$

At, $x = 0$, $\quad$ S.F. at B $(F_B) = 0$

At, $x = L$, $\quad$ SF at A $(F_A) = -wL$

For B.M.D.

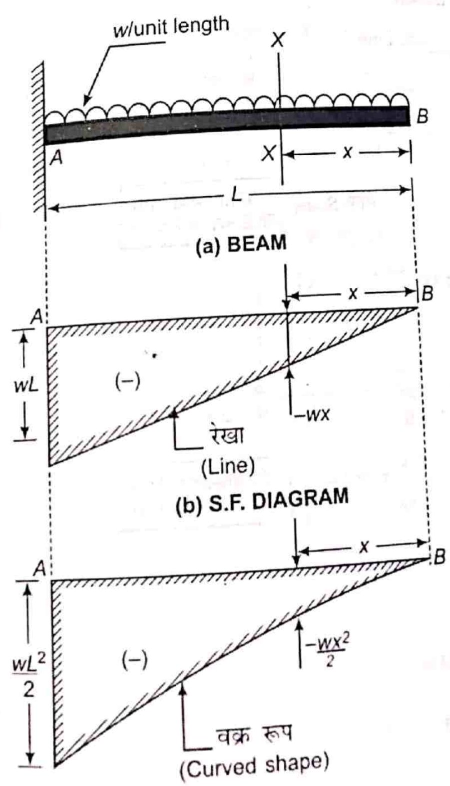
BM at $(X-X)$, $\quad M_X = -(wx)\frac{x}{2}$

$= \frac{-wx^2}{2}$ (curved shape)

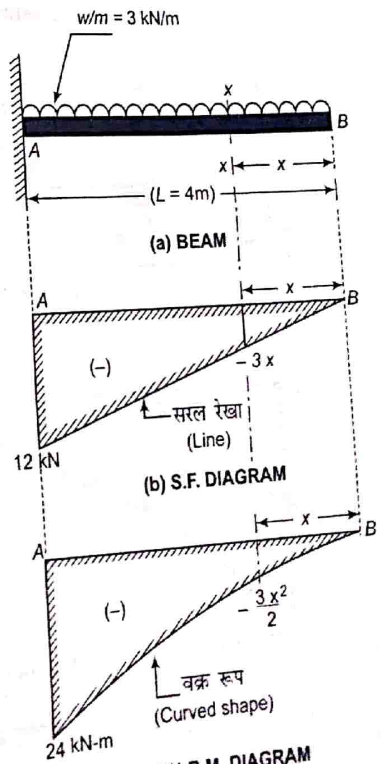
At $x = 0$, $\quad$ B.M. at $B = 0$

At $x = L$, $\quad$ B.M. at A $(M_A) = \frac{-wL^2}{2}$

इस Cantilever के S.F.D. तथा B.M.D. को चित्र 3.17 (b) व (c) में दिखाया गया है।



चित्र 3.17



चित्र 3.18

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

(iii) यह भाग भी भाग (ii) के समान हल करें।

उत्तर—

Max S.F. = 12 kN

Max B.M. = 24 kN-m

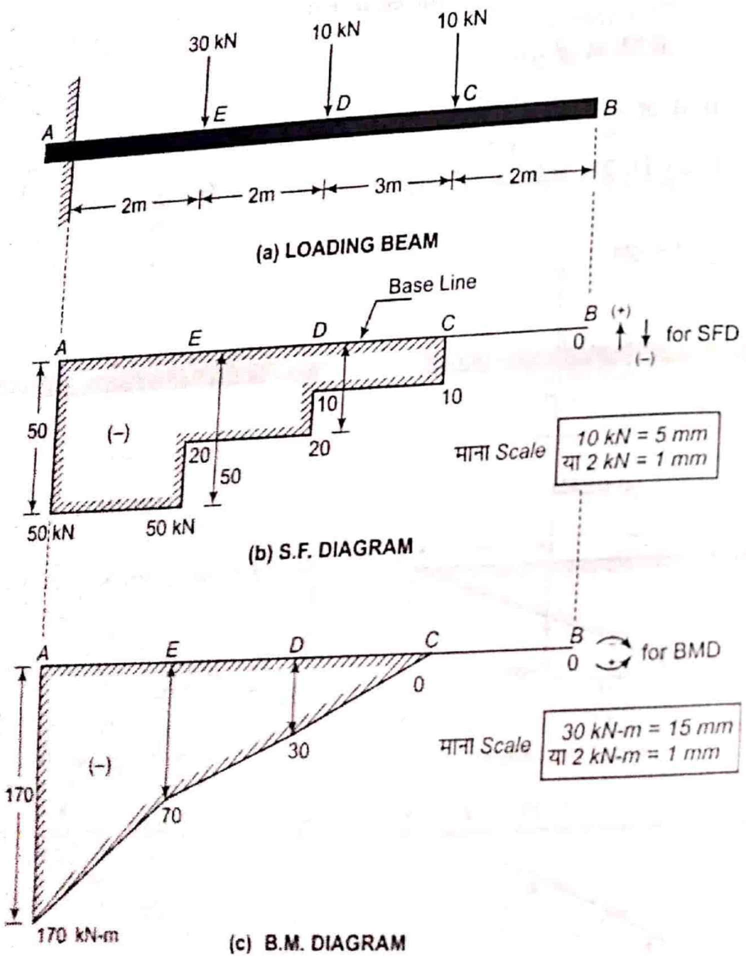
(दोनों ही बद्ध सिरे A पर होंगे)

SFD व BMD को चित्र 3.18 (b) तथा 3.18 (c) में दिखाया गया है।

(U.P., S.O.M., 2013)

उदाहरण 2. चित्र 3.19 (a) में दिखाये गये कैंटीलीवर के लिये कर्तन बल तथा नमन आघूर्ण आरेख (S.F.D. and B.M.D.) खींचिये। (उ० प्र० 1993)

हल—



चित्र 3.19

हल—**(1) कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिए गणना—**

क्योंकि धरन (Beam) पर B से C तक कोई भार या बल नहीं है इसलिये इस भाग में कर्तन बल (S.F.) का मान शून्य (Zero) होगा।

$\therefore F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = 0$

C पर 10 kN का बल नीचे की ओर है अतः C पर कर्तन बल F_C का मान

$F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = -10$ kN होगा,

क्योंकि C से D तक अन्य कोई भार या बल नहीं लग रहा है। इसलिये इस भाग में कर्तन बल (S.F.) का मान – 10 kN स्थिर रहेगा। इसे निम्न प्रकार लिखते हैं—

S.F. just before $\vec{D} = -10$ kN

अब बिन्दु D पर 10 kN का भार नीचे की ओर लगा है। अतः कर्तन बल का मान बिन्दु D पर तुरन्त बदलकर निम्न हो जायेगा।

$F_D \Rightarrow$ S.F. at $D = -10 - 10 = -20$ kN

फिर बिन्दु D से E तक कोई भार या बल नहीं लगता है। इसलिये इस भाग में कर्तन बल (S.F.) का मान – 20 kN स्थिर रहेगा। इसे निम्न प्रकार लिखते हैं।

$\vec{F_E} \Rightarrow$ S.F. just before $\vec{E} = -20$ kN

अब E पर 30 kN का भार लगने के कारण कर्तन बल (S.F.) का मान इस बिन्दु E पर तुरन्त बदलकर निम्न हो जायेगा।

$F_E \Rightarrow$ S.F. at $E = -20 - 30 = -50$ kN

अब फिर E से A तक कोई भार न लगा होने के कारण S.F. का मान –50 kN ही स्थिर रहेगा।

$\therefore$ S.F. just before $\vec{A} = -50$ kN

बाद में प्रतिक्रिया $R_A = 50$ kN↑ को सम्मिलित करने पर S.F. का मान शून्य हो जायेगा।

$\therefore$ S.F. at $A = 0$

(2) नमन आघूर्ण आरेख (BMD) के लिये गणना—

चिन्ह प्रणाली, दांयी ओर से

B से C तक कोई भार न होने के कारण इस भाग में B.M. शून्य होगा।

$\therefore$

$M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = 0$

$M_C \Rightarrow$ B.M. at $C = 0$

$M_D \Rightarrow$ B.M. at $D = -10 \times 3 = -30$ kN-m

$M_E \Rightarrow$ B.M. at $E = -10 \times CE - 10 \times DE$

$= -10 \times 5 - 10 \times 2 = -50 - 20 = -70$ kN-m

$M_A \Rightarrow$ B.M. at $A = -10 \times CA - 10 \times DA - 30 \times EA$

$= -10 \times 7 - 10 \times 4 - 30 \times 2$

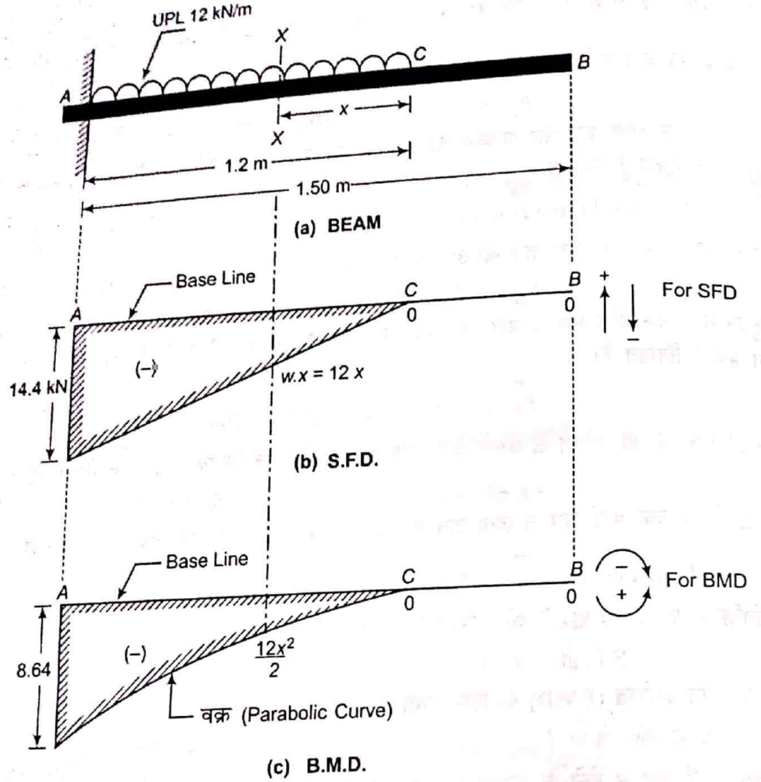
$= -70 - 40 - 60$

$= -170$ kN-m उत्तर

धरन या बलों के बीच में B.M.D. एक सरल रैखिक होगा अतः भारों के बीच अलग-अलग सरल रेखायें खींची जायेंगी। इस प्रकार नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) को चित्र 3.19 (c) में दिखाया गया है।

उदाहरण 3. चित्र 3.20 (a) में दिखाये गये 1·5 m लम्बे कैंटीलीवर के बद्ध सिरे A से 1·2 m लम्बाई तक 1[illegible] kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है, इसके लिये कर्तन बल आरेख (S.F.D.) तथा नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) खींचिये।

Scanned with CamScanner



चित्र 3.20

हल—कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिए गणना— $\overset{+}{\uparrow}\downarrow(-)$

क्योंकि धरन (Beam) पर B से C तक कोई भार या बल नहीं है, इसलिये इस भाग में कर्तन बल (S.F.) का मान शून्य (Zero) होगा।

$\therefore$ $F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = 0$

तथा $F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = 0$

$\because$ C से x दूरी पर स्थित काट $(X-X)$ पर कर्तन बल,

$F_X = -wx$

$\therefore$ $F_X \Rightarrow$ S.F. at $(X-X) = -12 \times x$ kN (यह एक सरल रेखा है)

$F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -12 \times 1{\cdot}2 = -14{\cdot}4$ kN (यहाँ $x = 1{\cdot}2$ m है)

इस गणना द्वारा प्राप्त S.F.D को चित्र 3.20 (b) में दिखाया गया है।

नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिये गणना—

चिन्ह प्रणाली, दांयी ओर से

धरन पर B से C तक कोई भार न होने के कारण इस भाग में नमन आघूर्ण का मान शून्य (Zero) होगा।

$\therefore$ $M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = 0$

$M_C \Rightarrow$ B.M. at $C = 0$

यदि C से x दूरी पर स्थित काट $(X-X)$ पर नमन आघूर्ण M_x है, तो

$M_X \Rightarrow$ B.M. at $(X-X) = (X-X)$ काट के दांयी ओर के भार का इस काट पर आघूर्ण है।

$M_X \Rightarrow -12 \times x \times \frac{x}{2}$

या ($\because$ x लम्बाई के U.D.L. का भार x के ही मध्य में कार्य करेगा।)

$\Rightarrow \frac{-12x^2}{2} \Rightarrow -6x^2$ (यह समीकरण Parabolic curve की है।)

अब $M_B \Rightarrow$ B.M. at $A = -12 \times 1{\cdot}2 \times \frac{1{\cdot}2}{2} = -6 \times (1{\cdot}2)^2$

$M_A \Rightarrow -6 \times 1{\cdot}44 = -8{\cdot}64$ kN-m

$\therefore$ यहाँ C से A तक U.D.L. के कारण BMD में Parabolic curve प्रदर्शित होगा। इस गणना द्वारा प्राप्त B.M.D. को चित्र 3.20 (e) में दिखाया गया है।

उदाहरण 4. चित्र 3.21 (a) में 2 m लम्बे एक कैंटीलीवर धरन AB के मुक्त सिरे से 1·6 m लम्बाई तक 10 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। धरन (Beam) के लिये S.F. तथा B.M. आरेख बनाइये।

हल—प्रश्नानुसार चित्र 3.21 (a) के अनुसार बनाइये।

For S.F.D from RHS $\overset{+}{\uparrow}\downarrow(-)$

F_B = S.F. at $B = 0$

F_C = S.F. at $C = -10 \times 1{\cdot}6 = -16$ kN

F_A = S.F. at $A = -16$ kN (Max Value)

For B.M.D. (from R.H.S.)

M_B = BM at $B = 0$

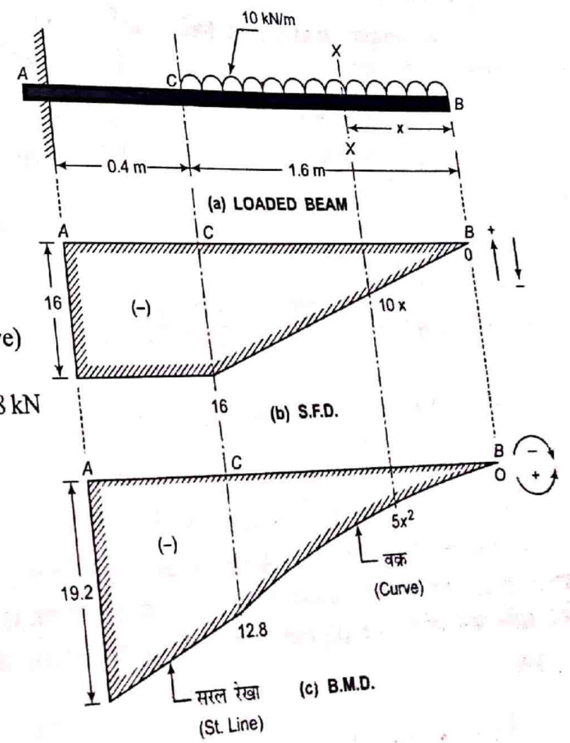
M_X = BM at distance x from B

$= -10 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -5x^2$ (Parabolic curve)

M_C = BM at $C = -5 \times (1{\cdot}6)^2 = -12{\cdot}8$ kN

$M_A = -10 \times 1{\cdot}6 \times \left(0{\cdot}4 + \frac{1{\cdot}6}{2}\right)$

$= -19{\cdot}2$ kN-m



चित्र 3.21

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

उदाहरण 5. एक 4 मीटर लम्बे कैन्टीलीवर धरन के बीच (middle) की 2 m लम्बाई पर 10 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। कर्तन बल आरेख (S.F.D.) तथा नमन आघूर्ण आरेख (BMI) खींचिये।

हल—कर्तन बल आरेख के लिये गणना (For S.F.D. from R.H.S.)

For S.F.D $\overset{+}{\uparrow}\underset{(-)}{\downarrow}$

From R.H.S.

Scale (1 cm = 10 kN)

$F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = 0$

$F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = 0$

$F_D \Rightarrow$ S.F. at $D = -10 \times 2$

$= -20$ kN

D से A तक beam खाली है, मान स्थिर होगा।

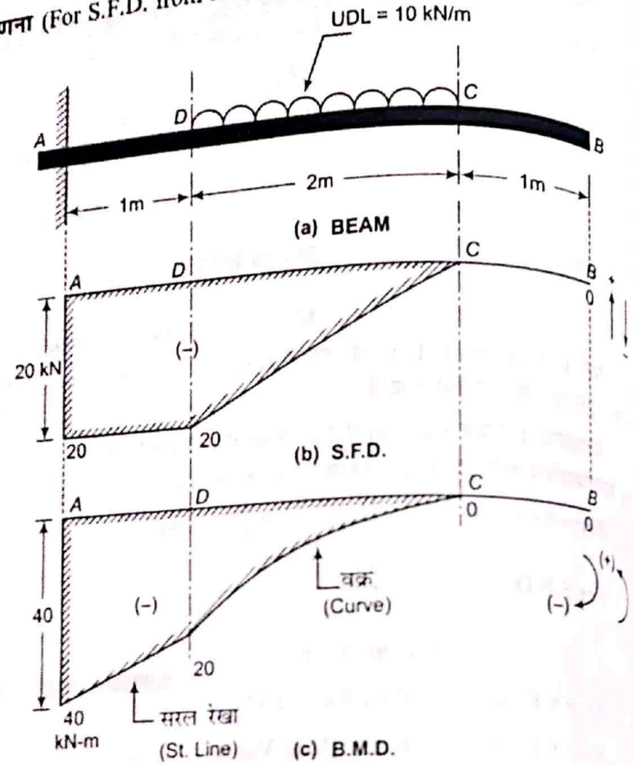
$F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -20$ kN

अब S.F.D. को चित्र 3.22 (b) के अनुसार बनाते हैं।

नमन आघूर्ण (B.M.D.) के लिये गणना—चिन्ह प्रणाली

$M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = 0$

$M_C \Rightarrow$ B.M. at $C = 0$



चित्र 3.22

$M_D \Rightarrow$ B.M. at $D = -10 \times 2 \times \frac{2}{2} = -20$ kN-m

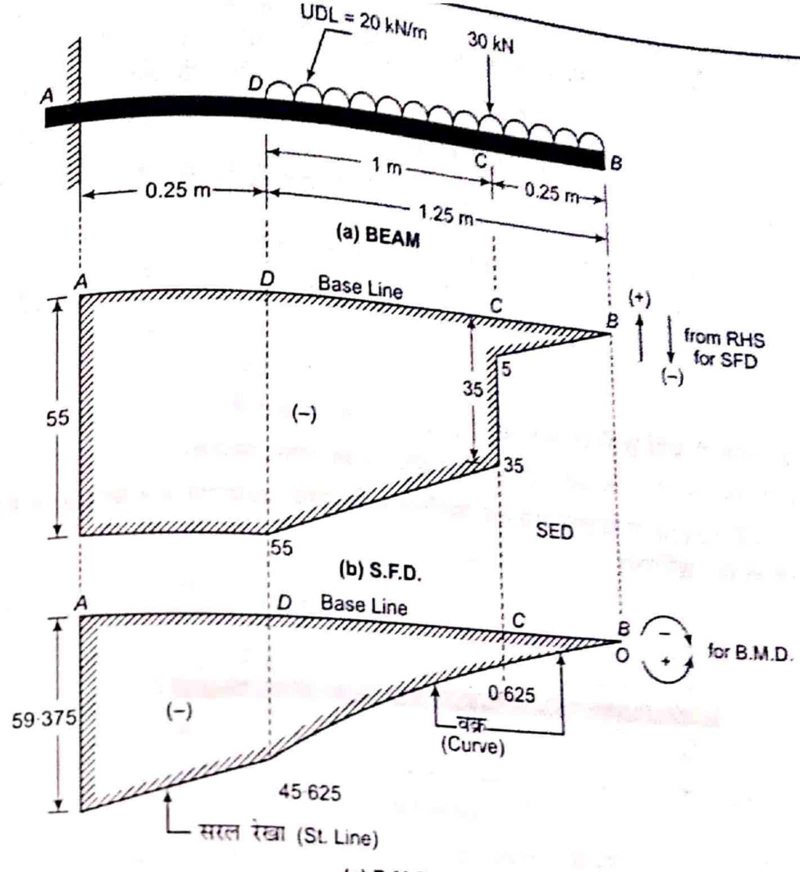
$M_A \Rightarrow$ B.M. at $A = -10 \times 2\left[1 + \frac{2}{2}\right]$

$= -40$ kN-m

अब B.M.D. को चित्र 3.22 (c) के अनुसार बनाते है।

** उदाहरण 6. एक 1·5 m लम्बे कैन्टीलीवर पर स्वतन्त्र सिरे से 1·25 m लम्बाई तक 20 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। उस पर स्वतन्त्र सिरे से 0·25 m की दूरी पर एक 30 kN का बिन्दु भार भी लगा है। कैन्टीलीवर के लिये कर्तन बल आरेख (S.F.D.) तथा नमन आघूर्ण आरेख (BMD) खींचिये। (U.P. 200[illegible])

हल—



चित्र 3.23

कर्तन बल आरेख (S.F.D) के लिये गणना—

बिन्दु B पर कर्तन बल, $F_B \Rightarrow$ SF at $B = 0$ [$\because$ B पर कोई बिन्दु भार नहीं है]

अब बिन्दु C के ठीक पहले कर्तन बल का मान (C पर 30 kN के भार को प्रयोग न करने पर)

$F_C \Rightarrow$ S.F. just before $\vec{C} = -20 \times 0·25 = -5$ kN

$F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = -5 - 30 = -35$ kN

$F_D \Rightarrow$ S.F. at $D = -35 - 20 \times 1 = -55$ kN

$F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -55$ kN

(D से A तक भार न होने के कारण SF का मान स्थिर है।)

इनसे बने S.F.D. को चित्र 3.23 (b) में दिखाया गया है।

नोट—धरन के जिस बिन्दु पर संकेन्द्रित भार (Point Load) लगा होता है वहाँ S.F.D. की गणना में S.F. just before लेते हैं। इसके बाद S.F. at Point लेते हैं।

नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिये गणना—

$M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = 0$ (Zero, due to No Point Load at B)

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

$$M_C \Rightarrow \text{B.M. at } C = -20 \times 0{\cdot}25 \times \frac{0{\cdot}25}{2}$$

(यह C के दांयी ओर के भार का C पर घर्ण)

((– ve) due to clockwise moment)

$$= -0{\cdot}625 \text{ kN-m}$$

$$M_D \Rightarrow \text{B.M. at } D = -20 \times 1{\cdot}25 \times \frac{1{\cdot}25}{2} - 30 \times 1$$

$$= -15{\cdot}625 - 30 = -45{\cdot}625 \text{ kN-m}$$

$$M_A \Rightarrow \text{B.M. at } A = -30 \times 1{\cdot}25 - 20 \times 1{\cdot}25 \times \left[0{\cdot}25 + \frac{1{\cdot}25}{2}\right]$$

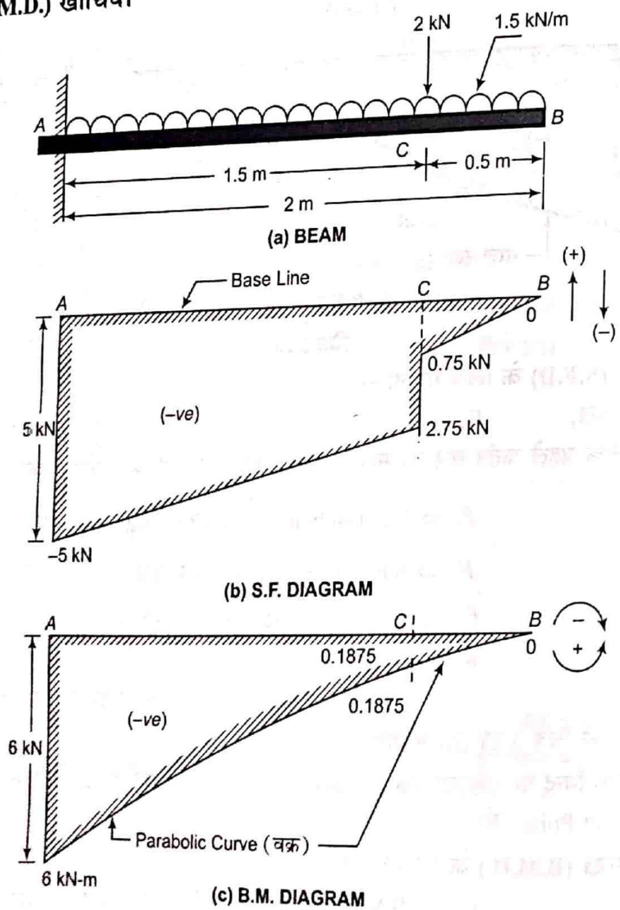
$$= -37{\cdot}5 - 21{\cdot}875 = -59{\cdot}375 \text{ kN-m}$$

B.M. के इन मानों से प्राप्त B.M.D. को चित्र 3.23 (c) में दिखाया गया है।

नोट—S.F.D. तथा B.M.D. के चित्रों को उचित पैमाना मानकर बनाना चाहिये।

उदाहरण 7. चित्र 3.24 (a) में दिखाये गये एक कैन्टीलीवर के लिये अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) तथा नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) खींचिये। **(U.P. 2004)**

हल—



चित्र 3.24

अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

स्वतन्त्र सिरे B पर कर्तन बल,

$$F_B \Rightarrow \text{S.F. at } B = 0$$

C पर लगे बिन्दु भार से ठीक पहले कर्तन बल,

$$F_C \Rightarrow \text{S.F. just before } C = -1{\cdot}5 \times 0{\cdot}5 = -0{\cdot}75 \text{ kN}$$

अब C पर बिन्दु भार 2 kN के कारण SF का मान तुरन्त एक ऊर्ध्वाधर रेखा में बदलेगा।

$$\therefore \quad F_C \Rightarrow \text{S.F. at } C = -0{\cdot}75 - 2$$

$$= -2{\cdot}75 \text{ kN}$$

अब C से A तक फिर U.D.L. के कारण S.F. तिरछी रेखा के अनुसार बदलेगा।

$$\therefore \quad F_A \Rightarrow \text{S.F. at } A = -2{\cdot}75 - 1{\cdot}5 \times 1{\cdot}5$$

$$= -2{\cdot}75 - 2{\cdot}25$$

$$F_A \Rightarrow -5 \text{ kN (अधिकतम)}$$

नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिये गणना—

$$M_B \Rightarrow \text{B.M. at } B = 0 \text{ (स्वतन्त्र सिरे पर सदा शून्य होता है)}$$

$$M_C \Rightarrow \text{B.M. at } C = -1{\cdot}5 \times 0{\cdot}5 \times \frac{0{\cdot}5}{2} = -0{\cdot}1875 \text{ kN-m}$$

$$M_A \Rightarrow \text{B.M. at } A = -1{\cdot}5 \times 2 \times \frac{2}{2} - 2 \times 1{\cdot}5 = -3 - 3 = -6 \text{ kN-m}$$

धरन की पूर्ण लम्बाई पर समवितरित भार (UDL) के कारण नमन आघूर्ण आरेख (BMD) में Parabolic curve (वक्र) ऊपर को उठाते हुए बनाया जाता है।

उदाहरण 8. एक दो मीटर लम्बी कैंटीलीवर धरन (Cantilever beam) पर चित्र के अनुसार भार लग रहा है। मुख्य भागों की काटों पर कर्तन बल तथा नमन आघूर्ण (Shear Force and Bending Moment at different sections of main portion) ज्ञात करें तथा S.F.D. तथा B.M.D. भी खींचें।

हल—कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

चिन्ह प्रणाली (sign convention)

काट के दांयी ओर से (from R.H.S.) $\overset{(+)}{\uparrow}\underset{(-)}{\downarrow}$

धरन के सिरे B पर बिन्दु भार 20 kN से ठीक पहले दांयी ओर कर्तन बल, $\vec{F_B}$

$$\therefore \quad \vec{F_B} \Rightarrow \text{S.F. just before } \vec{B} = 0$$

अब B पर बिन्दु भार 20 kN से कर्तन बल, F_B

$$F_B \Rightarrow \text{S.F. at } B = -20 \text{ kN}$$

B से C तक कोई भार न लगे होने के कारण S.F. का मान इस बीच स्थिर रहेगा। अतः $(X_1 - X_1)$ काट पर भी SF का मान – 20 kN ही रहेगा।

Scanned with CamScanner

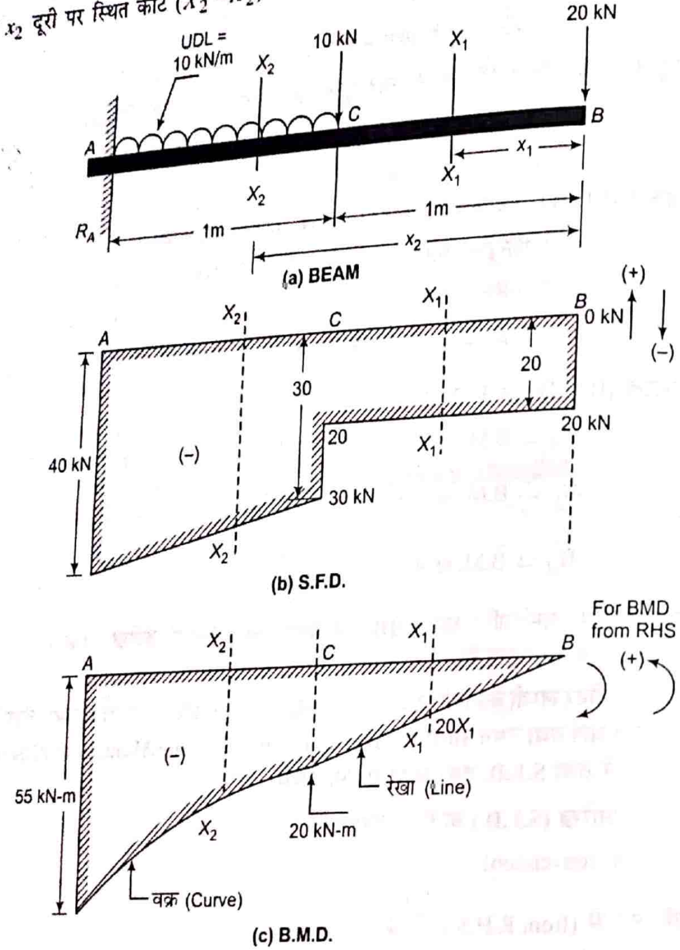
Study PowerPoint

$\vec{F_C} \Rightarrow$ S.F. just before $\vec{C} = -20$ kN

$\therefore$ $F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = -20 - 10 = -30$ kN

तथा

B से x_2 दूरी पर स्थित काट $(X_2 - X_2)$ पर कर्तन बल,



चित्र 3.25

$$F_{(X_2-X_2)} = \text{S.F. at } (X_2 - X_2) = -30 - 10 \times (x_2 - 1)$$ उत्तर

यह एक सरल रेखा का समीकरण है। अतः SF_1 का मान C से A तक अर्थात् x_2 का मान 1 m से 2 m तक तिरछी सरल रेखा के रूप में बढ़ेगा।

$\therefore$ $\vec{F_A}$ = S.F. just before $\vec{A} = -30 - 10 \times (2 - 1) = -40$ kN

$\therefore$ S.F. at fixed end $A = -40$ kN (यहाँ $x_2 = 2$ m रखा है)

प्राप्त मानों के आधार पर S.F.D. को चित्र 3.25 (b) में दिखाया गया है।

नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिये गणना—

चिन्ह प्रणाली (Sign Conventions), दांयी ओर से

M_B = B.M. at $B = 0$

$M_{(X_1-X_1)}$ = B.M. at distance x_1 from $B = -20x_1$

यह एक सरल रेखा का समीकरण है जहाँ x_1 का मान 0 से 1 m तक बढ़ेगा जिससे BMD भी सरल रेखीय रूप में होगा। उत्तर

$\therefore$ M_C = B.M. at $C = -20 \times 1 = -20$ kN-m (यहाँ $x_1 = 1$ m है।)

$M_{(X_2-X_2)}$ = B.M. at distance x_2 from B (at Section $X_2 - X_2$)

$$= -20 \times x_2 - 10 \times (x_2 - 1) - 10(x_2 - 1) \times \frac{(x_2 - 1)}{2}$$

$$= -20x_2 - 10(x_2 - 1) - 5(x_2 - 1)^2$$ उत्तर

यह एक परवलय समीकरण (Parabolic eq^n) है जो C से A तक के लिये B.M.D. को प्रदर्शित करेगी।

$\therefore$ M_A = B.M. at A (समीकरण में $X_2 = 2$ रखने पर)

$$= -20 \times 2 - 10(2 - 1) - 5(2 - 1)^2$$

$$= -40 - 10 - 5 = -55 \text{ kN-m}$$

B.M. के प्राप्त हुए मान (Value) के आधार पर B.M.D को चित्र 3.25 (c) में दिखाया गया है।

उदाहरण 9. चित्र 3.26 में दिखायी गयी एक कैन्टीलीवर धरन (Beam) के लिये कर्तन बल आरेख (SFD) तथा नमन घूर्ण आरेख (BMD) उचित पैमाना मानकर बनाइये। इस कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे (Free end) 0, 2, 4, 6 तथा 8 m की दूरियों पर कर्तन बल तथा नमन घूर्ण (S.F. and B.M.) के मानों को लिखिये।

हल—क्योंकि कैन्टीलीवर का स्वतन्त्र सिरा (Free end) बाँयीं ओर (at Left Side) है, इसलिए S.F.D. तथा B.M.D. की गणना बाँयी ओर से ही करनी सरल (easy) होगी तथा चिन्ह प्रणाली (Sign Conventions) भी बाँयीं ओर वाली प्रयोग करेंगे। जैसे—For S.F.D. $\overset{-}{\uparrow}\underset{(+)}{\downarrow}$ तथा For BMD, (−Ve) if ↻ and (+ Ve) if ↺ moments from L.H.S.

नोट—इसके विपरीत चिन्ह $\left(\underset{(-)}{\downarrow}\overset{(+)}{\uparrow}\right)$ प्रणाली मानकर SFD को आधार रेखा AD के नीचे भी बनाया जा सकता है।

कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिए गणना (From L.H.S. $\overset{(-)}{\uparrow}\underset{(+)}{\downarrow}$)

$F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = +250$ N (आधार रेखा AD से ऊपर +ve होता है)

B के ठीक बाँयी ओर के भार के कारण कर्तन बल $= \overleftarrow{F_B}$ अर्थात्

S.F. just before $\overleftarrow{B}$ (from L.H.S.) $= +250 + 30 \times 2 = +310$ N

$F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = 310 + 700 = 1010$ N (यह मान B से C तक स्थिर रहेगा)

$F_E \Rightarrow$ S.F. at $E = 1010$ N

Scanned with CamScanner

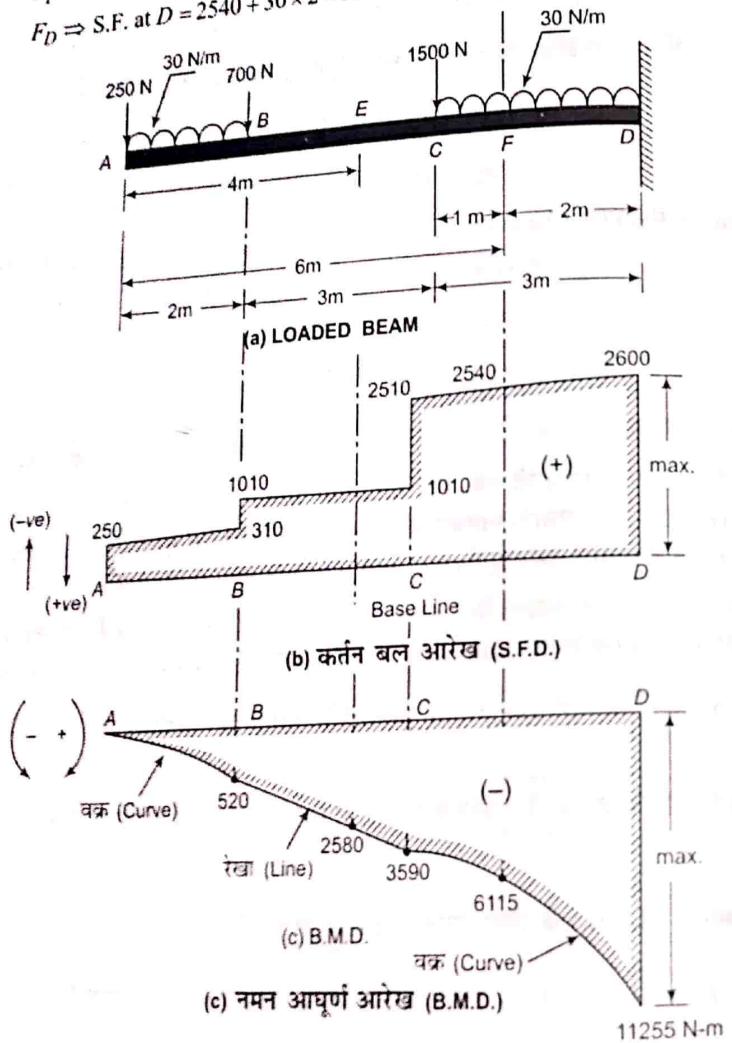
अब C के ठीक पहले बांयी ओर (1500 N भार को प्रयोग न करके)

$\overleftarrow{F_C} \Rightarrow$ S.F. just before $\overleftarrow{C} = 1010$ N

$F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = 1010 + 1500 = 2510$ N

$F_F \Rightarrow$ S.F. at $F = 2510 + 30 \times 1 = 2540$ N

$F_D \Rightarrow$ S.F. at $D = 2540 + 30 \times 2 = 2600$ N



चित्र 3.26

नोट—S.F. के धन (+ve) मानों को आधार रेखा से ऊपर लेकर चित्र बनाया जायेगा। कर्तन बल आरेख (SFD) को चित्र 3.26 (b) मे दिखाया गया है।

नमन आघूर्ण आरेख (BMD) के लिये गणना

चिन्ह प्रणाली, बाँयी ओर से (From LHS)

$M_A \Rightarrow$ B.M. at $A = 0$ (स्वतन्त्र सिरे पर BM का मान सदैव शून्य होता है।)

$M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = -250 \times 2 - 30 \times 2 \times \frac{2}{2}$

$= -500 - 60 = -560$ N-m

$M_E \Rightarrow$ B.M. at $E = -250 \times 4 - 700 \times 2 - 30 \times 2 \times \left(2 + \frac{2}{2}\right)$

$= -1000 - 1400 - 180$

$= -2580$ N-m

$M_C \Rightarrow$ B.M. at $e = -250 \times 5 - 700 \times 3 - 30 \times 2 \times \left(3 + \frac{2}{2}\right)$

$= -1250 - 2100 - 240$

$= -3590$ N-m

$M_F \Rightarrow$ B.M. at $F = -250 \times 6 - 700 \times 4 - 1500 \times 1$

$- 30 \times 2 \times \left(4 + \frac{2}{2}\right) - 30 \times 1 \times \frac{1}{2} = -6115$ N-m

$M_D \Rightarrow$ B.M. at $D = -250 \times 8 - 30 \times 2 \times 7 - 700 \times 6 - 1500 \times 3 - 30 \times 3 \times \frac{3}{2}$

$= -11255$ N-m

इनसे प्राप्त BMD को चित्र 3.26 (c) में दिखाया गया है।

नोट—आधार रेखा से ऊपर सदैव (+ve) मानते हैं तथा नीचे की ओर (– ve) मानते हैं। अत: चिन्ह प्रणाली के आधार पर गणना से जो मान (+ve) आता है उसे आधार रेखा (Base Line) से ऊपर काटते है तथा जो मान (– ve) आता है उसे आधार रेखा से नीचे काटते हैं।

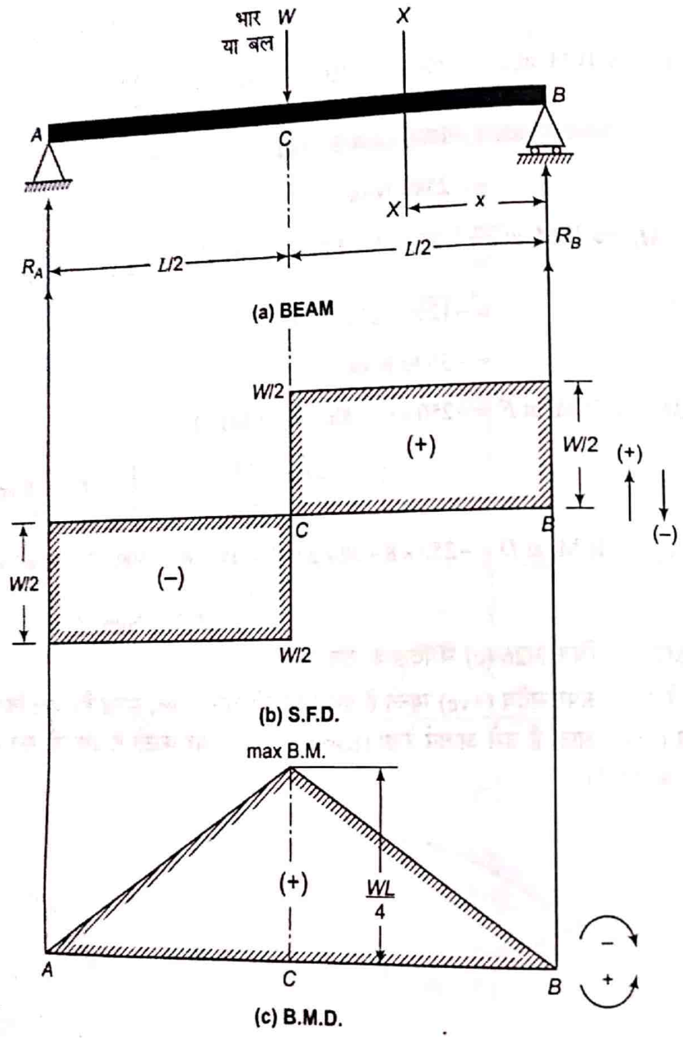
Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

**विशेष-सरल आधारित धरन (शुद्धालम्ब धरन) (Simply Supported Beam) पर आधारित-

उदाहरण 10. L विस्तार की एक सरल आधारित धरन (S.S. Beam) के मध्य-बिन्दु पर संकेन्द्रित बल (Point Load) W लगा है। अपरूपण बल (S.F.) तथा बंकन आघूर्ण (B.M.) के आरेख (diagrams) खींचिये।
(U.P. 2013, M.O.S. & S.O.M.)

हल—



चित्र 3.27

प्रश्नानुसार धरन (Beam) चित्र 3.27 (a) में दिखाई गई है। इसमें भार W लम्बाई L के मध्य में (at mid-point) होने के कारण दोनों टेकों A तथा B की प्रतिक्रियायें क्रमश: R_A तथा R_B आपस में समान होंगी

$\therefore \quad R_A = R_B = \frac{\text{कुल भार } (W)}{2}$ होगा।

(1) कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

Beam के R.H.S. की चिन्ह प्रणाली (Sign Convention) प्रयोग करने पर—

अब ठीक B पर कर्तन बल $= R_B = \frac{W}{2}\uparrow$ अर्थात् S.F. at $B = R_B = \frac{W}{2}$ (+ve)

$\because$ धरन (Beam) के भाग BC में कोई अन्य भार (Load) नहीं लग रहा है, अत: S.F. का मान B से C पर पहुँचने तक स्थिर (constant) रहेगा।

$\therefore$ S.F. just before (right of) C

$$\Rightarrow \vec{F_C} = \frac{W}{2} \text{ (+ve)}$$

अब C पर भार नीचे की ओर (− ve) दिशा में लगा है।

$\therefore$ S.F. at $C \qquad \Rightarrow F_C = +\frac{W}{2} - W = -\frac{W}{2}$

अब C से A तक beam पर कोई भी अन्य भार नहीं लगा है, अत: S.F. का यह मान A पर पहुँचने तक स्थिर (constant) रहेगा।

$\therefore$ S.F. just before (right of) A

$$\Rightarrow \vec{F_A} = -\frac{W}{2}$$

$\therefore$ S.F. at $A \qquad \Rightarrow \vec{F_A} = -\frac{W}{2} + R_A \qquad (\because A \text{ पर प्रतिक्रिया } R_A \text{ है})$

$$= -\frac{W}{2} + \frac{W}{2} = 0$$

नोट—दो टेकों वाली Beam के S.F.D. की गणना में सबसे अन्त (last) में S.F. का मान शून्य (Zero) अवश्य आयेगा।

Beam के S.F.D. को चित्र 3.27 (b) में दिखाया गया है।

(2) नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिये गणना—

Beam के R.H.S. से गणना करने पर दायीं ओर की चिन्ह प्रणाली (Sign Convention) प्रयोग की जायेगी।

अब B.M. at Section $(X - X) \Rightarrow M_X = R_B \times x = \frac{W}{2} \times x$

$\therefore \; x = 0$ पर; B पर नमन घूर्ण अर्थात् BM at B

$$\Rightarrow M_B = 0$$

C पर नमन घूर्ण अर्थात् B.M. at C

$$\Rightarrow M_C = R_B \times \frac{L}{2} = \frac{W}{2} \times \frac{L}{2}$$

$$M_C = \frac{WL}{4} \text{ (अधिकतम मान)}$$

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

अब A पर नमन आघूर्ण अर्थात् BM at A

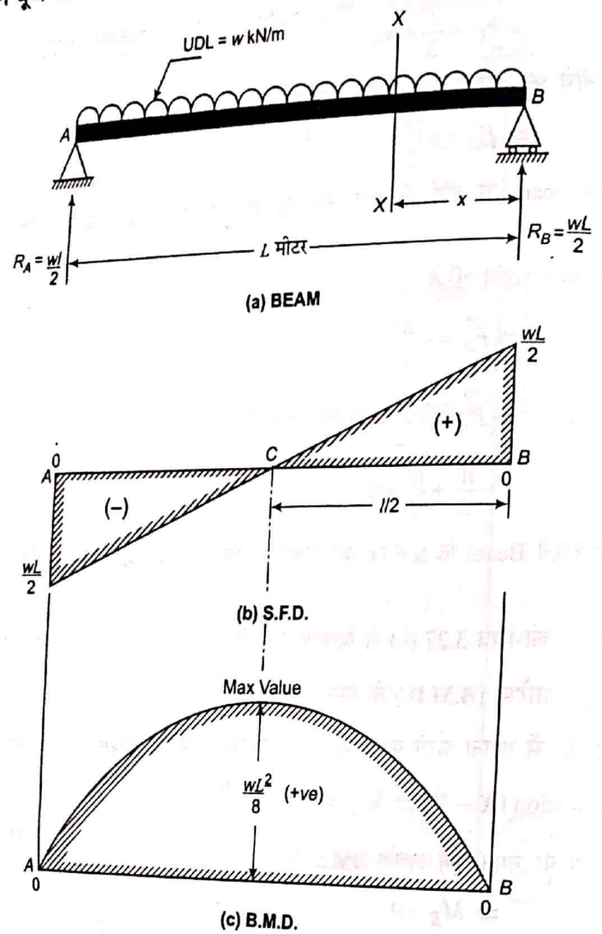
$$\Rightarrow M_A = R_B \times L - W \times \frac{L}{2}$$

$\therefore$ $$M_A = \frac{W}{2} \times L - W \times \frac{L}{2} = 0$$ (देखें चित्र 3.27 (c))

याद रखें—दो टेकों वाली Beam के दोनों सिरों पर B.M. का मान सदैव शून्य (Zero) होता है।

उदाहरण 11. चित्र 3.28 (a) में विस्तार L की एक सरल आलम्बित धरन (Simply Supported Beam) पर wkN/m का समान रूप से बँटा भार (Uniformly Distributed Load — U.D.L.) लगा है। अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) तथा नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) बनाइये और इनके अधिकतम मानों को दर्शाइये। (U.P. 2014)

हल—



चित्र 3.28

भार की सममिति के कारण (Due to Symmetry of Loading)

$$R_A = R_B = \frac{\text{Total Load } (w \times L)}{2}$$

कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

B से x दूरी पर स्थित काट $(X-X)$ पर

S.F. at Section $(X-X)$

$$F_X = R_B - w.x$$

$$F_X = \left(\frac{wL}{2} - w.x\right)$$

$x = 0$ लेने पर S.F. at B $$= \frac{wL}{2} \Rightarrow R_B$$ ... (i)

$X = \frac{L}{2}$ पर S.F. at centre (C)

$$F_C = \frac{wL}{2} - w \times \frac{L}{2} = 0$$

अत: केन्द्र पर $SF = 0$ है।

अब कर्तन बल का मान, A पर पहुँचने तक अर्थात्

S.F. just before (right of) $A \Rightarrow \vec{F_A} = \frac{wL}{2} - w \times L = -\frac{wL}{2}$ [$\because$ यहाँ $x = L$ है]

$\therefore$ ठीक A पर कर्तन बल अर्थात्

$$\text{S.F. at } A = -\frac{wL}{2} + R_A = -\frac{wL}{2} + \frac{wL}{2} = 0$$

प्राप्त हुए मानों से S.F.D. को चित्र 3.28 (b) में दिखाया गया है।

(2) नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिए गणना—

BM at Section $(X-X)$ $\Rightarrow M_X = R_B \times x - w.x.\frac{x}{2}$

$\therefore$ $$M_X = \left(\frac{wL}{2} \times x - \frac{wx^2}{2}\right) \text{ (वक्र समीकरण)}$$

अत: B.M.D. एक Parabolic curve रूप में होगा।

$x = 0$ रखने पर, B पर नमन घूर्ण (M_B) अर्थात्

B.M. at $B \Rightarrow M_B = 0$ ($\because$ दोनों सिरों (ends) पर $BM = 0$ होता है)

$x = \frac{L}{2}$ रखने पर, Beam के मध्य में नमन घूर्ण अधिकतम होगा क्योंकि यहाँ $SF = 0$ है।

$\therefore$ Max B.M. at C $\Rightarrow M_C = R_B \times \frac{L}{2} - w \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{4}$

या $$M_C = \frac{wL}{2} \times \frac{L}{2} - \frac{wL^2}{8}$$

$\therefore$ $$M_C = \frac{2wL^2 - wL^2}{8} = \frac{wL^2}{8}$$ (सूत्र)

टेक A पर नमन आघूर्ण (M_A) अर्थात् ($x = L$ रखने पर Moment)

B.M. at A $\Rightarrow M_A = \frac{wL}{2} \times L - w \times L \times \frac{L}{2} = 0$

अत: Beam के दोनों सिरों (Ends) पर B.M. का मान शून्य (Zero) है।

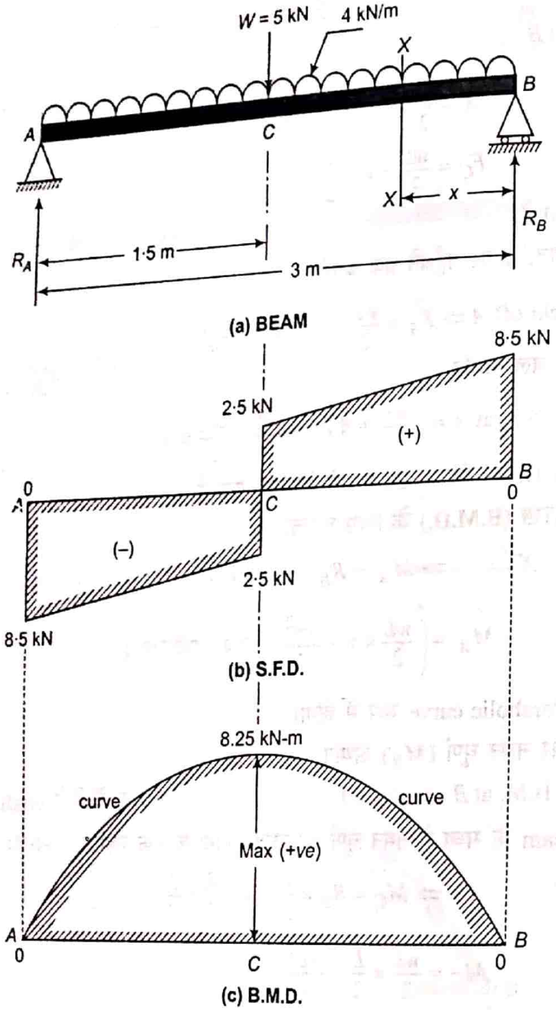
इस Beam के B.M.D. को चित्र 3.28 (c) में देखें।

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

उदाहरण 12. एक शुद्धालम्ब धरन (S.S. Beam) का विस्तार (span) 3 m है। इसकी पूरी लम्बाई पर 4 kN/m का एकसमान वितरित भार (U.D.L.) तथा मध्य-बिन्दु (mid-point) पर 5 kN का संकेन्द्री भार (Point Load) लगा है। इस धरन के लिये कर्तन बल तथा नमन घूर्ण आरेख (SFD) तथा (BMD) खींचिये। इनके अधिकतम मानों को आरेख पर अंकित कीजिये। (U.P. 2008, MOS)

हल—



चित्र 3.29

माना टेक A तथा टेक B की प्रतिक्रियायें क्रमश: R_A तथा R_B हैं।

∵ भार सममित रूप में (symmetrical) अर्थात् सिरों से बराबर दूरी पर बराबर भार लगे है। अत:

$$R_A = R_B = \frac{\text{कुल भार}}{2}$$

$$R_A = R_B = \frac{5+(4\times 3)}{2} = \frac{17}{2}$$

$$= 8{\cdot}5 \text{ kN}$$

अथवा प्रतिक्रियायें (Reactions) को निम्न प्रकार भी ज्ञात कर सकते हैं—

$$R_A + R_B = \text{Total Load on Beam}$$

$$= 5 + (4\times 3) = 17 \text{ kN}$$

बिन्दु A के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर

$$R_B \times 3 = 5\times 1{\cdot}5 + 4\times 3\times \frac{3}{2} = 25{\cdot}5$$

$$R_B = \frac{25{\cdot}5}{3} = 8{\cdot}5 \text{ kN}$$

या

∴ $R_A = 17 - R_B \Rightarrow 17 - 8{\cdot}5 = 8{\cdot}5$ kN

(1) कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

बिन्दु B पर कर्तन बल (S.F. at B)

$\Rightarrow$ $F_B = R_B = 8{\cdot}5$ kN

ठीक C के पहले कर्तन बल (S.F. just before or just right of C) $\Rightarrow \vec{F}$

∴ $\vec{F_C} = 8{\cdot}5 - 4\times 1{\cdot}5 = 2{\cdot}5$ kN

अब ठीक C पर कर्तन बल (S.F. at C)

$\Rightarrow$ $F_C = 2{\cdot}5 - 5 = -2{\cdot}5$ kN

अब कर्तन अब ठीक A से पहले अर्थात्

S.F. just before A (just right of A)

$\Rightarrow$ $\vec{F_A} = -2{\cdot}5 - 4\times 1{\cdot}5$

∴ $\vec{F_A} = -2{\cdot}5 - 6 = -8{\cdot}5$ kN

∴ कर्तन बल ठीक A पर (SF at A)

$\Rightarrow$ $F_A = -8{\cdot}5 + R_A$

$$= -8{\cdot}5 + 8{\cdot}5 = 0$$

SFD को चित्र 3.29 (b) में दिखाया गया है।

(2) नमन आघूर्ण आरेख (BMD) के लिए गणना—

धरन (beam) में B से x दूरी की काट पर नमन घूर्ण अर्थात्

B.M. at Section $(X - X)$

$\Rightarrow$ $M_X = R_B x - 4\cdot x\frac{x}{2}$

या $M_X = 8{\cdot}5x - 2x^2$ (यह Parabolic eq^n है)

At $x = 0$, B.M. at B $\Rightarrow M_B = 0$

At $x = 1{\cdot}5$, B.M. at centre $C \Rightarrow M_C = 8{\cdot}5\times 1{\cdot}5 - 4\times 1{\cdot}5\times\frac{1{\cdot}5}{2}$

Scanned with CamScanner

$$M_C = 8{\cdot}25 \text{ kN-m} \quad \text{(Max B.M. due to SF = 0 at } C)$$

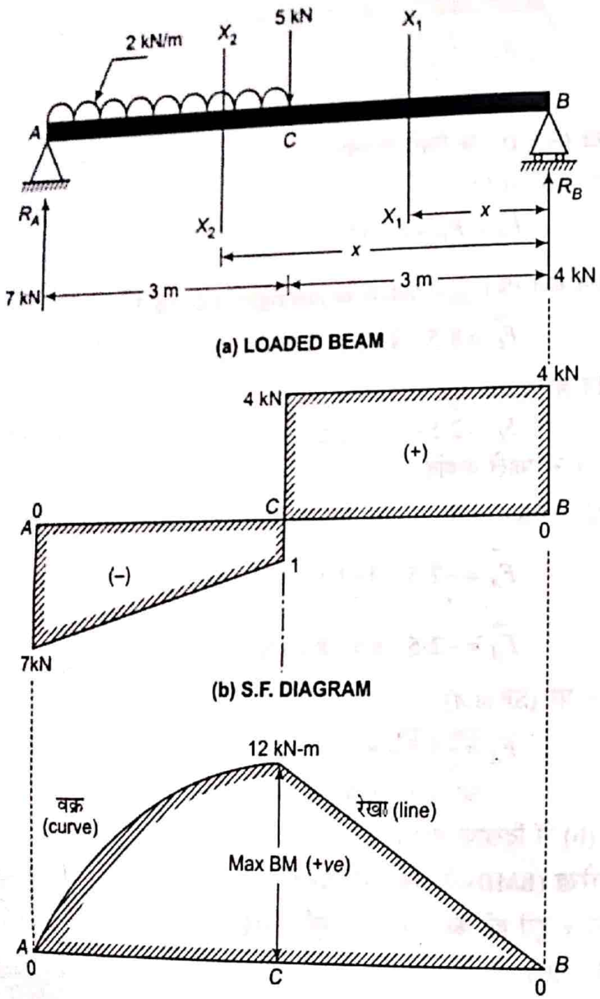
अब A पर नमन घूर्ण (B.M. at A) ⇒ M_A

$\therefore$ $$M_A = 8{\cdot}5 \times 3 - 5 \times 1{\cdot}5 - 4 \times 3 \times \frac{3}{2} = 0$$

B.M.D. को चित्र 3.29 (c) में दिखाया गया है।

उदाहरण 13. चित्र 3.30 में प्रदर्शित एक शुद्धालम्बित धरन (Simply Supported Beam) के लिए अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) तथा बंकन आघूर्ण (B.M.D.) खींचिए। **(U.P. 2011, M.O.S.; U.K. CIVIL, 2014, S)**

हल—



(a) LOADED BEAM

(b) S.F. DIAGRAM

(c) B.M. DIAGRAM

चित्र 3.30

माना सिरों पर लगी टेकों की प्रतिक्रियायें R_A तथा R_B हैं।

$\therefore$ $$R_A + R_B = \text{Total Load on Beam}$$

$$= 5 + 2 \times 3$$
$$= 11 \text{ kN}$$

A पर आघूर्ण (Moment) लेने पर—

$$6 \times R_B = 5 \times 3 + 2 \times 3 \times \frac{3}{2}$$
$$= 15 + 9 = 24$$

$\therefore$ $$R_B = \frac{24}{6} = 4 \text{ kN}$$

अब $$R_A = 11 - R_B$$
$$= 11 - 4 = 7 \text{ kN}$$

(1) For S.F. diagram—

BC भाग के लिये B से x दूरी पर काट $(X_1 - X_1)$ पर कर्तन बल

S.F. at $(X_1 - X_1) \Rightarrow F_X = R_B = 4 \text{ kN}$

$\because$ F_X का मान स्थिर (Constant) है।

$\therefore$ S.F. का मान B से C पर पहुँचने तक $R_B = 4$ kN के बराबर रहेगा।

$\therefore$ S.F. just before C (or right of C) = 4 kN

अब C पर कर्तन बल (SF at C) ⇒ $F_C = 4 - 5 = -1 \text{ kN}$

CA भाग में B से x दूरी पर काट $(X_2 - X_2)$ माना। इस भाग के लिये $F_X = -1 - 2(x-3)$, यह सरल रेखीय समीकरण है।

$\therefore$ S.F. just before A $\quad \Rightarrow \vec{F_A} = -1 - 2(6-3) = -7 \text{ kN}$

S.F. at A $\quad \Rightarrow F_A = -7 + R_A = -7 + 7 = 0$

(2) नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिए गणना—

BC भाग के लिए B से x दूरी पर स्थित काट $(X_1 - X_1)$ पर B.M.

$\therefore$ BM at Section $(X_1 - X_1) \Rightarrow M_X = R_B \times x = 4x$

$M_X = 4x$ रेखीय समीकरण है ($\because$ B.M.D. is not Curved)

अब C पर नमन आघूर्ण (B.M. at C)

⇒ $$M_C = R_B \times 3$$

या $$M_C = 4 \times 3 = 12 \text{ kN-m} \quad \text{Max B.M. due to S.F. changes sign at } C$$

अब CA भाग में B से x दूरी पर काट $(X_2 - X_2)$ माना

$\therefore$ BM at Section $(X_2 - X_2) \Rightarrow M_X$

$\therefore$ $$M_X = 4x - 5(x-3) - 2(x-3)\frac{(x-3)}{2}$$

यह वक्र समीकरण है इसलिए AC भाग में BMD एक वक्र (Curved) रूप में होगा।

$\therefore$ A पर नमन आघूर्ण (B.M. at A) ⇒ M_A, यहाँ $x = 6$ होगा

या $$M_A = 4 \times 6 - 5(6-3) - 2(6-3)\frac{(6-3)}{2}$$

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

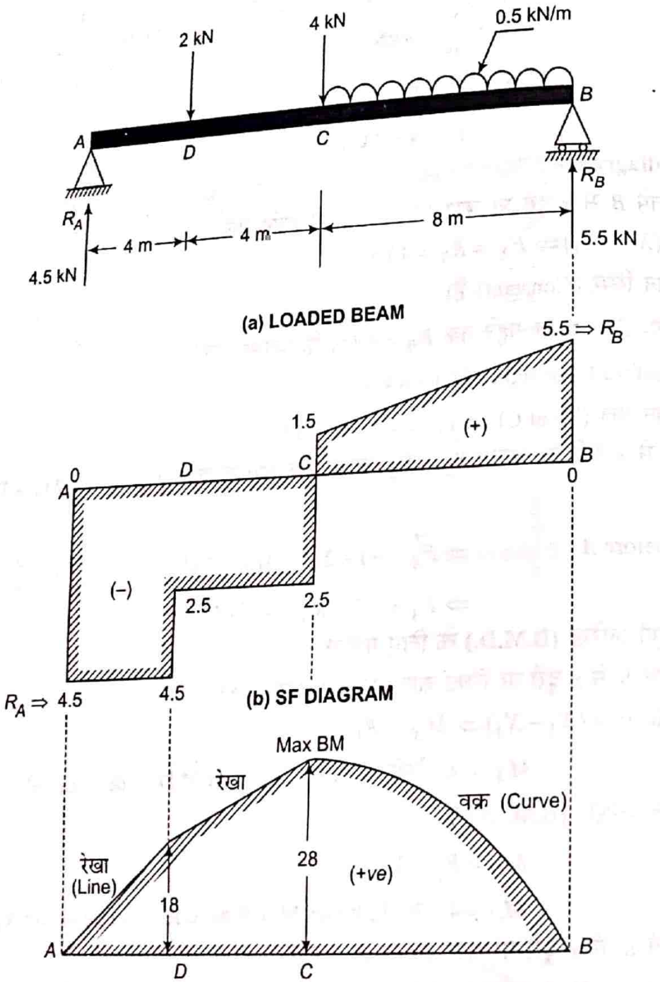
Study PowerPoint

$= 24 - 15 - 9 = 24 - 24 = 0$

अत: S.S. Beam के दोनों सिरों A तथा B पर BM का मान शून्य (Zero) होता है।

उदाहरण 14. एक सरल धरन (Simply Supported beam) पर चित्र 3.31 के अनुसार भार लगे हैं। इस धरन के लिए अपरूपण बल आरेख (SFD) तथा बंकन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) बनाइये।
(U.P. 2005, U.K.2011, 12, Winter; U.K. 2014, S)

हल—



चित्र 3.31

A तथा B टेकों की प्रतिक्रियायें (Reactions) R_A व R_B हैं

$\therefore$ $R_A + R_B =$ Beam पर कुल भार

$= 2 + 4 + 0.5 \times 8 = 10$

$\therefore$ $R_A + R_B = 10\,\text{kN}$ ... (i)

अब A पर आघूर्ण (Moment) लेने से

$R_B \times 16 = 2 \times 4 + 4 \times 8 + 0.5 \times 8 \times 12$

$= 8 + 32 + 48 = 88$

$R_B = \frac{88}{16} = 5.5\,\text{kN}$

या $R_A = 10 - R_B$

$\therefore$ $= 10 - 5.5 = 4.5\,\text{kN}$

$\therefore$ $R_A = 4.5\,\text{kN}$

(1) S.F.D. के लिये—$\left(\begin{smallmatrix}+\\ \uparrow\downarrow \\ -\end{smallmatrix}\right)$ from R.H.S.

बिन्दु B पर कर्तन बल अर्थात्

S.F. at $B \Rightarrow F_B = R_B = 5.5$ kN

बिन्दु C के ठीक पहले कर्तन बल का मान अर्थात्

S.F. just before $C \Rightarrow \vec{F_C} = 5.5 - 0.5 \times 8 = 1.5\,\text{kN}$

ठीक C पर कर्तन बल का मान अर्थात्

S.F. at $C \Rightarrow F_C = 1.5 - 4 = -2.5\,\text{kN}$

बिन्दु D के ठीक पहले S.F. का मान अर्थात्

S.F. just before $D \Rightarrow \vec{F_D} = -2.5\,\text{kN}$

D पर S.F. का मान अर्थात्

S.F. at $D \Rightarrow F_D = -2.5 - 2 = -4.5\,\text{kN}$

A के ठीक पहले कर्तन बल का मान

S.F. just before $\vec{A} \Rightarrow \vec{F_A} = -4.5\,\text{kN}$

S.F. at $A \Rightarrow F_A = -4.5 + R_A = -4.5 + 4.5 = 0$

नोट—Beam के खाली भाग में S.F. का मान Constant रहता है अत: S.F.D. में क्षैतिज रेखा होगी।

(2) नमन आघूर्ण आरेख (BMD) के लिये—

ठीक B पर नमन आघूर्ण (BM) अर्थात्

B.M. at $B \Rightarrow M_B = 0$ ($\because$ सिरों पर सदा शून्य होता है)

अब ठीक C पर BM का मान, अर्थात्

BM at $C \Rightarrow M_C = 5.5 \times 8 - 0.5 \times 8 \times \frac{8}{2}$

$\therefore$ $M_C = 44 - 16 = 28\,\text{kN-m}$

बिन्दु D पर नमन आघूर्ण (BM) का मान (अधिकतम मान) अर्थात्

B.M. at $D \Rightarrow M_D = 5.5 \times 12 - 0.5 \times 8 \times 8 - 4 \times 4$

$\therefore$ $M_D = 18\,\text{kN-m}$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

बिन्दु A पर BM का मान अर्थात्

$$\text{B.M. at } A \Rightarrow M_A = 5{\cdot}5 \times 16 - 0{\cdot}5 \times 8 \times 12 - 4 \times 8 - 2 \times 4$$

$$\therefore \quad M_A = 0$$

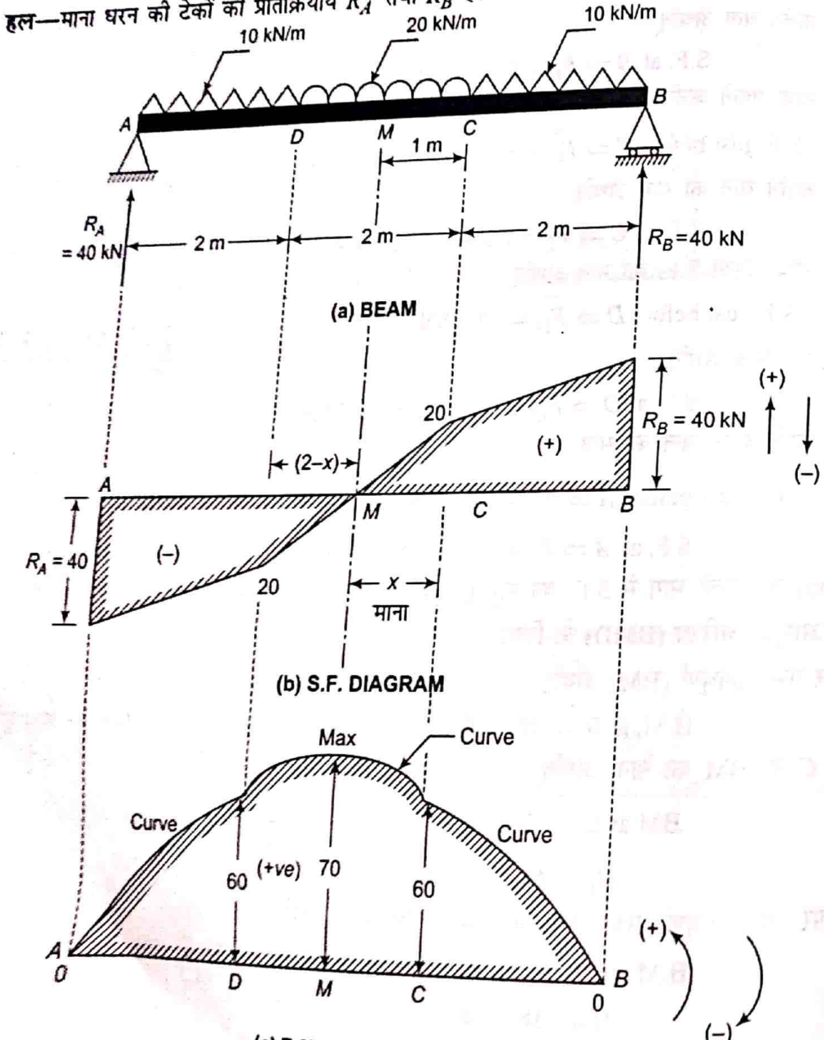
याद रखें—(1) जिस बिन्दु पर SF अपना चिन्ह बदलता है उस बिन्दु पर BM का मान Max (अधिकतम) होता है।

(2) U.D.L. वाले भाग में BMD वक्र रूप में बनाते हैं। अन्य सभी बिन्दु भारों के लिए सरल रेखा रूप में BMD को बनाते हैं।

(3) Beam के जिस बिन्दु पर बलयुग्म (Couple) लगा होता है उस बिन्दु पर BM का मान तुरन्त एक Vertical Line में बदलता है।

उदाहरण 15. चित्र 3.32 (a) में दिखायी गयी धरन (Beam) के लिये कर्तन बल तथा नमन आघूर्ण आरेख (SFD & BMD) खींचिये तथा अधिकतम नमन आघूर्ण (B.M.) का मान ज्ञात कीजिये।

हल—माना धरन की टेकों की प्रतिक्रियायें R_A तथा R_B हैं।



चित्र 3.32

$$R_A + R_B = \text{कुल भार (total load on beam)}$$
$$= (10 \times 2) + (20 \times 2) + (10 \times 2)$$
$$= 20 + 40 + 20 = 80 \text{ kN}$$
$$\therefore \quad R_A + R_B = 80$$

$\because$ दोनों सिरों से बराबर दूरी पर बराबर भार लगे हैं। इसलिये

$$R_A = R_B = \frac{\text{कुल भार}}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ kN} \quad \text{...(i)}$$

(1) कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

चिन्ह प्रणाली : धरन के दाँयी ओर से कर्तन बल के लिये $\overset{+}{\uparrow}\underset{-}{\downarrow}$

$F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = R_B = 40$ kN

$F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = 40 - 10 \times 2 = 20$ kN

$F_D \Rightarrow$ S.F. at $D = 20 - 20 \times 2 = 20 - 40 = -20$ kN

$\vec{F_A} \Rightarrow$ S.F. just before $\vec{A} = -20 - 10 \times 2 = -40$ kN

$F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -40 + R_A = -40 + 40 = 0$

S.F.D. को चित्र 3.32 (b) में दिखाया गया है।

अब कर्तन बल आरेख (SFD) के समरूप त्रिभुजों में भुजाओं का अनुपात समान रखने पर (By Geometry) माना C से x दूरी पर स्थित बिन्दु M पर कर्तन बल (SF) का मान शून्य (Zero) होता है।

$\therefore$ जब $\quad CM = x$ तब $DM = (2 - x)$

$$\therefore \quad \frac{x}{20} = \frac{2-x}{20} \quad \text{या} \quad 2x = 2 \quad \text{या} \quad x = 1 \text{ m}$$

अत: C से x दूरी अर्थात् 1 m पर कर्तन बल शून्य होगा।

(2) नमन आघूर्ण आरेख (BMD) के लिये गणना—चित्र 3.32 (c) देखें।

चिन्ह प्रणाली : धरन पर दायीं ओर से

$$M_B \Rightarrow \text{B.M. at } B = 0$$

$$M_C = 40 \times 2 - 10 \times 2 \times \frac{2}{2} = 80 - 20 = 60 \text{ kN-m}$$

$$M_D = 40 \times 4 - 10 \times 2 \times 3 - 20 \times 2 \times 1 = 60 \text{ kN-m}$$

$$M_A = 40 \times 6 - 10 \times 2 \times 5 - 20 \times 2 \times 3 - 10 \times 2 \times 1 = 0$$

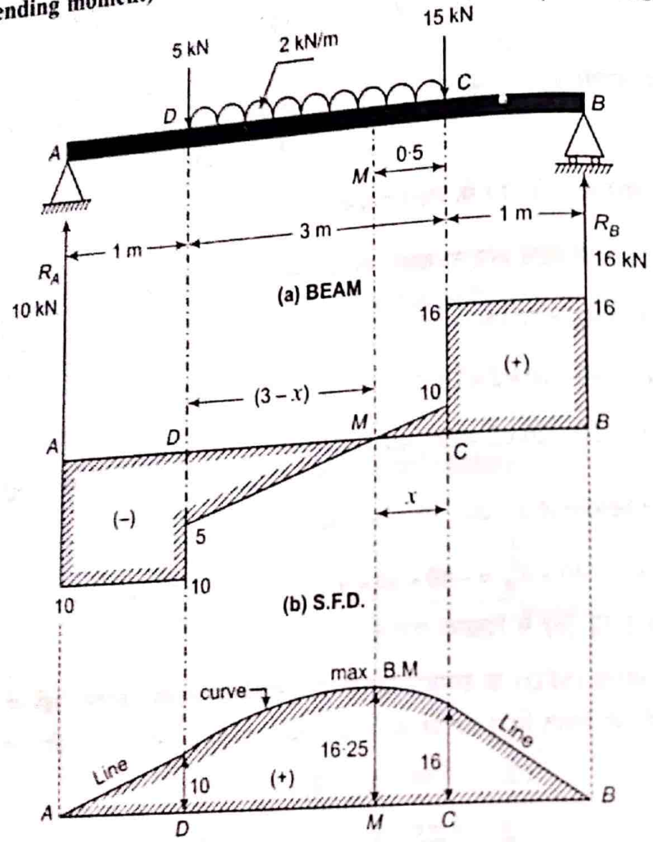
$$M_M = \text{Max B.M. at } M = 40 \times 3 - 10 \times 2 \times 2 - 20 \times 1 \times \frac{1}{2} = 120 - 40 - 10 = 70 \text{ kN-m}$$

धरन के सभी भागों में U.D.L. के कारण नमन घूर्ण आरेख (BMD) वक्र रूप में होगा।

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

उदाहरण 16. दिये गये चित्र 3.33 (a) के अनुसार अधिकतम कर्तन बल (max. shear force) तथा अधिकतम नमन घूर्ण (max. bending moment) का मान ज्ञात कीजिये एवं SFD और BMD बनाइये। (U.P. 2005, 10; U.K. 2014, 9)



चित्र 3.33

हल—(चित्र 3.33 (b) व (c) देखें)

$$R_A + R_B = 5 + 15 + (2 \times 3)$$
$$= 26$$

अब A पर आघूर्ण (moment) लेने पर,

$$5 \times R_B = 5 \times 1 + 2 \times 3 \times 2 \cdot 5 + 15 \times 4$$
$$R_B = \frac{80}{5} = 16 \text{ kN}$$
$$\therefore \quad R_A = 26 - R_B$$
$$= 26 - 16 = 10 \text{ kN}$$

(2) S.F.D. के लिए—(दायीं ओर से चिह्न ↑ (+) ↓ (–ve) प्रयोग करने पर)

B पर कर्तन बल (S.F. at B) $\Rightarrow F_B = R_B = 16$ kN

अब ठीक C पर पहुँचने तक कर्तन बल (S.F. just before C) $\Rightarrow \vec{F}_C = 16$ kN

C पर कर्तन बल (S.F. at C) $\Rightarrow F_C = 16 - 15 = 1$ kN

अब कर्तन बल D पर ठीक पहुँचने तक कर्तन बल (S.F. just before D) $\Rightarrow \vec{F}_D = 1 - 2 \times 3 = -5$ kN

बिन्दु D पर कर्तन बल (S.F. at D) $\Rightarrow F_D = -5 - 5 = 10$ kN

अब बिन्दु A पर ठीक पहुँचने पर कर्तन बल (S.F. just before A) $\Rightarrow \vec{F}_A = -10$ kN

बिन्दु A पर कर्तन बल (S.F. at A) $\Rightarrow F_A = -10 + R_A$
$$= -10 + 10 = 0$$

(2) नमन आघूर्ण (BMD) के लिए—

B पर घूर्ण (B.M. at B) $\Rightarrow M_B = 0$

C पर घूर्ण (B.M. at C) $\Rightarrow M_C = 16 \times 1 = 16$ kN-m

S.F. के चित्र में माना $CM = x$ तो $DM = (3 - x)$ होगा

अब समरूप Δ (similar triangles) में—

$$\frac{x}{1} = \frac{3-x}{5} \quad \text{या} \quad 5x = 3 - x \quad \text{या} \quad 6x = 3$$

या
$$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0 \cdot 5 \text{ m}$$

∵ बिन्दु M पर S.F. = 0 है तो M पर BM का मान अधिकतम होगा।

$$\therefore \quad \text{Max. B.M. at } M \Rightarrow M_M = 16 \times 1 \cdot 5 - 15 \times 0 \cdot 5 - 2 \times 0 \cdot 5 \times \frac{0 \cdot 5}{2}$$
$$M_M = 16 \cdot 25 \text{ kN-m}$$
$$\text{B.M. at } D \Rightarrow M_D = 16 \times 4 - 15 \times 3 - 2 \times 3 \times \frac{3}{2} = 10 \text{ kN-m}$$

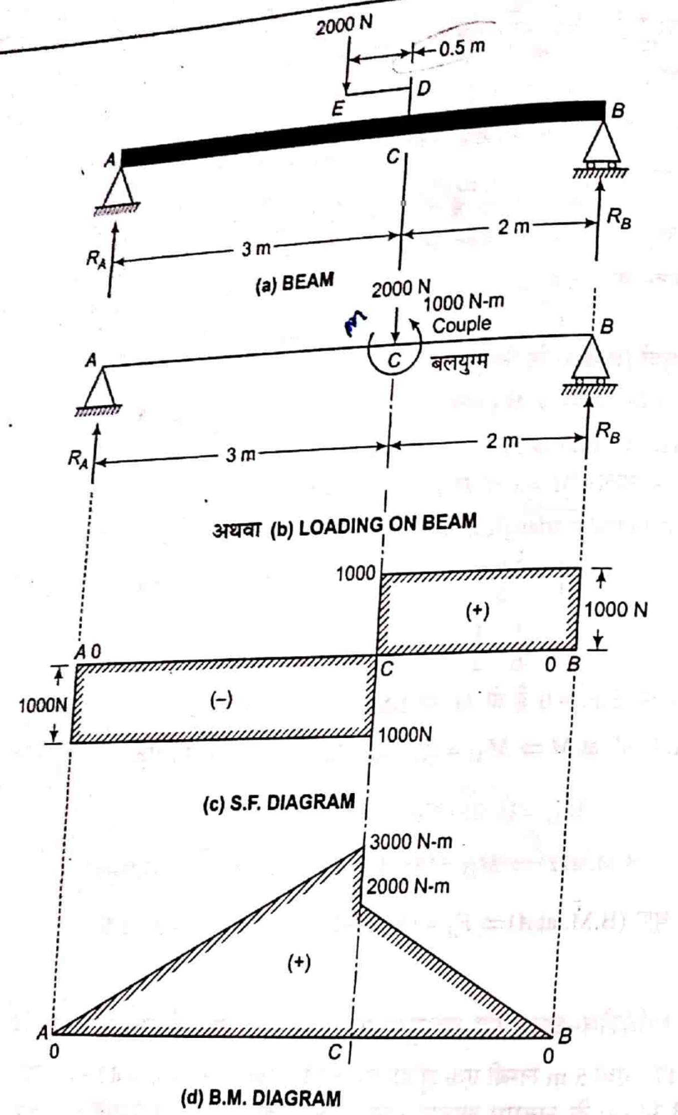
अब A पर घूर्ण (B.M. at A) $\Rightarrow F_A = 16 \times 5 - 15 \times 4 - 5 \times 1 - 2 \times 3 \times 2 \cdot 5$
$$= 0$$

**विशेष–धरन पर बलयुग्म (Couple) का आघूर्ण होने पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 17. एक 5 m लम्बी एक शुद्धालम्ब धरन (Simply Supported Beam) पर एक ब्रैकेट द्वारा 2000 N का बल चित्र 3.34 (a) के अनुसार लगाया गया है। कर्तन बल तथा नमन आघूर्ण (SFD & BMD) खींचिये। [U.K. 2012-13 (W), 2013 (W)]

हल—माना टेकों की प्रतिक्रियायें R_A तथा R_B हैं।

Scanned with CamScanner



चित्र 3.34

चित्र को दूसरे प्रकार से भी दिखाया जा सकता है। जैसे चित्र 3.34 (b) देखें।

∵ चित्र (a) के अनुसार ब्रैकेट पर लगाया गया बल दो प्रकार से अपना प्रभाव Beam पर डालता है।

(i) C पर 2000 N का ऊर्ध्वाधर बल (Vertical Force) के रूप में।

(ii) एक वामावर्त बलयुग्म के आघूर्ण (Moment of anticlockwise couple) के रूप में, जिसका मान $2000 \times 0{\cdot}5 = 1000$ N-m है।

∵ $$R_A + R_B = 2000\text{ N} \quad ...(i)$$

अब A पर आघूर्ण लेने पर, (Anticlock wise Moment = Clockwise Moment)

$$R_B \times 5 + 1000 = 2000 \times 3$$

या $$R_B = \frac{6000 - 1000}{5} = \frac{5000}{5} = 1000\text{ N}$$

∴ (i) से. $$R_A = 2000 - R_B = 2000 - 1000 = 1000\text{ N}$$

∴ $R_A = 1000$ N तथा $R_B = 1000$ N

कर्तन बल आरेख (S.F.D) को चित्र 3.34 (c) में दिखाया गया है तथा गणना निम्न प्रकार करते हैं—(चिन्ह प्रणाली $\overset{+}{\uparrow}\underset{-}{\downarrow}$)

दांयी ओर से।

$F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = R_B = 1000$ N (↑)

$\vec{F_C} \Rightarrow$ S.F. just before $\vec{C} = 1000$ N

(∵ B से C तक कोई भार नहीं है ∴ BC में S.F. का मान स्थिर रहेगा)

$F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = 1000 - 2000 = -1000$ N

नोट—कर्तन बल (S.F.) के लिये Couple के आघूर्ण को प्रयोग नहीं करते।

$\vec{F_A} \Rightarrow$ S.F. just before $\vec{A} = -1000$ N

(∵ C से A तक कोई भार नहीं है ∴ S.F. का मान समान रहेगा)

$F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -1000 + R_A$

$$= -1000 + 1000 = 0$$

नमन आघूर्ण आरेख (BMD) को चित्र 3.34 (d) में दिखाया गया है तथा गणना निम्न प्रकार करते हैं—

(दांयी ओर से गणना आरम्भ करने पर) (Sign Convention from R.H.S.)

(Anticlockwise (+ ve) Clockwise (– ve))

∴ $M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = 0$

तथा $M_C \Rightarrow 1000 \times 2 = 2000$ N-m (+ ve)

परन्तु C पर एक 1000 N-m (+ve) मान का बलयुग्म (couple) का आघूर्ण कार्य करता है, अत: नमन आघूर्ण (B.M.) का मान एकदम (Suddenly) बदलकर $2000 + 1000 = 3000$ N-m (+ve) हो जायेगा। जैसे—B.M.D के चित्र में दर्शाया गया है।

अब, $M_A \Rightarrow$ B.M. at $A = 1000 \times 5 + 1000 - 2000 \times 3$

$$= 5000 + 1000 - 6000 = 0$$

∴ $$M_A = 0$$

उदाहरण 18. एक सरल आधारित धरन (Simply Supported Beam) की विस्तृति (Span) 6 m है। इसके मध्य बिन्दु पर एक 30 kN-m के आघूर्ण का बलयुग्म (Couple) क्रियाशील है। इसके आधार की प्रतिक्रिया बल ज्ञात कीजिये तथा इस धरन का बंकन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) एक अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) खींचकर उस पर मुख्य मानों को दिखाइये। (उ० प्र० 2000 Mech)

हल—माना प्रतिक्रियायें R_A तथा R_B हैं। इस धरन को चित्र 3.35 (a) में प्रदर्शित किया गया है।

$$R_A + R_B = 0 \quad ...(i)$$

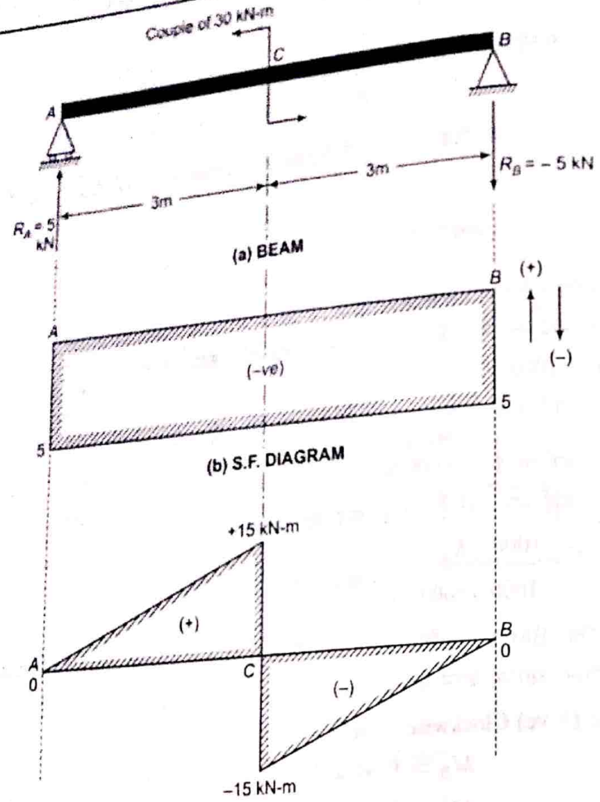
A पर आघूर्ण लेने पर,

$$6R_B + 30 = 0$$

∴ $$R_B = -\frac{30}{6} = -5\text{ kN}$$

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint



चित्र 3.35

समीकरण (i) से $\quad R_A = -R_B$

$= -(-5)$

या $\quad R_A = 5\,kN$

∴ $\quad$ प्रतिक्रियायें $= \pm 5$ kN

कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—(S.F.D. को चित्र 3.35-b में प्रदर्शित किया गया है)।

$F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = -5\,kN$

$F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = -5$ kN

B से A तक बीच में कहीं भी ऊर्ध्वाधर बल नहीं लगा है इसलिये कर्तन बल (S.F.) का मान B से A तक (-5kN) का स्थिर रहेगा।

$\vec{F_A} \Rightarrow$ S.F. just before $\vec{A} = -5\,kN$

$F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -5 + R_A = -5 + 5 = 0$

नमन आघूर्ण आरेख (BMD) के लिये गणना—

$M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = R_B \times 0 = 0$

$M_C \Rightarrow \quad R_B \times 3 = -5 \times 3 = -15$ kN-m

परन्तु C पर (+) 30 kN-m का एक बलयुग्म भी लगा है।

अतः C पर नमन आघूर्ण (B.M.) का मान तुरन्त बदलकर निम्न प्रकार होगा।

M_C (बलयुग्म के प्रयोग से) $= -15 + 30 = +15$ kN-m हो जायेगा।

अब M_A = B.M. at $A = -5 \times 6 +$ बलयुग्म का मान

$= -30 + 30 = 0$

अतः कर्तन बल के अधिकतम मान $= \pm 5$ kN

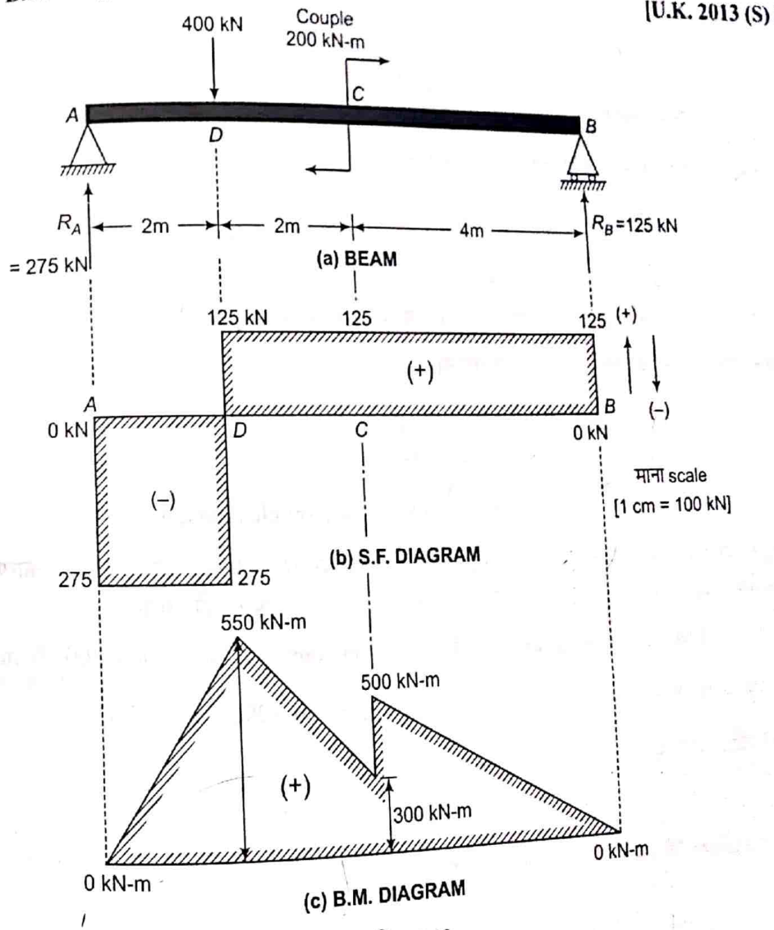
तथा नमन आघूर्ण (B.M.) के अधिकतम मान $= \pm 15$ kN

और प्रतिक्रियायें $= \pm 5$ kN

प्राप्त मानों से BMD को चित्र 3.35 (c) में प्रदर्शित किया गया है।

उदाहरण 19. चित्र 3.36 (a) में प्रदर्शित की गयी 4 m लम्बी शुद्धालम्ब धरन (Simply Supported Beam) के लिये S.F. तथा B.M. diagrams खींचिये। [U.K. 2013 (S) B.P.]

हल—



चित्र 3.36

Scanned with CamScanner

$R_A + R_B = 400$ kN   [$\because R_A + R_B$ = Total Vertical Load on Beam]

A पर आघूर्ण लेने पर,

$$R_B \times 8 = 400 \times 2 + 200 \text{ (Couple)}$$

$$= 800 + 200 = 1000 \text{ kg}$$

$$R_B = \frac{1000}{8} = 125 \text{ kN}$$

$\therefore$ $$R_A = 400 - R_B = 400 - 125 = 275 \text{ kN}$$

कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

$F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = R_B = 125$ kN

अब B से D के बीच कोई ऊर्ध्वाधर बल (Vertical load) न होने के कारण S.F. का मान 125 kN ही स्थिर रहेगा। फिर D पर संकेन्द्रित भार 400 kN का लगा होने पर S.F. का मान एक ही ऊर्ध्वाधर रेखा में एकदम (Suddenly) बदलकर $125 - 400 = -275$ kN हो जायेगा। पुनः D से A के बीच कोई भार (load) न होने के कारण S.F. का मान -275 ही स्थिर रहेगा। इसके बाद A पर प्रतिक्रिया $R_A = +275$ kN के कारण S.F. का मान एक ही ऊर्ध्वाधर रेखा (Vertical Line) में एकदम बदलकर $-275 + R_A = 0$ हो जायेगा।

$\therefore$ $F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = +125$ kN

$\vec{F_D} \Rightarrow$ S.F. just before $D = +125$ kN

$F_D \Rightarrow$ S.F. at $D = 125 - 400 = -275$ kN

$\vec{F_A} \Rightarrow$ S.F. just before $A = -275$ kN

$F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -275 - R_A = -275 + 275 = 0$

कर्तन बल आरेख (S.F.D.) को चित्र 3.36 (b) में प्रदर्शित किया गया है।

नमन आघूर्ण आरेख (BMD) के लिये गणना—

$M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = R_B \times 0 = 0$ kN-m

$M_C \Rightarrow$ B.M. at C (just on the right hand side of C)

$$= 125 \times 4 = 500 \text{ kN-m (Anticlockwise)}$$

परन्तु C पर एक 200 kN-m का बलयुग्म (couple) दक्षिणावर्त (Clockwise) लगा होने के कारण B.M. का मान एकदम ऊर्ध्वाधर रेखा (Vertical Line) में बदलकर $500 - 200 = 300$ kN-m हो जायेगा।

$\therefore$ $M_C \Rightarrow$ B.M. just on the left hand side of C (after couple) $= 500 - 200 = 300$ kN-m

$M_D \Rightarrow$ B.M. at $D = 125 \times 6 - 200$ (couple at C) $= 750 - 200 = 550$ kN-m

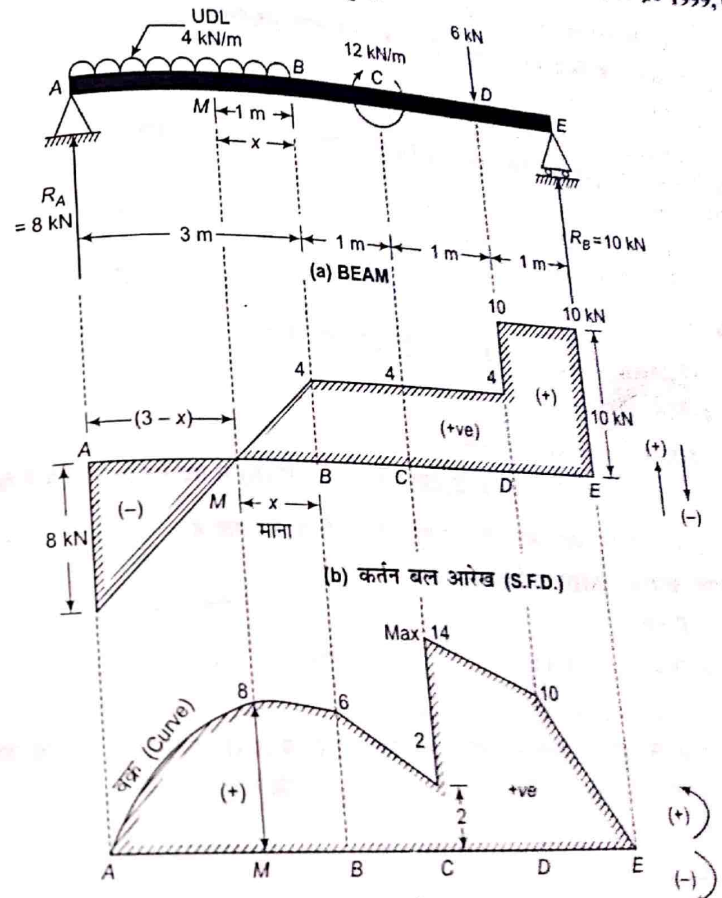
$M_A \Rightarrow$ B.M. at $A = 125 \times 8 - 200$ (couple) $- 400 \times 2$

$$= 1000 - 200 - 800 = 0$$

B.M. Diagram को चित्र 3.36 (c) में दिखाया है।

उदाहरण 20. चित्र 3.37 (a) में शुद्धालम्ब धरन (simply supported beam) पर समवितरित भार (U.D.L.), बलयुग्म का आघूर्ण (Moment of Couple) तथा बिन्दु भार कार्य कर रहे हैं। इस धरन के लिये कर्तन बल आरेख (S.F.D.) तथा नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) खींचिये। **(उ० प्र० 1999, Civil)**

हल—माना टेकों A तथा E पर प्रतिक्रिया R_A तथा R_E हैं।



चित्र 3.37

$\therefore$ $R_A + R_E$ = धरन पर लगा ऊर्ध्वाधर भार

$$= 4 \times 3 + 6 = 12 + 6 = 18 \text{ kN}$$

टेक A पर आघूर्ण लेने पर,

$$R_E \times 6 = 6 \times 5 + 12 + 4 \times 3 \times \frac{3}{2} = 30 + 12 + 18 = 60$$

$\therefore$ $$R_E = \frac{60}{6} = 10 \text{ kN तथा } R_A = 18 - R_E = 18 - 10 = 8 \text{ kN}$$

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

(1) कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

$F_E \Rightarrow$ S.F. at $E = R_E = 10$ kN ↑ (+ve) दिशा

E से D तक धरन (Beam) खाली है इसलिये S.F. का मान 10 kN स्थिर रहेगा।

$\therefore \vec{F_D} \Rightarrow$ S.F. just before $\vec{D} = 10$ kN

अब D पर 6 kN के बिन्दु भार के कारण S.F. का मान तुरन्त बदलेगा।

इस प्रकार अब

$F_D \Rightarrow$ S.F. at $D = 10 - 6 = 4$ kN हो जायेगा।

अब D से B तक कोई ऊर्ध्वाधर भार (Vertical load) न होने के कारण कर्तन बल (S.F.) का मान (D से B तक) 4 kN का स्थिर रहेगा।

$\therefore F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = 4$ kN

$F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = 4$ kN

S.F. A के ठीक पहले

$\vec{F_A} \Rightarrow$ S.F. just before $\vec{A} = 4 - 4 \times 3 = -8$ kN

S.F. ठीक A पर,

$F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -8 + R_A = -8 + 8 = 0$

इन मानों (Values) से बना कर्तन बल आरेख (S.F.D.) को चित्र 3.37 (b) में प्रदर्शित किया गया है जिसमें $\frac{x}{4} = \frac{3-x}{8}$ या $3x = 3$ या $x = 1\,m$ इस दूरी पर कर्तन बल का मान शून्य होकर चिन्ह बदलता है।

(2) नमन आघूर्ण आरेख (BMD) के लिये गणना—

$M_E \Rightarrow$ B.M. at $E = 0$

$M_D \Rightarrow$ B.M. at $D = 10 \times 1 = 10$ kN-m

$M_C \Rightarrow$ B.M. at $C = R_E \times 2 - 6 \times 1 = 10 \times 2 - 6 = 20 - 6 = 14$ kN-m,

परन्तु C पर 12 kN-m का एक बलयुग्म का आघूर्ण भी लगा है इसलिये B.M. का मान C पर एक ऊर्ध्वाधर रेखा के रूप में तुरन्त (suddenly) बदलेगा और बदलकर $14 - 12 = 2$ kN-m रह जायेगा।

$\therefore$ B.M. at C (after couple) $\Rightarrow M_C = 2$ kN-m

अब $M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = 10 \times 3 - 6 \times 2 - 12$

$= 30 - 24 = 6$ kN-m

तथा $M_A \Rightarrow$ B.M. at $A = 10 \times 6 - 6 \times 5 - 12 - 4 \times 3 \times \frac{3}{2}$

$= 60 - 30 - 12 - 18 = 0$

अतः दो टेकों वाली धरन के दोनों सिरों पर B.M. का मान शून्य (Zero) होता है।

$\because$ बिन्दु M पर S.F. ने शून्य होकर चिन्ह बदला है इसलिए बिन्दु M पर B.M. का मान अवश्य ज्ञात करना होगा।

अतः B.M. at $M \Rightarrow M_M = 10 \times 4 - 6 \times 3 - 12 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2}$

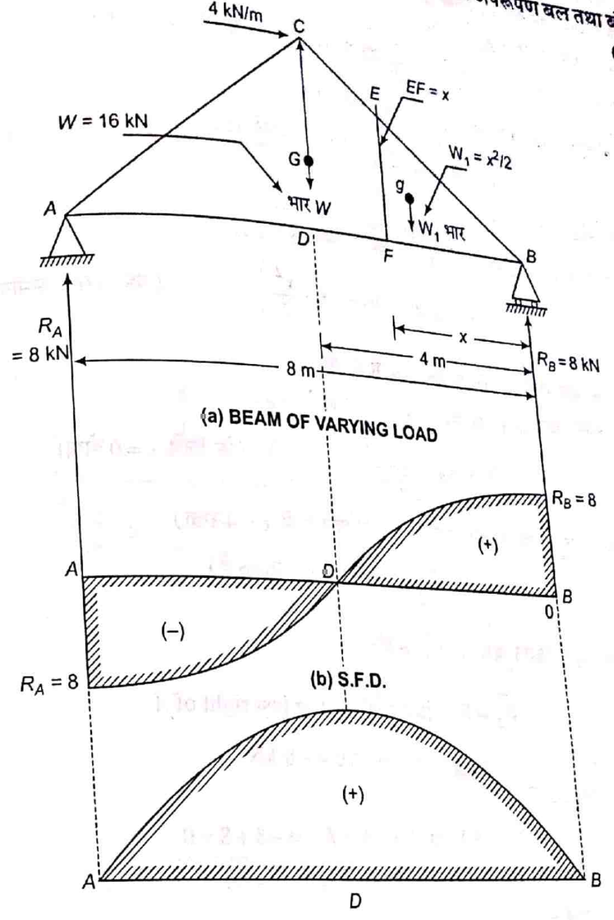
$\therefore \quad M_M = 40 - 18 - 12 - 2 = 8$ kN-m

(गणना से प्राप्त मानों को प्रयोग करके बना B.M.D चित्र 3.37 (c) में दिखाया गया है।)

नोट—*A से B तक U.D.L. लगा होने के कारण B.M.D. में वक्र (Curve) बनेगा।*

उदाहरण 21. चित्र 3.38 (a) में दर्शायी गई परिवर्तनशील भार की धरन के लिये अपरूपण बल तथा बंकन आघूर्ण आरेख (S.F.D. and B.M.D.) बनाइये। (U.P. 2003)

हल—



चित्र 3.38

Varying Load का भार अर्थात् ΔABC का भार

$$W = \frac{\text{आधार (base)} \times \text{ऊँचाई (height)}}{2}$$

$$W = \frac{8 \times 4}{2} = 16 \text{ kN}$$

$\because$ भार की Symmetry के कारण

$$R_A = R_B = \frac{W}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ kN}$$

माना B से x दूरी पर काट EF है।

Scanned with CamScanner

अब छोटे ΔBEF का भार W_1 इसके गुरुत्व केन्द्र g पर होगा।

अब समरूप ΔBEF तथा ΔBCD में

$$\frac{EF}{FB}=\frac{CD}{DB} \text{ या } \frac{EF}{x}=\frac{4}{4}$$

$\therefore$ $EF = x$ होगा। अतः इस छोटे ΔBEF का भार (W_1)

$$W_1=\frac{\text{आधार }(FB)\times\text{ ऊँचाई }(EF)}{2}=\frac{x.x}{2}=\frac{x^2}{2}$$

(1) SFD के लिये गणना

$\therefore$ B से x दूरी पर काट (Section) EF पर कर्तन बल (S.F.) $\Rightarrow F_X$

$$F_X=R_B-W_1=\left(8-\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{(यह द्विघात समीकरण curve eq}^n\text{ है)}$$

$\therefore$

अतः S.F.D. एक वक्र रूप (Curved Shape) में होगा।

अब टेक B पर कर्तन बल (S.F. at B) $\Rightarrow F_B = 8$ kN$\uparrow$ (R_B)

$\because$ $F_x=R_B-\frac{x^2}{2}=\left(8-\frac{x^2}{2}\right)$ में B के लिये $x=0$ होगा।

अब धरन के मध्य-बिन्दु D पर कर्तन बल (F_X समीकरण में $x = 4$ रखा)

अर्थात् S.F. at D $\Rightarrow F_D=8-\frac{4\times4}{2}=8-8=0$ (Zero है)

अब टेक A के ठीक पहले कर्तन बल $\Rightarrow \vec{F_A}$ अर्थात्

$$\vec{F_A}=\text{S.F. just before } A \text{ or just right of } A$$
$$=R_B-W=8-16=-8 \text{ kN}$$

$\therefore$ ठीक A पर कर्तन बल $\Rightarrow F_A$

या $F_A=\text{S.F. at } A=-8+R_A=-8+8=0$

याद रखें—दो टेकों वाली Beam की गणना के last में शून्य (Zero) आयेगा।

(2) B.M.D. के लिये गणना—

B से x दूरी पर स्थित काट EF पर नमन आघूर्ण $\Rightarrow M_X$

$\therefore$
$$M_x=\text{B.M. at distance }(x)\text{ on Section }(EF)$$
$$=R_B\times x-W_1\times\left(\frac{1}{3}x\right)$$
$$=8x-\left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{x}{3}\right)$$

$\therefore$
$$M_x=\left(8x-\frac{x^3}{6}\right) \text{ यह Cubic equation है।}$$

अतः B.M.D. भी एक वक्र (Curve) में होगा।

$\therefore$ At $x = 0$, B.M. at $B \Rightarrow M_B = 0$

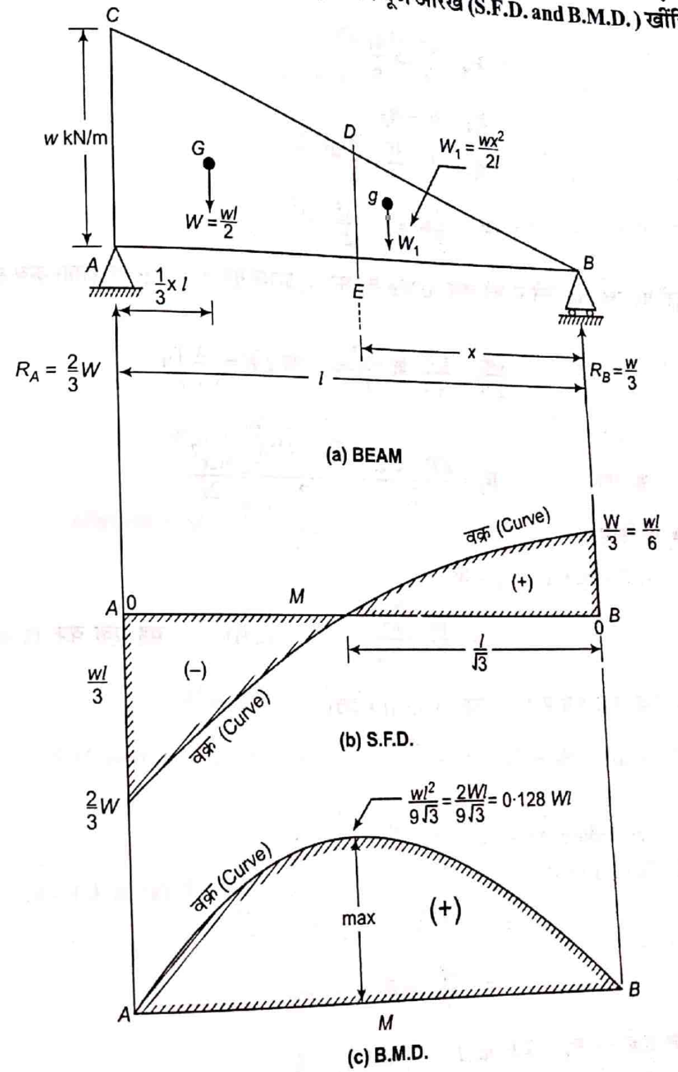
At $x = 4$ m (for centre D), $M_D=\left(8\times4-\frac{4\times4\times4}{6}\right)=32-10.67$

$\therefore$ केन्द्र पर, $M_D = 21.33$ kN-m (B.M. का अधिकतम मान, चूँकि यहाँ $SF = 0$ है।)

अब $M_A \Rightarrow$ B.M. at $A=R_B\times8-W\times4=8\times8-16\times4=0$

S.F.D. व B.M.D. के चित्र 3.38 (b) तथा (c) में देखें।

उदाहरण 22. चित्र 3.39 में एक Simply Supported beam AB दिखाई गई है जिस पर समान रूप से बदलता भार (Uniformly Varying Load) लगा है जिसकी तीव्रता एक सिरे पर शून्य (Zero) से समान रूप से बढ़ते हुए, दूसरे सिरे पर w kN/m हो जाती है। इस धरन के लिये कर्तन बल एवं नमन घूर्ण आरेख (S.F.D. and B.M.D.) खींचिये।



चित्र 3.39

हल—माना भार की तीव्रता (w) B पर शून्य है तथा A पर w kN/m हो जाती है।

ΔABC का भार $\Rightarrow W$ (माना)

$\therefore$ $$W = \frac{l.w}{2} \qquad \left[\because W = \frac{\text{आधार} \times \text{ऊँचाई}}{2}\right]$$

$\therefore$ $$R_A + R_B = W = \frac{wl}{2} \qquad \text{...(i)}$$

A पर आघूर्ण (Moment) लेने पर

$$R_B \times l = W \times \left(\frac{1}{3} \times l\right)$$

$\therefore$ $$R_B = \frac{W}{3} \Rightarrow \frac{wl}{6}$$

तथा $$R_A = W - R_B$$

$\therefore$ $$R_A = W - \frac{W}{3} = \frac{2}{3}W$$

या $$R_A = \frac{2}{3}W = \frac{2}{3} \times \frac{wl}{2} = \frac{wl}{3}$$

B से x दूरी पर रेखा DE लेने से बने छोटे ΔDEB का भार W_1 इसके गुरुत्व केन्द्र g पर होगा। अब समरूप ΔDEB तथा ΔCAB में,

$$\frac{DE}{EB} = \frac{CA}{AB} \text{ या } \frac{DE}{x} = \frac{w}{l} \text{ या } DE = \left(\frac{x}{l}\right)w$$

अब छोटे Δ का भार $$W_1 = \frac{EB \times DE}{2} = \frac{x \times \left(\frac{x}{l}w\right)}{2} = \frac{w.x^2}{2l}$$

(1) S.F.D. के लिए—

$F_X \Rightarrow$ S.F. at distance $x = R_B - W_1$

$\therefore$ $$F_x = \left(\frac{wl}{6} - \frac{wx^2}{2l}\right) \qquad \text{...(i)}$$ यह एक वक्र (Curve) समीकरण है।

अतः S.F.D. एक वक्र रूप में होगा। चित्र 3.39. (b) देखें।

At $x = 0$, S.F. at $B \Rightarrow F_B = \frac{wl}{6} = R_B = \frac{W}{3}$

At $x = l$, S.F. just before $\vec{A} \Rightarrow \vec{F_A} = \frac{wl}{6} - \frac{w}{2l} \times l^2$

$\therefore$ $$\vec{F_A} = \frac{wl}{6} - \frac{wl}{2} = \frac{wl - 3wl}{6} = -\frac{2wl}{6}$$

$$= -\frac{wl}{3} = -R_A = -\frac{2}{3}W$$

अब ठीक A पर S.F. $\Rightarrow F_A =$ S.F. at $A = -\frac{2}{3}W + R_A = 0$

$\because$ B.M. के अधिकतम मान के लिये S.F. = 0 होना चाहिये।

$$F_X = \left(\frac{wl}{6} - \frac{w.x^2}{2l}\right) = 0 \text{ रखने पर}$$

$\therefore$ $$\left(\frac{w}{2l}\right)x^2 = \frac{wl}{6} \text{ या } x^2 = \frac{wl}{6} \times \frac{2l}{w} = \frac{l^2}{3}$$

$\therefore$ $$x = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ (अतः B से $\frac{l}{\sqrt{3}}$ दूरी पर S.F. = 0 होगा)

(2) B.M.D. के लिये—(चित्र 3.39-C देखें)

$$M_x = \text{B.M. at distance } x \text{ from end } B$$

$$= R_B \times x - W_1 \times \frac{1}{3}x$$

$$= \frac{wl}{6}x - \frac{wx^2}{2l} \times \frac{x}{3}$$

$$M_x = \left(\frac{wl}{6}\right)x - \left(\frac{w}{6l}\right).x^3 \qquad \text{...(ii)}$$ यह वक्र (curve) समी० है।

At $x = 0$, $M_A \Rightarrow$ B.M. at $A = 0$

At $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$, M_M = Max B.M. at $M = \frac{wl^2}{6\sqrt{3}} - \frac{w}{6l} \times \frac{l^3}{3\sqrt{3}}$

या $$M_M = \frac{wl^2}{6\sqrt{3}} - \frac{wl^2}{18\sqrt{3}}$$

$\therefore$ $$\text{अधिकतम B.M.} = \frac{3wl^2 - wl^2}{18\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2wl^2}{18\sqrt{3}} = \frac{wl^2}{9\sqrt{3}} = \frac{2Wl}{9\sqrt{3}}$$

$$M_M = 0{\cdot}128\,wl$$

अब, B.M. at $A \Rightarrow M_A = R_B \times l - W \times \frac{1}{3}l$

$$= \frac{W}{3} \times l - \frac{W}{3} \times l = 0$$

उदाहरण 23. चित्र 3.40 (a) में दिखाई गई Beam के लिये S.F.D. तथा B.M.D. खींचिये।

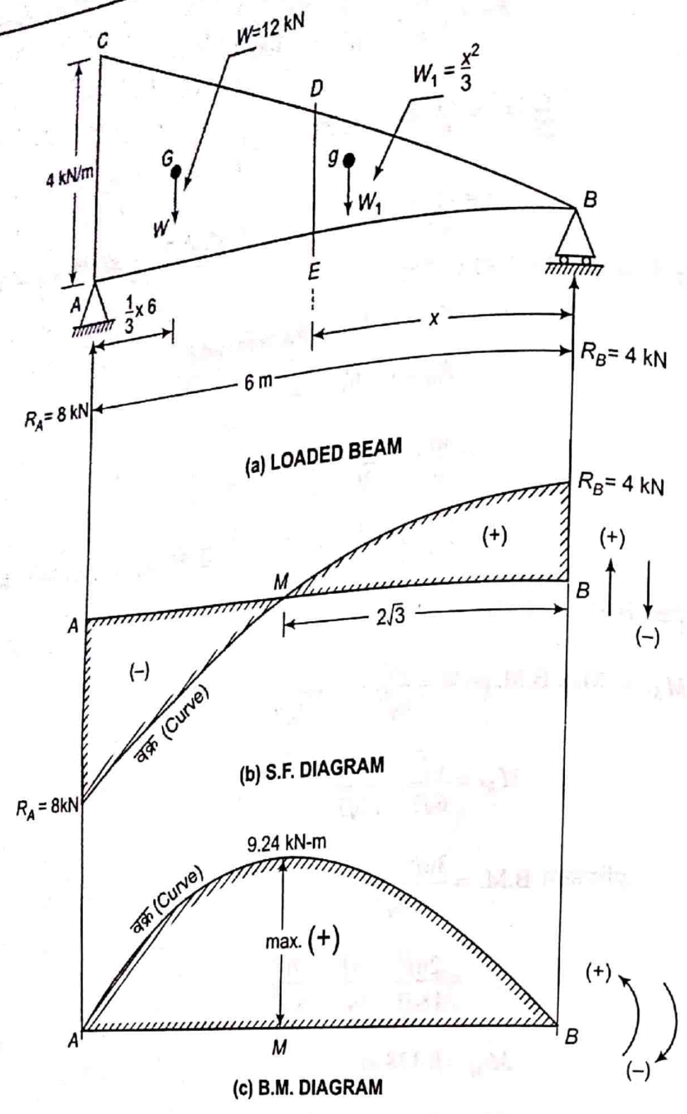
उ

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

हल—



चित्र 3.40

Total Load on beam = W

$$\therefore \quad W = \frac{6\times 4}{2} = 12 \text{ kN}$$

A पर Moment लेने से—

$$6R_B = W \times \left(\frac{1}{3}\times 6\right) = 24$$

$$\therefore \quad R_B = 4 \text{ kN}$$

अब

$$R_A = W - R_B$$

$$= 12 - 4 = 8 \text{ kN}$$

समरूप Δ (Similar Δ) में—

$$\frac{DE}{x} = \frac{4}{6} \text{ या } DE = \frac{2x}{3}$$

छोटे ΔDEB का भार W_1 (माना)

$$\therefore \quad W_1 = \frac{x\left(\frac{2x}{3}\right)}{2} = \frac{x^2}{3}$$

(1) S.F.D. के लिए—

$$F_x = R_B - W_1 = \left(4 - \frac{x^2}{3}\right) \text{Curve (वक्र)}$$

अब $F_x = 0$ से, $\quad \frac{x^2}{3} = 4$ या $x = 2\sqrt{3}$

F_B = S.F. at $B = R_B = 4$ kN

$\vec{F_A}$ = S.F. just before $A = R_B - W$

$$= 4 - 12 = -8 \text{ kN}$$

$\therefore$ $F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -8 + R_A = -8 + 8 = 0$

(2) BMD के लिए—

$$M_x = R_B \times x - W_1 \times \frac{1}{3}x$$

$$= 4x - \frac{x^2}{3}\times\frac{x}{3}$$

$$\therefore \quad M_x = \left(4x - \frac{x^3}{9}\right) \quad \text{... (i)}$$

[$\because$ Cubic rquation है $\therefore$ BMD भी वक्र रूप में होगा]

At $x = 0$, B.M. at $B \Rightarrow M_B = 0$

AT $x = 2\sqrt{3}$, B.M. at $M \Rightarrow M_M = \left[4\times 2\sqrt{3} - \frac{(2\sqrt{3})^3}{9}\right]$

$\therefore$ Maximum B.M. at $M = 8\sqrt{3} - \frac{8\times 3\sqrt{3}}{9} = 9{\cdot}24$ kN-m

अब B.M at $A \Rightarrow M_A = R_B \times 6 - W \times \frac{1}{3}\times 6$

$$\therefore \quad M_A = 4\times 6 - 12\times\frac{6}{3} = 24 - 24 = 0$$

**विशेष-टेक से बाहर निकली धरन (overhanging beam) पर आधारित प्रश्न

☞ **नोट**—(1) एक टेक (Support) से बाहर निकली धरन (One side Overhanging Beam) तथा दोनों टेकों से बाहर निकली धरन (Both sides Over hanging Beam) में ही "नति परिवर्तन बिन्दु" (Point of Contra flexure) प्राप्त हो सकता है, अन्य Beams (जैसे Cantilever Beam तथा Simply Supported Beam) में यह बिन्दु नहीं होता।

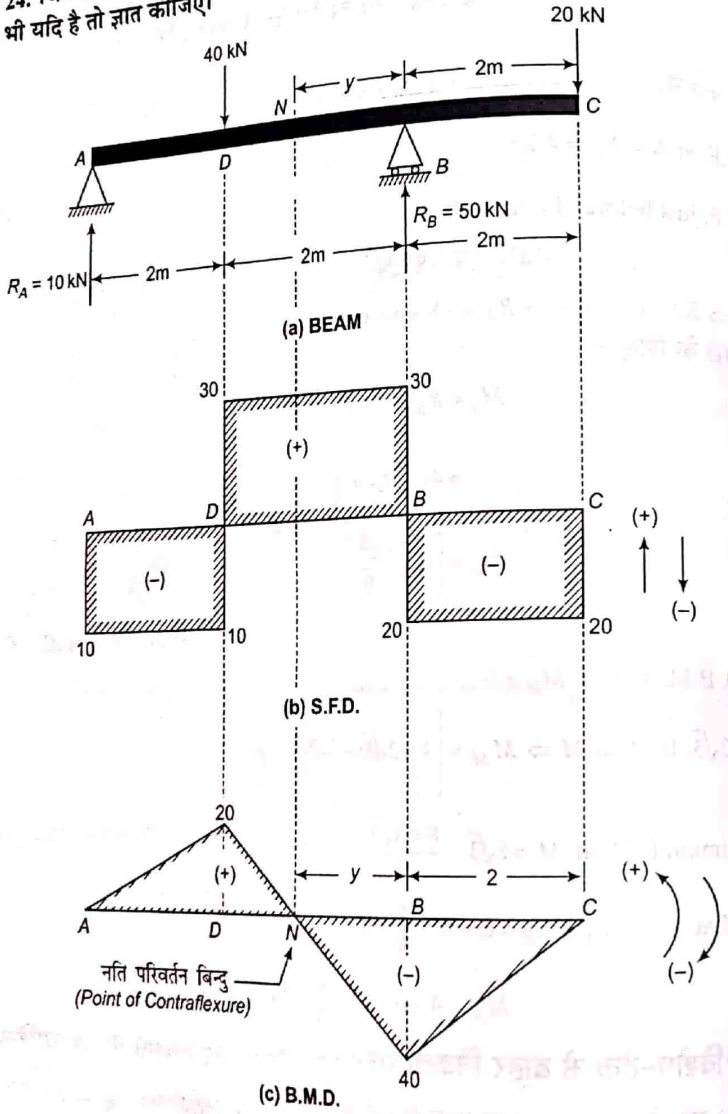
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

(2) "नति परिवर्तन बिन्दु (Point of Contra flexure)" की परिभाषा—किसी धरन का नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) दोनों सिरों को छोड़कर बीच में कहीं भी जिस बिन्दु पर शून्य (Zero) होकर अपना चिन्ह परिवर्तित करता है, उस बिन्दु को "नति परिवर्तन बिन्दु" कहते हैं। इसे "Point of Contraflexure" या "Point of Inflexion" के नाम से जाना जाता है।

यह Overhanging Beam में ही प्राप्त हो सकता है। ज्ञात करने की विधि को उदाहरणों द्वारा आसानी से समझा जा सकता है।

उदाहरण 24. चित्र 3.41 (a) में दिखाई गई धरन (Beam) के लिए S.F.D. तथा B.M.D. बनाइये तथा नति परिवर्तन बिन्दु भी यदि है तो ज्ञात कीजिए।



चित्र 3.41

हल—

A पर Moment लेने पर—

$$R_A + R_B = 40 + 20 = 60 \text{ kN}$$

$$4R_B = 40 \times 2 + 20 \times 6$$

$$R_B = 20 + 30 = 50 \text{ kN}$$

∴ $$R_A = 60 - R_B = 60 - 50 = 10$$

अब $$R_A = 10 \text{ kN}$$

∴

(1) S.F.D. के लिए—

$$F_C = -20 \text{ kN}$$

$$\vec{F_B} = \text{S.F. just before } B = -20 \text{ kN}$$

$$\text{S.F. at } B \Rightarrow F_B = -20 + 50 = 30 \text{ kN}$$

∴ $$\text{S.F. just before } D \Rightarrow \vec{F_D} = 30 \text{ kN}$$

$$\text{S.F. at } D \Rightarrow F_D = 30 - 40 = -10 \text{ kN}$$

अब $$\text{S.F. just before } A \Rightarrow \vec{F_A} = -10 \text{ kN}$$

$$\text{S.F. at } A = -10 + h_A = -10 + 10 = 0$$

(i) B.M.D. के लिये—

$$M_C = \text{B.M. at } C = 0$$

$$\text{B.M. at } B \Rightarrow M_B = -20 \times 2 = -40 \text{ kN-m}$$

$$\text{B.M. at } D \Rightarrow M_D = -20 \times 4 + 50 \times 2 = 20 \text{ kN-m}$$

$$M_A \Rightarrow \text{B.M. at } A = -20 \times 6 + 50 \times 4 - 40 \times 2$$

$$= -120 + 200 - 80 = 200 - 200 = 0$$

गणना से प्राप्त B.M.D. को चित्र 3.40 (c) में दिखाया गया है। अब माना B.M.D., टेक B से y दूरी पर स्थित बिन्दु N पर चिन्ह परिवर्तित करता है।

∴ $$\text{B.M. at } N = -20(y+2) + 50 \times y$$

∵ Point N, आधार रेखा AB पर है अत: $M_N = 0$ होगा।

∴ $$0 = -20y - 40 + 50y$$

या $$30y = 40 \text{ या } y = \frac{4}{3} = 1 \cdot 33 \text{ metre}$$

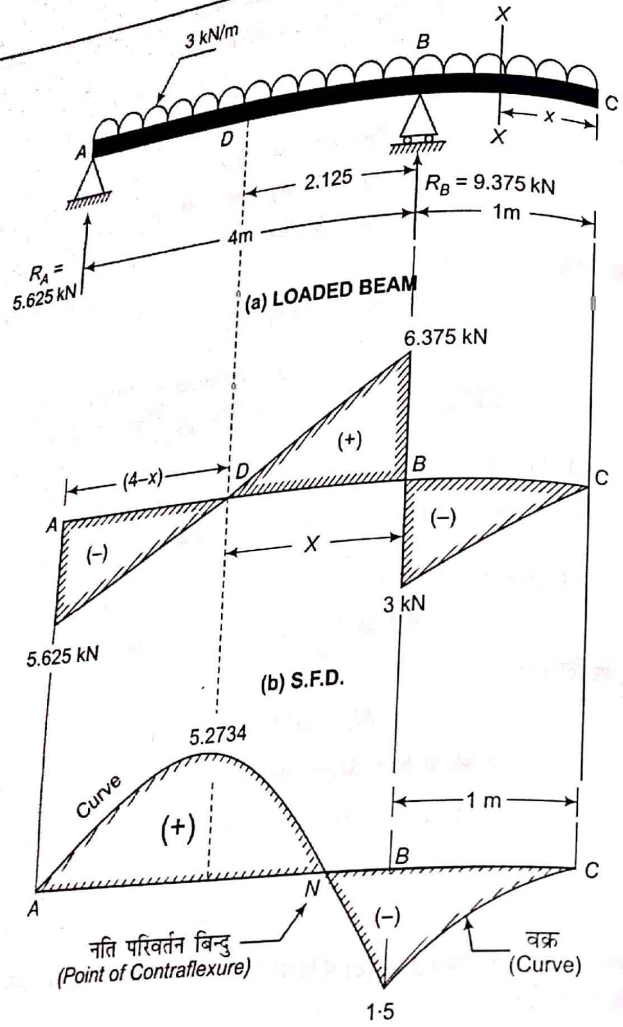
∴ N की दायें सिरे (Right end C) से दूरी $= 2 + y$

$$= 2 + 1 \cdot 33 = 3 \cdot 33 \text{ metre}$$ उत्तर

उदाहरण 25. चित्र 3.42 (a) में दिये हुए धरन (Beam) के लिए कर्तन बल आरेख तथा नमन आघूर्ण आरेख (S.F.D. and B.M.D.) खींचिये। (U.K. 2011-12 (Winter))

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint



चित्र 3.42

हल—माना A व B टेकों पर प्रतिक्रियायें (Reactions), R_A तथा R_B हैं।

$$\therefore \quad R_A + R_B = \text{Beam का कुल भार},$$

$$= 3 \times 5 = 15 \text{ kN}$$

अब A पर Moment लेने पर—

$$4 \times R_B = 3 \times 5 \times \frac{5}{2}$$

$$R_B = \frac{37.5}{4} = 9.375 \text{ kN}$$

अब
$$R_A = 15 - R_B$$
$$= 15 - 9.375 = 5.625$$

(1) S.F.D. के लिए—

माना C से x दूरी पर कोई काट $(X - X)$ है।

$\therefore \; F_x = -3x$ यह रेखीय समीकरण है।

At $x = 0$, S.F. at $C \Rightarrow F_C = 0$

At $x = 1$ m, S.F. just before $B \Rightarrow \vec{F_B} = -3 \times 1 = -3$ kN

S.F. at $B \Rightarrow F_B = -3 + 9.375 = 6.375$ kN

अब S.F. just before $A = -5.625$ kN

S.F. at $A \Rightarrow \vec{F_A} = -5.625 + R_A = -5.625 + 5.625 = 0$

S.F. के इन मानों से प्राप्त S.F.D. को चित्र 3.42 (b) में दर्शाया गया है।

S.F.D. के समरूप Δ (similar Δ) में

$BD = x$ माना, तो $AD = (4 - x)$

$$\therefore \quad \frac{x}{6.375} = \frac{4-x}{5.625} \text{ या } x = \frac{4 \times 6.375}{12} = 2.125 \text{ metre}$$

(i) B.M.D. के लिये—

$$M_x = -3.x.\frac{x}{2} = -1.5x^2 \quad \text{(वक्र रूप समीकरण है)}$$

अत: B.M.D. एक वक्र रूप (Curved shape) में होगा।

At $x = 0$, B.M. at $C \Rightarrow M_C = 0$

At $x = 1$ m, B.M. at $B \Rightarrow M_B = -1.5$ kN-m

या B.M. at $B \Rightarrow M_B = -3 \times 1 \times \frac{1}{2} = -1.5$ kN-m

$$\text{B.M. at } D \Rightarrow M_D = -3 \times 3.125 \times \frac{3.125}{2} + 9.375 \times 2.125$$

$$= 5.2734 \text{ kN-m (max value)}$$

नोट—जिस बिन्दु पर $SF = 0$ होकर sign change करता है वहाँ B.M. का मान अधिकतम होता है।

$$\text{B.M. at } A \Rightarrow F_A = -3 \times 5 \times \frac{5}{2} + 9.375 \times 4$$

$$= -37.5 + 37.5 = 0$$

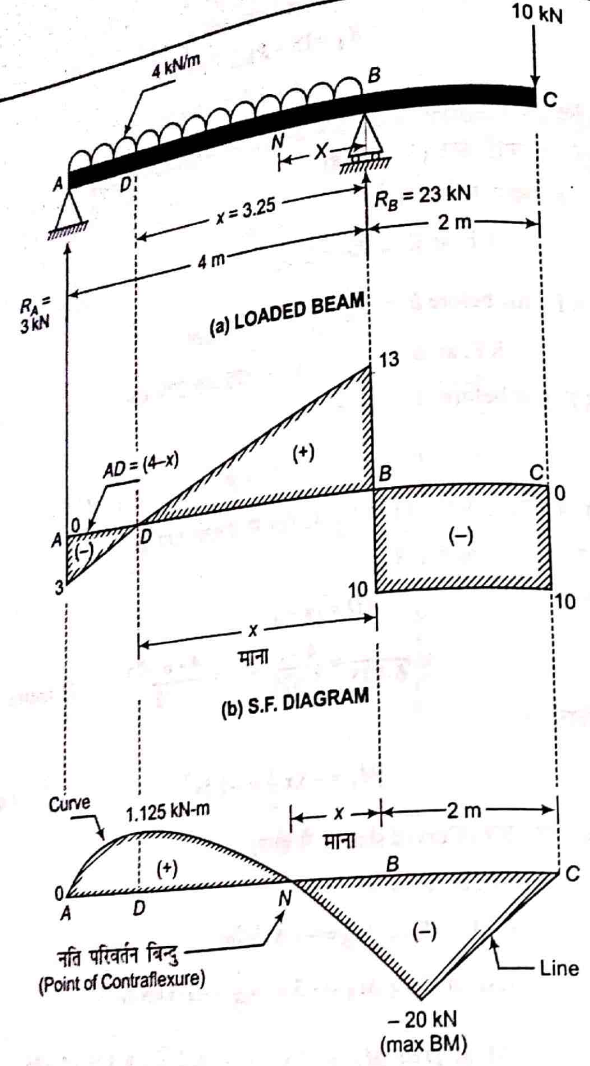
नोट—दो टेकों वाली Beam के दोनों सिरों पर B.M. = 0 होता है।

उदाहरण 26. एक 6 m लम्बी धरन (Beam) पर भार चित्र 3.43 (a) के अनुसार लगे हैं। कर्तन बल तथा नमन घूर्ण आरेखों (S.F.D. and B.M.D.) को बनाइये। अधिकतम नमन घूर्ण का स्थान एवं परिमाण ज्ञात करें। इसके साथ नति परिवर्तन बिन्दु (Point of Contraflexure) भी ज्ञात करें। (U.K. 2012-13 (W))

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

हल—



चित्र 3.43

$\because \quad R_A + R_B = (4 \times 4) + 10$

या $\quad R_A + R_B = 26 \text{ kN}$

A पर (घूर्ण) Moment लेने पर—

$$4R_B = 4 \times 4 \times \frac{4}{2} + 10 \times 6$$

$$= 32 + 60 = 92$$

$\therefore \quad R_B = \frac{92}{4} = 23 \text{ kN}$

अतः $\quad R_A = 26 - R_B$

$$= 26 - 23 = 3 \text{ kN}$$

$\therefore \quad R_A = 3 \text{ kN}, R_B = 23 \text{ kN}$

(1) कर्तन बल आरेख S.F.D. के लिए—

ठीक C पर कर्तन बल (S.F. at C) $\Rightarrow F_C$

$\therefore \quad F_C = -10 \text{ kN}$

S.F. ठीक B के पहले $\Rightarrow$ S.F. just before $B \Rightarrow \vec{F_B}$

$\therefore \quad \vec{F_B} = -10 \text{ kN}$ (C से B तक स्थिर रहेगा)

अब S.F. at $B \Rightarrow \vec{F_B} = -10 + R_B = 13 \text{ kN}$

अब कर्तन बल A के ठीक पहले अर्थात्

S.F. just before A (just right of A) $\Rightarrow \vec{F_A}$

$\therefore \quad \vec{F_A} = 13 - 4 \times 4 = 13 - 16 = -3 \text{ kN}$

Shear Force at $\vec{A} \Rightarrow F_A = -3 + R_A$

$$= -3 + 3 = 0$$

चित्र 3.43 (b) में S.F.D. को दर्शाया गया है।

(i) नमन आघूर्ण आरेख B.M.D. के लिये—

B.M. at $C \Rightarrow M_C = 0$

B.M. at $B \Rightarrow M_B = -10 \times 2 = -20 \text{ kN-m}$

अब S.F.D. के समरूप Δ (similar Δ) में—

$$\frac{x}{13} = \frac{4-x}{3} \text{ या } 16x = 13 \times 4$$

या $\quad x = \frac{13}{4} = 3{\cdot}25 \text{ metre}$

$\because$ D पर S.F. = 0 होकर चिन्ह बदलता है। अतः D पर B.M. का मान अधिकतम (+ve में) होगा।

$\therefore \quad$ B.M. at $D \Rightarrow M_D = -10 \times (2 + 3{\cdot}25) + 23 \times 3{\cdot}25 - 4 \times 3{\cdot}25 \times \frac{3{\cdot}25}{2}$

$\therefore \quad M_D = 1{\cdot}125 \text{ kN-m}$ (+ve दिशा में)

B.M. at $A \Rightarrow M_A = -10 \times 6 + 23 \times 4 - 4 \times 4 \times \frac{4}{2} = 0$

B.M. के प्राप्त मान (values) से B.M.D. को चित्र 3.43 (c) में दर्शाया गया है।

माना नति परिवर्तन बिन्दु (N) की टेक B से दूरी x है।

$\therefore \quad$ B.M. at $N = 0$ $\quad$ [$\because$ बिन्दु N, आधार रेखा पर

अब $\quad -10(2 + x) + 23.x - 4.x.\frac{x}{2} = 0$

या $\quad -20 - 10x + 23x - 2x^2 = 0$

या $\quad 2x^2 - 13x + 20 = 0$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ सूत्र से—

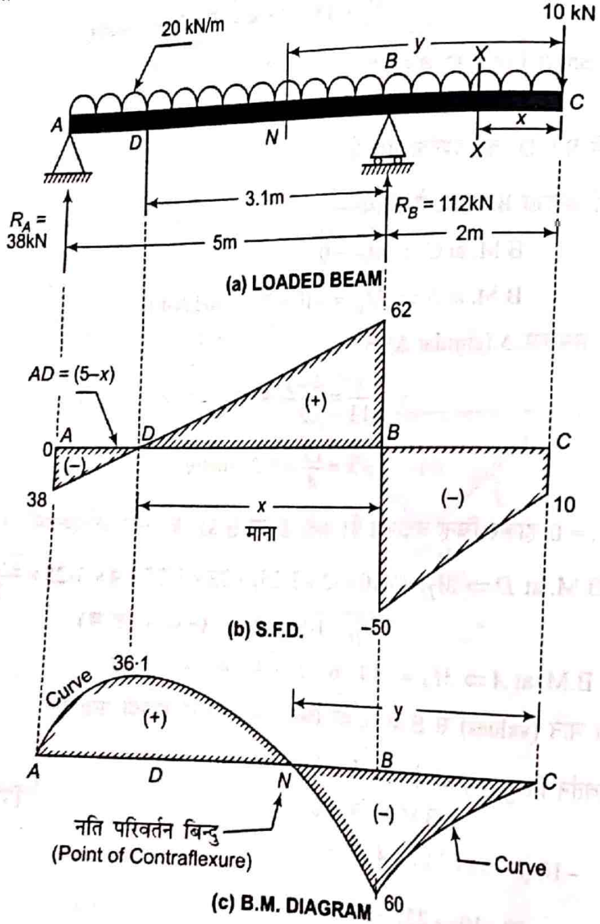
या $$= \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \times 2 \times 20}}{2 \times 2} = \frac{13 \pm 3}{4}$$

(+ve) लेने पर, $x = \frac{16}{4} = 4$ m (अमान्य है, छोड़ देना होगा)

(– ve) लेने पर, $x = \frac{10}{4} = 2{\cdot}5$ m (टेक B से N की दूरी $= 2{\cdot}5$ m है)

नति परिवर्तन बिन्दु N, दायें सिरे C से $(2 + 2{\cdot}5 = 4{\cdot}5 \text{ m})$ पर स्थित है।

उदाहरण 27. एक प्रलम्बी दंड या धरन (Overhanging Beam) पर चित्र 3.44 (a) के अनुसार भार लगे हुये हैं। S.F.D. तथा B.M.D. खींचकर अधिकतम धनात्मक बंकन आघूर्ण (B.M.) तथा कॉन्ट्राफ्लैक्सर बिन्दु (Point of Contraflexure) ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2013, M.O.S.)**



चित्र 3.44

हल—

$R_A + R_B$ = Total Load on Beam

$R_A + R_B = (20 \times 7 + 10)$

∴ $= 150$ kN

अब A पर Moment लेने पर—

$5\,R_B = 20 \times 7 \times \frac{7}{2} + 10 \times 7$

$R_B = \frac{560}{5} = 112$ kN

∴ $R_A = 150 - R_B = 150 - 112$

∴ $R_A = 38$ kN

या

(1) S.F.D. के लिए—

BC भाग में C से x दूरी पर

$F_x = -10 - 20 \times x$ (रेखीय समीकरण)

S.F. at $C \Rightarrow F_C = -10$ kN

∴ S.F. just before $B = \vec{F_B}$

$\vec{F_B} = -10 - 20 \times 2 = -50$ kN

∴ S.F. at $B = -50 + 112 = 62$ kN

∴ S.F. just before $A = \vec{F_A} = 62 - 20 \times 5$

$= -38$ kN

∴ S.F. at $A \Rightarrow \vec{F_A} = -38 + R_A$

∴ $F_A = -38 + 38 = 0$

अब S.F.D. के समरूप Δ (similar Δ) में—

माना $BD = x$ तो $AD = (5 - x)$ होगा।

∴ $\frac{x}{62} = \frac{5 - x}{38}$ (by Geometry)

$100x = 62 \times 5 \Rightarrow 310$

$x = 3{\cdot}1$ metre

नमन घूर्ण (B.M.) के लिये—

$M_x = -10x - 20.x.\frac{x}{2} \Rightarrow -10x - 10x^2$

अत: इस Beam पर U.D.L. के कारण B.M.D. में वक्र (Curve) होगा।

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

$\therefore$ $M_C \Rightarrow$ B.M. at $C = 0$

तथा $M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = -10\times 2 - 20\times 2\times \frac{2}{2} = -60$

याद रखें—जिस टेक पर (Beam) बाहर निकली होती है, उस टेक पर B.M. का मान सदैव (– ve) में होता है।

$\because$ D पर S.F. = 0 होकर sign change करता है, इसलिए D पर BM का मान (+ve) दिशा में अधिकतम होगा।

$$M_D \Rightarrow \text{B.M. at } D = -10\times(3\cdot1+2)+112\times 3\cdot1 - 20\times(3\cdot1+2)\left(\frac{3\cdot1+2}{2}\right)$$

$\therefore$
$$M_D = -51+347\cdot2-260\cdot1$$

$\therefore$
$$= 36\cdot1 \text{ kN-m}$$

$$M_A \Rightarrow \text{B.M. at } A = -10\times 7 + 112\times 5 - 20\times 7\times \frac{7}{2}$$

$\because$
$$M_A = 0$$

$\therefore$ Beam के दोनों सिरों पर B.M. सदैव शून्य (Zero) होता है।

B.M.D. को चित्र 3.44 (c) में दर्शाया गया है। इसमें बिन्दु N, कॉन्ट्राफ्लैक्सर बिन्दु है, माना CN = y है।

B.M. at $N = 0$ [$\because$ N, आधार रेखा ABC पर है]

$\therefore$ $-10y - 20\times y\times\frac{y}{2} + 112\times(y-2) = 0$

या $-10y - 10y^2 + 112y - 224 = 0$

या $-10y^2 - 102y + 224 = 0$

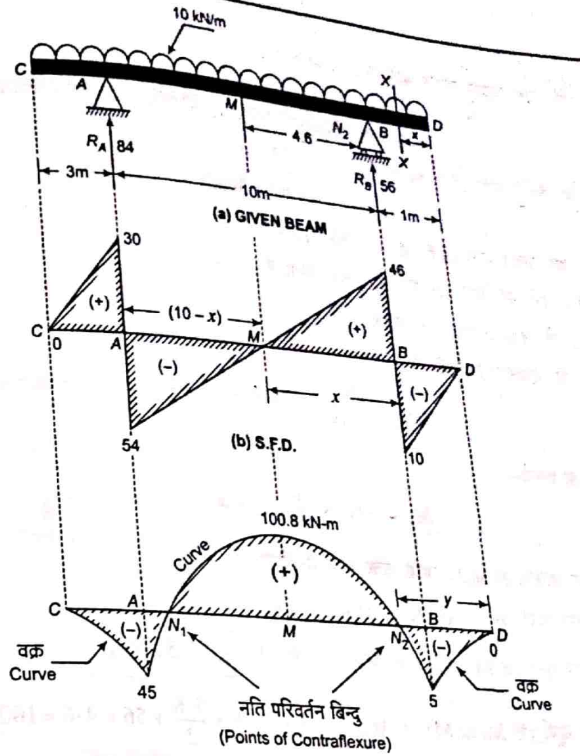
या
$$y = \frac{102\pm\sqrt{102^2-4\times10\times224}}{2\times10}$$

या
$$y = \frac{102\pm38}{20} = 5\cdot1\pm1\cdot9$$

अतः $y = 7$ m तथा $y = 3\cdot2$ metre

$\therefore$ $y = 3\cdot2$ metre ही मान्य होगा। उत्तर

उदाहरण 28. चित्र 3.45 में दिखायी गई धरन (Beam) के लिए अपरूपण बल तथा बंकन आघूर्ण आरेख (Shear and Bending Moment Diagrams) खींचिये। नति परिवर्तन बिन्दु की स्थिति भी बताइये। (U.P. 2014)



चित्र 3.45

हल— $R_A + R_B$ = Total Load on beam $\Rightarrow 10\times14 = 140$ kN

A पर Moment लेने से,

$$10R_B + 10\times3\times\frac{3}{2} = 10\times11\times\frac{11}{2} \quad \text{या} \quad 10R_B = 560$$

$\therefore$ $R_B = 56$ kN

अब $R_A = 140 - 56 = 84$ kN

(1) S.F.D. के लिये—

$$F_x = -10x$$

$\therefore$ D पर कर्तन बल (S.F. at D) $\Rightarrow F_D = 0$

B के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before B) $\Rightarrow F_B = -10\times1 = -10$ kN

ठीक B पर कर्तन बल (S.F. at B) $\Rightarrow F_B = -10 + R_B$

$\therefore$ $F_B = -10 + 56 = 46$ kN

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

अब A के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before A) $\Rightarrow \vec{F}_A$

$$\vec{F}_A = 46 - 10\times10 = -54 \text{ kN}$$

∴ ठीक A पर कर्तन बल (S.F. at A) $\Rightarrow F_A = -54 + R_A$

$$F_A = -54 + 84 = 30 \text{ kN}$$

∴ C पर कर्तन बल (S.F. at C) $= 30 - 10\times3 = 0$

माना B से x दूरी पर बिन्दु M पर S.F. $= 0$ होता है।

∴ $BM = x$ तो $AM = (10 - x)$ होगा।

अब S.F.D. के समरूप त्रिभुजों में

$$\frac{x}{46} = \frac{10-x}{54} \text{ या } 100x = 460 \text{ या } x = 4\cdot6 \text{ meter}$$

(2) B.M.D. के लिये—

$$M_x = -10 . x . \frac{x}{2} = -5 . x^2$$

अत: U.D.L. के कारण B.M.D. एक वक्र रूप में होगा।

∴ D पर नमन घूर्ण (B.M. at D) $\Rightarrow M_D = -5\times0 = 0$ [∵ यहाँ $x = 0$ है]

B पर नमन घूर्ण (B.M. at B) $\Rightarrow M_B = -10\times1\times\frac{1}{2} = -5$ kN-m

M पर नमन घूर्ण (B.M. at M) $\Rightarrow M_M = -10\times5\cdot6\times\frac{5\cdot6}{2} + 56\times4\cdot6 = 100\cdot8$ kN-m

A पर नमन घूर्ण (B.M. at A) $\Rightarrow M_A = -10\times11\times\frac{11}{2} + 56\times10 = -45$ kN-m

C पर नमन घूर्ण (B.M. at C) $\Rightarrow M_C = -10\times14\times\frac{14}{2} + 56\times13 + 84\times3 = 0$

Point of contraflexure के लिए—दायें सिरे D से N_2 की दूरी माना y है।

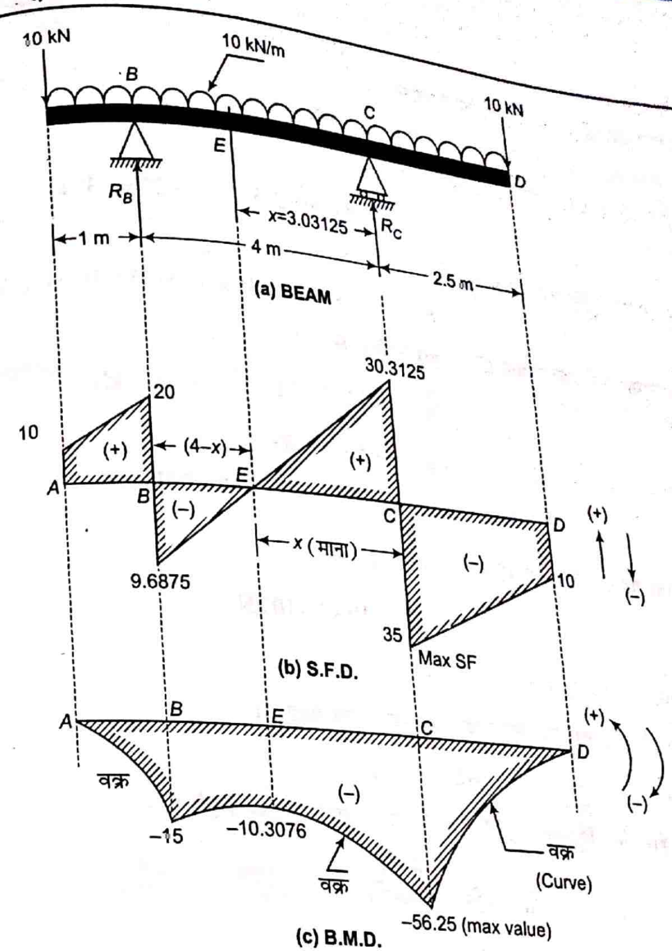
∵ BM at $N_2 = 0$

$$-10\times y\times\frac{y}{2} + 56(y-1) = 0$$

या $$5y^2 - 56y + 56 = 0$$

∴ $$y = \frac{56 \pm \sqrt{56^2 - 4\times5\times56}}{2\times5} = 1\cdot11 \text{ m तथा } 10\cdot1 \text{ m}$$ उत्तर

उदाहरण 29. चित्र 3.46 (a) में दर्शायी गयी धरन के लिये अपरूपण बल एवं बंकन आघूर्ण आरेख (S.F.D. & B.M.D.) खींचिये। (उ० प्र० 2000)



चित्र 3.46

हल—
$$R_B + R_C = 10 + 10 + 10\times7\cdot5 = 95$$

B पर आघूर्ण लेने से, (Clockwise = Anticlockwise Moment)

$$R_C\times4 + 10\times1 + 10\times1\times\frac{1}{2} = 10\times6\cdot5\times\frac{6\cdot5}{2} + 10\times6\cdot5$$

$$4R_C + 10 + 5 = 211\cdot25 + 65$$

या $$4R_C = 261\cdot25$$

या $$R_C = \frac{261\cdot25}{4} = 65\cdot3125$$

समीकरण (1) से $$R_B = 95 - R_C = 95 - 65\cdot3125$$

या $$R_B = 29\cdot6875 \text{ kN}$$

∴ $$R_B = 29\cdot6875 \text{ kN}$$

तथा $$R_C = 65\cdot3125 \text{ kN}$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

D पर कर्तन बल (S.F. at D), $F_D = -10$ kN

C के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before C)

$$\vec{F_C} = -10 - 10 \times 2.5 = -10 - 25 = -35 \text{ kN}$$

अब ठीक C पर कर्तन बल (S.F. at C)

$$F_C = -35 + R_C = -35 + 65.3125 = 30.3125 \text{ kN}$$

अब B के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before B)

$$\vec{F_B} = 30.3125 - 10 \times 4 = -9.6875 \text{ kN}$$

B पर कर्तन बल (S.F. at B), $F_B = -9.6875 + R_B$

या $F_B = -9.6875 + 29.6875 = 20$ kN

अब A के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before $\vec{A}$)

$$\vec{F_A} = 20 - 10 \times 1 = 10 \text{ kN}$$

∴

तथा A पर कर्तन बल (S.F. at A), $F_A = 10 - 10 = 0$

S.F.D. में माना C से x दूरी पर कर्तन बल का मान शून्य होता है।

यदि $CE = x$ तब $BE = (4 - x)$

समरूप त्रिभुजों (Similar Triangles) में भुजाओं का अनुपात बराबर रखने पर—

$$\frac{x}{30.3125} = \frac{4-x}{9.6875}$$

या $40x = 121.25$

या $x = \frac{121.25}{40} = 3.03125$ metre

नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिये गणना—

D पर नमन आघूर्ण (B.M. at D), $M_D = 0$

C पर नमन आघूर्ण (B.M. at C), $M_C = -10 \times 2.5 - 10 \times 2.5 \times \frac{2.5}{2}$

या $M_C = -25 - 31.25 = -56.25$ kN-m

∵ E पर S.F. $= 0$ है अतः B.M. का मान धनात्मक दिशा की ओर अधिकतम होगा।

B.M. at $E \Rightarrow$ $M_E = -10 \times 5.53125 + 65.3125 \times 3.03125 - 10 \times 5.53125 \times \frac{5.53125}{2}$

$M_E = -55.3125 + 197.9785 - 152.9736$

$= -208.286 + 197.9785 = -10.3076$ kN-m

B पर नमन आघूर्ण (B.M. at B), गणना की आसानी के लिये बायीं ओर से घूर्ण लेने पर—

$$M_B = -10 \times 1 - 10 \times 1 \times \frac{1}{2}$$ (अब चिन्ह प्रणाली बायीं ओर वाली प्रयोग करेंगे)

$$= -10 - 5 = -15 \text{ kN-m}$$

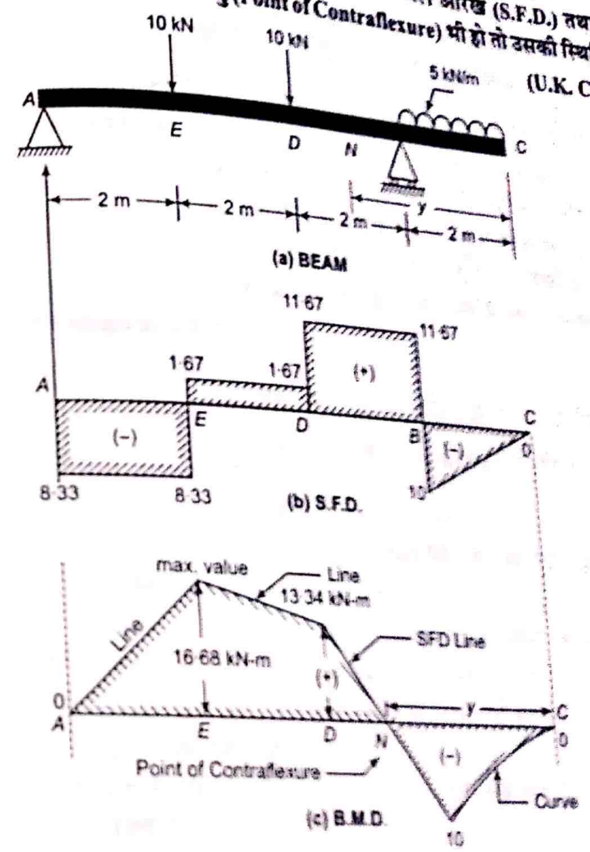
अब A पर नमन आघूर्ण (B.M. at A), $M_A = 0$

(∵ दोनों सिरों पर शून्य होता है)

∵ नमन घूर्ण आरेख B.M.D. ने शून्य होकर बीच में कहीं भी अपना चिन्ह परिवर्तित नहीं किया। इसलिये यहाँ नति परिवर्तन बिन्दु नहीं होगा।

उदाहरण 30. चित्र 3.47 (a) में दिखाई गई धरन के लिए अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) तथा बंकन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) खींचिये। यदि नति परिवर्तन बिन्दु (Point of Contraflexure) भी हो तो उसकी स्थिति भी बताइये।

(U.K. CIVIL 2014, S)



चित्र 3.47

हल—[चित्र 3.47 (b) व (c) देखें]

$$R_A + R_B = 30$$

A पर घूर्ण (moment) लेने से—

$$6R_B = 10 \times 2 + 10 \times 4 + 5 \times 2 \times 7$$

Scanned with CamScanner

$$R_B = \frac{130}{6} = 21{\cdot}67 \text{ kN}$$

$$R_A = 30 - 21{\cdot}67 = 8{\cdot}33 \text{ kN}$$

$\therefore$

(1) S.F.D. के लिये— $\overset{(+)}{\uparrow}\underset{(-)}{\downarrow}$ from R.H.S.

C पर कर्तन बल (S.F. at C) = 0

B के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before B) $\Rightarrow \vec{F_B} = -5 \times 2 = -10$ kN

B पर कर्तन बल (S.F. at B) $\Rightarrow F_B = -10 + R_B = 11{\cdot}67$ kN

D के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before D) $\Rightarrow F_D = 11{\cdot}67$ kN

D पर कर्तन बल (S.F. at D) = $11{\cdot}67 - 10 = 1{\cdot}67$ kN

E के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before E) $\Rightarrow \vec{F_E} = 1{\cdot}67$ kN

E पर कर्तन बल (S.F. at E) $\Rightarrow F_E = 1{\cdot}67 - 10 = -8{\cdot}33$ kN

A के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before A) = $-8{\cdot}33$ kN

A पर कर्तन बल (S.F. at A) = $-8{\cdot}33 + R_A = 0$

(2) B.M.D. के लिये— (+) (–ve) from R.H.S.

C से x दूरी पर BC भाग में नमन घूर्ण (BM at distance x)

$$M_x = -5x\frac{x}{2} = -\frac{5}{2}.x^2 \text{ (Curve equation)}$$

इसमें $x = 0$ रखने पर, C पर घूर्ण (BM at C) $\Rightarrow M_C = 0$

$x = 2$ रखने पर, B पर घूर्ण (BM at B) $\Rightarrow M_B = -5 \times 2 \times \frac{2}{2}$

$$= -10 \text{ kN-m}$$

BD भाग में C से x दूरी पर नमन घूर्ण (BM at distance x from C)

$$M_x = -5 \times 2 \times (x-1) + 21{\cdot}67\,(x-2) \quad \text{(Linear equation)}$$

$x = 4$ रखने पर, D पर नमन घूर्ण (BM at D) $\Rightarrow M_D$

$$M_D = -5 \times 2 \times (4-1) + 21{\cdot}67\,(4-2) = 13{\cdot}34 \text{ kN-m}$$

$x = 6$ रखने पर, E पर नमन घूर्ण (BM at E) $\Rightarrow M_E = -5 \times 2 \times (6-1) + 21{\cdot}67 \times 4 - 10 \times 2$

$$= 16{\cdot}68 \text{ kN-m}$$

$x = 8$ रखने पर, A पर नमन घूर्ण (BM at A) $\Rightarrow M_A = -5 \times 2 \times (8-1) + 21{\cdot}67 \times (8-2) - 10 \times 4 - 10 \times$

$$= 0{\cdot}02 \cong 0 \text{ (Say) (माना)}$$

(3) नति परिवर्तन बिन्दु N के लिए—माना $CN = y$ है।

$\therefore$ $$-5 \times 2 \times (y-1) + 21{\cdot}67\,(y-2) = 0$$

या $$11{\cdot}67\,y = 33{\cdot}34$$

या $$y = 2{\cdot}86 \text{ m}$$

उदाहरण 31. चित्र 3.48 (a) में दर्शायी गयी धरन (Beam) के लिए कर्तन बल एवं नमन घूर्ण आरेख (S.F.D. and B.M.D.) खींचिये तथा निम्न को ज्ञात कीजिये।

(i) अधिकतम नमन आघूर्ण की स्थिति तथा मान।

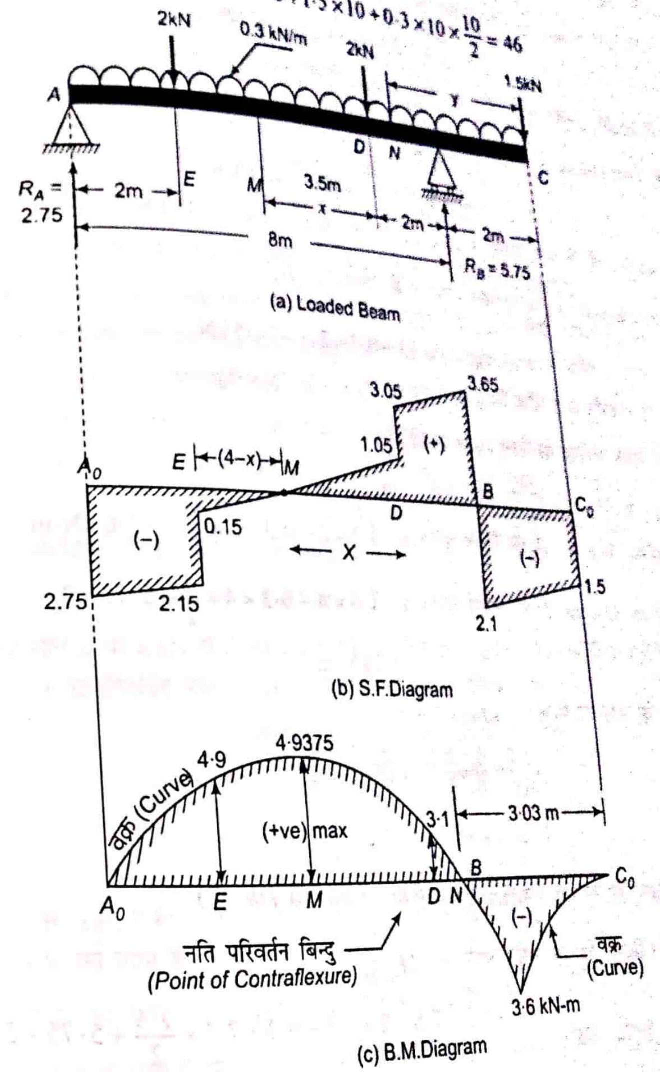
(ii) नति परिवर्तन बिन्दु की स्थिति

हल—

$$R_A + R_B = 2 + 2 + 1{\cdot}5 + 0{\cdot}3 \times 10 = 8{\cdot}5 \text{ kN}$$

टेक A पर आघूर्ण (Moment) लेने पर,

$$8\,R_B = 2 \times 2 + 2 \times 6 + 1{\cdot}5 \times 10 + 0{\cdot}3 \times 10 \times \frac{10}{2} = 46$$



चित्र 3.48

या $$R_B = \frac{46}{8} = 5{\cdot}75 \text{ kN}$$

अतः $$R_A = 8{\cdot}5 - R_B = 2{\cdot}75 \text{ kN}$$

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

$$\text{B.M. at } A = -1{\cdot}5\times10+5{\cdot}75\times8-2\times6-2\times2-0{\cdot}3\times10\times\frac{10}{2}=0$$

माना नतिपरिवर्तन बिन्दु N की C से दूरी y है।

अब

$$\text{B.M. at } N = 0$$

या

$$-1{\cdot}5\times y-0{\cdot}3\times y\times\frac{y}{2}+5{\cdot}75\times(y-2)=0$$

$$-1{\cdot}5\,y-\frac{0{\cdot}3}{2}\times y^2+5{\cdot}75\,y-11{\cdot}5=0$$

$$0{\cdot}3y^2-8{\cdot}5y+23=0$$

$$y=\frac{8{\cdot}5\pm\sqrt{(8{\cdot}5)^2-4\times0{\cdot}3\times23}}{2\times0{\cdot}3}=\frac{8{\cdot}5\pm6{\cdot}682}{0{\cdot}6}$$

(+ ve) लेने पर, $y=25{\cdot}3$ m (असम्भव है) छोड़ देंगे।

(– ve) लेने पर, $y=3{\cdot}03$ m (अत: C से N की दूरी 3·03 m है।)

**विशेष–S.F.D. या B.M.D. दिया होने पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 32. चित्र 3.49 (a) में एक धरन का कर्तन बल आरेख (S.F.D.) दिया गया है। यह धरन दो टेकों (Supports) पर आधारित है जिनमें से एक टेक बांये (left) सिरे पर है। इसके द्वारा धरन पर भारों के प्रकार व स्थिति तथा नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) प्रदर्शित कीजिये।

हल—दिये गये कर्तन बल आरेख (S.F.D.) का अध्ययन अथवा निरीक्षण (inspection) करने से ज्ञात होता है कि धरन की दूसरी टेक (support) बिन्दु B पर होगी जहाँ कर्तन बल (S.F.), चिन्ह बदलता है और चित्र में हम यह भी देखते हैं कि C से B तक S.F. का मान 1 kN का स्थिर है। अत: C पर 1kN का एक बिन्दु भार (Point load) होगा।

अब टेक B की प्रतिक्रिया चित्र 3.49 (a) में देखने से,

$$R_B = 1+4 = 5 \text{ kN होती है।}$$

क्योंकि S.F. का मान B पर 4 kN से D पर 1 kN तक तिरछी रेखा (Inclined Line) के रूप में घटता है तो इससे ज्ञात होता है कि B से D तक समवितरित भार (U.D.L.) लगा है प्रति मीटर जिसका मान

$$w=\frac{\text{तिरछी रेखा के सिरों की ऊँचाइयों में अन्तर}}{\text{सिरों के बीच की क्षैतिज दूरी}}$$

$$\therefore \quad w=\frac{4-1}{3}=\frac{3}{3}=1 \text{ kN/m}$$

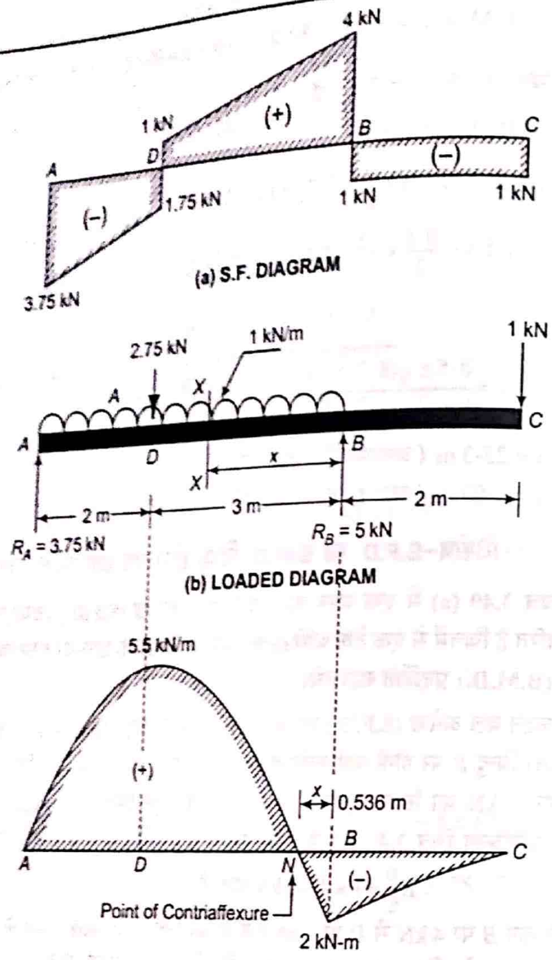
अब क्योंकि D पर S.F. एकदम (Suddenly) बदलता है इससे ज्ञात होता है कि D पर एक बिन्दु भार (Point load) $=1+1{\cdot}75=2{\cdot}75$ kN का लगा है।

इसके बाद फिर D पर S.F. $=1{\cdot}75$ kN से A पर S.F. $=3{\cdot}75$ kN तक तिरछी रेखा के रूप में बदलता है अत: D से A तक समवितरित भार (U.D.L.) कार्य करता है जिसका मान प्रति मीटर में w हो तो $w=\frac{2}{2}=1$ kN/m होगा।

अब बिन्दु A पर S.F.D. में एक ऊर्ध्वाधर रेखा (Vertical line) होने के कारण ज्ञात होता है कि A पर प्रतिक्रिया (Reaction at A) $\Rightarrow R_A=3{\cdot}75$ kN है।

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint



(c) B.M. DIAGRAM

चित्र 3.49

इस आधार पर धरन की भारित स्थिति (loaded position of the Beam) को चित्र 3.49 (b) में दर्शाया गया है।

नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिये गणना (चित्र 3.49 c) देखें।

B.M. at $C \Rightarrow \quad M_C = 0$

B.M. at $D \Rightarrow \quad M_B = -1\times2 = -2$ kN-m

बिना टेक के स्थान या C से 5 m की दूरी पर (जहाँ S.F. अपना चिन्ह परिवर्तित करता है) स्थित बिन्दु D पर B.M. अधिकतम होगा। (B.M. will be maximum at D (*i.e.* 5 m from C) where S.F. changes sign)

$$\therefore \quad M_{max} = M_D = -1\times5 + 5\times3 - 1\times3\times\frac{3}{2} = 5{\cdot}5 \text{ kN-m}$$

अब धरन के सिरे A पर नमन आघूर्ण, $M_A = 0$

[∵ दोनों सिरों पर शून्य होता है]

अब नति परिवर्तन बिन्दु (Point of Contraflexure) ज्ञात करना—

B से x दूरी पर स्थित काट $(X - X)$ पर नमन आघूर्ण (B.M.),

$$M_x = 0 \text{ for } N$$

$$\therefore \quad M_x = -1(2+x) + 5\times x - 1\times x\times\frac{x}{2} = 0$$

$$-2 - x + 5x - \frac{x^2}{2} = 0$$

या

$$x^2 - 8x + 4 = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4\times1\times4}}{2\times1} \quad \text{(बीजगणितीय श्रीधराचार्य सूत्र से)}$$

$$x = \frac{8 \pm 6{\cdot}928}{2} = 7{\cdot}46 \text{ m तथा } 0{\cdot}536 \text{ m}$$

परन्तु $x = 7{\cdot}46$ m, BD भाग की लम्बाई 3 m से अधिक है अतः अमान्य (Not Possible) होगा।

∴ BD में नति परिवर्तन बिन्दु N की B से दूरी 0·536 m सम्भव है। **उत्तर**

उदाहरण 33. चित्र 3.50 (a) में एक Beam का S.F.D. दिखाया गया है। इसका अध्ययन (Study) कर धरन पर भार (Loads on beam) ज्ञात करें तथा गणना करके B.M.D. भी दर्शाइये। नति परिवर्तन बिन्दु भी हो तो उसकी स्थिति बतायें।

नोट—दिये गये S.F.D. के चित्र 3.50 (a) में तिरछी रेखाओं का ढलान (Slopes) बायीं से दायीं ओर है, अतः गणना बायें सिरे से आरम्भ करनी सरल होगी तथा S.F. के लिये चिन्ह प्रणाली चित्र में बायें सिरे से $\overset{(+)}{\uparrow}\underset{(-)}{\downarrow}$ प्रयोग की गई है।

हल—AB भाग में तिरछी रेखा (Inclined line) होने के कारण U.D.L. लगेगा

$$\therefore \text{ समवितरित भार (U.D.L.)} \quad w_1 = \frac{\text{भार}}{\text{लम्बाई}} = \frac{2}{2} = 1 \text{ kN/m}$$

(भार = तिरछी रेखाओं के सिरों में अन्तर होगा)

BC भाग में भी तिरछी रेखा के कारण U.D.L. ही कार्य करेगा।

$$\therefore \quad w_2 = \frac{\text{भार}}{\text{लम्बाई}} = \frac{8-2}{6} = \frac{6}{6} = 1 \text{ kN-m}$$ **उत्तर**

∵ CD लम्बाई तक S.F.D. में क्षैतिज रेखा (Horizontal line) है अतः धरन पर कोई भार नहीं होगा।

अब बिन्दु C पर संकेन्द्रित भार (Point Load) $= 2 + 7 = 9$ kN है।

तथा B पर प्रतिक्रिया $R_B = 8 + 2 = 10$ kN तथा D पर प्रतिक्रिया $= 7$ kN है।

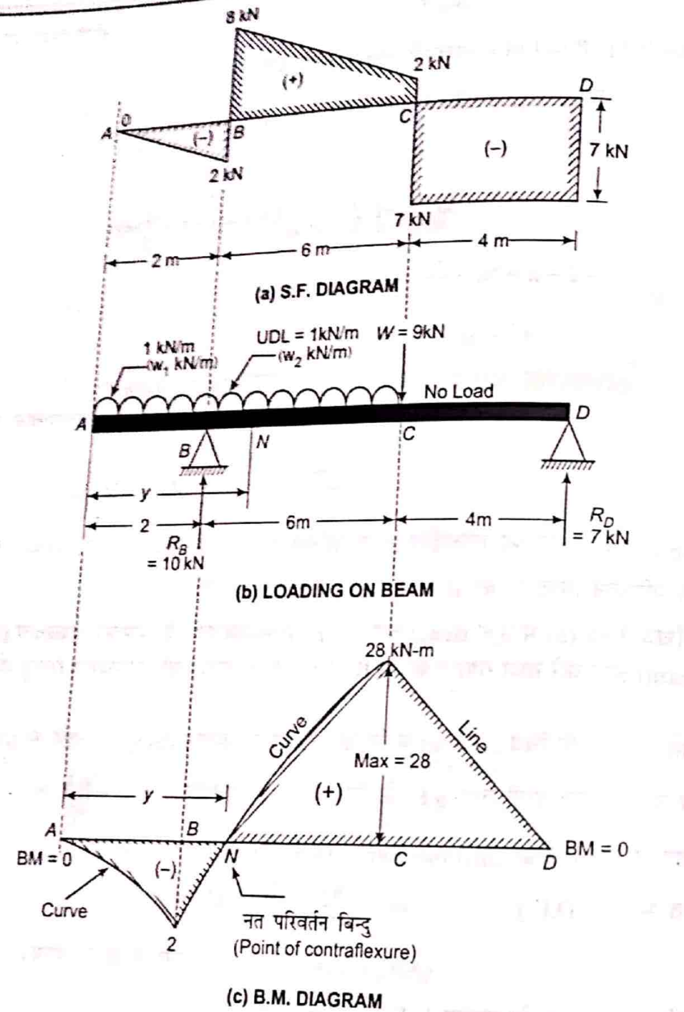
इस प्रकार प्राप्त धरन पर भार चित्र 3.50 (b) में दिखाया गया है।

$M_D \Rightarrow$ B.M. at $D = 0$

$M_C \Rightarrow$ B.M. at $C = 7\times4 = 28$ kN-m

अब बायीं ओर से, $M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = -1\times2\times\frac{2}{2} = -2$ kN-m

Scanned with CamScanner



चित्र 3.50

मान A से N की दूरी y है। (नति परिवर्तन बिन्दु की स्थिति के लिये)

∴ B.M. at $N = 0$ (∵ आधार रेखा पर N है)

$$-1\times y\times\frac{y}{2}+10\times(y-2)=0$$

या $$-y^2+20y-40=0$$

या $$y^2-20y+40=0$$

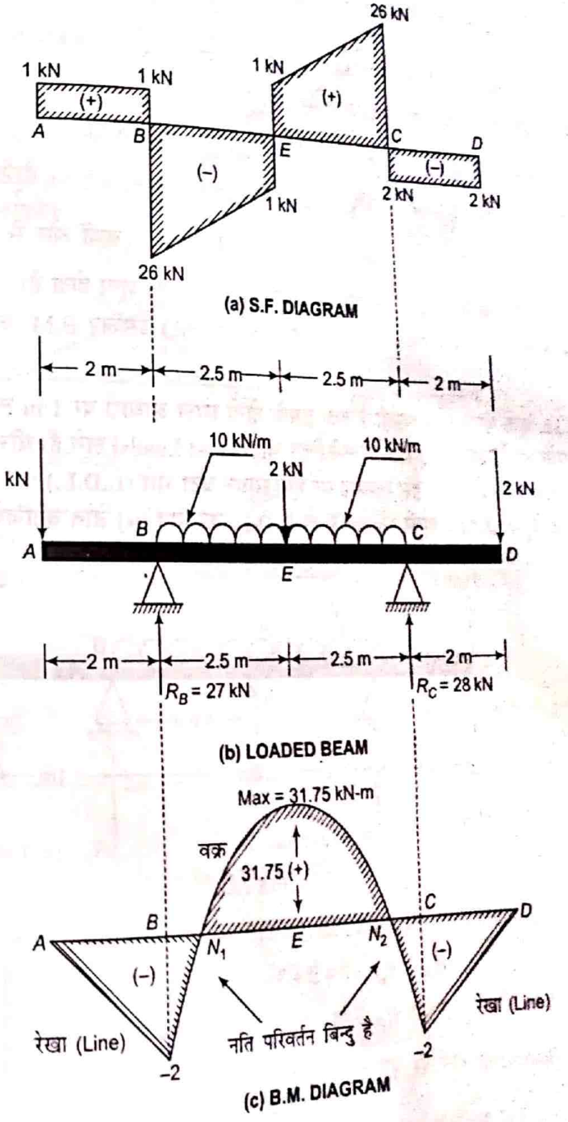
∴ $$y=\frac{20\pm\sqrt{(20)^2-4\times1\times40}}{2\times1}=\frac{20\pm15\cdot49}{2}$$

(+ ve) लेने पर, $y=\frac{35\cdot49}{2}=17\cdot74$ m (असम्भव है)

(– ve) लेने पर, $y=\frac{4\cdot51}{2}=2\cdot255$ metre ≅ 2·26 m

∴ टेक B से N की दूरी = $y-2=2\cdot62-2=0\cdot26$ m

उदाहरण 34. चित्र 3.51 (a) में Beam का S.F.D. दर्शाया गया है। इसे देखकर Beam पर Loading ज्ञात कीजिये तथा नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) गणना करके बनाइये। **उत्तर**



चित्र 3.51

Study PowerPoint
Polytechnic with study Atul
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

अध्ययन (Study)—कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के चित्र 3.51 से ज्ञात होता है कि धरन दोनों सिरों से बाहर निकली धरन (overhanging beam) है जिसकी टेकें (Supports) B तथा C पर हैं। BE तथा CE भागों में तिरछी रेखा होने के कारण इन BE तथा CE भागों पर समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। AB तथा CD लम्बाइयों के भाग टेकों से बाहर निकले हैं।

गणना—अब $R_B = 26 + 1 = 27$ kN तथा $R_C = 26 + 2 = 28$ kN हैं।

A पर बिन्दु भार (Point Load at A) = 1 kN तथा D पर Point Load = 2 kN (S.F.D. से) तथा E पर भार $= 1 + 1 = 2$ kN

[∵ S.F.D. में Vertical Line बिन्दु भारों को तथा तिरछी रेखायें U.D.L. को दर्शाती हैं]

$$BE \text{ लम्बाई में लगे U.D.L. का मान} = \frac{26-1}{2\cdot5} = \frac{25}{2\cdot5} = 10 \text{ kN/m}$$

$$BC \text{ लम्बाई में लगे U.D.L. का मान} = \frac{26-1}{2\cdot5} = \frac{25}{2\cdot5} = 10 \text{ kN/m}$$

अब नमन आघूर्ण (B.M.) के लिये गणना—

$$M_D = 0, M_C = -2 \times 1 = -2 \text{ kN-m}$$

$$M_E = -2 \times 3\cdot5 + 28 \times 2\cdot5 - 10 \times 2\cdot5 \times \frac{2\cdot5}{2} = 31\cdot75 \text{ kN-m}$$

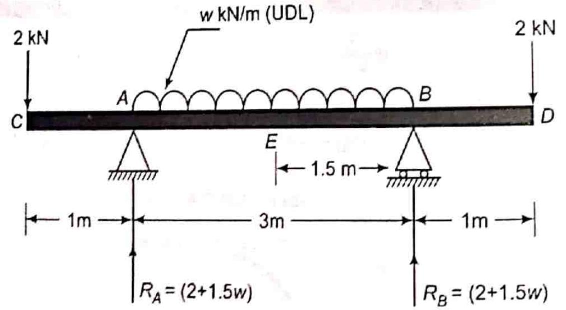
$$M_B = -1 \times 2 = -2 \text{ kN-m}$$ (बायीं ओर से गणना आसानी के लिये की है।)

$M_A = 0$ दो टेकों वाली Beam के दोनों सिरों पर B.M. का मान शून्य होता है।

∵ E पर S.F. = 0 होकर चिन्ह बदला है (टेकों को छोड़कर) इसलिए B.M. का अधिकतम (+ve) मान E पर ही होगा।

उदाहरण 35. एक धरन 5 m लम्बी है तथा इसके दोनों सरल आधारों पर 1 m लम्बा प्रलम्बन (Overhanging Length) है। इसके दोनों सिरों पर 2 kN के संकेन्द्रित भार (Point Loads) लगे हैं। बीच में आधारित लम्बाई (length between supports) 3 m है और इस लम्बाई पर एक समान बँटा भार (U.D.L.) 'w' लग रहा है। यदि धरन के मध्य बिन्दु पर बंकन आघूर्ण (B.M.) शून्य (zero) है तो U.D.L. का मान (w) ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2009, MOS)**

हल—



चित्र 3.52

∵ $R_A + R_B =$ Total Load

∴ $R_A + R_B = 2 + 2 + 3w$

$R_A + R_B = (4 + 3w)$ ...(i)

A पर आघूर्ण (Moment) लेने पर, ($\Sigma M = 0$) से

$$R_B \times 3 + 2 \times 1 = 2 \times 4 + w \times 3 \times \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad R_B = \frac{8 - 2 + 4\cdot5w}{3} = \frac{6 + 4\cdot5w}{3} = (2 + 1\cdot5w)$$

अब समी० (i) से

$$R_A = (4 + 3w) - R_B$$

$$= 4 + 3w - 2 - 1\cdot5w = (2 + 1\cdot5w)$$

वैसे भी भारों की सममिति (symmetry) के कारण, $R_A = R_B$ होने चाहिये।

माना धरन का मध्य-बिन्दु (mid-point) E है। अत: प्रश्नानुसार $M_E = 0$

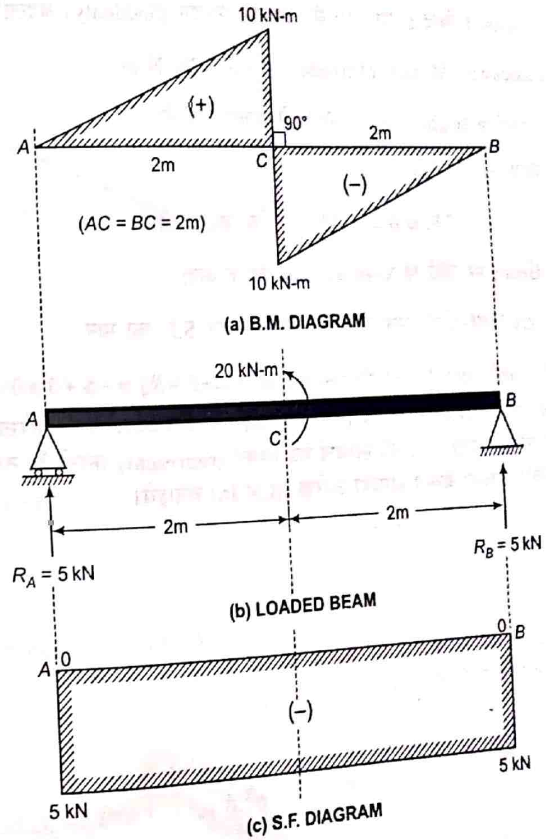
$$\text{B.M. at } E = -2 \times 2\cdot5 + (2 + 1\cdot5w) \times 1\cdot5 - w \times 1\cdot5 \times \frac{1\cdot5}{2} = 0$$

$$\therefore \quad -5 + 3 + 2\cdot25w - \frac{2\cdot25}{2}w = 0$$

या $$\frac{2\cdot25}{2}w = 2 \text{ या } w = \frac{4}{2\cdot25} = 1\cdot78 \text{ kN/m}$$

∴ उत्तर

प्रश्न 36. एक 4 m लम्बे सरल आधारित धरन (simply supported beam) AB के लिए बंकन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) चित्र 3.53 में दिखाया गया है। धरन (Beam) का भारण चित्र (Loading diagram) बनाकर इसका अपरूपण आरेख (S.F.D.) बनाइये। **(U.P. 2008)**



चित्र 3.53

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

हल—B.M.D. से ज्ञात होता है

B.M. at $C \Rightarrow$ $M_C = \pm 10$ kN-m

माना Reactions R_A तथा R_B हैं।

$$R_B \times 2 = -10$$

∴ $$R_B = -\frac{10}{2} = -5 \text{ kN}$$

∴ $$R_B = 5 \text{ kN} \downarrow$$

∴ इसी प्रकार R_A का C पर Moment से

$$R_A \times 2 = +10$$

∴ $$R_A = \frac{10}{2} = +5 \text{ kN}$$

∵ B.M.D. में Moment बिन्दु C पर −10 से +10 तक एकदम (Suddenly) बदला है।

∴ C पर Anticlockwise Moment of couple $= 10 + 10 = 20$ kN-m

∴ Beam का Loading diagram चित्र 3.50 (b) में दर्शाया गया है।

अब S.F.D. के लिए—

S.F. at $B = -5$ kN (R_B के बराबर होगा)

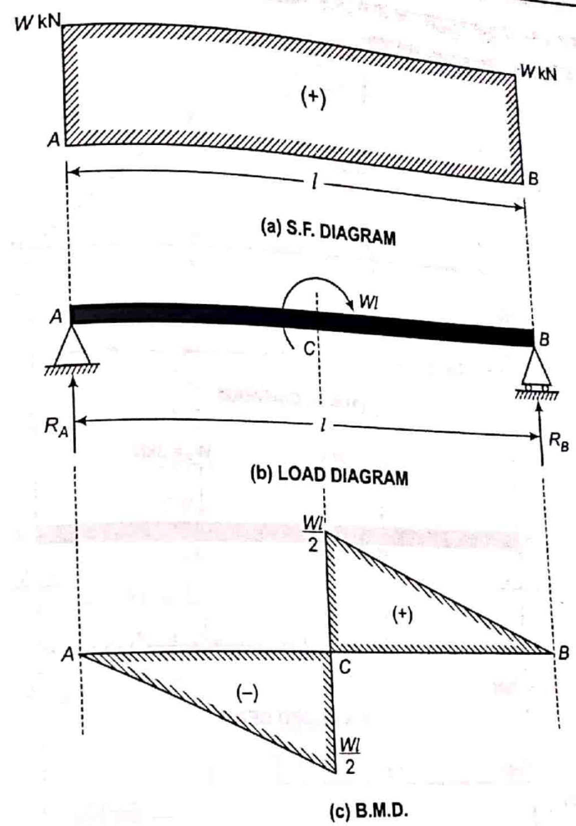
∵ B से C तक Beam पर कोई भी Vertical Load नहीं है अत:

S.F. का मान −5 kN स्थिर रहेगा। अब ठीक A पर पहुँचने तक S.F. का मान

⇒ S.F. just before $A = -5$ kN तथा S.F. at $A = -5 + R_A = -5 + 5 = 0$

उदाहरण 37. एक सरल आधारित धरन (S.S. Beam) का अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) एक आयत (Rectangle), जिसकी लम्बी भुजा धरन की लम्बाई को व्यक्त (represent) करती है। तब धरन का भारण चित्र (Load diagram) बनाकर उसका बंकन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) बनाइये। **(U.P. 2009, B.P.)**

हल—चित्र 3.54 देखें। S.S. Beam पर आयत



चित्र 3.54

S.F.D. के रूप में तब होता है जब केन्द्र पर एक बलयुग्म (couple) का घूर्ण लगा हो, जैसे चित्र (b) में केन्द्र पर $W \times l$ का बलयुग्म दिखाया है।

∵ $$R_A + R_B = 0 \quad \text{... (i)}$$

A पर Moment लेने पर,

$R_B \times l = Wl$ या $R_B = W\uparrow$ अब समी० (i) से $R_A = -W\downarrow$

अब B.M. at $B \Rightarrow$ $M_B = 0$,

B.M. at C (Without Couple) $= R_B \times \frac{l}{2} = \frac{Wl}{2}$

B.M. at C (With Couple) $= \frac{Wl}{2} - Wl = -\frac{Wl}{2}$ (B.M. का मान एकदम Suddenly बदलता है)

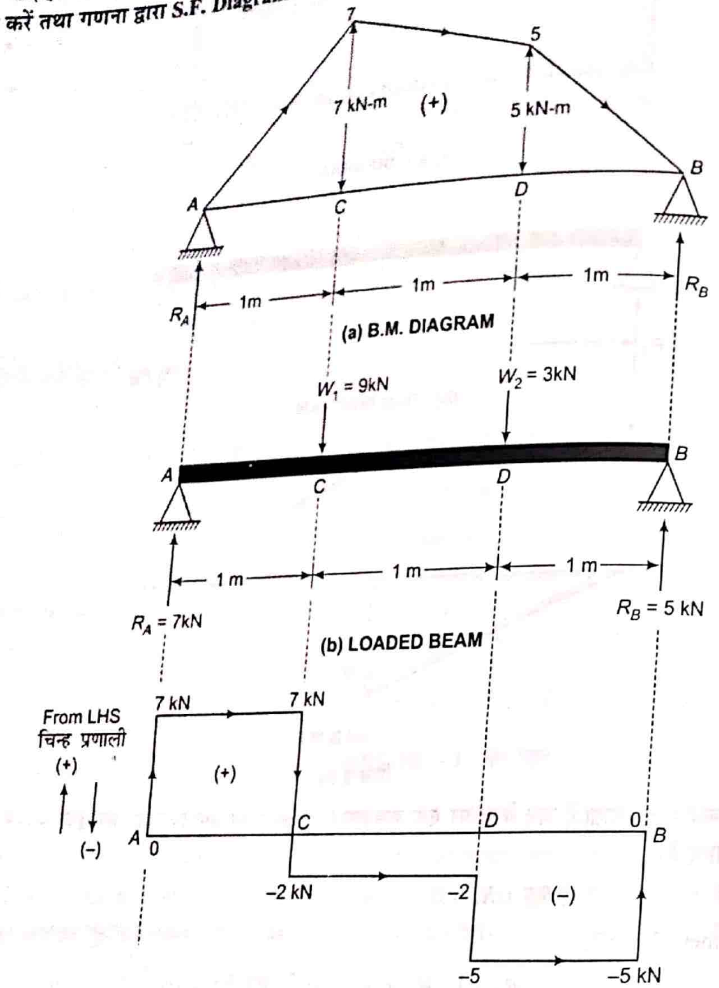
अब B.M. at $A = R_B \times l - W \times l = Wl - Wl = 0$

इस Beam के B.M.D. को चित्र 3.53 (c) में दिखाया गया है।

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

उदाहरण 38. चित्र 3.55 में एक शुद्धालम्ब धरन (S.S. Beam) का B.M.D. दर्शाया गया है। टेकों की प्रतिक्रियायें ज्ञात करें तथा गणना द्वारा S.F. Diagram बनाइये।



(c) S.F. DIAGRAM

चित्र 3.55

हल— B.M. at $C = 7$ दिया है

$\Rightarrow$ $R_A \times 1 = 7$ दिया हैं

$\therefore$ $R_A = 7$ kN उत्तर

इसी प्रकार, $R_B \times 1 = 5$

या $R_B = 5$ kN उत्तर

अब AD भाग के लिये D पर Moment से

$\because$ B.M. at $D \Rightarrow$ $M_D = R_A \times 2 - W_1 \times 1$

$5 = 7 \times 2 = W_1 \times 1$

या $W_1 = 14 - 5 = 9$ kN

$\therefore$ BC भाग के लिये C पर Moment से— उत्तर

$M_C = R_B \times 2 - W_2 \times 1$

$7 = 5 \times 2 - W_2 \times 1$

या $W_2 = 10 - 7 = 3$ kN उत्तर

अब S.F.D. के लिये

$\therefore$ S.F.D. at $A \Rightarrow$ $F_A = R_A = 7$ kN

S.F. between A and $C = 7$ kN

S.F. at C, $F_C = 7 - W_1 = 7 - 9 = -2$ kN

$\therefore$ between C and D, S.F. $= -2$ kN

S.F. at $D = -2 - W_2 = -2 - 3 = -5$ kN

S.F. between D and $B = -5$ kN

S.F. at $B = -5 + R_B = -5 + 5 = 0$ kN

$\therefore$ S.F.D. को चित्र 3.52 (c) में देखिये।

प्रश्नावली

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये—

(i) एक कैन्टीलीवर (Cantilever) में अधिकतम कर्तन बल (S.F.) तथा अधिकतम नमन घूर्ण (B.M.) के मान सदैव .... के स्थान पर होते हैं।

(ii) एक Cantilever में जिस स्थान पर कर्तन बल (S.F.) का मान अधिकतम होता है, बंकन आघूर्ण (B.M.) .... होता है।

(iii) धरन के किसी बिन्दु पर नमन आघूर्ण के परिवर्तन की दर (Rate of change of B.M.) .... के बराबर होती है।

(iv) धरन के जिस स्थान पर बिन्दु भार (Point Load) लगता है, उस स्थान पर .... एकदम बदलता है।

(v) धरन की जितनी लम्बाई में कोई बल नहीं लगता तो उस लम्बाई में .... स्थिर रहता है और बँकन आघूर्ण (B.M.) .... ढंग से बदलता है।

(vi) एक शुद्धालम्बित धरन (S.S. Beam) के मध्य-बिन्दु (middle point) पर कोई बिन्दु भार (Point Load) W लगा हो तो धरन के मध्य में ही अधिकतम नमन घूर्ण .... होता है।

(vii) यदि l लम्बाई की शुद्धालम्बित धरन (S.S.Beam) की पूर्ण लम्बाई पर समान बँटा भार (U.D.L.) w/m लगा है तो धरन (Beam) के मध्य-बिन्दु पर अधिकतम नमन घूर्ण .... होता है।

(viii) एक धरन (Beam) के जिस बिन्दु पर नमन आघूर्ण (B.M.) दिशा परिवर्तित करता है, ... कहलाता है। **(U.K. 2010, S)**

Scanned with CamScanner

(ix) धरन के जिन स्थानों पर नमन घूर्ण (B.M.) चिन्ह बदलता है, उन स्थानों को .... कहते हैं और वहाँ नमन घूर्ण (B.M.) .... होता है।

(x) धरन के जिस बिन्दु पर कर्तन बल (S.F.) अपना चिन्ह बदलता है अथवा SF का मान शून्य होता है तो उस बिन्दु पर नमन घूर्ण (B.M.) का मान .... होता है। (U.K. 2014, S)

रिक्त स्थानों के उत्तर

(i) बद्ध सिरें (Fixed end) (ii) भी अधिकतम (Max) (iii) कर्तन बल (S.F.) (iv) कर्तन बल (S.F.) (v) कर्तन बल (S.F.), सरल रेखीय (linearly) (vi) $\frac{wl}{4}$ (vii) $\frac{wl^2}{8}$ (viii) नति परिवर्तन बिन्दु (Point of Contraflexure) (ix) नति परिवर्तन बिन्दु (N), शून्य (Zero) (x) अधिकतम (Max)।

2. भारित धरन (Loaded Beam) के किसी काट पर "नमन आघूर्ण" तथा "अपरूपण बल" को परिभाषित करें।

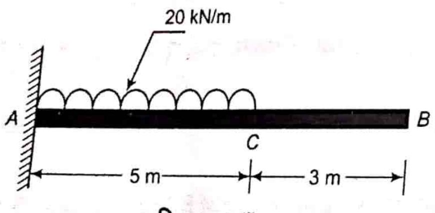
3. निम्नलिखित पर टिप्पणी (Notes) लिखिये—
   (a) विभिन्न प्रकार की धरनों (beams) के चित्र बनाकर नाम लिखिये। कर्तन बल (SF) एवं नमन घूर्ण (BM) को परिभाषित कीजिये। (U.K. 2014, S)
   (b) धरन (Beam) को परिभाषित करें तथा धरन के चित्र सहित प्रकार लिखें। (U.P. 2014)
   (c) नत परिवर्तन बिन्दु (Point of inflection) (U.K. 2014, S)
   (d) उत्तलन (Hogging) या अवतलन (Sagging)।

4. भार, अपरूपण बल (S.F.) तथा बंकन आघूर्ण (B.M.) के लिये चिन्ह परिपाटी (Sign Convention) का उल्लेख करते हुए उनमें आपसी सम्बन्ध स्थापित कीजिये। (U.P./U.K. 2007, 08, 09, 12, 13)

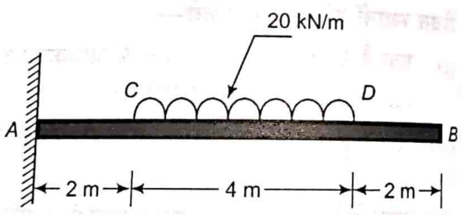
5. भार (Load), अपरूपण बल (S.F.) तथा बंकन आघूर्ण (B.M.) में समबन्ध समझाइये। (U.P. 2013, 2014)

6. विभिन्न प्रकार के धरन (Beam) कौन-कौन से हैं? प्रत्येक को समझाइये। (U.P. 2013, S.O.M.)

7. चित्र 3.56 (i) तथा चित्र 3.56 (ii) में दिखाई गई Cantilever के लिए अपरूपण बल आरेख तथा नमन आघूर्ण आरेख (S.F.D. तथा B.M.D.) बनाइये तथा अधिकतम मान लिखिये।



चित्र 3.56 (i)



चित्र 3.56 (ii)

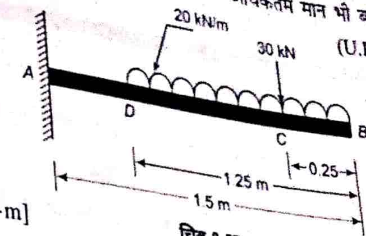
[उत्तर : $F_A = -100$ kN, $M_A = -250$ kN-m] [उत्तर : $F_A = -80$ kN, $M_A = -320$ kN-m]

8. एक 4 m के विस्तृति (span) वाला एक प्रास धरन (Cantilever Beam) पूरे विस्तार (Span) पर समान रूप से वितरित 3 kN/m का भार धारण किये हुए है। इस धरन के लिये अपरूपण बल तथा बंकन आघूर्ण आरेख (S.F.D. and B.M.D.) बनायें। (U.P. 2008; U.P. 2013, SOM)

9. एक कैन्टीलीवर धरन (Cantilever Beam) की लम्बाई 100 cm (1 m) है, इसके आबद्ध सिरे से 40 cm तथा 70 cm की दूरी पर क्रमशः 3 kN तथा 2 kN के बिन्दु भार क्रियाशील हैं। धरन (Beam) का अपना भार 20 N/cm है। धरन के लिये बंकन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) तथा अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) दर्शाइये तथा अधिकतम S.F. एवं B.M. को अंकित कीजिये। (U.P. 2008, SOM)

[उत्तर : $F_{max} = 7$ kN, $M_{max} = 3 \cdot 6$ kN-m]

10. चित्र 3.57 में दिखाये गये Cantilever के लिये S.F.D. व B.M.D. खींचिये। इनके अधिकतम मान भी बताइये। (U.P. 2013)



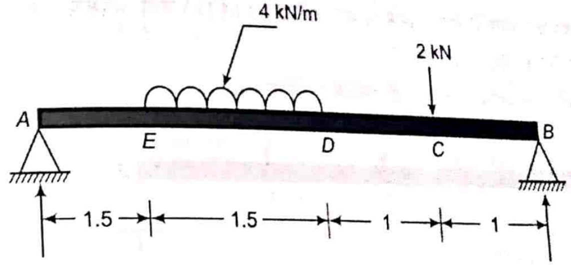
चित्र 3.57

[उत्तर : $F_A = -55$ kN, $M_A = -59 \cdot 375$ kN-m]

11. एक सामान्य ढंग से आलम्बित धरन (a simply supported beam) जो अपने विस्तार (span) के मध्य (mid) में W बिन्दु भार (Point Load) धारण किये हुए है, के लिए अपरूपण बल तथा बंकन आघूर्ण आरेख (S.F.D. तथा B.M.D.) बनायें। धरन की लम्बाई L है। (Hint : See Ex-10) (U.P. 2013, SOM & MOS)

12. विस्तार (Span) L की एक सरल आलम्बित धरन (S.S. Beam) पर w KN/m का समान रूप से बँटा भार (U.D.L.) लगा है। अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) तथा बंकन घूर्ण आरेख (B.M.D.) बनाइये और इनके अधिकतम मानों को दर्शाइये। (Hint : See Ex-11) (U.P. 2014, Civil)

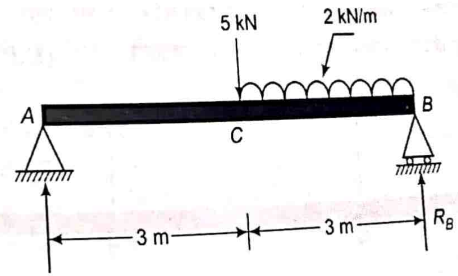
13. चित्र 3.58 में दर्शायी गई बीम के लिए कर्तन बल तथा नमन आघूर्ण आरेख (S.F.D. तथा B.M.D.) खींचिये। महत्तम नमन आघूर्ण की स्थिति एवं परिमाण भी ज्ञात कीजिये। (U.K.2012-13, W)



चित्र 3.58

[उत्तर : Max B.M. = 7·26 kN-m, B से 2·575 m की दूरी पर]

14. चित्र 3.59 में दर्शायी गई धरन (Beam) के लिए S.F.D. व B.M.D. खींचिए। (U.P. 2014, B.P.)



चित्र 3.59

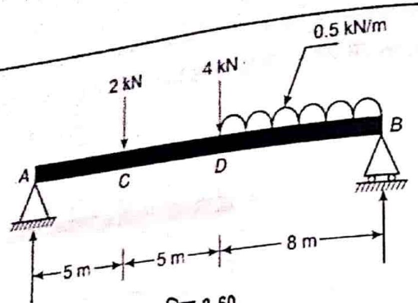
(Hint : See Ex-13)

15. चित्र 3.60 में दिये हुए धरन का नमन आघूर्ण आरेख एवं कर्तन बल आरेख (B.M.D. and S.F.D.) खींचिए। (U.K. 2011-12, W; U.K. 2014, S.B.I)

[उत्तर : $F_{max} = 5 \cdot 89$ kN at B, $M_{max} = 31 \cdot 12$ kN-m at D]

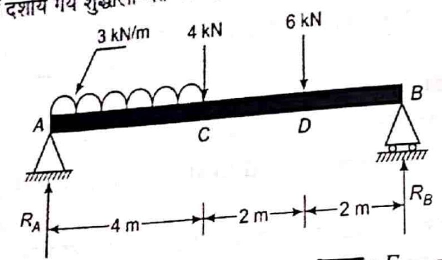
Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint



चित्र 3.60

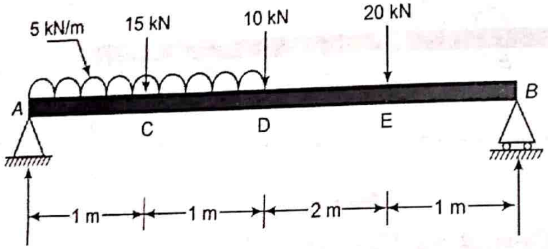
16. चित्र 3.61 में दर्शाये गये शुद्धालम्बित धरन (S.S. Beam) के लिये S.F.D. तथा B.M.D. खींचिए। (U.K. 2010 (S))



चित्र 3.61

[उत्तर : F_{max} = 12·5 kN at A, M_{max} = 26 kN-m at D]

17. चित्र 3.62 में दिखाये गये भारों के वास्ते नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) तथा अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) खींचिए। धरन में अधिकतम B.M. तथा S.F. क्या हैं?,

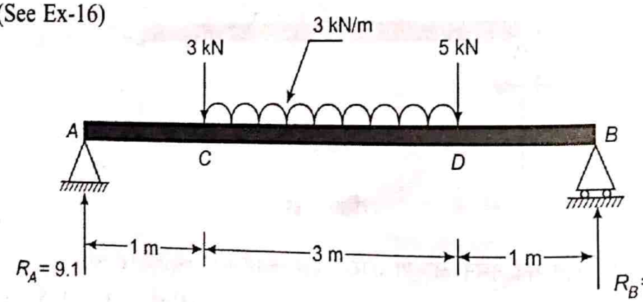


चित्र 3.62

[उत्तर : 35 kN-m, 30 kN]

18. चित्र 3.63 में एक 5 m विस्तृति (Span) वाले सरल आलम्बित धरन पर भार लग रहे हैं। इस धरन के लिए अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) तथा बंकन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) बनाइये। (U.P. 2005; U.K. 2014 in (B.P.))

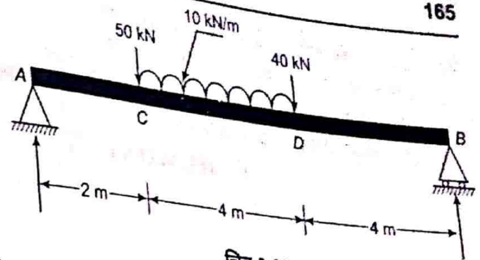
Hint : (See Ex-16)



चित्र 3.63

[उत्तर : F_{max} = 9·1 kN at B, M_{max} = 11·90 kN-m B से 2·367 m की दूरी पर]

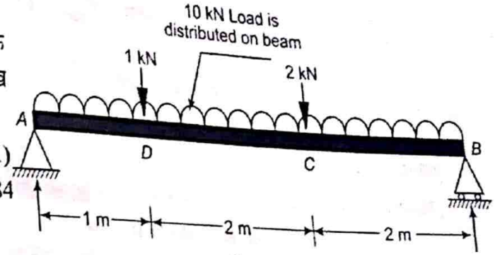
19. चित्र 3.64 में दिखाई गई बीम (Beam) के लिए कर्तन बल आरेख (S.F.D.) तथा बंकन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) बनाइये। (U.K. 2013-B.P.)



चित्र 3.64

[उत्तर : F_{max} = 80 kN at A, M_{max} = 205 kN-m, B से 5 m की दूरी पर]

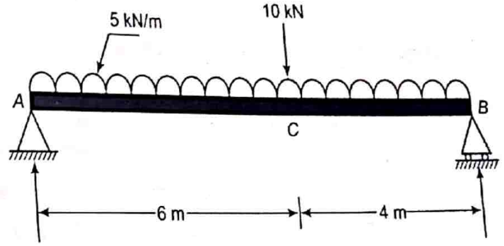
20. चित्र 3.65 में प्रदर्शित एक शुद्धालम्बित धरन के लिये अपरूपण बल एवं बंकन आघूर्ण आरेख (S.F.D. and B.M.D.) खींचिये। (U.P. 2011)



चित्र 3.65

[उत्तर : F_{max} = 6·61 W, M_{max} = 8·84 N-m]

21. एक सरल आधारित धरन (S.S. Beam) पर चित्र 3.66 के अनुसार भार लगे हैं। S.F.D. तथा B.M.D. खींचें।

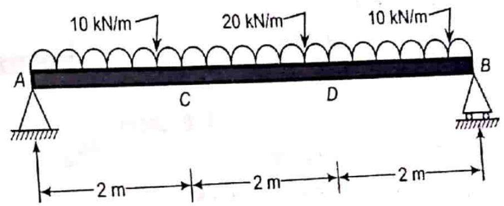


चित्र 3.66

[उत्तर : F_{max} = 31 kN at B, M_{max} = 84·1 kN-m, B से 4·2 m की दूरी पर]

22. चित्र 3.67 में दिखाई भारित धरन (Loaded Beam) के लिये S.F.D. तथा B.M.D. खींचिए। अधिकतम B.M. का मान भी ज्ञात कीजिये। [**Hint :** See Ex. 15]

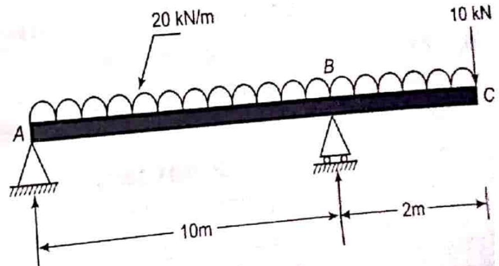
[उत्तर : 70 kN-m]



चित्र 3.67

23. एक 12 मीटर लम्बी धरन पर भार चित्र 3.68 के अनुसार दर्शाया गया है। कर्तन बल तथा नमन घूर्ण आरेखों (S.F.D. and B.M.D.) को चित्रित कीजिए। अधिकतम नमन आघूर्ण का स्थान एवं परिमाण (Position and magnitude of Max B.M.) ज्ञात करें। इसके साथ-साथ नति परिवर्तन बिन्दु भी ज्ञात करें। (U.K. 13, W)

[उत्तर : F_{max} = 106 kN,
M_{max} = 220·9 kN-m,
C से नति परिवर्तन बिन्दु की दूरी = 2·6 m]

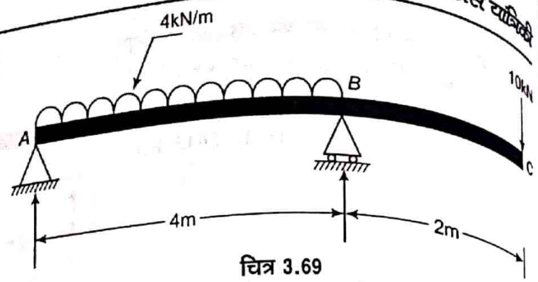


चित्र 3.68

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

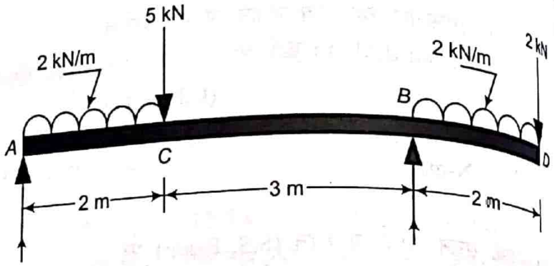
24. एक प्रलम्बी धरन (overhanging beam) पर चित्र 3.69 के अनुसार भार लगे हुए हैं। अधिकतम धनात्मक बंकन आघूर्ण (B.M.) तथा कॉंट्राफ्लैक्सर बिन्दु N ज्ञात कीजिये।
(U.P. 2013, M.O.S.)



चित्र 3.69

[उत्तर : $F_{max} = 13$ kN, $M_{max} = 106{\cdot}125$ kN-m, C से N की दूरी 4·5 m]

25. चित्र 3.67 में दिखाई धरन के लिये कर्तन बल और नमन घूर्ण आरेख (S.F.D.& B.M.D.) खींचिये।
[Hint : $R_A = 4{\cdot}6$ kN, $R_B = 10{\cdot}4$ kN]
(U.K. 2013 (S))

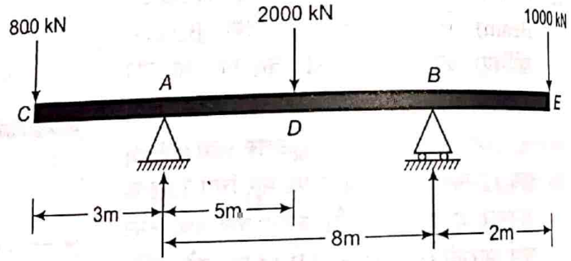


चित्र 3.70

[उत्तर : $F_{max} = 6$ kN, $M_{max} = 8$ kN-m
(– Ve side), तथा $M_{max} = 5{\cdot}2$ kN-m
(+ Ve side) N की सिरे D से दूरी 3·82 m]

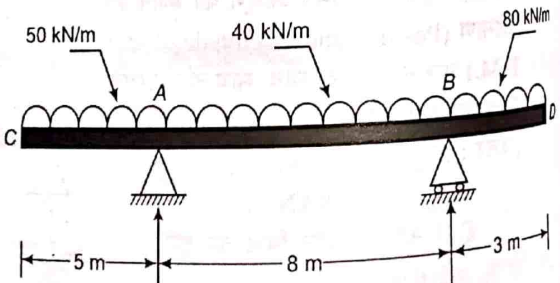
26. एक प्रलंबी धरन (overhanging beam) की लम्बाई 5 m है तथा यह अपने सिरों से 1 m की दूरी पर सरल आधारित है। धरन पर 5 kN/m का एकसमान बंटित भार (U.D.L.) लगा है। इस धरन के मध्य-बिन्दु पर बंकन आघूर्ण तथा अपरूपण बल (B.M. and S.F.) ज्ञात कीजिये तथा S.F.D. व B.M.D. भी खींचिए।
(U.P. 2012)
[उत्तर : 3·125 kN-m; 0 शून्य]

27. एक प्रलम्बित धरन (overhanging beam) जो चित्र 3.71 के अनुसार भारित है, का S.F. तथा B.M. आरेख खींचो।
(U.P. 2010)
[उत्तर : $F_{max} = 1200$kN,
$M_{max} = +1600$ kN-m तथा
$M_{max} = -2400$ kN-m
E से N की दूरी 3·66 m]



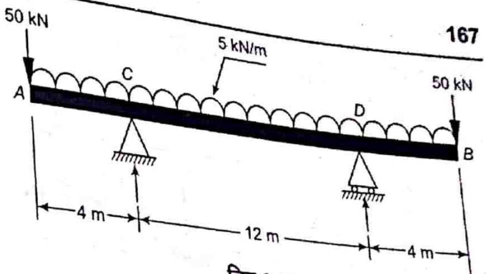
चित्र 3.71

28. चित्र 3.72 में दर्शायी गयी धरन के लिए बंकन आघूर्ण (B.M.D.) एवं अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) बनाइये।
(U.P. 2003, 2007)
[उत्तर : Max B.M. = 625 kN-m
Max SF = + 250 kN]



चित्र 3.72

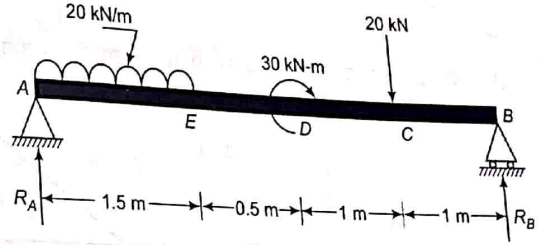
29. चित्र 3.73 में दर्शायी गयी धरन (Beam) का S.F.D. तथा B.M.D. खींचिये और नति परिवर्तन बिन्दु को दर्शाइये।
(U.K. 2013-B.P.)



चित्र 3.73

[उत्तर : $F_{max} = 70$ kN,
$M_{max} = -240$ kNm नति परिवर्तन बिन्दु N नहीं होगा।]

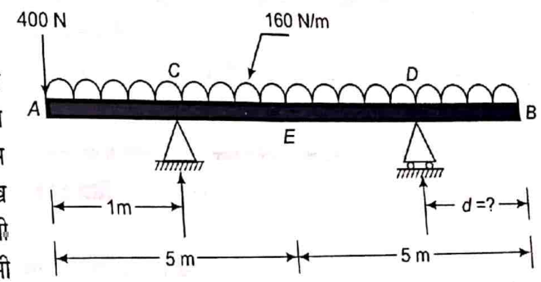
30. चित्र 3.74 में दर्शायी गयी Loaded Beam के लिये S.F.D. तथा B.M.D. खींचिये।
[Hint : Like Ex = 20]



चित्र 3.74

[उत्तर : Max S.F. = 28·12 kN, Max B.M. = 36·24 kN-m at D, Max B.M. between U.D.L. = 11·95 kN-m]

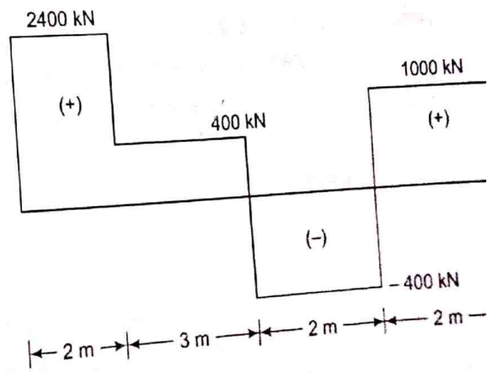
31. चित्र 3.75 में दिखायी गयी 10 m लम्बी भारित धरन (Loaded Beam) के लिये दायें सिरे B से टेक D की दूरी ज्ञात करें जबकि नति परिवर्तन बिन्दु (Point of Contraflexure) की स्थिति Beam के मध्य-बिन्दु (Mid-Point) पर है। इस धरन (Beam) के लिये अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) तथा नमनाघूर्ण आरेख (B.M.D.) भी बनाइये। यदि अन्य कोई नति परिवर्तन बिन्दु भी हो तो उसकी स्थिति भी बतायें।



चित्र 3.75

[उत्तर : $BD = 10$ m, A से N की दूरी = 2·5 m, $R_C = 1000$ N, $R_D = 1000$ N]

32. चित्र 3.76 तथा 3.77 में एक भारित धरन (Loaded Beam) का Shear Force Diagram (S.F.D.) दिखाया गया है। धरन (Beam) पर टेकों की स्थिति और इसका भार (Loading diagram) तथा B.M.D. (नमन घूर्ण आरेख) बनाइये।

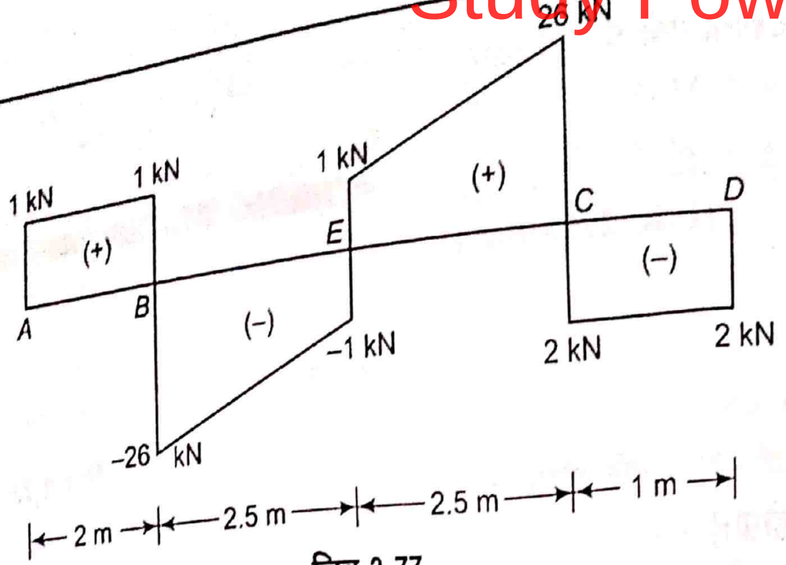


चित्र 3.76

[उत्तर : Max B.M. = 6000 kN-m]

Scanned with CamScanner

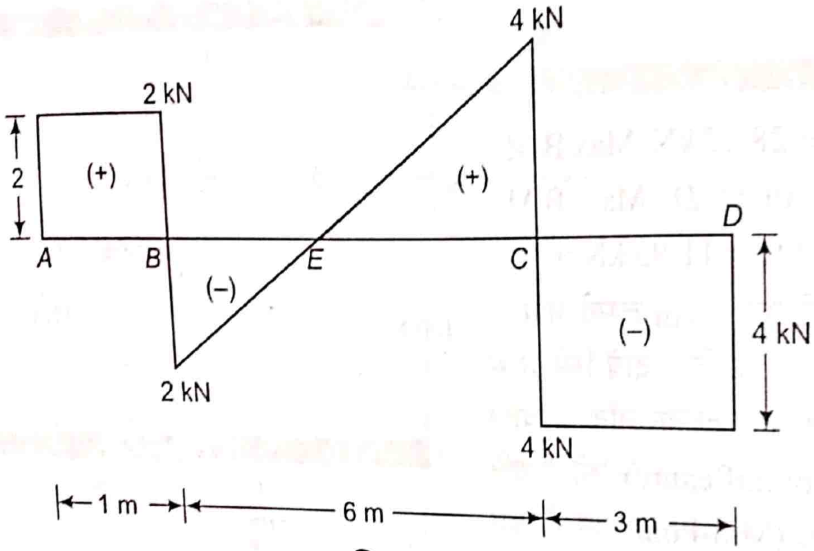
Study PowerPoint



चित्र 3.77

[उत्तर : $M_B = -2$ kN-m, $M_C = -2$ kN-m, $M_E = 31{\cdot}75$ kN-m]

33. चित्र 3.78 में दिखाये गये S.F.D. से Beam पर Load तथा B.M. diagram बनायें।



चित्र 3.78

[उत्तर : B तथा C पर टेक हैं। $M_C = -10$, $M_E = -4$, $M_B = -2$ kN-m]

34. एक सरल आधारित धरन (S.S. Beam) का अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) एक आयत है, जिसकी लम्बी भुजा धरन की लम्बाई को व्यक्त करती है। तब धरन का भारण चित्र (Loading Diagram) बनाकर उसका बंकन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) बनाइये। **(U.P. 2009)**

[संकेत : उदाहरण 37 देखें।]

(उत्तर : यदि अपरूपण बल आरेख लम्बाई $AB = l$, ऊँचाई $= +W$, तब $R_A = W\downarrow$, $R_B = W\uparrow$ और केन्द्र C पर $W \times l$ का बलयुग्म, नमन घूर्ण $M_A = M_B = 0$, केन्द्र पर नमन घूर्ण, $+\dfrac{Wl}{2}$ से $-\dfrac{Wl}{2}$ तक एकदम बदलता है।)

Scanned with CamScanner

Youtube- PolYtechic Study with Atul

Study PowerPoint

4 सरल नमन का सिद्धान्त (THEORY OF SIMPLE BENDING)

§ 4.1 परिचय (Introduction)

पिछले अध्याय में हमें ज्ञात हुआ कि धरन (Beam) पर अनुप्रस्थ भार (transverse load) के कारण धरन की प्रत्येक काट पर कर्तन बल (shearing force) तथा नमन-आघूर्ण (Bending Moment) के मान बदलते हैं। साथ-साथ यह भी ज्ञात हुआ कि धरन पर भार लगने से धरन का अवतलन (Sagging) और उत्तलन (Hogging) कैसे होता है। धरन पर भार या बल के कारण उत्पन्न प्रतिक्रिया बल और धरन पर उसके प्रभाव को जाना अर्थात् धरन का नमन होने के कारण उसमें कर्तन व नमन प्रतिबल उत्पन्न होते हैं। धरन के झुकाव (bending) से सम्बन्धित ज्ञान का उपयोग धरनों के पदार्थों का सामर्थ्य (Strength of material of the beam) ज्ञात करने में किया जाता है। इसी का आधार लेकर धरनों (beams) के काट की माप व लम्बाई आदि सभी पैरामीटर्स निर्धारित किये जाते हैं। धरन की नमन (bending of beam) में सामर्थ्य का उपयोग छतों (roofs), फर्शों (Floors), ट्रसों (Trusses), शाफ्टों (Shafts), धुरी (Axles), लीवरों, स्प्रिंगों (Springs) तथा मशीन के आधारों में मुख्य रूप से होता है।

§ 4.2 शुद्ध या सरल नमन (Pure or Simple Bending)

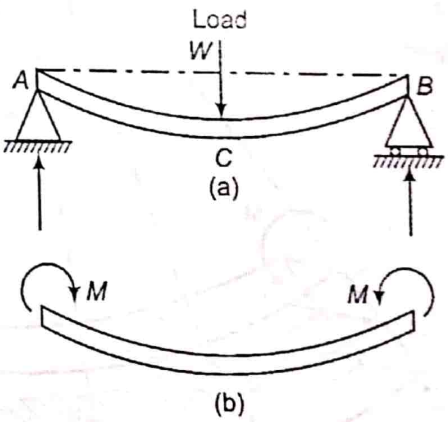
परिभाषा—"यदि किसी धरन का अथवा उसके कुछ भाग का नमन इस प्रकार हो कि उसकी काट पर केवल नमन प्रतिबल (Bending Stress) ही उत्पन्न हों, कर्तन प्रतिबल (Shearing Stress) उत्पन्न न हों, तो इस प्रकार के नमन को शुद्ध या सरल नमन (Pure or Simple Bending) कहते हैं।" अथवा धरन के जिस भाग में केवल नमन घूर्ण (BM) स्थिर हो और कर्तन बल शून्य (SF = 0) हों तो इसे शुद्ध नमन की स्थिति कहते हैं।

यहाँ यह ध्यान देने योग्य बात है कि शुद्ध नमन की दशा में धरन की काट पर कर्तन बल (S.F.) नहीं होने चाहिए तब ही कर्तन प्रतिबल (Shearing Stress) भी उत्पन्न नहीं हो सकेंगे।

Definition : "When a beam is loaded in such a manner that it is subjected to constant bending moment only and there is no shear force. This condition is called pure bending or simple bending."

चित्र 4.1 (a) में दिखायी गयी धरन का नमन, एक बिन्दु भार (Point Load) W लगाकर किया गया है। इस अवस्था में धरन की काट में नमन प्रतिबल के साथ कर्तन प्रतिबल भी होंगे, अत: यह शुद्ध नमन नहीं है।

चित्र 4.1 (b) में धरन का नमन, सिरों पर नमन घूर्ण (M) लगाकर किया गया है। अत: इस अवस्था में धरन की किसी भी काट में कोई कर्तन बल (δF) नहीं होगा और न ही कोई कर्तन प्रतिबल उत्पन्न होंगे, अत: यह शुद्ध नमन का उदाहरण है।



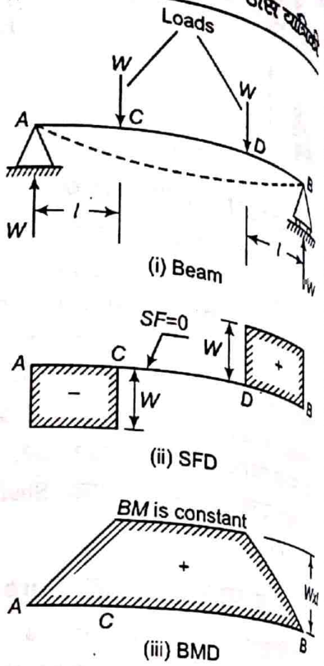
चित्र 4.1

चित्र 4.1 (c) में धरन पर दोनों टेकों से बराबर दूरी पर बराबर भार (W) लगे हैं। इसके लिये पिछले अध्याय के आधार पर खींचे गये कर्तन बल आरेख (S.F.D.) तथा बंकन घूर्ण आरेख (B.M.D.) से पता चलता है कि धरन के CD भाग में कर्तन

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

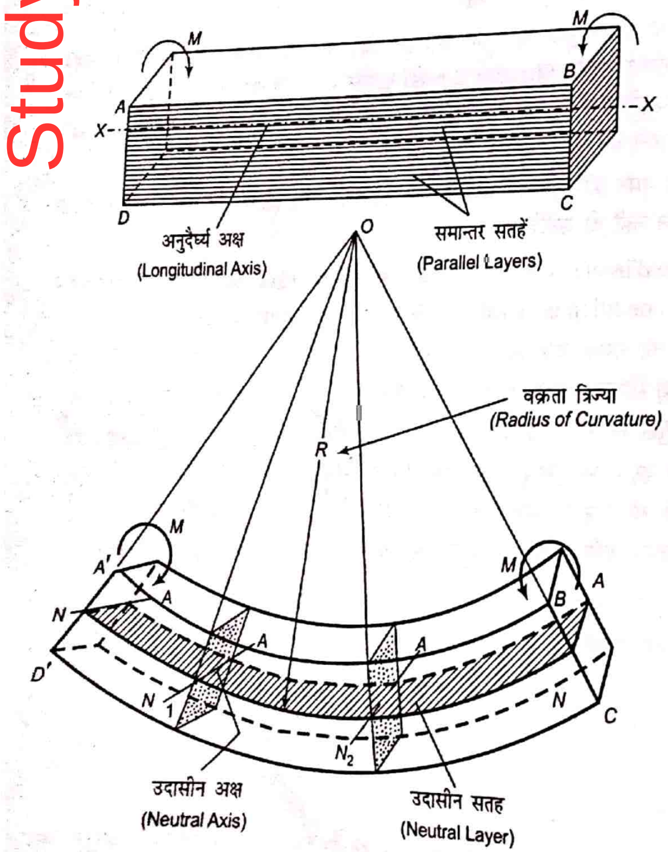
बल (S.F.) शून्य (Zero) है और इस भाग में नमन (बंकन) आघूर्ण (Bending Moment) $(W \times l)$ स्थिर है, अतः *CD* भाग का नमन, शुद्ध नमन (Pure Bending) का उदाहरण है।



चित्र 4.1 (c)

4.3 नमन प्रक्रिया तथा इससे सम्बन्धित महत्वपूर्ण पद (Process of Bending and Important terms Related to it)

चित्र 4.2 में प्रदर्शित एक आयताकार काट वाली धरन के सिरों पर नमन आघूर्ण *M* लगाकर इसका शुद्ध नमन किया जाता है और धरन एक वृत्ताकार चाप (Circular arc) में मुड़ जाती है। माना यह धरन कई समान्तर, पतली तथा समतल सतहों (Layers) की बनी है, जो लम्बाई की अक्ष के समान्तर हैं। माना धरन का पदार्थ सर्वांगसम (Homogeneous) है। तनाव तथा संपीडन (Tension side and compression) दोनों में ही धरन के पदार्थ का यंग मापांक (या प्रत्यास्थता गुणांक) अर्थात् *E* का मान समान रहता है।



चित्र 4.2 (a) & (b)

(1) उदासीन सतह (Neutral Layer)—धरन का नमन (layer) की स्थिति में धरन के ऊपर वाली (अर्थात् चाप के अन्दर वाली) सतहों की लम्बाई कम हो जाती है क्योंकि सिकुड़ती हैं तथा नीचे वाली (अर्थात् चाप के बाहर वाली) सतहों की लम्बाई बढ़ जाती है क्योंकि ये सतह फैलती हैं। अतः धरन के बीच में कहीं एक ऐसी सतह (या परत layer) अवश्य होती है, जिसकी लम्बाई में कोई परिवर्तन नहीं होता। इस सतह को "उदासीन सतह" (Neutral layer) कहते हैं। इस सतह (या परत) पर कोई प्रतिबल नहीं होता। इस सतह को चित्र में दिखाया गया है। संक्षेप में हम कह सकते हैं कि—

"धरन की नमन की स्थिति में दोनों सिरों के गुरुत्व केन्द्रों को मिलाने वाली लम्बाई के समान्तर काल्पनिक पट्टी (Imaginary Strip) को उदासीन सतह (Neutral layer) कहते हैं।"

(2) उदासीन अक्ष (Neutral Axis)—धरन की कोई भी अनुप्रस्थ काट उदासीन सतह को जिस रेखा पर मिलती है, उस कटान रेखा को काट की उदासीन अक्ष (Neutral Axis) कहते हैं। चित्र 4.2 में इसे *N-A* द्वारा दिखाया गया है।

(3) वक्रता त्रिज्या (Radius of Curvature)—नमन की स्थिति (Bending Position) में कोई धरन जिस चाप (Arc) में मुड़ जाती है अथवा Bend हो जाती है, उस चाप (Arc) की त्रिज्या को ही वक्रता त्रिज्या (Radius of Curvature) कहते हैं। इसे चित्र में (*R*) द्वारा दर्शाया गया है।

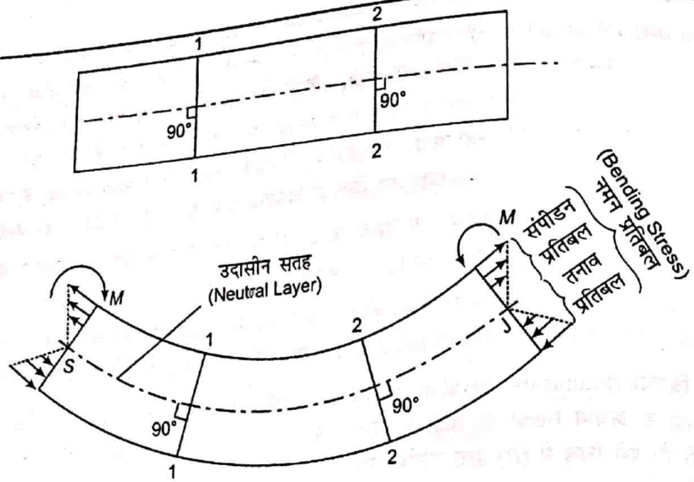
अतः "धरन के नमन की स्थिति में दोनों सिरों को आगे बढ़ाने पर रेखायें आपस में जिस बिन्दु *O* पर मिलती हैं, उसे वक्रता केन्द्र (Centre of Curvature) कहते हैं। अब *O* से उदासीन सतह की त्रिज्यक (त्रैज्य) दूरी *R* को वक्रता त्रिज्या (Radius of Curvature) कहते हैं।"

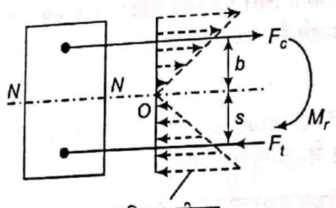
इस वक्रता केन्द्र *O* से उदासीन सतह (Neutral Layer) के बीच की दूरी को वक्रता त्रिज्या (radius of curvature) कहते हैं तथा *R* से दर्शाते हैं। यह धरन के चाप की त्रिज्या होती है।

(4) धरन में नमन प्रतिबल (सम्पीडन तथा तनाव प्रतिबल) (Bending Stresses in the beam (or tensile and compressive stresses))—(चित्र 4.3 देखें) हम जानते हैं कि नमन की स्थिति में धरन की विभिन्न सतहों की लम्बाई में परिवर्तन होता है और लम्बाई में परिवर्तन के कारण ही धरन के पदार्थ में नमन प्रतिबल (Bending Stress) उत्पन्न होते हैं। अतः धरन के नमन की दशा में धरन में उत्पन्न हुए प्रतिबल को नमन प्रतिबल (bending stress) कहते हैं। नीचे वाली सतहों में तनाव नमन प्रतिबल उपजते हैं क्योंकि नीचे वाली इन सतहों की लम्बाई में वृद्धि होती है और ऊपर वाली परतों में (या सतहों में) सम्पीडन नमन प्रतिबल उपजते हैं क्योंकि सतहों के सिकुड़ने अथवा फैलने के कारण सतहों की लम्बाई में परिवर्तन होता है जिसके कारण उनमें नमन प्रतिबल उपजते हैं और ये नमन प्रतिबल सतहों की लम्बाई की दिशा में उत्पन्न होते हैं। अतः नमन प्रतिबलों की दिशा धरन की अनुप्रस्थ काट पर लम्बरूप होती है।

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint





चित्र 4.3

(5) प्रतिरोधी घूर्ण (Moment of Resistance)—चित्र 4.3 में धरन की अनुप्रस्थ काट पर नमन प्रतिबल दिखाये गये हैं जो सतहों की लम्बाई की दिशा में होते हैं। इस चित्र में सम्पीडन और तनाव प्रतिबलों की तीव्रता भी दिखाई गई है। ये नमन प्रतिबल, अनुप्रस्थ काट पर लम्ब दिशा में होते हैं।

माना सम्पीडन प्रतिबलों का सम्मिलित प्रभाव बल F_C तथा तनाव प्रतिबलों का F_t द्वारा दिशा तथा स्थिति में प्रदर्शित होता है और ये उदासीन अक्ष के बिन्दु O से क्रमश: b तथा a दूरियों पर हैं। अब F_C तथा F_t का अक्ष $N-N$ के सापेक्ष आघूर्ण $M_r = (F_C b + F_t a)$ होता है। यही आघूर्ण बाहर से लगाये गये नमन आघूर्ण M का विरोध करता है। सन्तुलन की स्थिति में यह आन्तरिक आघूर्ण M_r, बाह्य आघूर्ण M को साध लेता है अर्थात् बराबर एवं विपरीत होता है। इस आन्तरिक आघूर्ण M_r को ही प्रतिरोधी आघूर्ण कहा जाता है।

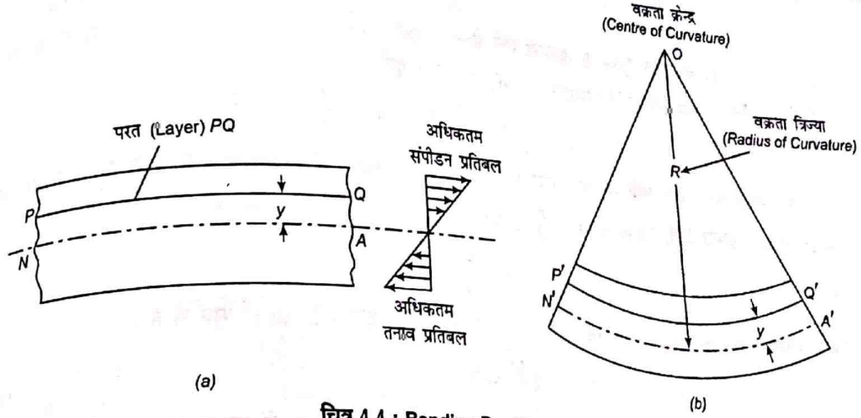
4.4 नमन प्रतिबलों का विश्लेषण (Analysis of Bending Stresses)

हम जान चुके हैं कि धरन में नमन घूर्ण (Bending Moment) के साथ-साथ उसकी काट में नमन प्रतिबल (Bending Stress) भी उत्पन्न होते हैं। अत: नमन आघूर्ण (M) तथा नमन प्रतिबल (f या σ) में सम्बन्ध स्थापित करना आवश्यक है, जिसको नमन समीकरण (Bending equation or flexural formula) कहते हैं।

**** नमन समीकरण स्थापित करना**—चित्र 4.4 (a) में धरन (Beam) का एक छोटा भाग (Small length of a beam) प्रदर्शित किया गया है। इसमें $N-A$, उदासीन सतह (परत-Layer) है तथा इससे y-दूरी पर कोई परत (any layer) PQ है।

इस धरन की छोटी लम्बाई के भाग पर शुद्ध नमन घूर्ण (Pure Bending Moment) लगाने पर धरन (beam) नीचे की ओर चित्र 4.4 (b) के अनुसार झुक जाती है अथवा नमन की स्थिति (bending position) में आ जाती है। इस स्थिति में

उदासीन सतह $N'A'$ तथा इससे y दूरी पर स्थित परत $P'Q'$ अवस्था में आ जाती है। इस स्थिति में धरन के दोनों सिरों को आगे बढ़ाने पर आपस में बिन्दु O पर मिलते हैं, जो वक्रता केन्द्र कहलाता है। इस बिन्दु O से उदासीन सतह ($N'A'$) तक की दूरी वक्रता त्रिज्या (Radius of Curvature) R कहलाती है।



चित्र 4.4 : Bending Position of Beam

अब चित्र 4.4 (b) में नमन के कारण परतों की लम्बाई में परिवर्तन नगण्य (Negligible) है क्योंकि यह Beam का बहुत छोटा भाग (Very Small Part of Beam) है।

$\therefore$ $PQ = P'Q' = NA = N'A'$ होगा।

अब $\Delta OP'Q'$ तथा $\Delta ON'A'$ समरूप (Similar Δs) हैं।

$\therefore$ ज्यामिति द्वारा (By Geometry), $\dfrac{P'Q'}{N'A'} = \dfrac{R-y}{R}$ (भुजाओं व ऊँचाई में अनुपात समान रखा)

या $$\frac{N'A' - P'Q'}{N'A'} = \frac{R - R + y}{R} = \frac{y}{R}$$

अब $N'A'$ के स्थान पर PQ रखने पर

$$\frac{PQ - P'Q'}{PQ} = \frac{y}{R}$$

परन्तु परत PQ में विकृति $(e) = \dfrac{\text{लम्बाई में परिवर्तन } (\Delta l)}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई } (l)} = \dfrac{PQ - P'Q'}{PQ} \Rightarrow \dfrac{y}{R}$

$\therefore$ $$\boxed{e = \frac{y}{R}}$$

माना परत PQ में नमन प्रतिबल (bending stress) f उत्पन्न होते हैं, अत: प्रतिबल $(f) = e.E$ (By Hooke's Law)

या $$f = \frac{y}{R}E$$

या $$\boxed{\frac{f}{y} = \frac{E}{R}} \quad \text{...(i)}$$

यह सम्बन्ध समीकरण (i), नमन प्रतिबल (bending stress) तथा धरन (beam) की वक्रता त्रिज्या (R) में सम्बन्ध कहलाता है।

अब माना परत PQ का क्षेत्रफल δa या Δa है।

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

परत PQ में बल (Force in layer PQ) = Stress × Area

$$F = f \times \Delta a$$

$$\therefore \quad = \frac{y}{R} E.\Delta a \Rightarrow \frac{E}{R} x \,\Delta a. y$$

अब इस बल का उदासीन सतह पर आघूर्ण लेने से—

प्रतिरोधी आघूर्ण (Resisting Moment), M_r = बल × दूरी

$$M_r = \frac{E}{R}(\Delta a. y) \times y = \frac{E}{R} \times \Delta a. y^2$$

∴ इस प्रकार धरन की सभी सम्भव परतों में घूर्णों का योग (Sum of moments) ही धरन में अधिकतम नमन घूर्ण (Max B.M.) होगा। अत: Max B.M. $= \frac{E}{R}.\Sigma\,\Delta a. y^2$

$$M = \frac{E}{R} \times I$$

या

जहाँ जड़त्वाघूर्ण (Moment of Inertia) $I = \Sigma$ (क्षे०) × दूरी$^2 = \Sigma\,\Delta a. y^2$ सूत्र से है।

$$\therefore \quad \boxed{\frac{M}{I} = \frac{E}{R}} \quad \ldots(ii)$$

यह सम्बन्ध समीकरण (ii), नमन आघूर्ण (B.M.) M तथा वक्रता त्रिज्या (R) में सम्बन्ध कहलाता है।

अत: (i) तथा (ii) से लिखा जा सकता है कि—

$$\boxed{\frac{M}{I} = \frac{f}{y} = \frac{E}{R}}$$ यही नमन समी० (Bending eq^n) कहलाती है

अथवा

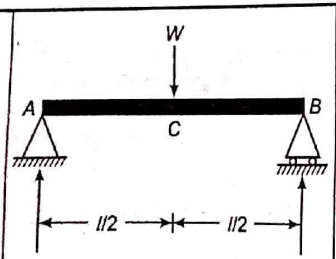
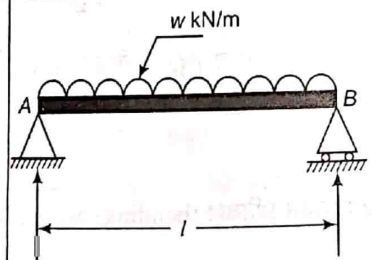
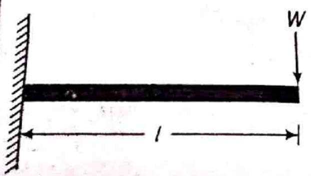
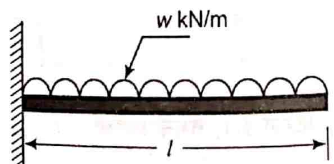
$$\boxed{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}}$$ इसे Flexural Formula के नाम से भी जाना जाता है।

सूत्र का विस्तार (Details)—

यहाँ $M \rightarrow$ अधिकतम नमन घूर्ण (max B.M.) है।

इसका मात्रक (N-mm) या N-m प्रयोग करते हैं।

तालिका

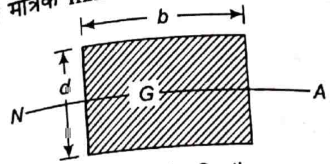
1. 	नमन आघूर्ण (B.M.) सूत्र $M = \frac{Wl}{4}$	2. 	Max B.M. सूत्र $M = \frac{wl^2}{8} = \frac{Wl}{8}$ यहाँ $W = w \times l$
3. 	सूत्र $M = W \times l$	4. 	सूत्र $M = (w \times l) \times \frac{l}{2}$ या $M = W \times \frac{l}{2}$ यहाँ $W = (w \times l)$

उपरोक्त चार स्थितियों में यदि प्रश्न है तब सम्बन्धित सूत्र द्वारा अधिकतम नमन आघूर्ण (Max B.M.) M का मान ज्ञात करते हैं अन्यथा गणना द्वारा ज्ञात करते है।

y = काट के गुरुत्व केन्द्र (G) से अधिकतम दूरी वाली परत (layer) या किनारे की दूरी है।

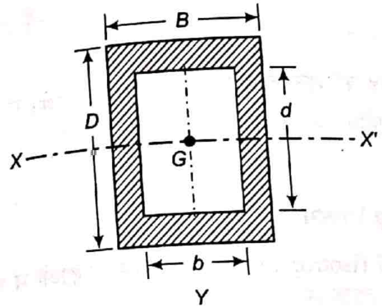
I = जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) है।

इसका मात्रक mm^4 या m^4 प्रयोग करते हैं। I तथा y के मान निम्न सूत्रों द्वारा ज्ञात करते हैं—

1. 

Rectangular Section

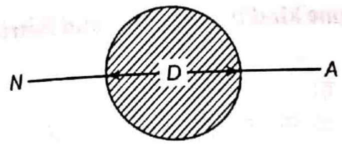
सूत्र $I = \frac{b \times d^3}{12}$, $y = \frac{d}{2}$

2. 

Hollow Rectangular Section :

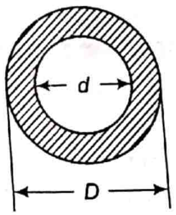
जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.), $I = \left[\frac{B \times D^3}{12} - \frac{b \times d^3}{12}\right]$

$y_{max} = \frac{D}{2}$

3. 

Circular Section

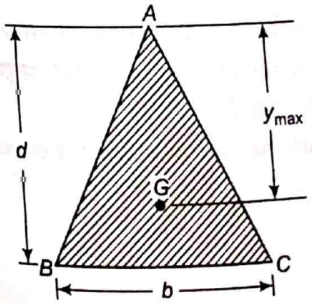
सूत्र $I = \frac{\pi D^4}{64}$, $y = \frac{D}{2}$

4. 

Hollow Circular Section

सूत्र $I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$

तथा $y = \frac{D}{2}$

5. 

$I_G = \frac{bd^3}{36}$ $\quad y_{max} = \frac{2}{3}d,$

$I_{BC} = \frac{b \times d^3}{12}$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

f या $\sigma \Rightarrow$ नमन प्रतिबल (Bending Stress) है।

इसका मात्रक N/mm^2 या N/m^2 प्रयोग किया जाता है।

$E =$ धरन के पदार्थ (material of Beam) का यंग मापांक N/mm^2 में है।

तथा $R =$ धरन की वक्रता त्रिज्या (Radius of Curvature) है।

§ 4.5 नमन प्रतिबल (*f*) तथा (*N – A*) से दूरी (*y*) में सम्बन्ध– (UP 2010)

$\because$ नमन समीकरण द्वारा, $\boxed{\dfrac{f}{y} = \dfrac{E}{R}}$ है।

यहाँ E तथा R नमन स्थिति में एक धरन के लिये स्थिर (Constant) है।

$\therefore$ $f \propto y$ होगा।

अत: $N-A$ से y_1 दूरी पर प्रतिबल f_1 तथा y_2 दूरी पर प्रतिबल f_2 हैं,

तब $\boxed{\dfrac{f_1}{y_1} = \dfrac{f_2}{y_2}}$ सूत्र

अत: हम कह सकते हैं कि किसी भी सतह में प्रतिबल, उस सतह की शून्य बल सतह (Neutral layer) से दूरी y के समानुपाती (Proportional) होता है और शून्य बल सतह अर्थात् Neutral layer में प्रतिबल शून्य होते हैं।

§ 4.6 शुद्ध या सरल नमन सिद्धान्त के लिये मान्यतायें (Assumptions for the pure or simple bending theory)

(1) धरन का पदार्थ सर्वांगसम (Homogeneous) तथा समगुण (Isotropic) है जिससे सभी दिशाओं में धरन का प्रत्यास्थता का गुण (elastic properties) समान है।
The material of the beam is homogeneous (of the same kind throughout) and isotropic (i.e., elastic properties are equal in all the directions).

(2) धरन का नमन उसकी प्रत्यास्थता की सीमा के अन्दर ही होता है।
Bending of the beam is within elastic limit.

(3) धरन की प्रत्येक परत (layer), अपने ऊपर या नीचे सम्पर्क वाली अन्य परतों को बिना प्रभावित किये हुए फैलने या सिकुड़ने के लिये स्वतन्त्र होती है।
(Every layer is free to expand and contract with respect to other contact layers.)

(4) तनाव तथा सम्पीडन दोनों ओर की परतों में धरन के पदार्थ का यंग मापांक या प्रत्यास्थता गुणांक (E) का मान समान रहता है।
The value of modulus of elasticity (E) is same for the fibres (or layers) of the beam under tension and compression and stresses are within under tension and elastic limits.

(5) धरन की कोई भी अनुप्रस्थ काट (cross-section) जो कि नमन (bending) से पहले समतल (plane) है, नमन के बाद भी समतल ही रहती है।
The cross-section of the beam, which is plane before bending remains plane after bending.

(6) धरन का नमन (bending of beam) होने पर वक्रता त्रिज्या (radius of curvature) R उसकी अनुप्रस्थ काट की मापों (dimensions of cross-section) की अपेक्षा बहुत अधिक होता है।
Radius of curvature (R) of the beam is large compared with the dimensions of the cross-section.
(Valid if deflections are less than $\frac{1}{10}$th of the depth of beam.)

§ 4.7 नमन समीकरण की प्रायोगिक उपयोगिता (Practical Utility)

हम जानते हैं कि नमन समीकरण $\left[\dfrac{M}{I} = \dfrac{f}{y} = \dfrac{E}{R}\right]$ को शुद्ध नमन (Pure Bending) की दशा में अर्थात् कर्तन बल शून्य ($SF = 0$) पर स्थिर नमन घूर्ण (Constant B.M.) होने की स्थिति में ज्ञात किया गया है, जो कि नमन सिद्धान्त की मान्यताओं की दशाओं में पूर्णतया लागू नहीं होता। परन्तु अधिकतर दशाओं में जहाँ अधिकतम नमन घूर्ण (Max B.M.) होता है वहाँ कर्तन बल (Shear Force) (S.F.) शून्य (Zero) होता है। अत: अधिकतम नमन प्रतिबल (Max Bending Stress) को प्रयोग करके यदि धरन (Beam) बनाई जाये तो वह प्रत्येक काट पर अपेक्षाकृत अधिक मजबूत रहेगी क्योंकि अन्य काटों पर नमन घूर्ण (B.M.) अधिकतम मान से कम ही रहेगा इसलिए उसमें प्रतिबल भी कम उत्पन्न होगा।

§ 4.8 आकृति मापांक (Section Modulus)

धरन की नमन की स्थिति में किसी काट पर उत्पन्न अधिकतम तनाव तथा अधिकतम सम्पीडन प्रतिबल निम्न प्रकार ज्ञात किये जाते हैं—

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma \text{ या } f}{y} \text{ (from bending equation)}$$

या

$$\sigma = \frac{My}{I} \Rightarrow \frac{M}{(I/y)}$$

(1) अधिकतम तनाव प्रतिबल (tensile stress)

$$f_t \text{ या } \sigma_t = \frac{M}{I/y_t} = \frac{M}{Z_t} \quad \text{...(1)}$$

(जहाँ y_t = Neutral Axis से तनाव वाली परत की अधिकतम दूरी)

(2) अधिकतम सम्पीडन प्रतिबल (Compression Stress)

$$f_c \text{ या } \sigma_c = \frac{M}{I/y_c} = \frac{M}{Z_c} \quad \text{...(2)}$$

(जहाँ $y_c = (N-A)$ से सम्पीडन वाली परत की अधिकतम दूरी)

जहाँ $\boxed{Z_t = \dfrac{I}{y_t} = \text{ तनाव आकृति मापांक}}$ (Section Modulus in Tension)

तथा $\boxed{Z_c = \dfrac{I}{y_c} = \text{ सम्पीडन आकृति मापांक}}$ (Section Modulus in Compression)

परिभाषा—धरन की काट की उदासीन अक्ष (Neutral Axis) पर जड़ता आघूर्ण (*I*) तथा उदासीन अक्ष (*N – A*) से काट के किनारे की अधिकतम दूरी (*y*) के अनुपात को उस काट का आकृति मापांक (Section Modulus) कहते हैं तथा *Z* से दर्शाते हैं। धरन की सामर्थ्य (Strength) *Z* के मान पर निर्भर करती है।

अर्थात् $\boxed{Z = \dfrac{I}{y}}$ सूत्र, इसकी इकाई (unit) प्राय: mm^3 होती है। अब यदि काट सममित (symmetrical) है तो

$\boxed{y_t = y_c}$ तथा $\sigma_t = \sigma_c = \sigma$ या f (bending stress)

अत: $Z_t = \dfrac{I}{y_t} = Z_c = \dfrac{I}{y_c}$ होगा। यहाँ $Z_t = Z_c = Z$ (माना)

अत: बिन्दु (1) तथा (2) से $M = \sigma_t \times Z_t = \sigma_c \times Z_c = \sigma \times Z$ ...

अत: $\boxed{M = \sigma \times Z}$ अथवा $\boxed{M = f \times Z}$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

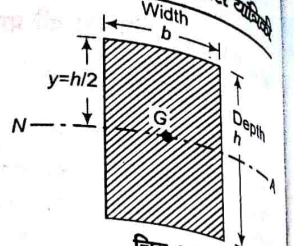
* धरन की विभिन्न काटों के आकृति मापांक (Section Modulus of different Sections of Beam)

(a) आयताकार काट (Rectangular Section; **चित्र 4.5**)—माना b चौड़ाई तथा h गहराई की आयताकार काट है तथा NA इस काट का Neutral Axis है। तब काट का जड़त्व आघूर्ण (जड़ता घूर्ण) (Moment of Inertia of the beam section)

$$I = \frac{bh^3}{12} \text{ तथा } y_{max} = \frac{h}{2}$$

$$Z = \frac{I}{y_{max}} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

$$\therefore \quad \boxed{Z = \frac{bh^2}{6}}$$



चित्र 4.5

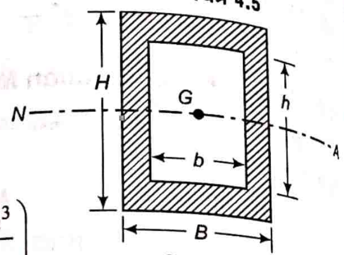
(b) खोखली आयताकार काट (Hollow rectangular Section)—

चित्र 4.6 में काट का जड़त्व आघूर्ण, $I = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = \left(\frac{BH^3 - bh^3}{12}\right)$

तथा $\quad y_{max} = H/2$

$$\therefore \quad Z = \frac{I}{y_{max}} = \left(\frac{BH^3 - bh^3}{12}\right)$$

$$Z = (BH^3 - bh^3)/6H$$

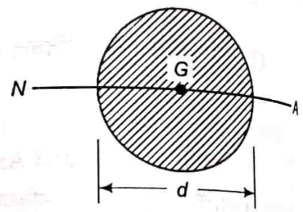


चित्र 4.6

(c) वृत्ताकार काट (Circular Section; **चित्र 4.7**)—

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad \text{तथा} \quad y_{max} = d/2$$

$$\therefore \quad Z = \frac{D}{y} = \frac{\pi d^4/64}{d/2} \quad \text{अत: } Z = \frac{\pi d^3}{32}$$



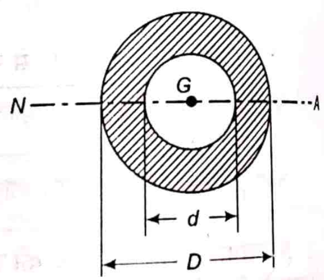
चित्र 4.7

(d) खोखली वृत्ताकार काट (Hollow Circular Section; **चित्र 4.8**)—

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4), \; y_{max} = \frac{D}{2}$$

$$\therefore \quad Z = \frac{I}{y_{max}} = \frac{\pi}{64} \frac{(D^4 - d^4)}{D/2}$$

$$\therefore \quad \boxed{Z = \frac{\pi}{32}\left(\frac{D^4 - d^4}{D}\right)}$$

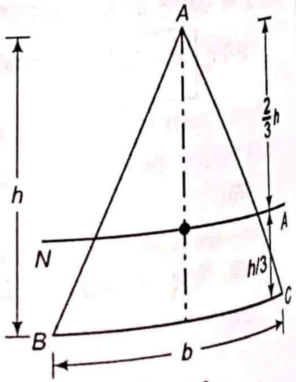


चित्र 4.8

(e) त्रिभुजाकार काट (Triangular Section; **चित्र 4.9**)—

$$I_X = \frac{bh^3}{36}, \; y_{max} = \frac{2}{3}h$$

$$\therefore \quad Z = \frac{I}{y_{max}} = \frac{bh^3/36}{\frac{2}{3}h} = \frac{bh^2}{24} \text{ (सूत्र)}$$



चित्र 4.9

नोट—$I_{BC} = bh^3/12$ होता है।

§ 4.9 कुछ परिभाषायें

(1) नमन दृढ़ता (Flexural Rigidity)—धरन की किसी काट के लिये, उसके पदार्थ के प्रत्यास्थता गुणांक (E) तथा काट के जड़ता घूर्ण (जड़त्व-आघूर्ण) (I) की गुणा ($E \times I$) को नमन दृढ़ता (Flexural Rigidity) कहते हैं। नमन दृढ़ता से धरन की पूर्ण सामर्थ्य नियन्त्रित होती है।

(2) फटन मापांक (Modulus of Rupture)—यदि कोई अंग (member) नमन घूर्ण M पर टूटता है तो इस मान को प्रयोग करके नमन समीकरण की सहायता से ज्ञात किये गये नमन प्रतिबल (bending stress) f (या σ) के मान को फटन मापांक (Modulus of Rupture) कहते हैं। यह मान अधिकतर लकड़ी, ढलवाँ लोहा (C.I.) तथा आयताकार काट वाले अंगों के लिये प्रयोग होता है।

(3) जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia)—किसी दिये हुए अक्ष के परित: काट के क्षेत्रफल के द्वितीय आघूर्ण (IInd Moment) को ही उसका जड़त्वाघूर्ण या जड़ता घूर्ण (Moment of Inertia) कहते हैं। $I = \Sigma$ क्षेत्रफल $\times$ दूरी$^2 = \Sigma ar^2$ (सूत्र)

(4) परिभ्रमण त्रिज्या (Radius of gyration)—किसी घूर्ण अक्ष के परित: (about the rotating axis) किसी पिण्ड की परिभ्रमण त्रिज्या (K), अक्ष से मापी गयी वह दूरी है जिसके वर्ग (K^2) को पिण्ड के द्रव्यमान (mass) 'm' से गुणा किया जाये तो यह गुणनफल, उस अक्ष के परित: पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण (I) के बराबर होता है। अत: $I = mK^2$ तथा समतल सतह के क्षेत्रफल (A) के लिए $I = AK^2$ (सूत्र)

$$\therefore \text{ परिभ्रमण त्रिज्या } \quad \boxed{K = \sqrt{\frac{I}{A}}} \quad \text{सूत्र}$$

(5) समान्तर अक्ष प्रमेय (Parallel Axes Theorem)—इस प्रमेय के अनुसार, किसी क्षेत्र का किसी अक्ष (X-X) पर जड़त्वा घूर्ण (Moment of Inertia) का मान, उस क्षेत्र के गुरुत्व केन्द्र (C.G.) g_1 से होकर जाने वाली उसी (X-X) अक्ष के समान्तर अक्ष पर जड़त्वाघूर्ण (I_{Xg_1}) तथा उस क्षेत्रफल (a) और दोनों अक्षों के बीच की लम्ब दूरी (h) के वर्ग के गुणनफल के योग के बराबर होता है। अर्थात्

$$\boxed{I_{XX} = I_{Xg_1} + ah^2} \quad \text{सूत्र}$$

(6) अभिलम्ब अक्ष प्रमेय (Perpendicular Axes Theorem)—"किसी क्षेत्र के समतल में स्थित दो परस्पर लम्ब अक्षों पर जड़त्वाघूर्णों का योग ($I_{XX} + I_{YY}$), इन दोनों अक्षों के कटान बिन्दु से होकर जाने वाली, उस क्षेत्र से समतल के लम्ब अक्ष (Z-Z) पर उस क्षेत्र के जड़त्वाघूर्ण के बराबर होता है।"

$$\text{अर्थात्} \quad \boxed{I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY}} \quad \text{सूत्र}$$

महत्वपूर्ण उदाहरण (Important Examples)

उदाहरण 1. किसी कैन्टीलीवर के एक अनुप्रस्थ काट (cross-section) में उदासीन अक्ष (Neutral axis) से ऊपर की ओर 40 mm की दूरी पर 15 N/mm^2 का नमन प्रतिबल है। इस प्रतिबल की प्रकृति (Nature) कैसी है? उदासीन अक्ष से नीचे की ओर 80 mm की दूरी पर भी नमन प्रतिबल की मात्रा एवं प्रकृति की जाँच कीजिये।

हल—हम जानते हैं कि, कैन्टीलीवर पर भार लगाने से जब यह धरन नीचे की ओर झुकती है तो उदासीन अक्ष से ऊपर की परतों में तनाव प्रतिबल तथा नीचे की परतों में सम्पीडन प्रतिबल पैदा होते हैं।

प्रश्नानुसार, दूरी $y_t = 40$ mm पर तनाव प्रतिबल (f_t या σ_t) $= 15$ N/mm^2

तथा नीचे की ओर की दूरी $y_c = 80$ mm पर सम्पीडन प्रतिबल (f_c या σ_c) = ? ज्ञात करना है।

अब सूत्र $\boxed{\frac{f_t}{y_t} = \frac{f_c}{y_c}}$ से $\quad f_c = \frac{f_t}{y_t} \times y_c = \frac{15}{40} \times 80 = 30$ N/mm^2

$\therefore$ नीचे की ओर 30 N/mm^2 का compressive stress होगा।

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

उदाहरण 2 (i) एक स्टील प्लेट को 10 m अर्द्धव्यास (radius) के वृत्तीय चाप (circular arc) में मोड़ा जाता है। यदि प्लेट का परिच्छेद 120 mm चौड़ा तथा 20 mm मोटा हो तो उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये तथा बंकन आघूर्ण (B.M.), जो प्रतिबल को उत्पन्न करता है, उसे भी ज्ञात कीजिये। $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 है। (U.P. 2014 Mech.)

हल—दिया है, $R = 10$ m

$= 10000$ mm

Plate की काट में, $b = 120$ mm तथा $t = 20$ mm है।

$E = 2\times10^5$ N/mm^2 प्रतिबल (stress) $\sigma = ?$

$\because$ $\boxed{\dfrac{M}{I} = \dfrac{\sigma}{y} = \dfrac{E}{R}}$ Bending equation

$\therefore$ $\sigma = \dfrac{E}{R} \times y = \dfrac{2\times10^5}{10\times1000} \times \dfrac{20}{2}$

$\therefore$ Stress, $\sigma = 200$ N/mm^2 उत्तर

अब बंकन घूर्ण (B.M.), $M = I \times \dfrac{E}{R}$ सूत्र से

$$M = \frac{120\times20^3}{12} \times \frac{2\times10^5}{10000} = 1600000 \text{ N-mm}$$

$= 1600$ N-m उत्तर

उदाहरण 2 (ii) 20 mm व्यास की छड़ को कितनी त्रिज्या तक बंकन करना होगा जबकि अधिकतम बंकन प्रतिबल की सीमा 100 MPa है। (U.P. 2011)

ज्ञात है— $E = 200$ GPa

उत्तर— $d = 20$ mm

प्रतिबल σ या $f = 100$ MPa $= 100$ N/mm^2

प्रत्यास्थता मापांक, $E = 200$ GPa $= 2\times10^5$ N/mm^2

$\because$ व्यास (dia) $d = 20$ mm

अतः $y = 10$ mm

नमन समी० से,

$$\frac{E}{R} = \frac{\sigma}{y}$$

जहाँ R त्रिज्या के रूप में छड़ का झुकाव है।

अतः $\dfrac{2\times10^5}{R} = \dfrac{100}{10}$

$\therefore$ $R = 2\times10^4$

$R = 20000$ mm

अतः $R = 20$ m उत्तर

उदाहरण 3. एक कैन्टीलीवर धरन, जिसकी लम्बाई 5 m है, का अनुप्रस्थ काट (X-Section) 40 mm चौड़ा तथा 120 mm गहरा है धरन इस्पात की बनी है तथा इस पर 5 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। धरन में अधिकतम नमन प्रतिबल ज्ञात कीजिये।

हल—$\because$ Cantilever में Max B.M. $= w\times l\times\dfrac{l}{2}$ सूत्र से

अधिकतम नमन घूर्ण $M = 5\times5\times\dfrac{5}{2} = \dfrac{125}{2} = 62{\cdot}5$ kN-m

$= 62{\cdot}5\times10^6$ N-mm

तथा जड़त्वाघूर्ण (Moment of Inertia),

$$I = \frac{b\times h^3}{12} \text{ (सूत्र)}$$

$$I = \frac{40\times(120)^3}{12} = 5760000 \text{ mm}^4$$

$\therefore$ $y = \dfrac{\text{गहराई } (h)}{2} = \dfrac{120}{2} = 60$ mm

अधिकतम नमन प्रतिबल (Max Bending Stress) $\sigma_b = ?$

$\dfrac{M}{I} = \dfrac{\sigma}{y}$ सूत्र से,

$\therefore$ $\dfrac{62{\cdot}5\times10^6}{5760000} = \dfrac{\sigma_b}{60}$

या $\sigma_b = 651{\cdot}04$ N/mm^2 उत्तर

उदाहरण 4. एक कैन्टीलीवर की लम्बाई 3 m है। इसके लिये अनुमेय प्रतिबल (permissible stress) का मान 120 MPa और इसकी आयताकार काट की गहराई 257 mm है। यदि गहराई, चौड़ाई की $2\frac{1}{2}$ गुनी है, तो कैन्टीलीवर पर समान बँटा कुल भार (Total Load of U.D.L.) कितना लगाया जा सकता है? [उत्तर : 90·53 kN]

हल—दिया है, $l = 3$ m $= 3000$ mm

प्रतिबल (Stress) $\sigma = 120$ MPa $= 120$ N/mm^2

काट की गहराई $h = 257$ mm

माना काट की चौड़ाई (width) b है, तो दिया है,

$$h = \frac{5}{2}\times b \text{ या } (h = 2{\cdot}5\times b)$$

$\therefore$ $b = \dfrac{h}{2{\cdot}5} = \dfrac{257}{2{\cdot}5} = 102{\cdot}8$ mm

सूत्र से $y = \dfrac{h}{2} = \dfrac{257}{2} = 128{\cdot}5$ mm

Cantilever में अधिकतम नमन घूर्ण (B.M.)

$$M = (w\times l)\times\frac{l}{2} = (\text{U.D.L. का कुल भार } W)\times\frac{l}{2}$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

$M = W \times \frac{3000}{2} = W \times 1500$ kN-mm $= W \times 1500 \times 1000$ N-mm

या $M = 1500000 \times W$ N-mm

जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.), $I = \frac{b \times h^3}{12}$ (सूत्र)

$I = \frac{102 \cdot 8 \times (257)^3}{12} = 145415680$ mm^4

∴ $\boxed{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}}$ सूत्र से (मान रखने पर)

अब $\frac{1500000 \times W}{145415680} = \frac{120}{128 \cdot 5}$

$W = \frac{120 \times 145415680}{1500000 \times 128 \cdot 5}$

$= 90 \cdot 53$ kN उत्तर

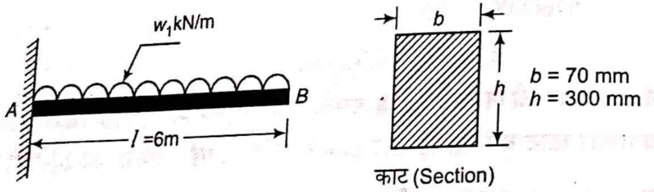
उदाहरण 5. एक 6 m लम्बी कैन्टीलीवर धरन के सैक्शन की गहराई तथा चौड़ाई क्रमशः 300 mm तथा 70 mm हैं। यदि धरन में अनुज्ञेय प्रतिबल की तीव्रता 120 MPa हो तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिये—

(i) धरन के सम्पूर्ण स्पैन पर अधिकतम UDL

(ii) स्पैन के मध्य 4 m पर अधिकतम UDL

[उत्तर : 7 kN/m, 10·5 kN/m]

हल—



चित्र 4.10

∵ नमन प्रतिबल (Bending Stress) $\sigma = 120$ MPa $= 120$ N / mm^2

तथा जड़त्वाघूर्ण (M.O.I), $I = \frac{bh^3}{12} = \frac{70 \times (300)^3}{12} = 157500000$

B.M. $(M) = (w_1 \times l) \times \frac{l}{2}$ सूत्र से

∴ B.M. $(M) = w_1 \times 6 \times \frac{6}{2}$ kN-m

$= 18 \times w_1 \times 10^6$ N-mm

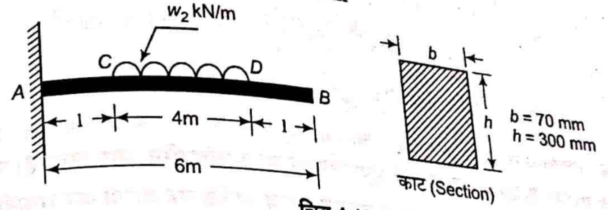
तथा $y = \frac{h}{2} = \frac{300}{2} = 150$ mm

अब नमन समीकरण से, $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$

$\frac{18 \times 10^6 \times w_1}{157500000} = \frac{120}{150}$

∴ $w_1 = 7$ kN/m उत्तर

या Part (ii)



चित्र 4.11

$I = \frac{bh^3}{12} = 157500000$ mm^4

अधिकतम नमन घूर्ण (B.M.) $M = (w_2 \times 4) \times (1 + 2) = 12 w_2$ kN-m

$= 12 \times 10^6 \times w_2$ N-mm

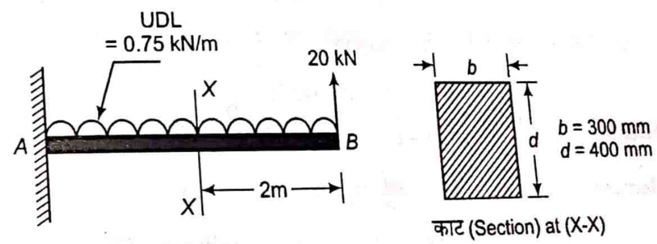
$\sigma = 120$ N / mm^2, $y = \frac{300}{2} = 150$ mm

अब $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$ से, $\frac{12 \times 10^6 \times w_2}{157500000} = \frac{120}{150}$

या $w_2 = 10 \cdot 5$ kN/m (U.D.L.) उत्तर

उदाहरण 6. एक Cantilever beam की पूर्ण लम्बाई पर 0·75 kN/m का समान बँटा भार (U.D.L.) तथा स्वतन्त्र सिरे (Free end) पर एक बल (Force) ऊपर की ओर (upward) 20 kN का लगा है। यदि इस Beam के काट की गहराई 400 mm तथा चौड़ाई 300 mm है तो Beam के स्वतन्त्र सिरे (Free End) से 2m की दूरी पर अधिकतम नमन प्रतिबल (Max Bending Stress) ज्ञात कीजिये।

हल—



चित्र 4.12

Free end से 2m की दूरी पर Max Bending Moment $(X - X)$ काट पर,

$M = 20 \times 2 - 0 \cdot 75 \times 2 \times \frac{2}{2}$

$= 38 \cdot 5$ kN-m

$= 38 \cdot 5 \times 10^6$ N-mm

जड़त्वाघूर्ण (MOI), $I = \frac{bd^3}{12} = \frac{300 \times 400^3}{12} = 16 \times 10^8$ mm^4

$y = \frac{d}{2} = \frac{400}{2} = 200$ mm

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

माना काट (X – X) पर Max Bending Stress σ है।

$$\frac{M}{I}=\frac{\sigma}{y} \text{ से } \sigma=\frac{My}{I} \text{ (सूत्र)}$$

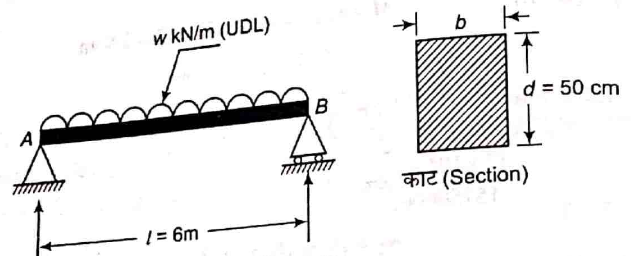
अब $$\sigma=\frac{38\cdot5\times10^6\times200}{16\times10^8}=4\cdot81\text{ N/mm}^2$$

∴ $$\sigma=4\cdot81\text{ MPa}$$ उत्तर

उदाहरण 7. एक आयताकार काट की धरन 50 cm मोटी है एवं उदासीन अक्ष के परितः जड़ता आघूर्ण 40000 cm^4 है। धरन 6 m पर शुद्धालम्बित है एवं पूर्ण लम्बाई पर समवितरित भार लगा है। यदि अधिकतम नमन प्रतिबल 165 N/mm^2 से अधिक न होता हो तो वह भार ज्ञात करिये जो कि यह धारण कर सकती है। विकल्पतया इसी धरन की लम्बाई के मध्य में कितना कुल केन्द्रित भार लगाया जा सकता है? (U.P.)

[उत्तर : 58·667 kN/m, 176 kN]

हल—



चित्र 4.13

दिया है depth $(d)=50$ cm

∴ $d=500$ mm

तथा $y=\frac{d}{2}=250$ mm

$I=40000$ cm^4

या $I=4\times10^8$ mm^4

Max Bending Stress $(\sigma_b)=165$ N/mm^2 है

Max Bending Moment $(M)=\frac{wl^2}{8}$ सूत्र से

∴ $$M=\frac{w\times6^2}{8}\text{ kN-m}=\frac{36}{8}\times10^6\times w\text{ N-mm}$$

$$=45\times10^5\times w\text{ N-mm}$$

अब $$\frac{M}{I}=\frac{\sigma}{y} \text{ से}$$

$$\frac{45\times10^5\times w}{4\times10^8}=\frac{165}{250}$$

∴ $$\boxed{w=58\cdot667\text{ kN/m}}$$

यहाँ w भार प्रति मीटर लम्बाई है।

(ii) यदि Beam पर U.D.L. के स्थान पर Beam के मध्य में एक बिन्दु भार (Point Load) W लगाया जाता है तो अधिकतम नमन घूर्ण (Max B.M.), $M=\frac{Wl}{4}$ (सूत्र)

$$M=\frac{W\times6}{4}\text{ kN-m}$$

∴ $$=\frac{W\times6}{4}\times10^6\text{ N-mm}=15\times10^5\times W$$

अब पुनः $$\frac{M}{I}=\frac{\sigma}{y} \text{ से}$$

$$\frac{15\times10^5\times W}{4\times10^8}=\frac{165}{250}$$

∴ धरन पर केन्द्रीय बिन्दु भार (Point Load at Centre)

$$W=\frac{4\times10^8\times165}{15\times10^5\times250}=176\text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 8. एक सममित काट की धरन की काट का जड़त्व आघूर्ण 2640 cm^4 है। इसकी गहराई 20 cm है। इस प्रकार की साधारण आधारित धरन की अधिकतम लम्बाई की गणना कीजिये यदि उस पर 6 kN/m का समवितरित भार पूरी धरन पर लगाने पर भी बंकन प्रतिबल का मान 120 MN/m^2 से अधिक न होने पाये। (U.P. 2003)

[उत्तर : 6·499 m]

हल—दिया है, $I=2640\text{ cm}^4=2640\times10^4\text{ mm}^4$

काट की गहराई $d=20\text{ cm}=200$ mm है, अतः $y=\frac{d}{2}=100$ mm

माना धरन (Beam) की लम्बई $=l$ मीटर है।

∴ Beam पर 6 kN/m का U.D.L. के कारण अधिकतम नमन घूर्ण (Max B.M.), $M=\frac{wl^2}{8}$ सूत्र से

$$M=\frac{6\times l^2}{8}\text{ kN-m}=\frac{6}{8}\times10^6\times l^2\text{ N-mm}$$

∴ $$M=750000\times l^2\text{ N-mm}$$

∴ अधिकतम नमन प्रतिबल (Bending Stress) $\sigma=120$ MN/m^2

∴ $$\sigma=120\text{ N/mm}^2$$

अब $$\frac{M}{I}=\frac{\sigma}{y} \text{ से,}$$

$$\frac{750000\times l^2}{2640\times10^4}=\frac{120}{100}$$

∴ $$l^2=\frac{2640\times120}{75\times100}=42\cdot24$$

या $$l=6\cdot499\text{ metre}$$

Scanned with CamScanner

उदाहरण 9. एक काष्ठ धरन की विमायें ज्ञात कीजिए जिसका विस्तार 10 मी० है तथा जो एक 0·2 मी० मोटी एवं 4 मी० ऊँचाई की ईंट की दीवार को वहन करती है। ईंट की चिनाई का भार 19 kN/ m³ है तथा काष्ठ धरन में अधिकतम अनुमेय प्रतिबल 8 kN/ m³ तक सीमित है। धरन की गहराई उसके चौड़ाई की दो गुनी है। **(U.P. 2004, S10)**

[उत्तर : $b = 0{\cdot}33$ m, $d = 0{\cdot}66$ m]

हल—माना धरन (Beam) की आयताकार काट (Rectangular Section) b मीटर चौड़ी तथा d मीटर गहरी है। विस्तार (span) 10 मीटर है। इस पर बनी दीवार का भार U.D.L रूप में होगा।

∴ U.D.L. का मान (w kN/m) = $\dfrac{\text{कुल भार kN में}}{\text{लम्बाई मीटर में}}$

$$w = \frac{(0{\cdot}2\times4\times10)\times19}{10} = 15{\cdot}2 \text{ kN/m}$$

या

∴ Max B.M. $(M) = \dfrac{wl^2}{8}$ सूत्र से

$$M = \frac{15{\cdot}2\times10^2}{8} \text{ kN-m} = \frac{1520}{8}\times1000 \text{ N-m}$$

∴ $M = 19\times10^4$ N-m

∴ $I = \dfrac{b\times d^3}{12} = \dfrac{b\times(2b)^3}{12} = \dfrac{8}{12}\times b^4 = \dfrac{2}{3}\times b^4$ in m⁴

Max Bending Stress $(\sigma) = 8 \text{ MN/m}^2 = 8\times10^6 \text{ N/m}^2$ [∴ 1 MN = 10⁶N]

$$y = \frac{d}{2} = \frac{2b}{2} = b \text{ in metre}$$

अब $\boxed{\dfrac{M}{I} = \dfrac{\sigma}{y}}$ सूत्र से

$$\frac{19\times10^4}{2/3\times b^4} = \frac{8\times10^6}{b}$$

या $b^3 = \dfrac{19\times3}{2\times8\times100}$

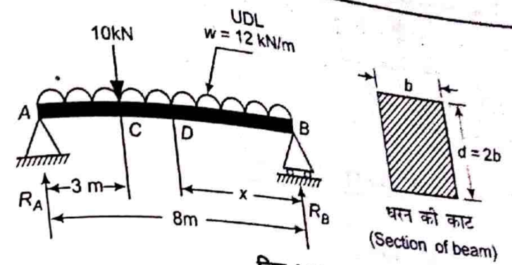
∴ $b^3 = 0{\cdot}035625$

या $b = 0{\cdot}33$ m

तथा $d = 2b = 0{\cdot}66$ m

उदाहरण 10. एक टिम्बर की आयताकार काट की धरन (Beam) जो 8 m लम्बी है, सामान्य रूप से आलम्बित (Simply supported beam) है। इस धरन पर 12 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) पूरी लम्बाई में लगा है तथा बायें सिरे (left end) से 3 m की दूरी पर एक 10 kN का बिन्दु भार (Point Load) लगा है। यदि गहराई $(d) = 2\times$ चौड़ाई (b) है तथा टिम्बर में प्रतिबल (stress) 8 N/ mm² से अधिक नहीं होना है तो धरन (beam) के काट की उपयुक्त विमायें ज्ञात करें। **(U.P.2010)**

हल—



चित्र 4.14

∵ नमन प्रतिबल (bending stress)

$$\sigma_b = 8 \text{ N/mm}^2$$

$$I = \frac{b\times(2b)^3}{12} = \frac{8}{12}b^4$$

∴ $I = \dfrac{2}{3}\times b^4$

∵ चित्र से, $R_A + R_B = 10 + 12\times8 = 106$ kN

A पर Moment लेने से, $R_B\times8 = 10\times3 + 12\times8\times\dfrac{8}{2} = 414$

∴ $R_B = \dfrac{414}{8} = 51{\cdot}75$ kN

तथा $R_A = 106 - 51{\cdot}75 = 54{\cdot}25$ kN

माना B से x दूरी पर नमन घूर्ण (B.M.) अधिकतम (Max) होता है।

∴ $M_x = R_B.x - 12.x.\dfrac{x}{2}$

$M = 51{\cdot}75x - 6x^2$

∴ $\dfrac{dM}{dx} = 51{\cdot}75\times1 - 6\times2x$ (अवकलित क

अब B.M. (M) के अधिकतम मान के लिये $\dfrac{dM}{dx} = 0$ रखना होगा

∴ $0 = 51{\cdot}75 - 12x$

या $x = \dfrac{51{\cdot}75}{12} = 4{\cdot}3125$ m

∴ x का यह मान समीकरण (i) में रखने पर अधिकतम B.M. (M),

$$M = 51{\cdot}75\times4{\cdot}3125 - 6\times(4{\cdot}3125)^2$$

$$= 111{\cdot}586 \text{ kN-m} = 111{\cdot}586\times10^6 \text{ N-mm}$$

$$y = \frac{d}{2} = \frac{2b}{2} = b$$

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

अब' $\boxed{\frac{M}{I}=\frac{\sigma}{y}}$ से,

$$\frac{111\cdot586\times10^6}{\frac{2}{3}\times b^4}=\frac{8}{b}$$

$$b^3=\frac{3\times111\cdot586\times10^6}{2\times8}$$

या $$b^3=20922375$$

∴ $$b=275\cdot552 \text{ mm}$$

या तथा काट की गहराई $$d=2b=551\cdot104 \text{ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 10. (i) 250 mm व्यास के लकड़ी के लट्ठे में से अधिकतम शक्ति (maximum strength) की काटी जा सकने वाली आयताकार काट की माप ज्ञात करो। **(U.P. 2007)**

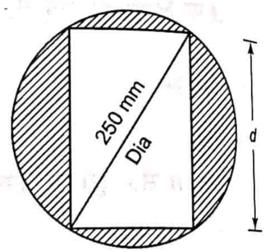
(ii) यदि आयताकार काट की बनी Beam को सरल टेकों वाली धरन के रूप में प्रयोग करें तो इसका सुरक्षित नमन विस्तार (Span of beam) ज्ञात करें जबकि इसकी पूरी लम्बाई में 2·5 kN/m का U.D.L. भार लगा है तथा नमन प्रतिबल की सीमा 10 MN/ m² है।

(iii) वृत्ताकार लट्ठे (Circular log) को ही एक Beam के रूप में प्रयोग करें तो कितना अधिकतम लम्बाई का विस्तार (Span) होगा?

हल—**(i) For dimensions of Strongest Section**

∵ $$b^2+d^2=250^2$$

या $$d^2=(250^2-b^2) \qquad \text{... (i)}$$



चित्र 4.15

∵ काट की अधिकतम शक्ति के लिये उस काट का आकृति मापांक (Section Modulus) Z भी अधिकतम होना चाहिये।

∴ $$Z=\frac{I}{y}=\frac{\frac{b\times d^3}{12}}{\frac{d}{2}}=\frac{1}{6}\times b\times d^2$$

$$Z=\frac{1}{6}\times b\times(250^2-b^2)$$

∴ $$Z=\frac{250^2}{6}\times b-\frac{1}{6}\times b^3$$

अब $$\frac{dZ}{db}=\frac{250^2}{6}\times1-\frac{1}{6}\times3b^2$$

∵ काट की अधिकतम शक्ति के लिये, $\frac{dZ}{db}=0$ होगा

∴ $$\frac{1}{6}\times3b^2=\frac{250^2}{6}$$

या $$b^2=\frac{250^2}{3}$$

$$b=\frac{250}{\sqrt3}$$

या $$b=144\cdot34 \text{ mm}$$ उत्तर

अतः समी० (i) से $$d^2=250^2-b^2$$

$$=250^2-\frac{250^2}{3}=250^2\times\frac{2}{3}$$

∴ $$d=250\times\frac{\sqrt2}{\sqrt3}=204\cdot12 \text{ mm}$$ उत्तर

(ii) For Safe Maximum Span of Beam (l)—

दिया है, $$\sigma=10 \text{ MN/m}^2\Rightarrow10 \text{ N/mm}^2$$

Beam पर U.D.L भार $$w=2\cdot5 \text{ kN/m है}$$

∴ Max B.M. $$(M)=\frac{wl^2}{8}=\frac{2\cdot5\times l^2}{8}\times10^6 \text{ N-mm}$$

$$M=312500\times l^2 \text{ N-mm}$$

$$I=\frac{bd^3}{12}=\frac{144\cdot34\times(204\cdot12)^3}{12}=102296820\cdot1 \text{ mm}^4$$

$$y=\frac{d}{2}=\frac{204\cdot12}{2}=102\cdot06 \text{ mm}$$

अब $\frac{M}{I}=\frac{\sigma}{y}$ नमन समीकरण (bending eqⁿ) से—

$$\frac{312500\times l^2}{102296820\cdot1}=\frac{10}{102\cdot06}$$

∴ $$l^2=32\cdot074$$

या $$\boxed{l=5\cdot66 \text{ metre}}$$ उत्तर

(iii) For longest Span of Circular beam (l)—

$$I=\frac{\pi D^4}{64}=\frac{\pi(250)^4}{64}=191650390\cdot6$$

$$y=\frac{D}{2}=\frac{250}{2}=125 \text{ mm}$$

$$M=\frac{wl^2}{8}=\frac{2\cdot5\times l^2}{8} \text{ kN-m}=\frac{2\cdot5\ l^2}{8}\times10^6 \text{ N-mm}$$

$$=312500\times l^2 \text{ N-mm}$$

$\sigma=10 \text{ N/mm}^2$ दिया है।

∴ $\frac{M}{I}=\frac{\sigma}{y}$ से $$\frac{312500\ l^2}{191650390\cdot6}=\frac{10}{125}$$

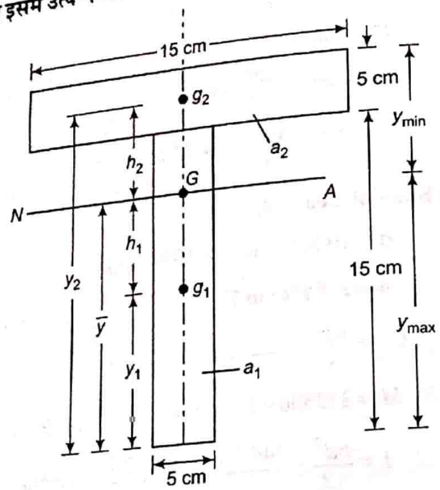
या $$l^2=49\cdot0625$$

या $$\boxed{l=7\cdot00 \text{ metre}}$$

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

उदाहरण 11. एक T-काट की धरन का परिच्छेद चित्र 4.16 में दिखाया गया है। इस पर 3·4 kN-m का अधिकतम नमन आघूर्ण (B.M.) लगा है तो इसमें उत्पन्न अधिकतम प्रतिबलों के मान एवं प्रकृति (Nature) ज्ञात करें। (U.P. 2007)

हल—



चित्र 4.16

दी गई T-काट, y-axis के सममित (symmetrical) है। अतः G की स्थिति के लिए केवल $\bar{y}$ ही ज्ञात करना होगा।

यहाँ
$$a_1 = 15 \times 5 = 75\ \text{cm}^2$$
$$a_2 = 15 \times 5 = 75\ \text{cm}^2$$
$$y_1 = \frac{15}{2} = 7{\cdot}5\ \text{cm}$$
$$y_2 = 15 + \frac{15}{2} = 17{\cdot}5\ \text{cm}$$

∴
$$\bar{y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2} = \frac{75 \times 7{\cdot}5 + 75 \times 17{\cdot}5}{75 + 75} = 12{\cdot}5\ \text{cm}$$

अब
$$g_1 G = h_1 = \bar{y} - y_1 = 12{\cdot}5 - 7{\cdot}5 = 5\ \text{cm}$$

तथा
$$g_2 G = h_2 = y_2 - \bar{y} = 17{\cdot}5 - 12{\cdot}5 = 5\ \text{cm}$$

∴ जड़त्वाघूर्ण (MOI),
$$I = [I \times g_1 + a_1 h_1^2] + [I \times g_2 + a_2 h_2^2]$$

∴
$$I = \left[\frac{5 \times 15^3}{12} + 75 \times 5^2\right] + \left[\frac{15 \times 5^3}{12} + 75 \times 5^2\right]$$
$$= 5312{\cdot}5\ \text{cm}^4 = 5312{\cdot}5 \times 10^4\ \text{mm}^4$$

$$y_{max} = \bar{y} = 12{\cdot}5\ \text{cm} = 125\ \text{mm}$$
$$y_{min} = 20 - \bar{y} = 20 - 12{\cdot}5 = 7{\cdot}5\ \text{cm} = 75\ \text{mm}$$

$\boxed{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}}$ नमन समीकरण से, (यहाँ $M = 3{\cdot}4$ kN-m, $= 3{\cdot}4 \times 10^6$ N-mm)

$(N-A)$ से नीचे की ओर अधिकतम दूरी y_{max} पर तनाव प्रतिबल (tensile stress)
$$\sigma_t = \frac{M}{I} \times y_t$$
$$\sigma_t = \frac{3{\cdot}4 \times 10^6}{5312{\cdot}5 \times 10^4} \times 125 = 8\ \text{N/mm}^2$$
उत्तर

$(N-A)$ से ऊपर की ओर अधिकतम दूरी $y_2 = y_{min} = 75$ mm पर सम्पीडन प्रतिबल (Compressive Stress),
$$\sigma_c = \frac{M}{I} \times y_c$$

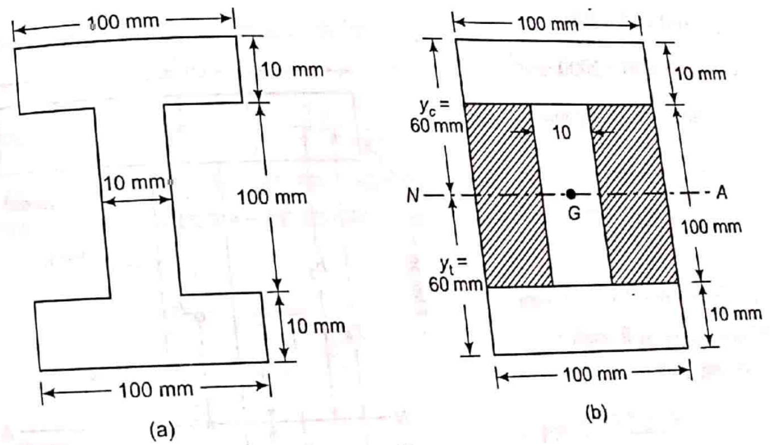
∴
$$\sigma_c = \frac{3{\cdot}4 \times 10^6}{5312{\cdot}5 \times 10^4} \times 75 = 4{\cdot}8\ \text{N/mm}^2$$
उत्तर

उदाहरण 12. चित्र 4.17 (a) में एक I-परिच्छेद को दर्शाया गया है। इस धरन की लम्बाई 6 m है तथा इसके दोनों सरल आधारित सिरों से 2m की दूरी पर दो 10 kN संकेन्द्री भार लगाये गये हैं। ज्ञात कीजिये–

(i) इस परिच्छेद का उदासीन अक्ष के सापेक्ष क्षेत्र का द्वितीय आघूर्ण

(ii) धरन में उत्पन्न अधिकतम तनन तथा संपीडन प्रतिबल एवं वह परिच्छेद जहाँ पर यह प्रतिबल है।

[उत्तर : $6{\cdot}9 \times 10^6$ mm^4, प्रत्येक $173{\cdot}91$ N/mm^2, धरन के बीच के 2 m भाग पर] (UP 2009)



चित्र 4.17

हल—दी गई I-काट x-axis तथा y-axis दोनों के सममित (symmetrical) है। अतः $\bar{x}$ तथा $\bar{y}$ ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं है।

∴
$$I = \left[\frac{100 \times 120^3}{12} - \frac{90 \times 100^3}{12}\right]$$
$$= 6900000\ \text{mm}^4$$

तथा
$$y = \frac{120}{2} = 60\ \text{mm}$$

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

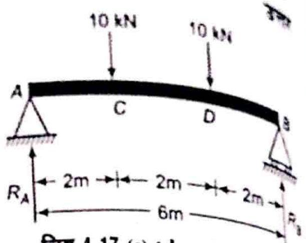
(i) परिच्छेद का उदासीन अक्ष (N–A) के सापेक्ष द्वितीय घूर्ण (IInd Moment) अथवा जड़ता घूर्ण (Moment of Inertia)

$$I = 6900000 \text{ mm}^4 = 6.9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

(ii) चित्र (c) से $\quad R_A = R_B = 10$ kN

$(M) = R_B \times 2 = 10 \times 2$

∴ Max BM $\quad M_C = M_D = M_{max} = 20$ kN-mm $= 20 \times 10^6$ N-mm



चित्र 4.17 (c) : Loaded Beam

∵ धरन (Beam) की काट में उदासीन अक्ष (Neutral Axis = NA) से ऊपर तथा नीचे के किनारों की दूरियाँ समान है अर्थात् तनाव प्रतिबल (σ_t) की दूरी y_t = सम्पीडन प्रतिबल (σ_c) की दूरी (y_c) अत: प्रतिबल (stresses) भी दोनों किनारों पर समान होंगे

$$\therefore \quad \sigma_t = \sigma_c = \frac{M \times y}{I} = \frac{20 \times 10^6 \times 60}{69 \times 10^5} = 173.91 \text{ N/mm}^2$$

ये stress, धरन (Beam) के बीच की लम्बाई 2 m पर होंगे।

उदाहरण 13. एक चार मीटर (4 m) लम्बे धरन (Beam) के ऊपर 10 kN/m का समवितरित भार (U.D.L) लगा है। धरन का परिच्छेद (Section) चित्र 4.18 में दिखाया गया है। इस काट पर अधिकतम प्रतिबल ज्ञात करो।

(U.K. 2012-13 (W), 2013 (S))

हल— $a_1 = 100 \times 20 = 2000 \text{ mm}^2$

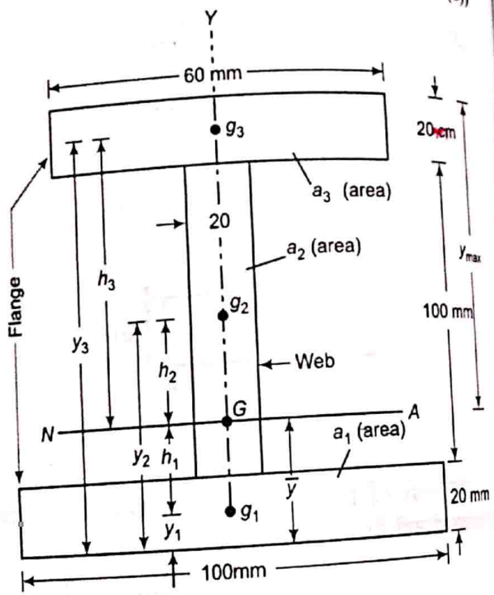
$a_2 = 100 \times 20 = 2000 \text{ mm}^2$

$a_3 = 60 \times 20 = 1200 \text{ mm}^2$

$y_1 = \frac{20}{2} = 10$ mm

$y_2 = 20 + \frac{100}{2} = 70$ mm

$y_3 = 20 + 100 + 10 = 130$ mm



चित्र 4.18

∵ y-axis के symmetrical है इसलिये G की स्थिति केवल $\bar{y}$ से ज्ञात होगी।

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3}{a_1 + a_2 + a_3} \text{ सूत्र से}$$

$$= \frac{2000 \times 10 + 2000 \times 70 + 1200 \times 130}{2000 + 2000 + 1200}$$

$$= \frac{316000}{5200} = 60.77 \text{ mm}$$

अब $\quad h_1 = g_1$ व G के बीच दूरी $= \bar{y} - y_1$

∴ $\quad h_1 = 60.77 - 10 = 50.77$ mm

$h_2 = g_2$ व G के बीच दूरी $= y_2 - \bar{y}$

$= 70 - 60.77 = 9.23$ mm

$h_3 = g_3$ व G के बीच दूरी $= y_3 - \bar{y}$

$= 130 - 60.77 = 69.23$ mm

$$I_{XX} = [I_{Xg_1} + a_1 h_1^2] + [I_{Xg_2} + a_2 h_2^2] + [I_{Xg_3} + a_3 h_3^2]$$

$$= \left[\frac{100 \times 20^3}{12} + 2000 \times 50.77^2\right] + \left[\frac{20 \times 100^3}{12} + 2000 \times 9.23^2\right] + \left[\frac{60 \times 20^3}{12} + 1200 \times 69.23^2\right]$$

$$= 12850256.41 \text{ mm}^4$$

∵ सरल आधारित धरन या समवितरित भार (UDL) लगा है

∴ Max B.M. $\quad (M) = \frac{wl^2}{8}$ सूत्र से

$$M = \frac{10 \times 4^2}{8} \text{ kN-m} = \frac{10 \times 16}{8} \times 10^6 \text{ N-mm}$$

$$= 2 \times 10^7 \text{ N-mm}$$

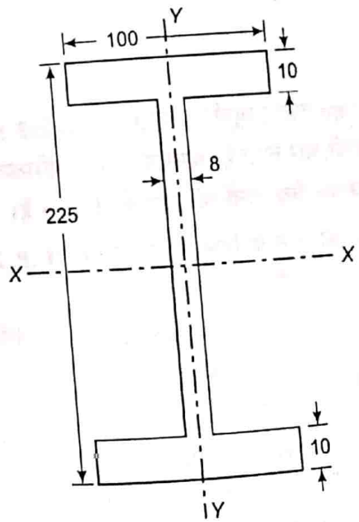
∵ अधिकतम प्रतिबल के लिये NA से ऊपर के किनारे की दूरी अधिक होगी। अत:

$$y_{max} = 140 - \bar{y} = 140 - 60.77 = 79.23 \text{ mm}$$

∴ Max Stress $\quad (\sigma_{max}) = \frac{My}{I} = \frac{2 \times 10^7 \times 79.23}{12850256.41} = 123.31 \text{ N/mm}^2$ $\quad$ उत्तर

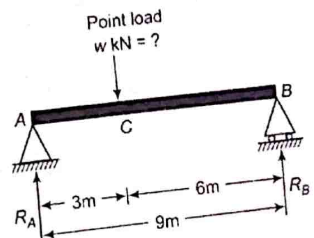
उदाहरण 14. चित्र 4.19 में दर्शायी सममित I-काट की 9 m की विस्तृति पर एक धरन शुद्धालम्बित है। यदि अधिकतम अनुमेय प्रतिबल 80 MPa है तो एक आलम्ब से 3m की दूरी पर कितना संकेन्द्रित भार लगाया जा सकता है?

[उत्तर : 10·266 kN] (U.P.)



All Dimensions in mm

चित्र 4.19 (a)



चित्र 4.19 (b)

Study PowerPoint

हल—A पर Moment लेने पर

$$R_B \times 9 = W \times 3$$

या $$R_B = \frac{W}{3} \text{ kN}$$

∵ अधिकतम नमन घूर्ण (Max B.M.), भार के बिन्दु C पर होगा

∴ B.M. at C $$= R_B \times 6 = \frac{W}{3} \times 6 = 2W \text{ kN-m}$$

∴ $$M = 2W \times 10^6 \text{ N-mm}$$

∵ नमन प्रतिबल (Bending Stress)

$$\sigma_b = 80 \text{ MPa} = 80 \text{ N/mm}^2$$

जड़त्व आघूर्ण (M.O.I) ⇒ $$I = \left[\frac{100 \times 225^3}{12} - \frac{92 \times 205^3}{12}\right]$$

$$I = 28872583 \cdot 33 \text{ mm}^4$$

या $$y = \frac{225}{2} = 112 \cdot 5 \text{ mm}$$

अब नमन समी० (Bending eq^n) से,

$$\boxed{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}}$$

∴ $$\frac{2 \times 10^6 \times W}{28872583 \cdot 33} = \frac{80}{112 \cdot 5}$$

या $$W = 10 \cdot 266 \text{ kN}$$ उत्तर

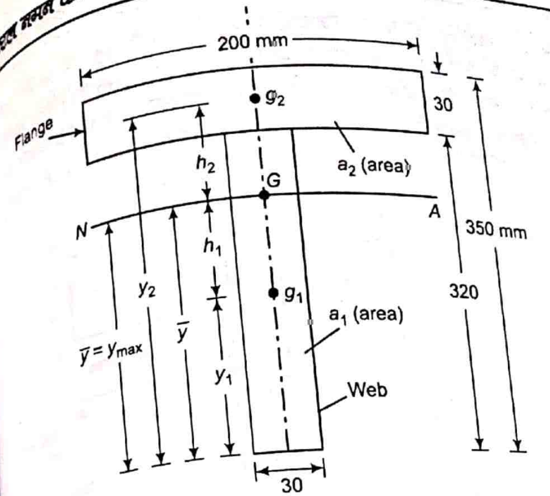
उदाहरण 15. एक T-धरन, जिसके फ्लैंज की चौड़ाई 20 cm तथा सम्पूर्ण गहराई 350 mm है, 2·5 m की विस्तृति पर सरल आलम्बित है। इसके मध्य-बिन्दु पर 40 kN का संकेन्द्री भार लगा है। धरन में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल का मान एवं धरन पर उसकी स्थिति ज्ञात कीजिये। धरन के फ्लैंज एवं वैब दोनों की मोटाई 30 mm है।

[उत्तर : 29·074 N/mm^2, धरन के मध्य में उसकी काट के निम्नतम किनारे पर] **(U.P. 2005, 07, 08)**

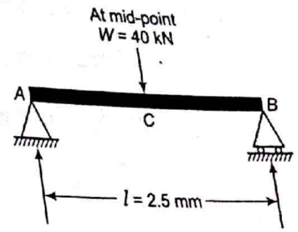
हल— Max B.M. $(M) = \frac{Wl}{4}$ (सूत्र)

$$M = \frac{40 \times 2 \cdot 5}{4} = 25 \text{ kN-m}$$

$$= 25 \times 10^6 \text{ N-mm}$$



चित्र 4.20 (a)



चित्र 4.20 (b)

अब चित्र (a) से—

क्षेत्रफल $$a_1 = 320 \times 30 = 9600 \text{ mm}^2$$

$$a_2 = 200 \times 30 = 6000 \text{ mm}^2$$

$$y_1 = \frac{320}{2} = 160 \text{ mm}$$

$$y_2 = 320 + 15 = 335 \text{ mm}$$

अब गु० के० (G) की ऊँचाई $$\bar{y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2} = \frac{9600 \times 160 + 6000 \times 335}{9600 + 6000} = 227 \cdot 3 \text{ mm}$$

$$h_1 = \bar{y} - y_1 = 227 \cdot 3 - 160 = 67 \cdot 3 \text{ mm}$$

$$h_2 = y_2 - \bar{y} = 335 - 227 \cdot 3 = 107 \cdot 7 \text{ mm}$$

अब जड़त्व आघूर्ण (MOI), $I = [I_{Xg_1} + a_1 h_1^2] + [I_{Xg_2} + a_2 h_2^2]$ सूत्र से

$$I = \left[\frac{30 \times 320^3}{12} + 9600 \times 67 \cdot 3^2\right] + \left[\frac{200 \times 30^3}{12} + 6000 \times 107 \cdot 7^2\right]$$

$$I = 195446924 \text{ mm}^4$$

नमन समीकरण (Bending eq^n) से,

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$$

या $$\frac{25 \times 10^6}{195446924} = \frac{\sigma}{227 \cdot 3}$$

∴ $$\sigma = 29 \cdot 074 \text{ N/mm}^2$$ (at lower surface of beam)

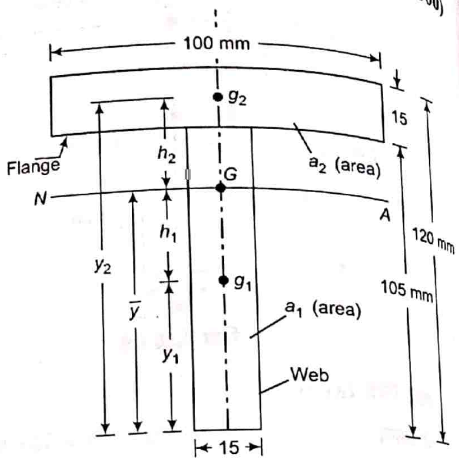
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

उदाहरण 16. एक T-परिच्छेद वाली ग्रास (cantilever) धरन पर, जिसकी लम्बाई 5 m है, 10 kN/m का एक समान बंटित भार लगाया गया है। धरन के फ्लैंज की चौड़ाई 100 mm तथा सम्पूर्ण मोटाई 120 mm है। इसके फ्लैंज तथा पेटा की मोटाई 15 mm है। परिच्छेद के उदासीन अक्ष की स्थिति तथा उसमें उत्पन्न अधिकतम बंकन प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : फ्लैंज किनार से 38·23 mm, 2410 N / mm²] (U.P. 2000)

हल—प्रश्नानुसार चित्र बनाइये।



चित्र 4.21 (a)

इसमें, $a_1 = 15 \times 105 = 1575 \text{ mm}^2$

$a_2 = 100 \times 15 = 1500 \text{ mm}^2$

$y_1 = \frac{105}{2} = 52{\cdot}5 \text{ mm}$

$y_2 = 105 + \frac{15}{2} = 112{\cdot}5 \text{ mm}$

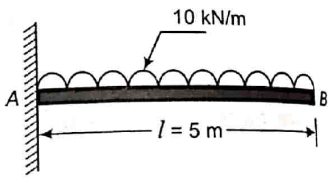
∴ $\bar{y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2}$

$\bar{y} = \frac{1575 \times 52{\cdot}5 + 1500 \times 112{\cdot}5}{1575 + 1500}$

$= \frac{251437{\cdot}5}{3075} = 81{\cdot}768$

∴ नीचे के किनारे से गु० के० G की दूरी

⇒ $\bar{y} = 81{\cdot}768$



चित्र 4.21 (b)

Max (B.M.) $(M) = (w \times l) \times \frac{l}{2}$ (सूत्र)

$M = \frac{10 \times 5^2}{2} = 125 \text{ kN-m}$

∴ $M = 125 \times 10^6 \text{ N-mm}$

चित्र से, $h_1 = \bar{y} - y_1 = 81{\cdot}76 - 52{\cdot}5 = 29{\cdot}26 \text{ mm}$

तथा $h_2 = y_2 - \bar{y} = 112{\cdot}5 - 81{\cdot}76 = 30{\cdot}74$

$I_{XX} = [I_X g_1 + a_1 h_1^2] + [I_X g_2 + a_2 h_2^2]$ सूत्र से

$$I = \left[\frac{15 \times 105^3}{12} + 1575 \times 29{\cdot}26^2\right] + \left[\frac{100 \times 15^3}{12} + 1500 \times 30{\cdot}74^2\right]$$

$I = 4241010{\cdot}12 \text{ mm}^4$

अब $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$ से $\frac{125 \times 10^6}{4241010{\cdot}12} = \frac{\sigma_b}{81{\cdot}768}$

या $\sigma_b = \frac{125 \times 10^6 \times 81{\cdot}76}{4241010{\cdot}12}$

∴ Max Bending Stress, $\sigma_b = 2409{\cdot}81 \text{ N/mm}^2$

या $\sigma_b = 2410 \text{ N/mm}^2$ उत्तर

उदाहरण 17. दो समान सामर्थ्य वाली धरनों के भारों की तुलना कीजिये। दोनों धरन एक पदार्थ की तथा गोलाकार अनुप्रस्थ काट की हैं। एक धरन ठोस तथा दूसरी खोखली है जिसका आन्तरिक व्यास, बाह्य व्यास का आधा है।

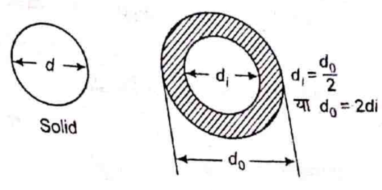
[उत्तर : $\frac{\text{ठोस धरन का भार}}{\text{खोखली धरन का भार}} = 1{\cdot}28$]

हल—माना ठोस काट का व्यास d तथा खोखली के व्यास d_i तथा d_o हैं। देखें चित्र 4.22

दिया है $\boxed{d_i = \frac{d_o}{2}}$ अत: $d_o = 2d_i$ होगा

∵ समान सामर्थ्य के हैं अत: $Z_s = Z_h$ होगा

$\boxed{\frac{I_s}{y_s} = \frac{I_h}{y_h}}$



चित्र 4.22

या $\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{d/2} = \frac{\frac{\pi}{64}(d_o^4 - d_i^4)}{d_o/2}$

या $d^3 = \frac{d_o^4 - d_i^4}{d_i} = \frac{15\, d_i^4}{2\, d_i} = 7{\cdot}5 \times d_i^3$

∴ $d = (7{\cdot}5)^{1/3} \times d_i = 1{\cdot}957 \times d_i$

$\boxed{d = 1{\cdot}957 \times d_i}$

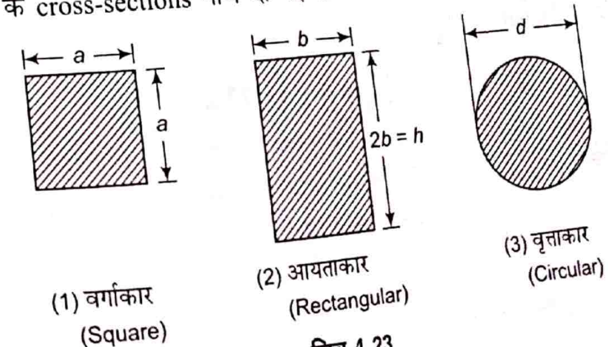
∴ भारों की तुलना, $\frac{W_s}{W_h} \Rightarrow \frac{A_s}{A_h}$ [∵ समान पदार्थ (material) की हैं]

$$\frac{W_s}{W_h} = \frac{\pi d^2/4}{\frac{\pi}{4}(d_o^2 - d_i^2)} = \frac{(1{\cdot}957)^2 \times d_i^2}{3\, d_i^2}$$

$= \frac{(1{\cdot}957)^2}{3} = 1{\cdot}277 = 1{\cdot}28$ उत्तर

उदाहरण 18. एक ही धातु की तीन धरनों (beams) की लम्बाई, नमन प्रतिबल (bending stress) तथा अधिकतम नमन घूर्ण (Max B.M.) सभी समान हैं। इनकी काट (Sections) क्रमश: वृत्ताकार (Circular), वर्गाकार (Square) तथा आयताकार (जिसमें गहराई = 2 × चौड़ाई) हैं।
वृत्ताकार एवं आयताकार धरनों के भारों का अनुपात वर्गाकार काट की धरन के भार के अपेक्षा ज्ञात कीजिये।

हल—तीनों Beams के cross-sections नीचे दी गई हैं—



चित्र 4.23

Study PowerPoint

माना $a =$ धरन की वर्गाकार काट की प्रत्येक भुजा (side of square beam)

$b =$ आयताकार काट की चौड़ाई (width of the rectangular beam)

$h = 2b =$ आयताकार काट की गहराई (depth of rectangular beam),

$d =$ वृत्ताकार काट का व्यास (diameter of circular beam)

दिया है, Same length of all beams

$\therefore \quad L_1 = L_2 = L_3 = L$

Same allowable stress for all

$\therefore \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$

Same B.M. for all.

$\therefore \quad M_1 = M_2 = M_3 = M$

परन्तु $\boxed{M = \sigma Z}$ सूत्र

$\therefore$ प्रत्येक Beam का Section Modulus (Z) समान होगा।

$\therefore \quad Z_1 = Z_2 = Z_3$

या $\quad \dfrac{I_1}{y_1} = \dfrac{I_2}{y_2} = \dfrac{I_3}{y_3}$

या $\quad \dfrac{\frac{a \times a^3}{12}}{a/2} = \dfrac{\frac{b \times (2b)^3}{12}}{2b/2} = \dfrac{\frac{\pi d^4}{64}}{d/2}$

या $\quad \dfrac{a^3}{6} = \dfrac{2b^3}{3} = \dfrac{\pi}{32} d^3$

$\therefore \quad a = \left(\dfrac{6\pi}{32}\right)^{1/3} \times d = 0{\cdot}838 \times d$

$b = \left(\dfrac{3\pi}{32 \times 2}\right)^{1/3} \times d = 0{\cdot}527987 \times d$

$\because$ भार $(W) \propto$ काट के क्षेत्र० (A), (∵ समान लम्बाई व घनत्व है)

$\therefore \quad \dfrac{\text{वृत्ताकार का भार} \quad (W_c)}{\text{वर्गाकार काट की Beam का भार } (W_s)} = \dfrac{A_c}{A_{sq}}$

$\therefore \quad \dfrac{\text{Wt. of Circular}}{\text{Wt. of Square}} = \dfrac{A_c}{A_{sq}} = \dfrac{\pi d^2/4}{a \times a} = \dfrac{\pi d^2}{4a^2}$

$\therefore \quad \dfrac{W_c}{W_{SQ}} = \dfrac{\pi d^2}{4 \times (0{\cdot}838)^2 d^2} = \mathbf{1{\cdot}117}$

अब $\quad \dfrac{\text{आयताकार का भार } (W_R)}{\text{वर्गाकार का भार } \quad (W_{SQ})} = \dfrac{A_{Rect}}{A_{SQ}} = \dfrac{2b^2}{a^2}$

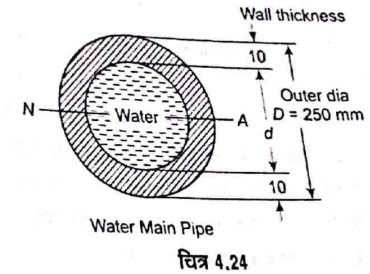
$= \dfrac{2 \times (0{\cdot}527987)^2 d^2}{(0{\cdot}838)^2 \times d^2}$

$\therefore \quad \dfrac{W_{Rect}}{W_{SQ}} = 0{\cdot}794$

उत्तर

उत्तर

उदाहरण 19 (a). एक ढलवाँ लोहे के पानी का मुख्य पाइप (water main pipe) का बाहरी व्यास (outer dia) 250 mm है, मोटाई (thickness of wall) 10 mm और यह 12m की दूरी पर दो टेकों पर सरल आलम्बित (Freely supported) है। इस पाइप के बाह्य सतह (outer surface) में अधिकतम प्रतिबल ज्ञात करें जब (a) नल (pipe) खाली है, (b) नल (pipe) पानी से पूरा भरा है। ढलवाँ लोहे (C.I.) तथा पानी का घनत्व क्रमश: 75 kN / m³ तथा 10 kN / m³ है। **(U.K. 2012)**



Water Main Pipe

चित्र 4.24

हल—पाइप का अन्त: व्यास (inner dia)

$d = 250 - 2 \times 10 = 230$ mm

$\therefore$ Pipe की काट (Section) $= \dfrac{\pi (D^2 - d^2)}{4}$

$= \dfrac{\pi}{4}(0{\cdot}25^2 - 0{\cdot}23^2)$

$A_{Pipe} = 0{\cdot}007536 \text{ m}^2$

$\therefore$ Pipe का प्रति मीटर लम्बाई का भार,

$w_p = 0{\cdot}007536 \times 1 \times 75$

$w_p = 0{\cdot}5652$ kN/m (as a U.D.L.)

$\therefore$ Pipe के भार के कारण Max. Bending Moment,

$M = \dfrac{wl^2}{8} = \dfrac{0{\cdot}5652 \times 12^2}{8} = 10{\cdot}1736$ kN-m

$= 10{\cdot}1736 \times 10^6$ N-mm

Pipe की काट का $(N - A)$ पर जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.)

$I = \dfrac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$

$\therefore \quad I = \dfrac{\pi}{64}[250^4 - 230^4] = 54353400 \text{ mm}^4$

$y = \dfrac{250}{2} = 125$ mm

अब नमन समीकरण से, $\boxed{\dfrac{M}{I} = \dfrac{\sigma}{y}}$

जहाँ $\sigma =$ Max Bending Stress है।

या $\quad \dfrac{10{\cdot}1736 \times 10^6}{54353400} = \dfrac{\sigma}{125}$

$\therefore \quad \sigma = 23{\cdot}397 \approx 23{\cdot}4 \text{ N/mm}^2$ उत्तर

(b) अब पानी से पाइप भरा होने पर पाइप पर समान बंटा भार (U.D.L.)

$w_1 =$ pipe के अपने भार के कारण U.D.L. + पानी के कारण U.D.L. **Hint** [∵ $w = A_W \times Lx$ densi

$= 0{\cdot}5652 + \left[\dfrac{\pi (0{\cdot}23)^2}{4} \times 1 \times 10\right]$

$= 0{\cdot}5652 + 0{\cdot}415265$

$= 0{\cdot}980465$ kN/m

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

पाइप पर अधिकतम नमन घूर्ण (Max B.M.)

$$M_1 = \frac{wl^2}{8} = \frac{0.980465 \times (12)^2}{8} = 17.64837$$

$$M_1 = 17.65 \text{ kN-m} = 17.65 \times 10^6 \text{ N-mm}$$

अब नमन समीकरण से, $\frac{M_1}{I} = \frac{\sigma_1}{y}$

$\therefore$ Pipe की बाहरी सतह पर अधिकतम नमन प्रतिबल (Max Bending Stress)

$$\sigma_1 = \frac{M_1 \times y}{I} = \frac{17.65 \times 10^6 \times 125}{54353400} = 40.59 \text{ N/mm}^2$$

उत्तर

उदाहरण 19 (b). एक 12 मीटर लम्बा ढलवाँ लोहे का पाईप (Pipe) जिसका आन्तरिक व्यास 500 mm तथा पाईप की मोटाई (thickness) 25 mm है, पानी से पूरा भरा हुआ है तथा अपने दो किनारों पर टिका हुआ है। पाईप के पदार्थ में अधिकतम प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये यदि ढलवाँ लोहे के पाईप के पदार्थ का घनत्व (density) 7200 kg/m³ और पानी का घनत्व 1000 kg/m³ हो। **(U.K. 2014, B.P.)**

हल—माना बाहरी व्यास d_o व आन्तरिक व्यास d_i है।

$\because$ पाइप का बाहरी व्यास, $d_o = d_i + 2t = 500 + 2 \times 25$

$$d_0 = 550 \text{ mm}$$

$\therefore$ पाइप (Pipe) की काट (Section) $= \frac{\pi(d_o^2 - d_i^2)}{4}$

$\therefore$

$$A_{pipe} = \frac{\pi(550^2 - 500^2)}{4} = 41212.5 \text{ mm}^2$$

$$= 0.0412125 \text{ m}^2$$

पाइप की प्रति मीटर लम्बाई का भार (Wt of per meter length of pipe)

$$W_p = \text{Area} \times \text{length} \times \text{density}$$

$$= 0.0412125 \times 1 \times 7200 = 296.73 \text{ kg/meter}$$

$$W_p = 2.9673 \text{ kN/m} \quad \text{(as a U.D.L.)}$$

पाइप में पानी का प्रति मीटर लम्बाई में भार (wt. of water per m length)

$$W_1 = \frac{\pi(0.50)^2}{4} \times 1 \times 1000 = 196.25 \text{ kg/m} = 1.9625 \text{ kN/m}$$

Pipe पानी से भरा होने पर कुल भार (प्रति मीटर U.D.L. रूप में) $= W_p + W_1$

$\therefore$ $W = 2.9673 + 1.9625 = 4.9298$ kN/m

पाइप पर अधिकतम नमन घूर्ण (Max. B.M.)

$$M = \frac{wl^2}{8} = \frac{4.9298 \times 12^2}{8} = 88.7364 \text{ kN-m}$$

$\therefore$ $M = 88.7364 \times 10^6$ N-mm

Pipe की काट का $(N-A)$ पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.),

$$I = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{64} = \frac{\pi(550^4 - 500^4)}{64} = 1423119141 \text{ mm}^4$$

अब Pipe की बाहरी सतह (outer surface) पर अधिकतम प्रति (max. bending stress),

$\sigma = \frac{My}{I}$ सूत्र से

$\therefore$

$$\sigma = \frac{88.7364 \times 10^6 \times \frac{550}{2}}{1423119141} = 17.1472 \text{ N/mm}^2$$

उत्तर

उदाहरण 20. एक आयताकार काट (Rectangular Section) को एक ऐसे I-Section (जो चित्र में दिखाया है) से बदला गया जिसका क्षेत्रफल (area) समान है। इनकी Flexural Strength (नमन सामर्थ्य) की तुलना (Ratio) ज्ञात कीजिये जबकि दोनों समान पदार्थ (Same Material) तथा समान ही नमन प्रतिबल (Same max Bending Stress) रखते हैं।

हल—समान क्षेत्रफल होने पर—

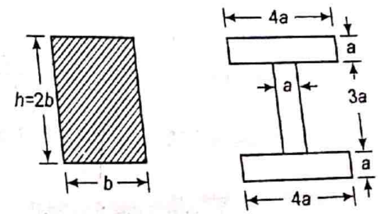
$$2b^2 = 4a^2 + 3a^2 + 4a^2 = 11a^2$$

$$\boxed{b = 2.345 \times a}$$

$\therefore$

$$\frac{b}{a} = 2.345 \qquad \text{... (i)}$$

या



चित्र 4.25

अब आयताकार काट का जड़त्वाघूर्ण

$$\text{(M.O.I.)} = \frac{b \times (2b)^3}{12} = \frac{2}{3}b^4$$

आयताकार काट का Section Modulus,

$$Z_R = \frac{I}{y} = \frac{2b^4/3}{2b/2} = \frac{2}{3}b^3$$

अब I-Section का

$$\text{M.O.I.} = \frac{4a \times (5a)^3}{12} - \frac{3a \times (3a)^3}{12}$$

$$= \frac{(500-81)a^4}{12} = \frac{419}{12} \times a^4$$

तथा I-Section का Section Modulus,

$$Z_I = \frac{I}{y} = \frac{\frac{419a^4}{12}}{\frac{5a}{2}}$$

$\therefore$

$$Z_I = \frac{419}{30} \times a^3$$

$\therefore$ Ratio of Flexural Strength ⇒ ratio of Section Moduli

$$= \frac{2b^3/3}{\frac{419a^3}{30}} = \frac{20}{419} \times \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{20}{419} \times (2.345)^3 = 0.6155$$

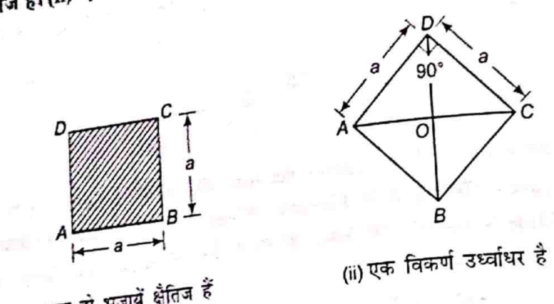
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

उदाहरण 21. एक वर्गाकार काट की घन की एक भुजा a है। यदि अनुमेय बंकन प्रतिबल σ है तो आघूर्ण की गणना कीजिये जबकि धरन की काट इस तरह रखी है कि :
(i) दो भुजायें क्षैतिज हैं। (ii) एक विकर्ण ऊर्ध्वाधर है।

$\left[\text{उत्तर : (i) } \frac{\sigma a^3}{6}, \text{(ii) } \frac{\sigma a^3}{6\sqrt{2}}\right]$ (U.P. 2010)

हल—



चित्र 4.26

(i) In case Ist, $I = \frac{a \times a^3}{12} = \frac{a^4}{12}$ तथा $y = \frac{a}{2}$

$\therefore$ Bending eq^n से, $\boxed{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}}$ मान रखने पर,

प्रतिरोधी नमन घूर्ण (Bending Moment),

$$M = \frac{I}{y} \times \sigma$$

$\therefore$
$$M = \frac{I}{y} \times \sigma = \frac{a^4/12}{a/2} \times \sigma = \frac{\sigma a^3}{6}$$ उत्तर

(ii) In case II,

$$\Delta\, ACD \text{ की ऊँचाई} = OD = \frac{\text{विकर्ण}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ M.O.I. of one $\Delta\, ACD$ about $(AC) = \frac{AC \times OD^3}{12}$

$$= \frac{a\sqrt{2} \times (a/\sqrt{2})^3}{12} = \frac{a^4 \times \sqrt{2}}{12 \times 2\sqrt{2}} = \frac{a^4}{24}$$

दोनों त्रिभुजों ACD तथा ACB का कुल जड़त्व आघूर्ण (Total M.O.I.)

Total, $I = \frac{a^4}{24} \times 2 = \frac{a^4}{12}$

अब नमन समीकरण (Bending eq^n) से,

$$\boxed{\frac{M_r}{I} = \frac{\sigma}{y}}$$

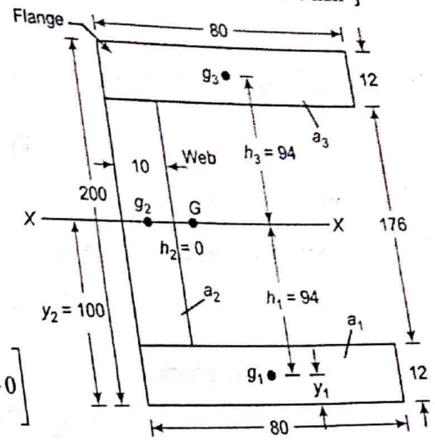
$\therefore$ प्रतिरोधी घूर्ण $(M_r) = \frac{I}{y} \times \sigma$ [यहाँ $y = \frac{BD}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ है]

$$= \frac{a^4/12}{a/\sqrt{2}} \times \sigma = \frac{\sigma . a^3}{6\sqrt{2}}$$ उत्तर

उदाहरण 22. एक चैनल सैक्शन को जिसकी गहराई 200 mm तथा फ्लैंज चौड़ाई 80 mm है, एक सरल आधारित धरन (simply supported beam) के रूप में इस प्रकार प्रयोग किया जाता है कि उसका फ्लैंज क्षैतिज दिशा में तथा पेटा (web) ऊर्ध्वाधर दिशा में रहे। फ्लैंज की मोटाई 12 mm तथा पेटे की मोटाई 10 mm है। इसके लम्बाई के किसी परिच्छेद पर इसको 1400 N-m के बंकन आघूर्ण का प्रतिरोध सहना है। धरन के इस पच्छिेद पर अधिकतम बंकन प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : 6·502 N / mm^2]

हल—चित्र से
$$a_1 = 80 \times 12 = 960$$
$$a_2 = 10 \times 176 = 1760$$
$$a_3 = 80 \times 12 = 960$$
$$y_1 = \frac{12}{2} = 6 \text{ mm}$$
$$y_2 = \frac{200}{2} = 100 \text{ mm}$$



चित्र 4.27

$$I = [I_X g_1 + a_1 h_1^2] + [I_X g_2 + a_2 h_2^2] + [I_X g_3 + a_3 h_3^2]$$

यहाँ $h_1 = h_3 = 100 - 6 = 94$ mm

$$I = \left[\frac{80 \times 12^3}{12} + 960 \times 94^2\right] \times 2 + \left[\frac{10 \times 176^3}{12} + 0\right]$$

[$\because g_1$ तथा g_3 आयत समान हैं]

$\therefore$ $I = 21531306{\cdot}67 \text{ mm}^4$

Bending Moment $(M) = 1400$ N-m (दिया है)
$= 1400 \times 1000$ N-mm

तथा $y = \frac{200}{2} = 100$ mm

अब नमन समीकरण से, $\boxed{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}}$

$\therefore$ Bending stress $(\sigma) = \frac{My}{I}$

या $\sigma = \frac{14 \times 10^5 \times 100}{21531306{\cdot}67} = 6{\cdot}502 \text{ N / mm}^2$ उत्तर

Imp

उदाहरण 23. दो वृत्ताकार काटों (Circular Sections) की शक्ति (Strength) की तुलना कीजिये। पहली काट व्यास का ठोस है तथा दूसरी काट d_1 बाह्य (outer) तथा d_2 अन्त: व्यास (inner dia) की खोखली हैं। दोनों काटें स भार तथा समान पदार्थ की बनी हैं। (Both Sections have same W_t and same Material) (U

हल—$\because$ दोनों काट समान पदार्थ (Material) की हैं तो समान इकाई लम्बाई के भार समान हैं तो काट के क्षेत्रफ समान होंगे।

$\because$ $\boxed{W_s = W_h}$ हैं, तो $\boxed{A_s = A_h}$ होगा

$\therefore$
$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi\,(d_1^2 - d_2^2)}{4}$$

या
$$d^2 = d_1^2 - d_2^2$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

ठोस काट का जड़ता घूर्ण (M.O.I.),

$$I_s = \frac{\pi d^4}{64}$$

∴ ठोस काट का आकृति मापांक (Section Modulus)

$$Z_s = \frac{I_s}{y_s} = \frac{\pi d^4}{64} \times \frac{1}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}$$

अब खोखली काट का जड़ता घूर्ण (M.O.I.),

$$I_h = \frac{\pi (d_1^4 - d_2^4)}{64}$$

तथा

$$y_h = \frac{d_1}{2}$$

∴ खोखली काट का आकृति मापांक (Section Modulus)

$$Z_h = \frac{I_h}{y_h} = \frac{\pi}{64}(d_1^4 - d_2^4) \times \frac{1}{d_1/2} = \frac{\pi}{32} \times \frac{(d_1^4 - d_2^4)}{d_1}$$

अत: दोनों काटों की शक्तियों की तुलना,

$$\frac{Z_h}{Z_s} = \frac{\pi}{32}\frac{(d_1^4 - d_2^4)}{d_1} / \frac{\pi d^3}{32} = \frac{(d_1^4 - d_2^4)}{d_1 \times d^3}$$

$$= \frac{(d_1^2 - d^2)(d_1^2 + d_2^2)}{d_1 \times d^3} = \frac{d^2 (d_1^2 + d_2^2)}{d_1 \times d^3} = \frac{d_1^2 + d_2^2}{d_1 \times d}$$

परन्तु (i) से

$$d_2^2 = (d_1^2 - d^2)$$

अत:

$$\frac{Z_h}{Z_s} = \frac{(2d_1^2 - d^2)}{d_1 \times d} = \left[\frac{2d_1}{d} - \frac{d}{d_1}\right]$$

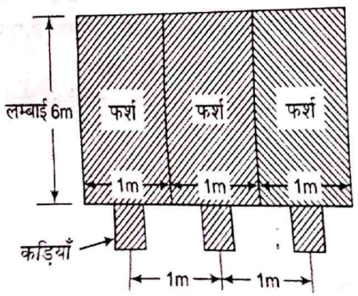
∴

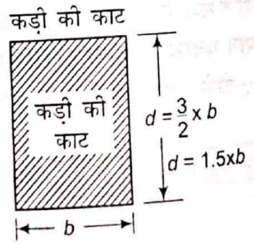
$$\frac{Z_h}{Z_s} = \frac{d_1}{d}\left[2 - \frac{d^2}{d_1^2}\right]$$

उत्त

उदाहरण 24. किसी फर्श (Floor) का भार 8 kN/m^2 है। इसे 6m लम्बी एक-सी कड़ियों के ऊपर बनाया जाना है। यदि प्रत्येक कड़ी के केन्द्र से केन्द्र के बीच दूरी 1m है तथा प्रत्येक कड़ी के लिये नमन प्रतिबल की सीमा 120 MPa है तो कड़ियों की आयताकार काट की माप ज्ञात कीजिये। काट की गहराई, चौड़ाई की $\frac{3}{2}$ गुनी है।

हल—





चित्र 4.28

∵ प्रत्येक कड़ी पर फर्श का भार $= 6 \times 1 \times 8$ kN

∴ यह भार U.D.L. के रूप में होने के लिये

$$w = \frac{\text{भार kN में}}{\text{लम्बाई m में}}$$

$$w = \frac{6 \times 1 \times 8}{6} = 8 \text{ kN/m}$$

∴ अत: कड़ी पर अधिकतम नमन घूर्ण (Max B.M.),

$$M = \frac{wl^2}{8}$$

$$M = \frac{8 \times 6^2}{8} = 36 \text{ kN-m} = 36 \times 10^6 \text{ N-mm}$$

कड़ी की काट का जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.)

$$I = \frac{bd^3}{12}$$

$$I = \frac{b \times (1 \cdot 5b)^3}{12} = 0 \cdot 28125 \times b^4 \text{ mm}^4$$

∴

$$y = \frac{d}{2} = \frac{1 \cdot 5b}{2} = 0 \cdot 75 \times b \text{ mm}$$

अत: नमन समीकरण से, $\boxed{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}}$ में नमन प्रतिबल $\sigma = 120 \text{ N/mm}^2$ दिया है

∴

$$\frac{36 \times 10^6}{0 \cdot 28125 \times b^4} = \frac{120}{0 \cdot 75 \times b}$$

$$b^3 = 800000$$

या

$$b = 92 \cdot 8 \text{ mm}$$ उत्तर

या

तथा काट की गहराई $d = 1 \cdot 5 \times b = 139 \cdot 25$ mm उत्तर

उदाहरण 25. दो काटों के पदार्थ तथा भार समान हैं। एक काट ठोस वृत्ताकार है जिसका व्यास 200 mm है। दूसरी काट खोखली वृत्ताकार है जिसका बाह्य व्यास 250 mm है। इन दोनों काटों की शक्तियों (आकृति मापांकों) की तुलना कीजिये। [उत्तर : $Z_h/Z_s = 1 \cdot 7$]

हल—दिया है, $\boxed{\text{भार } W_s = \text{ भार } W_h}$ (∵ पदार्थ समान है)

माना खोखली के व्यास d_i व d_o हैं। तथा ठोस का व्यास d है।

∴

$$A_s = A_h \text{ होगा}$$

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (d_o^2 - d_i^2)}{4}$$

या

$$d^2 = d_o^2 - d_i^2$$

या

$$(200)^2 = (250)^2 - d_i^2$$

Scanned with CamScanner

$$d_i^2 = 250^2 - 200^2 = 22500$$

या खोखली का अन्तः व्यास $d_i = 150$ mm होगा।

$$\therefore \quad I_{solid} = \frac{\pi (d)^4}{64} = \frac{\pi (200)^4}{64} = 78500000 \text{ mm}^4$$

$$\therefore \quad y_s = \frac{d}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ mm}$$

अब ठोस का आकृति मापांक (Section Modulus),

$$Z_s = \frac{I_s}{y_s} = 785000$$

$$I_{hollow} = \frac{\pi (d_o^4 - d_i^4)}{64} = \frac{\pi}{64}(250^4 - 150^4) = 166812500 \text{ mm}^4$$

$$y_h = \frac{d_o}{2} = \frac{250}{2} = 125 \text{ mm}$$

$$Z_h = \frac{I_h}{y_h} = \frac{166812500}{125} = 1334500 \text{ mm}^3$$

अब शक्तियों की तुलना $= \dfrac{Z_h}{Z_s} = \dfrac{1334500}{785000} = 1 \cdot 7$ उत्तर

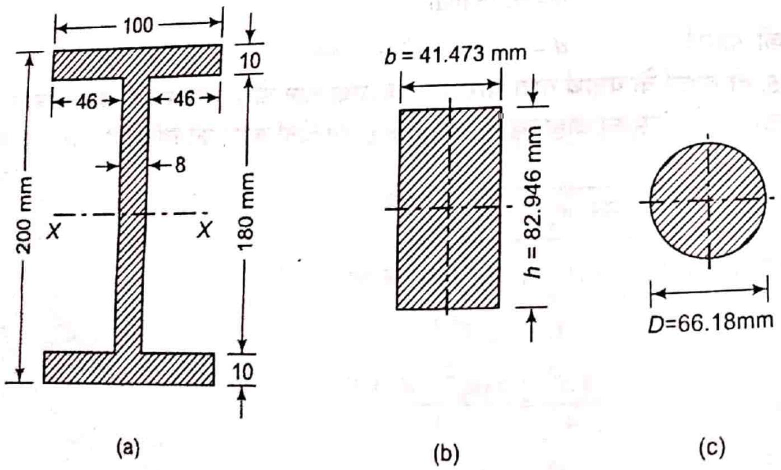
उदाहरण 26. समान भार की निम्न तीन (Beams) के नमन सामर्थ्य (Flexural Strength) की तुलना (Compare) कीजिये।

(a) I-Section; 100 mm × 200 mm जिसके Flange तथा Web की मोटाई (thickness) क्रमशः 10 mm तथा 8 mm है।

(b) Rectangular Section; जिसमें काट की गहराई (depth), चौड़ाई (width) की दुगुनी (twice) है।

(c) Solid Circular Section; व्यास (diameter) = D है।

हल—



चित्र 4.29

(a) I-काट का क्षेत्रफल $A_1 = (2 \times 100 \times 10 + 180 \times 8) = 3440 \text{ mm}^2$

जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) $I_1 = \frac{1}{12}[BD^3 - bd^3]$ (सूत्र)

$$I_1 = \frac{1}{12}[100 \times (200)^3 - 92 \times (180)^3]$$

$$\therefore \quad I_1 = 2195 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$Z_1 = \frac{2195 \times 10^4}{100} = 219 \cdot 5 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

(b) Rectangular Section :

क्षेत्रफल, $A_2 = b \times d = b \times (2b) = 2b^2$

परन्तु $\boxed{A_2 = A_1 \text{ है}}$

$$2b^2 = 3440$$

$$\therefore \quad b = 41 \cdot 473 \text{ mm}$$

या तथा काट की गहराई $d = 2b = 82 \cdot 946$ mm

$\therefore$ Section Modulus $Z_2 = \frac{1}{6}bd^2 = \frac{1}{6} \times (41 \cdot 473) \times (82 \cdot 946)^2 = 47 \cdot 6 \times 10^3 \text{ mm}^3$

(c) Circular Section : माना व्यास D mm में है।

$$\therefore \quad A_3 = \frac{\pi D^2}{4}$$

परन्तु $\boxed{A_3 = A_1}$ है।

$$\therefore \quad \frac{\pi D^2}{4} = 3440$$

$$D = 66 \cdot 18 \text{ mm}$$

या

$$\therefore \quad Z_3 = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{\pi}{32} \times (66 \cdot 18)^3 = 28 \cdot 5 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\therefore \quad \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{219 \cdot 5}{47 \cdot 6} = 4 \cdot 61$$ उत्तर

तथा $$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{219 \cdot 5}{28 \cdot 5} = 7 \cdot 70$$ उत्तर

इससे स्पष्ट होता है कि I-Section सबसे अधिक Economical Section है तथा Circular Section सबसे कम Economical Section है।

उदाहरण 27. एक दिये गये नमन प्रतिबल (bending stress) के लिये एक वर्गाकार काट (SQ Section) वाले Beam को निम्न दो स्थितियों में रखते हुए Flexural Strength (or Moment of Resistance) में तुलना (Compare) कीजिये जबकि–

(i) दो भुजायें क्षैतिज हैं (Two sides of section are Horizontal)

(ii) एक विकर्ण क्षैतिज है (With a diagonal is Horizontal)

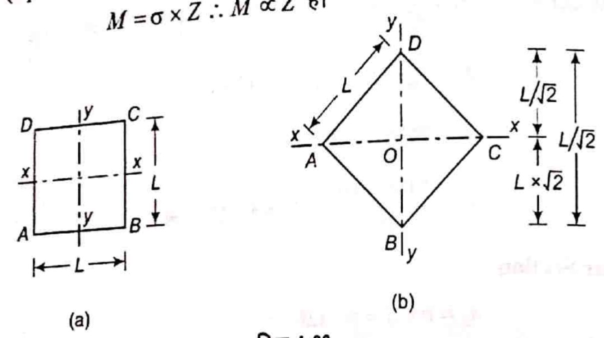
Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

हल—माना वर्ग (square) की भुजा (side) L है।

$\because$ $M = \sigma \times Z \therefore M \propto Z$ है। (σ is constant)



चित्र 4.30

In case (I) :

$$Z_1 = \frac{I_1}{y_1} = \frac{\frac{L \times L^3}{12}}{L/2} = \frac{1}{6}L^3$$

In case II : (चित्र 4.30 (b) देखें)

$$I_{XX} = 2 \times \ (\text{I of } \Delta ACD)$$

$$= 2 \times \frac{AC \times (OD)^3}{12} = 2 \times \frac{(L\sqrt{2}) \times (L/\sqrt{2})^2}{12} = \frac{L^4}{12}$$

तथा $$y = \frac{L\sqrt{2}}{2} = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ $$Z_2 = \frac{I}{Y} = \frac{L^4}{12} \times \frac{\sqrt{2}}{L} = \frac{L^3}{6\sqrt{2}}$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{2} = 1{\cdot}414$$ उत्तर

अत: इस प्रबन्ध में Ist स्थिति में Beam, IInd स्थिति की Beam से 41·4% अधिक मजबूत (stronger) है।

उदाहरण 28. दर्शाइये कि किसी आयताकार काट के बलशून्य रेखा के ऊपर अर्धकाट पर परिणामी बल $\frac{3M}{2d}$ है जहाँ M बंकन आघूर्ण एक अनुप्रस्थ काट पर, d काट की गहराई है। काट की स्थिति भी ज्ञात करें जहाँ से परिणामी बल गुजरता है। [उत्तर : NA से $d/3$ ऊँचाई पर] **(U.P. 2007)**

हल—माना आयताकार काट की चौड़ाई b, गहराई d तथा बंकन आघूर्ण (B.M.) = M है।

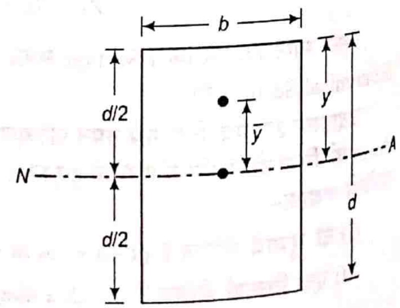
$\therefore$ नमन प्रतिबल (bending stress)

$$\boxed{f = \frac{My}{I}} \text{(नमन समी॰ से)}$$

$\because$ $$\text{प्रतिबल } (f) = \frac{\text{बल } (F)}{\text{क्षेत्रफल } (A)}$$

$\therefore$ $$\text{बल } F = f \times A = \frac{My}{I} \times A$$

अब NA काट पर बल = प्रतिबल × क्षेत्रफल से



चित्र 4.31

$$F_1 = \frac{My}{I} \times A \text{ परन्तु } NA \text{ पर } y = 0 \text{ होगा।}$$

$\therefore$ बल $$F_1 = \frac{M}{I} \times A = 0$$

सबसे ऊपरी काट पर बल $$F_2 = \left(\frac{My}{I}\right) \times A \text{ सूत्र से}$$

या $$F_2 = \frac{M \times 12 \times d}{b \times d^3 \times 2} \times \frac{(b \times d)}{2} = \frac{3M}{d}$$

अब परिणामी बल, $$F = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{0 + \frac{3M}{d}}{2} = \frac{3M}{2d}$$

$\therefore$ $$\boxed{F = \frac{3M}{2d}}$$ **Proved**

अत: परिणामी बल की क्रिया रेखा की NA से दूरी $= \frac{d}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{d}{3}$ (अर्थात् NA से $\frac{d}{3}$ ऊँचाई पर है)

प्रश्नावली (Exercise)

1. निम्न रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये—

(i) सन्तुलन की स्थिति में धरन की किसी काट पर सभी बलों के घूर्णों का योग .... होता है।
(ii) धरन की काट में अधिकतम नमन प्रतिबल .... में होते हैं।
(iii) धरन के परिच्छेद में किसी बिन्दु पर नमन प्रतिबल, उस बिन्दु की .... से दूरी के .... होता है।
(iv) सरल आलम्बित धरन पर भार के कारण नमन की दशा में उदासीन अक्ष से ऊपर के भाग में .... प्रतिबल तथा नीचे के भाग में .... प्रतिबल पैदा होते हैं।
(v) काट के जड़त्व आघूर्ण (moment of inertia) I तथा उदासीन अक्ष (NA) से अधिक दूरी वाले किनारे की दूरी (y) के अनुपात को उस काट का .... कहते हैं। **(UK 2010, S)**
(vi) आकृति मापांक (section modulus) की इकाई (unit) .... होती है।
(vii) एक d व्यास की वृत्ताकार काट (circular section) का आकृति मापांक (section modulus) Z = ... होता है। **(UK 2010, S)**
(viii) किसी धरन की नमन दृढ़ता (Flexural rigidity) .... का गुणनफल होती है। **(U.K. 2010 (S), 2011-12 (W))**
(ix) परिभ्रमण त्रिज्या (Radius of gyration), K = ... होता है।
(x) लम्ब अक्ष प्रमेय (Perpendicular Axis Theorem) के अनुसार I_{ZZ} = ... + I_{YY} **(UK 2010, S; U.K. 2014, S)**
(xi) Bending Equation, $M = \frac{\sigma \text{ या } f}{y} = \frac{\text{......}}{R}$
(xii) कोई अनुप्रस्थ काट (cross-section) जो कि नमन से पहले समतल थी, नमन के बाद भी समतल (plane) ही रहती है, यह .... की मान्यताओं में से एक है।
(xiii) टूटने की स्थिति में (just at the failure condition), किसी धरन पर अधिकतम नमन प्रतिबल (Max Bending Stress) को .... मापांक कहते हैं।
(xiv) एक खोखले वृत्ताकार काट का बाह्य व्यास D तथा आन्तरिक व्यास d है तो इसका जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.), I = ... होता है।

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

(xv) एक समान सामर्थ्य (Uniform strength) की बीम (Beam) के पूरे विस्तार में .... का मान स्थिर रहता है। (U.K. 2014, S)

(xvi) धरन की सामर्थ्य (Strength) मुख्यत: .... पर आधारित होती है। (U.K. 2014, S)

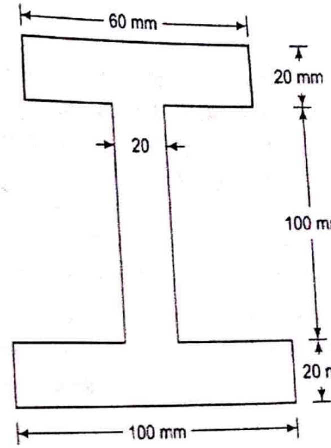
रिक्त स्थानों के उत्तर

(i) शून्य (Zero), (ii) बाहरी परतों (Outer layers), (iii) उदासीन अक्ष (Neutral Axis), समानुपाती (Proportional), (iv) संपीडन (Compressive), तनाव (Tensile), (v) आकृति मापांक (section Modulus), (vi) mm^3 या m^3, (vii) $\frac{\pi d^3}{32}$, (viii) E तथा I, (ix) $\sqrt{\frac{I}{A}}$, (x) I_{XX}, (xi) $\frac{M}{I}=\frac{f}{y}=\frac{E}{R}$, (xii) शुद्ध नमन सिद्धान्त (Theory of Pure Bending), (xiii) फटन मापांक (Modulus of Rupture), (xiv) $I=\frac{\pi(D^4-d^4)}{64}$, (xv) चौड़ाई (Width), (xvi) काट के आकृति मापांक (Z) के मान

2. निम्न को समझाइये— (U.P. 2013)
   (a) बल शून्य धुरी (Neutral Axis)
   (b) उदासीन सतह (परत) (Neutral Layer) (U.K. 2012-13 (W))
   (c) छेदन मापांक (आकृति मापांक—Section Modulus) (U.K. 2013, S)
   (d) प्रतिरोधी घूर्ण (Moment of resistance)
   (e) परिभ्रमण त्रिज्या (Radius of gyration) (U.K. 2010, 12)
   (f) क्षेत्र का द्वितीय आघूर्ण (IInd moment of area)
   (g) जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) (U.P. 2013; U.K. 2013, S)
3. निम्न को परिभाषित करें— (U.K 2012-13, Winter)
   (i) नमन प्रतिबल (Bending Stress)
   (ii) नमन दृढ़ता (Flexural Rigidity)
   (iii) जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) (U.P. 2013)
   (iv) आकृति मापांक (Section Modulus) के अनुप्रयोग (Applications) (UK 2013)
   (v) लम्ब अक्ष प्रमेय (Perpendicular Axes Theorem) बतायें तथा सिद्ध करें। (U.K. 2014, S)
4. उदासीन अक्ष (Neutral Axis) तथा उदासीन परत (Neutral Layer) को परिभाषित करें। (U.K. 2013, S)
5. शुद्ध नमन के मान्यतायें (Assumptions of Pure bending) लिखिये।
   (U.K. 2013 (S); U.K. 2014, S; U.P. 2014)
6. धरन के शुद्ध नमन के निम्नलिखित सम्बन्ध को सिद्ध कीजिये : $\frac{M}{I}=\frac{f}{y}=\frac{E}{R}$
   (U.K. 2014, S) (U.P. 2011, 12)
7. (a) उदासीन सतह एवं उदासीन अक्ष में अन्तर बताइये। (U.P. 2006, 08, 13)
   (b) सिद्ध कीजिये कि किसी रेशे में बंकन प्रतिबल, धरन के उदासीन अक्ष से रेशे की दूरी के समानुपाती होती है। (U.P. 2010)
   (c) फटन मापांक (Modulus of Rupture) (U.P. 2003, 07, 09)
8. एक स्टील प्लेट को 10 m अर्द्धव्यास (radius) के वृत्तीय चाप (circular arc) में मोड़ा जाता है। यदि प्लेट का परिच्छेद 120 mm चौड़ा तथा 20 mm मोटा हो तो उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये तथा बंकन आघूर्ण (B.M.), जो प्रतिबल को उत्पन्न करता है, उसे भी ज्ञात कीजिये। $E=2\times10^5$ N/mm² है। (U.P. 2014 Mech)

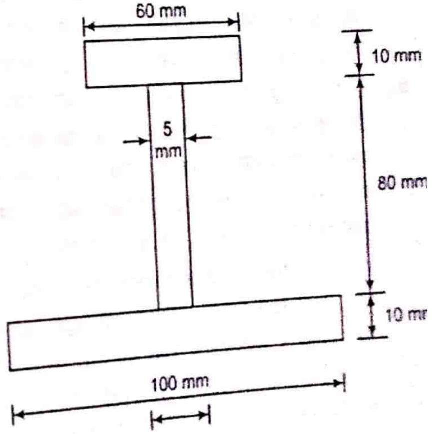
(उत्तर : $\sigma=200$ N/mm², M = 1600 N-m)

9. एक ढलवाँ लोहे के पाइप (cast iron pipe) का बाह्य व्यास 40 मिमी तथा आन्तरिक व्यास 20 मिमी है तथा लम्बाई 4 मी है। जब पाइप सिरों पर आलम्बित है और मध्य में 80 न्यूटन का बिन्दु भार लगा हो तो पाइप में अधिकतम उत्पन्न प्रतिबल ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 13·58 N / mm²] (U.P. 2002)
10. एक शुद्धालम्ब धरन (simply supported beam) 5 मी० लम्बी तथा 40 × 40 मिमी० काट की धरन पर समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। यदि धरन का अनुमेय नमन प्रतिबल (Permissible bending stress) 50 N / mm² है तो उस पर लगे भार का मान ज्ञात कीजिये। [उत्तर : $w=0·171$ kN/m] (U.K. 2011-12 (Winter))
11. एक लकड़ी की धरन 8 cm चौड़ी एवं 12 cm गहरी है। जब यह धरन 3 m की दूरी पर रखे आलम्बों पर शुद्धालम्बित हो और इसकी सारी लम्बाई पर 500 N/m का समवितरित भार हो तो इसमें उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 2·93 N / mm²] (U.P. 2006)
12. (i) एक चार मीटर लम्बे धरन के ऊपर 10 kN/m का समवितरित भार लगा है। धरन का परिच्छेद चित्र 4.32 में दिखाया गया है। इस काट पर अधिकतम प्रतिबल ज्ञात करो। [U.K. 2012-13 (W), 2013 (S)]
    [उत्तर : $\sigma=123·31$ N / mm²]



चित्र 4.32

(ii) दिये गये चित्र के अनुसार एक I-काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) उसके X-X अक्ष तथा Y-Y अक्ष के सापेक्ष ज्ञात कीजिए। [U.K. 2014, S]

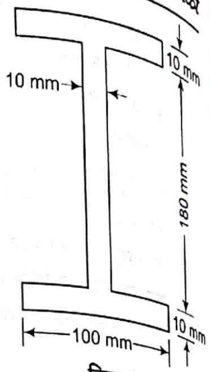


चित्र 4.33

Scanned with CamScanner

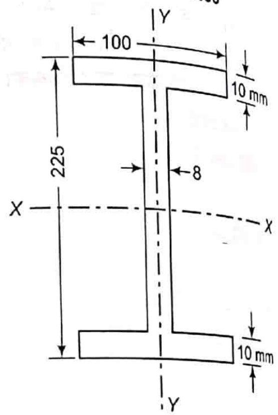
Study PowerPoint

13. चित्र 4.33 में दिखाई गई धरन की काट का आकृति मापांक (section modulus) ज्ञात कीजिये। यदि इस काट की धरन की विस्तार 5 m हो तो $100 N/mm^2$ के अनुमेय प्रतिबल (allowable stress) के लिये इसके केन्द्र पर अधिकतम संकेन्द्रित भार ज्ञात कीजिये। [उत्तर : $229{\cdot}267 \times 10^3$ mm^3, 18·34 kN] (U.P. 2009, S)



चित्र 4.33

14. चित्र 4.34 में दर्शायी सममित I-काट की 9 m की विस्तृति पर एक धरन शुद्धालम्बित है। यदि अधिकतम अनुमेय प्रतिबल 80 MPa है तो एक आलम्ब से 3 m की दूरी पर कितना संकेन्द्रित भार लगाया जा सकता है? चित्र की सभी मापें mm में हैं। [उत्तर : 10·266 kN] (U.P.)



चित्र 4.34

15. एक I-काट की धरन 150 मिमी × 300 मिमी जिसका फ्लैंज 25 मिमी मोटा और वैब 10 मिमी मोटा है। इस काट की नमन सामर्थ्य की तुलना आयताकार और वृत्ताकार काट से कीजिये यदि एक ही पदार्थ, भार और लम्बाई की धरन हो। आयताकार काट के लिए गहराई = 2 × चौड़ाई मानिये। [उत्तर : 4·392, 7·338] (U.P.)

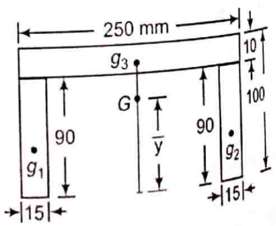
16. 6 मी० विस्तृति के एक सरल आलम्बित धरन, जिसके अनुप्रस्थ काट की गहराई तथा चौड़ाई क्रमश: 300 मिमी तथा 70 मिमी है, पर सम्पूर्ण समवितरित भार का मान क्या होगा? धरन के मध्य में लगने वाले संकेन्द्रित भार का मान क्या होगा? इस धरन में अनुज्ञेय अधिकतम प्रतिबल 120 MPa है। [उत्तर : 168 kN, 84 kN] (U.P.)

17. एक 180 mm × 120 mm आयताकार काट की धरन शुद्धालम्बी है तथा इसकी पूर्ण लम्बाई पर 10 kN/m लम्बाई का समवितरित भार लगा है। यदि नमन प्रतिबल का मान $70 N/mm^2$ से अधिक नहीं बढ़ता है तो धरन की अधिकतम सामर्थ्य के लिये आवश्यक विस्तृति ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 6·024 m] (U.P.)

18. एक इस्पात धरन 250 mm चौड़ाई और 100 mm गहराई के उल्टे चैनल से बनी है। फ्लैन्जों की मोटाई 15 mm और वैब 10 mm मोटी है। धरन 12 m विस्तृति पर शुद्धालम्बित है और प्रत्येक आलम्ब से 1 m की दूरी पर ही दो समान संकेन्द्रित भार लगे हैं। प्रत्येक भार का मान ज्ञात कीजिए यदि तनाव मूलक प्रतिबल को $100 N/mm^2$ से अधिक नहीं होना है? [उत्तर : 7·375 kN प्रत्येक] (U.P.2005)

Hint : चित्र 4.35 देखें। जिसमें $\overline{Y} = 69{\cdot}04$ mm

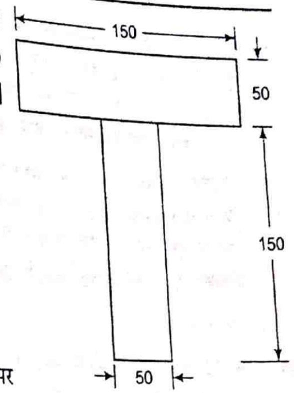
तथा $I = 5088525{\cdot}653$ mm^4



चित्र 4.35

19. चित्र 4.36 में दिये गये T-काट (T-section) के लिये I_{XX} व I_{YY} का मान ज्ञात कीजिये। (U.K. 2011-12 Winter)

[उत्तर : $I_{XX} = 53125000$ mm^4, $I_{YY} = 15625000$ mm^4]



चित्र 4.36

20. प्रश्न (19) के चित्र में दिखाई गई T-काट (Section) की धरन (Beam) पर 3·4 kN-m का नमन घूर्ण (B.M.) लगा है तो इसमें उत्पन्न अधिकतम प्रतिबलों के मान व उनकी प्रकृति ज्ञात कीजिये।(U.K. 2014; U.P. 2007)

[उत्तर : तनाव $8 N/mm^2$, संपीडन $4{\cdot}8 N/mm^2$]

21. एक टी-धरन, दो लकड़ी के तख्तों को जोड़ कर बनाई गई है जिसमें प्रत्येक का माप 50 mm × 15 mm है। इस धरन पर 3400 N-m का अधिकतम नमन घूर्ण लगाया गया है। इस धरन की काट के दूरतम रेशों (extreme fibres) पर प्रतिबलों के मान ज्ञात कीजिये। [उत्तर : $247{\cdot}6 N/mm^2, 142{\cdot}57 N/mm^2$] (U.P.)

22. एक T-बीम के फ्लैंज की चौड़ाई 100 mm तथा पेटा (Web) की गहराई 150 mm है। Flange तथा web की मोटाई 10 mm है। यदि धरन की 4 m की सम्पूर्ण लम्बाई पर 25 kN/m का एक समान बँटा भार (U.D.L.) लगा हो तो उसमें उत्पन्न अधिकतम तनाव प्रतिबल का मान ज्ञात करें। धरन दोनों सिरों पर सरल आधारित है। (U.P. 2008)

[उत्तर : $\overline{Y} = 107$ mm, $I = 6660833{\cdot}33$ mm^4, $\sigma = 803{\cdot}20 N/mm^2$]

23. दो समान सामर्थ्य वाली धरनों के भारों की तुलना कीजिये। दोनों धरन एक पदार्थ की तथा गोलाकार अनुप्रस्थ काट की हैं। एक धरन ठोस तथा दूसरी खोखली है जिसका आन्तरिक व्यास बाह्य का आधा है।

[उत्तर : $\dfrac{\text{ठोस धरन का भार}}{\text{खोखली धरन का भार}} = 1{\cdot}28$] (U.P.)

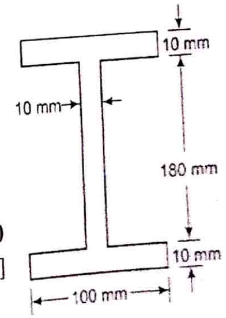
24. दो काटों के पदार्थ तथा भार समान हैं। एक काट ठोस वृत्ताकार है जिसका व्यास 200 mm है। दूसरी काट खोखली वृत्ताकार है जिसका बाह्य व्यास 250 mm है। इन दोनों काटों की शक्तियों (आकृति मापांकों) की तुलना कीजिये। [उत्तर : $Z_h / Z_s = 1{\cdot}7$]

25. चित्र 4.37 में एक धरन के I-परिच्छेद (I-section) को दिखाया गया है। इस धरन की लम्बाई 6 m है तथा इसके दोनों सरल आधारित सिरों से 2 m की दूरी पर दो बिन्दु भार 10 kN के लगाये गये हैं। ज्ञात करें—

(i) इस पच्छिेद का उदासीन अक्ष के सापेक्ष क्षेत्र का द्वितीय आघूर्ण (IInd Moment of area)

(ii) धरन में उत्पन्न अधिकतम तनन तथा सम्पीडन प्रतिबल (Tensile and compressive stress) (UP 2009)

[उत्तर : $6{\cdot}9 \times 10^6$ mm^4, $\sigma_t = \sigma_c = 173{\cdot}51 N/mm^2$]



चित्र 4.37

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

26. एक 5 m विस्तार (span) की सरल आधारित धरन (S.S. Beam) की पूरी लम्बाई पर 10 kN/m का U.D.L. लगा है तथा एक सिरे से दो मीटर की दूरी पर 10 kN का बिन्दु भार भी लगा है। अधिकतम नमन आघूर्ण का मान व स्थिति ज्ञात करें तथा धरन की काट की उचित माप (suitable section) ज्ञात करें जबकि अधिकतम allowable stress $8\ N/mm^2$ तक सीमित है। काट की गहराई (d), चौड़ाई (b) की दुगनी है। ($d = 2b$)

[उत्तर : Max B.M. = 42·05 kN-m सिरे A से 2·1 m की दूरी पर काट की माप, $b = 198$ mm, $d = 396$ mm]

27. एक water main pipe जिसका आन्तरिक व्यास (internal diameter) 500 mm तथा दीवार की मोटाई 25 mm है, पानी से पूरा भरा है। यह 20 m की लम्बाई पर Freely supported है। पाइप के पदार्थ में उत्पन्न अधिकतम नमन प्रतिबल (max bending stress) ज्ञात करें। Specific weight of steel of Pipe = $75\ kN/m^3$ and for water $= 10\ kN/m^3$

[उत्तर : $\sigma = 48{\cdot}82 \times 10^6\ N/m^2$]

28. एक 12 मीटर लम्बा ढलवां लोहे का पाईप जिसका आंतरिक व्यास 500 मिमी तथा पाईप की मोटाई 25 मिमी है। पूरा भरा हुआ है तथा अपने दो किनारों पर टिका हुआ है। पदार्थ का अधिकतम प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए यदि ढलवां लोहे के पाइप के पदार्थ का घनत्व $7200\ kg/m^3$ और पानी का घनत्व $1000\ kg/m^3$ हो। **[U.K. 2014 (B.P.), S]**

[संकेत : उदाहरण 19 (b) देखें।] [उत्तर : प्रतिबल (Stress) $\sigma = 17{\cdot}1472\ N/mm^2$]

9. 500 mm व्यास के लकड़ी के बेलनाकार लट्ठे को काटकर बनाये जाने वाले सबसे मजबूत धरन (Beam) के काट की चौड़ाई व गहराई ज्ञात करें। [उत्तर : $b = 288{\cdot}67$ mm, $h = 408{\cdot}248$ mm] **(UK 2007)**

). एक 'D' मीटर के लकड़ी के लट्ठे में से अधिकतम शक्ति (max strength) की काटी जा सकने वाली आयताकार काट की माप ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : $b = \dfrac{D}{\sqrt{3}} = 0{\cdot}577\ D,\ h = 0{\cdot}816\ D$]

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

5 विकृति ऊर्जा (STRAIN ENERGY)

Yout-Polytechic study with Atul

§ 5.1. परिचय (Introduction)

इस अध्याय में हम भार या बल को वस्तु पर एकदम (Suddenly) या संघट्टन (Impact) द्वारा लगाकर इसके कारण पदार्थ में पैदा हुए क्षणिक (instantaneous) प्रतिबल का मान ज्ञात करेंगे और इसके लिए कार्य के सिद्धान्त (Principle of Work) का सहारा लिया जाता है।

जब किसी प्रत्यास्थ पिण्ड या वस्तु (body) पर बल द्वारा कार्य किया जाता है तो उस वस्तु में विकृति होती है अर्थात् पदार्थ के कणों में विस्थापन होता है और जब किसी वस्तु पर उसकी प्रत्यास्थता की सीमा के अन्दर बल लगाकर कार्य किया जाता है तो वह कार्य ही उस वस्तु में विकृति ऊर्जा (strain energy) के रूप में एकत्रित हो जाता है। इसके पश्चात् बल को वस्तु से हटा लेने पर वह वस्तु अपनी प्रारम्भिक स्थिति में वापस आ जाने के कारण कार्य समाप्त हो जाता है जिससे विकृति भी समाप्त हो जाती है। अत: पिण्ड अथवा वस्तु एक पूर्ण स्प्रिंग के समान व्यवहार करते हैं।

अत: पिण्ड अथवा वस्तु पर विभिन्न प्रकार से भार लगने की दशा में उत्पन्न हुए प्रतिबल एवं विकृति को जानना आवश्यक है और इसे जानने के लिये हम वस्तु पर किये गये कार्य को वस्तु में विकृति के रूप में एकत्रित हुई विकृति ऊर्जा के बराबर रखकर तात्क्षणिक अधिकतम प्रतिबल (instantaneous maximum stress) एवं विकृति (strain) को ज्ञात करते हैं।

§ 5.2. कुछ मुख्य परिभाषायें (Some Important Definitions)

(1) विकृति ऊर्जा या सुनम्यता (Strain Energy or Resilience)—"किसी पदार्थ (अथवा वस्तु) में विकृति (strain) के रूप में एकत्रित हुई ऊर्जा या कार्य को विकृति-ऊर्जा अथवा सुनम्यता कहते हैं।" प्रत्यास्थता की सीमा के अन्दर पदार्थ को दी गई ऊर्जा, विकृति ऊर्जा के बराबर होती है। इसे U से प्रदर्शित करते हैं।

"Energy stored in the form of strain developed in the material (or body), within elastic limit is called strain energy."

(2) प्रमाण विकृति ऊर्जा (Proof Resilience)—प्रत्यास्थता-सीमा के अन्दर (within elastic limit) किसी पदार्थ में (अथवा वस्तु में) बिना स्थायी विकृति उत्पन्न हुए जितनी अधिकतम विकृति ऊर्जा (strain energy) एकत्रित की जा सकती है, उसे प्रमाण विकृति ऊर्जा (Proof Resilience) कहते हैं।

"Within elastic limit, max energy stored in the body (which is without any permanent deformation) is called proof resilience."

(3) विकृति ऊर्जा गुणांक (Modulus of Resilience)—प्रत्यास्थता की सीमा के अन्दर (within elastic limit) किसी पदार्थ के इकाई आयतन में (in unit volume of the material) बिना स्थाई विकृति उत्पन्न किये, जितनी अधिकतम विकृति ऊर्जा एकत्रित की जा सकती है, उसे विकृति ऊर्जा गुणांक कहते हैं।

"In unit volume of the material, max strain energy stored (without any permanent deformation) is called modulus of resilience."

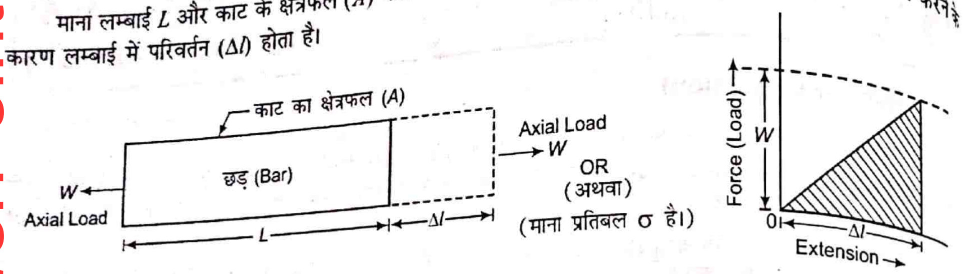
(4) प्रमाण प्रतिबल (Proof Stress)—प्रमाण विकृति ऊर्जा की स्थिति में पदार्थ में उत्पन्न हुए प्रतिबल को प्रमाण प्रतिबल कहते हैं।

"Developed stress, in the condition of proof resilience, is called proof stress."

Scanned with CamScanner

§ 5.3. विकृति ऊर्जा का मान ज्ञात करना (U.P. 2014)

माना लम्बाई L और काट के क्षेत्रफल (A) वाली छड़ पर अक्षीय तनाव बल (Axial Tensile load) W कार्य करने के कारण लम्बाई में परिवर्तन (Δl) होता है।



चित्र 5.1

अत: भार अथवा बल (W) द्वारा किया गया कार्य (Work done)

$$= \text{औसत बल} \times \text{विस्थापन}$$

(mean load) × (displacement)

$$= \frac{0+W}{2} \times \Delta l$$

$$\therefore \quad \text{कार्य} = \frac{W}{2} \times \Delta l \qquad \text{...(1)}$$

छड़ में उत्पन्न विकृति ऊर्जा = किया गया कार्य

$$U = \text{कार्य} = \frac{W}{2} \times \Delta l$$

$$= \frac{W}{2} \times \frac{\sigma \times l}{E} \qquad \left[\text{परन्तु } \Delta l = \frac{Fl}{AE} = \frac{\sigma l}{E} \text{ तथा } W = \sigma \times A\right]$$

$$= \frac{\sigma \times A}{2} \times \frac{\sigma \times l}{E}$$

$$\boxed{U = \frac{\sigma^2}{2E} \times A \times l} \qquad \text{(सूत्र)} \qquad \text{...(2)}$$

अत: किसी भी छड़ में विकृति ऊर्जा (U) को सूत्र (ii) से ज्ञात करते हैं।

§ 5.4. विकृति ऊर्जा उत्पन्न करने के लिये भार लगाने के प्रकार (Types of Loading)

(1) धीरे-धीरे भार या बल लगाना (Gradually Loading)—

$\because$ Work Done = (mean load × displacement)

$$\therefore \quad \text{कार्य (Work Done)} = \frac{0+W}{2} \times \Delta l \approx \frac{W}{2} \times \Delta l$$

$$\boxed{\text{कार्य} = \frac{W}{2} \times \Delta l} \qquad \text{(सूत्र)}$$

परन्तु

$$\text{कार्य} = \text{विकृति ऊर्जा } (U) = \frac{W}{2} \times \frac{\sigma \times l}{E} \qquad \left[\because \Delta l = \frac{\sigma \times l}{E}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{\sigma^2}{2E} Al = \frac{W}{2} \times \frac{\sigma l}{E}$$

प्रतिबल (Stress)

$$\boxed{\sigma = \frac{W}{A}} \qquad \text{(सूत्र)} \qquad \text{...(3)}$$

(2) आकस्मिक भार (अर्थात् अचानक) भार लगाना (Suddenly Loading)—

अब कार्य = औसत बल × विस्थापन

$$= \frac{W+W}{2} \times \Delta l$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{कार्य (Work Done)} = W \times \Delta l} \qquad \text{(सूत्र)} \qquad \text{...(4)}$$

परन्तु कार्य = विकृति ऊर्जा (U)

$$\frac{\sigma^2}{2E} \times A \times l = W \times \Delta l$$

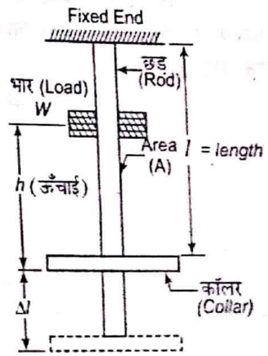
$$= W \times \frac{\sigma \times l}{E}$$

$$\therefore \quad \boxed{\sigma = 2 \times \frac{W}{A}} \qquad \text{(सूत्र)} \qquad \text{...(5)}$$

(3) संघट्ट भार रोपण (Impact Loading)—

माना लम्बाई (l) की एक छड़ के निचले सिरे पर लगे एक कॉलर (collar) पर एक भार W, ऊँचाई (h) से स्वतन्त्रतापूर्वक गिरता है जिससे कॉलर क्षणिक रूप से छड़ को Δl लम्बाई से बढ़ाता है। माना इस दशा में प्रतिबल p या (σ) है।

अब भार W द्वारा h ऊँचाई से गिरने में छड़ पर किया गया कार्य (Work Done) = भार × विस्थापन



चित्र 5.2

$$\text{कार्य} = W \times (h + \Delta l) \qquad \text{(सूत्र)}$$

परन्तु कार्य = विकृति ऊर्जा (U)

[$\because$ कार्य से विकृति ऊर्जा उत्पन्न होती है]

$$\therefore \quad \frac{\sigma^2}{2E} \times A \times l = Wh + W\frac{\sigma l}{E} \qquad \left[\because \Delta l = \frac{l}{E}\right]$$

$$\text{या} \quad \frac{1}{2}\sigma^2 - \left(\frac{W}{A}\right)\sigma - \frac{WEh}{Al} = 0$$

[यहाँ $\frac{E}{Al}$ से गुणा किया]

$$\because \quad ax^2 + bx + c = 0 \text{ से} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore \quad \sigma = \frac{\frac{W}{A} \pm \sqrt{\frac{W^2}{A^2} - 4 \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{WEh}{Al}\right)}}{2 \times \frac{1}{2}}$$

$$\text{या} \quad \sigma = \frac{W}{A} \pm \frac{W}{A}\sqrt{\left(1 + \frac{2EAh}{Wl}\right)}$$

$$\text{या} \quad \boxed{\text{प्रतिबल } (\sigma) = \frac{W}{A}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EAh}{Wl}}\right]} \qquad \text{(सूत्र)} \qquad \text{...(7)}$$

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

[∵ छड़ में खिंचाव से लम्बाई में वृद्धि होगी अतः केवल (+ve) ही लिया जायेगा]

सूत्र (7) से ज्ञात होता है कि यदि $h=0$ हो तो भार W आकस्मिक (suddenly) होगा क्योंकि प्रतिबल, $\sigma = 2\times\frac{W}{A}$ हो जायेगा। अतः हम कह सकते हैं कि संघट्टन भार (Impact Load) की दशा में छड़ में उत्पन्न हुआ प्रतिबल, आकस्मिक भार (Suddenly Loading) के प्रतिबल से भी अधिक होता है। अतः सूत्र (7) से प्रतिबल (p या σ) का मान ज्ञात करने पर—

क्षणिक विरूपण (Deformation), δ या $\boxed{\Delta l = \frac{\sigma\times l}{E}}$ (सूत्र)

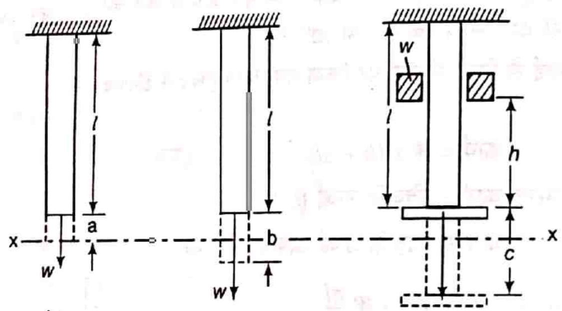
तथा क्षणिक विकृति (Strain), $\boxed{e = \frac{\Delta l}{l} \text{ या } \frac{\delta}{l}}$ (सूत्र)

यदि छड़ पर संघट्टन भार (Impact Load), सम्पीडन (Compressive) का हो तो उपरोक्त प्रकार से ही प्रतिबल एवं विकृति ज्ञात किये जा सकते हैं। इस स्थिति में प्रतिबल सम्पीडन वाला तथा लम्बाई में परिवर्तन भी कमी के रूप में होगा।

संघट्टन भार की दशा में भार गति अवस्था में होता है और संघट्टन भार (Impact Load) से वस्तु के पदार्थ में अधिकतम क्षणिक प्रतिबल उस समय उपजता है जब भार क्षण भर के लिये विरामावस्था में अर्थात् गतिज ऊर्जा शून्य की स्थिति में होता है। इस स्थिति में गिरते हुए भार की सारी ऊर्जा वस्तु के अन्दर पदार्थ में एकत्र हो जाती है। इस क्षण पदार्थ में अधिकतम विकृति ऊर्जा होती है।

विशेष—धीरे-धीरे, आकस्मिक तथा संघट्टन भारों द्वारा विरूपण की तुलना

(1) वस्तु अथवा पदार्थ पर भार चाहे स्थैतिक हो या गतिक सभी दशाओं में पदार्थ पर बल शून्य (zero) से अपने अधिकतम मान (max value) तक बदलता है क्योंकि पदार्थ के विरूपण (Deformation) में वृद्धि सदैव शून्य से अधिकतम तक होती है।



(i) स्थैतिक भार (Gradually Load) (ii) आकस्मिक भार (Suddenly Load) (iii) संघट्टन भार (Impact Load)

चित्र 5.3

(2) चित्र 5.3 में भार की उपरोक्त तीनों परिस्थितियों में छड़ के सापेक्ष विरूपण (relative deformation) दर्शाये गये हैं। चित्र 5.3 (i) में छड़ पर भार W को धीरे-धीरे (Gradually) लगाने से विरूपण (deformation) 'a' होता है और चित्र 5.3 (ii) में आकस्मिक भार (Suddenly Load) W लगाने से विरूपण (b) होता है। चित्र 5.3 (iii) में संघट्टन भार (Impact Load) W के कारण विरूपण (c) होता है। इस प्रकार चित्रों से स्पष्ट है कि— $b = 2a$ तथा $c > 2a$

(3) वास्तव में Suddenly Load तथा Impact Load लगाने पर क्षणिक अधिकतम विरूपण (max. deformation) के बाद छड़ (X-X) स्थिति पर कम्पन (vibration) करती है और अन्त में (X-X) स्थिति पर स्थिर हो जाती है जो कि धीरे-धीरे भार लगाने (gradually loading) से आती है।

§ 5.5. आघात या संघट्टन गुणांक (Shock or Impact Factor)

उपरोक्त से हम जानते हैं कि स्थैतिक अवस्था के भार (W) का गतिक प्रभाव (P), स्थैतिक की अपेक्षा दुगुना (आकस्मिक दशा में) अथवा दुगुने से भी अधिक (संघट्टन दशा में) होता है और हम सिद्ध कर चुके हैं कि स्थैतिक भार W के संघट्टन के द्वारा (By Impact of Load W) छड़ में उत्पन्न हुआ अधिकतम प्रतिबल,

$$\sigma \text{ या } p = \frac{W}{A}\left[1+\sqrt{\left(1+\frac{2AEh}{Wl}\right)}\right] \quad \text{(सूत्र)}$$

∴ स्थैतिक भार W का प्रभावी गतिक बल, [∵ बल $P = \sigma\times A$ होता है]

$$P = W\left[1+\sqrt{\left(1+\frac{2AEh}{Wl}\right)}\right] \quad \text{... (1)}$$

अब माना बल लगने से प्रत्यास्थ विस्थापन δl है जो कि लगने वाले गतिक प्रभावी बल (P) के समानुपाती है। तब

$$P \propto \delta l \quad \text{या} \quad P = C.\delta l \quad \text{(यहाँ } C \text{ एक स्थिरांक है)}$$

$$\therefore \quad C = \frac{P}{\delta l} \quad \text{(अर्थात् } C = \text{भार प्रति इकाई विस्थापन)}$$

∵ विकृति (Strain) $e = \frac{\delta l}{l}$

परन्तु $e = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{AE}$

या $\frac{P}{AE} = \frac{\delta l}{l}$ या $\frac{P}{\delta l} = \frac{AE}{l}$

अतः समीकरण (1) से,

$$\frac{P}{W} = \left[1+\sqrt{\left(1+\frac{2AEh}{Wl}\right)}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{P}{W} = \left[1+\sqrt{\left(1+\frac{2Ph}{W\times\delta l}\right)}\right] = \left[1+\sqrt{\left(1+\frac{2Ch}{W}\right)}\right] \quad \text{(सूत्र)} \quad \text{... (2)}$$

इस $\frac{P}{W}$ को आघात गुणांक या संघट्टन गुणांक (Shock or Impact Factor) कहते हैं।

परिभाषा–इस प्रकार स्थैतिक भार W के संघट्टन क्रिया के कारण, इसके प्रभावी गतिक बल P तथा स्थैतिक भार W के अनुपात $\frac{P}{W}$ को आघात गुणांक कहते हैं।

मुख्य बिन्दु—1. आघात गुणांक द्वारा संघट्टन के कारण स्थैतिक भार W का आवर्धन प्रदर्शित होता है।

2. निकाय स्थिरांक C को कम करने से आघात गुणांक को कम किया जा सकता है तथा C कम होने का तात्पर्य निकाय के मृदु या स्प्रिंगदार होने से है जिससे इकाई विस्थापन के लिए कम भार की आवश्यकता होगी।

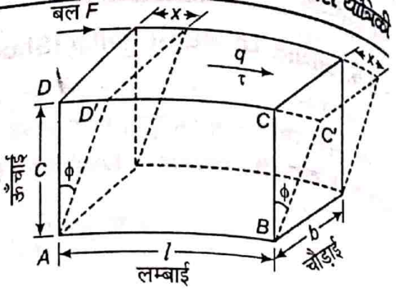
3. निकाय का क्षेत्रफल A घटाने, प्रत्यास्थता गुणांक E घटाने या लम्बाई l बढ़ाने से भी C का मान कम कर सकते हैं।

4. उपरोक्त कारण से ही निकाय में झटके सोखने के लिए स्प्रिंग, रबड़ या फोम आदि का प्रयोग किया जाता है।

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

§ 5.6. कर्तन में विकृति ऊर्जा (Strain Energy in Shear)

चित्र 5.4 में एक ब्लॉक (Block) दिखाया गया है जिसकी लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई क्रमशः a, b तथा c हैं। इसका निचला सिरा बद्ध (Fixed) है तथा ऊपरी सिरे पर लगे एक कर्तन बल (Shear Force) (F) के कारण कर्तन प्रतिबल (Shear Stress) q (या τ) उत्पन्न होता है। बल F से हुए विरूपण (Deformation) को Dotted Lines द्वारा प्रदर्शित किया गया है। इसमें कर्तन विकृति (Shear Strain) ϕ है। चित्र में, बल द्वारा किया गया कार्य (Work Done)



चित्र 5.4

$= \text{औसत बल} \times \text{विस्थापन}$

$$= \frac{0+F}{2} \times x = \frac{F}{2} \times x$$

बल $\quad F = \text{कर्तन प्रतिबल} \times \text{ऊपरी सतह का क्षेत्रफल}$

या $\quad F = q \times a \times b$

चित्र से, कर्तन विकृति, $\quad \phi = \frac{x}{c} \quad$ या $\quad x = \phi \times c$

परन्तु $\quad \phi = \frac{q}{G}, \quad$ जहाँ G = कर्तन मापांक (Modulus of Rigidity)

$\therefore \quad x = \frac{q}{G} \times c$

$\because$ हम जानते हैं, विकृति ऊर्जा = किया गया कार्य

$$\therefore \quad U = \frac{1}{2} F \cdot x \Rightarrow \frac{1}{2} \times (q \times a \times b) \times \frac{q}{G} \times c = \frac{q^2}{2G} \times (abc)$$

अतः:
$$U = \frac{q^2}{2G} \times \text{आयतन (Volume of Block)} \quad \text{(सूत्र)}$$

§ 5.7. आयतन विकृति में विकृति ऊर्जा (Strain Energy in Volume Strain due to Gradually Loading)

माना किसी वस्तु पर परस्पर लम्ब तीन दिशाओं x-axis की ओर (p_x या σ_x) प्रतिबल (stresses), y-axis की ओर (p_y या σ_y) प्रतिबल (stresses) तथा z-axis की ओर (p_z या σ_z) प्रतिबल (stresses) लग रहे हैं। माना $p_x = p_y = p_z = p$ या σ है।

$\because$ हम जानते हैं कि प्रत्येक दिशा में विकृति (strain) $e = \frac{p}{E}\left[1 - \frac{2}{m}\right]$ होगी, जहाँ $\frac{1}{m}$ = पॉइजन अनुपात

$\because$ हम यह भी जान चुके हैं कि प्रत्येक दिशा में प्रतिबल के कारण प्रति इकाई आयतन में किया गया कार्य

= प्रति इकाई आयतन में विकृति ऊर्जा

$$u = \frac{p^2}{2E} = \frac{1}{2} \times p \times \frac{p}{E}$$

$$= \frac{1}{2} \times p \times e \quad \left[\because \text{strain } e = \frac{p}{E}\right]$$

$$= \frac{1}{2} p \times \frac{p}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

अब पदार्थ के प्रति इकाई आयतन में तीनों दिशाओं में मिलाकर कुल विकृति ऊर्जा, $U = 3u$

$$U = \frac{3}{2} \times p \times \frac{p}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

$$U = \frac{p^2}{2} \times \frac{3}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

परन्तु हम जानते हैं कि $\quad E = 3K\left[1 - \frac{2}{m}\right]$

या $\quad \frac{1}{K} = \frac{3}{E}\left[1 - \frac{2}{m}\right]$

$\therefore$ पदार्थ के प्रति इकाई आयतन, कुल विकृति ऊर्जा

$$U = 3u = \frac{p^2}{2K} \quad \text{या} \quad U = \frac{\sigma^2}{2K}$$

§ 5.8. नमन के कारण विकृति ऊर्जा (Strain Energy due to Bending)

नमन के सिद्धान्त (Theory of bending) द्वारा हम जानते हैं कि धरन (Beam) पर उसकी अक्ष के लम्बरूप बल अर्थात् अनुप्रस्थ भार (Transverse Load) लगाने से धरन की काट (Section of beam) में तनाव तथा सम्पीडन के प्रतिबल (Tensile and compressive stresses) उत्पन्न हो जाते हैं। परन्तु ये प्रतिबल धरन की किसी भी काट (section) में समान नहीं होते बल्कि उदासीन अक्ष (Neutral Axis) पर शून्य से बढ़ते हुए काट के सिरों पर अधिकतम हो जाते हैं। धरन की विभिन्न अनुप्रस्थ काटों पर इन प्रतिबलों के मान भी नमन आघूर्ण (Bending Moment) के अनुसार बदलते हैं।

उपरोक्त बातों को ध्यान में रखते हुए नमन के कारण विकृति ऊर्जा निम्न प्रकार ज्ञात की जाती है—

$\because$ विकृति ऊर्जा $(U) = \frac{\sigma^2}{2E} \times (A \times l)$ सूत्र में आयतन $A \times l = 1$ रखने पर धीरे-धीरे भार लगने की स्थिति में (in gradually loading), प्रति इकाई आयतन में विकृति ऊर्जा (Strain Energy)

$$= \frac{\sigma^2}{2E}$$

$\therefore$ दो काटों के बीच धरन की लम्बाई δx तथा काट के छोटे से क्षेत्रफल δA वाले भाग में विकृति ऊर्जा,

$$= \frac{\sigma^2}{2E} \times \delta x \times \delta A \quad \text{... (i)}$$

यदि धरन की उदासीन अक्ष से क्षेत्रफल δA की दूरी y है तथा इस काट पर नमन आघूर्ण M और धरन की उदासीन अक्ष (Neutral Axis) पर काट का जड़त्वाघूर्ण (Moment of Inertia) 'I' है, तब

नमन प्रतिबल, $\quad f$ या $\sigma = \frac{M}{I} \times y \quad \left[\because \frac{M}{I} = \frac{f \text{ या } \sigma}{y} \text{ (सूत्र)}\right]$

समीकरण (i) में नमन प्रतिबल (σ) का मान रखने पर

$$\text{विकृति ऊर्जा (Strain Energy)} = \frac{M^2 \times y^2}{I^2 \times 2E} \times \delta x \times \delta A$$

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

धरन की δx लम्बाई में काटों के बीच के धरन के भाग में विकृति ऊर्जा

$$\delta U = \Sigma\left(\frac{M^2 y^2}{I^2 \times 2E} \times \delta x \times \delta A\right) = \frac{M^2}{I^2 \times 2E} \times \delta x\ \Sigma(\delta A \cdot y^2)$$

परन्तु जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.), $I = \Sigma(\delta A \times y^2)$ सूत्र होता है।

$$\therefore \quad \delta U = \frac{M^2}{2EI} \times \delta x$$

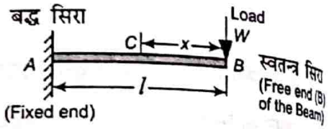
या $$dU = \frac{M^2}{2EI} \times dx$$

अत: एक पूरी धरन के लिये विकृति ऊर्जा,

$$\boxed{U = \frac{1}{2EI}\int_0^l M^2 dx} \quad \text{(सूत्र)} \quad \ldots \text{(ii)}$$

जहाँ प्रत्येक स्थान पर समान अनुप्रस्थ काट (Same section) वाली धरन (beam) की सम्पूर्ण लम्बाई (whole length) l है। अब इस सूत्र के आधार पर निम्न दशाओं में सूत्र ज्ञात करेंगे—

Condition (1) जब कैन्टीलीवर के स्वतन्त्र सिरे पर संकेन्द्रित भार (Concentrated load or Point load) W लगा है—



चित्र 5.5

Cantilever के Free end B से x दूरी पर नमन घूर्ण, (Bending Moment)

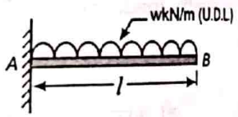
$$M = W.x$$

अब उपरोक्त समीकरण (ii) के सूत्र से विकृति ऊर्जा,

$$U = \frac{1}{2EI}\int_0^l W^2.x^2 dx \quad \text{या} \quad U = \frac{W^2}{2EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l$$

या $$\boxed{U = \frac{W^2 l^3}{6EI}} \quad \text{(सूत्र)} \quad \ldots \text{(iii)}$$

Condition (2) जब एक कैन्टीलीवर (cantilever) की पूरी लम्बाई (whole length) पर W kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है—



चित्र 5.6

$\therefore$ धरन (beam) के स्वतन्त्र सिरे (Free End) B से x दूरी पर नमन आघूर्ण (B.M.),

$$M = \frac{wx^2}{2}$$

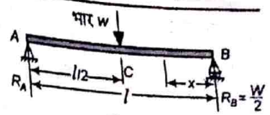
अत: समीकरण (ii) सूत्र से विकृति ऊर्जा,

$$U = \frac{1}{2EI}\int_0^l M^2 dx$$

$$= \frac{1}{2EI}\int_0^l \frac{w^2 x^4}{4} dx = \frac{1}{2EI} \times \frac{w^2}{4}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^l$$

$$\therefore \quad \boxed{U = \frac{w^2 l^5}{40EI} \Rightarrow \frac{W^2 l^3}{40EI}} \quad \text{(सूत्र)} \quad \ldots \text{(iv)} \quad (\text{यहाँ } W = w \times l \text{ है})$$

Condition (3) जब लम्बाई (l) की शुद्धालम्ब धरन (Simply supported beam) के मध्य-बिन्दु (Mid-point) पर एक संकेन्द्रित भार (Point Load) W लगा है—



चित्र 5.7

$\because$ यहाँ $$R_A = R_B = \frac{\text{कुल भार } (W)}{2}$$

$\therefore$ B से x दूरी पर आघूर्ण (Moment) $M = \frac{W}{2}.x$ होगा।

अब समीकरण (ii) सूत्र से,

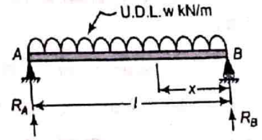
विकृति ऊर्जा, $$U = 2 \times \frac{1}{2EI}\int_0^{l/2}\left(\frac{W}{2}\right)^2 x^2.dx$$

या $$U = \frac{2}{2EI} \times \frac{W^2}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2}$$

या $$U = \frac{W^2 l^3}{EI \times 4 \times 24}$$

या $$\boxed{U = \frac{W^2 l^3}{96\,EI}} \quad \text{(सूत्र)} \quad \ldots \text{(v)}$$

Condition (4) जब लम्बाई (l) की शुद्धालम्ब धरन (S.S. Beam) की सम्पूर्ण लम्बाई (Whole length) पर समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। U.D.L. का मान w kN/m है। **(U.K. 2014, S)**



चित्र 5.8

$\because$ A पर प्रतिक्रिया $R_A = B$ पर प्रतिक्रिया $R_B = \frac{w \times l}{2}$

B से x दूरी पर नमन आघूर्ण (B.M.),

$$M = \frac{w \times l}{2} \times x - w x \frac{x}{2}$$

$$= \frac{w}{2}(lx - x^2)$$

अब समीकरण (iii) सूत्र से, विकृति ऊर्जा (Strain Energy)

$$U = \frac{1}{2EI}\int_0^l M_x^2\, dx \text{ सूत्र से}$$

$$= \frac{1}{2EI} \times \left(\frac{w}{2}\right)^2 \int_0^l (lx - x^2)^2 dx$$

$$= \frac{w^2}{8EI}\int_0^l (l^2x^2 + x^4 - 2lx^3)\, dx$$

$$= \frac{w^2}{8\,EI}\left[\frac{l^2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{2lx^4}{4}\right]_0^l$$

$$= \frac{w^2}{8\,EI}\left[\frac{l^5}{3} + \frac{l^5}{5} - \frac{l^5}{2}\right]$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

$$U = \frac{w^2}{8EI}\left[\frac{10l^5 + 6l^5 - 15l^5}{30}\right]$$

$$U = \frac{w^2}{8EI} \times \left(\frac{l^5}{30}\right) = \frac{w^2 l^5}{240EI} \quad \text{(सूत्र)}$$

⇒ यदि U.D.L. का कुल भार $W = w \times l$ रखा जाये तो विकृति ऊर्जा $\boxed{U = \dfrac{W^2 l^3}{240EI}}$ (सूत्र) ... (vi)

Condition (5) जब धरन की पूरी लम्बाई (l) पर स्थिर मान (Constant Value) का नमन आघूर्ण (Beding Moment) "M" लगा है— (समीकरण (ii) सूत्र से)

विकृति ऊर्जा $U = \frac{1}{2EI}\int_0^l M^2\,dx$

या $U = \frac{M^2}{2EI}\int_0^l 1\,dx = \frac{M^2}{2EI} \times [x]_0^l$

∴ $\boxed{U = \dfrac{M^2 l}{2EI}}$ (सूत्र) ... (vii)

महत्वपूर्ण अभ्यास (Important Exercise)

उदाहरण 1. इस्पात के एक नमूने पर तनन परीक्षण में (in tensile testing) निम्न प्रेक्षण (observations) प्राप्त किये गये—

नमूने (sample) की लम्बाई = 50 mm, नमूने की अनुप्रस्थ काट (cross-section) = 150 mm^2, नमूने की कुल विकृति (Δl) = 0·05 mm, नमूने पर प्रयुक्त भार (W) = 30 kN तथा $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 है। नमूने में संचित ऊर्जा (Energy Stored) ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है, $L = 50$ mm, $A = 150$ mm^2, Δl (या δl) = 0·05 mm,

नमूने पर प्रयुक्त भार (W) = 30 kN, $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2

संचित ऊर्जा $U = \frac{\sigma^2}{2E} Al$ सूत्र से, [यहाँ प्रतिबल, p या $\sigma = \frac{W}{A}$]

$$= \frac{(30000)^2}{(150)^2 \times 2 \times (2 \times 10^5)} \times 150 \times 50 = 750 \text{ N-mm}$$

$= 0·75$ N-m उत्तर

अथवा (OR) विधि-2 (Method-II)

संचित ऊर्जा (Energy Stored) = किया गया कार्य

Work Done in gradually loading $= \frac{W}{2} \times \Delta l$ (सूत्र)

$$= \frac{30 \times 1000}{2} \times 0·05 = 750 \text{ N-mm}$$

$= 0·75$ N-m उत्तर

उदाहरण 2. किसी छड़ की काट 20 mm × 30 mm तथा लम्बाई 2 m है। इस पर 40 kN का भार धीरे-धीरे लगाया जाता है। यदि छड़ के पदार्थ के लिये $E = 1·8 \times 10^5$ N/mm^2 हो तो छड़ में एकत्रित हुई विकृति ऊर्जा (Stored Strain Energy) तथा छड़ की लम्बाई में परिवर्तन भी ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है, काट का क्षेत्रफल (area of section), $A = 20 \times 30$ mm^2

लम्बाई (length), $l = 2$ m ⇒ 2000 mm

भार (Load-Gradually) $W = 40$ kN $= 40 \times 1000$ N

यंग मापांक (प्रत्यास्थता गुणांक) $E = 1·8 \times 10^5$ N/mm^2

∴ एकत्र विकृति ऊर्जा (Stored strain energy), (प्रतिबल p या σ)

$U = \frac{\sigma^2}{2E} \times A \times l$ सूत्र में, $\sigma = \frac{W}{A} = \frac{40000}{20 \times 30}$

$$= \frac{(66·67)^2}{2 \times 1·8 \times 10^5} \times (20 \times 30) \times 2000 \qquad \sigma = 66·67 \text{ N/mm}^2$$

$= 14814·815$ N-mm

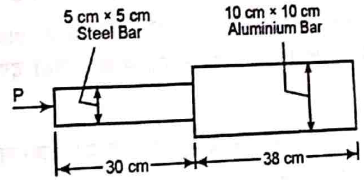
$= \mathbf{14·815}$ **N-m** उत्तर

अब लम्बाई में परिवर्तन,

$\Delta l = \frac{W \times l}{AE} = \frac{\sigma \times L}{E}$ सूत्र से,

$\Delta l = \frac{66·67 \times 2000}{1·8 \times 10^5} = 0·74078 = \mathbf{0·741}$ **mm** उत्तर

उदाहरण 3. चित्र 5.9 में दर्शायी छड़ पर धीरे-धीरे लगाये गये बल P का परिमाण ज्ञात कीजिये जिसके कारण अवयव की पूर्ण लम्बाई में 0·25 mm की कमी हो जाती है। इस्पात और एल्यूमीनियम के प्रत्यास्थता मापांक क्रमश: 210 GPa और 70 GPa हैं। बल 'P' द्वारा कुल कितना कार्य किया जायेगा? [उत्तर : 224·37 kN, 28·04 N-m]
(U.P. 2001; U.K. 2005)



चित्र 5.9

हल—छड़ की लम्बाई में कुल परिवर्तन

$\Delta l = \Delta l_{\text{Steel Bar}} + \Delta l_{\text{Al Bar}}$ $\qquad E_S = 210$ GPa $= 210 \times 1000$ N/mm^2

∴ $\Delta l = \frac{PL_S}{A_S E_S} + \frac{PL_{Al}}{A_{Al}E_{Al}}$ य $\qquad E_{Al} = 70$ GPa $= 70 \times 1000$ N/mm^2

या
$$0·25 = P\left[\frac{300}{(50 \times 50) \times (210 \times 1000)} + \frac{380}{(100 \times 100) \times (70 \times 1000)}\right]$$

$$= P \times [5·7143 \times 10^{-7} + 5·4286 \times 10^{-7}]$$

Scanned with CamScanner

$= P \times 1{\cdot}1143 \times 10^{-6}$

या $P = 224356{\cdot}098$ N

$= \mathbf{224{\cdot}36\ kN}$ उत्तर

अब धीरे-धीरे (Gradually) लगाये गये भार (P) द्वारा किया गया कार्य (Work Done)

$= \frac{P}{2} \times \Delta l$ सूत्र से

$= \frac{224{\cdot}36 \times 1000}{2} \times 0{\cdot}25$ N-mm

$= 28045$ N-mm

$= \mathbf{28{\cdot}045\ N\text{-}m}$ उत्तर

उदाहरण 4 (i). 2 m लम्बाई तथा 10 cm^2 अनुप्रस्थ काट (section) की एक छड़ पर 50 kN का एक आकस्मिक अक्षीय तनन बल (Suddenly applied axial tensile load) लगाया जाता है। यदि $E = 200$ GPa हो तो छड़ में संचित विकृति ऊर्जा (Stored Strain Energy or Resilience) ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2005; U.K. 20..)**

हल—आकस्मिक भार (suddenly load) के कारण प्रतिबल (stress) $= 2 \times \frac{W}{A}$ सूत्र होता है।

$\therefore$ $\sigma = 2 \times \frac{50 \times 1000}{10 \times 100} = 100\ N/mm^2$

$\therefore$ विकृति ऊर्जा (Resilience), $U = \frac{\sigma^2}{2E} \times A \times l$ सूत्र से

$U = \frac{(100)^2}{2 \times 2 \times 10^5} \times (10 \times 100) \times (2000)$

$= 50000$ N-mm $= \mathbf{50\ N\text{-}m}$ उत्तर

उदाहरण 4 (ii). किसी भाप इन्जन (steam engine) के पिस्टन का व्यास 250 mm है। 1·5 N/mm^2 के दाब पर सिलिण्डर में भाप एकदम प्रविष्ट की जाती है। यदि पिस्टन से जुड़ी पिस्टन दण्ड (piston rod) की लम्बाई 1500 mm तथा व्यास 65 mm हो तो पिस्टन दण्ड में अधिकतम प्रतिबल, लम्बाई में कमी तथा दण्ड पर किया गया कार्य ज्ञात कीजिये। $E = 2 \times 10^5\ N/mm^2$ है।

हल—पिस्टन पर बल, W = भाप का दाब × पिस्टन का क्षेत्रफल $= 1{\cdot}5 \times a$

परन्तु $a = \frac{\pi}{4} \times (250)^2\ mm^2 = 49062{\cdot}5\ mm^2$

इसलिए पिस्टन या पिस्टन दण्ड पर बल,

$W = 1{\cdot}5 \times 49062{\cdot}5 = 73593{\cdot}75$ N

क्योंकि यह बल पिस्टन दण्ड पर एकदम (आकस्मिक) लगता है इसलिये पिस्टन दण्ड में प्रतिबल (Stress)

$\sigma = \frac{2W}{A} = \frac{2 \times 73593{\cdot}75}{\frac{\pi}{4} \times (65)^2} = \mathbf{44{\cdot}4\ N/mm^2}$

पिस्टन छड़ की लम्बाई में कमी $\Delta l = \frac{F \times l}{AE} = \frac{\sigma \times l}{E}$

$\therefore$ लम्बाई में कमी, $\Delta l = \frac{\sigma}{E} \times l = \frac{44{\cdot}4 \times 1500}{2 \times 10^5} = \mathbf{0{\cdot}333\ mm}$ उत्तर

अब दण्ड पर किया गया कार्य = दण्ड में विकृति ऊर्जा

$= \frac{p^2}{2E} \times$ दण्ड का आयतन

$= \frac{(44{\cdot}4)^2}{2 \times 2 \times 10^5} \times \frac{\pi}{4} \times 65^2 \times 1500$

$\therefore$ दण्ड पर किया गया कार्य $= 24518{\cdot}48$ N-mm $= \mathbf{24{\cdot}52\ N\text{-}m}$ उत्तर

उदाहरण 5. एक मृदु इस्पात (Mild Steel) की छड़ जिसका व्यास 10 mm है तथा लम्बाई 2 m है, इसमें 5 kN का अक्षीय खिंचाव बल (Axial Pull) लग रहा है। यदि पदार्थ का प्रत्यास्थता मापांक (Young's Modulus) $E = 200 \times 10^3\ N/mm^2$ हो तब छड़ में उत्पन्न प्रति एकांक आयतन विकृति ऊर्जा (strain energy per unit volume) तथा छड़ में सम्पूर्ण विकृति ऊर्जा का मान ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2009)**

हल—छड़ की काट का क्षेत्रफल (area of section of Rod)

$A = \frac{\pi (10)^2}{4} = 78{\cdot}5\ mm^2$

लम्बाई $L = 2\ m = 2000$ mm

भार (Load) $W = 5\ kN = 5000$ N

Modulus of Elasticity $(E) = 2 \times 10^5\ N/mm^2$ तथा प्रतिबल (stress) $\sigma = \frac{W}{A}$

या $\sigma = \frac{5000}{78{\cdot}5} = 63{\cdot}69$

$\therefore$ प्रति इकाई आयतन विकृति ऊर्जा (Modulus of Resilience)

$U = \frac{\sigma^2}{2E} \times A \times L$ सूत्र में, आयतन $= A \times L = 1\ mm^3$

$\therefore$ $U = \frac{(63{\cdot}69)^2}{2 \times 2 \times 10^5} \times 1 = 0{\cdot}010141$ N-mm/mm^3

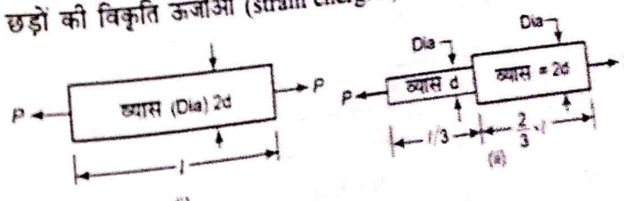
$= 1{\cdot}014 \times 10^{-2}$ N-mm/mm^3

सम्पूर्ण छड़ में कुल विकृति ऊर्जा (Total Resilience in Whole Rod)

$U = \frac{(63{\cdot}69)^2}{2 \times 2 \times 10^5} \times 78{\cdot}5 \times 2000 = \mathbf{1592{\cdot}1\ N\text{-}mm}$ उत्तर

उदाहरण 6. दो छड़ों पर, जो प्रत्येक l लम्बाई की है तथा एक ही पदार्थ की हैं, अक्षीय तनाव बल (Axial Pull) P को प्रत्येक छड़ पर लगाया जाता है। पहली छड़ का व्यास एक समान $2d$ है, दूसरी छड़ का व्यास $l/3$ लम्बाई तक d है तथा बाकी लम्बाई में $2d$ है। दोनों छड़ों की विकृति ऊर्जाओं (strain energies) की तुलना कीजिये। **(U.P. 2013)**

हल—



चित्र 5.10

चित्र (i) में छड़ की काट का क्षेत्रफल

$$A = \frac{\pi (2d)^2}{4} = \pi d^2$$

$\therefore$ प्रतिबल (stress), p या $\sigma = \frac{\text{भार } (W)}{\text{क्षेत्रफल } (A)} \Rightarrow \frac{P}{\pi d^2}$

$\therefore$ विकृति ऊर्जा (Strain Energy)

$U_1 = \frac{\sigma^2}{2E} \times A \times L$ सूत्र से,

$$= \frac{P^2}{\pi^2 d^4 \times 2E} \times \pi d^2 \times l = \frac{P^2 l}{2\pi d^2 E} \quad ...(i)$$

चित्र (ii) से,

लम्बाई में कुल परिवर्तन (Total change in length)

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 \quad \left[\because \Delta l = \frac{Fl}{AE} \text{ सूत्र होता है}\right]$$

$$= \frac{P \times \frac{l}{3}}{\frac{\pi (d)^2}{4} \times E} + \frac{P \times \frac{2}{3} l}{\frac{\pi (2d)^2}{4} \times E} = \frac{Pl}{\pi d^2 E}\left[\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right]$$

$$= \frac{2Pl}{\pi d^2 E}$$

$\therefore$ छड़ (ii) में विकृति ऊर्जा (Strain Energy) = छड़ पर किया गया कार्य

$$U_2 = \frac{P}{2} \times \Delta l \quad \text{[Gradually Loading में]}$$

$$= \frac{P}{2} \times \frac{2Pl}{\pi d^2 E} = \frac{P^2 l}{\pi d^2 E}$$

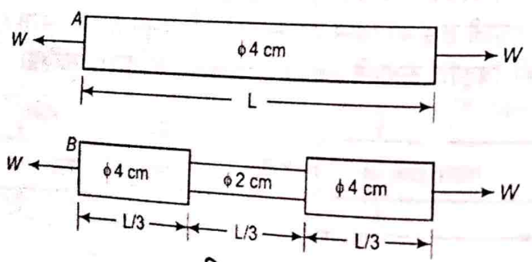
$\therefore$ तुलना, $\frac{U_1}{U_2} = \frac{P^2 l}{2\pi d^2 E} \times \frac{\pi d^2 E}{P^2 l} = \mathbf{\frac{1}{2}}$ **उत्तर**

उदाहरण 7. चित्र 5.11 में समान पदार्थ की दो छड़ें A तथा B दर्शाई गई हैं। छड़ A में विकृति-ऊर्जा की तुलना, छड़ B की विकृति ऊर्जा से कीजिये जबकि

(i) दोनों छड़ों पर एक-सा अक्षीय भार हो (Both Bars have same Axial Load)।

(ii) दोनों छड़ों में अधिकतम प्रतिबल एक-समान हो (have same Max Stress)। **[उत्तर : (i) $\frac{1}{2}$, (ii) $\frac{8}{1}$]**

(U.P.S. 2010)



चित्र 5.11

हल—Condition I—माना दोनों छड़ों पर एक-सा अक्षीय भार (Axial Load) W है।

$\therefore$ छड़ (A) में विकृति ऊर्जा, $U_A = \frac{W}{2} \times \Delta l$ (धीरे-धीरे भार लगाने में)

$$U_A = \frac{W}{2} \times \frac{W \times L}{\frac{\pi (4)^2}{4} \times E} = \frac{W^2 L}{8\pi E} \quad ...(I)$$

अब छड़ (B) में विकृति ऊर्जा, $(U_B) = \frac{W}{2}[\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3]$

$$\therefore \quad U_B = \frac{W}{2}\left[\frac{W \times \frac{L}{3}}{\frac{\pi(4)^2}{4} \times E} + \frac{W \times \frac{L}{3}}{\frac{\pi(2)^2}{4} \times E} + \frac{W \times \frac{L}{3}}{\frac{\pi(4)^2}{4} \times E}\right]$$

$$= \frac{W}{2} \times \frac{WL}{3\pi E}\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{W^2 L}{6\pi E} \times \left[\frac{1+4+1}{4}\right] = \frac{W^2 L}{4\pi E} \quad ...(II)$$

$\therefore$ तुलना $\frac{U_A}{U_B} = \frac{W^2 L}{8\pi E} \times \frac{4\pi E}{W^2 L} = \mathbf{\frac{1}{2}}$ **उत्तर**

Condition II—माना छड़ B के बीच के भाग में प्रतिबल p_2 (या σ_2) है तथा दोनों किनारों (ends) के भागों में प्रतिबल p_1 (या σ_1) है। (दोनों सिरों के आकार-sizes समान होने के कारण प्रतिबल समान होंगे।)

$\because$ प्रतिबल $p_2 > p_1$ होगा।

अब मोटे व पतले भागों में बल समान रखने पर,

$$p_1 A_1 = p_2 A_2$$

$$\therefore \quad p_1 = p_2 \times \frac{A_2}{A_1} = p_2 \times \frac{\frac{\pi (2)^2}{4}}{\frac{\pi (4)^2}{4}} = p_2 \times \frac{1}{4}$$

अब प्रश्नानुसार हमें अधिकतम प्रतिबल p_2 ही दोनों छड़ों में प्रयोग करने हैं।

$\therefore$ छड़ (A) में विकृति ऊर्जा, $U_A = \frac{p_2^2}{2E} \times \frac{\pi (4)^2}{4} \times L$

या $U_A = \frac{p_2^2}{2E} \times 4\pi L \quad ...(I)$

छड़ (B) में विकृति ऊर्जा, $U_B = 2U_1 + U_2$

$$U_B = 2 \times \frac{p_1^2}{2E} \times A_1 l_1 + \frac{p_2^2}{2E} \times A_2 \times l_2$$

$$= 2 \times \frac{\left(\frac{1}{4} p_2\right)^2}{2E} \times \frac{\pi(4)^2}{4} \times \frac{L}{3} + \frac{p_2^2}{2E} \times \frac{\pi(2)^2}{4} \times \frac{L}{3}$$

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

$$= 2 \times \frac{P_2^2}{16 \times 2E} \times 4\pi \times \frac{L}{3} + \frac{P_2^2}{2E} \times \pi \times \frac{L}{3}$$

$$= \frac{P_2^2}{2E} \times \frac{\pi L}{6} + \frac{P_2^2}{2E} \times \frac{\pi L}{3}$$

$$U_B = \frac{P_2^2}{2E}\left[\frac{3\pi L}{6}\right] = \frac{P_2^2}{2E} \times \left(\frac{\pi L}{2}\right)$$

$$\frac{U_A}{U_B} = \frac{P_2^2}{2E} \times 4\pi L \times \frac{2E}{P_2^2} \times \frac{2}{\pi L} = \frac{8}{1}$$

$\therefore$ $$\frac{U_A}{U_B} = \frac{8}{1} = \mathbf{8:1}$$

उदाहरण 8. समान लम्बाई की तीन छड़ों (3 Bars) के अनुप्रस्थ काटों के क्षेत्रफल 1 : 2 : 3 के अनुपात में है। निम्न स्थितियों (conditions) में विकृति ऊर्जाओं की तुलना (comparison) अर्थात् अनुपात (Ratio) ज्ञात कीजिये—

(i) जब तीनों छड़ों पर समान भार लगे हों। (acted upon equal loads)

(ii) जब तीनों छड़ों पर समान मान के प्रतिबल लगे हों। (Subjected to equal stresses)

हल—दी गई Ratio (अनुपात) के अनुसार तीनों छड़ों की काट के क्षेत्रफल क्रमशः A, $2A$ तथा $3A$ माना।

(i) समान भार (equal load) की स्थिति (condition) में छड़ों में उत्पन्न प्रतिबल (stress induced in the bars) निम्न होंगे—

$$\sigma_1 = \frac{W}{A}; \qquad \sigma_2 = \frac{W}{2A}; \qquad \sigma_3 = \frac{W}{3A}$$

अतः विकृति ऊर्जा, तीनों छड़ों में क्रमानुसार

$$U_1 = \frac{\sigma_1^2}{2E} \times A_1 l_1 = \frac{W^2}{A^2 . 2E} \times A \times l = \frac{W^2 l}{2AE}$$

$$U_2 = \frac{\sigma_2^2}{2E} \times A_2 l_2 = \frac{W^2}{4A^2 . 2E} \times 2A \times l = \frac{W^2 l}{4AE}$$

$$U_3 = \frac{\sigma_3^2}{2E} \times A_3 l_3 = \frac{W^2}{9A^2 . 2E} \times 3A \times l = \frac{W^2 l}{6AE}$$

$\therefore$ $$U_1 : U_2 : U_3 = \frac{W^2 l}{2AE} : \frac{W^2 l}{4AE} : \frac{W^2 l}{6AE}$$

$$= \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$$ उत्तर

(ii) समान प्रतिबल की स्थिति में (Under equal Stress Condition)

$$U_1 = \frac{\sigma^2}{2E} \times A \times l \text{ (यहाँ समान प्रतिबल } \sigma \text{ माना)}$$

$$U_2 = \frac{\sigma^2}{2E} \times (2A \times l) \quad \text{तथा} \quad U_3 = \frac{\sigma^2}{2E} \times (3A \times l)$$

$\therefore$ $$U_1 : U_2 : U_3 = \frac{\sigma^2}{2E} \times (Al) : \frac{\sigma^2}{2E} \times (2Al) : \frac{\sigma^2}{2E} \times (3Al)$$

$$= \mathbf{1:2:3}$$ उत्तर

उदाहरण 9. एक इस्पात छड़ (A steel bar) की आयताकार काट 50 mm × 30 mm तथा लम्बाई 1.5 m है। इस पर 150 kN का भार धीरे-धीरे (Gradually) लगाया गया है। छड़ में एकत्र विकृति ऊर्जा ज्ञात कीजिये। यदि छड़ के पदार्थ की प्रत्यास्थता की सीमा 160 N/mm^2 है तो प्रमाण विकृति ऊर्जा (Proof resilience) तथा विकृति ऊर्जा गुणांक (Modulus of resilience) ज्ञात कीजिये। $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 है।

हल—छड़ में तनाव प्रतिबल (Tensile stress induced in the bar)

$$\sigma = \frac{W}{A} = \frac{150 \times 1000}{50 \times 30} = 100 \text{ N/mm}^2$$

छड़ का आयतन (Volume), $$V = A \times l = 50 \times 30 \times 1.5 \times 1000$$

या $$V = 225 \times 10^4 \text{ mm}^3$$

$\therefore$ विकृति ऊर्जा (Strain Energy),

$$U = \frac{\sigma^2}{2E} \times (A \times l) \Rightarrow \frac{\sigma^2}{2E} \times \text{volume}$$

$$U = \frac{(100)^2}{2 \times 2 \times 10^5} \times (225 \times 10^4) = 56250 \text{ N-mm}$$

$$= \mathbf{56.25 \text{ N-m}}$$ उत्तर

अब प्रमाण विकृति ऊर्जा (Proof Resilience)

= दी गई प्रत्यास्थता की सीमा पर विकृति ऊर्जा

$$= \frac{\sigma_{max}^2}{2E} \times \text{Volume} \qquad [A \times l = \text{Volume रखा है}]$$

$$= \frac{(160)^2}{2 \times 2 \times 10^5} \times (225 \times 10^4)$$

$$= 144000 \text{ N-mm}$$

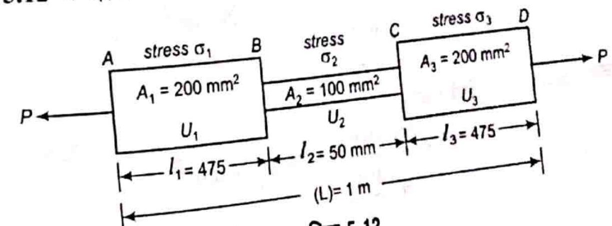
$$= \mathbf{144 \text{ N-m}}$$ उत्तर

तथा प्रमाण विकृति ऊर्जा गुणांक (Modulus of Resilience)

= Proof Resilience per unit volume

$$= \frac{(160)^2}{2 \times 2 \times 10^5} \times 1 = \mathbf{0.064 \text{ N/mm}^2}$$ उत्तर

उदाहरण 10. एक 1 m की छड़ को खींचने में उसमें अधिकतम उत्पन्न प्रतिबल 150 N/mm^2 है। काट का क्षेत्रफल तथा लम्बाइयाँ चित्र-5.12 में दर्शायी गयी हैं। छड़ में संचित विकृति ऊर्जा की गणना कीजिए यदि $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 है। **(U.P. 2010)**



चित्र 5.12

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

हल— छड़ की कुल लम्बाई = 1 m

$$E = 2\times10^5\ N/mm^2$$

अधिकतम प्रतिबल $\sigma = 150\ N/mm^2$ है जो कम क्षेत्रफल ($A_2 = 100\ mm^2$) वाले भाग में होगा।

अतः: 200 mm^2 वाले भाग में प्रतिबल

$$\sigma_2 = \frac{150}{2} = 75\ N/mm^2$$ (∵ इस भाग में क्षेत्रफल दुगुना है तो प्रतिबल आधा होगा)

यही प्रतिबल तीसरे भाग में भी होगा $\sigma_3 = 75\ N/mm^2$ (अतः: $\sigma_1 = \sigma_3 = 75\ N/mm^2$)

छड़ में संचित कुल विकृति ऊर्जा

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

$$= \frac{\sigma_1^2}{2E} A_1 l_1 + \frac{\sigma_2^2}{2E}\times A_2 l_2 + \frac{\sigma_3^2}{2E}\times A_3 l_3$$

$$= \frac{150^2}{2\times2\times10^5}\times100\times50 + \frac{75^2}{2\times2\times10^5}\times200\times475 + \frac{75^2}{2\times2\times10^5}\times200\times475$$

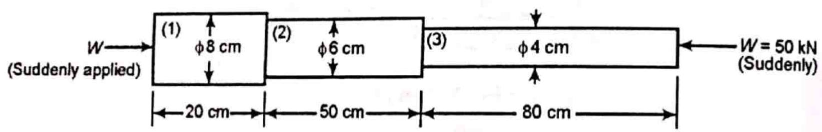
$$= 281.25 + 1335.9375 + 1335.9375$$

$$= 2953.125\ N\text{-}mm$$

$$= \mathbf{2.953\ N\text{-}m}$$ उत्तर

उदाहरण 11. चित्र 5.13 में दर्शाई एक सोपानित छड़ पर 50 kN का एक अक्षीय आकस्मिक सम्पीडन भार लगाया गया है, गणना कीजिये—

(i) छड़ की लम्बाई में कुल कमी, (ii) सम्पीडन में किया गया कार्य। $E = 200$ GPa



चित्र 5.13

[उत्तर : 0·4265 mm, 21·327 N-m]

हल—पहले भाग में प्रतिबल, $\sigma_1 = 2\times\frac{W}{Area}$ (सूत्र)

$$\sigma_1 = 2\times\frac{50\times1000}{\pi\frac{(80)^2}{4}} = 19.9\ N/mm^2$$

दूसरे भाग में प्रतिबल (Stress in second part)

$$\sigma_2 = 2\times\frac{50\times1000}{\pi\frac{(60)^2}{4}} = 35.33\ N/mm^2$$

तीसरे भाग में प्रतिबल (Stress in IIIrd Part)

$$\sigma_3 = 2\times\frac{50\times1000}{\pi\frac{(40)^2}{4}} = 79.62\ N/mm^2$$

(i) छड़ की लम्बाई में कुल कमी (Contraction in length)

$$\Delta l = \frac{\sigma_1 l_1}{E} + \frac{\sigma_2 l_2}{E} + \frac{\sigma_3 l_3}{E}$$

$$= \frac{1}{2\times10^5}\times[(19.9\times200) + (35.38\times500) + (79.62\times800)]$$

$$= \mathbf{0.42683\ mm}$$ उत्तर

(ii) सम्पीडन में किया गया कार्य (Work Done)

$$= W\times\Delta l$$ [यहाँ $W = 50$ kN = = 50×1000 N]

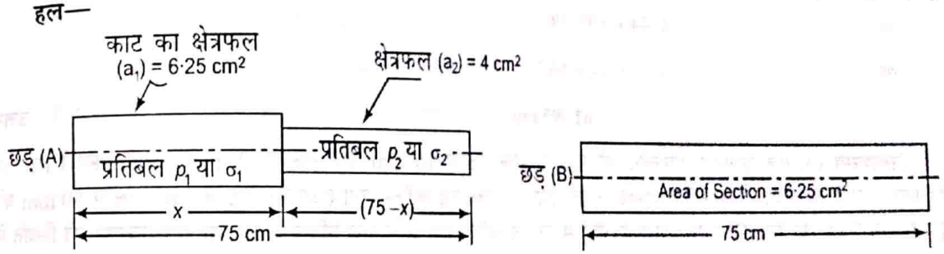
$$= 50000\times0.42683$$

$$= 21341.5\ N\text{-}mm$$

$$= \mathbf{21.34\ N\text{-}m}$$ उत्तर

उदाहरण 12. 75 cm लम्बी छड़ की लम्बाई के एक भाग का क्षेत्रफल 6·25 cm^2 तथा शेष लम्बाई का क्षेत्रफल 4 cm^2 है। इस सोपानित छड़ की विकृति ऊर्जा, समान अधिकतम प्रतिबल में 75 cm लम्बी 6·25 cm^2 क्षेत्रफल वाली छड़ की 45% है। छड़ के 6·25 cm^2 भाग की लम्बाई ज्ञात कीजिये। (उत्तर : 61·85 cm) (U.P. 2003, S)

हल—



चित्र 5.14

प्रश्न में दिया है, $U_A = 45\%$ of U_B

∵ छड़ A के दोनों भागों पर अक्षीय बल (axial force) समान लगेंगे।

∴ $\sigma_1\times a_1 = \sigma_2\times a_2$ (यहाँ प्रतिबल $\sigma_2 > \sigma_1$ होगा)

हमें दोनों छड़ों A तथा B में अधिकतम प्रतिबल (σ_2) प्रयोग करने होंगे क्योंकि प्रश्न में condition दी गई है।

∴ $$\sigma_1 = \frac{a_2}{a_1}\times\sigma_2$$

$$= \frac{4}{6.25}\times\sigma_2 = 0.64\times\sigma_2$$

∴ $$\sigma_1 = 0.64\times\sigma_2$$

अब छड़ A में विकृति ऊर्जा (Strain Energy),

$$U_A = U_1 + U_2$$

$$U_B = \frac{\sigma_1^2}{2E}\times a_1\times l_1 + \frac{\sigma_2^2}{2E}\times a_2\times l_2$$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{(0\cdot64)^2 \times \sigma_2^2}{2E} \times 6\cdot25 \times x + \frac{\sigma_2^2}{2E} \times 4 \times (75 - x)$$

$$= \frac{\sigma_2^2}{2E}[2\cdot56x + 300 - 4x]$$

$$\therefore \quad U_A = \frac{\sigma_2^2}{2E}[300 - 1\cdot44x] \quad \ldots(I)$$

छड़ (B) में अधिकतम प्रतिबल (σ_2) प्रयोग करके विकृति ऊर्जा

$$U_B = \frac{\sigma_2^2}{2E} \times 6\cdot25 \times 75 = \frac{\sigma_2^2}{2E} \times 468\cdot75 \quad \ldots(II)$$

अब प्रश्न के प्रतिबन्ध के अनुसार, $U_A = \frac{45}{100} \times U_B$ होगा।

$$\frac{\sigma_2^2}{2E}[300 - 1\cdot44x] = 0\cdot45 \times \frac{\sigma_2^2}{2E} \times 468\cdot75$$

$\therefore \quad 300 - 1\cdot44x = 210\cdot94$

या $\quad 1\cdot44x = 89\cdot06$

या $\quad x = 61\cdot847$

$= \mathbf{61\cdot85\ cm}$ उत्तर

उदाहरण 13. एक वृत्ताकार परिच्छेद की छड़, जिसका व्यास 10 mm तथा लम्बाई 2 m है, अपने ऊपरी सिरे पर दृढ़तापूर्वक बद्ध ऊर्ध्वाधर लटक रही है। इसके निचले सिरे पर एक दृढ़ कॉलर बना हुआ है। छड़ के सह अक्षीय 50 mm की दूरी से एक 5 kN का भार कॉलर पर गिरता है, छड़ में उत्पन्न अधिकतम अभिलम्ब प्रतिबल का तथा साम्यावस्था की स्थिति में छड़ द्वारा संचित विकृति-ऊर्जा का मान ज्ञात कीजिए। Take, $E = 2 \times 10^5\ N/mm^2$. **(U.P. 2005)**

[उत्तर : $864\cdot06\ N/mm^2, 159\cdot15\ N\text{-}m$**]**

हल—प्रश्न में दिया है,

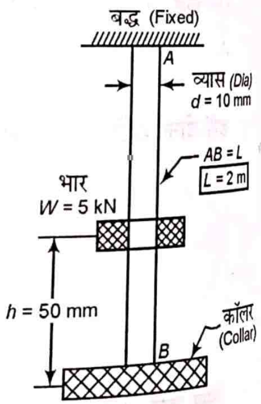
छड़ का व्यास (Dia of Rod) $\quad d = 10\ mm$

छड़ की लम्बाई $\quad (L) = 2000\ mm$

कॉलर पर गिरने वाला भार (Impact Load)

$$W = 5\ kN = 5000\ N$$

भार (W) गिराने की ऊँचाई $\quad h = 50\ mm$



चित्र 5.15

हम जानते हैं कि इस प्रकार के प्रश्नों में संघट्ट भार (Impact Load) के कारण उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल (Stress) $\sigma = \frac{W}{A}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EAh}{Wl}}\right]$ सूत्र होता है।

$$\therefore \quad \sigma = \frac{5000 \times 4}{\pi(10)^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 2 \times 10^5 \times \frac{\pi(10)^2}{4} \times 50}{5000 \times 2000}}\right]$$

$\therefore$ प्रतिबल $\quad (\sigma) = \frac{200}{\pi} \times 13\cdot5698 = 864\cdot32\ N/mm^2$ उत्तर

अब संचित विकृति ऊर्जा (Stored Strain Energy)

$$U = \frac{\sigma^2}{2E} A \times L \quad \text{(सूत्र)}$$

$$= \frac{(864\cdot32)^2}{2 \times 2 \times 10^5} \times \frac{\pi(10)^2}{4} \times 2000$$

$$= 293216\cdot757\ N\text{-}mm$$

$$= \mathbf{293\cdot216\ N\text{-}m}$$ उत्तर

उदाहरण 14. एक छड़ पर, जिसका आन्तरिक व्यास (inner dia) 12 मिमी तथा बाह्य व्यास (outer dia) 20 मिमी है 8 kN के अक्षीय स्थिर भार (Axial constant load) लगने से 3 मिमी तानित (Extend) होती है। यदि इस छड़ के निचले सिरे पर बने कॉलर पर एक 80 किग्रा का पिंड 80 मिमी की ऊँचाई से गिराया जाता है तब इसमें अधिकतम कितना प्रतिबल उत्पन्न होगा जबकि यह आरम्भ में प्रतिबल रहित अवस्था में हो। $E = 200\ kN/mm^2$

[उत्तर : $95\ N/mm^2$**]** **(U.P. 2004)**

हल—प्रश्न में दिया है कि, # Youtube-Polytechnic study with Atul

छड़ का अन्त:व्यास (internal dia),

$$d = 12\ mm$$

छड़ का बाह्य व्यास (outer dia), $\quad D = 20\ mm$

$\therefore$ छड़ की काट का क्षेत्रफल (area of section)

$$A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$$

$$A = \frac{\pi(20^2 - 12^2)}{4} = 64\pi = 200\cdot96\ mm^2$$

दिया है, $\quad \Delta l = 3\ mm,$

अक्षीय भार (Axial load), $\quad F = 8\ kN$

$\therefore \quad \Delta l = \frac{FL}{AE}$ सूत्र से,

मूल लम्बाई (Original length), $\quad L = \frac{\Delta l \times A \times E}{F} = \frac{3 \times 200\cdot96 \times 2 \times 10^5}{8 \times 1000}$

या $\quad L = 15072\ mm$

$\because$ छड़ के कॉलर पर गिरने वाला भार

$$W = 80\ kg = 800\ N$$

संघट्ट भार (Impact Load) के गिरने की ऊँचाई, $h = 80\ mm$ तथा $E = 200\ kN/mm^2$ है।

अत: छड़ में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल (max. stress)

$$\sigma \text{ या } p = \frac{W}{A}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2AEh}{WL}}\right] \text{ सूत्र से}$$

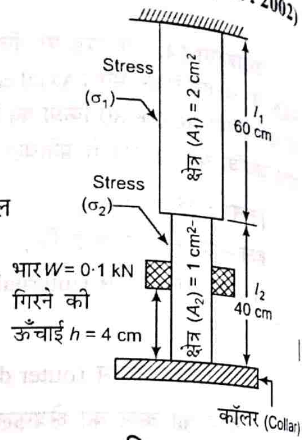
Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

$$= \frac{800}{200 \cdot 96}\left[1+\sqrt{1+\frac{2\times 200\cdot 96\times 2\times 10^5\times 80}{800\times 15072}}\right]$$

$$\sigma_{max} = 96 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

उदाहरण 15. एक मीटर (1 m) लम्बी एक ऊर्ध्वाधर छड़ (Vertical Rod/Bar) की 60 cm लम्बाई तक काट का क्षेत्रफल (cross-sectional area) 2 cm^2 है तथा शेष लम्बाई का क्षेत्रफल 1 cm^2 है। छड़ का ऊपरी सिरा दृढ़ता से आबद्ध (Fixed) है और 0·1 kN का भार छड़ के निचले सिरे पर दृढ़ आबद्ध (Fixed) कॉलर पर 4 cm की ऊँचाई से गिरता है। छड़ में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये। $E = 200$ GPa मानिये। **(U.P. 2002)**



चित्र 15.16

हल—∵ क्षेत्रफल (area) $A_1 = 2 \text{ cm}^2$

$= 2 \times 100 \text{ mm}^2$

तथा क्षेत्रफल (area) $A_2 = 1 \text{ cm}^2$

$= 1 \times 100 \text{ mm}^2$

माना ऊपर वाले भाग में प्रतिबल (stress) σ_1 है तथा निचले वाले भाग में प्रतिबल σ_2 है।

∵ दोनों भागों में खिंचाव बराबर होगा।

$$\sigma_1 \times A_1 = \sigma_2 \times A_2$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 \times \frac{A_2}{A_1} = \sigma_2 \times \frac{100}{200}$$

$\sigma_1 = 0\cdot 5 \times \sigma_2$ यहाँ $\sigma_2 > \sigma_1$ होगा।

(पतले भागों में σ अधिक होता है)

∴ छड़ में कुल विकृति ऊर्जा $(U_1 + U_2)$ = भार गिरने से किया गया कार्य

$$\frac{\sigma_1^2}{2E} \times A_1 \times l_1 + \frac{\sigma_2^2}{2E} \times A_2 \times l_2 = W(h + \Delta l)$$

$$\left[\frac{(0\cdot 5)^2 \sigma_2^2}{2E} \times 200 \times 600 + \frac{\sigma_2^2}{2E} \times 100 \times 400\right] = 100 \times (40 + 0)$$

$$\sigma_2^2\left[\frac{0\cdot 25}{2\times 2\times 10^5} \times 120000 + \frac{40000}{2\times 2\times 10^5}\right] = 4000$$

$$\sigma_2^2 = \frac{4000}{0\cdot 175} = 22857\cdot 143$$

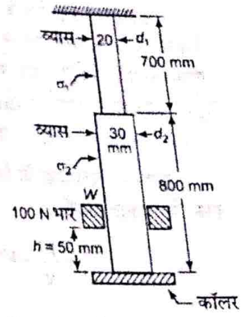
प्रतिबल $\sigma_2 = 151\cdot 1858 \text{ N/mm}^2$

$\sigma_2 = 151\cdot 2 \text{ N/mm}^2$

उदाहरण 16. इस्पात की छड़ की लम्बाई 1500 mm है तथा ऊपरी सिरे से यह लटकी है। ऊपरी सिरे से 700 mm लम्बाई तक इसका व्यास 20 mm तथा शेष 800 mm लम्बाई का व्यास 30 mm है। छड़ के निचले सिरे पर एक रोक (stop) लगी है जो कि 100 N के भार को 50 mm ऊँचाई से गिरने के पश्चात् रोक लेती है। यदि $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 तो छड़ के दोनों भागों में अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये। भार की स्थितिज ऊर्जा (static energy) में छड़ की लम्बाई में वृद्धि को नगण्य (negligible) मानिये।

हल—भार द्वारा किया गया कार्य अपनी स्थितिज ऊर्जा (static energy) देने पर

$$= W(h + \Delta l) = Wh = 100 \times 50 = 5 \times 10^3 \text{ N-mm}$$



चित्र 5.17

अब, $A_1 = \frac{\pi}{4} \times 20^2 = 314 \text{ mm}^2$ तथा $l_1 = 700$ mm

फिर $A_2 = \frac{\pi}{4} \times 30^2 = 706 \text{ mm}^2$ तथा $l_2 = 800$ mm

माना कि ऊपर वाले हिस्से में प्रतिबल σ_1 तथा निचले हिस्से में प्रतिबल σ_2 है।

तब, $\sigma_1 \times A_1 = \sigma_2 \times A_2$

या $$\sigma_1 = \sigma_2 \times \frac{A_2}{A_1} = \sigma_2 \times \frac{d_2^2}{d_1^2} = \sigma_2 \times \frac{30^2}{20^2} = 2\cdot 25 \times \sigma_2$$

छड़ द्वारा ग्रहण की गई ऊर्जा (विकृति ऊर्जा के रूप में)

$= U_1 + U_2$ = ऊपरी हिस्से की विकृति ऊर्जा + निचले हिस्से की विकृति ऊर्जा

$$= \frac{\sigma_1^2}{2E} \times A_1 \times l_1 + \frac{\sigma_2^2}{2E} \times A_2 \times l_2 \qquad \left[\because U = \frac{p^2}{2E} \times A \times l \text{ सूत्र}\right]$$

$$= \frac{(2\cdot 25\,\sigma_2)^2}{2E} \times A_1 l_1 + \frac{\sigma_2^2}{2E} \times A_2 l_2$$

$$= \frac{\sigma_2^2}{2E}[(2\cdot 25)^2 \times 314 \times 700 + 706 \times 800] = \sigma_2^2 \times 4\cdot 195$$

∴ $\sigma_2^2 \times 4\cdot 195$ = भार द्वारा दी गई ऊर्जा $= 5 \times 10^3$ (कार्य द्वारा दी गई स्थैतिक ऊर्जा)

∴ $\sigma_2^2 = 11\cdot 92 \times 10^2$

अतः $\boldsymbol{\sigma_2 = 34\cdot 5 \text{ N/mm}^2}$

तथा $\sigma_1 = 2\cdot 25 \times \sigma_2 = 2\cdot 25 \times 34\cdot 5 = \mathbf{77\cdot 625 \text{ N/mm}^2}$ उत्तर

उदाहरण 17. एक स्टील के तार के रस्से (Rope) के सिरे से जुड़ा 500 N का भार 1 m/s के समान वेग से नीचे उतरता है। जब रस्से का ऊपरी सिरा एकाएक (अचानक ⇒ suddenly) रोक दिया जाता है तो उसमें कौन से प्रतिबल (stress) उत्पन्न होते हैं? संघट्ट के समय रस्से की मुक्त लम्बाई (Free length) 20 metre, अनुप्रस्थ काट (cross-section) 10 cm^2 (या 1000 mm^2) तथा $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 है। **(U.P. 2008, S)**

हल—भार की गतिज ऊर्जा (Kinetic Energy) = रस्से को अचानक रोकने पर रस्से में उत्पन्न विकृति ऊर्जा होगी।

नोट—[ऊर्जा नष्ट नहीं होती बल्कि एक ऊर्जा, दूसरी ऊर्जा में परिवर्तित हो जाती है]

∴ $$\frac{1}{2} \times \frac{W}{g} V^2 \times 1000 \text{ (N-mm में)} = \frac{\sigma^2}{2E} \times A \times l \text{ (N-mm में)}$$

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

या
$$\frac{1}{2}\times\frac{500}{9\cdot 81}\times(1)^2\times 1000=\frac{\sigma^2}{2\times 2\times 10^5}\times(1000)\times(20\times 1000)$$

या

प्रतिबल^2 (Stress)^2 $\sigma^2 = 509\cdot 684$ या $\sigma = \mathbf{22\cdot 576\ N/mm^2}$

रस्से में यह प्रतिबल तनाव (Tensile) में होगा। उत्तर

उदाहरण 18. रेल के एक डिब्बे (Wagon) का भार 50 kN है और यह तार के रस्से (wire-rope) से बँधा है। डिब्बा स्वतन्त्र रूप से किसी ढलान (Slope) पर 2m/second के समान वेग से चलता है। अब रस्से को अचानक (suddenly) रोक दिया जाता है जबकि रस्से की लम्बाई 200 m खुली होती है। यदि रस्से की काट का क्षेत्रफल 10 cm^2 है तो रस्से में उत्पन्न हुआ अधिकतम प्रतिबल (max. stress) तथा रस्से की लम्बाई में वृद्धि (change in length in tension) ज्ञात कीजिये। $E = 2\cdot 2\times 10^5\ N/mm^2$ तथा $g = 9\cdot 81\ m/s^2$ लीजिये।

हल—∵ रेलगाड़ी के डिब्बे (Railway Wagon) की गतिज ऊर्जा (Kinetic Energy) = रस्से को अचानक रोकने पर रस्से में विकृति ऊर्जा

∴
$$\frac{1}{2}\times\frac{W}{g}\times V^2\times 1000 \text{ (N-mm में)} = \frac{\sigma^2}{2E}\times A\times l \quad \text{सूत्र से}$$

या
$$\frac{1}{2}\times\frac{50\times 1000}{9\cdot 81}\times(2)^2\times 1000=\frac{\sigma^2}{2\times 2\cdot 2\times 10^5}\times(10\times 100)\times(200\times 1000)$$

या
$$\sigma^2 = 22426\cdot 096$$

या
$$\sigma = 149\cdot 75\ N/mm^2$$

∴ रस्से में उत्पन्न तनाव प्रतिबल, $\sigma = \mathbf{149\cdot 75\ N/mm^2}$ उत्तर

तथा रस्से की लम्बाई में वृद्धि (Extension in rope) Δl हो तो

$$\Delta l = \frac{F\times l}{AE} \Rightarrow \frac{\sigma\times l}{E} \quad \text{सूत्र से}$$

$$\Delta l = \frac{149\cdot 75\times 200\times 1000}{2\cdot 2\times 10^5} = 136\cdot 1 \simeq 136\ mm$$ उत्तर

उदाहरण 19. समान काट वाली L लम्बाई की एक शुद्धावलम्बी धरन के मध्य-बिन्दु पर h ऊँचाई से M kg द्रव्यमान का पिण्ड गिरता है। धरन के लिये आनमनी दृढ़ता (flexible rigidity) EI है। निकाय के लिए संघट्ट गुणांक ज्ञात कीजिये। (U.P. 2003)

हल—आघात या संघट्ट गुणांक (Shock or Impact Factor)

$$= \frac{P}{W} = 1+\sqrt{\left[1+\frac{2Ch}{W}\right]} \quad \text{(सूत्र)}$$

यहाँ धरन के मध्य में स्थैतिक भार W के संघट्टन के कारण प्रभावी गतिक भार P कार्यरत है। अत: धरन में विक्षेप के सूत्र से,

धरन के मध्य में अधिकतम विस्थापन, $\delta = \frac{WL^3}{48EI}$

∴ निकाय का स्थिरांक, $C = \frac{W}{\delta} = \frac{48EI}{L^3}$

अब स्थैतिक भार, $W = Mg$ (यहाँ g = गुरुत्वीय त्वरण)

∴ संघट्ट गुणांक, $\frac{P}{W} = 1+\sqrt{\left[1+\frac{2\times 48\ EI}{MgL^3}\times h\right]}$

∴ संघट्ट गुणांक, $\frac{P}{W} = 1+\sqrt{\left[1+\frac{96\ EIh}{Mg\ L^3}\right]}$ उत्तर

उदाहरण 20. यदि निकाय में इस्पात की एक छड़ की लम्बाई 1200 mm तथा व्यास 15 mm है और इसके निचले सिरे पर एक 5 kg का द्रव्यमान 1 m से स्वतन्त्र गिरकर कॉलर से टकराता है तो छड़ में उपजे अधिकतम प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये। इसी निकाय में यदि यही द्रव्यमान कॉलर पर लगे एक रबर वाशर से टकराये तब छड़ में उपजे प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये। वाशर के लिये $C = 4\cdot 5$ N/mm तथा इस्पात के लिए $E = 200$ GPa मानिये।

हल—छड़ का अनुप्रस्थ क्षेत्रफल, $A = \frac{\pi}{4}15^2 = 176\cdot 7\ mm^2$

5 kg द्रव्यमान का स्थैतिक भार, $W = 5\times 9\cdot 81\times 49\cdot 05$ N

$E = 200$ GPa $= 200\times 10^3$ N/mm^2,

तथा $h = 1$ m $= 100$ mm

बिना वाशर की स्थिति :

छड़ में उपजा अधिकतम प्रतिबल (Impact Load द्वारा)

$$\sigma_1 = \frac{W}{A}\left[1+\sqrt{1+\frac{2\ EhA}{Wl}}\right]$$

$$= \frac{49\cdot 05}{176\cdot 7}\left[1+\sqrt{1+\frac{2\times 200\times 10^3\times 1000\times 176\cdot 7}{49\cdot 05\times 1200}}\right]$$

$$= 0\cdot 277\,[1+1\cdot 095\times 10^3]$$ ∴ $p_1 = \mathbf{303\cdot 59\ N/mm^2}$

वाशर लगा होने की स्थिति (वाशर को महत्व दिया जाता है) :

$C = \frac{W}{\delta} = 4\cdot 5$ N/mm (स्थिरांक C = stiffness)

छड़ पर गतिक बल, $P = W\left[1+\sqrt{1+\frac{2Ch}{W}}\right]$

∴ छड़ में उपजा अधिकतम प्रतिबल, $\sigma_2 = \frac{P}{A} = \frac{W}{A}\left[1+\sqrt{1+\frac{2Ch}{W}}\right]$

$$= \frac{49\cdot 05}{176\cdot 7}\left[1+\sqrt{1+\frac{2\times 4\cdot 5\times 1000}{49\cdot 05}}\right]$$

∴ $\sigma_2 = \mathbf{4\cdot 039\ N/mm^2}$ उत्तर

उदाहरण 21. 3 m लम्बी तथा 6 cm^2 काट की ऊर्ध्वाधर छड़ के निचले सिरे पर लगे दृढ़ कॉलर (collar) पर एक अज्ञात भार 10 mm की ऊँचाई से गिरता है। यदि अधिकतम तात्क्षणिक लम्बाई में वृद्धि 2 mm हो जाती है तो संगत प्रतिबल (corresponding stress) कितना होगा तथा अज्ञात भार का मान क्या होगा? $E = 200$ GPa है। (U.P.)

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

हल—छड़ की लम्बाई में वृद्धि,

$$\Delta l = \frac{\sigma \times l}{E}$$

अतः छड़ में प्रतिबल (Stress),

$$\sigma = \frac{\Delta l \times E}{l} = \frac{2\times10^{-3}\times200\times10^{9}}{3}$$

$$= \mathbf{133 \cdot 333\ MPa}$$

माना कि अज्ञात भार W न्यूटन है तब हम जानते हैं कि संघट्टन भार की दशा में,

भार द्वारा किया कार्य = विकृति ऊर्जा

$$W(h+\Delta l) = \frac{\sigma^2}{2E}\times A\times l$$

अतः

$$W = \frac{\sigma^2\times A\times l}{2E\,(h+\Delta l)} = \frac{(133\cdot333\times10^6)^2\times6\times10^{-4}\times3}{2\times200\times10^9\times(10\times10^{-3}+2\times10^{-3})}$$

$$= 6666\cdot6\ \text{N} = \mathbf{6\cdot6666\ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 22. एक वस्तु में किसी स्थान पर कर्तन प्रतिबल (shear stress) का मान 75 N/mm² है। यदि पदार्थ के लिये अपरूपण या दृढ़ता गुणांक (modulus of rigidity) का मान $G = 24$ GPa है तो वस्तु में उस स्थान पर विकृति ऊर्जा (strain energy) ज्ञात कीजिये।

हल—हम जानते हैं कि

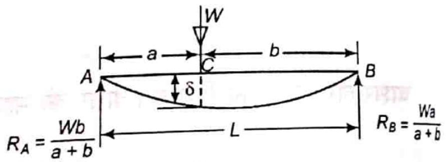
$$75\ \text{N/mm}^2 = 75\ \text{MN/m}^2 = 75\times10^6\ \text{N/m}^2$$

यदि पदार्थ में कर्तन प्रतिबल = q

तब हम जानते हैं कि पदार्थ के प्रति इकाई आयतन में विकृति ऊर्जा

$$= \frac{q^2}{2G} = \frac{(75\times10^6)^2}{2\times24\times10^9} = \mathbf{0\cdot117\ N\text{-}m/m^3}$$ उत्तर

उदाहरण 23. एक सामान्य रूप से आलम्बित धरन की लम्बाई l है तथा इस पर संकेन्द्रित उद्भार W लगा है तथा इस भार की दूरियाँ दोनों सिरों से a तथा b हैं। धरन की सम्पूर्ण विकृति ऊर्जा तथा भार के नीचे विक्षेप के सूत्रों को ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2000)**



चित्र 5.18

हल—भार W की स्थिति चित्र 5.18 में दिखाई गयी है।

A तथा B पर प्रतिक्रियायें क्रमशः $\frac{Wb}{a+b}$ तथा $\frac{Wa}{a+b}$ हैं।

अब धरन के BC भाग के लिए विकृति ऊर्जा

$$U_1 = \frac{1}{2EI}\int_0^b M^2dx = \frac{1}{2IE}\int_0^b\left[\frac{Wa}{(a+b)}x\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2EI}\times\frac{W^2a^2}{(a+b)^2}\int_0^b x^2\,dx$$

$$U_1 = \frac{W^2a^2b^3}{6EIL^2} \qquad \ldots(I)$$

इसी प्रकार धरन के भाग AC के लिए विकृति ऊर्जा,

$$U_2 = \frac{W^2b^2a^3}{6EIL^2} \qquad \ldots(II)$$

अब धरन की कुल विकृति ऊर्जा,

$$U = U_1 + U_2$$

$$= \frac{W^2a^2b^3}{6EIL^2} + \frac{W^2b^2a^3}{6EIL^2} = \frac{W^2a^2b^2}{6EIL^2}\times L$$

$$\therefore\quad U = \frac{W^2a^2b^2}{6EIL}$$ उत्तर

माना कि भार के नीचे धरन का विक्षेप δ है, तब भार W द्वारा किया गया कार्य,

$$= \frac{1}{2}\cdot W\cdot\delta$$ (भार धीरे-धीरे लगाने की दशा में)

∴ यह कार्य विकृति ऊर्जा के बराबर होना चाहिये,

अतः

$$\frac{1}{2}W\delta = U = \frac{W^2a^2b^2}{6EIL}$$

$$\boxed{\delta = \frac{Wa^2b^2}{3EIL}}$$ उत्तर

उदाहरण 24. एक आयताकार परिच्छेद (Rectangular Section) 30 mm × 50 mm की प्रास धरन (cantilever beam) 3 m लम्बी है। इसके मुक्त सिरे (Free end) पर एक 10 kN का भार लगाया गया है। धरन में संचित विकृति ऊर्जा (Stored Strain Energy) ज्ञात कीजिये। धरन के पदार्थ का $E = 200$ GPa है। **(U.P. 2000)**

हल—दिया है, काट का जड़त्व आघूर्ण $(I) = \frac{b\times h^3}{12} = \frac{30\times(50)^3}{12} = 312500\ \text{mm}^4$

Cantilever की लम्बाई $(L) = 3\ \text{m} = 3000\ \text{mm}$

Cantilever के मुक्त सिरे पर भार $W = 10\ \text{kN} = 10\times1000\ \text{N}$

यंग मापांक (Modulus of Elasticity) $E = 200\ \text{GPa}$

$$= 2\times10^5\ \text{N/mm}^2$$

अब विकृति ऊर्जा (Resilience) $U = \frac{W^2L^3}{6EI}$ सूत्र से

$$U = \frac{(10000)^2\times(3000)^3}{6\times2\times10^5\times\frac{30\times(50)^3}{12}}$$

$$= 7200000\ \text{N-mm} = \mathbf{7\cdot2\ kN\text{-}m}$$ उत्तर

उदाहरण 25. एक 2 m लम्बे कैन्टीलीवर पर 5 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। यदि कैन्टीलीवर की काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) $720\times10^3\ \text{mm}^4$ है तथा यंग मापांक (Young's Modulus) $E = 200$ GPa (2×10^5 N/mm²) तो एकत्रित हुई विकृति ऊर्जा (Stored Strain Energy) ज्ञात कीजिये।

हल—Cantilever पर U.D.L. लगा होने पर सूत्र

$$U = \frac{W^2L^3}{40EI}$$ में W = U.D.L. का कुल भार $= 5\times2 = 10$ kN

∴ अब विकृति ऊर्जा (Strain Energy/Resilience)

$$U = \frac{(10\times1000)^2\times(2000)^3}{40\times2\times10^5\times720\times10^3} = 138888\cdot889\ \text{N-mm}$$

$$= \mathbf{138\cdot89\ N\text{-}m}$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

उदाहरण 26. एक सरल आलम्बित धरन (simply supported beam) का विस्तार (span) 2 metre है। इसके मध्य में (at middle) 2 kN का बिन्दु भार (Point Load) लगा है। यदि धरन की काट की चौड़ाई 20 mm तथा गहराई 40 mm है तो एकत्र विकृति ऊर्जा (Strain Energy) ज्ञात कीजिये। $E = 200$ GPa है।

हल—एक शुद्धालम्बित धरन के मध्य में (at middle) एक संकेन्द्रित भार (concentrated Load) लगा होने पर विकृति ऊर्जा, $U = \dfrac{W^2 L^3}{96\,EI}$ (सूत्र)

$$\therefore \quad U = \frac{(2000)^2 \times (2000)^3}{96 \times 2 \times 10^5 \times \dfrac{20 \times (40)^3}{12}} = 15625 \text{ N-mm}$$

$$= \mathbf{15{\cdot}625 \text{ N-m}}$$ उत्तर

उदाहरण 27. 100 mm व्यास के एक PLUNGER पर 6 N/mm² के दाब पर पानी एकदम (suddenly) खोला जाता है। Plunger एक 30 mm व्यास तथा 10 m लम्बी एक छड़ से जुड़ा है। छड़ में अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये। छड़ के लिये $E = 2 \times 10^5$ N/mm² है।

हल—दिया है, $D = 100$ mm

$\therefore$ क्षेत्रफल $(A) = \dfrac{\pi D^2}{4} = \dfrac{\pi (100)^2}{4}$

$\therefore$ Plunger का क्षेत्रफल $(A) = 2500\,\pi$ mm²

अब Plunger पर दाब का बल या भार, $W =$ दाब $\times$ क्षेत्रफल

$= 6 \times 2500\,\pi = 15000\,\pi$ न्यूटन

चित्र 5.19

यही बल या भार छड़ पर भी कार्य करेगा जो suddenly होगा।

$\therefore$ आकस्मिक भार (suddenly Load) के कारण प्रतिबल (Stress)

$$\sigma = 2 \times \frac{W}{A_{Rod}} = 2 \times \frac{15000\,\pi}{\pi \dfrac{(30)^2}{4}} = \mathbf{133{\cdot}33 \text{ N/mm}^2}$$ उत्तर

उदाहरण 28. किसी छड़ की लम्बाई 1·5 m है तथा इसकी काट का क्षेत्रफल 2400 mm² है। कितनी आकस्मिक ऊर्जा (shock Energy) से इसमें 100 N/mm² (100 MPa) का प्रतिबल (stress) पैदा हो जायेगा? $E = 1{\cdot}8 \times 10^5$ N/mm² लें।

हल—$\because$ आकस्मिक ऊर्जा (Shock Energy) में

$$\sigma = 2 \times \frac{W}{A} \text{ (सूत्र)}$$

$\therefore$ $100 = 2 \times \dfrac{W}{2400}$ या $W = 120000$ N बल का भार

$\therefore$ Shock Energy, $U = W \times \Delta l$ सूत्र (कार्य से ऊर्जा)

$$U = 120000 \times \frac{\sigma \times l}{E} = 120000 \times \frac{100 \times 1500}{1{\cdot}8 \times 10^5}$$

या $U = 100000$ N-mm

$= \mathbf{100 \text{ N-m}}$ उत्तर

उदाहरण 29. एक मिमी मोटी तथा 5 मिमी चौड़ी इस्पात की एक पट्टी 10 सेमी व्यास के सिलिण्डर पर लपेटी जाती है। यदि इस्पात के लिये $E = 2 \times 10^5$ N/mm² हो तो पट्टी में एकत्रित विकृति ऊर्जा प्रति मीटर लम्बाई में ज्ञात करिये।

हल—विकृति ऊर्जा, $U = \dfrac{M^2 L}{2EI}$ सूत्र द्वारा

यहाँ यह मान सकते हैं कि पट्टी पर एक-समान नमन घूर्ण (Bending Moment) लगाकर उसे लपेटा जाता है।

फिर $\dfrac{M}{I} = \dfrac{E}{R}$ से $M = \dfrac{EI}{R}$

$\therefore$ विकृति ऊर्जा $U = \left(\dfrac{EI}{R}\right)^2 \dfrac{L}{2EI} = \dfrac{EI \times L}{2R^2}$

$\left(\text{यहाँ } I = \dfrac{\text{चौड़ाई} \times (\text{गहराई})^3}{12} = \dfrac{bt^3}{12} = \dfrac{5 \times 1^3}{12}\right)$

यहाँ $R = \dfrac{10}{2} = 5$ cm $= 50$ mm तथा $L = 1000$ mm

$$\therefore \quad U = \frac{2 \times 10^5 \times 5 \times 1^3 \times 1000}{2 \times 50^2 \times 12} = \mathbf{16{\cdot}67 \text{ N-m}}$$ उत्तर

उदाहरण 30. एक ऊर्ध्वाधर छड़ पर, जिसका ऊपरी सिरा दृढ़तापूर्वक बद्ध है, एक भार (W) सरककर उसके निचले सिरे पर बने कॉलर पर h ऊँचाई से गिरता है। सिद्ध करो कि इस छड़ पर सहसा (suddenly) लगने वाले भार का मान $2W$ होगा। **(U.P. 2009)**

हल—यदि आकस्मिक भार लगाने पर छड़ के पदार्थ में प्रतिबल (σ) तथा लम्बाई में वृद्धि δl होती है तो छड़ पर भार W द्वारा किया गया कार्य = छड़ में एकत्रित हुई विकृति ऊर्जा

या $W \times \delta l = \dfrac{\sigma^2}{2E} \times A \times l$

या $W \times \dfrac{\sigma \times l}{E} = \dfrac{\sigma^2 \times A \times l}{2E}$

या $\sigma = 2 \times \dfrac{W}{A}$

या $(\sigma \times A) = 2\,W$ [$\because$ बल = प्रतिबल × क्षेत्रफल]

अर्थात् बल या भार $(\sigma \times A) = 2W$ **यही सिद्ध करना था।**

उदाहरण 31. एक इस्पात की छड़ की काट 40 mm × 40 mm है तथा लम्बाई 3 m है। इस पर 128 kN का अक्षीय खिंचाव बल लगा है। यदि $E = 200$ GPa तथा पॉयजन अनुपात 0·3 हो तो छड़ की लम्बाई तथा भुजाओं में परिवर्तन ज्ञात कीजिये। प्रसार में छड़ में संचित ऊर्जा की भी गणना कीजिये।

हल— छड़ की काट = 40 mm × 40 mm, $F = 128$ kN

$\because$ $e = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{F}{AE}$

छड़ में अनुदैर्ध्य विकृति, $e = \dfrac{F}{AE} = \dfrac{128 \times 10^3}{40 \times 40 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^9} = 0{\cdot}4 \times 10^{-3}$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

$\therefore$ छड़ की लम्बाई में वृद्धि, $\delta l = e \times l = 0{\cdot}4 \times 10^{-3} \times 3 = 1{\cdot}2 \times 10^{-3}$ m = **1·2 mm** $\left(\because e = \frac{\delta l}{l}\right)$

अब छड़ की भुजाओं में वृद्धि $\delta b = -\frac{e}{m} \times b$ (जहाँ b = छड़ की भुजा)

$= -0{\cdot}4 \times 10^{-3} \times 0{\cdot}3 \times 40 = -4{\cdot}8 \times 10^{-3}$ mm

$\therefore$ छड़ की भुजाओं में कमी $= \mathbf{4{\cdot}8 \times 10^{-3}}$ **mm**

प्रसार के कारण छड़ में संचित ऊर्जा,

$$U = \frac{\sigma^2}{2E} \times A \times l \qquad \left[\text{जहाँ } \sigma = \frac{F}{A} = \frac{128000}{40 \times 40} = 80 \text{ N/mm}^2\right]$$

$$U = \frac{80^2}{2 \times 2 \times 10^5} \times (40 \times 40 \times 3000) = 76800 \text{ N-mm}$$

$\therefore$ $= \mathbf{76{\cdot}8}$ **N-m** उत्तर

अभ्यास (Exercise)

1. निम्न रिक्त स्थानों में उचित शब्द भरिये—

(a) किसी पदार्थ (material) में विकृति के रूप में एकत्रित हुई ऊर्जा अथवा कार्य को .... कहते हैं।

(b) प्रत्यास्थता की सीमा तक किसी पिण्ड में संचित विकृति ऊर्जा (Stored Strain Energy) को .... कहते हैं। (U.K. 2014, S)

(c) प्रत्यास्थता की सीमा के अन्दर (Within Elastic Limit) किसी पदार्थ के इकाई आयतन में एकत्रित की जा सकने वाली .... को विकृति ऊर्जा गुणांक (Modulus of Resilience) कहते हैं।

(d) .... के समय पदार्थ में उत्पन्न प्रतिबल (stress) को प्रमाण प्रतिबल (Proof Stress) कहते हैं।

(e) धीरे-धीरे भार W लगाने (Gradually Loading) में पदार्थ पर किया गया कार्य (Work Done) = ... होता है, जहाँ Δl = लम्बाई में परिवर्तन है।

(f) अचानक (Suddenly) भार लगाने में कार्य सूत्र = ... होता है।

(g) आकस्मिक भार रोपण (Suddenly Loading) में उत्पादन प्रतिबल का मान, धीरे-धीरे भार रोपण (Gradually loading) में उत्पन्न प्रतिबल (Stress) के मान से .... होता है।

(h) धीरे-धीरे भार रोपण (gradually loading) में उत्पन्न प्रतिबल (stress), σ = ... होता है।

(i) आकस्मिक भार रोपण (suddenly loading) में उत्पन्न प्रतिबल (stress), σ = ... सूत्र होता है।

(j) किसी छड़ के निचले सिरे पर लगे कॉलर (Collar) पर W भार को h ऊँचाई से गिराने में लम्बाई में वृद्धि Δl से हुआ कार्य (Work Done) = ...

(k) संघट्ट भार (Impact Load) द्वारा उत्पन्न प्रतिबल (Stress) सूत्र [σ = ...] होता है।

रिक्त स्थानों के उत्तर

(a) विकृति ऊर्जा (Strain Energy) (b) प्रमाण विकृति ऊर्जा (Proof Resilience)

(c) अधिकतम विकृति ऊर्जा (Max. Strain Energy) (d) प्रमाण विकृति ऊर्जा (Proof Resilience)

(e) $\frac{W}{2} \times \Delta l$ (f) $W \times \Delta l$

(g) दो गुना (Double) (h) $\sigma = \frac{W}{A}$

(i) $\sigma = 2 \times \left(\frac{W}{A}\right)$ (j) $W(h + \Delta l)$

(k) $\sigma = \frac{W}{A}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EAh}{Wl}}\right]$

2. निम्न को परिभाषित (Define) कीजिये अथवा समझाइये—

(i) संघात भार (Impact Load)

(ii) विकृति ऊर्जा (Strain Energy/Resilience) (U.P. 2002, 11)

(iii) प्रमाण विकृति ऊर्जा (Proof Resilience) (U.P. 2005, 06, 08, 09, 11)

(iv) विकृति ऊर्जा गुणांक (Modulus of Resilience) (U.P. 2006)

(v) प्रमाण प्रतिबल (Proof Stress) (U.P. 2004)

3. (i) एक छड़ पर अक्षीय तनाव भार (P) लगाया जाता है। यदि छड़ की लम्बाई l, छड़ का अभिलम्ब प्रतिच्छेद (Cross-sectional Area) A तथा प्रत्यास्थता मापांक E हो तब इसकी विकृति ऊर्जा का व्यंजक (expression/formula) ज्ञात कीजिये। (U.P. 2008)

(ii) एक तनन में बल (Tensile force) लगाकर एक समान छड़ के लिए विकृति ऊर्जा (Resilience) का फार्मूला व्युत्पन्न कीजिये। (UP 2014)

4. (i) प्रत्यास्थता (Elasticity) को परिभाषित करो। एक पिण्ड पर एकाएक लगाये गये भार (Suddenly Loading) से उत्पन्न प्रतिबल के लिये व्यंजक (सूत्र) व्युत्पन्न (Set up) कीजिये। (U.P. 2010)

(ii) विकृति ऊर्जा से क्या तात्पर्य है? एक छड़ के निचले सिरे पर कॉलर बना है तथा ऊपरी सिरा बद्ध है। कॉलर पर 'h' ऊँचाई से भार 'P' गिरने के कारण छड़ में उत्पन्न होने वाले अधिकतम प्रतिबल का मान बताइए। (U.P. 2012)

(iii) एक ऊर्ध्वाधर छड़ पर, जिसका ऊपरी सिरा दृढ़तापूर्वक बद्ध है एक भार 'W' सर्पण (Slide) कर उसके निचले सिरे पर बने एक दृढ़ कॉलर पर 'h' ऊँचाई से गिरता है। सिद्ध कीजिये कि इस छड़ पर सहसा लगने वाले भार का मान $2W$ होगा। (U.P. 2009)

[संकेत : प्रतिबल सूत्र में सहसा भार के कारण $h = 0$ रखें।]

5. एक धरन पर समान मान का बंकन आघूर्ण (Bending Moment) 'M' लगाया गया है। यदि धरन की लम्बाई L तथा नमन दृढ़ता (Flexural Rigidity) $E \times I$ हो तो धरन में विकृति ऊर्जा (Resilience) का व्यंजक (expression) प्राप्त करें। (U.P. 2008)

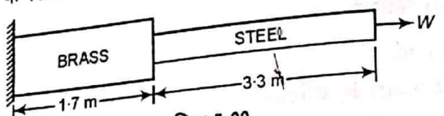
6. एक छड़ की काट का क्षेत्रफल 100 cm लम्बाई तक 6 cm² तथा उसके पश्चात् 200 cm की लम्बाई तक 20 cm² है। छड़ की कुल लम्बाई 3 m है। यदि छड़ पर 20 kN का भार खिंचाव में लगे तो छड़ की कुल लम्बाई में परिवर्तन तथा इसमें इकट्ठी हुई कुल ऊर्जा ज्ञात कीजिये। $E = 200$ GPa [उत्तर : 0·2667 mm, 2·667 N-m]

7. इस्पात के एक नमूने पर तनन परीक्षण में निम्नलिखित प्रेक्षण प्राप्त किये गये—
नमूने की लम्बाई = 50 mm, नमूने का अनुप्रस्थ काट = 150 mm², नमूने की कुल विकृति = 0·05 mm, नमूने पर प्रयुक्त भार = 30 kN तथा $E = 2 \times 10^5$ N/mm²; नमूने में संचित ऊर्जा ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 0·75 N-m] (U.P. 200

Scanned with CamScanner

8. 6 मीटर लम्बी तथा 3 cm व्यास की एक छड़ पर 30 kN का तनाव भार आकस्मिक (एकदम suddenly) लगता है। यदि छड़ के पदार्थ का यंग मापांक $E = 1{\cdot}8 \times 10^5$ N/mm^2 हो तो छड़ में एकत्रित ऊर्जा, लम्बाई में वृद्धि तथा उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये। [उत्तर : प्रतिबल $\sigma = 84{\cdot}89$ MPa, $U = 84{\cdot}89$ N-m, $\delta l = 2{\cdot}8$ mm]

9. एक 5 m लम्बी छड़ दो पदार्थों से बनी है (चित्र के अनुसार)। पीतल से बनी प्रथम 1·7 m छड़ का अनुप्रस्थ काट 7·5 cm^2 तथा इस्पात से बनी शेष 3·3 m लम्बाई का अनुप्रस्थ काट 6·0 cm^2 है। छड़ W न्यूटन भार के कारण तनन में है तथा छड़ की कुल लम्बाई में वृद्धि 1·2 mm है। ज्ञात करिये, (i) भार W न्यूटन में, (ii) छड़ की लम्बाई बढ़ाने में किया गया कार्य N-m में। इस्पात के लिये $E = 210$ GPa तथा पीतल के लिए $E = 84$ GPa है। (U.K. 2005)



चित्र 5.20

[उत्तर : भार $W = 22{\cdot}569$ kN, कार्य अथवा विकृति ऊर्जा $U = 13{\cdot}542$ N-m]

10. 3 m लम्बी तथा 650 mm^2 काट के क्षेत्रफल वाली एक छड़ पर 450 N का एक भार लटकाने से पहले 75 mm ऊँचाई से गिरता है और छड़ को खींचता है। यदि छड़ का प्रत्यास्थता गुणांक (modulus of elasticity) 200 GPa हो तो छड़ में उत्पन्न हुआ प्रतिबल ज्ञात कीजिये। [उत्तर : प्रतिबल $\sigma = 83{\cdot}9 = 84$ N/mm^2]

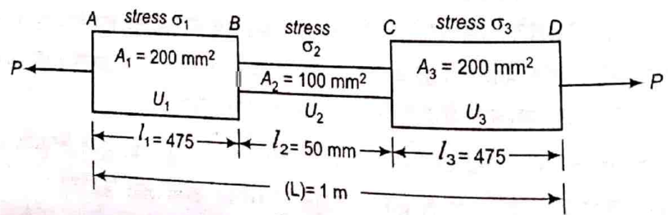
11. 2 m लम्बाई तथा 10 cm^2 अनुप्रस्थ काट की इस्पात की एक छड़ पर 50 kN का एक आकस्मिक अक्षीय तनन बल लगाया जाता है। यदि $E = 200$ GPa हो तो छड़ में संचित विकृति ऊर्जा ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 50 N-m]

12. एक मृदु इस्पात की छड़, जिसका व्यास 10 mm है तथा लम्बाई 2 m है, इसमें 5 kN का अक्षीय खिंचाव लग रहा है। यदि पदार्थ का प्रत्यास्थता मापांक $E = 200 \times 10^3$ N/mm^2 हो तब छड़ में उत्पन्न प्रति एकांक आयतन की विकृति ऊर्जा तथा छड़ की सम्पूर्ण विकृति ऊर्जा का मान ज्ञात कीजिए। [उत्तर : $1{\cdot}013 \times 10^{-2}$ N-mm/mm^3, 1591·2 N-mm] (U.P. 2009)

13. एक स्टील बार जिसका सैक्शन 4 cm × 4 cm एक 3 मीटर लम्बाई जो अक्षीय Pull 128 kN के अधीन है। $E = 200$ GN/m^2 लेते हुए बार की लम्बाई में Alternation की गणना कीजिए। Extension की अवधि के बारे में भण्डारित ऊर्जा की मात्रा की गणना कीजिए। (U.K. 2012, 13, W)
[उत्तर : $\Delta l = 1{\cdot}2$ mm, $U = 76{\cdot}8$ N-m]

14. दो छड़ों पर, जो प्रत्येक l लम्बाई की तथा एक ही पदार्थ की है, अक्षीय तनन बल P प्रत्येक पर लगाया जाता है। पहली छड़ का व्यास एक समान $2d$ है। दूसरी छड़ का व्यास $l/3$ लम्बाई तक d है तथा बाकी लम्बाई में $2d$ है। दोनों छड़ों की विकृति ऊर्जाओं की तुलना कीजिये। [उत्तर : $\frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{2}$]
(संकेत : उदाहरण 6 देखें) (U.P. 2013)

15. एक 1 m की छड़ को खींचने में उसमें अधिकतम उत्पन्न प्रतिबल 150 N/mm^2 है। काट का क्षेत्रफल तथा लम्बाइयाँ चित्र-5.21 में दर्शायी गयी हैं। छड़ में संचित विकृति ऊर्जा की गणना कीजिए यदि $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 (U.P. 2010)



चित्र 5.21

16. किसी छड़ की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 4 सेमी^{2} तथा लम्बाई 5 मीटर है। इस पर 100 kN का भार धीरे-धीरे लगाया जाता है। यदि छड़ के लिये $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 तो छड़ में इकट्ठी विकृति ऊर्जा तथा छड़ की लम्बाई में परिवर्तन ज्ञात कीजिये। यदि छड़ के पदार्थ की प्रत्यास्थता सीमा (elastic limit) 150 N/mm^2 हो तो उसमें प्रमाण विकृति ऊर्जा (proof resilience) ज्ञात कीजिये। Modulus of Resilience भी बतायें।
[उत्तर : $U = 312{\cdot}5$ N-m, $\Delta l = 6{\cdot}25$ mm, प्रमाण विकृति ऊर्जा (Proof Resilience) = 112·5 N-m
प्रमाण वि०ऊ० गुणांक (Proof Resilience per unit volume) = 0·05625 N-mm/mm^3] (U.K. 2011, S)

17. एक क्रेन की चेन का अनुप्रस्थ काटीय क्षेत्रफल (cross-sectional area) 650 mm^2 है। चेन के सिरे पर 9 kN का भार है जो कि 35 मीटर प्रति मिनट के समान वेग से चेन द्वारा नीचे उतारा जाता है। जब चेन 10 m खुल जाती है तो वह पुली पर एकदम अटक जाती है। चेन के भार को नगण्य (neglect) मानते हुए उसके रुक जाने से उसमें उत्पन्न आकस्मिक प्रतिबल ज्ञात कीजिये यदि चेन के पदार्थ का $E = 200$ GPa तथा पृथ्वी के गुरुत्व त्वरण (acceleration due to gravity) $g = 9{\cdot}81$ m/s^2 है। [उत्तर : प्रतिबल $(\sigma) = 98$ N/mm^2]

18. एक शुद्ध आलम्बित धरन (Simply Supported Beam) की लम्बाई 2 m है। यदि धरन की काट की चौड़ाई (b) 30 mm तथा गहराई (h) 40 mm है तो इसकी सम्पूर्ण लम्बाई पर 200 kN/m का U.D.L. (समवितरित भार) लगा है तो धरन में एकत्रित विकृति ऊर्जा (Strain Energy) ज्ञात कीजिये। $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 लें।
[उत्तर : $U = 166{\cdot}66$ kN-m]
(U.K. 2007, W)

19. 2000 mm^2 अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल तथा 3 m लम्बाई की एक शाफ्ट पर 200 kN का कर्तन बल (Shear Force) लगा है। यदि शाफ्ट के लिये कर्तन मापांक (Modulus of Rigidity) $G = 100$ GN/m^2 है। छड़ में एकत्र कर्तन विकृति ऊर्जा (Shear strain Energy) ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 300 N-m]

20. अलग-अलग धातुओं (या पदार्थों) से बनी हुई समान लम्बाई (L) की दो छड़ों पर समान तनाव बल (P) लगा है। पहली छड़ समान परिच्छेद के व्यास D की है तथा दूसरी छड़ के बीच की $L/4$ लम्बाई में व्यास (Dia) $D/2$ है और सिरों पर $3L/8$ लम्बाई तक व्यास (Dia) D है। दोनों छड़ों में विकृति ऊर्जाओं में अनुपात (Ratio) ज्ञात करें जबकि (i) $\frac{E_1}{E_2} = \frac{4}{\ldots}$ है। (ii) $E_1 = E_2$ है। [उत्तर : $\frac{U_1}{U_2} = 1$ तथा $\frac{U_1}{U_2} = \frac{4}{\ldots}$

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

6 मरोड़ (TORSION)

You-tube - Polytechnic study with Atul

§ 6.1-1 वृत्ताकार शाफ्ट (Circular Shaft)

यह मशीन का वह अंग (part) है जो उसके घूमने वाले भागों को सहारता है तथा मरोड़ घूर्ण (Twisting Moment or Torque) को पारेषित (Transmit) करती है जिसके द्वारा शाफ्ट की शक्ति का पारेषण (Transmission of Shaft's Power) होता है। शाफ्टें (Shafts) अधिकतर वृत्ताकार काट (Circular section) की ठोस (solid) या खोखली (hollow) बनायी जाती हैं। शाफ्टें (shafts) दो प्रकार की होती हैं—

(i) पारेषण शाफ्ट (Transmission Shaft)

(ii) मशीन शाफ्ट (Machine Shaft)

(i) पारेषण शाफ्ट—जो शाफ्ट शक्ति-पारेषण (Power Transmission) का कार्य करती हैं, पारेषण शाफ्ट कहलाती हैं। इन शाफ्टों पर शक्ति पारेषण के लिए पुलियाँ, गियर तथा स्प्रॉकेट आदि लगे होते हैं। इनके प्रमुख उदाहरण काउन्टर-शाफ्ट, लाइन शाफ्ट तथा उपरिशिर शाफ्ट (over-head shaft) आदि हैं।

(ii) मशीन शाफ्ट—ये शाफ्ट, मशीन का ही भाग (अंग) होती हैं जैसे—इन्जन की क्रैंक शाफ्ट आदि।

इनके अतिरिक्त स्पिंडल (spindle) भी एक छोटे आकार की शाफ्ट होती है जो किसी मशीन औजार में औजार का कार्य (Job or Work piece) को घुमाऊ गति प्रदान करती है। जैसे—खराद मशीन (Lathe Machine) की spindle, ड्रिलिंग मशीन की स्पिंडल तथा मिलिंग मशीन की स्पिंडल आदि।

§ 6.1-2 शाफ्ट के पदार्थ तथा शाफ्ट के साइज (Material of Shaft and Sizes of Shafts)

शाफ्टें साधारणतया नरम इस्पात (mild steel) की बनाई जाती हैं परन्तु अधिक सामर्थ्य के लिये ये मिश्र धातु इस्पात जैसे—निकिल, क्रोम-निकिल तथा क्रोम वेनीडियम इस्पात आदि की बनाई जाती हैं।

शाफ्टें प्राय: 25 mm से 500 mm तक के व्यास (Dia) की बनायी जाती हैं। इनकी लम्बाई 7 metre से अधिक नहीं रखी जाती ताकि शाफ्टों को लाना-ले जाना (Transportation Work) सुविधाजनक रहे।

§ 6.2 मरोड़ तथा मरोड़ घूर्ण (Torsion or Twisting and Twisting Moment or Torque)

यदि किसी शाफ्ट को दोनों सिरों पर लम्बाई की अक्ष के लम्ब समतल में बराबर मान के परन्तु विपरीत दिशा में बलयुग्म (couple) लगाकर ऐंठा जाये तो शाफ्ट की यह अवस्था मरोड़ (Torsion) कहलाती है। गीले कपड़ों को निचोड़ना या एक बोतल के चूड़ीदार ढक्कन को खोलना व बन्द करना इसके उदाहरण हैं। शाफ्ट के एक सिरे को बद्ध (Fixed) करके तथा दूसरे सिरे पर एक बलयुग्म (Couple) लगाकर ऐंठना (Twisting) भी शाफ्ट में मरोड़ (Torsion) की स्थिति उत्पन्न करता है।

इस प्रकार शाफ्ट पर लगाये गये बलयुग्म (Couple) के घूर्ण (Moment of couple) को मरोड़ घूर्ण (Twisting moment or torque) कहते हैं। मरोड़ (Torsion) या मरोड़ घूर्ण (Twisting moment or torque) के प्रभाव में शाफ्ट की प्रत्येक अनुप्रस्थ काट पर कर्तन (या अपरूपण) प्रतिबल (Shear stress) पैदा होते हैं। मरोड़ घूर्ण सहन करने वाले मशीनों के सामान्य भाग (अंग) शाफ्ट, कुँजी (Key) तथा कपलिंग (Coupling) आदि हैं।

§ 6.3 सरल या शुद्ध मरोड़ (Simple or Pure Torsion)

जब शाफ्ट द्वारा शक्ति पारेषण (Power Transmission) का कार्य किया जाता है तो इस पारेषण के कारण शाफ्ट पर मरोड़ घूर्ण (Twisting Moment or Torque) कार्य करता है जिससे शाफ्ट में मरोड़ कर्तन प्रतिबल (Torsional shear stress) उपजते हैं। परन्तु शाफ्ट के अपने भार तथा शाफ्ट पर लगायी गयी पुली (Pulley) एवं गियर (Gear) आदि के भार के कारण नमन-घूर्ण (Bending moment) भी लगता है जिससे शाफ्ट में नमन प्रतिबल (Bending stresses) भी उत्पन्न हो जाते हैं परन्तु जब किसी शाफ्ट पर मरोड़ घूर्ण की अपेक्षा नमन घूर्ण (Bending stresses) का मान बहुत कम होता है तो इसे नगण्य (Negligible) मान लिया जाता है। इस दशा (Condition) में शाफ्ट में होने वाले मरोड़ को "शुद्ध मरोड़" (Pure Torsion) कहा जाता है। अत: इसे निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है—

"जब किसी शाफ्ट पर केवल मरोड़ घूर्ण (Twisting moment or torque) ही कार्य करता है या कार्य करता हुआ माना जाता है तो इसके प्रभाव में शाफ्ट का शुद्ध मरोड़ होता है और शाफ्ट में केवल मरोड़ कर्तन प्रतिबल (Torsional shear stresses) ही उपजते हैं।"

§ 6.4 सरल या शुद्ध मरोड़ के लिये मान्यतायें (Assumptions in Simple or Pure Torsion)

(1) शाफ्ट का पदार्थ पूर्ण लम्बाई में एक समान रहता है।
(Material of shaft is uniform throughout the length)

(2) मरोड़ (Twisting) के अन्तर्गत शाफ्ट की किन्हीं दो अनुप्रस्थ काटों के बीच की दूरी स्थिर रहती है।

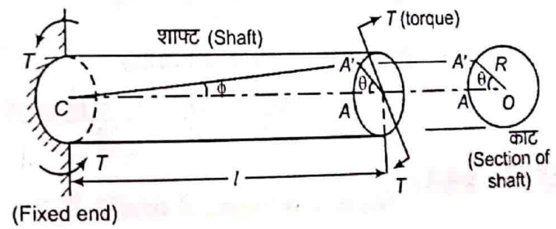
(3) शाफ्ट की प्रत्येक अनुप्रस्थ काट (Cross-section) का कोई भी व्यास (Diameter), बल-घूर्ण (Torque) लगने के बाद भी उतना ही लम्बा तथा सीधा रहता है।

(4) बल-घूर्ण (Torque) लगने से पहले शाफ्ट की कोई भी वृत्तीय, समतल अनुप्रस्थ काट (Plane circular cross-section) मरोड़ या बलघूर्ण (Torque) लगने के बाद भी वृत्तीय, समतल (circular and plane) रहती है।

नोट—उपरोक्त मान्यतायें केवल उस दशा (condition) में सत्य एवं लागू हो सकती हैं जबकि मरोड़ कोण (angle of twist) का मान बहुत ही कम हो।

§ 6.5 मरोड़-घूर्ण समीकरण (Torsion Equation)

चित्र 6.1 में माना लम्बाई (l) तथा त्रिज्या (radius) (R) की शाफ्ट का एक सिरा बद्ध (Fixed) है तथा दूसरे स्वतन्त्र सिरे (Free end) पर T मान का एक मरोड़ घूर्ण (Torque) लगा है जिसके कारण यह शाफ्ट शुद्ध मरोड़ (Pure Torsion) के अन्तर्गत है। चित्र में बलाघूर्ण (Torque) T लगने से shaft की परिधि (circumference) पर कोई बिन्दु A घूमकर A' स्थिति में आ जाता है जिससे शाफ्ट की काट के केन्द्र O पर बना कोण (θ) मरोड़ कोण (Angle of twist) कहलाता है तथा शाफ्ट की लम्बाई में $\angle ACA' = \phi$ को कर्तन (या अपरूपण) विकृति (Shear strain) कहते हैं। कोण ϕ बहुत कम होने के कारण AA', CA के लम्बवत् होगी तथा $\tan\phi = \phi$ होगा।



चित्र 6.1

$$\therefore \quad \tan\phi = \frac{AA'}{CA} \quad \text{या} \quad \phi = \frac{AA'}{l} \quad \text{या} \quad AA' = l \times \phi$$

परन्तु कोण (angle), $\theta = \dfrac{\text{चाप (arc) } AA'}{\text{त्रिज्या (radius) } R}$ या $AA' = R \times \theta$ ... (i)

$$\therefore \quad R\theta = l \times \phi$$

$\because$ दृढ़ता मापांक (Modulus of Rigidity)

Scanned with CamScanner

$$G = \frac{\text{कर्तन या अपरूपण प्रतिबल (Shear stress)}}{\text{कर्तन विकृति (Shear strain) } \phi}$$

(अब ϕ का यह मान समी० (i) में रखने पर)

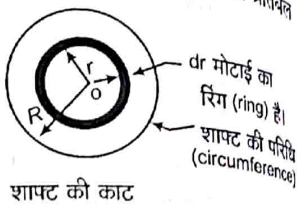
या $\phi = \frac{\tau}{G}$

$R \times \theta = l \times \frac{\tau}{G}$ या $\frac{\tau}{R} = \frac{G\theta}{l}$ ... (ii)

$\therefore$ G, θ तथा l एक शाफ्ट के लिए स्थिर (constant) हैं।

$\therefore$ $\tau \propto R$ होगा। अर्थात् कर्तन प्रतिबल, शाफ्ट के केन्द्र से दूरी के समानुपाती हैं।

माना केन्द्र O से r दूरी पर कोई रिंग dr मोटाई का है जिसमें कर्तन प्रतिबल (q) है जबकि R त्रिज्या पर कर्तन प्रतिबल (Shear stress) τ है।



शाफ्ट की काट (section of shaft)

चित्र 6.2

$\therefore$ $\frac{\tau}{R} = \frac{q}{r}$ या $q = \frac{\tau}{R} \times r$

अब रिंग में कर्तन बल (Shear Force) = प्रतिबल × क्षेत्रफल

या $F = \text{Stress} \times \text{Area}$

$= q \times (2\pi r \times dr) = \frac{\tau}{R} \times 2\pi r^2 dr$

इस बल का शाफ्ट के केन्द्र O पर घूर्ण (moment)

$= \text{Force} \times \text{distance} \; (= F \times r)$

$= \frac{\tau}{R} \times 2\pi r^3 dr$

$\therefore$ Shaft पर लगाया गया बल-घूर्ण (torque),

$$T = \int_0^R \frac{\tau}{R} \times 2\pi r^3 dr = \frac{\tau}{R} \times 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\tau}{R} \times 2\pi \times \frac{R^4}{4}$$

या $T = \frac{\tau}{R} \times \left(\frac{\pi R^4}{2}\right)$ ... (iii)

परन्तु हम जानते हैं कि ध्रुवीय जड़त्व-आघूर्ण (Polar Moment of Inertia)

$$J = I_{XX} + I_{YY} = \frac{\pi D^4}{64} + \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi (2R)^4}{32} = \frac{\pi R^4}{2}$$

$\therefore$ समी० (iii) से, $T = \frac{\tau}{R} \times J$

या $\frac{T}{J} = \frac{\tau}{R}$ ... (iv)

अब समी० (ii) तथा (iv) से हम कह सकते हैं कि,

$\frac{T}{J} = \frac{\tau}{R} = \frac{G\theta}{l}$, यदि $\tau \Rightarrow Q$ माना जाये तो $\frac{T}{J} = \frac{Q}{R} = \frac{CQ}{l}$ ... (v)

यह मरोड़ समीकरण (Torsion-Equation) या मरोड़ सम्बन्ध (Torsion Relation) कहलाता है।

यहाँ T = अधिकतम बलाघूर्ण (Maximum Torque) (N-mm या kN-m) में (In S.I. unit)

J = ध्रुवीय जड़त्व आघूर्ण (Polar Moment of Inertia) mm^4 या m^4 में

$J_S = \frac{\pi d^4}{32}$ (d व्यास की ठोस शाफ्ट के लिये)

$J_h = \frac{\pi (d_o^4 - d_i^4)}{32}$ (बाहरी व्यास d_o तथा आन्तरिक व्यास d_i की खोखली शाफ्ट के लिये)

τ = कर्तन प्रतिबल (Shear stress) जिसे Q या q से भी प्रदर्शित कर सकते हैं। इसे अपरूपण प्रतिबल के नाम से भी जाना जाता है। (N/mm^2 या kN/m^2 में)

$R = \frac{\text{शाफ्ट का व्यास (Dia of Shaft)}}{2} = \frac{d}{2}$ या $\frac{d_o}{2}$ (खोखले-Hollow के लिये)

G (या C) = अपरूपण मापांक या दृढ़ता गुणांक (Modulus of Rigidity) (N/mm^2 या kN/m^2) में

θ = मरोड़ कोण (Angle of Twist) रेडियन में (in radian)

l = शाफ्ट की प्रभावी लम्बाई (effective length) (mm या m में)

§ 6.6 ठोस शाफ्ट की तुलना में खोखली शाफ्ट के लाभ (Advantages of Hollow Shaft over Solid Shaft)

(1) खोखली शाफ्ट बनाने में पदार्थ का खर्चा कम होता है।

(2) खोखली शाफ्ट, ठोस की अपेक्षा हल्की होती है। इसलिए इसे आसानी से उठाया जा सकता है।

(3) खोखली शाफ्ट, ठोस की तुलना में अधिक दक्ष (efficient) होती है।

(4) समान भार वाली खोखली शाफ्ट की बल-घूर्ण क्षमता (Torque bearing capacity) बढ़ जाती है।

(5) खोखली शाफ्ट के अन्दर से मशीन के अन्य क्रियाकारी अंग भी गुजारे जा सकते हैं। जैसे खराद मशीन (Lathe Machine) की स्पिण्डल आदि।

§ 6.7 मरोड़ दृढ़ता (Torsional rigidity) या कड़ापन (Stiffness)

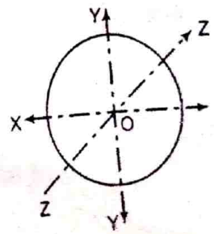
यदि शाफ्ट के लिए दृढ़ता गुणांक या कर्तन मापांक G या C हो तथा उसकी काट का ध्रुवीय जड़त्व आघूर्ण (Polar moment of Inertia) J हो तो J तथा G के गुणनफल ($J \times G$) को मरोड़ दृढ़ता या कड़ापन कहते हैं।

$\therefore$ मरोड़ समीकरण से, $J \times G = \frac{T.l}{\theta}$ या $k = J \times G$ (सूत्र)

अत: शाफ्ट की मरोड़ दृढ़ता वह मरोड़ घूर्ण या बल-घूर्ण है जो प्रति इकाई लम्बाई में शाफ्ट के अन्दर एक रेडियन का कोण पैदा करता है। इसे k या μ से प्रदर्शित किया जाता है। अत: $k = J \times G$ से कड़ापन ज्ञात होता है।

§ 6.8 ध्रुवीय जड़त्व आघूर्ण (Polar Moment of Inertia)

चित्र 6.3 में एक वृत्ताकार काट (circular section) दिखायी गयी है जिसमें केन्द्र O से जाने वाली ऐसी जाने वाली अक्षें (axes) $X-X$ तथा $Y-Y$ हैं परन्तु $Z-Z$ अक्ष केन्द्र O से जाने वाली ऐसी अक्ष है जो दोनों अक्षों x-अक्ष तथा y-अक्ष के लम्बरूप है। अर्थात् $Z-Z$ अक्ष वृत्ताकार काट की सतह के लम्बरूप है। यदि वृत्ताकार काट का व्यास d माना जाये तो



चित्र 6.3

$X-X$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण, $I_{XX} = \frac{\pi d^4}{64}$

तथा $Y-Y$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण, $I_{YY} = \frac{\pi d^4}{64}$

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

परन्तु हम जानते हैं कि, $I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY}$

$\therefore$ J अर्थात् $I_{ZZ} = \frac{\pi d^4}{32}$ (सूत्र) यहाँ I_{ZZ} को ही J से दर्शाते हैं।

J को ही ध्रुवीय जड़त्व आघूर्ण कहते हैं।

§ 6.9 ध्रुवीय आकृति मापांक (Polar Modulus of Section)

"शाफ्ट की काट के ध्रुवीय जड़त्व आघूर्ण (Polar Moment of Inertia) 'J' तथा शाफ्ट की त्रिज्या (radius of shaft) 'R' के अनुपात (ratio) को शाफ्ट की काट का ध्रुवीय आकृति मापांक (Polar Modulus of Section) कहते हैं", तथा एक शाफ्ट के लिये इसका मान स्थिर (constant) होता है। इसे Z_P से दर्शाते हैं। इसकी इकाई (Unit) mm^3 या cm^3 प्रयोग की जाती है।

$\therefore$ $$Z_P = \frac{J}{R}$$ (सूत्र)

§ 6.10 शाफ्ट द्वारा पारेषित शक्ति (Power Transmitted by the Shaft)

माना R त्रिज्या की शाफ्ट पर एक स्पर्शी बल (Tangential Force) F न्यूटन का कार्य करता है। अत: इसके द्वारा उत्पन्न घुमाऊ घूर्ण (Turning Moment), $(F \times R)$ द्वारा शाफ्ट N चक्र प्रति मिनट (rpm) पर घूमने लगती है।

$\therefore$ शाफ्ट के N चक्करों में किया गया कार्य या प्रति मिनट किया गया कार्य

$$= F \times 2\pi RN$$ [$\because$ घुमाऊ घूर्ण (torque), $T = F \times R$]

$$= 2\pi NT \text{ न्यूटन-मीटर/मिनट}$$

$\therefore$ शाफ्ट द्वारा पारेषित शक्ति (Power),

$$P = \frac{2\pi NT}{60} \text{ N-m/ second (या watt)}$$

या अश्व शक्ति (HP) या $\boxed{P = \frac{2\pi NT}{60 \times 1000} \text{ kW}}$ या $\boxed{P = \frac{NT}{9550} \text{ kW}}$ सूत्र

जहाँ T = औसत या माध्य बलाघूर्ण (mean/average torque) N-m में है।

नोट—1 मीटरी अश्व शक्ति (H.P.) $= 0 \cdot 7355$ kW होता है।

घूमते शाफ्ट पर एक-सा बलघूर्ण कार्य नहीं करता। अत: शाफ्ट का डिजाइन के लिये शाफ्ट का व्यास (diameter) अधिकतम बलाघूर्ण (max. torque) के आधार पर ज्ञात किये जाते हैं। डिजाइन के लिये शाफ्ट पर अधिकतम बलाघूर्ण (T_{max}), औसत बलाघूर्ण (T_{mean} या $T_{average}$) से प्राय: 20% से 30% तक अधिक लिया जाता है। अर्थात् $T_{max} = T_{average} + T_{average} \times$ (20% से 40% के बीच) जो भी % दिया गया हो।

§ 6.11 समान सामर्थ्य वाली ठोस तथा खोखली शाफ्टों के भारों की तुलना (Comparison of Weights of Solid and Hollow Shafts)

(U.K. 2014, B.P.)

मरोड़ सम्बन्ध से शाफ्ट की सामर्थ्य,

$$T = \frac{\tau}{R} . J \quad \text{...(1)}$$

माना कि दोनों शाफ्टों का पदार्थ समान है तथा इसका घनत्व ρ है, तब प्रति इकाई लम्बाई में d व्यास की

ठोस शाफ्ट का भार, $W_S = \frac{\pi}{4} d^2 \times \rho$ [$\because$ भार W = आयतन × घनत्व = क्षेत्रफल × लम्बाई × घनत्व]

खोखली शाफ्ट का भार, $W_h = \frac{\pi}{4}(d_o^2 - d_i^2)\rho$

जहाँ d_o तथा d_i खोखली शाफ्ट के क्रमश: बाह्य तथा अन्त: व्यास हैं।

$\therefore$ भारों का अनुपात, $$\frac{W_s}{W_h} = \frac{d^2}{(d_o^2 - d_i^2)} \quad \text{...(2)}$$

अब, माना कि ठोस तथा खोखली शाफ्टों के बाह्य सतहों (outer surfaces) पर समान कर्तन प्रतिबल (Shear stress) उपजता है, क्योंकि पदार्थ समान हैं

तब $$\tau_s = \tau_h$$

$\therefore$ ठोस शाफ्ट की सामर्थ्य, $\left[\because \frac{T}{J} = \frac{\tau}{R} \text{ द्वारा } T = \frac{\tau}{R} \times J\right]$

$$T_s = \frac{\tau_s}{(d/2)} \times \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{16} d^3 . \tau_s$$

तथा खोखली शाफ्ट की सामर्थ्य,

$$T_h = \frac{\tau_h}{(d_o/2)} \cdot \frac{\pi}{32}(d_o^4 - d_i^4)$$

या $$T_h = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{(d_o^4 - d_i^4)}{d_o} \tau_h$$

परन्तु समान सामर्थ्य के लिये, $T_s = T_h$ होता है। अर्थात् बलाघूर्ण (torques) समान होते हैं।

$\therefore$ $$\frac{\pi}{16} . d^3 \tau_s = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{16 d_o} \tau_h$$ (परन्तु यहाँ $\tau_s = \tau_h$ है)

$\therefore$ $$d^3 = \frac{(d_o^4 - d_i^4)}{d_o} \quad \text{...(3)}$$

$d \Rightarrow \left(\frac{d_o^4 - d_i^4}{d_o}\right)^{1/3}$

या $$d^2 = \frac{(d_o^4 - d_i^4)^{2/3}}{(d_o)^{2/3}}$$

अत: (2) से भारों में अनुपात,

$$\frac{W_s}{W_h} = \frac{(d_o^4 - d_i^4)^{2/3}}{d_o^{2/3}(d_o^2 - d_i^2)}$$

§ 6.12 ठोस तथा खोखली शाफ्ट की मरोड़ विकृति ऊर्जा (Torsional Resilience of Solid and Hollow Shaft)

(1) ठोस शाफ्ट में विकृति ऊर्जा—माना कि ठोस शाफ्ट पर बलघूर्ण (torque) T को धीरे-धीरे लगाया जाता है जिससे शाफ्ट में मरोड़ कोण θ हो जाता है, तो शाफ्ट में एकत्र हुई विकृति ऊर्जा (Strain Energy or Resilience)

$$U = \frac{1}{2} T . \theta \quad \text{...(}$$

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

परन्तु $\frac{T}{J} = \frac{\tau}{R}$ से, $T = \frac{J.\tau}{R} = \frac{\pi d^4}{32} \times \frac{\tau \times 2}{d}$ (जहाँ d = शाफ्ट का व्यास है)

या $T = \frac{\pi}{16}.d^3\tau$ (जहाँ, τ = शाफ्ट में अधिकतम कर्तन प्रतिबल)

तथा $\frac{\tau}{R} = \frac{G\theta}{l}$ से, $\theta = \frac{\tau l}{GR} = \frac{2\tau l}{Gd}$

(1) में T तथा θ के मान रखने पर,

$$U = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{16}.d^3\tau \times \frac{2\tau l}{Gd} = \frac{1}{4}\frac{\tau^2}{G} \times \frac{\pi}{4}.d^2 l$$

अत: विकृति ऊर्जा, $\boxed{U = \frac{1}{4}.\frac{\tau^2}{G} \times \text{शाफ्ट का आयतन}}$ (सूत्र) ...(2)

जहाँ शाफ्ट का आयतन (Volume) $= \frac{\pi d^2}{4} \times l$ है।

(2) खोखली शाफ्ट में विकृति ऊर्जा—माना कि खोखली शाफ्ट के बाह्य तथा अन्त: व्यास क्रमश: d_o तथा d_i है तब विकृति ऊर्जा,

$$U = \frac{1}{2}T.\theta$$

परन्तु $T = \frac{\pi}{16}.\frac{(d_o^4 - d_i^4)}{d_o}.\tau$ $\left[\because J_h = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{32} \text{ तथा } R = \frac{d_o}{2}\right]$

तथा $\theta = \frac{2\tau.l}{Gd_o}$ $\left(\because \frac{G\theta}{l} = \frac{\tau}{R}\right)$

(3) में T तथा θ के मान रखने पर,

$$U = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{16}.\frac{(d_o^4 - d_i^4)}{d_o}.\tau \times \frac{2\tau.l}{Gd_o}$$

$$= \frac{1}{4}.\frac{\tau^2}{G}.\frac{(d_o^2 - d_i^2)}{d_o} \times \frac{\pi}{4}.(d_o^2 - d_i^2)l$$

अत: विकृति ऊर्जा, $U = \frac{1}{4}.\frac{\tau^2}{G}.\frac{(d_o^2 + d_i^2)}{d_o^2} \times \text{शाफ्ट का आयतन}$ (सूत्र) ...(4)

महत्त्वपूर्ण उदाहरण (Important Examples)

उदाहरण 1. एक 125 mm व्यास का ठोस शैफ्ट 160 rpm पर 120 kW प्रेषण करता है। शैफ्ट में उत्पन्न अधिकतम अपरुपण प्रतिबल ज्ञात कीजिये। 7·5 m लम्बाई में ऐंठन कोण भी ज्ञात कीजिये। दृढ़ता गुणांक $= 8 \times 10^4$ N/mm² मान लीजिये। **(U.P. 2014)**

हल—दिया है— $d = 125$ mm (dia. of shaft), लम्बाई $l = 7·5$ m

गति $N = 160$ rpm तथा शक्ति (Power) $h_p = 120$ kW

Modulus of rigidity (G या C) $= 8 \times 10^4$ N/mm² है।

अब $h_p = \frac{2\pi NT}{60 \times 1000}$ या $h_p = \frac{NT}{9550}$ kW सूत्र से,

∴ बलाघूर्ण (torque), $T = \frac{120 \times 9550}{160}$ N-m में

या $T = 7162·5$ N-m $= 7162·5 \times 1000$ N-mm

∴ अधिकतम अपरूपण प्रतिबल (max. shear stress),

$$q \text{ या } \tau = \frac{T}{J} \times R \qquad \left[\because \frac{T}{J} = \frac{\tau}{R} \text{ सूत्र}\right]$$

$$= \frac{7162·5 \times 1000}{\pi\frac{(125)^4}{32}} \times \frac{125}{2} = 18·686 \text{ N/mm}^2$$

उत्तर

अब $\frac{T}{J} = \frac{G \times \theta}{l}$ सूत्र से,

ऐंठन कोण (angle of twist), $\theta = \frac{T \times l}{J \times G}$

$$\theta = \frac{7162·5 \times 1000 \times (7·5 \times 1000)}{\pi\frac{(125)^4}{32} \times 8 \times 10^4} = 0·028 \text{ रेडियन}$$

∴ ऐंठन कोण या मरोड कोण (θ) = 1·61° उत्तर

उदाहरण 2. एक 80 mm व्यास वाली शाफ्ट 120 r.p.m. पर शक्ति संचारित करती है। यदि अधिकतम कर्तन प्रतिबल का मान 40 MPa हो तो शाफ्ट द्वारा संचारित शक्ति (h.p.) ज्ञात कीजिये। **(U.K. 2014, S)**

हल—∵ ध्रुवीय जड़त्व आघूर्ण (Polar Moment of Inertia)

∴ $J = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(80)^4}{32} = 4019200$ mm⁴

∵ अधिकतम कर्तन प्रतिबल (Max. shear stress)

τ या $q = 40$ MPa $= 40$ N/mm² दिया है।

तथा shaft की त्रिज्या (radius) $R = \frac{\text{dia}}{2} = \frac{80}{2} = 40$ mm

अब $\frac{T}{J} = \frac{q \text{ या } \tau}{R}$ सूत्र से,

अधिकतम मरोड़ घूर्ण (max. torque)

$$T = J \times \frac{\tau}{R} = 4019200 \times \frac{40}{40}$$

$$= 4019200 \text{ N-mm} = 4019·2 \text{ N-meter}$$

∴ संचारित शक्ति (Power transmitted),

$$h.p. = \frac{2\pi NT}{60 \times 1000} \Rightarrow \frac{NT}{9550}$$

$$= \frac{120 \times 4019·2}{9550}$$

$$= 50·5 \text{ kW}$$

उत्तर

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

उदाहरण 3. एक खोखली शाफ्ट 80 चक्र प्रति मिनट पर 300 kw शक्ति पारेषित करती है। यदि कर्तन प्रतिबल का मान 60 MN/m^2 से अधिक ना हो तथा आंतरिक व्यास का बाहरी व्यास के साथ अनुपात 0·6 हो तो आंतरिक व बाहरी व्यास (*di* तथा *do*) का मान ज्ञात कीजिए जबकि अधिकतम मरोड़ आघूर्ण (T_{max}) का मान माध्य मरोड़ आघूर्ण (T_{mean}) से 1·4 गुणा ज्यादा है। (U.K. 2014, B.P.)

हल—दिया है, $h_p = 300\,kW,\ N = 80\ rpm$

q या $\tau = 60\ MN/m^2$

या $\tau = 60\ N/mm^2$

तथा $\frac{d_i}{d_o} = 0·6$ या $d_i = 0·6 \times d_o$

शक्ति, $h_p = \frac{NT}{9550}$ सूत्र से, (औसत या माध्य बलाघूर्ण, T_{mean})

$$T = T_{mean} = \frac{hp \times 9550}{N} = \frac{300 \times 9550}{80} = 35812·5\ N\text{-}m$$

$\therefore$ $T_{max} = T_{mean} \times 1·4$ (प्रश्नानुसार)

$= 35812·5 \times 1·4 = 50137·5\ N\text{-}m$

$= 50137500\ N\text{-}mm$

$\because$ $J = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{32} = \frac{\pi}{32} \times d_o^4 [1 - (0·6)^4]$

$= 0·085408 \times d_o^4$

तथा शाफ्ट की त्रिज्या (radius),

$$R = \frac{\text{Outer dia}}{2} = \frac{d_o}{2}$$

अब $\frac{T_{max}}{J} = \frac{q}{R}$ सूत्र से,

$$\frac{50137500}{0·085408 \times d_o^4} = \frac{60}{\frac{d_o}{2}} \text{ या } d_o^3 = 4891959·77$$

$\therefore$ $d_o = 169·757$ mm तथा आन्तरिक व्यास $d_i = 0·6 \times d_o = 101·854$ mm उत्तर

उदाहरण 4. एक solid steel shaft को 75 kW, 200 r.p.m. पर transmit करनी है। Allowable shear stress को 70 MN/m^2 लेते हुए शाफ्ट का उचित व्यास ज्ञात कीजिये यदि प्रत्येक revolution में transmit महत्तम आघूर्ण माध्य से 30% तक बढ़ जाता है। [U.K. 2010 (Winter)]

A solid steel shaft has to transmit 75 kW at 200 r.p.m. Taking allowable shear stress as 70 MN/m^2, find the suitable diameter for the shaft, if the maximum torque transmitted on each revolution exceeds the mean by 30%.

हल—दिया है, H.P. = 75 kW, $N = 200$ rpm, $\tau = 70\ MN/m^2 = 70\ N/mm^2$

$\text{H.P.} = \frac{2\pi NT}{60 \times 1000}$ सूत्र से,

औसत बलाघूर्ण $(T_{average}) = \frac{\text{H.P.} \times 60 \times 1000}{2 \times \pi N} = \frac{75 \times 60 \times 1000}{2\pi \times 200}$

$\therefore$ $T_{average} = 3582·802548\ N\text{-}m$

या $T_{mean} = 3582802·55\ N\text{-}mm$

$\therefore$ अब अधिकतम बलाघूर्ण $(T_{max}) = T_{mean} + T_{mean} \times 30\%$

$\therefore$ $T_{max} = T_{mean}\left[1 + \frac{30}{100}\right] = T_{mean} \times 1·30$

या $T \Rightarrow T_{max} = 3582802·55 \times 1·30 = 4657643·31$ in N-mm

अब मरोड़ सम्बन्ध, $\frac{T}{J} = \frac{\tau}{R}$ सूत्र से

$$\frac{T}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{\tau}{\frac{d}{2}} \quad \text{या} \quad d^3 = \frac{16T}{\pi \times \tau} = \frac{16 \times 4657643·31}{\pi \times 70}$$

$\therefore$ $d^3 = 339045·92$ या $d = 69·729$ mm

अत: शाफ्ट का उचित व्यास (Dia) $d = 69·73$ mm उत्तर

उदाहरण 5. किसी शाफ्ट पर अधिकतम बल-घूर्ण (torque) औसत मान (mean value) से 30 प्रतिशत अधिक है और अधिकतम कर्तन प्रतिबल (shear stress) 55 MPa है। यदि शाफ्ट द्वारा 120 rpm पर 44 kW पारेषित (transmit) की जाती है तो शाफ्ट का व्यास ज्ञात कीजिये। यदि $G = 80$ GPa तो शाफ्ट की 2 m लम्बाई के लिये मरोड़-कोण (angle of twist) भी ज्ञात कीजिये। (U.P.)

हल—$\because$ $\text{H.P.} = \frac{2\pi NT}{60 \times 1000}$ या $T_{\text{औसत (mean)}} = \frac{HP \times 60 \times 1000}{2\pi N}$

या $T_{mean} = \frac{44 \times 60 \times 1000}{2 \times \pi \times 120} = 3503·184713\ N\text{-}m$

$\therefore$ अधिकतम बलाघूर्ण, $T_{max} = T_{mean} + T_{mean} \times 30\%$

$= T_{mean} \times 1·30$

$= 3503·1847 \times 1·30\ N\text{-}m$

$= 4554·140127 \times 1000\ N\text{-}mm$

$= 4554140·127\ N\text{-}mm$

अब $\frac{T}{J} = \frac{\tau}{R}$ सूत्र से,

$$\frac{4554140·127}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{55}{\frac{d}{2}} \quad \text{या} \quad d^3 = 421709·9129$$

या शाफ्ट का व्यास (Dia of shaft) $d = 74·99 = 75$ mm उत्तर

अब $\frac{T}{J} = \frac{G\theta}{l}$ सूत्र में $d = 75$ mm प्रयोग करने पर

$$\frac{4554140·127}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{(80 \times 1000) \times \theta}{(2 \times 1000)} \quad \text{या} \quad \theta = 0·03667 \text{ radian}$$

या मरोड़ कोण (angle of twist) $\theta = 0·3667 \times \frac{180}{\pi} = 2·1°$ उत्तर

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

उदाहरण 6. एक ठोस वृत्ताकार शाफ्ट 300 rpm पर 110 kW शक्ति पारेषित (transmit) करता है तो शाफ्ट का व्यास (Dia) ज्ञात कीजिये जबकि कर्तन प्रतिबल 45 MPa से अधिक न हो एवं ऐंठन कोण (angle of twist) 2° से अधिक न हो। शाफ्ट की लम्बाई 3 m मान लीजिये। $G = 80$ GN/m^2 लें। [U.K. 2009 (W)]

हल—दिया है, H.P. = 110 kW, $N = 300$ rpm, τ या $Q = 45$ MPa $= 45$ N/mm^2

$$\theta = 2° = 2 \times \frac{\pi}{180} = 0{\cdot}035 \text{ radian}$$

अब H.P. सूत्र द्वारा, $$T_{average} = \frac{HP \times 60 \times 1000}{2\,\pi\,N} = \frac{110 \times 60 \times 1000}{2 \times \pi \times 300}$$

∴ $$T_{average} = 3503{\cdot}18471 \text{ N-m}$$

∵ $$T_{max} = T = 3503184{\cdot}71 \text{ N-mm (max. torque)}$$

अब $\frac{T}{J} = \frac{\tau}{R}$ से, $$\frac{3503184{\cdot}71}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{45}{\frac{d}{2}}$$

या $$d^3 = 396479{\cdot}4049 \quad \text{या} \quad d = 73{\cdot}46 \text{ mm}$$

अब $\frac{T}{J} = \frac{G\theta}{l}$ द्वारा, (यहाँ $G = 80 \times 1000$ N/mm^2 होगा)

$$\frac{3503184{\cdot}71}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{(80 \times 1000) \times 0{\cdot}035}{3 \times 1000}$$

∴ $$d^4 = 38251334{\cdot}41 \quad \text{या} \quad d = 78{\cdot}64 \text{ mm}$$

∴ शाफ्ट का उचित (अथवा सुरक्षित) व्यास $d = 78{\cdot}6$ mm होगा।

(∵ अधिक वाला व्यास ही सुरक्षित होता है) उत्तर

उदाहरण 7. शक्ति पारेषण शाफ्ट द्वारा कार्य करने के लिये सन्तुष्टिपूर्ण स्थितियाँ इस प्रकार हैं : (अ) शाफ्ट का मरोड़ 1° से अधिक न हो जबकि लम्बाई व्यास से 15 गुनी हो, एवं (ब) कर्तन प्रतिबल 55 न्यूटन प्रति वर्ग मिमी से अधिक न हो। यदि $G = 8 \times 10^4$ N/mm^2 तो वास्तविक कार्यशील प्रतिबल क्या है तथा शाफ्ट का व्यास क्या है यदि 1·0 MW शक्ति 240 च० प्र० मि० पर पारेषित करनी हो।

हल—सूत्र के अनुसार, $$T = \frac{\text{H.P.} \times 60 \times 1000}{2\pi N} = \frac{1 \times 10^3 \times 60 \times 1000}{2\,\pi \times 240} = 39788{\cdot}73 \text{ N-m}$$

$$= 39{\cdot}8 \text{ k N-m}$$

अब $\frac{T}{J} = \frac{Q}{r}$ से (कर्तन प्रतिबल के प्रतिबन्ध के लिये)

$$\frac{39{\cdot}8 \times 10^3}{\pi d^4/32} = \frac{55 \times 10^6}{d/2}$$ (जहाँ d = शाफ्ट व्यास)

∴ $$d^3 = \frac{39{\cdot}8 \times 10^3 \times 32}{\pi \times 55 \times 10^6 \times 2} = 3{\cdot}685 \times 10^{-3}$$

∴ $$d = 1{\cdot}545 \times 10^{-1} \text{ m} = 154{\cdot}5 \text{ mm}$$

फिर $\frac{T}{J} = \frac{G\theta}{l}$ से, (θ के प्रतिबन्ध के लिये)

$$\frac{39{\cdot}8 \times 10^3 \times 32}{\pi d^4} = \frac{80 \times 10^9}{15 \times d} \times \frac{\pi}{180°}$$

$$\left[\because \theta = 1° = \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन तथा } l = 15 \times d\right]$$

∴ $$d^3 = \frac{39{\cdot}8 \times 10^3 \times 32 \times 15 \times 180}{80 \times 10^9 \times \pi^2} = 4355{\cdot}2 \times 10^{-6}$$

∴ $$d = 163{\cdot}3 \times 10^{-3} \text{ m} = 163{\cdot}3 \text{ mm}$$

अतः शाफ्ट का अभीष्ट व्यास = 163·3 mm अधिक मान का होगा जो कि दोनों प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करता है। उत्तर

अब 163·3 mm शाफ्ट व्यास के लिये उसमें उपजा वास्तविक कार्यशील प्रतिबल (Shear stress)

अब $\frac{T}{J} = \frac{q}{R}$ सूत्र से, $$q = \frac{TR}{J} = \frac{39{\cdot}8 \times 10^3}{\pi (163{\cdot}3 \times 10^{-3})^4/32} \times \frac{163{\cdot}3 \times 10^{-3}}{2}$$

$$= 46{\cdot}555 \text{ MN/m}^2$$

$$= \mathbf{46{\cdot}555 \text{ N/mm}^2}$$

उदाहरण 8. एक खोखली शाफ्ट के आन्तरिक एवं बाह्य व्यास का मान क्रमश: 20 cm तथा 30 cm हैं। यदि शाफ्ट पदार्थ के लिये अपरूपण प्रतिबल (allowable shear stress) 70 N/mm^2 हो तथा अधिकतम ऐंठन बल घूर्ण (torque), औसत ऐंठन बलघूर्ण से 25 प्रतिशत अधिक हो तो 100 r.p.m. पर संचारित होने वाली औसत शक्ति का मान ज्ञात कीजिये। उत्तर

हल—शाफ्ट का ध्रुवीय जड़ता घूर्ण (polar moment of inertia),

$$J = \frac{\pi}{32}(30^4 - 20^4) = \frac{\pi}{32} \times 65 \times 10^4 \text{ cm}^4 = 6{\cdot}38 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

हमें दिया है, कर्तन प्रतिबल $\tau = 70$ N/mm^2, $R = 15$ cm $= 150$ mm

∴ $\frac{T}{J} = \frac{\tau}{R}$ से,

$$T = \frac{J \times \tau}{R} = \frac{6{\cdot}38 \times 10^8 \times 70}{150}$$

∴ $$T_{max} = T = 2{\cdot}977 \times 10^8 \text{ N-mm} = 2{\cdot}977 \times 10^5 \text{ N-m}$$

अब $$T_{max} = T_{average} + T_{average} \times 25\% = T_{average} \times 1{\cdot}25$$

या $$T_{average} = T_{max}/1{\cdot}25 = \frac{2{\cdot}977 \times 10^5}{1{\cdot}25} = 2{\cdot}38 \times 10^5 \text{ N-m}$$

अब शक्ति, $$\text{H.P.} = \frac{2\pi NT}{60 \times 1000} = \frac{2\pi \times 100 \times 2{\cdot}38 \times 10^5}{60 \times 1000} = 2491 \text{ kW}$$ उत्तर

उदाहरण 9. एक खोखले शाफ्ट के बाह्य तथा आन्तरिक व्यास क्रमश: 40 cm तथा 30 cm हैं। यदि 10 m लम्बाई के मरोड़ कोण 1° हो तो शाफ्ट द्वारा कितना अधिकतम मरोड़ घूर्ण पारेषित किया जायेगा? ($C = 0{\cdot}8 \times 10^5$ N/mm^2) मानिये।

हल—सूत्र $\frac{T}{J} = \frac{C\theta}{l}$ के अनुसार,

$$\text{मरोड़ घूर्ण} = T = \frac{C\theta \times J}{l}$$

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

अब,

$$J = \frac{\pi}{32}[d_o^4 - d_i^4] = \frac{\pi}{32} \times 10^4 (4^4 - 3^4)$$

$$= 17{\cdot}17 \times 10^4 \text{ cm}^4 = 17{\cdot}17 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

∴ $$T = \frac{C \times \theta \times J}{l} = 0{\cdot}8 \times 10^5 \times \frac{\pi}{180} \times 17{\cdot}17 \times 10^8 \times \frac{1}{10 \times 10^3}$$

$$= 0{\cdot}23974 \times 10^9 \text{ N-mm}$$

अत: $$T = 239{\cdot}74 \text{ kN-m}$$ उत्तर

उदाहरण 10. एक खोखला वृत्ताकार शाफ्ट 80 चक्कर प्रति मिनट पर घूमते हुए 294 kW पारेषित करता है। शाफ्ट पदार्थ के लिए अधिकतम कर्तन प्रतिबल 60 न्यूटन/मिमी² है। यदि अधिकतम मरोड़ घूर्ण, माध्य मरोड़ घूर्ण से 40% अधिक है, तो शाफ्ट का बाह्य व्यास तथा आन्तरिक व्यास ज्ञात कीजिये। मान लीजिए कि शाफ्ट का आन्तरिक व्यास, बाह्य व्यास का 0·6 गुना है। **[U.K. 2007 (W)]**

हल— ∵ $$\text{H.P.} = \frac{2\pi NT}{60 \times 1000}$$

या माध्य मरोड़ घूर्ण $(T_{mean}) = \dfrac{\text{H.P.} \times 60 \times 1000}{2\pi N}$

या $$T_{mean} = \frac{294 \times 60 \times 1000}{2\pi \times 80} = 35093{\cdot}66495 \text{ N-m}$$

$$= 35093664{\cdot}95 \text{ N-mm}$$

अब अधिकतम मरोड़ घूर्ण

$$(T_{max}) = T_{mean} + T_{mean} \times 40\%$$

$$= T_{mean} \times 1{\cdot}40$$

$$= 35093664{\cdot}95 \times 1{\cdot}40 = 49131130{\cdot}93 \text{ N-mm}$$

∴ $$J = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{32}$$ (यहाँ प्रश्न के अनुसार $d_i = 0{\cdot}6 \times d_o$)

$$= \frac{\pi}{32} \times d_o^4 [1 - (0{\cdot}6)^4] = 0{\cdot}08545\, d_o^4 \text{ mm}^4$$

तथा शाफ्ट की त्रिज्या (outer radius) $R = \dfrac{d_o}{2}$ तथा τ या $Q = 60 \text{ N/mm}^2$ है।

∴ मरोड़ सम्बन्ध से, $\dfrac{T}{J} = \dfrac{\tau}{R}$ या $\dfrac{49131130{\cdot}93}{0{\cdot}08545 \times d_o^4} = \dfrac{60}{\frac{d_o}{2}}$

∴ $d_o^3 = 4791411{\cdot}247$ या $d_o = \mathbf{168{\cdot}58 \text{ mm}}$ उत्तर

तथा आन्तरिक व्यास $d_i = 0{\cdot}6 \times d_o = \mathbf{101{\cdot}15 \text{ mm}}$ उत्तर

उदाहरण 11. किसी समुद्री जहाज की शाफ्ट 7·5 m लम्बी तथा 30 cm व्यास की है। इस शाफ्ट के लिये अभिकल्पित (designed) कर्तन प्रतिबल (shear stress) 43 MPa तथा मरोड़ कोण (angle of twist) 1·5° से अधिक नहीं होना चाहिये। इन दशाओं में शाफ्ट के लिये अधिकतम सुरक्षित (safe) बलघूर्ण (torque) ज्ञात कीजिये यदि G = 84 GPa है।

हल—दिया है, $l = 7{\cdot}5$ m, $d = 30$ cm $= 0{\cdot}3$ m तथा $\tau = 43 \times 10^6$ MPa

$$\theta = 1{\cdot}5° = \frac{\pi}{180°} \times 1{\cdot}5 = 2{\cdot}62 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

तथा $$G = 84 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

अधिकतम कर्तन प्रतिबल (shear stress) τ के लिये आवश्यक बल-घूर्ण (Torque),

$$T_1 = \frac{J.\tau}{R} = \frac{\pi d^4}{32} \times \frac{43 \times 10^6}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16} \times 43 \times 10^6$$

$$= \frac{\pi}{16} \times (0{\cdot}3)^3 \times 43 \times 10^6 = 0{\cdot}228 \times 10^6 \text{ N-m} = 0{\cdot}228 \text{ MN-m}$$

अब 1·5° मरोड़ कोण के लिये अधिकतम बल-घूर्ण (Torque),

$$T_2 = \frac{G\theta \times J}{l} = \frac{84 \times 10^9 \times 2{\cdot}62 \times 10^{-2} \times \pi(0{\cdot}3)^4}{7{\cdot}5 \times 32}$$

$$= 0{\cdot}233 \text{ MN-m} = 0{\cdot}233 \times 10^6 \text{ N-m}$$

बल-घूर्ण (Torques) के इन दोनों मानों में से हमें वह मान चुनना है जो कि अधिकतम कर्तन प्रतिबल (shear stress) τ तथा अधिकतम मरोड़ कोण θ, दोनों प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट करता हो।

यहाँ T_2 का मान दोनों प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट नहीं करता तथा T_1 के मान से कर्तन प्रतिबल तो 43 MPa आता है और मरोड़ कोण θ का मान भी 1·5° से कम आता है। अत: T_1 का मान दोनों प्रतिबन्धों की सीमाओं (Limits) में रहता है। अत: अधिकतम सुरक्षित बलघूर्ण (Torque) T_1 होगा। (क्योंकि T का कम वाला मान सुरक्षित होता है)

∴ $$T_1 = 0{\cdot}228 \text{ MN-m} = 228 \text{ kN-m}$$ उत्तर

उदाहरण 12. '2d' व्यास की एक शाफ्ट का सामर्थ्य (strength) तथा 'd' व्यास की किसी दूसरी शाफ्ट की सामर्थ्य (h) में अनुपात ज्ञात कीजिये। दोनों शाफ्टों का पदार्थ एक ही है। **(U.P.)**

हल—माना कि शाफ्टों के पदार्थ के लिये अधिकतम कर्तन प्रतिबल (shear stress) का मान Q है।

2d व्यास वाली शाफ्ट पर अधिकतम बल-घूर्ण (torque)

$$T_1 = \frac{qJ_1}{R_1} = q \times J_1 \times \frac{2}{2d}$$ $\left(\because \dfrac{T}{J} = \dfrac{q}{R} \text{ से}\right)$

d व्यास वाली शाफ्ट पर अधिकतम बलघूर्ण (torque)

$$T_2 = \frac{qJ_2}{R_2} = Q \times J_2 \times \frac{2}{d}$$

अब सामर्थ्यों में अनुपात, $$\frac{T_1}{T_2} = qJ_1 \frac{2 \times d}{2d \times Q \times J_2 \times 2} = \frac{J_1}{2J_2}$$

या $$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi(2d)^4}{32} \times \frac{1}{2} \times \frac{32}{\pi d^4}$$

$$= \frac{16}{32} \times \frac{1}{2} \times \frac{32}{1} = 8$$ उत्तर

उदाहरण 13. एक ही भार, लम्बाई तथा पदार्थ से बनी, एक ही अधिकतम मरोड़ प्रतिबल (torsional stress) वाली एक ठोस तथा एक खोखली शाफ्ट के द्वारा पारेषित (transmitted) (बलघूर्णों) (torques) की तुलना करिये। खोखली शाफ्ट के आन्तरिक व्यास का बाह्य व्यास के साथ अनुपात 'n' है। **[U.K. 2006, S; U.P. 2005]**

हल—माना ठोस शाफ्ट का व्यास (dia of solid shaft) $= d$

खोखली शाफ्ट के व्यास क्रमश: (dia of hollow shaft) $= d_i$ तथा d_o हैं।

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

$\because$ भार W = आयतन (volume) × घनत्व (density)

= क्षेत्रफल × लम्बाई × घनत्व

$W = A \times L \times$ density

$\because$ लम्बाई तथा पदार्थ समान दिया होने पर, भार $(W) \propto$ क्षेत्रफल (A)

$W_s = W_h$ दिया होने पर,

$\therefore$ $A_s = A_h$ होगा

$\therefore$ $\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (d_o^2 - d_i^2)}{4}$ या $d^2 = d_o^2 - d_i^2$

परन्तु दिया है $\frac{d_i}{d_o} = n$ या $d_i = n \times d_o$

$\therefore$ $d^2 = d_o^2 (1 - n^2)$ या $d = d_o \sqrt{(1-n^2)}$ ...(i)

अब पारेषित बल आघूर्णों (Torque) में तुलना (ratio)—

$$\frac{T_s}{T_h} = \frac{J_s \times \frac{Q}{R_s}}{J_h \times \frac{Q}{R_h}}$$

[यहाँ दोनों शाफ्टों के पदार्थ समान हैं अत: कर्तन प्रतिबल Q भी समान होंगे]

$$= \frac{J_s \times R_h}{J_h \times R_s} = \frac{\frac{\pi d^4}{32} \times \frac{d_o}{2}}{\frac{\pi}{32}(d_o^4 - d_i^4) \times \frac{d}{2}} = \frac{d^3 \times d_o}{d_o^4 (1 - n^4)}$$

$$= \frac{d^3}{d_o^3 (1-n^2)(1+n^2)}$$ [समी० (I) से d का मान रखने पर]

$$= \frac{d_o^3 (1-n^2)\sqrt{(1-n^2)}}{d_o^3 (1-n^2)(1+n^2)} = \frac{\sqrt{(1-n^2)}}{(1+n^2)}$$ उत्तर

उदाहरण 14. सिद्ध कीजिये कि एक ही पदार्थ, भार तथा लम्बाई की खोखली तथा ठोस शाफ्टों की सामर्थ्य (strength) का अनुपात $\frac{n^2+1}{n\sqrt{(n^2-1)}}$ है जहाँ खोखली शाफ्ट के बाहरी तथा अन्त: (internal) व्यासों का अनुपात n है। **[U.K. 2008, W; U.P. 2004]**

हल—माना ठोस शाफ्ट का व्यास (dia of solid shaft) = d

खोखली शाफ्ट के अन्त: तथा बाहरी व्यास (inner & outer dia of hollow shaft) क्रमश: d_i तथा d_o हैं जिनमें $\frac{d_o}{d_i} = n$ दिया है।

$\because$ दोनों शाफ्टें समान पदार्थ की हैं, अत: दोनों के कर्तन मापांक (modulus of regidity) G भी समान होंगे।

हम जानते हैं कि पदार्थ भार तथा लम्बाई समान होने पर, भार $(W) \propto$ क्षेत्रफल (A)

[$\because$ भार W = आयतन × घनत्व या $W = A \times L \times$ density]

$\therefore$ $A_s = A_h$ होगा।

$\therefore$ $\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (d_o^2 - d_i^2)}{4}$ या $d^2 = d_o^2 - d_i^2$

$= n^2 d_i^2 - d_i^2$

या $d^2 = d_i^2 (n^2 - 1)$ या $d = d_i \sqrt{(n^2-1)}$ ... (i)

$\because$ शाफ्ट की सामर्थ्य (strength), उसके द्वारा पारेषित बलाघूर्ण (torque) पर निर्भर करती है। अत: सामर्थ्य में अनुपात = बलाघूर्णों (torques) में अनुपात होगा।

$$\therefore \quad \frac{T_h}{T_s} = \frac{J_h \times \frac{\tau}{R_h}}{J_s \times \frac{\tau}{R_s}}$$

[जहाँ कर्तन प्रतिबल (shear stress) τ के मान भी समान पदार्थों के समान होते हैं।]

$$= \frac{J_h \times R_s}{J_s \times R_h}$$

$$= \frac{\frac{\pi (d_o^4 - d_i^4)}{32} \times \frac{d}{2}}{\frac{\pi d^4}{32} \times \frac{d_o}{2}} = \frac{d_i^4 (n^4 - 1)}{d^3 \times n d_i} = \frac{d_i^3 (n^2-1)(n^2+1)}{d^3 \times n}$$

समी० (i) से d का मान रखने पर,

$$\frac{T_h}{T_s} = \frac{(n^2-1)(n^2+1)}{n \times (n^2-1)\sqrt{(n^2-1)}} = \frac{n^2+1}{n\sqrt{(n^2-1)}}$$ उत्तर

उदाहरण 15. दो ठोस तथा खोखली शाफ्टों की लम्बाइयाँ बराबर हैं। उनके लिये किसी बल-घूर्ण (torque) पर अधिकतम कर्तन प्रतिबल के मान भी बराबर हैं। यदि खोखली शाफ्ट का अन्त: व्यास, बाहरी का $\frac{2}{3}$ हो तो खोखली तथा ठोस शाफ्टों के भार में अनुपात ज्ञात कीजिये। **[U.K. 2011, B.P.]**

हल—माना ठोस तथा खोखली शाफ्टों के व्यास क्रमानुसार d, d_i तथा d_o हैं तथा खोखली के लिये दिया है—

अन्त: व्यास (inner dia) $d_i = \frac{2}{3} \times$ बाहरी व्यास (outer dia) d_o

$\therefore$ $d_o = \frac{3}{2} d_i = 1{\cdot}5 \times d_i$ ... (i)

दिया है दोनों शाफ्टों के लिये किसी समान बलाघूर्ण (torque) T पर कर्तन प्रतिबल (shear stress) q भी समान हैं।

$\therefore$ $T_s = T_h$ तथा $q_s = q_h = Q$ माना

$\therefore$ $J_s \times \frac{Q}{R_s} = J_h \times \frac{Q}{R_h}$ या $\frac{J_s}{R_s} = \frac{J_h}{R_h}$

या $$\frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi}{32}(d_o^4 - d_i^4)}{\frac{d_o}{2}}$$ या $d^3 = \frac{(d_o^4 - d_i^4)}{d_o}$

या $$d^3 = \frac{d_i^4 [(1{\cdot}5)^4 - 1]}{1{\cdot}5 \times d_i} = d_i^3 \times 2{\cdot}71$$

या $$d = 1{\cdot}394\, d_i \qquad \text{... (ii)}$$

∴ खोखली तथा ठोस के भारों में अनुपात,

$$\frac{W_h}{W_s} = \frac{A_h}{A_s}$$ [∵ T तथा Q समान होने पर पदार्थ का घनत्व (density) भी समान होगा ∴ $W \propto$ Area होगा]

$$\frac{W_h}{W_s} = \frac{\frac{\pi(d_o^2 - d_i^2)}{4}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d_o^2 - d_i^2}{d^2}$$

$$= \frac{d_i^2\,(1{\cdot}5^2 - 1)}{d_i^2\,(1{\cdot}394)^2} = 0{\cdot}6432$$ उत्तर

उदाहरण 16. एक ही पदार्थ तथा लम्बाई का एक खोखला शैफ्ट तथा एक ठोस शैफ्ट पर विचार कीजिये। यदि उनकी मरोड़ी सामर्थ्य एक हो तो खोखले शैफ्ट के भार की तुलना ठोस शैफ्ट के भार से कीजिये। खोखले शैफ्ट के आन्तरिक व्यास तथा बाह्य व्यास का अनुपात 0·4 मान लीजिये। **(U.P. 2014, MOS)**

हल—माना ठोस shaft का व्यास (Diameter) d तथा खोखली शॉफ्ट (hollow shaft) के बाहरी (outer) व आन्तरिक (internal) व्यास d_o व d_i हैं। दिया है,

$$\frac{d_i}{d_o} = 0{\cdot}4 \quad \text{या} \quad d_i = 0{\cdot}4 \times d_o$$

∵ दोनों शाफ्टों के लिए पदार्थ, लम्बाई एवं मरोड़ी सामर्थ्य समान हैं (they have the same material, length and torsional strength)

अत: Shear stress $q_{\text{solid}} = q_{\text{hollow}} = q$ (माना)

प्रश्नानुसार, $$T_s = T_h$$

∴ $$J_s \times \frac{q}{R_s} = J_h \times \frac{q}{R_h} \quad \text{या} \quad \frac{J_s}{R_s} = \frac{J_h}{R_h}$$

∴ $$\frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{32}}{\frac{d_o}{2}} \quad \text{या} \quad d^3 = \frac{(d_o^4 - d_i^4)}{d_o}$$

या $$d^3 = \frac{d_o^4\,[1 - (0{\cdot}4)^4]}{d_o} = 0{\cdot}9744 \times d_o^3$$

∴ $$d = 0{\cdot}9914 \times d_o$$

अत: खोखले तथा ठोस शाफ्ट के भारों में अनुपात

$$\frac{W_h}{W_s} \Rightarrow \frac{A_h}{A_s}$$ [∵ शाफ्टों के material तथा length समान हैं ∴ $W \propto$ Area होगा]

⇒ $$\frac{\frac{\pi(d_o^2 - d_i^2)}{4}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d_o^2 - d_i^2}{d^2} = \frac{d_o^2\,[1 - (0{\cdot}1)^2]}{(0{\cdot}9914)^2 \times d_o^2}$$

$$\frac{W_h}{W_s} = 0{\cdot}855 \quad \text{अथवा} \quad \frac{W_s}{W_h} = 0{\cdot}855 = 1{\cdot}1696$$ उत्तर

उदाहरण 17. 100 mm व्यास की एक ठोस शाफ्ट पर 9·6 kN-m का बल-घूर्ण लग रहा है। ठोस शाफ्ट के स्थान पर एक खोखली शाफ्ट प्रयोग की जाती है। खोखली शाफ्ट का बाह्य व्यास, अन्त: व्यास का दुगुना है। खोखली शाफ्ट की सतह पर कर्तन प्रतिबल (shear stress) ठोस जितना ही उपजाना (develop) है। दोनों शाफ्टों की 7 m लम्बाई के लिये उनके भारों का अनुपात तथा मरोड़ कोणों का अनुपात ज्ञात कीजिये। दोनों शाफ्टें एक ही इस्पात (steel) की बनी हैं जिसके लिये G = 80 GPa हैं। **(U.P.)**

हल—हम जानते हैं कि दोनों शाफ्टों के कर्तन प्रतिबल (shear stress) समान दिये हैं तथा ठोस के स्थान पर खोखली तब ही प्रयोग की जा सकती है जबकि दोनों के द्वारा पारेषित बलाघूर्ण (torque) भी समान हों।

अत: कर्तन प्रतिबल $$q_s = q_h = Q \text{ (माना)}$$

तथा $$T_s = T_h$$ (प्रश्न की condition के अनुसार)

$$J_s \times \frac{Q}{R_s} = J_h \times \frac{Q}{R_h} \quad \text{या} \quad \frac{J_s}{R_s} = \frac{J_h}{R_h}$$

या $$\frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{\frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{32}}{\frac{d_o}{2}} \quad \text{या} \quad d^3 = \frac{d_o^4 - d_i^4}{d_o}$$

या $$d^3 = \frac{d_i^4\,(16 - 1)}{2\,d_i}$$ (प्रश्नानुसार $d_o = 2 \times d_i$ है)

$$d^3 = 7{\cdot}5 \times d_i^3 \quad \text{या} \quad d = 1{\cdot}9574 \times d_i \qquad \text{... (i)}$$

परन्तु प्रश्न में $d = 100$ mm दिया है। अत: $d_i = 51$ mm उत्तर

तथा $$d_o = 2 \times d_i = 2 \times 51 = 102 \text{ mm}$$ उत्तर

अब भारों में अनुपात, $$\frac{W_s}{W_h} = \frac{A_s}{A_h} = \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\frac{\pi(d_o^2 - d_i^2)}{4}} = \frac{d^2}{d_o^2 - d_i^2}$$

या $$\frac{W_s}{W_h} = \frac{(100)^2}{(102)^2 - (51)^2} = 1{\cdot}282$$ उत्तर

अब मरोड़ कोणों (angle of twist) में अनुपात,

$$\frac{\theta_s}{\theta_h} = \frac{\frac{Q \times l}{R_s \times G}}{\frac{Q \times l}{R_h \times G}} = \frac{R_h}{R_s}$$

∴ $$\frac{\theta_s}{\theta_h} = \frac{\frac{d_o}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{d_o}{d} = \frac{102}{100} = 1{\cdot}02$$

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

उदाहरण 18. एक 50 mm व्यास की शाफ्ट द्वारा संचारित (transmitted) शक्ति (power) का मान ज्ञात कीजिये यदि शाफ्ट 500 rpm से घूमता हो तथा इसमें उत्पन्न अधिकतम अपरूपण या कर्तन प्रतिबल (shear stress) का मान 50 MPa है। यदि शाफ्ट के दृढ़ता गुणांक (modulus of rigidity) का मान 80 GPa हो तो इसके 2 m लम्बाई में मरोड़ कोण (angle of twist) डिग्री में ज्ञात कीजिये। [U.K. 2013 (B.P.)]

हल—ज्ञात है, $d = 50$ mm, $N = 500$ rpm तथा $Q = 50\text{ MPa} = 50\times10^6\ \text{N/m}^2$

मरोड़ सूत्र से, $\frac{T}{J} = \frac{Q}{R}$ $\quad\therefore T = \frac{QJ}{R}$

$$\therefore \quad T = \frac{50\times10^6\times\pi d^4}{32}\times\frac{2}{d} = \frac{50\times10^6\times\pi d^3}{16}$$

$$= \frac{50\times10^6\times\pi}{16}\times(5\times10^{-2})^3 = 1227{\cdot}18\text{ N-m}$$

अब संचारित शक्ति (Power), $HP = \frac{2\pi NT}{60\times1000}$ kW

सूत्र से $$HP = \frac{2\times\pi\times500\times1227{\cdot}18}{60\times1000} = 64{\cdot}25\text{ kW}$$

फिर मरोड़ समीकरण से, $\frac{G\theta}{l} = \frac{Q}{R}$ $\quad\therefore \theta = \frac{Ql}{GR}$

यहाँ $l = 2$ m

$\therefore$ मरोड़ कोण, $$\theta = \frac{50\times10^6\times2}{80\times10^9\times2{\cdot}5\times10^{-2}}\times\frac{180}{\pi} = \mathbf{2{\cdot}865°}$$ उत्तर

उदाहरण 19. एक 100 mm व्यास का ठोस शाफ्ट तथा 0·75 व्यास अनुपात का खोखला शाफ्ट, जिसकी लम्बाई तथा पदार्थ ठोस शाफ्ट की भाँति हैं, को शक्ति पारेषित करनी है—

(अ) यदि खोखले तथा ठोस शाफ्ट की विमोटी दृढ़ताओं (torsional rigidities) का अनुपात 1·5 हो तो खोखले शाफ्ट का व्यास ज्ञात कीजिये।

(ब) यदि 300 kW के संप्रेषण (H.P.) के दौरान ठोस शाफ्ट का मरोड़ 2° हो जाता है तो ज्ञात कीजिये कि किस कोण से खोखला शाफ्ट घूमेगा यदि वह 400 kW शक्ति को उसी वेग तथा उसी अधिकतम प्रतिबल पर पारेषित करता है। [उत्तर—121·7 mm, 91·28 mm, 1·777°] (U.P. 2004)

हल—माना ठोस शाफ्ट का व्यास d तथा खोखले शाफ्ट के व्यास d_i तथा d_o हैं। अब हमें दिया है,

$$d = 100\text{ mm},\ \frac{d_i}{d_o} = 0{\cdot}75 \quad \text{या} \quad d_i = 0{\cdot}75\times d_o$$

$$\therefore \quad J_s = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(100)^4}{32} = \frac{\pi}{32}\times10^8$$

$$J_h = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{32} = \frac{\pi}{32}[d_o^4 - (0{\cdot}75)^4 d_o^4] = \frac{\pi}{32}d_o^4\times0{\cdot}6836$$

(अ) विमोटी दृढ़ताओं (torsional rigidities) में अनुपात $= 1{\cdot}5$ है।

$$\therefore \quad \frac{J_h\times G}{J_s\times G} = 1{\cdot}5 \quad \text{या} \quad \frac{\frac{\pi}{32}\times d_o^4\times0{\cdot}6836}{\frac{\pi}{32}\times(100)^4} = 1{\cdot}5$$

$$\text{या} \quad d_o^4 = 219426565{\cdot}2 \quad \text{या} \quad d_o = 121{\cdot}7\text{ mm}$$

$$\therefore \quad d_i = 0{\cdot}75\times d_o \Rightarrow 0{\cdot}75\times(121{\cdot}7) = 91{\cdot}28\text{ mm}$$

अतः खोखले शाफ्ट के बाह्य (outer) तथा अन्तः (internal) व्यास क्रमशः 121·7 mm तथा 92·28 mm हैं। उत्तर

(ब) $\frac{\text{खोखले (Hollow) शाफ्ट की H.P.}}{\text{ठोस (Solid) शाफ्ट की H.P.}} = \frac{400}{300}$ दिया है।

$$\therefore \quad \frac{\frac{2\pi NT_h}{60\times1000}}{\frac{2\pi NT_s}{60\times1000}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{या} \quad \frac{T_h}{T_s} = \frac{4}{3} \quad \text{या} \quad \frac{J_h\times\frac{G\theta_h}{l}}{J_s\times\frac{G\theta_s}{l}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{या} \quad \frac{\frac{\pi}{32}\times(121{\cdot}7)^4\times0{\cdot}6836\times\theta_h}{\frac{\pi}{32}\times(100)^4\times(2°)\times\frac{\pi}{180}} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \quad \theta_h = 0{\cdot}031037\text{ radian} = 1{\cdot}778°$$ उत्तर

उदाहरण 20. एक खोखले शाफ्ट का आन्तरिक व्यास, इसके बाह्य व्यास (outer dia) का $\frac{2}{3}$ गुना है। इसकी मरोड़ शक्ति की तुलना एक उसी वजन (weight) तथा पदार्थ (material) से बने ठोस शाफ्ट से कीजिये। (U.P. 2006)

हल—माना खोखले शाफ्ट के आन्तरिक व बाह्य व्यास d_i तथा d_o हैं।

दिया है, $d_i = \frac{2}{3}\times d_o$ माना ठोस शाफ्ट का व्यास d है।

$\because$ $W_h = W_s$ दिया है। (परन्तु लम्बाई व पदार्थ भी समान हैं)

$\therefore$ $A_h = A_s$ होगा।

$$\frac{\pi(d_o^2 - d_i^2)}{4} = \frac{\pi(d)^2}{4} \quad \text{या} \quad d_o^2 - d_i^2 = d^2$$

$$\text{या} \quad d_o^2\left[1 - \frac{4}{9}\right] = d^2 \quad \text{या} \quad d_o^2\times0{\cdot}555 = d^2$$

$$\text{या} \quad d_o = 1{\cdot}3423\times d$$

अतः मरोड़ शक्तियों की तुलना $= \frac{T_h}{T_s}$ का मान

$$\therefore \quad \frac{T_h}{T_s} = \frac{J_h\times\frac{q}{R_h}}{J_s\times\frac{q}{R_s}} = \frac{J_h\times R_s}{J_s\times R_h}$$

$$\frac{\frac{\pi}{32}\times(d_o^4 - d_i^4)\times\frac{d}{2}}{\frac{\pi}{32}d^4\times\frac{d_o}{2}} = \frac{(d_o^4 - d_i^4)}{d^3\times d_o}$$

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

या $$\frac{T_h}{T_s} = \frac{d_o^4\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]}{d^3 \times d_o} = \frac{d_o^3}{d^3} \times 0{\cdot}80247$$

$$= \frac{(1{\cdot}3423)^3 \times d^3}{d^3} \times 0{\cdot}80247$$

$$= 1{\cdot}94$$ उत्तर

उदाहरण 21. एक खोखले स्तम्भ (column) का बाह्य (outer) तथा आन्तरिक (internal) व्यास क्रमशः 40 mm तथा 30 mm हैं। यह 600 rpm पर 10 kW की शक्ति पारेषित करता है। शाफ्ट के आन्तरिक एवं बाह्य सतह (internal and outer surfaces) पर उत्पन्न अपरूपण प्रतिबल (shear stresses) तथा शाफ्ट का प्रति इकाई लम्बाई में ऐंठन कोण का मान ज्ञात कीजिये। $G = 80$ GPa मान लीजिये। (U.P. 2009)

हल—खोखले शाफ्ट का बाह्य व्यास d_o तथा आन्तरिक व्यास d_i है।

तो $$J = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{32} = \frac{\pi}{32}(40^4 - 30^4) = 171805{\cdot}8482 \text{ mm}^4$$

∴ $$\text{H.P.} = \frac{2\pi NT}{60 \times 1000} \text{ से}$$

$$T_{average} = \frac{10 \times 60 \times 1000}{2 \times 3{\cdot}14 \times 600}$$

$$T_{average} = 159{\cdot}2356688 \text{ N-m}$$

∴ $$T_{max.} = 159235{\cdot}6688 \text{ N-mm}$$

(1) खोखले शाफ्ट की आन्तरिक सतह पर अपरूपण प्रतिबल (Shear stress on inner surface of shaft)

∵ $$\left(r = \frac{30}{2} = 15 \text{ mm होगा}\right)$$

∴ $$\frac{T}{J} = \frac{q_1}{r}$$

या अपरूपण प्रतिबल (Shear stress)

$$q_1 = \frac{T}{J} \times r$$

$$q_1 = \frac{159235{\cdot}6688}{171805{\cdot}8482} \times 15 = 13{\cdot}9 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

(2) शाफ्ट की बाहरी सतह पर अपरूपण प्रतिबल (Shear stress) (यहाँ $R = \frac{40}{2} = 20$ mm)

∴ $$\frac{T}{J} = \frac{q_2}{R}$$

या $$q_2 = \frac{159235{\cdot}6688}{171805{\cdot}8482} \times 20 = 18{\cdot}5 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

(3) $$\frac{T}{J} = \frac{G\theta}{l} \text{ सूत्र से}$$

$$\frac{\theta}{l} = \frac{T}{J} \times \frac{1}{G} = \frac{159235{\cdot}6688}{171805{\cdot}8482 \times 80 \times 1000}$$

$$= 0{\cdot}00001158 \text{ radian per mm}$$

या $$\frac{\theta}{l} = 0{\cdot}000664°/\text{mm} = 0{\cdot}664°/\text{metre}$$ उत्तर

उदाहरण 22. एक खोखला शाफ्ट, जिसका बाहरी व्यास 100 mm तथा भीतरी व्यास 40 mm है, 900 rpm पर 5 kW शक्ति पारेषित करता है। यदि शाफ्ट का पदार्थ तथा rpm समान रहें तब उतनी ही शक्ति के पारेषण के लिये ठोस शाफ्ट का न्यूनतम व्यास ज्ञात कीजिये। उत्तर (U.P. 2006)

हल—खोखले शाफ्ट (hollow shaft) का $J = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{32}$

$$J_h = \frac{\pi(100^4 - 40^4)}{32} = 9561300 \text{ mm}^4$$

∵ शक्ति, $$\text{H.P.} = \frac{2\pi NT}{60 \times 1000}$$

या $$5 = \frac{2 \times 3{\cdot}14 \times 900 \times T_{hollow}}{60 \times 1000}$$

या $$T_h = 53{\cdot}07855 \text{ N-m}$$

या $$T_h = 53078{\cdot}55 \text{ N-mm}$$

∵ ठोस शाफ्ट (Solid shaft) की शक्ति (H.P.) = खोखले शाफ्ट की शक्ति (H.P.)

∴ $$T_{solid} = T_{hollow} = 53078{\cdot}55$$

या $$J_s \times \frac{\tau}{R_s} = J_h \times \frac{\tau}{R_h}$$ [यहाँ पदार्थ समान होने पर Shear stress समान होंगे।]

या $$\frac{\pi d^4}{32} \times \frac{1}{d/2} = 9561300 \times \frac{1}{100/2}$$ [यहाँ d = ठोस शाफ्ट का व्यास है।]

या $$\frac{\pi d^3}{16} = \frac{9561300}{50}$$

या $$d^3 = 973906{\cdot}0207$$

या $$d = 99{\cdot}122 \text{ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 23. एक सॉलिड स्टील शाफ्ट को 75 kW at 200 r.p.m. पर Transmit करनी है। Allowable Shear Stress को 70 MN/m^2 लेते हुए शाफ्ट का उचित व्यास ज्ञात कीजिए यदि प्रत्येक Revolution में Transmit महत्तम आघूर्ण माध्य से 30 प्रतिशत तक बढ़ जाता है। (U.K. 2012-13, W)

हल—दिया है, H.P. = 75 kW; $N = 200$ r.p.m., Q या $\tau = 70 \text{ MN/m}^2 = 70 \text{ N/mm}^2$

[Hint : H.P. के सूत्र से T_{mean} = (N-m में ज्ञात मान) को N-mm में बदलें तथा $T_{max} = T_{mean} \times 1{\cdot}30$ होगा।

फिर $\frac{T_{max}}{J} = \frac{\tau}{R}$ से d का मान ज्ञात करें।

$$d = 69{\cdot}706 \text{ mm}$$ उत्तर]

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

अभ्यास (Exercise)

1. निम्न रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये—
   (i) जब शाफ्ट पर केवल मरोड़ घूर्ण ही कार्य करता हुआ माना जाता है तो उसे .... कहते हैं।
   (ii) मरोड़ घूर्ण के कारण शाफ्ट में कर्तन प्रतिबल केन्द्र पर .... से परिधि पर .... तक बदलता है।
   (iii) शाफ्ट की मरोड़ दृढ़ता .... द्वारा प्रदर्शित होती है। (U.K. 2014, S)
   (iv) शाफ्ट पर मरोड़ घूर्ण उसकी लम्बाई की अक्ष पर .... समतल में लगता है।
   (v) यदि किसी शाफ्ट की काट का ध्रुवीय जड़ता घूर्ण J तथा उसका अर्धव्यास R है तो J/R के अनुपात को .... कहते हैं।
   (vi) शाफ्ट में शक्ति परेषित करते समय कर्तन के साथ-साथ .... प्रतिबल भी उपजते हैं।

रिक्त स्थानों के उत्तर

(i) शुद्ध मरोड़ (Pure Torsion), **(ii)** शून्य (Zero), अधिकतम (max.), **(iii)** $k = J \times G$, **(iv)** लम्ब (Perpendicular), **(v)** Z_P = ध्रुवीय आकृति मापांक, **(vi)** नमन (bending)

2. निम्न पदों को परिभाषित करिये तथा समझाइये—
   (i) मरोड़ घूर्ण (twisting moment)।
   (ii) शुद्ध मरोड़ (pure torsion)। (U.K. 2009, W)
   (iii) मरोड़ दृढ़ता (torsional rigidity)। (U.K. 2009, W)
   (iv) ध्रुवीय आकृति मापांक (polar modulus of section)। (U.P. 2004)
   (v) ध्रुवीय जड़ता घूर्ण (polar moment of intertia) एवं उपयोग। (U.K. 2009, W; U.P. 2002, 05, 06)
3. शाफ्टें कितने प्रकार की होती हैं?
4. सरल तथा शुद्ध मरोड़ (pure torsion) का क्या अर्थ है?
5. मरोड़ सम्बन्ध की मान्यतायें बताइये। (U.P.)
6. मरोड़ सम्बन्ध लिखिये तथा विभिन्न पद समझाइये। (U.P. 2013)
7. मरोड़ सम्बन्ध व्युत्पन्न कीजिये। (U.P. 2009)
8. एक ठोस शाफ्ट के लिए मरोड़ सूत्र की व्युत्पत्ति कीजिए तथा उसके परिच्छेद में अपरूपण प्रतिबल के बंटन को चित्र बनाकर दिखाइये। (U.P. 2006)
9. (i) ठोस एवं खोखली शाफ्ट की तुलना कीजिये तथा एक खोखली शाफ्ट के एक ठोस शाफ्ट पर लाभ समझाइये। दोनों में से किस शाफ्ट को वरीयता दी जाती है और क्यों? (U.P. 2000, 02, 03, 11)
   (ii) एक ही भार, पदार्थ व लम्बाई की एक खोखली शाफ्ट तथा ठोस शाफ्ट की सामर्थ्य की तुलना कीजिए, यदि खोखले शाफ्ट के लिए भीतरी व्यास के लिए बाहरी व्यास का अनुपात 3 है। (U.K. 2014, S, B.P.)
10. एक 125 mm व्यास का ठोस शैफ्ट 160 rpm पर 120 kW प्रेषण करता है। शैफ्ट में उत्पन्न अधिकतम अपरूपण प्रतिबल ज्ञात कीजिये। 7·5 m लम्बाई में ऐंठन कोण भी ज्ञात कीजिये। दृढ़ता गुणांक $= 8 \times 10^4$ **N / mm²** मान लीजिये।
    [उत्तर : $q = 18{\cdot}686$ N/mm², $\theta = 0{\cdot}028$ रेडियन] (U.P. 2014)
11. एक 80 mm व्यास वाली शाफ्ट 120 r.p.m. पर शक्ति संचारित करती है। यदि अधिकतम कर्तन प्रतिबल का मान 40 MPa हो तो शाफ्ट द्वारा संचारित शक्ति ज्ञात कीजिये। **[उत्तर : $HP = 50{\cdot}5$ kW] (U.K. 2014, S)**
12. एक ठोस शाफ्ट जिसका व्यास 50 mm है। 600 rpm पर 5 kw शक्ति संचरित करता है। शाफ्ट में उत्पन्न अधिकतम अपरूपण प्रतिबल (shear stress) q तथा उसके 2 मी० लम्बाई में ऐंठन कोण (angle of twist) θ ज्ञात कीजिए। शाफ्ट पदार्थ का दृढ़ता मापांक 80 GPa है। **[उत्तर : 3·24 N/mm², $3{\cdot}24 \times 10^3$ radian]** (U.P. 2012)

13. किसी शाफ्ट में कर्तन प्रतिबल (shear stress) 70 N/mm² से अधिक न होने देने के लिये, 150 kN-m बल-घूर्ण पर उसका व्यास ज्ञात कीजिये। शाफ्ट की लम्बाई 6 m है। [उत्तर—$d = 222$ mm]
14. 75 mm व्यास तथा 3 m लम्बी शाफ्ट एक सिरे पर बद्ध (fixed) है और स्वतन्त्र सिरे (free end) पर 1200 N-m के बलघूर्ण (torque) द्वारा मरोड़ी जाती (twisted) है। शाफ्ट के लिये मरोड़-कोण (angle of twist) ज्ञात कीजिये जबकि कर्तन मापांक (modulus of rigidity) $C = 80$ GPa है। [उत्तर—0·0145 radian = 0·83°]
15. यदि शाफ्ट में अनुमेय अपरूपण प्रतिबल 75 न्यूटन/मिमी² हो तो एक खोखले वृत्ताकार शाफ्ट, जो 100 च० प्र० मि० पर घूमता हो तथा 440 कि० वाट शक्ति पारेषित करता हो, का अभिकल्पन (design) करिये। शाफ्ट के आन्तरिक व्यास को बाहरी व्यास का 3/4 मानिये। [उत्तर—$d_i = 121{\cdot}5$ mm, $d_o = 162$ mm]
16. एक ठोस वृत्ताकार शाफ्ट 300 r.p.m. पर 110 kW शक्ति पारेषित करता हो तो व्यास निकालिये जबकि—
    (अ) कर्तन प्रतिबल 45 MPa से अधिक न बढ़ती हो।
    (ब) ऐंठन का कोण 2° से न बढ़ना हो जबकि चालक एवं चलित पुलियों के बीच दूरी 3 m हो, $G = 80$ GPa मानिये।
    [**Hint :** दोनों सीमाओं (q तथा θ) के मान पर व्यास d ज्ञात करें। फिर अधिक वाला d का मान ही सुरक्षित होगा।] [उत्तर—$d = 78{\cdot}7$ mm] **(U.K. 2009, W)**
17. एक शाफ्ट 180 r.p.m. घूमते हुए 95·6 kW शक्ति पारेषित करता है। यदि शाफ्ट के पदार्थ का अनुमेय प्रतिबल 60 MPa हो तो शाफ्ट का उपयुक्त व्यास ज्ञात करिये। शाफ्ट की 3 m लम्बाई में 1° से अधिक मरोड़ कोण नहीं होना चाहिये। $C = 80$ GPa मानिये।
18. एक ठोस शाफ्ट (shaft) का व्यास ज्ञात करें जो 160 परिक्रमण प्रति मिनट पर 90 kW शक्ति संप्रेषित करे यदि शाफ्ट में अपरूपण प्रतिबल 60 N/mm² तक सीमित रखा जाये। शाफ्ट की लम्बाई भी ज्ञात करें यदि सम्पूर्ण लम्बाई में 1 अंश (degree) से अधिक ऐंठन (twist) न होने पाये। $C = 8 \times 10^4$ N/mm² लें।
    [उत्तर—77 mm, 895·5 mm] **(U.P. 2004, 09)**
19. एक ठोस वृत्ताकार शाफ्ट 180 r.p.m. पर घूमते हुए 60 kW शक्ति पारेषित करता है। शाफ्ट पर अधिकतम बल आघूर्ण, माध्य बल आघूर्ण से 20% अधिक हो सकता है। शाफ्ट पदार्थ के लिये अधिकतम अनुमेय कर्तन प्रतिबल 65 MN/m² है। यदि शाफ्ट की 2·5 m लम्बाई में मरोड़ कोण (angle of twist) 1·2° से अधिक नहीं होना है, तो शाफ्ट के आवश्यक न्यूनतम व्यास की गणना कीजिये। मानिये $C = 80$ GPa । [उत्तर—88 mm]
20. एक खोखला वृत्ताकार शाफ्ट 80 च० प्र० मि० पर घूमते हुए 300 kW शक्ति पारेषित करता है। शाफ्ट पदार्थ के लिये अधिकतम कर्तन प्रतिबल 60 N/mm² है। यदि अधिकतम मरोड़ घूर्ण, माध्य मरोड़ घूर्ण से 40% अधिक हो तो शाफ्ट का वाह्य तथा आन्तरिक व्यास ज्ञात कीजिये। मान लीजिये कि शाफ्ट का आन्तरिक व्यास बाह्य व्यास का 0·6 गुना है।
    [उत्तर—169·76 mm, 101·85 mm] **(U.P. 2014, S) B.P.**
21. 6·35 cm व्यास की एक ठोस शाफ्ट 200 rpm पर घूम रही है। यदि अधिकतम कर्तन प्रतिबल (shearing stress) का मान 80 MPa है और अधिकतम बल-घूर्ण (torque) औसत से 25 प्रतिशत ज्यादा हो तो शाफ्ट द्वारा पारेषित (transmitted) शक्ति ज्ञात कीजिये जबकि $G = 100$ GPa । [उत्तर—66 kW] **(U.P. 2008)**
22. एक खोखला शाफ्ट, जिसके व्यास का अनुपात (आंतरिक/बाह्य) $\frac{3}{8}$ है, 330 kW शक्ति 110 rpm पर पारेषित करता है। यदि शाफ्ट में उत्पन्न अधिकतम अपरूपण प्रतिबल 60 N/mm² से अधिक न हो तथा उसके 3 m लम्बाई में उत्पन्न ऐंठन कोण 1·4 डिग्री से अधिक न हो तो न्यूनतम शाफ्ट व्यासों का मान ज्ञात कीजिये। Shear modulus of elasticity का मान 800 kN/mm² मान लीजिये। [उत्तर—136 mm, 51 mm]
23. एक खोखला शाफ्ट, जिसका बाहरी व्यास 100 mm तथा भीतरी व्यास 40 mm है, 900 rpm पर 5 kW शक्ति पारेषित करता है। यदि शाफ्ट का पदार्थ तथा rpm समान रहे तब उतनी ही शक्ति पारेषण के लिए ठोस शाफ्ट का न्यूनतम व्यास ज्ञात कीजिए। [उत्तर—99·14 mm] **(U.P. 200**

Scanned with CamScanner

24. 140 mm बाह्य व्यास व 120 mm आन्तरिक व्यास के एक खोखले इस्पाती शाफ्ट पर 10 kN-m का ऐंठन आघूर्ण आरोपित है। उसमें उत्पन्न अधिकतम अपरूपण प्रतिबल की गणना कीजिये। [उत्तर—40·33 N/mm^2]

25. एक ठोस वृत्ताकार शाफ्ट 200 rpm पर 73·55 kW शक्ति पारेषित करता है। यदि शाफ्ट की 2 m लम्बाई में ऐंठन कोण 1° से अधिक न होने पाये तथा अधिकतम अनुमेय कर्तन प्रतिबल 50 MPa हो तो शाफ्ट का व्यास ज्ञात कीजिये। मानिये $C = 100$ GPa। $T_m = T_a \times 1 \cdot 25$ मानिये। [उत्तर—85·1 mm] (U.P. 2007)

26. 80 rpm पर 147 kW शक्ति पारेषित करने के लिये इस्पात की खोखली शाफ्ट का बाह्य व्यास ज्ञात कीजिये जबकि कर्तन प्रतिबल का मान 50 MPa से अधिक नहीं होने देना है। शाफ्ट का अन्तः व्यास बाह्य व्यास का आधा है। [उत्तर—125 mm]

27. एक खोखले शाफ्ट को 100 rpm पर 14·7 kW शक्ति पारेषित करता है। यदि शाफ्ट का बाह्य व्यास आन्तरिक का दुगना हो तथा शाफ्ट पदार्थ में अधिकतम अपरूपण प्रतिबल 75 N/mm^2 से अधिक न होने पाये तो शाफ्ट के व्यासों को ज्ञात करिये। [उत्तर—47 mm, 23·5 mm]

28. एक खोखला वृत्ताकार शाफ्ट, जिसका बाह्य व्यास 200 मिमी० तथा आंतरिक व्यास 160 मिमी०, 180 चक्र प्रति मिनट से शक्ति पारेषित करता है, 3 मी० की लम्बाई में मरोड़ कोण 0·7° आँका गया। संचारित शक्ति (अश्व-शक्ति) और काट में उत्पन्न अधिकतम कर्तन प्रतिबल ज्ञात कीजिये यदि दृढ़ता गुणांक का मान $= 8 \times 10^4$ न्यूटन/मिमी^{2} हो। [उत्तर—569·48 कि० वाट, 32·58 न्यूटन/मिमी^{2}] (U.P. 2000, 03)

29. जड़त्व के ध्रुवीय आघूर्ण को परिभाषित कीजिए। इसका उपयोग क्या है? एक ठोस गोलाकार शाफ्ट का व्यास 100 mm है। यह 150 rpm पर 200 kW प्रेषित करता है। 5 m लम्बाई के लिये प्रतिबल की अधिकतम तीव्रता और ऐंठन कोण की गणना कीजिए। $G = 80$ GPa । [उत्तर—65 N/mm^2, 4·64] (U.P. 2005)

30. एक शाफ्ट में उत्पन्न अधिकतम अपरूपण प्रतिबल ज्ञात कीजिये जिसका व्यास 8 cm तथा जो 100 rpm पर 55·2 kW शक्ति पारेषित करता है। यदि अधिकतम ऐंठन आघूर्ण माध्य ऐंठन आघूर्ण से 30% अधिक होता हो। शाफ्ट की 1 m लम्बाई में ऐंठन कोण क्या होगा? मानिये $C = 85$ GPa । [उत्तर—69·48 MPa, 1·17°]

31. 200 mm व्यास वाले किसी ठोस शाफ्ट का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल वही है जो उसी पदार्थ के एक खोखले शाफ्ट का, जिसका आन्तरिक व्यास 150 mm है, तो :

(अ) उसी कोणीय वेग पर दोनों शाफ्टों द्वारा संप्रेषित शक्ति H.P. का अनुपात ज्ञात करें।

(ब) जब उसी तीव्रता पर प्रतिबलित हो तो इन शाफ्टों की समान लम्बाइयों में ऐंठन कोणों (θ) की तुलना करें।

$$\left[\text{उत्तर—}\frac{HP\,(\text{ठोस})}{HP\,(\text{खोखली})} = \frac{1}{1 \cdot 7}, \frac{\theta\,(\text{ठोस})}{\theta\,(\text{खोखली})} = \frac{1 \cdot 25}{1}\right]$$ (U.P. 2001, 02)

32. एक खोखले शाफ्ट के बाह्य तथा अन्तः व्यास क्रमशः 100 mm तथा 50 mm हैं। शाफ्ट द्वारा 90 rpm पर पारेषित शक्ति ज्ञात कीजिये यदि अधिकतम कर्तन प्रतिबल 55 N/mm^2 तक सीमित है। इस शाफ्ट की सामर्थ्य की तुलना, एक सामान्य पदार्थ तथा समान भार के ठोस शाफ्ट की सामर्थ्य से कीजिये। [उत्तर—95·4 kW, $5/2\sqrt{3}$]

33. एक 20 सेमी आन्तरिक तथा 30 सेमी बाहरी व्यास वाली खोखली स्टील शाफ्ट के स्थान पर एक ठोस मिश्रधातु की शाफ्ट लगाई जानी है। यदि दोनों के ध्रुवीय मापांक एक ही हैं तो ठोस मिश्रधातु शाफ्ट का व्यास तथा उनकी विमोटी दृढ़ता (Torsional Rigidities) का अनुपात ज्ञात कीजिये। स्टील के दृढ़ता मापांक मिश्रधातु के दृढ़ता मापांक का 2·5 गुना है। [उत्तर—2·5]

34. एक खोखली शाफ्ट 100 rpm पर 368 kW शक्ति पारेषित कर रही है। यदि 3 मीटर लम्बाई में मरोड़ कोण (θ) 1° से अधिक तथा कर्तन प्रतिबल (τ) 60 MPa से अधिक नहीं होने देना है और $G = 95 \cdot 7$ GPa हो तो न्यूनतम बाह्य व्यास ज्ञात कीजिये, बाह्य व्यास आन्तरिक का 3/2 है। [उत्तर : θ=2·72°]

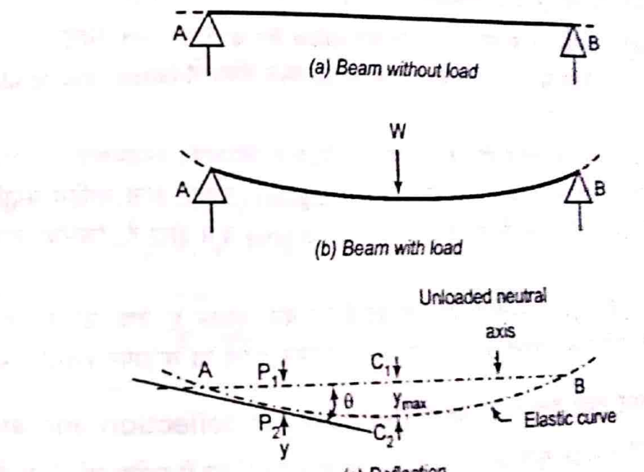
7 ढलान एवं विक्षेप या विस्थापन (SLOPE AND DEFLECTION)

§ 7.1 परिचय (Introduction)

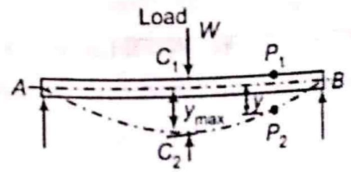
हम जानते हैं कि जब किसी धरन (beam) या एक कैन्टीलीवर पर उसकी अनुदैर्ध्य अक्ष (longitudinal axis) के लम्बवत् भार या बल लगाये जाते हैं तो उस धरन (beam) कैन्टीलीवर (cantilever) में नीचे की ओर झुकाव (bending) होता है, जिससे उसकी अनुदैर्ध्य अक्ष (longitudinal axis) अपनी मूल स्थिति (initial position) से वक्र रूप (curved shape) में विक्षेपित (deflected) हो जाती है। इसे धरन की अक्ष का वृत्त के चाप में मुड़ना अथवा वृत्तीय नमन (circular bending) कहते हैं। इसे धरनों का विरूपण (deformation of beams) भी कहते हैं

7.1.1 विक्षेप या विस्थापन तथा ढलान (Deflection and Slope)

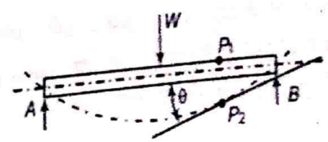
जब धरन (beam) की क्षैतिज अक्ष (horizontal axis) पर भार या बल ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर (vertically downwards) लगाते हैं तो इस दशा (condition) में धरन में नमन आघूर्ण (bending moment) उत्पन्न होता है और इस नमन आघूर्ण के कारण धरन (beam) बल के कार्य करने की दिशा में झुक जाती है और उसकी अक्ष वक्र रूप (curved shape) में हो जाती है। जैसे चित्र 7.1 में दिखाया गया है। इस स्थिति में धरन पर स्थित विभिन्न बिन्दु पहली अवस्था से ऊर्ध्व (vertical) नीचे आ जाते हैं। किसी बिन्दु की दोनों स्थितियों के बीच Vertical Distance को विक्षेप कहते हैं।



चित्र 7.1



चित्र 7.2



चित्र 7.3

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

निष्कर्ष (Conclusion)

(A) विक्षेप या विस्थापन (Deflection)—"धरन की अनुदैर्ध्य अक्ष (longitudinal axis of beam) पर स्थित किसी बिन्दु की, धरन पर भार लगने से पूर्व एवं पश्चात् वाली स्थितियों (P_1, P_2) के बीच ऊर्ध्वाधर दूरी (vertical distance) y को उस बिन्दु पर धरन का विक्षेप या विस्थापन (deflection) कहते हैं।"

इसे mm में दर्शाते हैं। क्षैतिज अक्ष (horizontal axis) से नीचे की ओर मापा गया विक्षेप धनात्मक (+ve) तथा ऊपर की ओर मापा गया विक्षेप ऋणात्मक (–ve) माना जाता है।

Definition : "The deflection 'y' is vertical distance between two positions of a poitn on the elastic curve of the axis of beam and unloaded neutral axis." It is measured in mm, and denoted by 'y'. We take (+ve) for downward and (–ve) for upwards deflection from horizontal axis of beam.

(B) ढलान (Slope)—"**भारित धरन (loaded beam) की विक्षेपित अवस्था (deflected form) में बने वक्र रूप के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा (tangent), क्षैतिज अक्ष से जो कोण (angle) बनाती है, उसे उस बिन्दु पर धरन का ढलान (slope) कहते हैं।" इसे θ से दर्शाते हैं। क्षैतिज से clockwise घूमकर मापा गया कोण 'θ' (+ve) तथा anticlock wise दिशा में घूमकर मापा गया कोण 'θ' को (–ve) लिया जाता है। ढलान को रेडियन में मापा जाता है तथा डिग्री में प्रदर्शित किया जा सकता है।**

Definition : "Angle made (subtended) by the tangent drawn at any point of elastic curve of the axis with the unloaded neutral axis of beam, is called slope of the beam at that point." It is measured in radian and is represented by 'θ' ". Angle measured in clockwise direction with horizontal, we take (+ve) and towards anticlock wise direction, we take (–ve) for angle θ.

7.1.2 धरन की सामर्थ्य (Strength of Beam)

किसी धरल की सामर्थ्य, उसकी प्रत्येक काट पर कर्तन बल (shear force) तथा नमन आघूर्ण (bending moment) सहने की क्षमता (capacity) पर निर्भर करती है। जिसके लिए कर्तन एवं नमन प्रतिबलों (shear and bending stresses) की सीमा निर्धारित करते हैं।

उपरोक्त के साथ-साथ यह भी आवश्यक होता है कि धरन का विक्षेप या विस्थापन प्रत्यास्थता की सीमा से अधिक न हो पाये और इसे नियन्त्रित करने के लिए धरन की नमन दृढ़ता (flexural rigidity) पर्याप्त होनी चाहिये क्योंकि धरन में जितनी अधिक नमन दृढ़ता होती है, उतना ही उसका विस्थापन या विक्षेप (deflection) कम होता है, जिसके कारण धरन असफल (fail) नहीं हो पाती है।

नमन दृढ़ता (Flexural Rigidity)—किसी धरन के पदार्थ का यंग मापांक E तथा उसकी काट का जड़त्वाघूर्ण (moment of inertia) I के गुणनफल अर्थात् (E × I) को धरन की नमन दृढ़ता या कड़ापन (stiffness) कहते हैं।

7.1.3 विक्षेप या विस्थापन तथा ढलान का महत्त्व (Necessity of deflection and slope)

जब धरन (beam), छतों (roofs), पुलों (bridges) तथा मशीन का आधार रूप में प्रयोग की जाती है तो उस धरन का विक्षेप निर्धारित सीमा से अधिक नहीं होना चाहिये अन्यथा उस पर टिके हुए फर्श या छत तथा पुल (bridge) आदि असफल (fail) हो सकते हैं।

मशीन के आधार रूप में प्रयोग की गई धरन में विक्षेप अधिक होने से मशीन की यथार्थता (accuracy) कम होने से वह निर्धारित कार्य करने में असमर्थ हो सकती है। अतः धरन (beams) या पुल को डिजाइन करने में deflection तथा slope का ज्ञात होना आवश्यक है ताकि फेल होने से बचाया जा सके।

§ 7.2 ढलान तथा विक्षेप ज्ञात करने की तीन विधियाँ है—

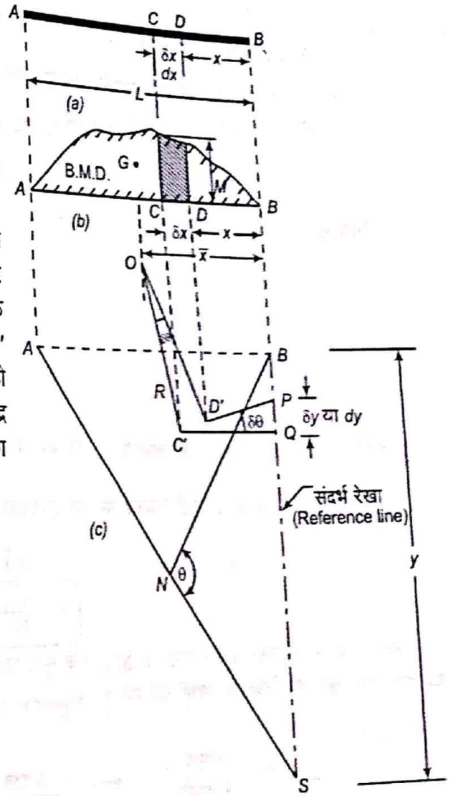
(i) नमन घूर्ण क्षेत्रफल विधि (Bending Moment Area Method)
(ii) दोहरा समाकलन विधि (Double Integration Method)
(iii) मैकाले विधि (Macaulay's Method)

परन्तु, यहाँ सिविल के पाठ्यक्रम की सीमा के अनुसार केवल घूर्ण क्षेत्रफल विधि (moment area method) को ही दिया गया है।

7.2.1 घूर्ण क्षेत्रफल विधि (Moment Area Method)

चित्र 7.4 (a) एक धरन (beam) AB है जिस पर लगे किसी भार के कारण इसका नमन घूर्ण आरेख (bending moment diagram) चित्र 7.4 (b) के अनुसार बनता है। धरन पर लगे भार के कारण यह धरन (beam) चित्र 7.4 (c) के अनुसार विक्षेपित स्थिति (deflected form) $AC'D'B$ में झुकाव में (bend) हो जाती है। जिसकी वक्रता त्रिज्या (radius of curvature) R है।

माना धरन के सिरे B से x दूरी पर इसकी बहुत कम लम्बाई CD (δ_x या dx) हैं। अब बिन्दु B से एक ऊर्ध्वाधर संदर्भ रेखा (vertical reference line) खींची। अब धरन के झुकाव के वक्र (bend position of beam) पर स्थिति बिन्दु C' तथा D' से स्पर्शी (tangent) खींचे जो reference line को क्रमशः P तथा Q पर काटते हैं। C' तथा D' को वक्रता केन्द्र (centre of curvature) O से मिलाने पर बीच का कोण $\angle C'OD' = \delta_\theta$ बनता है।



चित्र 7.4 (A)

यहाँ,

M = C तथा D के बीच Bending Moment

R = धरन (beam) के झुकाव की त्रिज्या (radius of bent up beam)

A = पूर्ण नमन घूर्ण आरेख का क्षेत्रफल (Area of bending moment diagram over entire spam)

$\bar{X}$ = B.M.D. के गु०के० (G) की क्षैतिज दूरी, (संदर्भ रेखा reference line से)

θ = A तथा B पर खींची गई स्पर्शी (tangent) के बीच कोण, reference line की ओर से।

(angle included between the tangents drawn at A and B and facing the reference line).

(∵ δ_x बहुत ही कम लम्बाई है)

यहाँ $CD = C'D' = \delta_x$ होगा।

∴ $$\text{कोण } (\delta_\theta) = \frac{\text{चाप (Arc)}}{\text{त्रिज्या (Radius)}} = \frac{\delta_x}{R} \quad \text{... (i)}$$

Scanned with CamScanner

$\frac{M}{I} = \frac{E}{R}$ (नमन समीकरण bending equation) से

∵ $R = \frac{EI}{M}$, यह मान समीकरण (i) में रखने पर

$\delta_\theta = \delta_x . \frac{M}{EI} = \frac{M.\delta_x}{EI}$ ... (ii)

∴ Total change of slope (angle) from A to B,

$\theta = \frac{1}{EI}\int_0^2 M\,\delta_x$

∵ $M\,\delta_x$ लम्बाई δ_x पर बने नमन घूर्ण आरेख (B.M.D) का क्षेत्रफल।

तथा $\int_0^2 M\,\delta_x$ = धरन की पूरी लम्बाई पर बने नमन घूर्ण आरेख (BMD) का क्षेत्रफल।

(Area of BMD over the entire span)

∴ $$\boxed{\theta = \frac{A}{EI}}$$ सूत्र ... (iii)

चित्र में, $PQ = x.\delta_\theta$ [और $C'Q = x$ यहाँ लगभग है]

$$\delta_y = x\left(\frac{M.\delta_x}{EI}\right) = \frac{(M.\delta_x).x}{EI}$$ ... (iv)

∴ $$y = \int_0^2 \frac{(M.\delta_x)\,x}{EI} = \frac{1}{EI}\int_0^2 (M.\delta_x).x$$

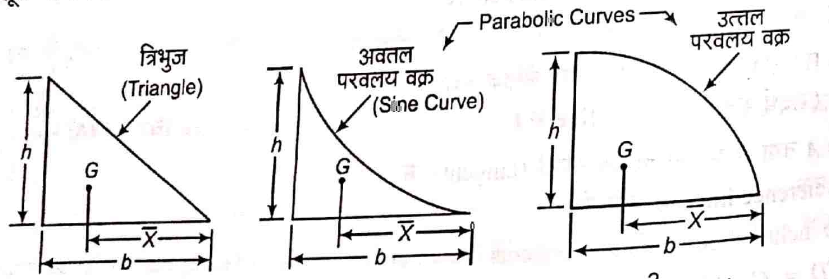
यहाँ $(M\,\delta_x).x$ = Beam की लम्बाई δ_x पर बने B.M.D. के क्षेत्रफल का Reference Line के सापेक्ष घूर्ण है।

$\int_0^2 (M.\delta_x).x$ = Beam की पूरी लम्बाई पर बने B.M.D. के क्षेत्रफल का Reference Line के सापेक्ष घूर्ण होगा।

$= A.\bar{x}$

∴ $$\boxed{y = \frac{A.\bar{x}}{EI}}$$ सूत्र

चित्र 7.4 (B) में नमन घूर्ण आरेखों (B.M.D.) के कुछ भागों के रूप दिखाये गये हैं। इनके क्षेत्रफल (A) तथा गु०के० G की दूरी $\bar{x}$ के सूत्र भी चित्रों के साथ दिये गये हैं। Moment Area Method के लिये ये सूत्र याद रखें।



$A = \frac{1}{2} \times b \times h$, $\bar{x} = \frac{2}{3}b$

$A = \frac{b \times h}{3}$, $\bar{x} = \frac{3}{4}b$

$A = \frac{2}{3} \times b \times h$, $\bar{x} = \frac{5}{8}b$

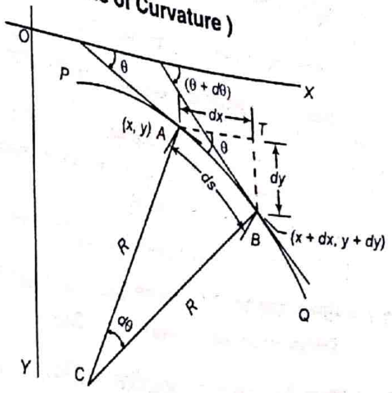
चित्र 7.4 (B)

7.2.2 विक्षेप तथा ढलान का मौलिक सूत्र (Relation between slope, Deflection and Radius of Curvature)

चित्र 7.5 में एक धरन की विक्षेपित स्थिति (bent protion) का एक छोटा भाग (small portion) AB, चाप (arc) के रूप में दिखाया गया है।

माना, ds = विक्षेपित धरन के भाग AB (चाप AB) की लम्बाई, जिसका वक्रता केन्द्र (centre of curvature) C है।

चाप AB के बिन्दु A तथा B पर खींची गई स्पर्शी $0-x$ अक्ष से क्रमशः θ तथा $(\theta + d\theta)$ कोण बनाती है। इसलिए A तथा B पर वक्र के ढलान (slopes) क्रमशः θ तथा $(\theta + d\theta)$ हैं।



चित्र 7.5

∵ CA तथा CB, वक्र की स्पर्श रेखाओं पर लम्ब हैं, अतः

A तथा B पर स्पर्शियों के बीच कोण = A तथा B पर लम्बों के बीच कोण = $d\theta = \angle ACB$

∴ कोण $(d_\theta) = \frac{\text{चाप }(ds)}{\text{त्रिज्या }(R)}$ या $ds = R \times d\theta$ या $ds = R \times d\theta$ ... (i)

माना कि बिन्दुओं A तथा B के निर्देशांक क्रमशः (x, y) तथा $(x + dx, y + dy)$ हैं।

∵ चाप AB की लम्बाई ds बहुत छोटी है अतः यह लम्बाई सरल रेखीय मानी जा सकती है। जिससे BAT समकोणीय त्रिभुज होगा।

∴ $$\tan\theta = \frac{dy}{dx} \text{ या } \theta = \frac{dy}{dx}$$

[∵ θ बहुत छोटा होने पर $\tan\theta = \theta$ तथा $ds = dx$ मान सकते हैं]

समी० (i) से $$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} \text{ या } \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx}$$

या $$\frac{1}{R} = \frac{d}{dx}(\theta) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$ (यहाँ समी० (ii से θ का मान रखा)

या $$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$$ परन्तु $\frac{M}{I} = \frac{E}{R}$ से $\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$ होगा।

या $$\frac{M}{EI} = \frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$$ (सूत्र)

या $$E.I.\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

यह सूत्र ढलान तथा विक्षेप का मौलिक सूत्र (basic formula) कहलाता है। इसके प्रयोग से हल करना, दोहरा समाकलन विधि (double integration method) कहलाता है।

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

या $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI} \times (M)$$ है, जहाँ $M = x$ दूरी पर नमनघूर्ण (B.M.) है।

(दायीं ओर से लिये गये x को (+ve) लेते हैं।)

नोट—(1) सम्बन्ध सूत्र $E.I.\frac{d^2y}{dx^2} = M$ का प्रयोग करते समय उत्तलन (Hogging) नमन-घूर्ण (B.M.) को (–ve) तथा अवतलन (Sogging) नमन-घूर्ण (B.M.) को (+ve) लिया जाता है।

(2) यह समीकरण केवल B.M. पर आधारित है। कर्तन बल (S.F.) का प्रभाव बहुत ही कम होने के कारण इसे नगण्य (Neglected) मान लिया जाता है।

(3) M (bending moment) का Hogging की स्थिति में (–ve) लेते हैं।

§ 7.3 मानक दशाओं में अधिकतम विक्षेप तथा ढलान, घूर्ण-क्षेत्रफल विधि द्वारा ज्ञात करना (Determination of Maximum Slope and Deflection in Standard Cases)

7.3.1 कैन्टीलीवर धरन पर आधारित स्थितियाँ (Different cases on Cantilever) (U.P. 2013, 14)

Case I—जब प्रास धरन (Cantilever Beam) के स्वतन्त्र सिरे पर एक बिन्दु भार लगा है।

(Cantilever beam with a point load at free end)

चित्र (b) में प्राप्त हुए नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) में—

क्षेत्रफल (area) $A = \frac{\text{आधार} \times \text{ऊँचाई}}{2}$

$$A = \frac{L \times WL}{2} = \frac{WL^2}{2}.$$

B.M.D के गु०के० (G) की मुक्त सिरे B से दूरी,

$$\bar{x} = \frac{2}{3} \times L$$

∴ $\theta_B = \theta_{max} = \frac{A}{EI}$ सूत्र से

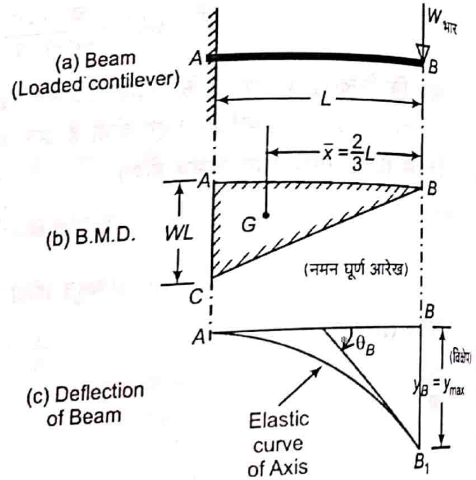
$$\boxed{\theta_B = \frac{WL^2}{2EI}}$$ सूत्र

मुक्त सिरे B पर अधिकतम विक्षेप (Deflection)

$y_B = y_{max} = \frac{A\bar{x}}{EI}$ सूत्र से

$$= \frac{\frac{WL^2}{2} \times \frac{2}{3}L}{EI} = \frac{WL^3}{3EI}$$ सूत्र

∴ $$\boxed{y_{max} \Rightarrow y_B = \frac{WL^3}{3EI}}$$



चित्र 7.6

Case II—कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे (Free End) से हटाकर किसी भी अन्य बिन्दु पर बिन्दु भार लगा है—

(Cantilever beam with a point load (W) at any point)

चित्र 7.7 (b) में नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) तथा 7.7 (c) में धरन की विक्षेपित अवस्था दिखायी गयी है। धरन (beam) बिन्दु A से C तक वक्र रूप में तथा C से B तक सरल रेखा रूप में विक्षेपित होती है।

$$\tan\theta_c = \frac{y_B - y_C}{BC}$$

∴ $$\theta_c = \frac{y_B - y_C}{BC}$$

या $$\boxed{y_B = y_c + \theta_c \times BC}$$

या $y_C = \frac{A\bar{X}}{EI}$ सूत्र से

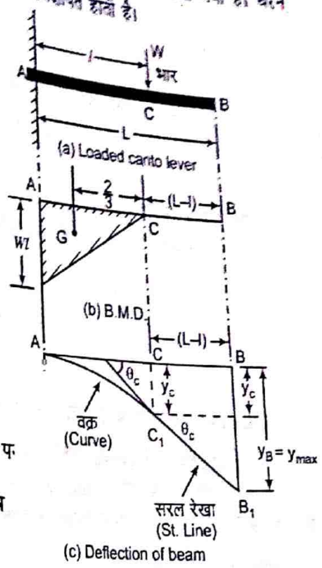
जहाँ $y_C = \frac{Wl^3}{3EI}$ (C पर विक्षेप)

अब C पर ढलान, $\theta_C = \frac{A}{EI}$ सूत्र से

$$\theta_C = \frac{Wl^2}{2EI}.$$

अब $\boxed{y_B = y_C + \theta_C \times BC}$ में y_C, θ_C तथा BC के मान रखने पर

$$y_{max} = y_B = \frac{Wl^3}{3EI} + \frac{Wl^2}{2EI} \times (L - l)$$ सूत्र



चित्र 7.7

Case III—कैन्टीलीवर धरन की सम्पूर्ण लम्बाई पर समवितरित भार (U.D.L.)

(Cantilever beam with uniformly distributed load (U.D.L.))

अधिकतम विक्षेप के लिए चित्र (b) में B.M.D. का क्षेत्रफल (area)

$$A = \frac{\text{आधार} \times \text{ऊँचाई}}{3} = \frac{b \times h}{3}$$ सूत्र

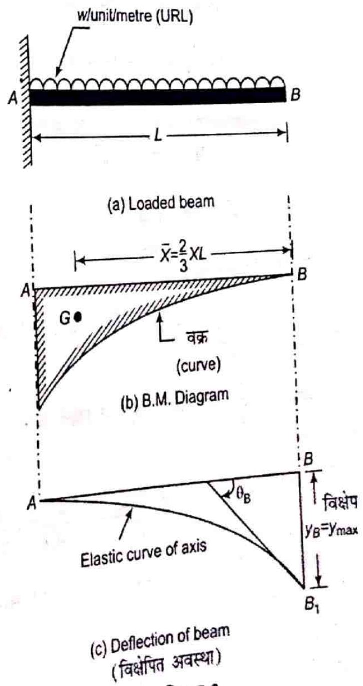
$$= \frac{L \times \frac{wL^2}{2}}{3} = \frac{wL^3}{6}$$

तथा गु०के० G की B से दूरी

$$\bar{X} = \left(\frac{3}{4}\right)L$$ सूत्र

सिरे B पर अधिकतम विक्षेप

$y_B = y_{max} = \frac{A\bar{X}}{EI}$ सूत्र से



चित्र 7.8

Scanned with CamScanner

$$y_{max} = \frac{wL^3}{6} \times \frac{3L}{4} / EI$$

$$y_{max} = \frac{wL^4}{8EI} = \frac{WL^3}{8EI}$$ सूत्र

W = U.D.L. का कुल भार = $w \times L$ है।

∴ $$\boxed{y_{max} = \frac{WL^3}{8EI}}$$ सूत्र

तथा अधिकतम ढलान (max slope) $= \frac{A}{EI}$ सूत्र से

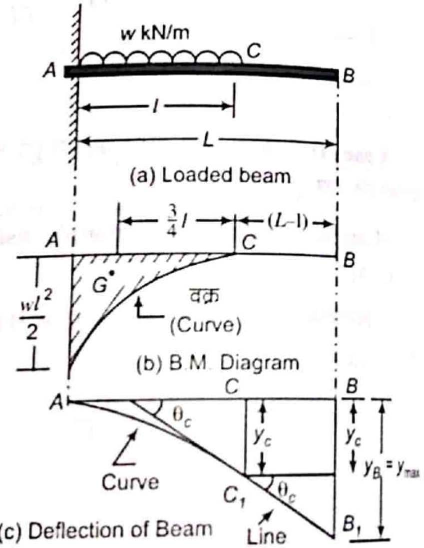
$$\theta_B = \frac{\frac{wL^3}{6}}{EI} = \frac{wL^3}{6EI}$$ यहाँ $W = wL$ रखने पर

$$\boxed{\theta_B = \frac{WL^2}{6EI}}$$ सूत्र

Case IV—कैन्टीलीवर के बद्ध सिरे से कुल लम्बाई (माना l) तक समवितरित भार (Cantilever beam loaded with U.D.L. over its some part of length from fixed end)

A से C तक के कारण Beam, curve-shape (वक्र रूप) में मुड़ेगी (bend होगी) तथा C से B तक खाली होने के कारण सरल रेखा रूप में विक्षेपित होगी।

देखें चित्र 7.9 (c)।



चित्र 7.9

$$\tan\theta_c = \theta_c = \frac{y_B - y_C}{BC}$$

∴ $$y_B = y_C + \theta_C + BC$$ सूत्र

∴ C पर विक्षेप,

$$y_C = \frac{A\bar{X}}{EI} \text{ (सूत्र)},$$

यहाँ $A = \frac{b \times h}{3}$ तथा $\bar{X} = \frac{3}{4} \times l$

BMD का क्षेत्रफल

$$A = \frac{b \times h}{3} = \frac{l \times \frac{wl^2}{2}}{3} = \frac{wl^3}{6}$$

तथा $\bar{X} = \frac{3}{4}l$ मान विक्षेप सूत्र में रखने पर

$$y_C = \frac{\frac{wl^3}{6} \times \frac{3}{4} \times l}{EI} = \frac{wl^4}{8EI} \Rightarrow \frac{Wl^3}{8EI} \quad (\because W = wl \text{ है})$$

तथा $$\theta_C = \frac{A}{EI} = \frac{wl^3}{6EI} \Rightarrow \frac{Wl^2}{6EI} \quad (\because W = wl \text{ है})$$

∴ B पर अधिकतम विक्षेप (max deflection at B)

$$y_B = y_C + \theta_C \times BC$$

$$y_B = \frac{Wl^3}{8EI} + \frac{Wl^2}{6EI} \times (L - l)$$ सूत्र

Case V—कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे से आंशिक लम्बाई पर U.D.L. (Cantilever beam loaded with U.D.L. over its some part of length from free end)

इस दी गई स्थिति में भार होने पर सर्वप्रथम चित्र 7.10 (b) के अनुसार पूरी लम्बाई में U.D.L. समान मान का लगाकर विक्षेप (+ve) BB_1 प्राप्त करते हैं। फिर Beam के खाली भाग AC पर नीचे से उतने ही मान का U.D.L. लगाकर (चित्र C) के अनुसार (–ve) विक्षेप BB_2 ज्ञात करते हैं। अब परिणामी विक्षेप $y_B = y_{B_1} - y_{B_2}$.

चित्र 7.10 (b) में विक्षेप (defelction), (पिछले सूत्रों की सहायता से)

$$BB_1 = y_{B_1} = \frac{W_1L^3}{8EI} \quad \text{जहाँ } (W_1 = w \times L \text{ है।})$$

चित्र 7.10 (c) में (–ve) दिशा में विक्षेप (BB_2) ज्ञात करने के लिए

$$BB_2 = y_{B_2} = y_C + \theta_C \times BC$$

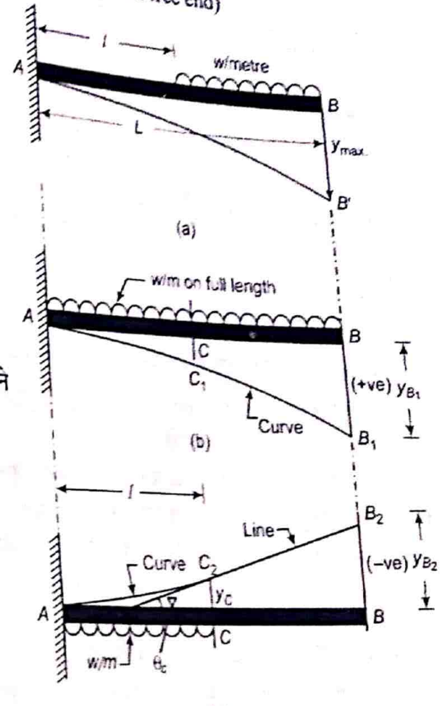
$$= \frac{W_2l^3}{8EI} + \frac{W_2l^2}{6EI} \times (L - l),$$

यहाँ ($W_2 = w \times l$ है)

अब परिणामी विक्षेप (Resultant Deflection)

$y_B = y_{max} = y_{B_1} - y_{B_2}$ में उपरोक्त मान रखें।

$$y_B = \left(\frac{W_1L^3}{8EI}\right) - \left[\frac{W_2l^3}{8EI} + \frac{W_2l^2}{6EI} \times (L - l)\right]$$ उत्तर



चित्र 7.10

7.3.2 शुद्ध आलम्बित धरन (Simply Supported Beam) पर आधारित स्थितियाँ

Case I—सरल आलम्बित धरन (अथवा शुद्धालम्ब धरन) के मध्य में संकेंद्रित भार (बिन्दु भार) (Simply supported beam with concentrated load at centre)

बिन्दु भार (Point Load) मध्य में होने के कारण अधिकतम B.M. मध्य में $M_C = \frac{W}{2} \times \frac{L}{2} = \frac{WL}{4}$ होगा धरन (beam) का झुकाव (deflection) भी मध्य बिन्दु C पर अधिकतम होगा, जहाँ ढलान मध्य C पर शून्य ($\theta_C = 0$) होगा। दोनों सिरों A तथा B पर ढलान (slope) $\theta_A = \theta_B = \theta_{max}$ होगा।

नोट—जिस बिन्दु पर Max. B.M. होता है, उसी बिन्दु तक दाँयें सिरे B से नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) के भाग का क्षेत्रफल (a) तथा इस भाग के गु०के० (G) की दूरी $\bar{X}$ ज्ञात की जाती है।

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

$\therefore \quad A = \dfrac{\text{आधार}(b) \times \text{ऊँचाई}(h)}{3} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{L}{2} \times \dfrac{WL}{4} = \dfrac{WL^2}{16}$

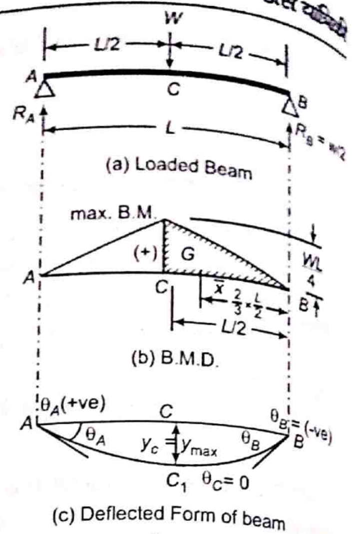
$\bar{X} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{L}{2} = \dfrac{L}{3}$

$\therefore \quad y_{max} = y_c = \dfrac{A\bar{X}}{EI} = \dfrac{\frac{WL^2}{16} \times \frac{L}{3}}{EI} = \dfrac{WL^3}{48EI}$

$\therefore$ अधिकतम विक्षेप (Deflection), y या $\boxed{y_{max} = \dfrac{WL^3}{48EI}}$ सूत्र

ढलान (Slope), $\quad \theta_{max} = \dfrac{A}{EI} = \dfrac{WL^2}{16EI}$

$\therefore \quad \boxed{\theta_A = \theta_B = \theta_{max} = \dfrac{WL^2}{EI}}$ सूत्र



चित्र 7.11

Case II—सरल आलम्बित धरन की पूर्ण लम्बाई पर w प्रति इकाई लम्बाई का समवितरित भार (Simply supported beam with uniformly distributed load i.e. U.D.L.)

चित्र 7.12 (a), (b), (c) देखें—

यहाँ U.D.L. का मान w kN/m है तथा कुल भार $W = w \times L$ होगा। U.D.L. के कारण B.M.D. एक वक्ररूप (Parabolic Curve) में होगा। इसके केन्द्र (मध्य) में अधिकतम नमन घूर्ण (max. B.M.) $M = \dfrac{wL^2}{8} = \dfrac{WL}{8}$ है। विक्षेप (deflection) भी मध्य में $y_{max} = y_C$ अधिकतम होगा।

$\because$ अधिकतम B.M. का मान मध्य बिन्दु C पर है, इसीलिये क्षेत्रफल (area) A का मान भी दायें ओर से BC लम्बाई तक अधिनमन घूर्ण आरेख (BMD) का लेना होगा।

$\therefore$ क्षेत्रफल (area) A = area of shaded part

चित्र 7.4 (B) तथा 7.12 से,

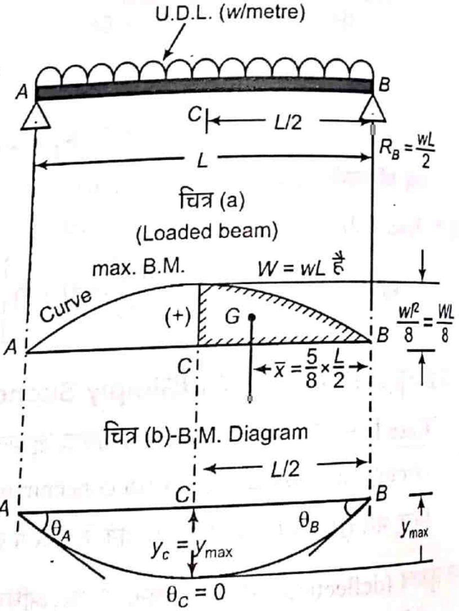
$$A = \frac{2}{3} \times b \times h = \frac{2}{3} \times \frac{L}{2} \times \frac{wL^2}{8} = \frac{wL^3}{24}$$

तथा $\bar{X}$ = दायें सिरे B से गु०के० G की दूरी

$$= \frac{5}{8} \times \frac{L}{2}$$

$\therefore$ अधिकतम विक्षेप (max deflection)

$$y_{max} = \frac{A\bar{X}}{EI} = \frac{wL^3}{24EI} \times \frac{5}{8} \times \frac{L}{2} = \frac{5}{384} \times \frac{wL^4}{EI}$$



चित्र 7.12

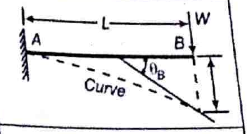
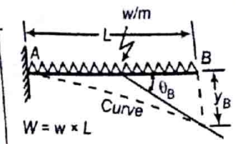
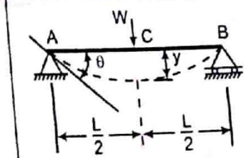
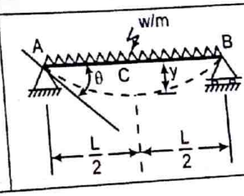
$\therefore$ अब ढलान (slope),

$\boxed{y_{max} = \dfrac{5}{384} \times \dfrac{wL^4}{EI}}$ या $\boxed{y_{max} = \dfrac{5}{384} \times \dfrac{WL^3}{EI}}$ सूत्र

$\theta_{max} = \dfrac{A}{EI}$

$\boxed{\theta_{max} = \theta_A = \theta_B = \dfrac{wL^3}{24EI} = \dfrac{WL^2}{24EI}}$ सूत्र

मानक दशाओं में धरन के ढलान तथा विक्षेप के सूत्रों की लिस्ट (List of formula)

क्र० सं०	धरन तथा इस पर भार (Beams & Load on it)	अधिकतम ढलान (Slope) θ	अधिकतम विक्षेप या विस्थापन (Deflection) y	चित्र (धरन की आरम्भिक एवं अन्तिम स्थितियाँ) Beam & its deflected form
1.	कैंटीलीवर के सिरे पर संकेन्द्रित भार (W) (Concentrated load or point load)	$\theta_A = 0$ $\theta_B = \frac{1}{2} \times \frac{WL^2}{EI}$ (स्वतन्त्र सिरे पर)	$y_B = \frac{1}{3} \times \frac{WL^3}{EI}$ (स्वतन्त्र सिरे पर)	
2.	कैंटीलीवर पर समवितरित भार (U.D.L.), w/m and Load of U.D.L., $W = w \times L$	$\theta_A = 0,\ W = wL$ $\theta_B = \frac{1}{6} \times \frac{wL^3}{EI} = \frac{WL^2}{6EI}$ (स्वतन्त्र सिरे पर)	$y_B = \frac{1}{8} \times \frac{wL^4}{EI} = \frac{WL^3}{8EI}$ (स्वतन्त्र सिरे पर)	
3.	शुद्धालम्ब धरन के केन्द्र पर संकेन्द्रित भार/बिन्दु भार (Point Load)	$\theta_A = \theta_B = \theta_{max}$ $= \frac{1}{16} \times \frac{WL^2}{EI}$ (प्रत्येक सिरे पर)	$y_C = \frac{1}{48} \times \frac{WL^3}{EI}$ (केन्द्र पर)	
4.	शुद्धालम्ब धरन पर समवितरित भार (U.D.L.) Total Load of U.D.L., $W = w \times L$	$\theta_A = \theta_B = \theta_{max}$ $= \frac{1}{24} \times \frac{wL^3}{EI} = \frac{WL^2}{24EI}$ (सिरों A तथा B पर)	$y_C = \frac{5}{384} \times \frac{wL^4}{EI}$ या $y_C = \frac{5}{384} \times \frac{WL^3}{EI}$ (केन्द्र पर)	

मुख्य उदाहरण (Important Examples)

विशेष—परास धरन (cantilever beam) पर आधारित प्रश्न।

उदाहरण 1. वर्गाकरण परिच्छेद (square section) की एक कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे पर (at free end) 35 kN का भार लगाया जाता है। इस कैन्टीलीवर धरन (cantilever beam) की विस्तृति (span) 2 m है तथा धरन के पदार्थ का प्रत्यास्थता गुणांक (E) 2×10^5 N/mm^2 है। यदि इसके मुक्त सिरे का विक्षेप (deflection at free end) 3·5 mm हो तो अनुप्रस्थ काट (section) की विमायें (dimensions) ज्ञात कीजिये। (U.P. 2000), (U.K. 2006,

हल—चित्र 7.13 (a), (b) तथा (c) देखें।

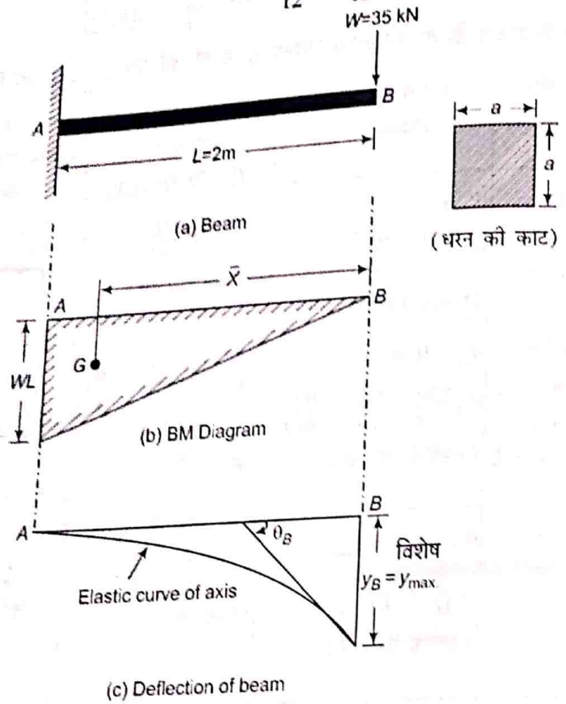
Scanned with CamScanner

इसके नमन घूर्ण आरेख (BMD) का क्षेत्रफल $(A) = \frac{L \times WL}{2} = \frac{WL^2}{2}$

$$\bar{X} = \frac{2}{3}L$$

माना इसकी काट (section) a भुजा का वर्ग (square) है।

$\therefore$
$$I = \frac{a \times a^3}{12} = \frac{a^4}{12}$$



चित्र 7.13

$$W = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2 \text{ है।}$$

सूत्र से

$$y_B = y_{max} = \frac{A\bar{X}}{EI}$$

$$y_B = \frac{WL^3}{3EI}$$

प्राप्त होता है।

परन्तु दिया है B पर deflection $y_B = 3{\cdot}5$ mm है।

$\therefore$
$$y_B = 3{\cdot}5 = \frac{(35 \times 1000) \times (2 \times 1000)^3}{3 \times 2 \times 10^5 \times a^4/12}$$

$\therefore$
$$a^4 = \frac{35000) \times (2000)^3 \times 12}{3{\cdot}5 \times 3 \times 2 \times 10^5} = 16 \times 10^8$$

या
$$a = (16 \times 10^8)^{1/4}$$

$\therefore$
$$a = 200 \text{ mm}$$

अतः इसकी काट 200 mm भुजा का वर्ग है। उत्तर

उदाहरण 2. 120 mm × 200 mm आकार की एक प्रास धरन (cantilever) 2·5 m लम्बी है। धरन पर कितना समवितरित भार (U.D.L.) लगाया जाये ताकि मुक्त सिरे पर 5mm के विक्षेप (Deflection) उत्पन्न हो। $E = 2 \times 10^5$ N/mm² लें। **(U.P. 2004)**

हल—चित्र 7.13 देखें।

माना Beam पर U.D.L. w kN/m का लगा है।

$$A = \frac{b \times h}{3} = \frac{L \times \frac{wL^2}{2}}{3}$$

$\therefore$
$$= \frac{wL^3}{6}$$

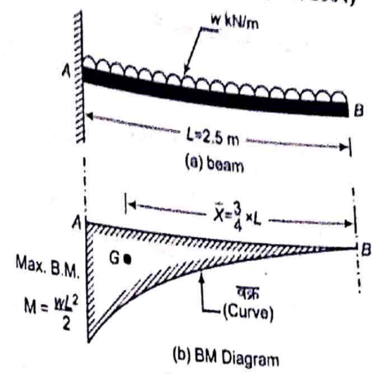
$$\bar{X} = \frac{3}{4} \times L \text{ तथा } y_B = 5 \text{ mm है।}$$

$\therefore$ विक्षेप सूत्र $y_B = \frac{A\bar{X}}{EI}$ से

मुक्त सिरे B पर विक्षेप, $y_B = \frac{wL^4}{8EI}$ प्राप्त होता है।

$$5 = \frac{w \times (2{\cdot}5 \times 1000)^4}{8 \times 2 \times 10^5 \times \frac{120 \times (200)^3}{12}}$$

या
$$w = \frac{5 \times 16 \times 10^5 \times 120 \times 8 \times 10^6}{12 \times (2{\cdot}5)^4 \times 10^{12}} = 16{\cdot}384 \text{ kN/m}$$



चित्र 7.13

अतः cantilever पर U.D.L. $(w) = 16{\cdot}384$ kN/m उत्तर

उदाहरण 3. एक 2 मीटर लम्बी कैंटीलीवर धरन की पूरी लम्बाई पर 5 kN/m का समवितरित भार लगा है। कैंटीलीवर के स्वतंत्र सिरे पर ढलान तथा विक्षेप का मान ज्ञात कीजिए। धरन के लिए नमन दृढ़ता $2{\cdot}5 \times 10^{12}$ N/mm² मानिए।
(U.K. 2012 S), (U.K. 2013 S.p. B.P.)

हल—दिया है

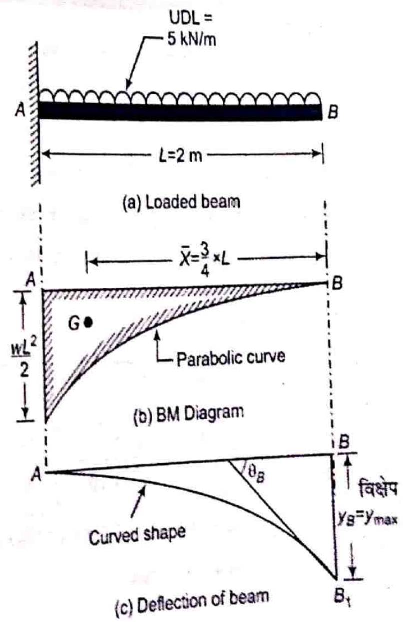
$$EI = 2{\cdot}5 \times 10^{12} \text{N-mm}^2$$

चित्र 7.14 (a), (b) तथा (c) देखें।

B.M.D. का क्षेत्रफल (Area)

$$A = \frac{b \times h}{3} = \frac{L \times \frac{wL^2}{2}}{3}$$

$$A = \frac{wL^3}{6EI} \text{ तथा } \bar{X} = \frac{3}{4}L$$



चित्र 7.14

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

विक्षेप (deflection), $y_B = \frac{A\bar{X}}{EI}$ सूत्र में मान रखने पर

$$y_B = \frac{wL^4}{8EI} \text{ प्राप्त होता है।}$$

U.D.L का कुल भार $W = w \times L$ है।

$\therefore$ $$y_B = \frac{WL^3}{8EI} \text{ होगा।}$$

$\therefore$ स्वतन्त्र सिरे B पर विक्षेप $$y_B = \frac{(5\times2\times1000)\times(2000)^3}{8\times(2{\cdot}5\times10^{12})}$$

$\therefore$ $$y_B = 4 \text{ mm}$$ उत्तर

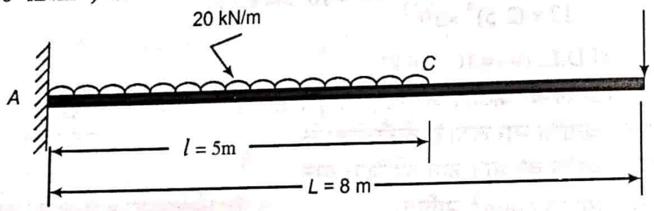
अधिकतम ढलान (slope) B पर होगा। $$\theta_B = \frac{A}{EI} \text{ में मान रखने पर}$$

$$\theta_B = \frac{wL^3}{6EI} = \frac{WL^2}{6EI} \text{ प्राप्त होता है।}$$

$\therefore$ $$\theta_B = \frac{(5\times2\times1000)\times(2000)^2}{6\times(2{\cdot}5\times10^{12})} = 2{\cdot}6\times10^{-3} \text{ Radian}$$

$$= 0{\cdot}0026 \text{ Radian}$$ उत्तर

उदाहरण 4. चित्र 7.15 में दिखाई धरन के लिये अधिकतम ढाल तथा विस्थापन ज्ञात कीजिये–($EI = 8\times10^4$ kNm^2) है। **(U.K. 2013, CIVIL)**



चित्र 7.15

हल—दिया है $EI = 8\times10^4 \text{kNm}^2 = 8\times10^{13} \text{N-mm}^2$ है।

चित्र 7.15 में दिये गये धरन (beam) के स्वतन्त्र सिरे (free end) B का कुल विक्षेप (total deflection) y_B = (W_1 = 5kN) के भार के कारण विक्षेप + U.D.L. के भार $W_2 = (20\times5)$ kN के कारण विक्षेप

$$= y_{B_1} + (y_C + \theta_C \times BC)$$

$$= \frac{W_1L^3}{3EI} + \left[\frac{W_2l^3}{8EI} + \frac{W_2l^2}{6EI}\times(L-l)\right]$$

$$= \frac{5000\times(8000)^3}{3\times(8\times10^4)\times10^9} + \left[\frac{(100\times1000)\times(5000)^3}{8\times(8\times10^4)\times10^9} + \frac{(100\times1000)\times(5000)^2\times(3000)}{6\times(8\times10^{13})}\right]$$

$$= 10{\cdot}67 \text{ mm} + [19{\cdot}53 + 15{\cdot}625]$$

$$= 45{\cdot}825 \text{ mm}$$ उत्तर

इसी प्रकार कुल ढलान (Slope)

θ_B = बिन्दु भार $W_1 = 5$ kN के कारण + U.D.L. के कुल भार ($W_2 = 20\times5$KN) के कारण

$$= \frac{W_1L^2}{2EI} + \frac{W_2l^2}{6EI}$$

$$= \frac{5000\times(8000)^2}{2\times(8\times10^{13})} + \frac{(100\times1000)\times(5000)^2}{6\times(8\times10^{13})}$$

$$= 0{\cdot}002 + 0{\cdot}0052 = 0{\cdot}0072 \text{ Radian}$$ उत्तर

उदाहरण 5. एक खोखले आयताकार काट (hollow rectangular section) की धरन (Beam), जिसकी बाह्य विमायें (180 mm × 120 mm) तथा आन्तरिक विमायें (90 mm × 60 mm) है, को कैंटीलीवर के रूप में प्रयोग किया जाता है। इसकी मुक्त लम्बाई (span) 4m है तथा इसकी पूरी लम्बाई पर 600 N/m का एक समवितरित भार (U.D.L.) तथा मुक्त सिरे पर (at free end) 12 kN का Point Load लगा है। इस स्थिति में cantilever का अधिकतम विक्षेप (deflection) ज्ञात कीजिये। $E = 2\times10^5 \text{N/mm}^2$ है।

हल—देखें चित्र 7.16 (a), (b) तथा (c)।

काट का $I = \frac{120\times180^3}{12} - \frac{60\times90^3}{12}$

$I = 54675000 \text{ mm}^4$

B पर लगे बिन्दु भार $W_1 = 12$ kN के कारण BM चित्र (b) में दिखाया गया है। इसमें

$$A = \frac{L\times W_1L}{2} = \frac{W_1L^2}{2}$$

$$\bar{X} = \frac{2}{3}\times L$$

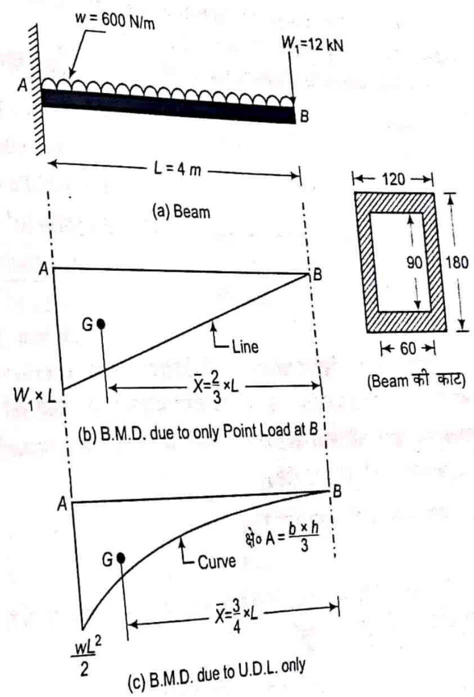
विक्षेप $y_{B_1} = \frac{A\bar{X}}{EI}$ सूत्र से

$$y_{B_1} = \frac{W_1L^3}{3EI}$$

$$= \frac{12\times1000\times(4000)^3}{3\times2\times10^5\times(54675000)}$$

$$= 23{\cdot}41 \text{ mm}$$

अब पूरे धरन पर लगे U.D.L. के कुल भार $W_2 = 600\times4 = 2400$ N के कारण Bending Moment Diagram चित्र (c) में दिया गया है। इसमें



चित्र 7.16

क्षेत्र०

$$A = \frac{b\times h}{3} = \frac{L\times wL^2}{3\times2} = \frac{wL^3}{6} = \frac{W_2L^2}{6} \quad (\because W_2 = w\times L)$$

तथा $$\bar{X} = \frac{3}{4}\times b = \frac{3}{4}\times L$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

अब विक्षेप $y_{B_2} = \frac{A\bar{X}}{EI}$ सूत्र में मान रखने पर $= \frac{W_2 L^3}{8EI}$ प्राप्त होता है।

$$\therefore \quad y_{B_2} = \frac{2400 \times (4000)^3}{8 \times 2 \times 10^5 \times 54675000} = 1 \cdot 756 \text{ mm}$$

$\therefore$ सिरे B पर कुल विक्षेप (Total deflection)

$$y_B = y_{B_1} + y_{B_2}$$
$$= 23 \cdot 41 + 1 \cdot 756 = 25 \cdot 167 \text{ mm}$$
$$= 25 \cdot 17 \text{ mm}$$

उत्तर

उदाहरण 6. एक बिजली का ऊर्ध्वाधर खोखला बेलनाकार खम्भा (vertical hollow ciecular pole) 6m ऊँचा है। इसका एक सिरा जमीन में गढ़ा है। दूसरे सिरे पर 10 kN का संकेन्द्रित भार लगा है। खम्भे (pole) का अपना भार नगण्य (Negligible) मानते हुए इस पर अधिकतम विस्थापन ज्ञात करें यदि खम्भे की काट का $I = 500 \times 10^5 \text{ mm}^4$ तथा $E = 200$ GPa है।

हल—खम्भे (Poles) भी Cantilever Beam की तरह कार्य करते हैं। अत: Cantilever के सूत्र ही प्रयोग होते हैं। यहाँ खम्भे के ऊपरी मुक्त सिरे पर विक्षेप (deflection)

$$y_B = \frac{WL^3}{3EI} \text{ सूत्र से,}$$

जहाँ

$$W = 10 \text{ kN} = 10 \times 1000 \text{ N}$$
$$L = 6 \text{ m} = 6000 \text{ mm}$$
$$E = 200 \text{ GPa} = 2 \times 10^5 \text{N/mm}^2$$
$$I = 500 \times 10^4 \text{ mm}^4 = 5 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$= \frac{(10 \times 1000) \times (6000)^3}{3 \times 2 \times 10^5 \times 5 \times 10^6}$$
$$y_B = 720 \text{ mm}$$

उत्तर

उदाहरण 7. किसी मकान का कैंटीलीवर छज्जा (cantilever balcony) 1·2 मीटर बाहर की ओर निकला हुआ है। छज्जे पर 5 kN/m² का समवितरित भार लगा है। छज्जे की एक मीटर लम्बाई लेते हुए इसके लिये अधिकतम विस्थापन ज्ञात कीजिये। कैंटीलीवर छज्जे की प्रति मीटर लम्बाई के लिये जड़ता घूर्ण (moment of inertia) $I = 30{,}000 \text{ cm}^4$, $E = 15$ GPa। **(U.K. 2006) (U.P. 2004)**

हल—छज्जे पर कुल भार 1 m लम्बाई में

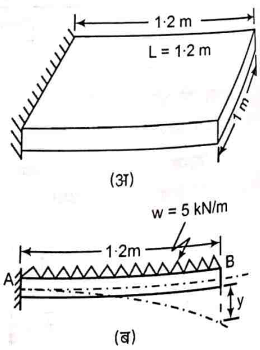
$$= 5 \times 1 \cdot 2 \times 1 = 6 \text{ kN}$$

यह भार छज्जे के 1·2 m लम्बाई के भाग पर समान रूप से बँटा है, अत: समान रूप से बँटे भार का मान,

$$w = \frac{6}{1 \cdot 2} = 5 \text{ kN/m}$$

अब सूत्र से छज्जे के सिरे B पर अधिकतम विस्थापन,

$$y = \frac{1}{8} \times \frac{wl^4}{EI} = \frac{WL^3}{8EI} \quad \text{जहाँ } W = w \times L$$



चित्र 7.17

$$= \frac{1}{8} \times \frac{5 \times 10^3 \times 1 \cdot 2^4}{15 \times 10^{19} \times 30000 \times 10^{-8}} = 0 \cdot 288 \times 10^{-3} \text{ m}$$
$$= 0 \cdot 288 \text{ m}$$

अथवा

$$y = \frac{wL^3}{8EI}$$
$$= \frac{(6 \times 1000) \times (1 \cdot 2 \times 1000)^3}{8 \times 15 \times 1000 \times 3 \times 10^8} = 0 \cdot 288 \text{ mm}$$

सूत्र से

उत्तर

उदाहरण 8. एक I-काट की cantilever beam दीवार से 2·5 m बाहर निकली हुई है और इसके ऊपर धरन (beam) के स्थिर सिरे (fixed end) से 1·5 m लम्बाई तक 20 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। धरन (Beam) का अधिकतम विस्थापन (max. deflection) तथा ढलान (slope) ज्ञात कीजिये। $I = 9500 \text{ cm}^4$ तथा $E = 2 \times 10^5$ MPa है। **(U.P. 2006)**

हल—प्रश्न के अनुसार Beam को चित्र 7.18 में दिखाया गया है। जिस पर लगे भार के कारण धरन का विक्षेप (deflection) चित्र 7.18 (b) में दिखाया गया है।

जिसमें B पर विक्षेप y_B अधिकतम है तथा C पर विक्षेप $= y_C = \frac{Wl^3}{8EI}$ सूत्र से

जहाँ $W =$ U.D.L का भार $= w \times l$ है।

$$= 20 \times 1 \cdot 5 = 30 \text{ kN}$$

धरन के विक्षेप में C से B तक वक्र न होकर सरल रेखा होगी।

$$\therefore \quad \text{ढलान } \theta_B = \theta_C = \frac{wl^3}{6EI} = \frac{Wl^2}{6EI} \text{ (सूत्र)}$$

$$= \frac{(20 \times 1 \cdot 5) \times 1000 \times (1 \cdot 5 \times 1000)^2}{6 \times 2 \times 10^5 \times 9500 \times 10^4} = 0 \cdot 000592 \text{ Radi}$$

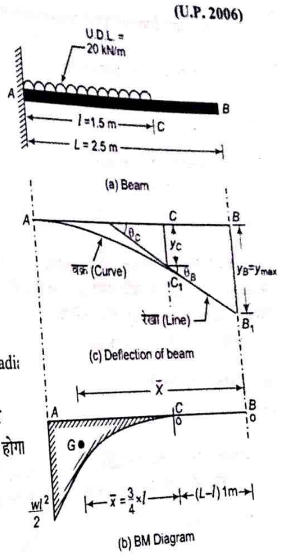
उत्तर

$\because$ स्वतन्त्र सिरे B पर अधिक विक्षेप (max deflection) होगा

$\therefore$ $y_B = y_C + \theta_C \times BC$ सूत्र में मान रखने पर,

$$= \frac{Wl^3}{8EI} + \frac{Wl^2}{6EI} \times (L - l)$$
$$= \frac{(30 \times 1000) \times (1 \cdot 5 \times 1000)^2}{8 \times 2 \times 10^5 \times 9500 \times 10^4} + 0 \cdot 000592 \times (1 \times 1000)$$
$$= 1 \cdot 258 = 1 \cdot 26 \text{ mm}$$

उत्तर



चित्र 7.18

Method-II

$\because$ दिया है

$$E = 2 \times 10^5 \text{ MPa} = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$
$$I = 9500 \text{ cm}^4 = 9500 \times 1000 \text{ mm}^4 = 95 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

बद्ध सिरे (Fixed end) A पर Max. Bending Moment,

$$M_A = (wl) \times \frac{l}{2} = (20 \times 1\cdot5) \times \frac{1\cdot5}{2} = 22\cdot5 \text{ kN-m} = 22\cdot5 \times 10^6 \text{ N-mm}$$

चित्र (c) के अनुसार बने B.M.D का क्षेत्रफल (area),

$$A = \frac{b \times h}{3} = \frac{l \times M_A}{3} = \frac{(1\cdot5 \times 1000) \times 22\cdot5 \times 10^6}{3}$$

$$= 1\cdot125 \times 10^{10}$$

गु०के० (G) की दायें सिरे B से दूरी $= \frac{3}{4} \times l + (L - l)$

$$\therefore \quad \bar{X} = \frac{3}{4} \times (1\cdot5 \times 1000) + (2\cdot5 - 1\cdot5) \times 1000 \text{ mm}$$

$$= 2125 \text{ mm}$$

अब घूर्ण क्षेत्रफल विधि (Moment area method) से—

$$y_{max} = y_B = \frac{A\bar{X}}{EI} \quad \text{(सूत्र)}$$

$$= \frac{(1\cdot125 \times 10^{10}) \times 2125}{2 \times 10^5 \times 95 \times 10^6} = 1\cdot258 = 1\cdot26 \text{ mm}$$

उत्तर

अधिकतम ढलान (slope), $\theta_B = \theta_C = \frac{A}{EI}$ (सूत्र)

$$= \frac{1\cdot125 \times 10^{10}}{2 \times 10^5 \times 95 \times 10^6} = 0\cdot000592 \text{ radian}$$

उत्तर

उदाहरण 9. एक 4m लम्बे cantilever beam के मुक्त सिरे (free end) पर एक संकेन्द्रित भार (बिन्दु भार Point Load) लगा है, यदि धरन (beam) में अधिकतम ढलान (max. slope) $1\cdot5°$ है तो मुक्त सिरे B पर अधिकतम विक्षेप (max. deflection) ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है, span of beam, $L = 4\text{m}$

Maximum Slope, $\theta_{max} = \theta_B = 1\cdot5° = 1\cdot5 \times \frac{\pi}{180}$

$$= 0\cdot02618 \text{ radian} \quad \text{(given)}$$

Deflection at free end (B), $y_{max} = ?$

$\therefore$ धरन की इस स्थिति में (In this case of beam)—

Max. Slope, $\theta_{max} = \frac{WL^2}{2EI}$ (सूत्र)

$$\therefore \quad 0\cdot02618 = \frac{WL^2}{2EI} \text{ या } \frac{WL^2}{EI} = 2 \times 0\cdot02618$$

$$= 0\cdot05236$$

$\frac{WL^2}{EI}$ का मान विक्षेप (Deflection) के सूत्र में रखने पर,

$$y_{max} = y_B = \frac{WL^3}{3EI}$$

$$= \frac{WL^2}{EI} \times \frac{L}{3} \quad \text{(सूत्र)}$$

$$= 0\cdot05236 \times \frac{4}{3}$$

$$= 0\cdot06981 \text{ m} = 69\cdot81 \text{ mm}$$

$\therefore$ Deflection at free end $= 69\cdot81$ mm

उत्तर

उदाहरण 10. एक $2\cdot5$ m लम्बे cantilever के मुक्त सिरे (Free end) पर 25 kN का बिन्दु भार (point load) तथा बद्ध सिरे (fixed end) से $1\cdot3$ m की दूरी पर 35 kN का बिन्दु भार लगा है। मुक्त सिरे पर अधिकतम ढलान तथा विक्षेप (slope & deflection) ज्ञात करें। जबकि $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$ तथा $I = 1\cdot5 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ है।

हल—चित्र 7.19 देखें।

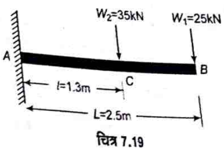
दिया है, Beam की कुल लम्बाई

$AB = L = 2\cdot5$ m

$AC = l = 1\cdot3$ m

भार (Load), $W_1 = 25$ kN

$W_2 = 35$ kN



चित्र 7.19

Young's Modulus, $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$

Moment of Inertia (M.O.I.), $I = 1\cdot5 \times 10^{-4} \text{ m}^4$

(1) मुक्त सिरे (Free end) B पर ढलान (slope) $\theta_B = W_1$ के कारण $\theta_1 + W_2$ के कारण θ_2

$$\therefore \quad \theta_{max} = \frac{W_1L^2}{2EI} + \frac{W_2l^2}{2EI} = \frac{1}{2EI}(W_1L^2 - W_2l^2)$$

$$= \frac{1}{2 \times 2 \times 10^8 \times 1\cdot5 \times 10^{-8}} \times [25 \times 2\cdot5^2 - 35 \times 1\cdot3^2]$$

या $\theta_{max} = 0\cdot00359$ radian

उत्तर

(2) मुक्त सिरे (Free End) B पर अधिकतम विक्षेप (max. deflection)

$y_B = W_1$ के कारण विक्षेप $+ W_2$ के कारण विक्षेप

$$= \left[\frac{W_1L^3}{3EI}\right] + \left[\frac{W_2l^3}{3EI} + \frac{W_2l^2}{2EI} \times (L - l)\right]$$

यहाँ $y_{B_2} = y_C + \theta_C \times BC$

$$= \left[\frac{25 \times 2\cdot5^3}{3 \times 2 \times 10^8 \times 1\cdot5 \times 10^{-4}}\right] + \left[\frac{35 \times 1\cdot3^3}{3 \times 2 \times 10^8 \times 1\cdot5 \times 10^{-4}} + \frac{35 \times 1\cdot3^2 + (25 - 1\cdot3)}{2 \times 2 \times 10^8 \times 1\cdot5 5 10^{-4}}\right]$$

$$= (0\cdot00434) + (0\cdot000854 + 0\cdot001183)$$

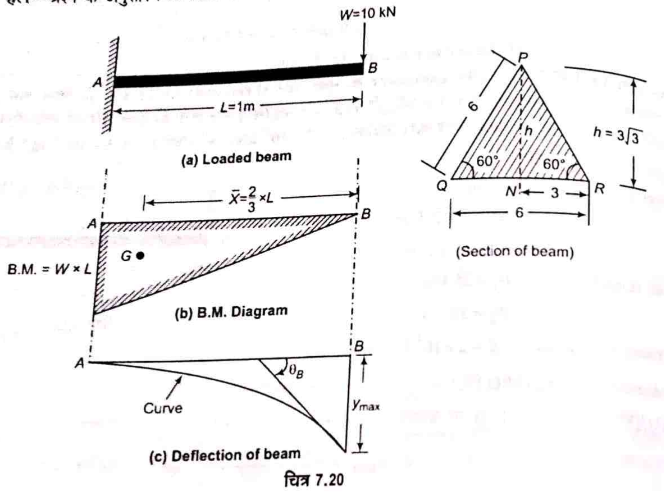
$$= 0\cdot006377 \text{ m} = 6\cdot377 \text{ mm}$$

उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 11. **एक त्रिभुजाकार परिच्छेद की कैन्टीलीवर धरन के काट की प्रत्येक भुजा 6 cm तथा धरन की लम्बाई 1 m है। त्रिभुजाकार परिच्छेद (triangular section) की एक भुजा क्षैतिज है तथा धरन के मुक्त सिरे (free end of beam) पर 10 kN का भर लगा है। कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे का विक्षेप तथा ढलान ज्ञात कीजिये, इसके पदार्थ का $E = 200$ GPa मानिये।**

हल—प्रश्न के अनुसार चित्र 7.20 देखें।



चित्र 7.20

यहाँ $E = 200\,\text{GPa} = 2 \times 10^5\ \text{N/mm}^2$ है।

$$\tan 60° = \frac{h}{3} \text{ या } h = 3\tan 60° = 3\sqrt{3}$$

काट का $I = \dfrac{b \times h^3}{36}$ सूत्र से

$$I = \frac{6 \times (3\sqrt{3})^3}{36} = 23{\cdot}38\ \text{cm}^4$$

या $I = 23{\cdot}38 \times 10^4\ \text{mm}^4$

नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) का क्षेत्रफल (area)

$$A = \frac{L \times WL}{2} = \frac{WL^2}{2} \text{ तथा } \bar{X} = \frac{2}{3} \times L$$

∴ मुक्त सिरे B पर विक्षेप (max deflection)

$$y_{max} = \frac{A\bar{X}}{EI} = \frac{\frac{WL^2}{2} \times \frac{2}{3}L}{EI} = \frac{WL^3}{3EI}$$

$$y_{max} = y_B = \frac{(10 \times 1000) \times (1000)^3}{3 \times 2 \times 10^5 \times 23{\cdot}38 \times 10^4} = 71{\cdot}28\ \text{mm}$$ उत्तर

Max. slope $\theta_{max} = \theta_B = \dfrac{A}{EI} = \dfrac{WL^2}{2EI}$ (सूत्र)

$$\theta_{max} = \frac{(10 \times 1000) \times (1000)^2}{2 \times 2 \times 10^5 \times 23{\cdot}38 \times 10^4} = 0{\cdot}1069\ \text{Radian}$$ उत्तर

**** विशेष–शुद्धालम्ब धरन (Simply Supported Beam) पर आधारित प्रश्न**

उदाहरण 12. **एक 4 m विस्तार की शुद्ध आलम्बित धरन (S.S. beam) की काट 150 mm चौड़ी तथा 250 mm गहरी है। इसके मध्य में (at middle) कितना बिन्दु भार (point load) W लगाया जाये ताकि मध्य में अधिकतम विक्षेप (max. deflection) 12 mm हो। धरन का अधिकतम ढलान (slope) भी ज्ञात करें। $E = 6 \times 10^6\ \text{kN/m}^2$ लीजिये।**

हल—दिया है, धरन का विस्तार (Span), $L = 4\ \text{m} = 4000\ \text{mm}$

काट की चौड़ाई (width of section), $b = 150$ mm

काट की गहराई (depth of section), $d = 250$ mm

काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) $I = \dfrac{b \times d^3}{12}$ (सूत्र)

$$I = \frac{150 \times (250)^3}{12} = 1{\cdot}953 \times 10^8\ \text{mm}^4$$

धरन के मध्य में विक्षेप (deflection), $y_c = y_{max} = 12$ mm

माना केन्द्र पर W kN का Point Load लगा है।

(1) अधिकतम विक्षेप (max. deflection) $y_{max} = \dfrac{WL^3}{48\,EI}$ (सूत्र)

∴ $$12 = \frac{(W \times 1000) \times (4000)^3}{48 \times (6 \times 10^3) \times 1{\cdot}953 \times 10^8}$$ [∵ $E = 6 \times 10^6\ \text{kN/m}^2 = 6 \times 10^3\ \text{N/mm}^2$]

∴ $W = 10{\cdot}55$ kN उत्तर

(2) अधिकतम ढलान (max. slope), $\theta_{max} = \dfrac{WL^2}{16EI}$ (सूत्र)

$$\theta_{max} = \frac{WL^2}{16EI} = \frac{(10{\cdot}55 \times 1000) \times (4000)^2}{16 \times (6 \times 10^3) \times 1{\cdot}953 \times 10^8}$$

$= 0{\cdot}009$ Radian उत्तर

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

उदाहरण 13. 4m के फैलाव की एक सामान्य रूप से आलम्बित धरन (a simply supported beam of span 4 m) के पूरे विस्तार (span) पर 20 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। धरन में अधिकतम विक्षेप (max. deflection) तथा ढलान (slope) की गणना करें। यहाँ $E = 2\times 10^5$ N / mm^2 तथा $I = 5\times 10^7$ mm^4 है।

(U.P. 2013)

हल—चित्र 7.21 देखें।

इस धरन (beam) का B.M. Diagram U.D.L. के कारण वक्र रूप (curved shape) में होगा (चित्र 7.21 (b)) देखें।

इसमें अधिकतम नमन घूर्ण (B.M.)

$$M = \frac{wL^2}{8} = \frac{20\times 4^2}{8}\text{ kN-m} = 40\times 10^6\text{ N-mm} = h \quad \text{(माना)}$$

तथा क्षेत्र० $A = \frac{2}{3}\times b\times h$ (सूत्र) द्वारा

$$= \frac{2}{3}\times(2\times 1000)\times 40\times 10^6$$

$$= 5\cdot 33\times 10^{10}$$

गु०के० (G) की B से दूरी

$\bar{X} = \frac{5}{8}\times b$ (सूत्र)

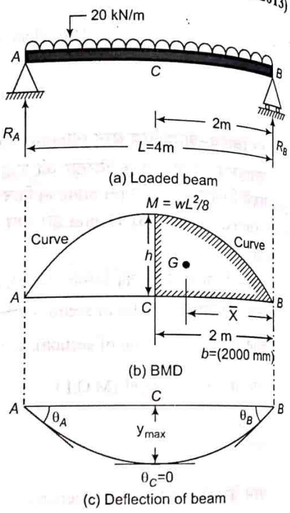
$$= \frac{5}{8}\times(2\times 1000) = 1250\text{ mm}$$

∵ विक्षेप (deflection), धरन के मध्य में अधिकतम होगा।

∴ $y_{max} = y_C = \frac{A\bar{X}}{EI}$ सूत्र से

$$= \frac{5\cdot 33\times 10^{10}\times 1250}{2\times 10^5\times 5\times 10^7} = 6\cdot 666\text{ mm} = 6\cdot 7\text{ mm}$$

उत्तर



चित्र 7.21

∵ दोनों सिरों पर ढलान (slope) समान होगा। अतः $\theta_A = \theta_B = \frac{A}{EI}$ सूत्र से

$$\theta_{max} = \theta_A = \theta_B = \frac{5\cdot 33\times 10^{10}}{2\times 10^5\times 5\times 10^7} = 0\cdot 00533\text{ radian}$$

उत्तर

दूसरी विधि (IInd Method)—

धरन के केन्द्र पर अधिकतम विक्षेप (max. deflection)

$$y_{max} = y_C = \frac{5}{384}\times\frac{WL^3}{EI}$$ सूत्र से,

जहाँ W = U.D.L.का भार या $W = 20\times 4 = 80$ kN

∴
$$y_{max} = \frac{5}{384}\times\frac{(80\times 1000)\times(4000)^3}{(2\times 10^5)\times(5\times 10^7)} = 6\cdot 666\text{ mm}$$

$$= 6\cdot 7\text{ mm}$$

उत्तर

के दोनों सिरों पर ढलान समान होगा तथा ढलान अधिकतम भी होगा।

∴ ढलान (slope),
$$\theta_{max} = \theta_A = \theta_B = \frac{WL^2}{24EI}$$ सूत्र से

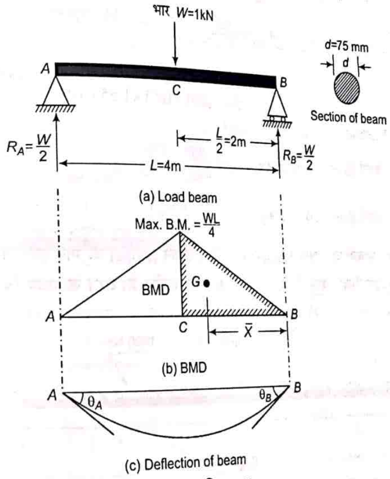
$$= \frac{(80\times 1000)\times(4000)^2}{24\times(2\times 10^5)\times(5\times 10^7)} = 0\cdot 0053\text{ radian}$$

उत्तर

उदाहरण 14. एक 75 mm व्यास वाली वृत्ताकार परिच्छेद के धरन पर, जो सरल आधारित है तथा जिसकी लम्बाई 4 m है, उसके मध्य लम्बाई पर एक 1 kN का संकेन्द्री भार लग रहा है। आघूर्ण क्षेत्रफल विधि का प्रयोग करते हुए धरन का अधिकतम विक्षेप तथा आधारों पर प्रवणता ज्ञात कीजिए। E का मान 200×10^3 N / mm^2 मान लीजिए।

(U.P. 2006)

हल—चित्र 7.22 देखें।



चित्र 7.22

धरन (beam) की काट (परिच्छेद) का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.)

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(75)^4}{64} = 1\cdot 55\times 10^6$$

Beam के केन्द्र C पर अधिकतम नमन घूर्ण

$$\text{(Max. B.M.)} = \frac{W}{2}\times\frac{L}{2} = \frac{WL}{4}\text{ kN-m}$$

B.M. diagram के shaded भाग का क्षेत्रफल

$$A = \frac{\frac{L}{2}\times\frac{WL}{4}}{2} = \frac{WL^2}{16} \text{ तथा } \bar{X} = \frac{2}{3}\times\frac{L}{2} = \frac{L}{3}$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

अब नमन घूर्ण क्षेत्रफल विधि (moment area method) से धरन के केन्द्र पर अधिकतम विक्षेप (max. deflection),

$$y_{max} = \frac{A\bar{X}}{EI} \quad \text{(सूत्र)}$$

$$= \frac{\frac{WL^2}{16} \times \frac{L}{3}}{EI} = \frac{WL^3}{48EI}$$

सूत्र में मान रखने पर,

$$y_{max} = \frac{(1\times1000)\times(4\times1000)^3}{48\times(200\times10^3)\times1{\cdot}55\times10^6} = 4{\cdot}3 \text{ mm}$$

∵ आधारों A तथा B पर प्रवणता (सिरों का ढलान) अधिकतम होगा

∴ $$\theta_{max} = \theta_A = \theta_B = \frac{A}{EI} \quad \text{(सूत्र)}$$

या $$\theta_{max} = \frac{WL^2}{16EI} \qquad \left(\because A = \frac{WL^2}{16} \text{ है}\right)$$

$$= \frac{(1\times1000)\times(4\times1000)^2}{16\times(200\times10^3)\times1{\cdot}55\times10^6} = 0{\cdot}00322 \text{ Radian}$$

उत्तर

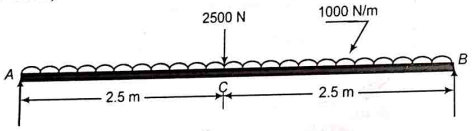
दूसरी विधि (IInd Method)

(1) धरन पर केन्द्रीय विक्षेप (deflection) $y_C \Rightarrow y_{max} = \frac{WL^3}{48EI}$ (सूत्र)

(2) धरन के सिरों पर ढलान (slope), $\theta_A \Rightarrow \theta_B \Rightarrow \theta_{max} = \frac{WL^2}{16EI}$ (सूत्र)

इन दोनों सूत्रों में मान रखकर भी विक्षेप (deflection) तथा ढलान (slope) के मान ज्ञात किये जा सकते हैं।

उदाहरण 15. एक शुद्धालम्बित धरन चित्र 7·23 के अनुसार भारित है। धरन के मध्य बिन्दु पर विस्थापन ज्ञात कीजिये। $E = 2\times10^5$ MPa, $I = 25\times10^4$ cm^4. [U.K. 2014, (S) CIVIL]



चित्र 7.23

हल—चित्र के अनुसार, धरन का विस्तार (Span of beam) $L = 5$ m

(1) मध्य बिन्दु (C) पर कुल विस्थापन (Deflection),

y_c = बीम के मध्य पर बिन्दु भार (Point Load) $W_1 = 2500$ N के कारण विस्थापन (y_1) + धरन (beam) की पूरी लम्बाई पर 1000 N/m या 1 kN/m के U.D.L. के कारण विस्थापन (y_2)

∴ $$y_c = y_1 + y_2$$ जहाँ (U.D.L. का भार $W_2 = 1\times5 = 5$ kN है)

$$= \frac{W_1L^3}{48\,EI} + \frac{5}{384}\times\frac{W_2L^3}{EI} \quad (\text{यहाँ } I = 25\times10^8 \text{ mm}^4)$$

$$= \frac{2500\times(5000)^3}{48\times2\times10^5\times25\times10^4\times10^4} + \frac{5}{384}\times\frac{5000\times(5000)^3}{2\times10^5\times25\times10^8}$$

$$= 0{\cdot}01302 + 0{\cdot}016276 = \mathbf{0{\cdot}0293\ mm}$$

उत्तर

(2) सिरों पर ढलान (Slope) $\theta_A = \theta_B = \theta$ (माना)

∴ $$\theta = \frac{W_1L^2}{16EI} + \frac{W_2L^2}{24EI}$$

$$= \frac{2500\times(5000)^2}{16\times2\times10^5\times25\times10^8} + \frac{5000\times(5000)^2}{24\times2\times10^5\times25\times10^8} = 1{\cdot}8\times10^{-5} \text{ radian}$$

उत्तर

उदाहरण 16. एक I-काट की धरन पर भार लगा है, जो चित्र 7.23 (a) में दर्शाया गया है। धरन के परास के केन्द्र पर विक्षेप (deflection) का मान निकालिये। I-काट की विमायें निम्नवत् हैं—

वेब (Web) तथा फ्लैन्ज (Flange) की मोटाई = 20mm, फ्लैन्ज (Flange) की चौड़ाई = 60 mm

काट (Section) की गहराई = 80 mm, $E = 200$ Gpa ($= 2\times10^5$ N/mm^2) मानिये।

(U.K. 2004 (W); U.K. 2014, B.P.)

हल—चित्र 7.24 में (a), (b), (c), (d) देखें।

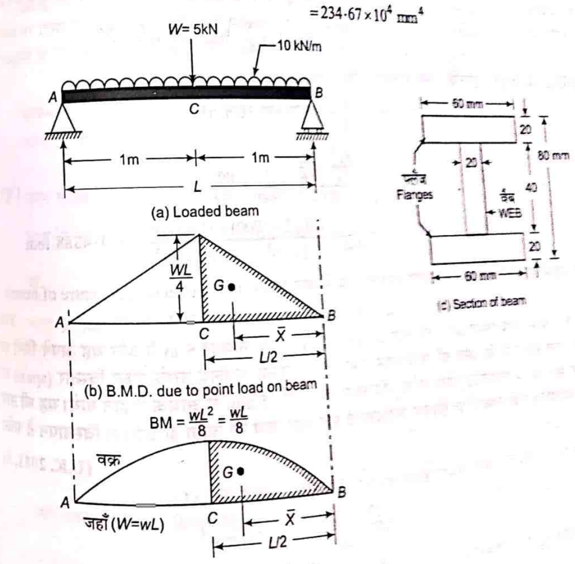
धरन की काट का जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.)

$$I_{XX} = \frac{60\times80^3}{12} - \frac{(60-20)\times(80-40)^3}{12}$$

$$= \frac{60\times80^3}{12} - \frac{40\times40^3}{12}$$

$$= 2346666{\cdot}667 \text{ mm}^4$$

$$= 234{\cdot}67\times10^4 \text{ mm}^4$$



चित्र 7.23

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

स्थिति Ist—माना धरन पर मध्य में केवल बिन्दु भार लगा है। तब इस स्थिति में नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) चित्र 7.23 (b) के अनुसार बनेगा।

∴ क्षेत्रफल (Area of shaded protion), $$A = \frac{\frac{L}{2} \times \frac{WL}{4}}{2} = \frac{WL^2}{16}$$

तथा $$\bar{X} = \frac{2}{3} \times \frac{L}{2} = \frac{L}{3}$$

∴ केन्द्र पर बिन्दु भार (Point Load) W के कारण विक्षेप (deflection)

$$y_{C_1} = \frac{A\bar{X}}{EI} = \frac{\frac{WL^2}{16} \times \frac{L}{3}}{EI} = \frac{WL^3}{48EI} \quad \text{(सूत्र)}$$

$$= \frac{(5 \times 1000) \times (2 \times 1000)^3}{48 \times 2 \times 10^5 \times 234{\cdot}67 \times 10^4} = 1{\cdot}7755 \text{ mm}$$

स्थिति IInd—माना अब धरन (Beam) पर केवल समवितरित भार (U.D.L.) लगा है तब B.M.D. चित्र 7.23 (c) के अनुसार बनेगा।

∴ क्षेत्रफल (area of shaded part), $$A = \frac{2}{3} \times b \times h \quad \text{सूत्र}$$

$$A = \frac{2}{3} \times \frac{L}{2} \times \frac{WL}{8}$$ जहाँ $W = w \times L$ है।

या $$A = \frac{WL^2}{24}$$ तथा $$\bar{X} = \frac{5}{8} \times \text{base} = \frac{5}{8} \times \frac{L}{2} = \frac{5L}{16}$$

∴ U.D.L. के कारण, धरन के मध्य अधिकतम विक्षेप (deflection)

$$y_{C_2} = \frac{A\bar{X}}{EI}$$ सूत्र में मान रखने पर

$$= \frac{\frac{WL^2}{24} \times \frac{5L}{16}}{EI} = \frac{5}{384} \times \frac{WL^3}{EI} \quad \text{(सूत्र)}$$

$$= \frac{5}{384} \times \frac{(10 \times 2 \times 1000) \times (2 \times 1000)^3}{2 \times 10^5 \times 234{\cdot}67 \times 10^4} = 4{\cdot}4388 \text{ mm}$$

∴ कुल विक्षेप (total deflection at centre of beam)

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

Bending Moment $(M) = \frac{WL}{4} = \frac{(160 \times 1000) \times (10 \times 1000)}{4}$

या $M = 4 \times 10^8$ N-mm

∵ $y = \frac{\text{काट की गहराई}}{2} = \frac{h}{2}$ होता है।

∴ $\frac{M}{I} = \frac{f}{y}$ या $\frac{4 \times 10^8}{6 \cdot 67 \times 10^8} = \frac{120}{h/2}$

या $h = \frac{6 \cdot 67 \times 120 \times 2}{4} = 400 \cdot 2 \cong 400$ mm उत्तर

उदाहरण 19. 4·8 m विस्तृति (span) वाली एक आयताकार काट (rectangular section) की काष्ठ धरन अपने सिरों पर शुद्धालम्बित (simply supported) है। इसकी पूरी विस्तृति (span) पर 45 kN का सम्पूर्ण समवितरित भार (U.D.L.) लगाया जाता है। धरन की चौड़ाई (*b*) तथा गहराई (*d*) के लिए अधिकतम मान निकालें यदि अधिकतम बंकन प्रतिबल (beding stress) $7 \cdot 0$ N/mm² से अधिक न होने पाये तब अधिकतम विक्षेप (deflection) 9·5 mm तक सीमित हो। काष्ठ के लिए $E = 1 \cdot 05 \times 10^4$ N/mm² लें। (U.K. 2008, W) (U.P. 2002)

हल—विस्तार (span), $L = 4 \cdot 8$ m = 4800 mm

U.D.L. का कुल भार $W = 45$ kN = 45000 N

नमन प्रतिबल (bending stress) $f = 7$ N/mm²

Beam के मध्य में अधिकतम विक्षेप (deflection) = 9·5 mm

$E = 1 \cdot 05 \times 10^4$ N/mm² है। काट की माप, $b = ?, d = ?$

अधिकतम घूर्ण (max. B.M.), $M = \frac{wL^2}{8} = \frac{WL}{8} = \frac{45000 \times (4800)}{8}$

∴ $M = 27 \times 10^6$ N-mm

$I = \frac{b \times d^3}{12}$ तथा $y = \frac{d}{2}$

$\frac{M}{I} = \frac{f}{y}$ सूत्र से,

$\frac{27 \times 10^6}{I} = \frac{7}{y}$ या $I = \frac{27 \times 10^6}{7} \times y$ ... (i)

∵ अधिकतम विक्षेप (deflection), $= \frac{5}{384} \times \frac{WL^3}{EI}$ सूत्र से,

$$9 \cdot 5 = \frac{5}{384} \times \frac{45000 \times (4800)^3}{1 \cdot 05 \times 10^4 \times \frac{27 \times 10^6}{7} \times y}$$

या $$y = \frac{5 \times 45000 \times (4800)^3 \times 7}{9 \cdot 5 \times 384 \times 1 \cdot 05 \times 10^4 \times 27 \times 10^6} = 168 \cdot 42 \text{ mm}$$

परन्तु $y = \frac{d}{2}$ या $d = 2y = 2 \times 168 \cdot 42 = 336 \cdot 84 = 337$ mm

समी० (i) से $I = \frac{27 \times 10^6}{7} \times 168 \cdot 42 = 649620000 \text{ mm}^4$ उत्तर

परन्तु $I = \frac{b \times d^3}{12}$

या $b = \frac{12\, I}{d^3} = \frac{12 \times 649620000}{(337)^3} = 203 \cdot 68 = 204$mm उत्तर

उदाहरण 20. *d* व्यास तथा *L* लम्बाई की एक छड़ *P* बल के खिंचाव से δ बढ़ जाती है। यदि इसी छड़ को शुद्धालम्ब धरन (simply supported beam) के रूप में प्रयोग किया जाये और केन्द्र पर *W* भार रखा जाये तो सिद्ध कीजिये कि धरन (beam) का अधिकतम विस्थापन (deflection),

$$y = \frac{W \delta L^2}{3Pd^2}$$

हल—प्रतिबल-विकृति और यंग मांपाक वाले अध्याय से

लम्बाई में परिवर्तन, $\Delta l = \frac{F \times l}{A \times E}$ सूत्र में मान रखने पर

$$\delta = \frac{P \times L}{\frac{\pi d^2}{4} \times E} \text{ या } E = \frac{4PL}{\pi d^2 \times \delta}$$

अब simply supported beam के मध्य में *W* भार से विक्षेप (deflection at centre),

$y_{max} = \frac{WL^3}{48EI}$ सूत्र से

max. deflection, $$y = \frac{WL^3}{48 \times \frac{4PL}{\pi d^2 \times \delta} \times \frac{\pi d^4}{64}}$$

$$y = \frac{64 \times \pi d^2 . \delta \times WL^3}{48 \times 4PL \times \pi d^4} = \frac{W . \delta . L^2}{3Pd^2}$$ उत्तर

उदाहरण 21. 4 m विस्तार की लकड़ी की धरन की काट 10 cm चौड़ी तथा 16 cm गहरी है। इसकी पूरी लम्बाई पर 500 Kg/m (या 5 kN/m) का U.D.L. लगा है। धरन के मध्य बिन्दु पर विस्थापन (deflection) और सिरों पर ढलान (slope) की गणना करें। $E = 0 \cdot 8 \times 10^6$ Kg/cm² है। (U.K. 2013, S)

हल—धरन की काट का $I = \frac{bd^2}{12} = \frac{100 \times 160^3}{12}$

या $I = 341 \cdot 33 \times 10^5 \text{ mm}^4$ तथा $E = 0 \cdot 8 \times 10^5$ N/mm² है।

Beam पर U.D.L. का कुल भार $W - w \times L = 5 \times 4 = 20 \text{ kN} = 20 \times 1000$ N सूत्र से

∴ Deflection at centre of beam, $y = \frac{5}{384} \times \frac{WL^3}{EI}$

∴ विस्थापन $(y_{max}) = \frac{5}{384} \times \frac{(20 \times 1000) \times (4000)^3}{(0 \cdot 8 \times 10^5) \times (341 \cdot 33 \times 10^5)} = 6 \cdot 1$ mm उत्तर

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

दोनों सिरों पर ढलान (slope at the ends),

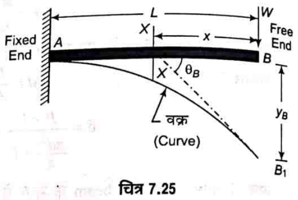
$$\theta_A = \theta_B = \frac{WL^2}{24EI} = \frac{(2\times10^4)\times(4000)^2}{24\times0{\cdot}8\times10^5\times341{\cdot}33\times10^5}$$

$$= 0{\cdot}00488 \text{ radian}$$ उत्तर

§ 7.4 धरन पर भार की कुछ मानक दशाओं (Standard Cases) में दोहरे समाकलन (Double Integration) द्वारा अधिकतम विक्षेप तथा ढलान ज्ञात करना। (Double Integration Method for Slope & Deflection)

7.4.1 Cantilever with a Point Load at its Free End

माना चित्र 7.25 में कैन्टीलीवर धरन के मुक्त (स्वतन्त्र) सिरे B पर एक बिन्दु भार W लगा है। इस धरन (beam) के स्वतन्त्र सिरे B से x दूरी पर कोई काट $(X-X)$ है। अब इस काट X पर नमन घूर्ण (B.M.)



चित्र 7.25

$$M_x = -W.x$$

[(–ve) चिन्ह (sign) clockwise moment के कारण है।]

अब $$EI.\frac{d^2y}{dx^2} = -W.x \quad \text{... (i)}$$

समाकलन (Integration) करने पर

$$EI.\frac{dy}{dx} = -W.\frac{x^2}{2} + c_1 \quad \text{... (ii)}$$

[जहाँ $c_1 =$ समाकलन स्थिरांक]

हम जानते हैं कि जब $x = L$ तब ढलान (slope) $\frac{dy}{dx} = 0$ है।

$$\therefore \quad 0 = -W.\frac{L^2}{2} + c_1 \text{ या } c_1 = \frac{WL^2}{2}$$

या समीकरण (ii) में मान रखने पर

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{Wx^2}{2} + \frac{WL^2}{2} \quad \text{... (iii)}$$

यह ढलान समीकरण (Slope equation) है जिसके द्वारा हम किसी भी बिन्दु के लिए x का मान रखकर ढलान (slope) $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कर सकते हैं।

समीकरण (iii) का पुनः समाकलन (integration) करने पर

$$EI.(y) = -\frac{W}{2}\times\frac{x^3}{3} + \frac{WL^2}{2}.x + c_2$$

$$(EI)\times y = -\frac{W}{6}x^3 + \frac{W}{2}L^2.x + c_2 \quad \text{... (iv)}$$

$\because$ जब $x = L$ है तब विक्षेप (deflection), $y = 0$ है।

$$\therefore \quad 0 = -\frac{WL^3}{6} + \frac{WL^3}{2} + c_2$$

या $$c_2 = \frac{WL^3}{6} - \frac{WL^3}{2} \Rightarrow \frac{WL^3 - 3WL^3}{6} = -\frac{WL^3}{3}$$

समीकरण (iv) में मान रखने पर विक्षेप समीकरण (deflection eq^n)

$$(EI).y = -\frac{W}{6}x^3 + \frac{WL^2}{2}.x - \frac{WL^3}{3} \quad \text{... (v)}$$

इस समी० (eq^n) में किसी भी बिन्दु के लिए x का मान रखकर धरन का उस बिन्दु पर विक्षेप (deflection) y का मान ज्ञात कर सकते हैं।

$\because$ हम जानते हैं कि ढलान तथा विक्षेप के अधिकतम मान स्वतन्त्र सिरे (Free End) B पर होंगे, जहाँ $x = 0$ होगा।

$\therefore$ समी० (iii) में $x = 0$ रखने पर, अधिकतम ढलान $(\theta_{max} \Rightarrow \theta_B)$

$$\therefore \quad (E.I.)\theta_B = -0 + \frac{WL^2}{2} \text{ या } \theta_B = \frac{WL^2}{2EI} \quad \text{(सूत्र)}$$

समी० (v) में $x = 0$ रखने पर, अधिकतम विक्षेप (max. deflection) y_B प्राप्त होगा।

$$\therefore \quad (EI)\ y_B = 0 + 0 - \frac{WL^3}{3} \text{ या } y_B = -\frac{WL^3}{3EI}$$

(–ve) sign विक्षेप नीचे की ओर (downwards) होने को दर्शाता है।

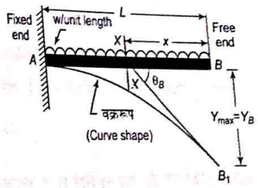
$$\therefore \quad y_{max} = y_B = \frac{WL^3}{3EI} \quad \text{(सूत्र)}$$

7.4.2 कैन्टीलीवर की पूरी लम्बाई पर w प्रति इकाई लम्बाई का समवितरित भार लगा है (Cantilever with a U.D.L. at its full length)

चित्र 7.26 में L लम्बाई के cantilever पर w/metre का U.D.L लगा है। इसके सिरे B से x दूरी पर कोई काट $X-X$ है। अब इस काट पर नमन आघूर्ण (B.M.)

$$M_x = -\frac{wx^2}{2}$$

(यहाँ –ve चिन्ह clockwise के कारण है)



चित्र 7.26

$$\therefore \quad E.I\frac{d^2y}{dx^2} = M = -\frac{wx^2}{2}$$

समाकलन (Integrate) करने पर

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{w}{2}\times\frac{x^3}{3} + c_1 \quad (c_1 = \text{समाकलन स्थिरांक है})$$

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\left(\frac{w}{6}\right)x^3 + c_1 \quad \text{... (i)}$$

$\because x = L$ के स्थान पर ढलान (slope) $\frac{dy}{dx} = 0$ होगा (बद्ध सिरे पर)।

$$\therefore \quad 0 = -\frac{w}{6}.L^3 + c_1 \text{ या } c_1 = \frac{w}{6}L^3$$

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\left(\frac{w}{6}\right)\times x^3 + \left(\frac{w}{6}\right)L^3 \quad \text{... (ii)}$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

यह ढलान समी० (slope eq^n) है। इसमें धरन (beam) के किसी भी बिन्दु के लिए x का मान रखकर ढलान $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ का मान ज्ञात कर सकते हैं।

समी० (ii) का दोबारा समाकलन करने पर—

$$EI\,(y) = -\frac{w}{6}\times\frac{x^4}{4}+\frac{wL^3}{6}x+c_2 \qquad (c_2 = \text{स्थिरांक है})$$

$$EI\,(y) = -\left(\frac{w}{24}\right)x^4+\left(\frac{wL^3}{6}\right)x+c_2 \qquad \text{... (iii)}$$

∵ बद्ध सिरे पर $x = L$ है, जहाँ पर विक्षेप (deflection) $y = 0$ होगा।

$$\therefore \qquad 0 = -\left(\frac{w}{24}\right)L^4+\frac{wL^4}{6}+c_2$$

या
$$c_2 = \frac{wL^4}{24}-\frac{wL^4}{6} = \frac{wL^4-4wL^4}{24} = -\frac{wL^4}{8}$$

समी० (iii) से,
$$EI\,(y) = -\left(\frac{w}{24}\right)x^4+\left(\frac{wL^3}{6}\right)x-\frac{wL^4}{8} \qquad \text{... (iv)}$$

यह समी० (iv), विक्षेप समी० है। इसमें x के मान रखकर किसी भी बिन्दु के लिए विक्षेप (y) का मान ज्ञात कर सकते हैं।

∵ अधिकतम ढलान (slope) विक्षेप (deflection) स्वतन्त्र सिरे B पर है जिसके लिए सम्बन्धों (ii) तथा (iv) में $x = 0$ रखना होगा

$$\therefore \qquad EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0+\frac{wL^3}{6} \text{ या } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{at\,B} \Rightarrow \theta_B = \frac{wL^3}{6EI} \qquad \text{(सूत्र)}$$

तथा
$$EI\,(y_{max}) = 0+0-\frac{wL^4}{8} \text{ या } y_{max} = y_B = \frac{wL^4}{8EI} \qquad \text{(सूत्र)}$$

नोट—उपरोक्त दोनों सूत्रों में यदि U.D.L. का कुल भार $W = w\times L$ रखा जाये तब सूत्र निम्न हो जायेंगे।

$$\theta_B = \frac{WL^2}{6EI} \text{ तथा } y_B = \frac{WL^3}{8EI} \qquad \text{(सूत्र)}$$

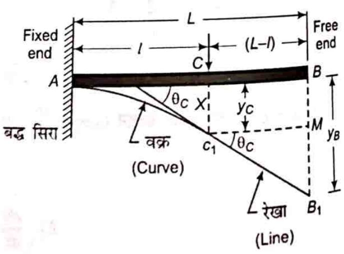
7.4.3 कैन्टीलीवर के स्वतन्त्र सिरे B से हटाकर किसी अन्य बिन्दु पर बिन्दु भार लगा है (Cantilever with a point load at Any Point)

चित्र 7.27 में cantilever के बद्ध सिरे A से l दूरी पर बिन्दु C पर point load W लगा है। C पर विक्षेप y_C तथा B पर विक्षेप y_B है और $\theta_B = \theta_C$ है। अतः प्राप्त हुए सूत्रों में L के स्थान पर l रखने पर,

$$\theta_C = \theta_B = \frac{Wl^2}{2EI} \quad \text{तथा} \quad y_C = \frac{Wl^3}{3EI}$$

अब ΔC_1MB_1 में,

$$\tan\theta_C = \frac{MB_1}{C_1M} = \frac{(y_B-y_C)}{BC}$$



चित्र 7.27

परन्तु
$$\tan\theta_C = \theta_C \quad \text{(कोण बहुत छोटा होने के कारण)}$$

$$y_B - y_C = \theta_C\times BC$$

$$\therefore \qquad y_B = y_C+\theta_C\times BC \qquad \text{(सूत्र)}$$

या जहाँ $y_C = \frac{Wl^3}{3EI}$, $\theta_C = \frac{Wl^2}{2EI}$ तथा $BC = (L-l)$ है।

नोट—यदि Beam पर l लम्बाई तक U.D.L. लगा हो तो सूत्र $y_B = y_c+\theta_C\times BC$ में U.D.L. के सूत्रों में L के स्थान पर l रखकर y_C तथा θ_C के मान ज्ञात कर लेते हैं। अर्थात् अब $y_C = \frac{wl^4}{8EI} = \frac{Wl^3}{8EI}$ तथा $\theta_C = \frac{wl^3}{6EI} = \frac{Wl^2}{6EI}$ मान रखकर y_B ज्ञात करते हैं।

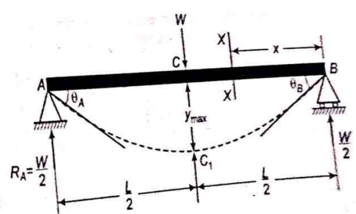
7.4.4 कैन्टीलीवर के स्वतन्त्र सिरे से कुछ दूरी तक समवितरित भार (Cantilever with U.D.L. (w/metre) at a distance BC from free end)

इस दशा में स्वतन्त्र सिरे B पर अधिकतम विक्षेप तथा ढलान ज्ञात करने के लिये सर्वप्रथम धरन की पूर्ण लम्बाई (L) पर एकसमान मान का U.D.L. लगाकार विक्षेप तथा ढलान, क्रमशः $y_{B_1} = \frac{W_1L^3}{8EI}$ तथा ढलान $\theta_B = \frac{W_1L^2}{6EI}$ [जहाँ $W_1 = wL$ है] ज्ञात करते हैं। इसके बाद धरन के खाली भाग $AC = l$ पर U.D.L. समान मान (w kN/m) का नीचे से ऊपर की ओर लगाते हैं, जिससे धरन का झुकाव (विक्षेप) (–ve) दिशा में ऊपर की ओर होता है। इसका मान बद्ध सिरे से l लम्बाई तक लगे U.D.L. के सूत्र, $y_{B_2} = y_C+\theta_C\times BC$ के द्वारा ज्ञात करते हैं। अर्थात् $y_{B_2} = \frac{W_2l^3}{8EI}+\frac{W_2l^2}{6EI}\times(L-l)$ [जहाँ $W_2 = wl$ है] सूत्र द्वारा विक्षेप ज्ञात करते हैं। फिर परिणामी विक्षेप (Resultant deflection) का मान (B पर), $y_B = y_{B_1}-y_{B_2}$ द्वारा ज्ञात हो जायेगा। इसी प्रकार परिणमी ढलान (Resultant Slope), $\theta_B = \frac{W_1L^2}{6EI}-\frac{W_2l^2}{6EI}$ से प्राप्त होता है।

7.4.5 एक शुद्धालम्ब धरन के मध्य में संकेन्द्रित भार (बिन्दु भार) (Simple Supported Beam with a Central Point Load)

चित्र 7.28 में एक सरल आलम्बित धरन L लम्बाई की है जिसके मध्य बिन्दु C पर बिन्दु भार (Point Load) W कार्य करता है। अतः स्पष्ट है कि दोनों सिरों A तथा B पर प्रतिक्रियायें $R_A = R_B$ (आपस में समान मान $\frac{W}{2}$ की) होंगी।

भार की इस स्थिति के कारण केन्द्र पर विक्षेप (deflection) अधिकतम तथा ढलान (slope) शून्य (zero) होगा और दोनों सिरों पर विक्षेप शून्य तथा ढलान (slope) अधिकतम और आपस में बराबर ($\theta_A = \theta_B$) परन्तु दिशा में विपरीत (एक clockwise व दूसरा anticlockwise) होंगे। अब सिरे B से x दूरी पर स्थित काट $X-X$ पर नमन घूर्ण (Bending Moment) लेने पर,



चित्र 7.28

$$M_x = R_B x = \frac{W}{2}x = \frac{Wx}{2}$$

[+ve due to anticlockwise moment or sagging of beam]

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

∴ दोहरे समाकलन विधि (double integration method) के सूत्र द्वारा

$$EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = M \Rightarrow \frac{W.x}{2} \quad \text{... (i)}$$

समाकलन करने पर (Integrating above eq^n)

$$EI.\frac{dy}{dx} = \frac{Wx^2}{4} + C_1 \quad (C_1 \text{ समाकलन स्थिरांक है}) \quad \text{... (ii)}$$

हम जानते हैं कि चित्र में $x = \frac{L}{2}$ दूरी पर ढलान (slope) $\frac{dy}{dx} = 0$ है।

$$\therefore \quad 0 = \frac{W}{4} \times \frac{L^2}{4} + C_1 \text{ या } C_1 = -\frac{WL^2}{16}$$

अब c_1 का यह मान समी० (ii) में रखने पर

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{Wx^2}{4} - \frac{WL^2}{16} \quad \text{... (iii)}$$

यह ढलान समी० (slope eq^n) है जिसमें धरन पर किसी बिन्दु के लिए x का मान रखकर उस बिन्दु पर ढलान (slope) का मान ज्ञात कर सकते हैं। समी० (iii) का एक बार फिर समाकलन करने पर,

$$EI\,(y) = \frac{W}{4} \times \frac{x^3}{3} - \frac{WL^2}{16}.x + C_2$$

हम चित्र से जानते हैं कि $x = 0$ पर विक्षेप (deflection) $y = 0$ है। अतः $C_2 = 0$

अब c_2 का मान रखने पर $\quad EI\,(y) = \frac{Wx^3}{12} - \frac{WL^2}{16}x$ (यह विक्षेप समी० है) ... (iv)

अब B पर अधिकतम ढलान के लिए समीकरण (iii) में $x = 0$ रखने पर,

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{at\,B} = \frac{W}{4} \times 0 - \frac{WL^2}{16} \text{ या } \theta_B = -\frac{WL^2}{16EI}$$

(–ve) चिन्ह का अर्थ है, B पर खींची गयी स्पर्श रेखा, AB से anticlockwise दिशा में कोण बनाती है तथा A पर स्पर्श रेखा clockwise दिशा में कोण बनायेगी अर्थात् A पर कोण (ढलान slope) +ve होगा।

$$\therefore \quad \theta_A = \theta_B = \frac{WL^2}{16EI} \quad \text{(सूत्र)}$$

अब अधिकतम विक्षेप के लिए समी० (iv) में मध्य बिन्दु C के लिए $x = \frac{L}{2}$ रखने पर,

$$EI\,(y_C) = \frac{W}{12} \times \left(\frac{L}{2}\right)^3 - \frac{WL^2}{16} \times \left(\frac{L}{2}\right)$$

$$= \frac{WL^3}{96} - \frac{WL^3}{32}$$

$$= \frac{WL^3 - 3WL^3}{96} = \frac{-2WL^3}{96} = \frac{-WL^3}{48EI}$$

(–ve) चिन्ह केवल नीचे की ओर झुकाव (विक्षेप) को दर्शाता है।

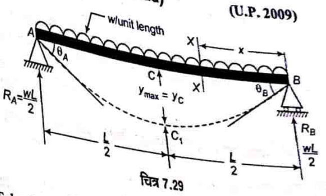
∴ अधिकतम विक्षेप (धरन के मध्य में नीचे की ओर), $y_C = \frac{WL^3}{48EI}$ (सूत्र)

7.4.6 शुद्धालम्ब धरन की पूर्ण लम्बाई पर w/metre का U.D.L. है (Simply Supported Beam with Uniformly Distributed Load)

(U.P. 2009)

चित्र 7.29 में विस्तार (span) L की एक सरल आलम्बित धरन (S.S. Beam) टेकों A तथा B पर टिकी हैं। इसमें B से x दूरी पर कोई काट $X - X$ है।

चित्र में धरन के मध्य (केन्द्र) C पर अधिकतम विक्षेप y_C है तथा C पर ढलान $\theta_C = 0$ है और सिरों (ends) A तथा B पर ढलान अधिकतम तथा समान होगा ($\theta_A = \theta_B$ होगा)। परन्तु विक्षेप $y = 0$ है।



चित्र 7.29

$$\because \quad R_A = R_B = \frac{\text{कुल भार}}{2} = \frac{w.L}{2}$$

अब काट $(X - X)$ पर नमन घूर्ण (B.M.) [Take +ve for ↻, –ve for ↺]

$$M_x = R_B \times x - w.x.\frac{x}{2} = \left(\frac{wL}{2}\right)x - \left(\frac{w}{2}\right)x^2$$

$$\therefore \quad EI\,\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{wL}{2}\right)x - \left(\frac{w}{2}\right)x^2$$

समाकलन करने पर,

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{wL}{2}\right) \times \frac{x^2}{2} - \left(\frac{w}{2}\right)\frac{x^3}{3} + C_1 \quad \text{... (i)}$$

धरन (beam) के मध्य-बिन्दु C के लिए, $x = \frac{L}{2}$ पर ढलान $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ है।

$$\therefore \quad 0 = \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{L^2}{8}\right) - \left(\frac{w}{2}\right) \times \frac{L^3}{24} + C_1$$

$$\therefore \quad c_1 = \frac{wL^3}{48} - \frac{wL^3}{16} = \frac{-2wL^3}{48} = -\frac{wL^3}{24}$$

समी० (i) में c_1 का मान रखने पर,

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{wL}{4}\right)x^2 - \left(\frac{w}{6}\right)x^3 - \frac{wL^3}{24} \quad \text{... (ii)}$$

यह ढलान समीकरण है। धरन में किसी बिन्दु पर धरन का ढलान देखने के लिए B से उस बिन्दु की दूरी x का मान रखकर ढलान $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करते हैं। समी० (ii) का फिर समाकलन करने पर

$$EI\,(y) = \left(\frac{wL}{4}\right)\frac{x^3}{3} - \left(\frac{w}{6}\right)\frac{x^4}{4} - \left(\frac{wL^3}{24}\right)x + C_2$$

परन्तु सिरे B पर $x = 0$ तथा विक्षेप $y = 0$ है। अतः $C_2 = 0$ होगा।

$$\therefore \quad EI.(y) = \left(\frac{wL}{12}\right)x^3 - \left(\frac{w}{24}\right)x^4 - \left(\frac{wL^3}{24}\right)x \quad \text{... (iii)}$$

यह विक्षेप (deflection) समीकरण है। इस समीकरण (iii) द्वारा x के किसी मान पर धरन का विक्षेप (y) ज्ञात किया जा सकता है।

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

(4) $(x-a)$ जैसे पद को $\frac{(x-a)^2}{2}$ की भाँति समाकलित किया जाना चाहिये।

(5) $(x-a)^2$ जैसे पद (term) को $\frac{(x-a)^3}{3}$ की भाँति समाकलित किया जाना चाहिये।

(6) C_2 को C_1x के बाद लिखा जाना चाहिए।

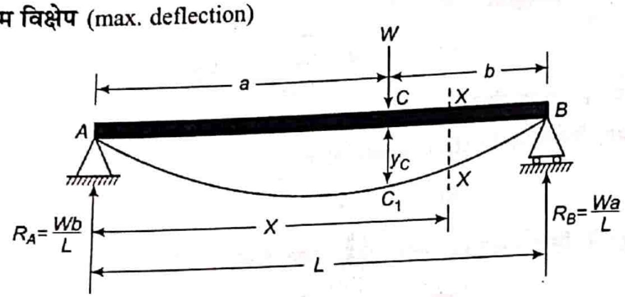
(7) आसानी के लिए deflection तथा slope ज्ञात करने के लिए समीकरण में kN तथा metre की units का प्रयोग करके घूर्ण (moment) ज्ञात करें।

इस विधि को उदाहरणों द्वारा आसानी से समझा जा सकता है।

उदाहरण 2. एक L लम्बाई की शुद्धालम्ब धरन (S.S. Beam) AB पर एक बिन्दु भार W, सिरे A से a तथा सिरे B से b दूरी पर चित्र 7.31 के अनुसार लगा है। $a > b$ है। ज्ञात कीजिए—

(i) भार के बिन्दु C पर विक्षेप (Deflection under the load)

(ii) अधिकतम विक्षेप (max. deflection)



चित्र 7.31

हल—A पर आघूर्ण लेने पर

$$R_B \times L = W \times a \text{ या } R_B = \frac{Wa}{L}$$

$\because$ $R_A + R_B = W$ है।

$\therefore$ $R_A = \frac{Wb}{L}$

अब A से x दूरी पर कोई काट $X-X$ माना। मैकाले विधि द्वारा निम्न प्रकार समीकरण बनाते हैं—

$$M_x = EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W.b}{L}.x - W(X-a)$$

ढलान के लिये समाकलन करने पर,

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{Wb}{L}.\frac{x^2}{2} + C_1 - \frac{W(x-a)^2}{2} \quad \text{... (i)}$$

विक्षेप के लिए पुनः समाकलन करने पर,

$$EI\ (y) = \frac{Wb}{L} \times \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2 - \frac{W(x-a)^3}{6} \quad \text{... (ii)}$$

टेक A पर $x=0$ तब विक्षेप $y=0$

$\therefore$ $c_2 = 0$

टेक B पर $x = L$ तब विक्षेप (deflection) $y=0$

$$0 = \frac{Wb}{L}.\frac{L^3}{6} + C_1L - \frac{W(L-a)^3}{6}$$

$\therefore$ $C_1L = \frac{W(L-a)^3}{6} - \frac{WbL^2}{6} = \frac{Wb^3}{6} - \frac{WbL^2}{6}$

$\therefore$ $= -\frac{Wb}{6}(L^2-b^2)$ या $C_1 = \frac{-Wb}{6L}(L^2-b^2)$ $[\because L-a=b]$

(अब ढलान समी०), समी० (i) से,

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{Wb.x^2}{2L} - \frac{Wb}{6L}(L^2-b^2) - \frac{W(x-a)^2}{2} \quad \text{... (iii)}$$

(विक्षेप समी०) समी० (ii) से,

$$EI\ (y) = \frac{Wbx^3}{6L} - \frac{Wb}{6L}(L^2-b^2)x - \frac{W(x-a)^3}{6} \quad \text{... (iv)}$$

(i) धरन पर भार के बिन्दु C पर विक्षेप (Deflection under the load), y_c

विक्षेप y_c ज्ञात करने के लिए $x = a$ को विक्षेप समी० में रखने पर

$$EI.y_C = \frac{Wba^3}{6L} - \frac{Wb}{6L}(L^2-b^2)a$$

$$= -\frac{Wba}{6L}[L^2-b^2-a^2]$$

परन्तु $L = a + b$ है। अर्थात् $L^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ है।

$$EI.y_C = -\frac{Wba}{6L}(a^2+b^2+2ab-b^2-a^2)$$

$$= -\frac{Wa^2b^2}{3L} \quad \text{(–ve चिन्ह नीचे की ओर विक्षेप को दर्शाता है)}$$

$\therefore$ $y_C = -\frac{wa^2b^2}{3EI.L}$

अथवा $y_C = \frac{Wa^2b^2}{3EIL}$ उत्तर

(ii) अधिकतम विक्षेप (Maximum Deflection), y_{max}

$\because$ अधिकतम विक्षेप के बिन्दु पर ढलान (slope) शून्य (zero) होगा।

$\therefore$ ढलान समी० (iii) में ढलान $\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$ रखने पर

$$0 = \frac{Wbx^2}{2L} - \frac{Wb}{6L}(L^2-b^2)$$ [Max. deflection AC भाग में होगा।

$\therefore$ Last step को छोड़ देंगे]

$\therefore$ $x^2 = \left(\frac{L^2-b^2}{3}\right)$ या $x = \sqrt{\frac{(L^2-b^2)}{3}} = \sqrt{\frac{a^2+2ab}{3}}$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

अब x का मान विक्षेप समी० (iv) में रखने पर

$$EI\,(y_{max}) = \frac{Wb}{6L}\left(\frac{L^2-b^2}{3}\right)^{3/2} - \frac{Wb}{6L}(L^2-b^2)\left(\frac{L^2-b^2}{3}\right)^{1/2}$$

$$= -\frac{Wb}{6L}(L^2-b^2)^{3/2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{(3)^{3/2}}\right]$$

$$= -\frac{wb}{6L}(L^2-b^2)^{3/2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right] = -\frac{Wb}{6L}(L^2-b^2)^{3/2} \times \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$= -\frac{Wb\,(L^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}\times L} = -\frac{Wb\,(a^2+2ab)^{3/2}}{9\sqrt{3}\times L} \qquad [\because L^2 = (a+b)^2]$$

$$\therefore \quad y_{max} = \frac{WB\,(a^2+2ab)^{3/2}}{9\sqrt{3}\,EIL}$$

उत्तर

प्रश्नावली

1. **निम्न रिक्त स्थान भरिये** (Fill up the blanks in Sentences)—

(i) कैन्टीलीवर धरन (cantilever beam) में अधिकतम विस्थापन (deflection) .... पर होता है। **(U.K. 2012, S, 2013 B.P., 2014, S)**

(ii) सरल आलम्बित धरन (simply supported beam) में अधिकतम ढलान (slope) .... होता है। **(U.K. 2014, S)**

(iii) सरल आलम्बित धरन (S.S. beam) के मध्य में बिन्दु भार लगा होने पर अधिकतम विक्षेप (deflection), धरन (beam) के .... में होता है।

(iv) घूर्ण क्षेत्रफल विधि (moment area method) में विक्षेप (deflection) का सूत्र, y_{max} = ... तथा ढलान (slope) का सूत्र θ = ... है।

(v) .... के गुणन को धरन की नमन दृढ़ता (flexural rigidity) कहते हैं। **(U.K. 2007, W)**

(vi) $EI \times \frac{d^2y}{dx^2} = M$, धरन के .... तथा .... का मौलिक सूत्र है। **(U.K. 2010, S)**

(vii) एक L लम्बाई की cantilever beam के मुक्त सिरे (free end) पर एक बिन्दु भार W का लगा होने से मुक्त सिरे पर अधिकतम विक्षेप तथा ढलान के सूत्र क्रमशः .... तथा .... है।

(viii) एक L लम्बाई की cantilever beam के पूर्ण विस्तार (while span) पर w kN/m का U.D.L. लगा होने से मुक्त सिरे (Free end) पर विक्षेप .... तथा ढलान .... है।

(ix) शुद्धालम्ब धरन (S.S. beam) की लम्बाई (L) के मध्य में संकेन्द्रित भार W लगा होने पर अधिकतम ढलान तथा विक्षेप के सूत्र क्रमशः .... तथा .... है।

(x) शुद्धालम्ब धरन (S.S. beam) की पूर्ण लम्बाई (L) पर समवितरित भार (U.D.L.) w/m का लगा होने पर अधिकतम विक्षेप (deflection) तथा ढलान (slope) सूत्र .... तथा .... है।

रिक्त स्थानों के उत्तर

(i) स्वतन्त्र सिरे (Free End पर), (ii) टेकों (supports), (iii) मध्य (centre), (iv) $y_{max} = \frac{A\bar{X}}{EI}, \theta = \frac{A}{EI}$ (v) E तथा I, (vi) ढलान (slope) तथा विक्षेप (deflection) (vii) $y = \frac{WL^3}{3EI}, \theta = \frac{WL^2}{2EI}$ (viii) $y = \frac{wL^4}{8EI}$ या $\frac{WL^3}{8EI}$ या $\frac{WL^2}{6EI}$ (ix) $\theta = \frac{WL^2}{16EI}, y = \frac{WL^3}{48EI}$ (x) $y = \frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI}$ या $\frac{5}{384}\frac{WL^3}{EI}$ तथा $\theta = \frac{wL^3}{24EI}$ या $\frac{WL^2}{24EI}$ (जहाँ $W = w \times L$ है)

2. किसी धरन के ढलान तथा विक्षेप (slope and deflection) को परिभाषित करें तथा चित्र समझाते लिखें। **(U.K. 2012 (S), U.K. 2013, Sp (B.P) (U.P. 2013, 14)**

3. प्रवणता (slope) तथा विक्षेप (deflection) की घूर्ण-क्षेत्रफल विधि (moment area method) पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिये। **(U.P. 2008, 09)**

4. एक सरल आधारित धरन (simply supported beam) जो कि केन्द्र पर एक बिन्दु भार वहन करती है, उसके मध्य में विक्षेप ज्ञात कीजिये। इसके सिरों (ends) पर तथा मध्य में ढलान (slope) भी ज्ञात करें। **(U.P. 2013, M) (U.P. 2010)**

5. एक सरल आधारित धरन पर, जिसकी लम्बाई 'L' तथा बंकन दृढ़ता EI है, उसकी संपूर्ण लम्बाई पर एक समान वितरित भार wkN/m लगाया गया है। इसमें अधिकतम विक्षेप एवं प्रवणता का मान व्युत्पन्न ज्ञात करें। **(U.P. 2012, Civil)**

6. एक प्रास धरन (cantilever beam) पर जिसकी लम्बाई 'L' तथा बंकन दृढ़ता EI है, इसके मुक्त सिरे पर एक संकेन्द्री भार P लगाया गया है। इसका अधिकतम विक्षेप एवं प्रवणता ज्ञात करें। **(U.P. 2011, Mech) (U.P. 2012, Civil)**

7. 5m लम्बे कैंटीलीवर (cantilever) के स्वतन्त्र सिरे (free end) पर 5 kN का संकेन्द्रित भार (concentrated load) लगा है। यदि $E = 200$ GPa तो कैंटीलीवर के स्वतन्त्र सिरे पर विस्थापन (deflection) तथा ढलान (slope) ज्ञात कीजिये। कैंटीलीवर की काट 20 cm × 30 cm है। [उत्तर : 2·315 mm, 0·0398 डिग्री]

8. एक प्रास धरन, जिसका परिच्छेद 75 mm × 100 mm आयताकार तथा लम्बाई 4 m है, पर उसके मुक्त सिरे से 1 m की दूरी पर 1 kN का संकेन्द्री भार लगाया गया है। धरन के मुक्त सिरे पर प्रवणता एवं विक्षेप का मान ज्ञात कीजिये। $E = 200 \times 10^3\ N/mm^2$ मान लीजिये। **(U.P. 2009)** [उत्तर : 10·8 mm, 0·206°]

9. 120 mm × 200 mm आकार की एक प्रास (cantilever) धरन 2·5 m लम्बी है। धरन पर कितना समवितरित भार लगाया जाये कि मुक्त सिरे पर 5 mm का विक्षेप उत्पन्न हो। $E = 2\times10^5\ N/mm^2$ लें। [उत्तर : 16·384 kN/m] **(U.P. 2004)**

10. एक कैंटीलीवर की लम्बाई 1·5 मी है। इस पर बद्ध सिरे से 0·9 मी की दूरी तक 2 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। यदि बीम की काट 75 मिमी चौड़ी × 150 मिमी गहरी हो तो मुक्त सिरे पर ढलान और विस्थापन ज्ञात कीजिये। $E = 0{\cdot}11\times10^5$ न्यूटन/मिमी^{2} मानिये। [उत्तर : $\theta = 1{\cdot}047\times10^{-3}$ rad, 1·34 mm]

11. एक समत्रिभुजाकार परिच्छेद की कैंटीलीवर धरन की भुजा 6 cm तथा लम्बाई 1 m है। इसके परिच्छेद की एक भुजा क्षैतिज है तथा धरन के मुक्त सिरे पर 10kN का भार लगा है। कैंटीलीवर के मुक्त सिरे का विक्षेप ज्ञात कीजिये। धरन के पदार्थ के लिये $E = 200$ GPa मानिये। [उत्तर : 71·28 mm]

12. एक कैंटीलीवर धरन के मुक्त सिरे पर जिसका परिच्छेद वर्गाकार है, 35 kN का भर लगाया गया है। कैंटीलीवर धरन क विस्तृति 2m तथा धरन पदार्थ का प्रत्यास्थता गुणांक $2\times10^5\ N/mm^2$ है। यदि इसके मुक्त सिरे का विक्षेप 3·5 mm तो धरन के अनुप्रस्थ काट की विमाएँ ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 200 mm भुजा का

13. एक बिजली का ऊर्ध्वाधर खोखला बेलनाकार खम्भा 6 मीटर ऊँचा है। इसका एक सिरा जमीन में गड़ा है। दूसरे सिरे 10 kN का केन्द्रित भार लगा है। खम्भे का अपना भार नगण्य माने हुए इस पर अधिकतम विस्थापन निकालिये यदि के काट का $I = 500\ cm^4$ तथा $E = 200$ GPa है। [उत्तर : 720

Scanned with CamScanner

14. एक आयताकार परिच्छेद वाली एल्युमिनियम की कैंटीलीवर धरन, जिसकी चौड़ाई 48 mm तथा मोटाई 36 mm है, एक समवितरित भार वहन करती है। यदि धरन में उत्पन्न अधिकतम विक्षेप का मान 1 mm से अधिक न हो तो UDL का मान ज्ञात कीजिये। वहाँ धरन की लम्बाई 3m है तथा $E = 40$ Gpa मान लें। [उत्तर : 0·7373 N/m]

15. एक कैन्टीलीवर की धरन की काट 120 मिमी चौड़ी तथा 150 मिमी गहरी है। धरन की लम्बाई मी है। धरन के स्वतंत्र सिरे पर ढलान तथा विक्षेप का मान ज्ञात कीजिये जबकि धरन के स्वतंत्र सिरे पर का बिन्दु भार लगा हो। E = 200 GPa [उत्तर : 5·76 mm, $4{\cdot}8\times10^{-3}$ rad] (U.P. 2014, S)

16. एक खोखले आयताकार काट की धरन, जिसकी बाहरी माप 18 cm × 12 cm तथा आन्तरिक माप 9 cm × 6 cm है, एक कैंटीलीवर के रूप में प्रयोग की गयी है। इसकी लम्बाई 4m तथा इसकी पूर्ण लम्बाई पर 6 kN/m का समवितरित भार (UDL) लगा है। कैंटीलीवर की अधिकतम सामर्थ्य के लिये उसके स्वतन्त्र सिरे पर विस्थापन (deflection) ज्ञात कीजिये। $E = 200$ GPa। [उत्तर : 17·56 mm]

17. एक खोखले आयताकार काट धरन, जिसकी बाह्य विमायें 18 × 12 cm तथा आन्तरिक विमायें 9 × 6 cm हैं, का कैंटीलीवर के रूप में प्रयोग किया जाता है। इसकी मुक्त लम्बाई 4m है तथा इसकी पूर्ण लम्बाई 600 N/m लम्बाई का एक समवितरित भार तथा मुक्त सिरे पर 12 kN का बिन्दु भार लगा है। इन परिस्थितियों में कैंटीलीवर का अधिकतम विक्षेपण ज्ञात कीजिये। $E = 2\times10^5$ N/mm^2 [उत्तर : 25·17 mm]

18. एक I काट की कैंटीलीवर धरन की विस्तृति 2·5 मी० है और उस पर 20 कि० न्यूटन/मी का समवितरित भार (U.D.L.) मुक्त (Free) सिरे से 1·5 मी० की दूरी तक लगा है। अधिकतम विस्थापन और ढलान ज्ञात कीजिये यदि धरन की आनमनी दृढ़ता $E\times I = 19\times10^6$ न्यूटन-मी^{2} है। [उत्तर : 4·745 मिमी, 0·147°] (U.P. 2006)

19. एक L लम्बाई (span) की कैन्टीलीवर AB पर स्वतन्त्र सिरे (free end) B से C तक w kN/m का U.D.L. लगा है तथा AC = l खाली है तो अधिकतम विक्षेप तथा ढलान (max. deflection and slope) ज्ञात कीजिये। (U.K. 2009, W)

[संकेत : Cantilever के case V को देखें]

20. एक 8m विस्तृति (span) की कैंटीलीवर धरन (beam) पर बद्ध सिरे (fixed end) से 5m लम्बाई तक 20 kN/m का U.D.L. तथा मुक्त सिरे (free end) पर 5kN का बिन्दु भार (point load) लगा है तो इस धरन का अधिकतम ढलान (slope) तथा विक्षेप (deflection) ज्ञात कीजिये। जबकि $EI = 8\times10^4$ kN-m^2 है। [उत्तर : $\theta_m = 0{\cdot}072$ rad, $y_{max} = 45{\cdot}825$ mm] (U.K.2013, (S)

[संकेत : उदा० 4 देखें]

21. एक 2 मीटर लम्बी कैंटीलीवर धरन की पूरी लम्बाई पर 5 kN/m का समवितरित भार लगा है। कैंटीलीवर के स्वतंत्र सिरे पर ढलान तथा विक्षेप का मान ज्ञात कीजिए। धरन के लिए नमन दृढ़ता $E\times I = 2{\cdot}5\times10^{12}$ N-mm^2 मानिए। [उत्तर : $\theta = 0{\cdot}0026$ radian, $y_B = 4$ mm] (U.K.2012 (S), 2013 (Sp. B.P.)

** विशेष (शुद्धालम्ब धरन (Simply supported Beam) पर आधारित प्रश्न)

22. एक आयताकार काट का धरन 25 cm × 50 cm गहरा है एव 4·5 m लम्बाई पर शुद्धालम्ब है। मध्य में 200 kN का भार लगा है। धरन पर अधिकतम विस्थापन तथा अधिकतम नमन प्रतिबल निकालिये यदि $E = 20$ GPa हो। [उत्तर : 7·29 mm, 21·6 MN/m^2] (U.P.2000)

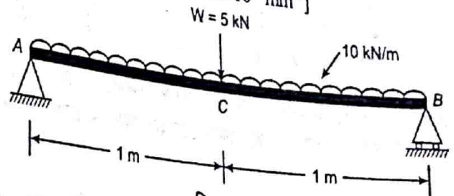
3. एक सहज आधारित (simply supported) धरन, जिसकी लम्बाई 8 मी० है, पर 20 kN का एक बिन्दु बल मध्य पर लगा है। धरन का परिच्छेद 20 सेमी० × 40 सेमी० का है। धरन में अधिकतम विस्थापन का मान ज्ञात कीजिये यदि $E = 20\times10^4$ N/mm^2 है। [उत्तर : 10 mm] (U.P.2003)

24. एक आयताकार धरन (rectangular beam) की काट 18 cm × 10 cm तथा लम्बाई 5 m है और यह अपने सिरों पर शुद्धालम्बित है। ज्ञात कीजिये कि धरन की अधिकतम सामर्थ्य की अवस्था के लिये, उसके मध्य विस्तार (span) पर कितने संकेन्द्रित भार की आवश्यकता होगी ताकि अधिकतम विस्थापन 1·2 cm से अधिक न होने पाये? यह भी ज्ञात कीजिये कि धरन की सम्पूर्ण लम्बाई पर कितना समवितरित भार रखा जाये जो उतना ही अधिकतम विस्थापन दे सके। $E = 200$ GPa। [उत्तर : 44·79 kN, 71·66 kN] (U.P.2012, W)

25. 4m के फैलाव (span) की एक सामान्य रूप से आलम्बित धरन (simply supported beam) के पूरे विस्तार पर 20 kN/m का समवितरित भार (U.D.L. of 20 kN/m) लगा है। धरन में अधिकतम विक्षेप (deflection) तथा ढलान (slope) की गणना कीजिये। मान लीजिए : [$E = 2\times10^5$ N/mm^2 तथा $I = 5\times10^7$ mm^4] [उत्तर : $y = 6{\cdot}7$ mm, $\theta = 0{\cdot}00533$ radian] (U.P.2013)

[संकेत : Ex-13 देखें]

26. चित्र 7.32 में दिखायी धरन के लिये अधिकतम ढाल तथा विस्थापन ज्ञात कीजिये। $EI = 8\times10^4$ KNm^2 मान लें। [U.K. 2014, (S), B.P.]



चित्र 7.32

[उत्तर : 0·036 mm, $5{\cdot}7\times10^{-5}$ radian]

27. एक 4m विस्तार की लकड़ी की धरन (wooden beam of span 4 m) जो कि 100mm चौड़ी एवं 160 mm गहरी काट (section) की है। इसकी पूरी लम्बाई पर 500 Kg/m (या 5 kN/m) का समवितरित भार (U.D.L.) कार्य कर रहा है। धरन के मध्य बिन्दु (mid point) पर विस्थापन (deflection) की गणना कीजिये। $E = 0{\cdot}8\times10^6$ Kg/cm^2 $= 0{\cdot}8\times10^5$ N/mm^2 लीजिए। [उत्तर : $y = 6{\cdot}1$ mm, $\theta = 0{\cdot}00488$ radian] (U.P.2013 (S))

28. आयताकार काट की एक धरन की गहराई 30cm तथा शुद्धालम्बित विस्तार 6m है। इसमें 7·5 MN/m^2 के अधिकतम परत प्रतिबल के लिये केन्द्र पर विक्षेप ज्ञात कीजिये यदि भार केन्द्र पर लग रहा है और $E = 120$ GPa। [उत्तर : 12·5 mm]

29. एक शुद्धालम्बित धरन की विस्तृति (span) 10 m है और उस पर 160 kN का अभिकेन्द्रित भार (बिन्दु भार) मध्य में (at centre) लगा हुआ है। यदि अधिकतम फाइबर प्रतिबल नमन के कारण (bending stress) 120 MPa है और मध्य में विस्थापन (deflection) $= \frac{1}{400}\times$ विस्तृति (span) से अधिक न हो तो धरन की गहराई (d) ज्ञात करें। $E = 2\times10^5$ N/mm^2 मानिये। [उत्तर : 400 mm] (U.K.2009 (W)), (U.P. 2003)

30. एक शुद्धालम्बित धरन (simply supported beam) का विस्तार 5m है। इसके केन्द्र पर एक संकेन्द्रित भार (अर्थात् बिन्दु भार) W के लिये धरन का अधिकतम ढलान 0·5° है, तो केन्द्र पर विक्षेप ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 14·5 mm]

31. 4·8 m विस्तृति वाली एक आयताकार काट की काष्ठ धरन अपने सिरों पर शुद्धालम्बित है। इसकी पूरी विस्तृति पर 45 kN का सम्पूर्ण समवितरित भार लगाया जाता है। धरन की चौड़ाई (b) तथा गहराई (d) के लिए अधिकतम मान निकालें, यदि अधिकतम बंकन प्रतिबल 7·0 N/mm^2 से अधिक न होने पाये तो अधिकतम विक्षेप 9·5 mm तक सीमित हो। काष्ठ के लिए $E = 1{\cdot}05\times10^4$ N/mm^2 लें। [उत्तर : $b = 204$ mm, $d = 337$ mm] (U.P.2002) (U.K. 2008, W)

[संकेत : उदाहरण 19 देखें]

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

32. 2m लम्बी नरम इस्पात (mild steel) की एक ट्यूब का बाहरी व्यास 8 cm और पदार्थ की मोटाई 0·5 cm है। यह ट्यूब अपने दोनों सिरों पर शुद्धालम्ब धारित (simply supported) है। यदि इसके मध्य में 3·5 kN का एक संकेन्द्रित भार (concentrated load) लगा हो और नरम इस्पात (mild steel) का घनत्व (density) $7{\cdot}85 \times 10^3$ kg / m^3 हो तो इसके केन्द्र पर विस्थापन (deflection) तथा सिरों पर ढलान (slope) ज्ञात कीजिये। $E = 200$ GPa।

[उत्तर : 3·623 mm, $0{\cdot}5446 \times 10^{-2}$ radian]

[संकेत : Tube का भार U.D.L. रूप में कार्य करता है। यह भार $W_1 =$ आयतन × घनत्व = (A × L × density)

$\therefore W_1 = 181{\cdot}355$ N तथा केन्द्र पर लगा भार $W_2 = 3{\cdot}5$ kN $= 3500$ N, $I = 831609{\cdot}375$ mm^4,

$$\because y_{max} = \left[\frac{5}{384} \times \frac{W_1 L^3}{EI} + \frac{W_2 L^3}{48EI}\right] \& \left[\theta = \frac{W_1 L^2}{24EI} + \frac{W_2 L^2}{16EI}\right]$$

33. एक सरल आधारित धरन पर, जिसकी लम्बाई '*l*' तथा नमन दृढ़ता *EI* है, एकसमान बंटित भार (U.D.L.) सम्पूर्ण लम्बाई पर लग रहा है। डबल इंटीग्रेशन विधि से इसमें अधिकतम विक्षेप ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : $y_{max} = \frac{5}{384} \times \frac{Wl^3}{EI}$] **(U.P. 2009)**

34. एक कैन्टिलीवर, जिसके मुक्त सिरे (Free End) से विस्तृति (Span of beam) के कुछ भाग पर U.D.L. लगा है, का ढाल तथा विक्षेप (Slope & Deflection) ज्ञात करें।

[संकेत : Cantilever के Case V को देखें। (चित्र 7.10)] **(U.P. 2014-Mech.)**

❑

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

You tube- Polytechnic study with Atul

8 कॉलम तथा स्ट्रट (COLUMN AND STRUTS)

§ 8.1 परिचय (Introduction)

मशीनों के कलपुर्जों अथवा यंत्र विन्यास (mechanism of machine), रेलवे-पुलों (railway-bridges), छतों (roofs), क्रेन्स (cranes), बिजली के टॉवर (high voltage line tower) आदि को कई छड़ों (bars/ rods) द्वारा जोड़कर बनाया जाता है। इन संरचनाओं के अंग (parts of structures) उनके अवयव या सदस्य (elements or members) कहलाते हैं और ये मुख्यत: तीन प्रकार के होते हैं—

(1) संपीडन टुकड़े अथवा ब्लॉक (Compression Blocks)

(2) कॉलम (Columns)

(3) स्ट्रट (Strut)

(1) संपीडन टुकड़ों (Compression Blocks) का वर्गीकरण—मशीनों (machines) या ढाँचों (structures or truss) आदि के वे अंग जिन पर संपीडन भार (compression load) कार्य करते हैं, संपीडन टुकड़े (compression blocks) कहलाते हैं और ये तीन प्रकार के हो सकते हैं—

(i) वे टुकड़े (blocks), जिनकी लम्बाई बहुत ही कम होती है, संपीडन अवयव (compression members) कहलाते हैं।

(ii) वे टुकड़े (blocks), जिनकी लम्बाई उनके व्यास के लगभग 30 गुने से कम होती है, छोटे कॉलम (short column) कहलाते हैं।

(iii) वे टुकड़े, जिनकी लम्बाई, उनके व्यास के लगभग 30 गुने से अधिक होती है, लम्बे कॉलम (long column) कहलाते हैं।

(2) कॉलम (Columns)—किसी ढाँचे (structure), मशीन (machine) या ट्रस (truss) का वह सदस्य (member) जो केवल ऊर्ध्वाधर स्थिति (vertical position) में ही स्थित होता है और जिस पर सदैव अक्षीय सम्पीडन भार (axial compressive load) अथवा उत्केन्द्रित भार (eccentric load) ही कार्य करें (तनाव बल या भार Tensile Loads कार्य न करें), कॉलम (column) कहलाता है।

उदाहरणार्थ, जैसे—बिल्डिंग्स में छत या फर्श को टिकाने के लिए बनाये गये खम्भे (या पिलर्स Pillars) को कॉलम कहते हैं।

Definition. "A column is a long vertical member, subjected to an axial compressive load or eccentric load and it is fixed rigidly or hinged or pin jointed at one or both ends."

(3) स्ट्रट (Strut)—किसी ढाँचे (structure), मशीन (machine) या ट्रस (truss) का वह सदस्य (member) जो ऊर्ध्वाधर (vertical) को छोड़कर अन्य किसी भी दशा में स्थित होता है और जिस पर केवल अक्षीय सम्पीड़न भार या बल (Axial compressive load) ही कार्य करे, स्ट्रट (strut) कहलाता है।

उदाहरणार्थ, जैसे—पुलों या छतों की कैंचियों (trusses) में लगे वे सदस्य जिन पर केवल संपीडन भार (compressive load) आता है। इसके अतिरिक्त उदाहरणों में पिस्टन रॉड (piston rods), संयोजक दण्ड (connecting rods), फोर्जिंग मशीन में साइड-कड़ियाँ (side links in forging machine) आदि आते हैं।

Definition. "A strut is a bar or member in any position other than vertical, subjected to a compressive load and fixed rigidly or hinged or pin jointed at one or both the ends."

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

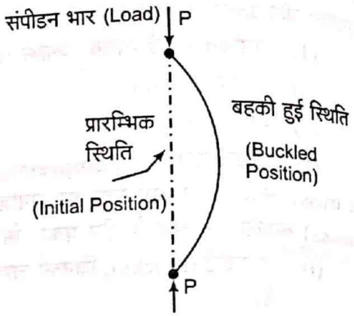
§ 8.2 अंग का असफल (Fail) होना

संपीडन में कोई अंग अथवा सदस्य दो प्रकार से भंग या असफल (fail) हो सकता है—

(1) सीधे ही सम्पीडन बल से कुचलकर (On crushing directly by compressive load)

(2) बहकाव या बकलिंग द्वारा (By crippling or buckling)

जब कम लम्बाई के सदस्य अथवा मशीनी अंग पर संपीडन बल लगने से उत्पन्न हुआ प्रतिबल, बल के अनुरूप बढ़ता जाता है और अन्त में एक स्थिति ऐसी आती है कि उस सदस्य (या अंग) में उत्पन्न हुआ प्रतिबल, उसके पदार्थ के भंजन प्रतिबल (crushing stress) के मान के बराबर हो जाता है तो वह सदस्य (या अंग) दबकर कुचल जाता है। इस भार को कुचलने वाला भार (crushing or collapsing load) कहते हैं।



चित्र 8.1

इसके अतिरिक्त यदि सदस्य अधिक लम्बे कॉलम की भाँति है तो सम्पीडन भार लगने से वह अपनी प्रारम्भिक स्थिति से किसी एक दिशा में चित्र 8.1 के अनुसार हट जाता है अर्थात् बहक जाता है। अपनी पहली स्थिति से विस्थापित होने को ही बहकाव या बकलिंग (Buckling) कहते हैं। इस स्थिति में पदार्थ में उत्पन्न हुआ प्रतिबल, भंजन प्रतिबल (breaking stress) से कम ही रहता है, परन्तु कॉलम या स्ट्रट अपनी पूर्व स्थिति से हट जाने (अथवा विस्थापित होने) के कारण, वह निर्धारित काम करने योग्य नहीं रहता इसीलिए वह असफल (fail) माना जाता है।

कॉलम का बहकाव उसी दिशा में होता है, जिसमें उसकी सामर्थ्य और (कड़ापन stiffness) न्यूनतम होता है।

कॉलम के बहककर असफल होने के कारण निम्न होते हैं—

(1) कॉलम का पूर्ण रूप से सीधा न होना।

(2) पूर्ण रूप से अक्षीय भार (axial load) न लग पाना।

(3) सभी स्थानों पर समान काट (same cross-section) तथा घनत्व (density) का न होना।

(4) कॉलम का पदार्थ सर्वांगसम (homogeneous) न होना।

§ 8.3 कुछ मुख्य परिभाषायें (Important Definitions)

(1) बकलिंग भार या बहकाव भार (buckling load) या क्रान्तिक भार (critical load)—"जिस न्यूनतम भार या बल पर कोई कॉलम या सदस्य अपनी प्रारम्भिक स्थिति से किसी एक दिशा में हट (या बहक) जाता है, वह उसका बहकाव भार या बकलिंग भार (buckling load) या क्रान्तिक भार (critical load) कहलाता है।" कॉलम की काट के गुरुत्वकेन्द्र (C.G.) से जाने वाली जिस अक्ष ($X-X$ अक्ष या $Y-Y$ अक्ष) पर जड़त्व आघूर्ण (moment of inertia) I_{XX} या I_{YY} न्यूनतम पाया जाता है, कॉलम उसी अक्ष की ओर बहकता है।

Definition. "The maximum limiting load at which the column tends to buckle (or lateral displacement) is called buckling or crippling load." The buckling takes place about the axis having *minimum radius of gyration or least M.O.I. (in I_{XX} & I_{YY}).*

(2) कॉलम की समतुल्य लम्बाई (Equivalent Length of Column)—किसी कॉलम या स्ट्रट पर बहकाव भार (buckling load) लगाने से उसकी जितनी लम्बाई में, अपनी प्रारम्भिक स्थिति से विक्षेपण (deviation) होता है अर्थात् विस्थापन (deflection) होता है, उस लम्बाई को कॉलम की समतुल्य लम्बाई (equivalent length of column) कहते हैं। इसे L से दर्शाते हैं।

Definition. "The distance between the adjacent points of inflexion curve is called equivalent length or effective length of column."

(3) न्यूनतम घूर्णन (परिभ्रमण) त्रिज्या (Least radius of gyration)—कॉलम की काट की अक्षों पर न्यूनतम जड़त्व आघूर्ण (अर्थात् I_{XX} व I_{YY} में से कम वाला मान) और कॉलम की काट के क्षेत्रफल (area) A के अनुपात के वर्गमूल को न्यूनतम घूर्णन त्रिज्या कहते हैं। इसे K से दर्शाते हैं। चूँकि हम जानते हैं कि $I_{min} = AK^2$ (सूत्र)

$$\therefore \quad K = \sqrt{I_{min}/A} \quad \text{(सूत्र)}$$

(4) तनुता अनुपात (Slenderness Ratio)—किसी कॉलम की वास्तविक लम्बाई (actual length) या प्रभावी लम्बाई (effective length) (l) तथा उसकी अनुप्रस्थ काट के गुरुत्व केन्द्र (C.G.) पर न्यूनतम घूर्णन त्रिज्या (least radius of gyration) 'K' के अनुपात को उस कॉलम का तनुता अनुपात कहते हैं। अतः

$$\text{तनुता अनुपात} \quad (S.R.) = \frac{l}{K} \quad \text{(सूत्र)}$$

- "It is the ratio of unsupported length of the column to the minimum radius of gyration of the cross-section of column."

So, $$S.R. = \frac{l}{K}$$

(5) बहकाव गुणांक या बकलिंग फैक्टर (Buckling Factor)—कॉलम की समतुल्य लम्बाई (L) तथा काट के गुरुत्वकेन्द्र पर न्यूनतम घूर्णन (परिभ्रमण त्रिज्या) K के अनुपात को बहकाव गुणांक कहते हैं। अर्थात् B.F. $= \frac{L}{K}$ और स्ट्रट की दशा में अथवा कम लम्बाई के कॉलम की स्थिति में तनुता अनुपात को ही बहकाव गुणांक या बकलिंग फैक्टर कहते हैं। अतः

$$B.F. = \frac{l}{K} = \frac{L}{K}$$

- "It is the ratio between the equivalent length (L) of the column to the minimum radius of gyration (K)."

So, $$B.F. = \frac{L}{K}$$

§ 8.4 कॉलम का वर्गीकरण (Classification of Columns)

कॉलम को सरलतम रूप से प्रायः निम्न आधारों (bases) पर वर्गीकृत किया जाता है—

(1) भार की स्थिति (अथवा दशा) के आधार पर (On the basis of load condition)

(a) अक्षीय भारित (Axial Loaded) कॉलम

(b) उत्केन्द्रीय भारित (Eccentric Loaded) कॉलम।

नोट—जब कॉलम पर लगा भार उसकी अनुदैर्ध्य अक्ष (Longitudinal axis) पर कार्य करता है तो वह अक्षीय भारित कहलाता है जबकि अक्ष (axis) से हटकर कुछ दूरी पर अक्ष के समान्तर यदि भार कार्य करता है तो वह उत्केन्द्रीय भारित कॉलम कहलाता है।

(2) तनुता अनुपात के आधार पर (On the basis of Slenderness Ratio)

(a) छोटे कॉलम (Short Column)

जब तनुता अनुपात (S.R. या $\frac{L}{K}$) < 30

(b) मध्यम कॉलम (Medium Column)

जब $30 <$ तनुता अनुपात (S.R. या $\frac{L}{K}$) < 120

(c) लम्बे कॉलम (Long Column)

तब तनुता अनुपात (S.R. या $\frac{L}{K}$) > 120

Scanned with CamScanner

(3) **कॉलम की लम्बाई (l) तथा व्यास (d) में सम्बन्ध के आधार पर** (On the basis of Relation between length and diameter)

(a) छोटे कॉलम (Short Column)
जब $l < 30\,d$

(b) लम्बे कॉलम (Long Column)
जब $l > 30\,d$

(4) **सिरा-स्थितियों के आधार पर** (On the basis of end conditions)

(a) दोनों सिरे कब्जेदार कॉलम (Both ends are hinged or pin jointed)

(b) एक सिरा बद्ध तथा दूसरा स्वतन्त्र कॉलम (One end is fixed and other end is free column)

(c) एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार कॉलम (One end is fixed and other end is hinged column)

(d) दोनों सिरे बद्ध कॉलम (Both ends are fixed)

§ 8.5 कॉलम की सामर्थ्य (Strength of Columns)

(1) सामर्थ्य उसके तनुता अनुपात (S.R. या $\frac{L}{K}$) के मान पर निर्भर करती है। तनुता अनुपात का मान अधिक होने पर कॉलम की सम्पीडन भार सहने की सामर्थ्य (strength) कम हो जाती है तथा अपनी पूर्व स्थिति से बहकने (या विक्षेपित होने) की प्रवृति (tendency) बढ़ जाती है।

(2) कॉलम की सामर्थ्य उसके सिरों की स्थिति (end conditions) पर भी निर्भर करती है।

8.5.1 आयलर सूत्र (Euler's Formula)

यह सूत्र केवल ऐसे स्ट्रट या कॉलम के लिये लागू होता है, जिसकी लम्बाई (l), उसके व्यास (diameter) d के 30 गुने से अधिक होती है। आयलर सूत्र के प्रयोग में सीधा संपीडन प्रतिबल (direct compressive stress) को नगण्य (negligible) मानते हैं और केवल नमन आघूर्ण (B.M.) के आधार पर उसके असफल (fail) होने के लिए बहकाव (या क्रान्तिक) भार के पदों में सूत्र ज्ञात करते हैं। सूत्र की सिद्धि (Derivation of formula) हमारे पाठ्यक्रम (syllabus) में नहीं है।

सिरों की स्थितियों के आधार पर बने चारों कॉलम्स के बहकाव में भंग (fail) होने के लिए समतुल्य लम्बाई (equivalent length) के पदों में "आयलर" ने निम्न सूत्र दिया—

बहकाव भार या क्रिपलिंग भार या आयलर भार,

$$P_b \text{ या } P_{cr} \text{ या } P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \text{(सूत्र)}$$

जहाँ E = कॉलम के पदार्थ का यंग मापांक (Young's modulus)

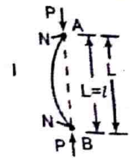
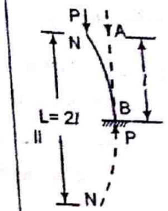
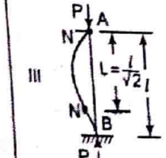
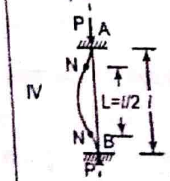
I = कॉलम की अनुप्रस्थ काट का न्यूनतम जड़त्व आघूर्ण
(Moment of Inertia, I = less value in I_{XX} and I_{YY})

L = कॉलम की समतुल्य लम्बाई (Equivalent Length)

l = कॉलम की वास्तविक लम्बाई (Actual Length)

इस आयलर सूत्र में चारों प्रकार के कॉलम की समतुल्य लम्बाई (L) का मान, सिरों की स्थिति के आधार पर तालिका के सम्बन्ध सूत्रों द्वारा वास्तविक लम्बाई (actual length) l के रूप में रखकर बहकाव भार या क्रिपलिंग भार ज्ञात करते हैं।

तालिका 8.1

क्रम संख्या	कॉलम का प्रकार (सिरों की स्थिति के आधार पर) (End conditions)	सम्बन्ध (समतुल्य लम्बाई (L) तथा वास्तविक लं० l)	आयलर सूत्र से बहकाव भार (P_e) Crippling Load	कॉलम की आरम्भिक एवं बहकी स्थिति Fig. of end conditions
1.	दोनों सिरों पर कब्जेदार कॉलम (Both ends are hinged)	$L = l$	$\frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	
2.	एक सिरे पर बद्ध तथा दूसरे पर स्वतन्त्र कॉलम (One end fixed & other free)	$L = 2l$	$\frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$	
3.	एक सिरे पर बद्ध तथा दूसरे पर कब्जेदार कॉलम (One end fixed & other free)	$L = \frac{l}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}$	
4.	दोनों सिरों पर बद्ध कॉलम (Both ends are fixed)	$L = \frac{l}{2}$	$\frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$	

8.5.2 क्रिपलिंग प्रतिबल तथा तनुता अनुपात (Crippling stress and Slenderness Ratio)

हम जान चुके हैं कि दोनों सिरों पर कब्जेदार (hinged or pin jointed) कॉलम के लिये बहकाव भार या क्रिपलिंग भार (Euler or crippling load)

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad [\because L = l \text{ होगा}]$$

यदि काट का क्षेत्रफल A है, तब न्यूनतम जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.)

$$I = AK^2$$

जहाँ K = काट पर न्यूनतम घूर्णन त्रिज्या (least radius of gyration) है।

Study PowerPoint

$$\therefore \quad P_e = \frac{\pi^2 E (AK^2)}{l^2} = \frac{\pi^2 EA}{\left(\frac{l}{K}\right)^2}$$

अतः क्रिपलिंग प्रतिबल (crippling stress), $\sigma_e = \frac{P_e}{A}$

$$\therefore \quad \sigma_e \text{ या } f_{cr} = \frac{P_e}{A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{K}\right)^2} \quad \text{(सूत्र)}$$

यहाँ $\frac{l}{K}$ को ही तनुता अनुपात (slenderness ratio) कहते हैं।

प्राय: छोटे एवं मध्यम कॉलम के लिए तनुता अनुपात $\left(\frac{l}{K}\right)$ का मान 120 से कम तथा लम्बे कॉलम के लिए 120 से अधिक होता है।

8.5.3 आयलर सूत्र के लिए कॉलम के सिद्धान्त में मान्यतायें (Assumptions in Column theory for Euler's Formula) (U.K. 20013, W)

कॉलम सिद्धान्त सूत्र निम्नलिखित मान्यताओं पर आधारित हैं—

(1) कॉलम आरम्भिक अवस्था में बिल्कुल सीधा (straight) तथा समरूप होगा।

(2) सम्पीडन भार, काट के गुरुत्व केन्द्र से होकर गुजरेगा तथा अक्षीय होगा।

(3) कॉलम का पदार्थ सर्वांगसम (homogeneous) होगा।

(4) कॉलम का अपना भार नगण्य होगा।

(5) कॉलम पर भार, समानुपाती सीमा (limit of proportionality) के अन्दर लगेगा।

(6) कब्जेदार सिरे घर्षण रहित तथा बद्ध सिरे दृढ़ (rigid) होंगे।

(Pin joints are frictionless and fixed ends are perfectly rigid.)

§ 8.6 रैंकिन-गॉर्डन सूत्र (Rankine-Gordon Formula)

हम जानते हैं कि बहकने (buckling) के आधार पर असफल (fail) होने वाले लम्बे कॉलम के लिए आयलर सूत्र प्रयोग किये जाते हैं। परन्तु मध्यम कॉलम (medium column) के भंग (या असफल fail) होने के लिए रैंकिन सूत्र प्रयोग किया जाता है।

माना यदि कॉलम के पदार्थ का अन्तिम संपीडन प्रतिबल (f_c या σ_c) है और काट का क्षेत्रफल (A) है, तब छोटे कॉलम के असफल (fail) होने के लिए क्रिपलिंग भार या बल

$$P_{cr} = f_c \times A \quad \text{अथवा} \quad P_{cr} = \sigma_c \times A$$

इसे अधिकतम या असफल न होने की अन्तिम स्थिति में अधिकतम सम्पीडन बल (P_c) भी कहते हैं। माना यदि उसी पदार्थ के बने लम्बे कॉलम के लिए बहकाव भार P_e है तो मध्यम लम्बाई के कॉलम के भंग या असफल (fail) होने के लिए रैंकिन के अनुसार रैंकिन भार P_R को निम्न सूत्र द्वारा दर्शाया जाता है—

$$\frac{1}{P_R} = \frac{1}{P_e} + \frac{1}{P_{cr}} \quad \text{... (i)}$$

या

$$\frac{1}{P_R} = \frac{P_{cr} + P_e}{P_{cr} \times P_e}$$

या

$$P_R = \frac{P_{cr} \times P_e}{P_e + P_{cr}} = \frac{P_{cr}}{1 + \frac{P_{cr}}{P_e}}$$

या

$$P_R = \frac{f_c \times A}{1 + \frac{f_c \times A \times (L)^2}{\pi^2 EI}} \quad \left[\because P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}\right]$$

$$= \frac{f_c \times A}{1 + \left(\frac{f_c}{\pi^2 E}\right) \times \left(\frac{L}{K}\right)^2} \quad [\because I = AK^2 \text{ (सूत्र)}]$$

यहाँ, $\frac{f_c}{\pi^2 E} = a$ माना, जिसे रैंकिन स्थिरांक (Rankine constant) कहते हैं।

प्रत्येक पदार्थ के लिए a का मान भिन्न होता है।

$$\therefore \quad P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left(\frac{L}{K}\right)^2} \quad \text{यह रैंकिन सूत्र कहलाता है।}$$

यहाँ $K = \sqrt{\frac{I}{A}}$ है जिसे न्यूनतम परिभ्रमण त्रिज्या या विघूर्णन त्रिज्या (least radius of gyration) कहते हैं तथा $I = I_{XX}$ तथा I_{YY} में जो भी कम हो, को प्रयोग करते हैं।

दोनों सिरे कब्जेदार कॉलम के लिए विभिन्न पदार्थों के लिए f_c तथा a के मान तालिका 8.2 में दिये गये हैं।

तालिका 8.2

पदार्थ (Material Name)	अन्तिम संपीडन प्रतिबल (Compressive stress) (MPa या MN/m^2) में	रैंकिन स्थिरांक (a) का मान $a = f_c / \pi^2 E$
नरम इस्पात (mild steel)	320	$\frac{1}{7500}$
ढलवाँ लोहा (cast iron)	550	$\frac{1}{1600}$
पिटवाँ लोहा (wrought iron)	250	$\frac{1}{9000}$
लकड़ी (strong timber)	40 से 50 तक	$\frac{1}{750}$ से $\frac{1}{2000}$ तक

महत्वपूर्ण उदाहरण (Important Examples)

उदाहरण 1. एक मृदु स्टील ट्यूब (Mild steel tube) जो 4 m लम्बी, 30 mm आन्तरिक व्यास (inner dia) की तथा 4 mm मोटी है, एक प्रलंबन स्तम्भ (strut) जिसके दोनों सिरे हिंज हैं, की तरह प्रयोग होती है। निपात भार (collapsing load) ज्ञात कीजिये। $E = 2 \cdot 1 \times 10^5$ N/mm^2 मान लीजिये। (U.P. 2014, Mech.)

हल— $\because$ Outer dia of strut d_o = inner dia $(d_i) + 2 \times$ thickness

$$d_o = 30 + 2 \times 4 = 38 \text{ mm}$$

Scanned with CamScanner

∴ जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia),

$$I = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{64}$$

$$I = \frac{\pi}{64}(38^4 - 30^4) = 62561 \cdot 36 \text{ mm}^4$$

∴ नियात भार (collapsing load), अर्थात् ऑयलर भार

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 \times 2 \cdot 1 \times 10^5 \times 62561 \cdot 36}{(4000)^2}$$

[∵ दोनों सिरे Hinged हैं, अत: $L = l = 4 \text{ m} = 4000 \text{ mm}$]

∴ $P_e = 7718 \cdot 198 \text{ N} = 7 \cdot 718 \text{ kN}$ उत्तर

उदाहरण 2. एक 1.5 मीटर लम्बा वृत्ताकार कॉलम जिसका व्यास 50 मिमी० है जिसका एक सिरा बद्ध (fixed) तथा दूसरा सिरा स्वतंत्र (free) है। सुरक्षा गुणांक (factor of safety) 3 है। सुरक्षित भार (safe load) ज्ञात कीजिए जबकि :

(i) रैंकिन सूत्र का प्रयोग कीजिए—क्रिपलिंग प्रतिबल 560 MN/m² और $a = \frac{1}{1600}$ है।

(ii) ऑयलर सूत्र का प्रयोग कीजिए यंग मापांक का मान (E) = 120 GN/m² है। **(U.K. 2014, S)**

हल—दिया है, $l = 1 \cdot 5 \text{ m} = 1500 \text{ mm}$, व्यास (dia.) $d = 50 \text{ mm}$

एक सिरा बद्ध व दूसरा फ्री होने पर $L = 2l = 2 \times 1 \cdot 5 = 3 \text{ m}$

काट का क्षेत्रफल (area of section) $A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (50)^2}{4} = 1962 \cdot 5 \text{ mm}^2$

जड़त्व आघूर्ण (Moment of inertia) $I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi (50)^4}{64} = 306640 \cdot 62 \text{ mm}^4$

∴ विघूर्णन त्रिज्या (radius of gyration),

$$K = \sqrt{\frac{I}{A}} \text{ सूत्र}$$

∴ $$K = \sqrt{\frac{306640 \cdot 62}{1962 \cdot 5}} = \sqrt{156 \cdot 25} = 12 \cdot 5 \text{ mm}$$

(i) रैंकिन सूत्र के प्रयोग द्वारा—

क्रिपलिंग सम्पीड़न प्रतिबल $f_c = 560 \text{ N/mm}^2$

रैंकिन स्थिरांक, $a = \frac{1}{1600}$ (दिया है)

∴ $$P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left[\frac{L}{K}\right]^2} \text{ सूत्र से}$$

$$P_R = \frac{560 \times 1962 \cdot 5}{1 + \frac{1}{1600} \times \left[\frac{3000}{12 \cdot 5}\right]^2} = \frac{1099000}{37} = 29702 \cdot 7 \text{ N}$$

$$= 29 \cdot 7 \text{ kN}$$

सुरक्षित भार (Safe Load) $= \frac{P_R}{F.S.} = \frac{29 \cdot 7}{3} = 9 \cdot 9 \text{ kN}$

(ii) ऑयलर सूत्र के प्रयोग द्वारा—

∴ $$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{(\pi)^2 \times (120 \times 1000) \times 306640 \cdot 62}{(3000)^2}$$

$$= 40352 \cdot 28 \text{ N}$$

$$= 40 \cdot 35 \text{ kN}$$

अब सुरक्षित भार (Safe load) $= \frac{P_e}{F_S} = \frac{40 \cdot 35}{3} = 13 \cdot 45 \text{ kN}$ उत्तर

उदाहरण 3. आयलर सूत्र का प्रयोग करते हुए पिन लगे हुए सिरों वाले गोल स्तम्भ के लिए, जिसका अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 10 cm² तथा स्लैण्डरनैस अनुपात 120 हो तो बंकन भार (buckling load) की गणना कीजिये। E = 200 GPa **(U.K. 2004, W)**

हल—बंकन भार (Buckling Load), $P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 E (AK^2)}{l^2}$ (∵ $L = l$ होगा)

∴ $$P_e = \frac{\pi^2 EA}{\left(\frac{l}{K}\right)^2}$$

यहाँ तनुता अनुपात (Slenderness Ratio) $= \frac{l}{K} = 120$ है।

∴ बंकन भार (Buckling Load), $P_e = \frac{\pi^2 \times (2 \times 10^5) \times (10 \times 100)}{(120)^2}$

⇒ $$P_e = 137077 \cdot 84 \text{ N}$$

$$= 137 \cdot 078 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 4. एक 120 मिमी × 100 मिमी आयताकार काट एवं 1·75 मीटर लम्बे कॉलम का एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार है। कॉलम के लिए बहकाव भार का मान ज्ञात करें। कॉलम के लिए सुरक्षित भार भी ज्ञात कीजिए जबकि सुरक्षा गुणांक 5 हो, E = 200 GPa मानिये। **(U.K. 2012, S, 2013, Sp.BP)**

हल—प्रश्न में दी गयी आयताकार काट की मापों द्वारा, जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) का न्यूनतम मान

$$I_{min} = \frac{120 \times 100^3}{12} = 10^7 \text{ mm}^4, \; E = 200 \text{ GPa} = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

∵ कॉलम का एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार है, अत: $L = \frac{l}{\sqrt{2}}$ होगा।

∴ $$L = \frac{1 \cdot 75 \times 1000}{\sqrt{2}} = 1237 \cdot 44 \text{ mm}$$

सुरक्षा गुणांक (Factor of safety), $S = 5$ है।

अत: बहकाव भार (buckling factor) अर्थात् आयलर भार,

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{ सूत्र से,}$$

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

$$= \frac{(3 \cdot 14)^2 \times 2 \times 10^5 \times 10^7}{(1237 \cdot 44)^2} = 12877779 \cdot 69 \text{ N}$$

$$= 12877 \cdot 78 \text{ kN}$$

अब सुरक्षित भार (Safe Load),

$$= \frac{\text{आयलर भार } (P_e)}{\text{सुरक्षा गुणांक (F.S.)}}$$

$$= \frac{12877 \cdot 78}{5} = 2575 \cdot 55 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 5. एक 2·5 m लम्बा आलंबन स्तम्भ (column) का व्यास 60 mm है। आलंबन स्तम्भ (supported column) का एक सिरा बद्ध है, जबकि दूसरा सिरा हिंज्ड है। Euler का सूत्र प्रयोग करते हुए तथा सुरक्षा गुणांक 3·5 लेते हुये मेम्बर के लिये निरापद संपीडन भार (safe compressive load) ज्ञात कीजिये। E = 200 GPa है। **(U.P. 2013, Mechanical)**

हल—कॉलम की काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.), $I = \frac{\pi d^4}{64}$ सूत्र से

$$I = \frac{\pi (60)^4}{64} = 635850 \text{ mm}^4$$

$\because$ कॉलम का एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार है, अतः

$$L = \frac{l}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2 \cdot 5 \times 1000}{\sqrt{2}} = 1767 \cdot 767 \text{ mm}$$

$\because$ $E = 200 \text{ GPa} = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ तथा सुरक्षा गुणांक (F.S.) = 3·5

$\therefore$ आयलर भार (अथवा बहकाव भार या क्रान्तिक भार)

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{ सूत्र से}$$

$$= \frac{(3 \cdot 14)^2 \times 2 \times 10^5 \times 635850}{(1767 \cdot 767)^2}$$

$$= 401230 \cdot 48 \text{ N} = 401 \cdot 23 \text{ kN}$$

अब निरापद संपीडन भार (safe compressive load)

$$= \frac{P_e}{\text{F.S.}} = \frac{401 \cdot 23}{3 \cdot 5} = 114 \cdot 64 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 6. एक खोखले कास्ट आयरन कॉलम (hollow C.I. column) (एक सिरा दृढ़ता से स्थिर (fixed) तथा दूसरा सिरा हिंज्ड है) जिसका बाह्य व्यास (outer diameter) 150 mm है, में सुरक्षित कम्प्रैसिव लोड की गणना कीजिये। आन्तरिक व्यास (internal diameter) 100 mm तथा लम्बाई 10 m है। आयलर के सूत्र का प्रयोग कीजिए जिसमें सुरक्षा गुणांक (F.S. = 5 तथा $E = 95 \text{ GN/m}^2$ है। **(U.K. 2010 (W))**

हल—$\because$ काट का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia),

$$I = \frac{\pi (d_o^4 - d_i^4)}{64} \quad \text{(सूत्र)}$$

$$I = \frac{\pi (150^4 - 100^4)}{64} = 19931640 \cdot 63 \text{ mm}^4$$

$\therefore$ कॉलम का एक सिरा स्थिर (fixed) तथा दूसरा कब्जेदार (hinged) है तो $L = \frac{l}{\sqrt{2}}$ (सूत्र)

$$\therefore \quad L = \frac{10 \times 1000}{\sqrt{2}} = 7071 \cdot 0678 \text{ mm}$$

$$E = 95 \text{ GN/m}^2 = 95 \times 1000 \text{ N/mm}^2 = 0 \cdot 95 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$\therefore$ बहकाव भार (या आयलर भार),

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{ सूत्र से}$$

$$P_e = \frac{(3 \cdot 14)^2 \times (95 \times 1000) \times (19931640 \cdot 63)}{(7071 \cdot 0678)^2}$$

$$= 373384 \cdot 2 \text{ N}$$

$$= 373 \cdot 384 \text{ kN}$$

अब सुरक्षित कम्प्रैसिव लोड $= \frac{P_e}{\text{F.S.}}$

$$= \frac{373 \cdot 384}{5} = 74 \cdot 677 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 7. किसी कॉलम की काट 4 cm भुजा का वर्ग है। इसकी लम्बाई 1·5 m है और एक सिरा कब्जेदार तथा दूसरा बद्ध (fixed) है। सुरक्षा गुणांक (safety factor) 2 मानकर इस पर आयलर सूत्र से अधिकतम सुरक्षात्मक भार ज्ञात कीजिये। E = 100 GPa। **(U.K. 2008, S)**

हल—कॉलम का न्यूनतम जड़ता घूर्ण,

$$I = \frac{4 \times 4^3}{12} = 21 \cdot 33 \text{ cm}^4 = 21 \cdot 33 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

अब आयलर सूत्र से, (यहाँ प्रश्न के अनुसार कॉलम के सिरों के लिए $L = \frac{l}{\sqrt{2}}$ है)

$$\text{अधिकतम आयलर भार} = P_e = \frac{2\pi^2 EI}{l^2} = \frac{2 \times \pi^2 \times 100 \times 10^9 \times 21 \cdot 33 \times 10^{-8}}{1 \cdot 5^2} = 1871 \cdot 2 \text{ N}$$

$$\text{अब सुरक्षात्मक भार} = \frac{\text{आयलर भार } (P_e)}{\text{सुरक्षा गुणांक (F.S.)}}$$

परन्तु सुरक्षा गुणांक 2 है,

इसलिये, अधिकतम सुरक्षात्मक भार $= \frac{1871 \cdot 2}{2} = 935 \cdot 6$ N उत्तर

उदाहरण 8. दो, अक्षीय भार सम्भालने वाले स्तम्भों की प्रभावी लम्बाई, निर्माण के पदार्थ एवं परिच्छेदों के क्षेत्रफल एक समान हैं परन्तु उनमें एक का अनुप्रस्थ परिच्छेद वर्गाकार है और दूसरे का वृत्ताकार है। उनकी भार धारण करने की क्षमताओं का अनुपात ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2002)**

हल—माना कि वर्गाकार तथा वृत्ताकार स्तम्भों की भार क्षमतायें और जड़त्व आघूर्ण (MOI) क्रमशः P_s, P_c तथा I_s, I_c है।

तब आयलर सूत्र से, ($L = l$, सिरे कब्जेदार लेकर)

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

$$\frac{P_s}{P_c} = \frac{\pi^2 EI_s}{l^2} \times \frac{l^2}{\pi^2 EI_c} = \frac{I_s}{I_c} \quad \ldots (i)$$

यदि वृत्ताकार स्तम्भ का व्यास d तथा वर्गाकार स्तम्भ के परिच्छेद की भुजा a है, तो प्रश्नानुसार

$$a^2 = \frac{\pi}{4} d^2 \quad \text{या} \quad a^4 = \frac{\pi^2}{4^2} d^4$$

तथा $$I_s = \frac{a \times a^3}{12} = \frac{a^4}{12} \quad \text{तथा} \quad I_c = \frac{\pi d^4}{64}$$

अब (1) से, $$\frac{P_s}{P_c} = \frac{a^4}{12} \times \frac{64}{\pi d^4} \Rightarrow \frac{\pi^2 d^4}{16 \times 12} \times \frac{64}{\pi d^4}$$

$$\frac{P_s}{P_c} = \frac{\pi}{3}$$ उत्तर

उदाहरण 9. एक समरूप 1·25 m लम्बाई की गोल छड़ अपने सिरों पर शुद्धालम्ब है। इसमें 350 N के संकेन्द्रित केन्द्रीय भार से 12·5 mm का विक्षेप होता है। यदि छड़ को सिरों पर पिन द्वारा जुड़े एक स्ट्रट के रूप में प्रयोग किया जाये तो उसमें आयलर क्रिपलिंग भार की गणना कीजिये। (U.P. 2004)

हल—प्रश्नानुसार शुद्धालम्बित धरन में विक्षेप

$$y = \frac{Wl^3}{48\,EI} \quad \text{या} \quad EI = \frac{Wl^3}{48y}$$

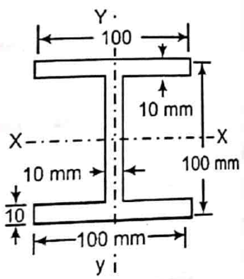
अब पिन सिरों वाली स्ट्रट पर आयलर क्रिपलिंग भार,

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (\text{यहाँ } L = l \text{ है})$$

$$= \frac{\pi^2}{l^2} \times \frac{Wl^3}{48y} = \frac{\pi^2 \times Wl}{48y} = \frac{\pi^2 \times 350 \times 1{\cdot}25}{48 \times 12{\cdot}5 \times 10^{-3}}$$

$$= 7196{\cdot}5 \text{ N}$$ उत्तर

उदाहरण 10. किसी कॉलम की काट I है जो कि चित्र 8.2 में दिखाई गई है। यह कॉलम 3 सुरक्षा गुणांक पर 400 kN का भार सहार सकता है। कॉलम एक सिरे पर स्वतन्त्र तथा दूसरे पर बद्ध (fixed) हो तो उसकी लम्बाई ज्ञात कीजिये। E = 150 GPa (U.K. 2006)



चित्र 8.2

हल—काट के लिए $$I_{XX} = \left[\frac{10 \times 10^3}{12} - \frac{9 \times 8^3}{12}\right] = \frac{1}{12}(5392)$$

$$= 449{\cdot}3 \text{ cm}^4 = 449{\cdot}3 \times 10^{-8} \text{m}^4$$

$$I_{YY} = \frac{1 \times 10^3}{12} + \frac{8 \times 1^3}{12} + \frac{1 \times 10^3}{12}$$

$$= 167{\cdot}33 \text{ cm}^4$$

अतः काट का न्यूनतम जड़ता घूर्ण,

$$I = I_{YY} = 167{\cdot}33 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

हम जानते हैं कि सुरक्षात्मक भार $= \dfrac{\text{बहकाव भार (buckling load)}}{\text{सुरक्षा गुणांक (safety factor)}}$

बहकाव भार = सुरक्षात्मक भार × सुरक्षा गुणांक

$$= 400 \times 3 = 1200 \text{ kN} = 1200 \times 10^3 \text{ N}$$

परन्तु बहकाव भार $= P_e = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2} = \dfrac{\pi^2 EI}{4l^2}$ (जहाँ, l = कॉलम की लम्बाई)

∴ (एक सिरा बद्ध तथा दूसरा स्वतन्त्र कॉलम के लिये $L = 2l$ होता है)

$$E = 150 \text{ GPa} = 150 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

∴ $$1200 \times 10^3 = \frac{\pi^2 \times 150 \times 10^9 \times 167{\cdot}33 \times 10^{-8}}{4 \times l^2}$$

या $$l^2 = \frac{\pi^2 \times 150 \times 10^9 \times 167{\cdot}33 \times 10^{-8}}{4 \times 1200 \times 10^3} = 0{\cdot}5155$$

अतः $$l = 0{\cdot}718 \text{ m} = 718 \text{ mm}$$

उदाहरण 11. ढलवाँ लोहे के एक कॉलम की काट 3 cm × 4 cm का आयत है। यदि पदार्थ की अनुपाती सीमा (proportional limit) 350 MN/m² हो और E = 220 GPa तो कॉलम की वह न्यूनतम लम्बाई ज्ञात कीजिये जिस पर आयलर सूत्र (Euler's formula) का प्रयोग किया जा सके, तथा आयलर भार का भी ज्ञात कीजिये। कॉलम के दोनों सिरे कब्जेदार हैं। Goej

हल—काट का न्यूनतम जड़ता घूर्ण (M.O.I.),

$$I = \frac{4 \times 3^2}{12} = 9 \text{ cm}^4 = 9 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

तथा काट का क्षेत्रफल $$A = 3 \times 4 = 12 \text{ cm}^2 = 12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

माना कि कॉलम की लम्बाई l सेमी तथा आयलर भार P है, तब हम जानते हैं कि ($L = l$ की दशा में)

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

∴ क्रिपलिंग प्रतिबल (crippling stress),

$$\frac{P}{A} = \frac{\pi^2 EI}{Al^2}$$

अब लम्बाई के कम से कम मान के लिये,

क्रिपलिंग प्रतिबल = समानुपाती सीमा (proportional limit),

(परन्तु समानुपाती सीमा = 350 MN/m² दिया है)

∴ $$\frac{P}{A} = 350 \text{ MN/m}^2 = 350 \times 10^6 \text{ N/m}$$

∴ $$350 \times 10^6 = \frac{\pi^2 EI}{Al^2}$$

Scanned with CamScanner

या $$l^2 = \frac{\pi^2 \times 220 \times 10^9 \times 9 \times 10^{-8}}{350 \times 10^6 \times 12 \times 10^{-4}} = 0{\cdot}46485$$

∴ $$l = 0{\cdot}6818 \text{ m}$$

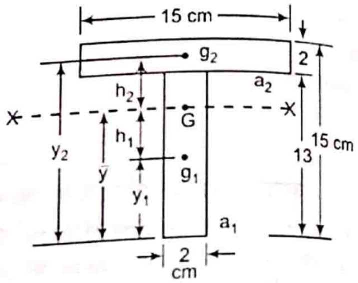
अब आयलर भार का मान

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 \times 220 \times 10^9 \times 9 \times 10^{-8}}{(0{\cdot}6818)^2} = 42{\cdot}388 \times 10^3 \text{ N}$$

$$= 42{\cdot}388 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 12. एक 15 cm × 15 cm की T काट को, जिसके फ्लैंज तथा वैब की मोटाई समान रूप से 2 cm है, 4 m लम्बे स्ट्रट के रूप में प्रयोग किया जाता है जिसके दोनों सिरे कब्जेदार हैं। यदि पदार्थ के लिये यंग मापांक 2×10^5 N/mm^2 हो तो क्रिपलिंग भार ज्ञात कीजिये।
[उत्तर : 704·653 kN] (U.K. 2005)

हल—प्रश्नानुसार T-काट को चित्र 8.3 में दिखाया गया है।



चित्र 8.3

इसमें $$y_1 = \frac{13}{2} = 6{\cdot}5 \text{ cm}$$

$$y_2 = 15 - 1 = 14 \text{ cm}$$

g_1 केन्द्र वाले आयत का क्षे०, $a_1 = 2 \times 13 = 26$

g_2 केन्द्र वाले आयत का क्षे०, $a_2 = 15 \times 2 = 30$

∴ गु०केन्द्र G की ऊँचाई $$\bar{y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2}$$

$$\bar{y} = \frac{26 \times 6{\cdot}5 + 30 \times 14}{26 + 30} = 10{\cdot}52 \text{ cm}$$

∴ $$h_1 = \bar{y} - y_1 = 10{\cdot}52 - 6{\cdot}5 = 4{\cdot}02 \text{ cm}$$

तथा $$h_2 = y_2 - \bar{y} = 14 - 10{\cdot}52 = 3{\cdot}48 \text{ cm}$$

∴ $$I_{XX} = [I_{Xg_1} + a_1 h_1^2] + [I_{Xg_2} + a_2 h_2^2]$$ सूत्र से

$$= \left[\frac{2 \times 13^3}{12} + 26 \times 4{\cdot}02^2\right] + \left[\frac{15 \times 2^3}{12} + 30 \times 3{\cdot}48^2\right] = 1159{\cdot}65 \text{ cm}^4$$

तथा $$I_{YY} = \frac{13 \times 2^3}{12} + \frac{2 \times 15^3}{12} = 571{\cdot}166 \text{ cm}^4 = 571{\cdot}167 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

∴ आयलर सूत्र में $I = I_{XX}$ तथा I_{YY} में से कम वाला मान अर्थात् $I_{YY} = 571{\cdot}167 \times 10^4$ mm^4

दोनों सिरे कब्जेदार हैं अतः $L = l = 4$ m $= 4000$ mm

क्रिपलिंग भार $$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{(3{\cdot}14)^2 \times 2 \times 10^5 \times 571{\cdot}167 \times 10^4}{(4000)^2}$$

$$= 703934{\cdot}7692 \text{ N}$$

$$= 703{\cdot}935 \text{ kN} = 704 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 13. एक मिश्रित धातु की नलिका की लम्बाई 5 मीटर और बाहरी और आन्तरिक व्यास क्रमशः 40 mm और 25 mm हैं। उसमें पाया गया कि तनन भार 60kN लगाने पर 6·4 mm बढ़ गई। नलिका का व्याकुंचन भार ज्ञात करें जब उसे एक कॉलम के रूप में प्रयोग किया जाये जिसके दोनों सिरे कब्जेदार हों। नलिका को सुरक्षित संपीडन भार की सुरक्षा गुणांक 4 के लिए ज्ञात करें।
[उत्तर : 2·573 kN, 0·643 kN] (U.P. 2007)

हल—दिया है नलिका (tube) के बाहरी व्यास $d_o = 40$ mm

आन्तरिक व्यास $d_i = 25$ mm

∴ $$I = \frac{\pi(d_0^4 - d_i^4)}{64} = 106434{\cdot}96 \text{ mm}^4$$

क्षेत्रफल $$A = \frac{\pi(d_o^2 - d_i^2)}{4} = 765{\cdot}375 \text{ mm}^2$$

∵ तनाव बल $(F) = 60$ kN $= 60 \times 1000$ N लगाने से लम्बाई में वृद्धि $(\Delta P) = 6{\cdot}4$ mm

अब $\Delta l = \dfrac{F \times l}{AE}$ सूत्र से

$$6{\cdot}4 = \frac{60 \times 1000 \times 5000}{765{\cdot}375 \times E} \quad \text{या} \quad E = 61244{\cdot}488 \text{ N/mm}^2$$

अब इसे दोनों सिरे कब्जेदार strut के रूप में प्रयोग करने पर $L = l = 5$ m $= 5000$ mm

∴ आयलर सूत्र से नलिका (tube) का व्याकुंचन भार, $P_e = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2}$ सूत्र द्वारा

$$P_e = \frac{\pi^2 \times 61244{\cdot}488 \times 106434{\cdot}96}{(5000)^2}$$

$$= 2570{\cdot}8 \text{ N} = 2{\cdot}57 \text{ kN}$$ उत्तर

सुरक्षित संपीडन भार (safe compressive load)

$$P_{\text{safe}} = \frac{\text{आयलर भार } (P_e)}{\text{सुरक्षा गुणांक (F.S.)}} = \frac{2{\cdot}57}{4} = 0{\cdot}643 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 14. जब एक-समान व्यास वाली 3 मी० लम्बाई की छड़ को 2 मी० के विस्तार की एक सरल आधार वाली धरन के रूप में प्रयोग किया जाता है तथा विस्तार के मध्य-बिन्दु पर 200 N का संकेन्द्री भार लगाने पर 5 मिमी० का विक्षेप प्राप्त होता है। यदि इस छड़ को स्तम्भ के रूप में प्रयोग किया जाये, जिसका एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार हो, तब आयलर व्यकुंचन भार का मान ज्ञात कीजिए। [U.P. 2004]

हल—∵ विक्षेप $$y = \frac{WL^3}{48\,EI} \quad \text{(सूत्र)},$$

अतः $$5 = \frac{200 \times (2000)^3}{48 \times E \times I} \quad \text{या} \quad EI = \frac{16 \times 10^{11}}{240}$$

अब स्तम्भ (column) रूप में, $$L = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{3000}{\sqrt{2}} \quad \text{या} \quad L^2 = 4500000 \text{ mm}$$

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

∵ आयलर व्याकुंचन भार (Euler's Load) $P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ सूत्र से,

$$P_e = \frac{\pi^2 \times 16 \times 10^{11}}{45 \times 10^5 \times 240} = 14621{\cdot}64 \text{ N} = 14{\cdot}62 \text{ kN}$$ उत्तर

विशेष–रैंकिन सूत्र पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 15. एक ढलवाँ लोहे के बने ठोस स्तम्भ की लम्बाई 5 m तथा व्यास 15 cm है। यह नीचे के सिरे पर स्थिर बद्ध (fixed) तथा दूसरे सिरे पर मुक्त (free) है। अगर सुरक्षा गुणांक (factor of safety) 5 है तो स्तम्भ का निरापद भार (safe load) ज्ञात करें। रैंकिन सूत्र में 'a' का मान ढलवाँ लोहे के लिये $\frac{1}{1800}$ लें तथा $E = 190$ GN/m^2। **(U.K. 2005)**

हल—हम जानते हैं कि स्थिरांक,

$$a = \frac{f_c}{\pi^2 E}$$ (सूत्र)

∴ $$f_c = a \times \pi^2 E$$ ... (i)

$$= \frac{1}{1800} \times \pi^2 \times 190 \times 10^3 = 1040{\cdot}735 \text{ N/mm}^2$$

$$(\because E = 190 \text{ GN/m}^2 = 190 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)$$

$$l = 5 \text{ m}$$

तब कॉलम की समतुल्य लम्बाई (equivalent length),

$$L = 2l = 2 \times 5 = 10 \text{ m} = 10 \times 1000 \text{ mm}$$

$$A = \frac{1}{4}\pi \times 15^2 = 176{\cdot}625 \text{ cm}^2 = 176{\cdot}625 \times 10^2 \text{ mm}$$

$$I = \frac{\pi \times 15^4}{64} = 2483{\cdot}79 \text{ cm}^4 = 2483{\cdot}79 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

अतः काट की न्यूनतम घूर्णन त्रिज्या (least radius of gyration),

$$K = \sqrt{\left(\frac{I}{A}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2483{\cdot}79 \times 10^4}{176{\cdot}625 \times 10^2}\right)} = 37{\cdot}5 \text{ mm}$$

अब रैंकिन सूत्र, $P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\,(L/K)^2}$ से

$$P_R = \frac{1040{\cdot}735 \times 176{\cdot}625 \times 10^2}{1 + \frac{1}{1800} \times \left(\frac{10^4}{37{\cdot}5}\right)} = 453808{\cdot}8 \text{ N} = 453{\cdot}8 \text{ kN}$$

हम जानते हैं कि,

$$\text{निरापद भार (safe load)} = \frac{\text{रैंकिन भार } (P_e)}{\text{सुरक्षा गुणांक (F.S.)}} = \frac{453{\cdot}8}{5} = 90{\cdot}76 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 16. ढलवाँ लोहे के 3m लम्बे एक स्तम्भ (column) की काट का बाह्य व्यास 5 cm तथा अन्तः व्यास 2 cm है। इसका एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार (hinged) है। यदि पदार्थ का अन्तिम प्रतिबल (ultimate stress) $f_c = 560$ MPa और रैंकिन स्थिरांक $\frac{1}{1600}$ हो तो कॉलम के लिये रैंकिन भार ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2010 S)**

हल—कॉलम की काट का क्षेत्रफल,

$$A = \frac{\pi}{4}(5^2 - 2^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} \times 21 = 16{\cdot}485 \text{ cm}^2 = 16{\cdot}485 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

कॉलम का न्यूनतम जड़ता घूर्ण, $I = \frac{\pi}{64}(5^4 - 2^4) = 29{\cdot}88 \text{ cm}^4 = 29{\cdot}88 \times 10^{-8} \text{ m}^4$

अब हम जानते हैं कि घूर्णन त्रिज्या (radius of gyration) K निम्न सूत्र द्वारा सम्बन्धित है—

$$I = AK^2 \quad \text{या} \quad K = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

अतः कॉलम के लिये न्यूनतम घूर्णन त्रिज्या,

$$K = \sqrt{\frac{29{\cdot}88 \times 10^{-8}}{16{\cdot}485 \times 10^{-4}}} = 1{\cdot}346 \times 10^{-2} \text{ m}$$

अब रैंकिन सूत्र से, रैंकिन भार,

$$P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left[\frac{L}{K}\right]^2}$$

समतुल्य लम्बाई, $L = \frac{l}{\sqrt{2}}$

∴ $$P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{K}\right]^2}$$

$$= \frac{560 \times 10^6 \times 16{\cdot}485 \times 10^{-4}}{1 + \frac{1}{1600} \times \left[\frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{1{\cdot}346 \times 10^{-2}}\right]^2} = 55780 \text{ N} = 55{\cdot}78 \text{ kN}$$

उदाहरण 17. इस्पात की एक नलिका, जिसका बाह्य व्यास तथा आन्तरिक व्यास क्रमशः 4 cm तथा 2·8 cm है, स्ट्रट की तरह प्रयोग होता है जिसके दोनों सिरे कब्जेदार हैं। स्ट्रट की लम्बाई निकालें, यदि आयलर (Euler) तथा रैंकि(न) (Rankine) के सूत्र से क्रिपलिंग भार (crippling load) का एक ही मान है। $E = 200$ GPa लें। रैंकिन सूत्र के अ... 330 MN/m^2 तथा $\frac{1}{7500}$ हैं।

हल— $d_i = 2{\cdot}8$ cm, $d_0 = 4$ cm, $f_c = 330$ MN/m^2, $a = \frac{1}{7500}$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

नलिका की काट का क्षेत्रफल, $A = \frac{\pi}{4}(4^2 - 2\cdot8^2) = 6\cdot4056\,cm^2 = 6\cdot4056\times10^{-4}\,m^2$

काट का जड़ता घूर्ण, $I = \frac{\pi}{64}(4^4 - 2\cdot8^4) = 9\cdot54\,cm^4 = 9\cdot54\times10^{-8}\,m^4$

परन्तु $AK^2 = I \quad \therefore \quad K^2 = \frac{I}{A}$

∴ घूर्णन त्रिज्या, $K = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\left(\frac{9\cdot54\times10^{-8}}{6\cdot4056\times10^{-4}}\right)} = \sqrt{(1\cdot49\times10^{-4})}$

$= 1\cdot22\times10^{-2}\,m$

आयलर सूत्र से क्रिपलिंग भार,

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

रेंकिन सूत्र से क्रिपलिंग भार,

$$P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left(\frac{L}{K}\right)^2},$$ जहाँ l = स्ट्रट की लम्बाई $= L$

प्रश्न के अनुसार, $P_e = P_R$

$$\therefore \quad \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{f_c A}{1 + a\left(\frac{L}{K}\right)^2}$$

अतः $$= \pi^2 \times 200\times10^9 \times 9\cdot54\times10^{-8}\left[1 + \frac{1}{7500}\times\frac{L^2}{1\cdot49\times10^{-4}}\right]$$

$$= 330\times10^6 \times 6\cdot4056\times10^{-4}\times L^2$$

$$\therefore \quad L^2 = 4\cdot3681$$

अतः $L = 2\cdot09\,m$ **उत्तर**

उदाहरण 18. ढलवाँ लोहे के बने एक खोखले कॉलम की लम्बाई 5 m है और वह दोनों सिरे पर बद्ध है। इस पर 300 kN का अक्षीय भार लगाना है। कॉलम के अन्त: तथा बाह्य व्यास में 8/10 का अनुपात हो तो सुरक्षा गुणांक 8 मान कर कॉलम की काट की माप ज्ञात कीजिये। $f_c = 577$ MPa तथा रेंकिन स्थिरांक, $a = 1/1600$ मानिये।

[उत्तर : भीतरी व्यास $= 144$ mm, बाहरी व्यास $= 180$ mm]

हल—प्रश्नानुसार $l = 5\,m = 5000$ mm, दोनों सिरे बद्ध होने पर $L = \frac{l}{2} = 2500$ mm

$$\because \quad \text{सुरक्षा गुणांक (F.S.)} = \frac{\text{रेंकिन भार } (P_R)}{\text{सुरक्षा भार (safe load)}}$$

$$8 = \frac{P_R}{300\times1000\,N} \quad \text{या} \quad P_R = 24\times10^5 N$$

$\because \frac{d_i}{d_o} = \frac{8}{10}$ दिया है। अतः आन्तरिक व्यास $di = 8\,d$ (माना)

तथा बाहरी व्यास $d_o = 10\,d$

कॉलम की काट का क्षेत्रफल, $A = \frac{\pi(d_0^2 - d_i^2)}{4} = \frac{\pi}{4}[(10d)^2 - (8d)^2]$

या $A = \frac{\pi}{4}\times36d^2 = 28\cdot26d^2$

तथा काट का जड़त्व आघूर्ण (MOI),

$$I = \frac{\pi}{64}[(10d)^4 - (8d)^4]$$

$$\therefore \quad I = 289\cdot665\,d^4 \quad \text{तथा} \quad K = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{289\cdot665\,d^4}{28\cdot26d^2}} = 3\cdot2d$$

$\because f_c = 577$ MPa $= 577\,N/mm^2$, $a = \frac{1}{1600}$ (दिया है)

∴ रेंकिन सूत्र से, $$P_R = \frac{f_C \times A}{1 + a\left[\frac{L}{K}\right]^2}$$

या $$24\times10^5 = \frac{577\times28\cdot26\,d^2}{1 + \frac{1}{1600}\left[\frac{2500}{3\cdot2d}\right]^2}$$

या $$\left[1 + \frac{381\cdot47}{d^2}\right] = 0\cdot006794\times d^2$$

या $$d^2 + 381\cdot47 = 0\cdot006794\times d^4$$

माना $d^2 = X$ तब $0\cdot0068\times X^2 - X - 381\cdot47 = 0$

$$X = \frac{1\pm\sqrt{1^2 - 4\times0\cdot0068\times(-381\cdot47)}}{2\times0\cdot0068} = \frac{1\pm3\cdot373}{0\cdot0136}$$

∴ $X = 321\cdot54$ (+ve लेने पर) $= d^2$ रखा (माने गये अनुसार)

या $d = 17\cdot932 = 18$ mm.

अब आन्तरिक व्यास (Internal dia) $d_i = 8d = 8\times18 = 144$ mm **उत्तर**

तथा बाहरी व्यास (Outer dia) $d_o = 10d = 10\times18 = 180$ mm **उत्तर**

उदाहरण 19. एक इस्पात की स्पीडांग 5 m लम्बा और इसका परिच्छेद चित्र 8.4 में दिखाया गया है। यदि दोनों सिरे आबद्ध हैं तो वह सुरक्षित भार ज्ञात कीजिए जो यह सुरक्षा गुणांक 4 के साथ वहन कर सकता है। रैंकिन सूत्र का प्रयोग कीजिए। $f_c = 330\,N/mm^2$ और रैंकिन स्थिरांक $= \frac{1}{7500}$।

हल—उदाहरण (12) के चित्र 8.3 के अनुसार चित्र 8.4 में दिखायी गयी T-काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.), ज्ञात करने पर $I_{XX} = 6372442\cdot557\,mm^4$

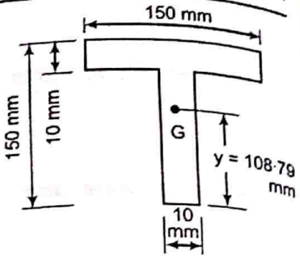
Scanned with CamScanner

तथा $I_{YY} = 2824166{\cdot}667\ \text{mm}^4$

$\therefore I$ = न्यूनतम जड़त्वाघूर्ण $I \Rightarrow I_{YY} = 2824166{\cdot}667\ \text{mm}^4$

जहाँ गु०के० (G) की ऊँचाई, $\bar{y} = 108{\cdot}79$ है।

T-काट का कुल क्षेत्रफल $(A) = (a_1 + a_2) = 1400 + 1500 = 2900\ \text{mm}^2$



चित्र 8.4

$\therefore$ घूर्णन त्रिज्या $K = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{2824166{\cdot}167}{2900}} = 31{\cdot}206\ \text{mm}$

$L = \frac{l}{2} = 2{\cdot}5\ \text{m} = 2500\ \text{mm}$ ($\because$ both ends are fixed)

$$\therefore P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left[\frac{L}{K}\right]^2} = \frac{330 \times 2900}{1 + \frac{1}{7500}\left[\frac{2500}{31{\cdot}206}\right]^2}$$

$$= \frac{957000}{1{\cdot}85574} = 515697{\cdot}24\ \text{N} = 515{\cdot}697\ \text{kN} = 515{\cdot}7\ \text{kN}$$

$\therefore$ सुरक्षा गुणांक (F.S.) पर सुरक्षित भार (safe load) $= \frac{P_R}{\text{F.S.}}$

$$= \frac{515{\cdot}7}{4} = 128{\cdot}92\ \text{kN}$$ उत्तर

उदाहरण 20. 40 mm बाह्य व्यास तथा 30 mm आन्तरिक व्यास का कम लम्बाई का एक ट्यूब 72 kN के भार पर शुद्ध सम्पीडन में असफल हो गया। 2 m लम्बाई के ऐसे ही ट्यूब को जब आवद्ध सिरों वाले एक स्ट्रट के रूप में परीक्षण किया गया तो क्रिपलिंग भार 40 kN था। यह मानते हुए कि रैंकिन सूत्र के लिये f_c का मान प्रथम परीक्षण से प्राप्त है तो इसी सूत्र में स्थिरांक 'a' का मान ज्ञात कीजिये। (U.P.)

हल—प्रश्नानुसार, $I = \frac{\pi(d_0^4 - d_i^4)}{64} = \frac{\pi}{64}(40^4 - 30^4) = 85859{\cdot}375\ \text{mm}^4$

$$A = \frac{\pi(d_0^2 - d_i^2)}{4} = \frac{\pi}{4}(40^2 - 30^2) = 549{\cdot}5\ \text{mm}^2$$

अन्तिम सम्पीडन भार (compressive load) $= (f_c \times A) = 72\ \text{kN}$

क्रिपलिंग भार (crippling load),

$$P_R = 40\ \text{kN}$$

अब $P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left[\frac{L}{K}\right]^2}$ जहाँ $K = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{85859{\cdot}375}{549{\cdot}5}} = 12{\cdot}5\ \text{mm}$

तथा $L = \frac{l}{2} = \frac{2}{2} = 1\ \text{m} = 1000\ \text{mm}$

$$40 = \frac{72}{1 + a\left[\frac{100}{12{\cdot}50}\right]^2}$$

$1 + a[6400] = \frac{72}{40} = 1{\cdot}8$ या $a = \frac{1{\cdot}8 - 1}{6400} = \frac{0{\cdot}8}{6400} = \frac{1}{8000}$ उत्तर

उदाहरण 21. एक खोखले बलनाकार ढलवाँ लोहे के स्तम्भ के लिए यूलर का विकलांग भार ज्ञात कीजिये जिसका बाह्य व्यास 150 mm और मोटाई 20 mm हो। स्तम्भ 6·0 मी० लम्बा और उसका एक सिरा स्थिर और दूसरा कब्जेदार है। इस भार की तुलना रैंकिन के सूत्र से निकाले गये संदलन भार से रैंकिन के स्थिरांक के मान $a = 1/1600$ और $f_c = 6 \times 10^2$ न्यूटन/मिमी² का उपयोग करते हुये कीजिये। $E = 0{\cdot}8 \times 10^5$ न्यूटन/मिमी² मानिये। (U.P. 2000, 03)

हल—दिया है, बाहरी व्यास $d_0 = 150$ mm तथा चादर की मोटाई = 20 mm है।

$\therefore$ आन्तरिक व्यास $d_i = (150 - 2 \times 20) = 110$ mm

$\therefore$ क्षेत्रफल $A = \frac{\pi(d_0^2 - d_i^2)}{4} = \frac{\pi}{4}(150^2 - 110^2) = 8164\ \text{mm}^2$

तथा जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.), $I = \frac{\pi}{64}(150^4 - 110^4) = 17654650\ \text{mm}^4$

$\therefore$ घूर्णन त्रिज्या (Radius of gyration)

$$K = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{17654650}{8164}} = 46{\cdot}5\ \text{mm}$$

तथा $L = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}\ \text{m} = 4{\cdot}24264\ \text{m} = 4242{\cdot}64\ \text{mm}$

$\therefore$ इयूलर (Euler) का विकलांग भार (Buckling Load) $P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ सूत्र से,

$$P_e = \frac{(\pi)^2 \times 0{\cdot}8 \times 10^5 \times 17654650}{(4242{\cdot}64)^2} = 774419{\cdot}86\ \text{N} = 774{\cdot}42\ \text{kN}$$

अब रैंकिन सूत्र से संदलन भार (Compressive Load),

$$P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left[\frac{L}{K}\right]^2} = \frac{6 \times 10^2 \times 8164}{1 + \frac{1}{1600}\left[\frac{4242{\cdot}64}{46{\cdot}5}\right]^2}$$

$$= \frac{4898400}{6{\cdot}203} = 789682{\cdot}41\ \text{N}$$

$$= 789{\cdot}68\ \text{kN}$$

अब दोनों भारों की तुलना, $\frac{P_e}{P_R} = \frac{774{\cdot}42}{789{\cdot}68} = 0{\cdot}98$ उत्तर

उदाहरण 22. 2·5 m लम्बा एक स्टील ट्यूब स्ट्रट, जिसका बाह्य व्यास 40 mm तथा भीतरी व्यास 30 mm है, दोनों सिरों पर हिंजित है। इस स्ट्रट के लिए रैंकिन सूत्र तथा यूलर सूत्र द्वारा निकाले गये क्रिपलिंग भार की तुलना कीजिये। पराभव प्रतिबल 330 N/mm², $a = 1/7500$ और $E = 2 \times 10^5\ \text{N/mm}^2$ मान लीजिये।

हल—क्षेत्रफल $A = \frac{\pi(40^2 - 30^2)}{4} = 549{\cdot}5\ \text{mm}^2$

$$I = \frac{\pi(40^4 - 30^4)}{64} = 85859{\cdot}375\ \text{mm}^4$$

$$\therefore K = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{85859{\cdot}375}{549{\cdot}5}} = 12{\cdot}5\ \text{mm}$$

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

$f_c = 330 \text{ N/mm}^2, a = 1/7500$ तथा $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

$L = l = 2.5 \text{ m} = 2500 \text{ mm}$

$$\therefore \quad P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left[\frac{L}{K}\right]^2} = \frac{330 \times 549.5}{1 + \frac{1}{7500}\left[\frac{2500}{12.5}\right]^2} = \frac{181335}{6.33}$$

$= 28646.92$ N

$= 28.646$ kN

अब आयलर सूत्र से क्रिपलिंग भार

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^5 \times 85859.375}{(2500)^2}$$

या $P_e = 27089.25 \text{ N} = 27.089 \text{ kN}$

क्रिपलिंग भारों की तुलना $= \frac{P_R}{P_e} = \frac{28.646}{27.089} = 1.05$ उत्तर

उदाहरण 23. 50 mm × 50 mm वर्गाकार काट के 2.5 m लम्बे काष्ठ स्ट्रट के लिए बंकन भार की गणना कीजिये यदि इसका एक सिरा बद्ध हो और दूसरा सिरा मुक्त हो, $E = 14 \text{ kN/mm}^2$। गणनाओं में आप क्या संशोधन करेंगे यदि स्ट्रट की लम्बाई 0.75 m हो तथा काष्ठ की संदलन-सामर्थ्य $f_c = 28 \text{ N/mm}^2$ है। रैंकिन स्थिरांक का मान $a = 1/200$ लीजिए। (U.P.)

हल—सिरों (Ends) की स्थिति के आधार पर $L = 2l = 2 \times 2.5 = 5 \text{ m} = 5000 \text{ mm}$

$$\because \quad I = \frac{50 \times 50^3}{12} = \frac{50^4}{12} \text{ mm}^4$$

तथा क्षेत्रफल $A = 50 \times 50 \text{ mm}^2$

$$\therefore \quad K^2 = \frac{I}{A} = \frac{\frac{50^4}{12}}{50^2} = \frac{50^2}{12} = \frac{2500}{12} = 208.33$$

$$\therefore \text{ Buckling Load} \quad P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow \frac{\pi^2 \times 14 \times 1000 \times \frac{50^4}{12}}{(5000)^2}$$

या $p_e = 2878.635 \text{ N} = 2.8786 \text{ kN}$

जब स्ट्रट की लम्बाई काफी कम (0.75 m) हो जाती है और $f_c = 28 \text{ N/mm}^2$ तथा $a = \frac{1}{200}$ दिये जायें तब हमें लेकिन सूत्र में $\frac{L}{K}$ के स्थान पर $\frac{l}{K}$ प्रयोग करना होगा। ($\because$ कम लम्बाई का स्ट्रट है)

$$\therefore \quad P_R = \frac{F_c \times A}{1 + a\left[\frac{L}{K}\right]^2} = \frac{28 \times 2500}{1 + \frac{1}{200}\left[\frac{l}{K}\right]^2}$$

$$= \frac{28 \times 2500}{1 + \frac{1}{200} \times \frac{(0.75 \times 1000)^2}{208.33}} = \frac{70000}{14.50} = 4827.58 \text{ N}$$

$= 4.8276$ kN उत्तर

प्रश्नावली (Exercise)

1. निम्न रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये—

(i) आयलर सूत्र का प्रयोग एक .... के कुचलने वाले भार को ज्ञात करने के लिए किया जाता है।

(ii) लम्बा कॉलम के लिये तनुता अनुपात .... से ज्यादा होता है। [U.P.; U.K. 2007]

(iii) छोटा कॉलम (Short column) वह कहलाता है जिसमें तनुता अनुपात (Slenderness Ratio) .... से कम होता है। (U.K. 2014, S)

(iv) जिस भार पर कॉलम असफल (fail) होता है, उसे .... भार कहते हैं। (U.P.)

(v) कॉलम की लम्बाई तथा उसकी घूर्णन त्रिज्या (radius of gyration) के अनुपात को .... कहते हैं। (U.K. 2009)

(vi) वे कॉलम, जिनकी लम्बाई उनके व्यास के लगभग .... गुने से कम होती है, छोटे कॉलम कहलाते हैं। (U.K. 2011)

(vii) वे कॉलम, जिनकी लम्बाई उनके व्यास के लगभग .... गुने से अधिक होती है, लम्बे कॉलम कहलाते हैं।

(viii) किसी ढाँचे या मशीन का किसी भी स्थिति में स्थित वह सदस्य, जिस पर अक्षीय सम्पीडन भार लगा हो, ... कहलाता है। (U.P.)

(ix) यदि केवल पदार्थ के कुचलने के कारण ही एक कॉलम भंग होता है तो उस कॉलम को .... कहते हैं (U.P.; U.K. 2008, W)

(x) जिस कॉलम का तनुता अनुपात (S.R.) 120 से अधिक होगा, वह .... कहलाता है। (U.K. 2012, Summer) (U.K. 2013, Sp, B.P.)

(xi) जिस कॉलम का तनुता अनुपात (S.R.) 30 से कम होगा, वह .... कहलाता है। (U.P.)

(xii) कॉलम की सामर्थ्य (strength) .... तथा इसके सिरा स्थितियों पर निर्भर करती है। (U.K. 2012, (S) (U.K. 2013, Sp. B.P.; 2014, S)

(xiii) किसी (*d*) व्यास वाली वृत्ताकार काट वाली कॉलम की विघूर्णन त्रिज्या (radius of gyration) .... होती है। (U.K. 2014)

(xiv) दोनों किनारों पर आबद्ध कॉलम की समतुल्य लम्बाई .... होगी। (U.K. 2014, S)

(xv) आयलर सूत्र का प्रयोग .... कॉलम का बकलिंग भार (buckling load) ज्ञात करने के लिए प्रयोग में लाया जाता है। (U.K. 2013-S

रिक्त स्थानों के उत्तर

(i) लम्बे कॉलम (Long column), **(ii)** 120, **(iii)** 30, **(iv)** क्रिपलिंग, **(v)** तनुता अनुपात (S.R.), **(vi)** 30, **(vii)** 30, **(viii)** स्ट्रट, **(ix)** छोटा कॉलम, **(x)** लम्बा कॉलम, **(xi)** छोटा कॉलम, **(xii)** तनुता अनुपात (Slenderness Ratio) **(xiii)** $\frac{d}{4}$, **(xiv)** $L = \frac{l}{2}$, **(xv)** एक लम्बे (Long)।

2. निम्न पदों को समझाइये (Define the following)— (U.K. 2010 (W), 2012, 13)

(i) कॉलम तथा स्ट्रट (Column & strut) (U.K. 2012, 13)

(ii) बहकाव भार (Buckling load) (U.K. 2013, S)

(iii) विभिन्न प्रकार के कॉलम (Types of column) (U.P. 2013, Mech)

(iv) स्तम्भों के सिरों की अवस्थायें (End conditions of column) (U.P. 2013, Civil; UP-2014 Mech)

(v) लम्बा स्तम्भ (Long column) तथा छोटा स्तम्भ (U.K. 2010 (W), 2012 (S), 13, B.P.)

(vi) तनुता अनुपात (Slenderness Ratio)

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

3. निम्न पदों को परिभाषित कीजिये तथा समझाइये—
   (i) बहकाव भार अथवा क्रान्तिक भार (Critical load) (U.P. 2009)
   (ii) बहकाव (Buckling) (U.K. 2009)
   (iii) समतुल्य लम्बाई (Equivalent length) (U.P. 2008, 09, 14; U.K. 2014)
   (iv) न्यूनतम घूर्णन त्रिज्या (Least radius of gyration) (U.P. 2009)
   (v) बहकाव गुणांक (Buckling factor) (U.K. 2011)
4. कॉलम तथा स्ट्रट से आप क्या समझते हैं? इनके भेद बताइये। इनका वर्गीकरण कीजिये। (U.P. 2000, 09; U.K. 2014)
5. लघु, मध्यम तथा दीर्घ कॉलम से आप क्या समझते हैं? परिभाषा भी लिखिये। (U.P. 2009, 14)
6. दीर्घ एवं लघु स्तम्भ में अन्तर स्पष्ट कीजिये। (U.P. 2001, 04, 06, 14)
7. कॉलम की समतुल्य लम्बाई का क्या अर्थ है? सिरे की विभिन्न अवस्था में तुल्यमान लम्बाई की तुलना कीजिये। (U.P. 2006)
8. किसी स्तम्भ के तनुता अनुपात का क्या तात्पर्य है? यह स्तम्भ के स्थायित्व को कैसे प्रभावित करता है? (U.P. 2006)
9. स्तम्भ की विभिन्न अन्त्य दशाओं (end conditions) के चित्र बनाइये तथा उनकी प्रभावी लम्बाई भी बताइये। (U.P.)
10. तनुता अनुपात व बहकाव गुणांक को परिभाषित कीजिए। (U.P. & U.K. 2014)
11. निम्नलिखित में से कौन-सा कॉलम (column) ज्यादा मजबूत होगा?
   (i) कॉलम जो कि 50 सेमी० लम्बा है तथा जिसका वर्गाकार सैक्शन है और जिसकी प्रत्येक भुजा 1 सेमी० के बराबर है।
   (ii) कॉलम जो कि 5 मी० लम्बा है तथा जिसका वर्गाकार सैक्शन है और जिसकी प्रत्येक भुजा 20 सेमी० के बराबर है।
   [उत्तर—दूसरा कॉलम ज्यादा मजबूत है।] (U.P. 2006 S)
12. किसी कॉलम के दोनों सिरे कब्जेदार हैं। कॉलम की काट का व्यास 5 सेमी तथा लम्बाई 3 मी० है। आयलर सूत्र की सहायता से कॉलम का बहकाव भार ज्ञात कीजिये। $E = 2\times10^5\ N/mm^2$।
   [उत्तर—$67{\cdot}288\times10^3$ N] (U.P. 2002, 08)
13. एक 250 सेमी लम्बी स्टील छड़ का आन्तरिक व्यास 1 सेमी तथा बाहरी व्यास 3 सेमी है। तथा दोनों सिरे कब्जेदार हैं तो आयलर बंकन भार की गणना कीजिये। $E = 2\times10^6\ kg/cm^2$ मान लें।
   [उत्तर : 12·38 kN][U.K. 2014, (S) B.P.]
14. एक स्टील स्तम्भ का व्यास 60 mm तथा लम्बाई 1 m है। स्तम्भ का निचला सिरा आबद्ध (Fixed) तथा ऊपरी सिरा मुक्त है। स्तम्भ पर आरोपित अधिकतम अक्षीय भार ज्ञात कीजिये। स्तम्भ के लिये सुरक्षा गुणांक = 4 तथा $E = 2{\cdot}1\times10^5\ N/mm^2$ है।
   [उत्तर—82·4 kN] (U.P. 2008)
15. 25 mm बाह्य तथा 20 mm आन्तरिक व्यास के एक खोखले इस्पात नल (tube) को स्तम्भ के रूप में प्रयोग किया गया जिसकी लम्बाई 3 m है तथा दोनों सिरे कब्जेदार हैं। 'आयलर' का पंगुकारी भार ज्ञात करें यदि प्रत्यास्थता मापांक $2{\cdot}0\times10^5\ N/mm^2$ हो।
   [उत्तर—2482·9 N] (U.P. 2001, 04, 09)
16. (i) रैंकिन एवं गार्डन का सूत्र क्या है? समझाइये।
   What is Rankine & Gordon formula? Explain.
   (ii) आयलर सूत्र का प्रयोग कर एक आयताकार अनुप्रस्थ काट वाले स्तम्भ पर कितना सुरक्षित भार लगाया जा सकता है? स्तम्भ का परिच्छेद (Section) 100×120 मिमी का है, तथा इसकी लम्बाई 4 मीटर है। स्तम्भ के पदार्थ का प्रत्यास्थता मापांक (E) 200 GPa है तथा स्तम्भ के दोनों सिरे पिनयुक्त (Hinged) हैं।
   [उत्तर—$P_e = 1233{\cdot}7$ kN] [U.K. 2012-13 (Winter)]

एक 120 मिमी × 100 मिमी आयताकार काट एवं 1·75 मीटर लम्बे कॉलम का एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार है। कॉलम के लिए बहकाव भार का मान ज्ञात करें। कॉलम के लिए सुरक्षित भार भी ज्ञात कीजिए जबकि सुरक्षा गुणांक 5 हो। $E = 200$ GPa मानिये।
[उत्तर—12877·78 kN; 2575·55 kN] [U.K. 2012 (S); 2013 (Sp. B.P.)]

एक 2·5 m लम्बा स्तम्भ (column) का व्यास 60 mm है। इस स्तम्भ का एक सिरा बद्ध है जबकि दूसरा सिरा हिंज्ड है। Euler के सूत्र का प्रयोग करते हुए तथा सुरक्षा गुणांक (F.S.) 3·5 लेते हुये इस स्तम्भ के लिये निरापद संपीडन भार (Safe compressive load) ज्ञात कीजिये। $E = 200$ GPa है।
[उत्तर—114·64 kN] (U.P. 2013 Mech)

200 mm × 150 mm आयताकार परिच्छेद के एक स्तम्भ की लम्बाई 3 m है तथा इस पर अक्षीय सम्पीडन भार लगा है। इस स्तम्भ पर लगाये जाने वाले अधिकतम सुरक्षित भार का मान ज्ञात कीजिये। सुरक्षा गुणांक 5 मानिये। स्तम्भ को एक सिरे पर बद्ध तथा दूसरे पर कब्जायुक्त मानिये। $E = 2\times10^5\ N/mm^2$। आयलर सूत्र का प्रयोग करें।
[उत्तर—4·9348 MN] (U.P.)

0. किसी कॉलम की काट 60 mm (चौड़ाई) × 80 mm (मोटाई) है। कॉलम की लम्बाई 5 m है। कॉलम किस प्रकार का है? इसका बहकाव भार निकालिये यदि दोनों सिरे कब्जेदार हों। $E = 2\times10^5\ N/mm^2$.
[उत्तर—लम्बा कॉलम, 113·5826 kN] (U.P.)

1. इयूलर (Euler) सूत्र का प्रयोग का एक आयताकार अनुप्रस्थ-काट वाले स्तम्भ पर सुरक्षित कितना भार लगाया जा सकता है? इसके परिच्छेद की परिमाप 75 mm × 125 mm है तथा इसकी लम्बाई 2 m है। स्तम्भ पदार्थ का प्रत्यास्थता मापांक $2\times10^5\ N/mm^2$ तथा स्तम्भ के दोनों सिरे पिनयुक्त हैं।
[उत्तर—2168 kN] (U.P.)

2. मृदु इस्पात के बने एक कॉलम की लम्बाई 6 m है और इसके दोनों सिरे बद्ध हैं। इसके परिच्छेद का न्यूनतम जड़ता घूर्ण $350\ cm^4$ है। आयलर सूत्र की सहायता से बहकाव भार ज्ञात करिये। $E = 200$ GPa है।
[उत्तर—766·857 kN] (U.P.)

3. 6 m लम्बाई के इस्पात से बने एक I-काट वाले स्तम्भ का कुचलने वाला भार ज्ञात कीजिये स्तम्भ का एक सिरा बद्ध है और दूसरा कब्जेदार है। आयलर सूत्र का प्रयोग कीजिये। $E = 200$ GPa, $I_{XX} = 28000\ cm^4$, $I_{YY} = 2700\ cm^4$.
[उत्तर—2·96 MN] (U.P.)

4. I-काट की 6 m लम्बी एक कड़ी (joist) 400 mm × 200 mm × 20 mm, जिसके दोनों सिरे आबद्ध हैं, एक सम्पीडांग (strut) के रूप में प्रयोग किया गया। सम्पीडांग के लिए आयलर का विकलांग भार (crippling load) क्या होगा? $E = 2\times10^5\ N/mm^2$ लें।
[उत्तर—638·2 kN] (U.P. 2002)

5. एक 150 mm × 120 mm की T-काट को, जिसके फ्लैंज तथा वैब की मोटाई समान रूप से 20 mm है, 4 m लम्बे स्ट्रट के रूप में प्रयोग किया जाता है जिसके दोनों सिरे कब्जेदार हैं। यदि पदार्थ के लिये यंग मापांक $E = 200$ GPa हो तो क्रिपलिंग भार ज्ञात कीजिये।
[उत्तर—701·47 kN] (U.K. 2008, S)
[संकेत : $\bar{y} = 86$, $I_{XX} = 6086666{\cdot}667\ mm^4$, $I_{YY} = 5691666{\cdot}667\ mm^4$]

6. एक 4 m लम्बी ट्यूब (Hollow Tube), जिसके बाह्य तथा आन्तरिक व्यास क्रमश: 40 mm तथा 25 mm हैं, पर 60 kN के अक्षीय खिंचाव भार (Tensile Load) से लम्बाई में 4·8 mm वृद्धि (extend) हो जाती है। इसे दोनों सिरों पर पिन लगे स्ट्रट रूप में प्रयोग होने पर Buckling Load ज्ञात कीजिये। सुरक्षा गुणांक (F.S.) 5 पर सुरक्षित भार (Safe Load) भी ज्ञात कीजिये।
[उत्तर—4·29 kN, 0·858 kN]

विशेष-रैंकिन सूत्र पर आधारित प्रश्न

7. एक ढलवाँ लोहे के बने ठोस स्तम्भ की लम्बाई 5 m तथा व्यास 15 cm है। यह नीचे के सिरे पर स्थिर बद्ध (fixed) तथा दूसरे सिरे पर मुक्त (free) है। अगर सुरक्षा गुणांक (factor of safety) 5 है तो स्तम्भ का निरापद भार (safe load) ज्ञात करें। रैंकिन सूत्र में 'a' का मान ढलवाँ लोहे के लिये $\frac{1}{1800}$ लें तथा $E = 190\ GN/m^2$।
[उत्तर—90·7 kN] (U.K. 200[illegible]

[Hint : उदाहरण 15 देखें।]

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

28. ढलवाँ लोहे के 3 m लम्बे एक स्तम्भ (column) की काट का बाह्य व्यास 5 cm तथा अन्त: व्यास 2 cm है। इसका एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार (hinged) है। यदि पदार्थ का अन्तिम प्रतिबल (ultimate stress) $f_c = 560$ MPa और रैंकिन स्थिरांक $\frac{1}{1600}$ हो तो कॉलम के लिये रैंकिन भार ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—55·78 kN] (U.P. 2010 S)

29. एक खोखला C.I. column जिसका बाहरी व्यास (outer dia) 200 mm तथा चादर की मोटाई (thickness) 20 mm है, दोनों सिरों पर बद्ध (fixed at both ends) है। इस कॉलम की लम्बाई 4·5 m है। रैंकिन गार्डन सूत्र द्वारा सुरक्षित भार (safe load) ज्ञात कीजिये जबकि सुरक्षा गुणांक 4 है। रैंकिन स्थिरांक $a = \frac{1}{1600}$ तथा $\sigma_c = 550$ MN/m^2 है।

[उत्तर—0·877 MN]

30. एक खोखले स्ट्रट (Hollow strut) का बाहरी व्यास (diameter) 40 mm तथा आन्तरिक व्यास (internal dia) 30 mm है। इसके दोनों सिरे Pin jointed हैं। Euler तथा Rankine सूत्रों से crippling भारों (Loads) में अनुपात ज्ञात करें जबकि अधिकतम प्रतिबल (Yield stress) 300 MPa तथा $E = 200$ GPa तथा Rankine's constant, $a = \frac{1}{7500}$ है।

[उत्तर—0·945]

31. एक Hollow cylindrical C.I. column 4 m लम्बा है तथा इसके दोनों सिरे बद्ध (fixed) हैं। कॉलम के न्यूनतम व्यास ज्ञात कीजिये, जबकि इस पर 250 kN का सुरक्षित भार (safe load) लगा है। सुरक्षा गुणांक (F.S.) 5 है। कॉलम का आन्तरिक व्यास (d), बाहरी व्यास (D) का 0·8 गुना है। प्रतिबल (stress) $\sigma_c = 550$ MN/m^2 तथा रैंकिन सूत्र में $a = \frac{1}{1600}$ है।

[उत्तर—$D = 136$ mm, $d = 108·8$ mm]

32. एक 2 m लम्बा ढलवाँ लोहे का खोखला पाइप, जिसका बाह्य व्यास 80 mm तथा आन्तरिक व्यास 60 mm है, एक स्तम्भ की तरह प्रयोग किया गया है। यदि इसके दोनों सिरे बद्ध हों तो रैंकिन सूत्र का प्रयोग करते हुए क्रिपलिंग भार ज्ञात करिये। $f_c = 60$ MPa है।

[उत्तर—659·73 kN] (U.P.)

33. एक ठोस इस्पाती 6 सेमी व्यास वाली तथा 2·5 मी० लम्बी छड़ एक स्तम्भ की तरह प्रयोग की जाती है। इस पर आयलर तथा रैंकिन सूत्रों द्वारा प्राप्त पिचकाने वाले बलों की तुलना कीजिए। $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2, रैंकिन constant $\alpha = 1/7500$ तथा पराभव प्रतिबल $f_c = 315$ N/mm^2 लीजिये। दोनों सिरे शुद्धालम्बित मानिये।

[उत्तर—1·06] (U.P. 2001)

❑

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

9 पतले बेलनाकार एवं गोलीय खोल (THIN CYLINDRICAL AND SPHERICAL SHELL)

§ 9.1. परिचय (Introduction)

खोल (Shell) : खोल से तात्पर्य ऐसे पात्रों (Vessels) से है जो आन्तरिक या बाह्य उच्च दाबों (High Pressures) को सहन करने की क्षमता रखते हों। आन्तरिक दाब सहने की क्षमता रखने के कारण ही खोल को **दाब पात्र** (Pressure Vessel) भी कहते हैं। उदाहरण के लिये—प्रेशर-कुकर, वेल्डन कार्य में उपयोगी गैस सिलिण्डर तथा रसोई-गैस का सिलिण्डर, वायु-सम्पीडक का टैंक (Air Compressure's Tank), पनडुब्बी का खोल, पैट्रोल, टैंक, भाप बॉयलर (Steam Boiler) में पानी तथा भाप एकत्र करने का ड्रम तथा उच्च दाब पर पानी, गैस या भाप प्रवाहित करने के पाइप इत्यादि खोल (Shell) या दाब पात्रों की श्रेणी में आते हैं।

अतः खोल के सम्बन्ध में यह भी कहा जा सकता है कि "चारों ओर से बन्द एक ऐसे पात्र को खोल कहते हैं जिसमें कोई तरल (द्रव या गैस) उच्च दाब पर भरा जा सके या प्रवाहित किया जा सके या फिर वह पात्र बाहर से लगाये गये दाब को सहन करने में उपयोग किया जा सके (जैसे पनडुब्बी)।"

विभिन्न कार्यों की उपयोगिता के आधार पर अधिकतर बेलनाकार (Cylindrical) तथा गोलीय (Spherical) खोल (Vessel) ही प्रयोग किये जाते हैं परन्तु आवश्यकतानुसार कभी-कभी दीर्घवृत्तीय (Elliptical) आकार के खोल भी प्रयोग किये जाते हैं।

§ 9.2. पतले तथा मोटे खोल (Thin and Thick Sheel)

चादर की मोटाई तथा प्रतिबलों के वितरण के आधार पर खोल निम्न दो प्रकार के होते हैं—

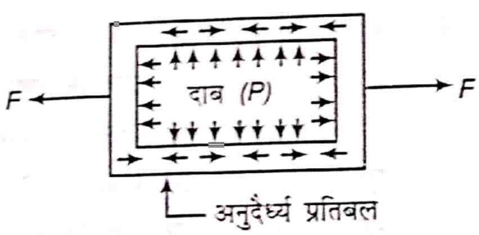
(1) **पतले खोल (Thin Shells) :** ऐसे खोल, जिनकी दीवार की मोटाई (Thickness of Plates) खोल की अनुप्रस्थ काट की मापों की तुलना में बहुत कम होती है अथवा खोलों की दीवार की मोटाई उनके व्यास के लगभग $\frac{1}{10}$ गुने से कम होती हैं, पतले खोल कहते हैं। पतले खोलों की सम्पूर्ण मोटाई में प्रतिबल वितरण एकसमान माना जा सकता है।

(2) **मोटे खोल (Thick Shells) :** ऐसे खोल, जिनकी दीवार की मोटाई उनके व्यास के लगभग $\frac{1}{10}$ गुने से अधिक होती है, उन्हें मोटे खोले (Thick sheels) कहते हैं। इन खोलों की मोटाई अधिक होने पर सम्पूर्ण मोटाई में प्रतिबल वितरण एकसमान नहीं रह पाता।

इस अध्याय में हम पतले बेलनाकार तथा गोलीय खोलों में प्रतिबल सामर्थ्य, विकृति या विमाओं में परिवर्तन का अध्ययन करेंगे।

§ 9.3. आन्तरिक दाब के लिये पतले खोल का व्यवहार (Behaviour of Thin Shells for Internal Pressure)

चित्र 9.1 में एक बेलनाकार खोल को अनुदैर्घ्य अक्ष पर होते हुए अक्ष के समान्तर काटकर दिखाया गया है। माना कि खोल के अन्दर दाब p पर कोई गैस या वायु उच्च दाब पर भरी है। यह दाब खोल के अन्दर सभी दिशाओं में प्रत्येक स्थान पर सतह के लम्ब-रूप कार्य करता है जिससे दाब p की खोल पर क्रिया दो प्रकार से होती है जिसके फलस्वरूप खोल दो प्रकार से फटकर असफल (Fail) हो सकता है।

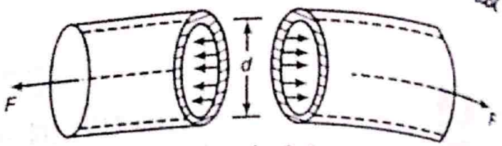


चित्र 9.1

(1) **खोल का लम्बाई की अक्ष के लम्ब-रूप किसी काट पर फटना :** जब खोल में आन्तरिक उच्च दाब के कारण परिणामी खिंचाव बल (F) अक्ष के समान्तर कार्य करता है तो खोल, लम्बाई को दो भागों में विभाजित करते हुए चित्र 9.2 के अनुसार फटता है। इस स्थिति में खोल की लम्बाई के समान्तर वाली चादर में खिंचाव उत्पन्न होता है तथा इसमें अनुदैर्घ्य प्रतिबल (Longitudidnal Stresses) उत्पन्न होते हैं।

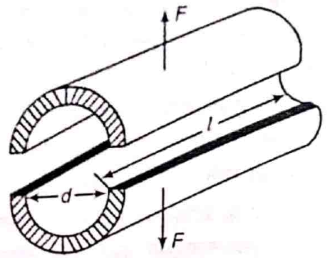
Scanned with CamScanner

(2) खोल की लम्बाई की अक्ष के समान्तर फटना : जब खोल में आन्तरिक दाब के कारण परिणामी खिंचाव बल (F) अक्ष के लम्ब-रूप दिशा में कार्य करता है तो सम्पूर्ण परिधि प्रभावित (Effected) होती है, जिसके फलस्वरूप खोल की परिधि में परिधीय प्रतिबल (Circumferential Stresses) पैदा होते हैं। इस दशा में खोल चित्र 9.4 के अनुसार लम्बाई के समान्तर फटता है जिससे सम्पूर्ण परिधि फट जाती है। इस दशा में प्रतिबल चित्र 9.3 में दर्शाये गये हैं।



शैल के फटने की स्थिति
चित्र 9.2

परिधीय प्रतिबल
चित्र 9.3



शैल के फटने की स्थिति
चित्र 9.4

§ 9.4. पतले बेलनाकार खोल में प्रतिबल (Stresses in Thin Cylindircal Sheel)

उपरोक्त विवरण के आधार पर हम जान चुके हैं कि बेलनाकार खोल में आन्तरिक दाब के कारण दो प्रकार के प्रतिबल (परस्पर लम्ब दिशा में) उत्पन्न होते हैं—

(i) अनुदैर्घ्य प्रतिबल (Longitudinal Stress),

(ii) परिधीय प्रतिबल (Circumferential or Hoop Stress)।

(i) अनुदैर्घ्य प्रतिबल (Longitudinal Stress) : हम जान चुके हैं कि, बेलनाकार खोल के दोनों सिरों (Ends) पर लगने वाले आन्तरिक उच्च दाब के कारण खोल पर एक अक्षीय परिणामी खिंचाव बल (F) कार्य करता है जिसके फलस्वरूप खोल की लम्बाई के समानतर वाली चादर में जो प्रतिबल पैदा होते हैं, उन्हें अनुदैर्घ्य प्रतिबल कहते हैं। इन प्रतिबलों को f_l या f_x से प्रर्दिशत करते हैं तथा इनका मान निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात करते है:

$$\boxed{f_l = \frac{Pd}{4t}}$$

जहाँ, P = खोल में आन्तरिक दाब,

d = खोल का आन्तरिक व्यास,

t = खोल की चादर की मोटाई।

सूत्र की स्थापना (Derviation of formula) : अनुदैर्घ्य प्रतिबलों की दशा में खोल का फटना चित्र 9.2 में दर्शाया गया है। माना खोल की दीवार (चादर) की मोटाई t, आन्तरिक व्यास d तथा आन्तरिक दाब p के कारण चादर में उत्पन्न अनुदैर्घ्य प्रतिबल f_l है। सन्तुलन की अवस्था में,

$\because$ आन्तरिक दाब द्वारा लगा अक्षीय खिंचाव बल = चादर द्वारा सहन किया गया बल

$\therefore$ दाब × प्रक्षेपित क्षेत्रफल (गैस या द्रव भरा भाग) = चादर में प्रतिबल × फटी चादर का क्षेत्रफल

$$P \times \frac{\pi d^2}{4} = f_l \times \pi dt$$

या
$$\boxed{f_l = \frac{P \times d}{4t}}$$ सूत्र

(ii) परिधीय प्रतिबल (Circumferential or Hoop Stress) : खोल में आन्तरिक उच्च दाब (High Pressure) के कारण जब परिणामी, खिचाव बल F अक्ष के लम्बवत् दिशा मे अर्थात् मोटाई मे कार्य करता है तो उसकी सम्पूर्ण परिधि प्रभावित होती है। इस स्थिति में परिधि (Circumference) में उत्पन्न हुए प्रतिबलों को परिधीय प्रतिबल (Hoop Stress) कहते हैं तथा इन्हें f_c या f_y से प्रर्दिशत करते हैं। इनका मान निम्न सूत्र से ज्ञात करते हैं :

$$\boxed{f_c = \frac{pd}{2t}}$$ सूत्र

सूत्र की स्थापना (Deriviation of Formula) : परिधीय प्रतिबलों की दशा में खोल का फटना चित्र 9.3 में दर्शाया गया है। माना खोल की लम्बाई l, आन्तरिक व्यास d तथा प्रतिबल f_c है।

अतः सन्तुलन की अवस्था में,

आन्तरिक दाब द्वारा अक्ष के लम्ब-रूप दिशा में लगा बल = चादर द्वारा सहन किया गया बल

$\therefore$ दाब × प्रक्षेपित क्षेत्रफल (फटने के बाद) = चादर में प्रतिबल × फटी चादर का क्षेत्रफल

$$P \times (d \times l) = f_c \times (2tl)$$

या
$$\boxed{f_c = \frac{Pd}{2t}}$$ सूत्र

विशेष नोट : (1) f_l तथा f_c के प्राप्त हुए सूत्रों से ज्ञात होता है कि $f_c = 2f_l$ है जो कि दोनों सम्बन्ध सूत्र कहलाता है।

(2) f_c तथा f_l की इकाई प्रायः kg/cm^2 तथा N/mm^2 प्रयोग की जाती है।

§ 9.5. बेलनाकार खोल की मोटाई का डिजाइन

माना d व्यास के बेलनाकर खोल की मोटाई t, का डिजाइन करना है जबकि खोल में आन्तरिक दाब तीव्रता P है। यदि खोल के पदार्थ की सामर्थ्य अर्थात् अनुमेय प्रतिबल $f\,N/mm^2$ है तो डिजाइन की सफलता के लिये यह आवश्यक होगा कि खोल में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल f_c उसकी सामर्थ्य f से अधिक न हो पाये। अर्थात्

$$f \geq f_c \qquad [\because f_l \text{ मे } f_c \text{ अधिक होते हैं}]$$

या
$$f \geq \frac{Pd}{2t}$$

या
$$\boxed{t \geq \frac{Pd}{2f}}$$ सूत्र

अतः इस आधार पर खोल के निर्माण हेतु उचित मोटाई (t) की प्लेट का चुनाव किया जा सकता है।

§ 9.6. गोलीय खोलों में प्रतिबल (Stresses in Spherical Shell)

एक ऐसा दाब पात्र जो आकार में फुटबॉल की भाँति गोल होता है, गोलीय खोल कहलाता है। (देखें चित्र 9.5)। माना गोलीय खोल की व्यास d तथा खोल की दीवार (चादर) की मोटाई t है। इसमें p दाब पर कोई गैस भरी है। यह खोल किसी भी व्यास $X-X$ या $Y-Y$ पर फटने की प्रवृत्ति (Tendency) रखता है। केन्द्र से होती हुई, व्यास के समान्तर, किसी भी काट पर फटने पर समान वृत्ताकार-आकृति प्राप्त होती है। अतः समान मान के प्रतिबल उत्पन्न होते हैं अर्थात् ($f_l = f_c = f$) माना।

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

सन्तुलन की दशा में,

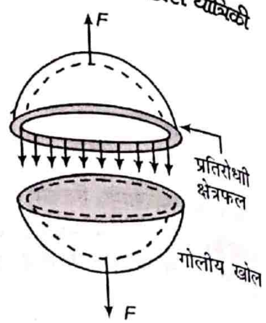
दाब द्वारा लगा बल = चादर द्वारा सहन किया बल

$P \times$ प्रक्षेपित क्षेत्रफल (जिसमें गैस भरी है) = प्रतिबल × फटी चादर का क्षेत्रफल

$$P \times \frac{\pi d^2}{4} = f \times \pi dt$$

या

$$\boxed{f = \frac{Pd}{4t}}$$ सूत्र



फटने की स्थिति

चित्र 9.5

§ 9.7 खोलों में विकृति (Strain in Shells)

हम जानते हैं कि खोलों में आन्तरिक या बाह्य दाब के कारण ही प्रतिबल उत्पन्न होते हैं और इन प्रतिबलों के कारण विकृति उत्पन्न होती है, क्योंकि **प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर प्रतिबल विकृति के समानुपाती होते हैं।** इसी आधार पर हम खोलों में विकृतियाँ एवं आयतन में परिवर्तन आदि की गणना करते हैं।

(A) बेलनाकार खोल में (In Cylindrical Shell) : हम जानते हैं कि खोल की दीवार में अनुदैर्घ्य प्रतिबल तथा परिधीय प्रतिबल क्रमशः निम्न होते हैं :

f_x या $f_l = \frac{Pd}{4t}$

तथा f_y या $f_c = \frac{Pd}{2t}$

माना खोल के पदार्थ के लिये, पाइजन पाइजन अनुपात $= \frac{1}{m}$ तथा यंग मापांक $= E$ है।

(i) अनुदैर्घ्य विकृति (Longitudinal Strain) :

$$e_x = \frac{f_x}{E} - \frac{f_y}{mE}$$ [प्रतिबल के अध्याय में बताये अनुसार]

$$= \frac{1}{E}\left[f_x - \frac{f_y}{m}\right]$$

$\therefore$
$$d_x = \frac{1}{E}\left[\frac{Pd}{4t} - \frac{Pd}{2t \times m}\right] = \frac{Pd}{2tE}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right]$$ (सूत्र) ...(1)

परन्तु
$$e_x = \frac{\Delta l}{l}$$

या
$$\Delta l = l \times e^x = l \times \frac{Pd}{2tE}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right]$$

$\therefore$ खोल की लम्बाई में परिवर्तन,

$$\boxed{\Delta l = l \times \frac{Pd}{2tE}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right]}$$ (सूत्र) ...(2)

(2) परिधीय विकृति (Circumferential Strain) :

$$e_y = \frac{f_y}{E} - \frac{f_x}{mE}$$

या
$$e_y = \frac{Pd}{2tE}\left[1 - \frac{1}{2m}\right]$$ (सूत्र) [f_x व f_y के मान रखने पर] ...(3)

या
$$\frac{\Delta d}{d} = e_y = \frac{Pd}{2tE}\left(1 - \frac{1}{2m}\right)$$

या
$$\boxed{\Delta d = d \times \frac{Pd}{2tE}\left[1 - \frac{1}{2m}\right]}$$ (सूत्र) ...(4)

(3) खोल की आयतन विकृति (Volume Strain) : (उ० प्र० 2012)

$$e_v = e_x + e_y + e_z$$ (परन्तु यहाँ $e_y = e_z$ है)

$\therefore$
$$e_v = e_x + 2e_y$$

अतः
$$e_v = \frac{Pd}{2tE}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right] + 2 \times \frac{Pd}{2tE}\left[1 - \frac{1}{2m}\right]$$

(यहाँ e_x तथा e_y के सूत्रों से मान रखने पर)

$$= \frac{Pd}{2tE} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{m} + 2 - \frac{1}{m}\right]$$

$\therefore$ आयतन विकृति,
$$\boxed{e_v = \frac{Pd}{2tE}\left[\frac{5}{2} - \frac{2}{m}\right]}$$ (सूत्र) ...(5)

परन्तु
$$\frac{\Delta V}{V} = e_v$$

$\therefore$
$$\Delta V = V \times e_v$$

आयतन में परिवर्तन
$$\boxed{\Delta V = V \times \frac{Pd}{2tE}\left[\frac{5}{2} - \frac{2}{m}\right]}$$ (सूत्र) ...(6

यहाँ आयतन $V = \frac{\pi d^2}{4} \times l$ है।

(B) गोलीय खोल में (In Spherical Shell) :

माना गोलीय खोल में, आन्तरिक दाब $= P$

व्यास $= d$, दीवार (या चादर) की मोटाई $= t$

पाइजन अनुपात $= \frac{1}{m}$, यंग मापांक $= E$ है।

$\because$ गोलीय खोल में एक ही प्रकार के प्रतिबल $f = \frac{Pd}{4t}$ उत्पन्न होते हैं। माना यह परिधीय हैं।

(i) खोल में परिधीय विकृति (Circumferential Strain) :

$$e = \frac{f}{E} - \frac{f}{mE} = \frac{f}{E}\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$ (सू

जहाँ $f = \frac{Pd}{4t}$ है।

Study PowerPoint
Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

परन्तु $\frac{\Delta d}{d} = e = \frac{f}{E}\left(1-\frac{1}{m}\right)$

(ii) खोल के व्यास में परिवर्तन :

$$\Delta d = d \times \frac{f}{E}\left(1-\frac{1}{m}\right) \quad \text{(सूत्र) ...(8)}$$

(iii) खोल के आयतन में विकृति (e_v) :

$e_v = 3e$ $\quad [\because e_v = e_x + e_y + e_z = e + e + e = 3]$

$$e_v = 3 \times \frac{f}{E}\left[1-\frac{1}{m}\right] \quad \text{(सूत्र) ...(9)}$$

$\because$ $\frac{\Delta V}{V} = e_v$

या $\Delta V = V \times e_v$

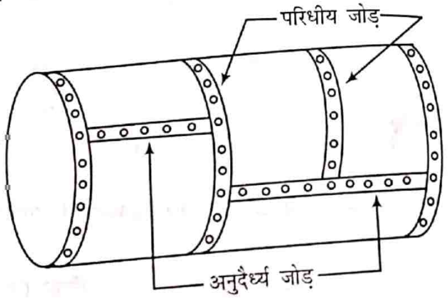
(iv) आयतन में परिवर्तन :

$$\Delta V = V \times \frac{3f}{E}\left(1-\frac{1}{m}\right) \quad \text{(सूत्र) ...(10)}$$

जहाँ आयतन $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6}$, $f = \frac{Pd}{4t}$ है।

§ 9.8. खोलों में जोड़ (Joints in Shells)

अधिक मात्रा में द्रवों को संग्रहीत करने एवं उनको एक स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाने के लिये बड़े-बड़े आकार के खोल बनाये जाते हैं। परन्तु ये एक ही चादर से बनने असम्भव हैं इसीलिये धातु चादरों को जोड़कर बड़ा खोल (Shell) बनाया जाता है। यह रिवेट जोड़ (Riveted Joints) अथवा वैल्ड जोड़ (Welded Joints) द्वारा निर्मित होते हैं। जैसे रेल का लोकोमोटिव बॉयलर, पैट्रोल टैंक तथा पानी एकत्रित करने के लिये रेलवे में बड़े टैंक आदि।



चित्र 9.6

पिछले अनुच्छेदों में बेलनाकर एवं गोलीय खोलों के लिये जो विभिन्न सूत्र स्थापित किये गये हैं, उनमें खोलों को जोड़ रहित माना गया है, जबकि वास्तव में सभी खोल जोड़युक्त होते हैं। खोल में दो प्रकार के जोड़ बनाये जाते हैं :

(1) अनुदैर्ध्य जोड़ (Longitudinal Joints)

(2) परिधीय जोड़ (Circumferential Joints)

इन जोड़ों को चित्र 9.6 में दर्शाया गया है।

§ 9.9. खोल की सामर्थ्य पर जोड़ों का प्रभाव (Effect of Joints on the Strength)

जोड़युक्त खोल की सामर्थ्य (Strength) सदैव जोड़ रहित खोल से कम होती है क्योंकि जोड़ बनाने के लिये खोल की चादरों (Plates) में रिवेटों के लिये छिद्र किये जाते हैं जिससे प्लेटों की सामर्थ्य कुछ कम हो जाती है।

अत: जोड़दार खोलों के द्वारा अपेक्षाकृत कम प्रतिबल सहन करने के कारण उनकी सामर्थ्य कम हो जाती है और इस प्रकार खोल, जोड़ खुलने पर असफल हो जाते हैं।

अत: स्पष्ट है कि जोड़दार खोल की सामर्थ्य, जोड़ की दक्षता द्वारा नियन्त्रित होती है। अत: यह विशेष ध्यान देने की बात है कि अनुदैर्ध्य प्रतिबल, परिधीय जोड़ों पर तथा परिधीय प्रतिबल, अनुदैर्ध्य जोड़ों पर प्रभाव डालते हैं, क्योंकि जोड़ों (Joints) पर ही प्रतिबल उत्पन्न होते हैं।

यदि अनुदैर्ध्य तथा परिधीय जोड़ों के लिये दक्षतायें क्रमश: η_l तथा η_c हैं तो अधिकतम प्रतिबलों के सूत्र निम्न प्रकार होते हैं।

(1) बेलनाकार खोल (Cylindrical Shell) :

(i) अधिकतम अनुदैर्ध्य प्रतिबल, $\boxed{f_x \text{ या } f_l = \frac{Pd}{4t\eta_c}}$ (सूत्र)

(क्योंकि अनुदैर्ध्य प्रतिबल, परिधीय जोड़ को प्रभावित करते हैं।)

(ii) अधिकतम परिधीय प्रतिबल, $\boxed{f_y \text{ या } f_c = \frac{Pd}{2t\eta_l}}$ (सूत्र)

(क्योंकि परिधीय प्रतिबल, अनुदैर्ध्य जोड़ को प्रभावित करते हैं)

विशेष : (i) जोड़युक्त खोलों की मोटाई (t) ज्ञात करते समय भी जोड़ की दक्षता का सूत्र प्रयोग करना चाहिये।

(ii) जोड़दार प्लेट की आवश्यक मोटाई (t) ज्ञात करते समय अधिकतम परिधीय प्रतिबल का मान प्लेट के पदार्थ की कार्यकारी प्रतिबल सामर्थ्य (f) से अधिक नहीं होना चाहिये।

(iii) बेलनाकार खोल के लिये, प्लेट की मोटाई $t \geq \frac{Pd}{2f_c\eta_l}$

जहाँ f_c = अधिकतम प्रतिबल सामर्थ्य है।

(2) गोलीय खोल (Spherical Shell) :

यदि इसके प्रत्येक जोड़ की दक्षता η हो तो

(i) अधिकतम प्रतिबल, $f = \frac{Pd}{4t\eta}$ (सूत्र)

(ii) प्लेट की मोटाई, $t \geq \frac{Pd}{4f\eta}$ जहाँ f = अधिकतम प्रतिबल सीमा है।

महत्त्वपूर्ण उदाहरण

विशेष : बेलनाकार खोलों (Shells) पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 1. किसी पाइप का व्यास 500 mm तथा दीवार की मोटाई 20 mm हैं यदि पाइप के अन्दर 40 N/mm^2 (0.40 N/mm^2) का पानी का दाब हो तो पाइप में उत्पन्न प्रतिबलों को ज्ञात कीजिये। (उ०प्र० 2002)

हल : $\because$ दाब $P = 0.40\,\text{N/mm}^2$, व्यास $d = 50\,\text{cm} = 500\,\text{mm}$, दीवार की मोटाई $t = 2\,\text{cm} = 20\,\text{mm}$

$\therefore$ **पाइप में उत्पन्न अनुदैर्ध्य प्रतिबल (Longitudinal Stress)**

f_x या $f = \frac{Pd}{4t} = \frac{0.40 \times 500}{4 \times 20} = 2.5\ \text{N/mm}^2$ उत्तर

तथा पाइप में उत्पन्न परिधीय प्रतिबल (Circumferential Stress)

f_y या $f = \frac{Pd}{2t} = \frac{0.40 \times 500}{2 \times 20} = 5\ \text{N/mm}^2$ उत्तर

उदाहरण 2. किसी गैस सिलिण्डर का व्यास 1.5 मीटर तथा दीवार की मोटाई 20 mm है। इस सिलिण्डर में अधिक कितने दाब पर गैस भरी जा सकती है जबकि सिलिण्डर में अधिकतम तनाव प्रतिबल 120 N/mm^2 से अधिक न होने पाये

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

हल : सिलिण्डर का आन्तरिक दाब $P = ?$

आन्तरिक व्यास $d = 1.5 = 1500$ mm

$f_c = 120\,\text{N/mm}^2, t = 20\,\text{mm}$

अब $$f_c = \frac{Pd}{2t}$$

$$120 = \frac{P \times 1500}{2 \times 20}$$

या गैस का दाब $$P = \frac{120 \times 2 \times 20}{1500} = 3.2\,\text{N/mm}^2$$ उत्तर

उदाहरण 3. एक बॉयलर खोल का व्यास 2.50 m है एवं इसमें द्रव्य का आन्तरिक दाब 30 kg_f/cm^2 (3 N/mm^2) है। खोल का अधिकतम तनन प्रतिबल 1500kg_f/cm^2 (150 N/mm^2) रखना है। खोल की मोटाई ज्ञात कीजिये यदि सुरक्षा गुणांक 1.8 है।

हल : कार्यकारी तनन प्रतिबल सामर्थ्य, $f = \dfrac{\text{अधिकतम तनन प्रतिबल}}{\text{सुरक्षा गुणांक}} = \dfrac{150}{1.8}\,\text{N/mm}^2$

$\therefore$ खोल की मोटाई $t \geq \dfrac{Pd}{2f}$ से,

$$t \geq \frac{3 \times 2500}{2 \times 150/1.8} \geq 45\text{ mm}$$ उत्तर

अतः प्लेट की मोटाई t, कम-से-कम 45 mm है।

उदाहरण 4. सीमेंट-कँक्रीट के बने एक पानी के पाइप का व्यास 500 mm है और दीवार की मोटाई 20 mm है। यदि पाइप पर पानी-दाब की ऊँचाई (Head of Water) 8 मीटर है तो उसमें अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये।

हल : $\because$ द्रव इंजीनियरिंग के सूत्र से हम जानते हैं कि,

दाब $P = wh$

यहाँ $w =$ पानी का अपेक्षिक भार

$= 1000\,\text{kg}_f/\text{m}^3$

$= 10000\,\text{N/m}^3$

$\therefore$ दाब $P = 10000 \times 8 = 80000\,\text{N/m}^2 = 0.08\,\text{N/mm}^2$

दिया है, व्यास $d = 500\,\text{mm}, t = 20\,\text{mm}$

$\because$ खोल में अधिकतम प्रतिबल f_c होते हैं।

$\therefore$ $$f_c = \frac{Pd}{2t} = \frac{0.08 \times 500}{2 \times 20}$$

$$= \frac{40}{40} = 1\,\text{N/mm}^2$$ उत्तर

उदाहरण 5. 0.8 मीटर व्यास तथा 3 मीटर लम्बाई का एक पतला बेलनाकार खोल 15 mm मोटी प्लेटों से बना है। यदि खोल में आन्तरिक दाब 4 N/mm^2 है तो खोल के व्यास, लम्बाई तथा आयतन में परिवर्तनों को ज्ञात कीजिये। $E = 2 \times 10^5 N/mm^2$ तथा $m = 4$ है।

हल : $\because$ व्यास $d = 800$ mm, लम्बाई $l = 3000$ mm, प्लेटों की मोटाई $t = 15$ mm, दाब $P = 4\,\text{N/mm}^2$ है।

बेलनाकार खोल की लम्बाई में परिवर्तन,

$$\Delta l = \frac{Pd}{2tE}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right]$$ सूत्र से

$$\Delta l = 3000 \times \frac{4 \times 800}{2 \times 15 \times 2 \times 10^5} \times \left[0.5 - \frac{1}{4}\right] = 0.4\text{ mm}$$ उत्तर

खोल के व्यास में परिवर्तन,

$$\Delta d = d \times \frac{Pd}{2tE}\left[1 - \frac{1}{2m}\right]$$ सूत्र से

$$\Delta d = 800 \times \frac{4 \times 800}{2 \times 15 \times 2 \times 10^5} \times \left[1 - \frac{1}{2 \times 4}\right] = 0.373\text{ mm}$$ उत्तर

तथा खोल के आयतन में परिवर्तन,

$$\Delta V = V \times \frac{Pd}{2tE}\left[\frac{5}{2} - \frac{2}{m}\right]$$ जहाँ $V = \dfrac{\pi d^2}{4} \times l$

$$= \frac{\pi \times (800)^2}{4} \times 3000 \times \frac{4 \times 800}{2 \times 15 \times 2 \times 10^5} \times \left[2.5 - \frac{2}{4}\right]$$

$\therefore$ $$\Delta V = 1608495.4\,\text{mm}^3 = 1.608 \times 10^6\,\text{mm}^3$$ उत्तर

उदाहरण 6. एक बेलनाकार खोल की लम्बाई 2 मीटर, प्लेट की मोटाई 10 mm तथा व्यास 500 mm है। यह वायुमण्डलीय दाब पर पानी से पूरा भरा है। यदि इसमें 200 cm^3 पानी पम्प द्वारा और भर दिया जाये तो खोल (Shell) में परिधीय प्रतिबल (f_c) तथा आन्तरिक दाब (p) का मान ज्ञात करो, जबकि $\frac{1}{m} = 0.25$ तथा $E = 200$ Gpa है।

(उ०प्र० 2005)

हल : खोल पानी से पूरा भरा होने पर भी 200 cm^3 पानी पम्प द्वारा तब ही आ सकता है जब उसके आयतन में परिवर्तन 200 cm^3 किया जाये।

अतः यहाँ $\Delta V = 200\,\text{cm}^3$ है,

$$E = 200\,GP_a = 2 \times 10^6\,\text{kg/cm}^2$$

$$t = 1\,\text{cm}, l = 2\,\text{m} = 200\,\text{cm}, d = 50\,\text{cm}$$

$\because$ $$\Delta V = V \times \frac{Pd}{2tE}\left[\frac{5}{2} - \frac{2}{m}\right]$$ सूत्र $\left(\text{जहाँ } V = \dfrac{\pi d^2}{4} \times l\right)$

$\therefore$ $$200 = \frac{\pi (50)^2}{4} \times 200 \times \frac{P \times 50}{2 \times 1 \times 2 \times 10^6}[2.5 - 2 \times 0.25]$$

या आन्तरिक दाब $$P = \frac{200 \times 4 \times 2 \times 2 \times 10^6}{\pi \times (50)^2 \times 200 \times 50 \times 2}$$

या दाब $$P = 20.38\,\text{kg/cm}^2 = 2.038\,\text{N/mm}^2$$ उत्तर

अब परिधीय प्रतिबल $$f_c = \frac{Pd}{2t} = \frac{20.38 \times 50}{2 \times 1} = 509.5\,\text{kg/cm}^2$$

$\therefore$ $$f_c = 50.95\,\text{N/cm}^2$$ उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 7. एक 20 सेमी आन्तरिक व्यास, 90 सेमी लम्बाई के एक पतले बेलनाकार खोल को, जिसकी प्लेट की मोटाई 8 mm है, वायुमण्डलीय दाब पर पानी से भर दिया गया है। इसमें 20 cm³ अतिरिक्त पानी पम्प द्वारा और भर दिया जाये तो पानी से उत्पन्न आन्तरिक दाब तथा खोल में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये यदि अनुदैर्ध्य जोड़ की दक्षता (η_l) 80% है। $E = 2\times10^5$ N/mm² तथा $m = 4$ है।

हल : पम्प द्वारा अतिरिक्त पानी भरना तभी सम्भव होगा जब खोल का आयतन बढ़ा दिया जाये।

अत: खोल के आयतन में वृद्धि = अतिरिक्त (Extra) भरे गये पानी का आयतन

$\therefore \Delta V$ 20 cm³ तथा $t = 0.8$ cm

सूत्र से,

$$\therefore \quad \Delta V = V\times\frac{Pd}{2tE}\left[\frac{5}{2}-\frac{2}{m}\right]$$

$$20 = \frac{\pi(20)^2}{4}\times 90\times\frac{P\times 20}{2\times0.8\times2\times10^6}\left[2.5-\frac{2}{4}\right]$$

$$20 = 0.3534\times P$$

या $$P = 56.65\ \text{kg}_f/\text{cm}^2$$

या आन्तरिक दाब $$P = 5.66\ \text{N/mm}^2$$ उत्तर

$\because$ बेलनाकार खोल मे अधिकतम प्रतिबल, परिधीय प्रतिबल f_c होते हैं। $[\eta = 80\%]$ ।

$\therefore$ अधिकतम प्रतिबल, $$f_c = \frac{Pd}{2t\eta_l} = \frac{5.66\times200}{2\times8\times0.80} = 88.43\ \text{N/mm}^2$$ उत्तर

उदाहरण 8. एक पतला बेलनाकार खोल, जिसका व्यास 1 मीटर तथा मोटाई 12mm है, पर 7.5 kg$_f$/cm² का आन्तरिक दबा लगा हुआ है। खोल के पदार्थ में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल का मान एवं खोल के आयतन में परिवर्तन ज्ञात कीजिये। द्रव्य को असम्पीड्य (Incompressible) मानिये। खोल पदार्थ के लिये, $E = 200$ GN/m² है एवं पाइजन अनुपात 0.3 है।

हल : माना खोल की लम्बाई l है। याद रखे कि $\boxed{1\ \text{kg}_f/\text{cm}^2 = \frac{1}{10}\ \text{N/mm}^2}$ होता है।

अधिकतम प्रतिबल, $$f_c = \frac{Pd}{2t} = \frac{0.75\times1000}{2\times12} = 31.25\ \text{N/mm}^2$$ उत्तर

आयतन में परिवर्तन, $$\Delta V = V\times\frac{Pd}{2tE}\left[\frac{5}{2}-\frac{2}{m}\right],$$ जहां $V = \frac{\pi d^2}{4}\times l$

$$\therefore \quad \Delta V = \frac{\pi(100)^2}{4}\times l\times\frac{7.5\times100}{2\times1.2\times2\times10^6}\times[2.5-2\times0.3]$$

$$= 2.33\ \text{cm}^3\times l$$

$$= 2.33\ \text{cm}^3/\text{cm खोल की लम्बाई}$$ उत्तर

उदाहरण 9 1.2 m व्यास का बेलनाकार खोल 20 mm मोटी प्लेटों से बना हैं इसमें 4N/mm² का दाब लगा है। इसकी [...]ट में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल निकालिये यदि इसके जोड़ की दक्षता 75% है। प्रयुक्त सूत्र स्थापित कीजिये।

हल : दिया है, $\eta_l = 75\%$, दाब $P = 4$ N/mm², $d = 1.2$ cm $= 1200$ mm तथा $t = 20$ mm

$\therefore$ परिधीय जोड़ में प्रतिबल,

$$f_c = \frac{Pd}{2t\eta_l} = \frac{4\times1200}{2\times20\times.75} = 160\ \text{N/mm}^2$$ उत्तर

[...]**उदाहरण 10.** [...] 1 मीटर तथा भीतरी दाब 4 N/mm² है। यदि खोल की प्लेट में तनाव [...] 1000N/mm² से अधिक न होने दिया जाये और खोल की प्लेटों में जोड़ों की दक्षता 80% हो तो 4 सुरक्षा गुणांक (Safety Factor) पर खोल की प्लेट की मोटाई ज्ञात कीजिये।

हल : $d = 1$ m $= 1000$ mm, $\eta_l = 80\%$

$\because$ अधिकतम कार्यकारी प्रतिबल $= \frac{\text{अधिकतम प्रतिबल}}{\text{सुरक्षा गुणांक}} = \frac{1000}{4} = 250\ \text{N/mm}^2$

अब चूँकि $$\boxed{f_c = \frac{Pd}{2t\eta_l}}$$

$$250 = \frac{4\times1000}{2\times t\times0.80}$$ सूत्र से

$\therefore$ प्लेट की मोटाई, $$t = \frac{4\times1000}{250\times2\times0.80} = 10\ \text{mm}$$ उत्तर

उदाहरण 11. एक बॉयलर खोल 12 mm मोटी प्लेटों से बना है जो कि 1.5 N/mm² के भाप के दाब को सहन कर [...] यदि खोल के अनुदैर्ध्य जोड़ की दक्षता 75% तथा परिधीय जोड़ की दक्षता 35% है तो चादर में 100 N/mm² के [...]अधिकतम तनाव प्रतिबल सीमा के लिये खोल का व्यास ज्ञात करो।

हल : माना जब अधिकतम तनाव प्रतिबल सीमा (100N/mm²) = अनुदैर्ध्य प्रतिबल (f_l)

तब $$\boxed{f_l = \frac{Pd}{4t\eta_c}}$$ सूत्र से

$$100 = \frac{1.5\times d}{4\times12\times0.35} \quad \text{या} \quad d = 1120\ \text{mm}$$

अब माना अधिकतम तनाव प्रतिबल सीमा (100N/mm²) $= f_c$ है।

$$\therefore \quad f_c = \frac{Pd}{2t\eta_l}$$ सूत्र द्वारा

$$100 = \frac{1.5\times d}{2\times12\times0.75}$$

$$d = 1200\ \text{mm}$$

या

अब व्यास $d = 1200$ mm को सूत्र $f_l = \frac{Pd}{4t\eta_c}$ में रखकर प्रतिबल f_l का मान ज्ञात करने पर यह मान प्रतिबल की दी गयी [सीमा] 100 N/mm² से अधिक आता है। अत: खोल सुरक्षित नहीं होगा और वह फट जायेगा और जब $d = 1120$ mm को सूत्र $f_c = \frac{Pd}{2t\eta_l}$ में रखकर f_l का मान ज्ञात करते है तो यह मान प्रतिबल सीमा के अन्दर ही रहता है।

उत्तर

अत: उचित व्यास $d = 1120 = 1.12$m होगा।

उदाहरण 12. बॉयलर के एक बेलनाकार खोल का व्यास 2 मीटर है और यह 20 mm मोटी मृदु इस्पात की प्लेटों से बना [...] खोल में अनुदैर्ध्य जोड़ की दक्षता 70% तथा परिधीय जोड़ की दक्षता 60% है। खोल की प्लेटों में अधिकतम तनाव [प्रति]बल 80 N/mm² से अधिक न होने देने के लिये खोल के अन्दर भाप का अधिकतम अनुमेय दाब (Permissible [Pre]ssure) ज्ञात कीजिये।

हल : $d = 2$ m $= 2000$ mm, $t = 20$ m, $\eta_l = 70\%$, $\eta_c = 60\%$, प्रतिबल सीमा $f_{max} = 80$ N/mm²,

दाब P N/mm², $P = ?$

माना दाब का अधिकतम अनुमेय दाब P N/mm² है।

Study PowerPoint

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

अब अधिकतम तनाव प्रतिबल सीमा, (80 N/mm^2) को अनुदैर्ध्य प्रतिबल (f_l) के बराबर मानने पर,

$$\boxed{f_l = \frac{Pd}{4t\eta_c}}$$ सूत्र से

$$80 = \frac{P \times 2000}{4 \times 20 \times 0.60}$$

∴ अधिकतम दाब $$P = \frac{80 \times 4 \times 20 \times 0.60}{2000} = \mathbf{1.92\ N/mm^2}$$

यदि $$f_c = 80\ N/mm^2$$

तब $$\boxed{f_c = \frac{Pd}{2t\eta_l}}$$ सूत्र से

$$80 = \frac{P \times 2000}{0{\cdot}2 \times 20 \times 0.70} \text{ या } P = 1{\cdot}12\ N/m^2$$

जब दाब $P = 1.92 N/mm^2$ को f_c के सूत्र में रखकर f_c का मान ज्ञात करते हैं तो यह मान दी गयी प्रतिबल सीमा 80/mm^2 से अधिक आता है अतः खोल सुरक्षित नहीं होगा।

अब यदि $P = 1.12 N/mm^2$ को f_l के सूत्र में रखकर f_l का मान ज्ञात करते हैं तो यह मान प्रतिबल सीमा 80 N/mm^2 से कम आयेगा। अतः भाप का अधिकतम अनुमेय दाब (ताकि खोल सुरक्षित रहे) 1.12 N/mm^2 होगा और हम यह भी कह सकते हैं कि दाब का कम मान ही सुरक्षा की दृष्टि से उचित होगा।

अतः $$P = \mathbf{1.12\ N/mm^2}$$ उत्तर

उदाहरण 13. एक पतली दीवार वाली बेलनाकार दाब पात्र पर, जिसका आन्तरिक व्यास 800 mm तथा मोटाई 20 mm है, 2 N/mm^2 का आन्तरिक दाब लगा है। परिधीय (Circumferential) तथा अनुदैर्ध्य (Longitudinal) विकृति (Strain) की गणना कीजिये। $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 तथा पाइजन अनुपात = 0.3 मानिये।

हल : परिधीय विकृति

$$e_y = \frac{pd}{2tE}\left(1 - \frac{1}{2m}\right)$$

$$= \frac{2 \times 800}{2 \times 20 \times 2 \times 10^5} \times \left(1 - \frac{0.3}{2}\right)$$

$$= 1.7 \times 10^{-4}$$

अनुदैर्ध्य विकृति

$$e_x = \frac{pd}{2tE}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)$$

$$= \frac{2 \times 800}{2 \times 20 \times 2 \times 10^5} \times (0.5 - 0.3)$$

$$= 4 \times 10^{-5}$$ उत्तर

विशेष : गोलीय खोलों (Shells) पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 14. एक गोलीय दाब पात्र में परिधीय तथा अनुदैर्ध्य प्रबिलों की गणना कीजिये। पात्र का आन्तरिक व्यास 80 तथा दीवार की मोटाई 20 मिमी है। आन्तरिक द्रव-दाब 20 kg$_f$/cm^2 है।

हल : ∵ गोलीय खोल में सभी दिशाओं में समान प्रतिबल पैदा होते हैं।

∴ $$f_l = f_c = \frac{Pd}{4t} = \frac{20 \times 80}{4 \times 2} = 200\ kg_f/cm^2$$

∴ अनुदैर्ध्य प्रतिबल = परिधीय प्रतिबल = 200kg$_f$/cm^2 = 20 N/mm^2 उत्तर

उदाहरण 15. किसी गोलीय खोल का व्यास 1 मीटर है। यह इस्पात (Steel) की 8 mm मोटी प्लेटों का बना है। इसके भरी गैस का दाब 2.5 N/mm^2 है। यदि $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 तथा $\frac{1}{m} = 0.3$ है तो खोल में अधिकतम तनाव प्रतिबल उसके आयतन में परिवर्तन ज्ञात कीजिये। व्यास में परिवर्तन भी बताइये।

हल : खोल में अधिकतम तनाव प्रतिबल,

$$\boxed{f = \frac{Pd}{4t}}$$ (सूत्र)

∴ $$f = \frac{2.5 \times 1000}{4 \times 8} = 78.125\ N/mm^2$$ उत्तर

∴ आयतन में परिवर्तन (वृद्धि),

$$\boxed{\Delta V = V \times \frac{3f}{E}\left(1 - \frac{1}{m}\right)}$$ (सूत्र)

∴ $$\Delta V = \frac{\pi d^3}{6} \times \frac{3\,Pd}{4tE}\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \times \pi (1000)^3 \times \frac{3 \times 2.5 \times 1000}{4 \times 8 \times 2 \times 10^5} \times (1 - 0.3)$$

$$= 429514.62\ mm^3$$

$$= \mathbf{4.295 \times 10^5\ mm^3}$$ उत्तर

व्यास में परिवर्तन, $$\Delta d = d \times \frac{f}{E}\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

∴ $$\Delta d = d \times \frac{Pd}{4tE}\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

$$= 1000 \times \frac{2.5 \times 1000}{4 \times 8 \times 2 \times 10^5} \times (1 - 0.3)$$

$$= \mathbf{0.2734\ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 16. एक पतले गोलीय खोल का व्यास 1 मीटर है तथा यह इस्पात की बनी 8 mm मोटी प्लेटों से बना है। इसमें का आन्तरिक दाब 25 kg$_f$/cm^2 है तथा जोड़ों की दक्षता 75% है। यदि $m = 4$ तथा $E = 2 \times 10^6$ kgf/cm^2 है तो प्लेट में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल का मान तथा खोल के व्यास में परिवर्तन ज्ञात कीजिये।

हल : ∵ खोल की चादर में अधिकतम प्रतिबल जोड़ पर उत्पन्न होगा जिसका मान,

$$f = \frac{pd}{4t_\eta} = \frac{25 \times 100}{4 \times 0.8 \times 0.75}$$

$$f = 1041.67 \text{ किग्रा/सेमी}^2 = \mathbf{104.16\ N/mm^2}$$ उत्तर

खोल के व्यास परिवर्तन,

$$\delta d = \frac{d \times pd}{4tE}\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

$$= \frac{100 \times 25 \times 100}{4 \times 0.8 \times 2 \times 10^6}\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$= 0.0293$ सेमी

∴ $\delta d = 0.293$ मिमी **उत्तर**

उदाहरण 17. ताँबे के बने एक गोलीय बर्तन (Spherical Vessel) का व्यास 200 mm तथा खोल की मोटाई 1 mm है। इसे समुद्र (sea) में किस गहराई तक डुबोया जाये ताकि व्यास 0.01 mm कम हो जाये? जल का आपेक्षित भार $\omega = 10.4 kN/m^3$ (1040 kg/m³) तथा $\frac{1}{m} = 0.25$ और $E_c = 100 GPa = 100 \times 1000 N/mm^2$ है।

हल : गोलीय खोल के व्यास में परिवर्तन,

$$\boxed{\Delta d = d \times \frac{f}{E}\left(1-\frac{1}{m}\right)}$$ **सूत्र से,** यहाँ $f = \frac{Pd}{4t}$ होता है।

$$0.01 = 200 \times \frac{P \times 200}{4 \times 1 \times 100 \times 10^3}(1-0.25)$$

या खोल में दाब $P = 0.133 N/mm^2 = 1.33 kg/cm^2$

या दाब $P = 1.33 \times 10^4 kg/m^2$

तथा समुद्री पानी का आपेक्षिक भार,

$$\omega = 1040 kg_f/m^3$$

अब, दाब $P = \omega h$ सूत्र से,

खोल की पानी में गहराई, $h = \frac{P}{\omega}$

$$= \frac{1.33 \times 10^4}{1040} = \mathbf{12.8\ m}$$ **उत्तर**

उदाहरण 18. 140 सेमी व्यास वाले एक पतले गोलीय खोल का आन्तरिक दाब 18 kg$_f$/cm² है। यदि प्लेट के पदार्थ का अनुमेय प्रतिबल (Permissible Stress) 1400 kgf/cm² (140 N/mm²) है तथा जोड़ की दक्षता (Joint Efficiency) 75% हो तो खोल की चादर की न्यूनतम मोटाई ज्ञात कीजिये।

हल : दिया है, $P = 18 kgf/cm^2 = 1.8 N/mm^2$, $d = 140 cm = 1400 mm$, $f = 1400 kgf/cm^2 = 140 N/mm^2$

$$\eta = 75\% = 0.75$$

∴ **जोड़युक्त गोलीय खोल की मोटाई,** $\boxed{t = \frac{Pd}{4f\eta}}$ **सूत्र से**

$$t = \frac{1.8 \times 1400}{4 \times 140 \times 0.75} = \mathbf{6\ mm}$$ **उत्तर**

अभ्यास

1. **निम्न रिक्त स्थानों में उपयुक्त शब्द भरिये—**
   (i) सभी ओर से बन्द उस पात्र (Vessel) को .... कहते हैं जिसमें कोई द्रव या गैस उच्च दाब पर भरा जा सके और यह बाहर के .... को भी सहन कर सके।
   (ii) यदि खोल की दीवार की मोटाई (t) उसके व्यास (d) के 1/10 गुने से .... हैं तो उसे पतला बेलनाकार खोल कहते हैं।
   (iii) यदि खोल (Shell) की दीवार की मोटाई (t) उसके आन्तरिक व्यास (d) के 1/10 गुने से .... है तो उसे मोटा बेलनाकार खोल कहते हैं।
   (iv) एक पतले बेलनाकार खोल की दीवार में परिधीय प्रतिबल (Circumferential Stress) .... का दुगुना होता है।
   (v) एक पतले .... खोल में आन्तरिक द्रव दाब के कारण, दो लम्ब दिशाओं में अनुदैर्ध्य तथा परिधीय प्रतिबल आपस में बराबर होते हैं।
   (vi) पतली चादर से बनाये गये एक बड़े व्यास वाली टंकी में पानी भर दिया जाये तो टंकी की दीवार में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल .... का होता है और इसे .... कहते हैं।
   (vii) पतले बेलनाकार खोल (Thin Cylindrical Shell) में, परिधीय प्रतिबल f_c (Hoop Stress), अनुदैर्ध्य प्रतिबल (Longitudrial Stress) f_l से .... गुने होते हैं।
   (viii) गोलीय खोल का आन्तरिक व्यास, यदि d हो तो आयतन का सूत्र .... होता है।
   (ix) बेलनाकार खोल का आन्तरिक व्यास d हो तो आयतन का सूत्र .... होता है।
   (x) यदि कोई खोल (Shell) लम्बाई को दो भागों में बाँटते हुए फटता है जिससे उत्पन्न .... प्रतिबल, लम्बाई के समान्तर वाली चादर में खिंचाव से होते हैं।
   (xi) परिधीय प्रतिबलों की स्थिति में खोल की अक्ष के लम्बरूप दिशा में बल लगने से अक्ष के .... दिशा में खोल फटता है।
   (xii) गोलीय खोल में दोनों प्रकार के प्रतिबल समान होते हैं और $f =$ .... होते हैं।
   (xiii) एक दाब पात्र (Pressel) में प्रतिबल की प्रकृति (Nature) .... की होती है।
   (xiv) अनुदैर्ध्य प्रतिबल, ... जोड़ को प्रभावित करते हैं।
   (xv) परिधीय प्रतिबल, ... जोड़ को प्रभावित करते हैं।

उपरोक्त प्रश्न के उत्तर

(i) खोल (Shell), दाब (Pressure), (ii) कम, (iii) अधिक, (iv) अनुदैर्ध्य प्रतिबल (Longitudinal Stress), (v) गोलीय (Spherical), (vi) तनाव, हूप प्रतिबल (Hoop Stress), (vii) दो गुने, (viii) $V = \frac{\pi d^3}{6}$, (ix) $V = \frac{\pi d^2}{4} \times l$, (x) अनुदैर्ध्य प्रतिबल, (xi) समान्तर, (xii) $f = \frac{Pd}{4t}$, (xiii) तवान, (xiv) परिधीय, (xv) अनुदैर्ध्य।

2. निम्नलिखित का वर्णन कीजिये— (U.P. 2006, 07
   (i) मोटे व पतले बेलनों का अन्तर।
   (ii) पतले बेलनाकार कोश (Shell) में अनुदैर्ध्य एवं हूप प्रतिबलों (Longitudinal and Hoop Stresses) में अन्तर। (U.P. 200
3. निम्न के उत्तर दीजिये— (U.P. 20
   (अ) मोटे एवं पतले कोशों (Shells) में अन्तर।
   (ब) पतले बेलनाकार कोश में अनुदैर्ध्य एवं परिधिक प्रतिबलों में अन्तर। (U.P. 2
   (स) पतले बेलनाकार कोश में अनुदैर्ध्य एवं परिधिक विकृतियों में अन्तर। (U.P.
   (द) पतले बेलनाकार कोश में आयतनी विकृति।
4. पतले बेलनाकार खोल में परिधीय (Hoop) प्रतिबल तथा अनुदैर्ध्य (Longitudinal) प्रतिबलों को चित्रों की सह (U.P समझाइये।
5. बेलनाकार खोल में परिधीय तथा अनुदैर्ध्य प्रतिबलों के सूत्र व्युत्पन्न करिये तथा जोड़ की दक्षताओं से सम्बन्धित सूत्र भी (U.P. 2
6. निम्न को परिभाषित कीजिये—
   (i) परिधीय प्रतिबल (Circumferential Stress), (ii) अनुदैर्ध्य प्रतिबल (Longitudinal Stress)
   (iii) पतले खोल (Thin Shells)।

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

विशेष : बेलनाकार खोलों पर आधारित प्रश्न

7. किसी पाइप का व्यास 200 सेमी तथा दीवार की मोटाई 2 सेमी है। यदि पाइप के अन्दर पानी का दाब 1.6 N/mm^2 का पानी का दाब हो तो पाइप में उत्पन्न प्रतिबलों को ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2002, 03)**

[**उत्तर :** 40 N/mm^2, 80 N/mm^2]

8. एक गैस सिलिण्डर, जिसका आन्तरिक व्यास 1.5 मीटर है, 3 सेमी मोटाई की चादर से बना है। यदि अधिकतम अनुमेय प्रतिबल 1500 kg_f/cm^2 (या 150 N/mm^2) है तो सिलिण्डर में आन्तरिक दाब ज्ञात कीजिये।

[**उत्तर :** 6 N/mm^2]

9. एक पतले बेलनाकार खोल का का बाहरी व्यास 104 सेमी है तथा यह 2 सेमी मोटाई की प्लेटों से बना है। यदि खोल में आन्तरिक वाष्प दाब 35 kg_f/cm^2 (या 3.5 N/mm^2) हो तो खोल-प्लेट में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये। प्लेट जोड़ों की दक्षता 75% है।

[**संकेत :** आन्तरिक व्यास $d = 104 - 2\times 2 = 100 cm = 1000 mm$ फिर $f_c = \frac{pd}{2\eta l}$ सूत्र से f_c ज्ञात करें।]

[**उत्तर :** $f_c = 116.67 N/mm^2$]

10. एक मीटर व्यास तथा 2.5 मीटर लम्बाई का एक पतला बेलनाकार खोल 20 mm मोटी प्लेटों से बना है। यदि खोल में आन्तरिक दाब 5 N/mm^2 हो तो खोल की लम्बाई, व्यास तथा आयतन में परिवर्तन ज्ञात कीजिये, जबकि $m = 4$ तथा $E = 2\times 10^5$ N/mm^2 है। **(U.P. 2003, 2008)**

[**उत्तर :** 0.39 mm, 0.54 mm^2, 3.005915×10^6 mm^3]

11. 80 सेमी व्यास तथा 3 मीटर लम्बे बेलनाकार पतले ड्रम की मोटाई 10 mm है। यदि ड्रम पर 25 kg_f/cm^2 (या 2.5 N/mm^2) का आन्तरिक दाब लगा हो तो ड्रम की लम्बाई, व्यास तथा आयतन में परिवर्तन (वृद्धि) ज्ञात कीजिये, जबकि $E = 2\times 10^5$ N/mm^2 तथा पाइजन अनुपात $\frac{1}{m} = \frac{1}{4}$ है।

[**उत्तर :** 0.375 mm, 0.35 mm, 1507964.5mm^3]

12. एक बॉयलर खोल का व्यास 2.50 मीटर है एवं इसमें द्रव्य का आन्तरिक दाब 3N/mm^2 है। खोल का अधिकतम तनन प्रतिबल 150N/mm^2 रखना है तो खोल की मोटाई ज्ञात कीजिए, यदि सुरक्षा गुणांक 1.8 है।

[**उत्तर :** 45 mm]

13. एक गैस सिलिण्डर का व्यास 1 मीटर तथा भीतरी दाब 2N/mm^2 है। यदि खोल की प्लेट में तनाव प्रतिबल 400 N/mm^2 से अधिक न होने दिया जाये और खोल की प्लेटों में जोड़ों की दक्षता 80% हो तो सुरक्षा गुणांक (Factor of Safety) 4 पर खोल की प्लेट की मोटाई ज्ञात कीजिए।

[**उत्तर :** 12.5 mm]

14. एक बॉयलर खोल का व्यास 3 मीटर है। इसके अन्दर दाब 1.5 N/mm^2 है। यदि खोल में अधिकतम तनाव प्रतिबल का मान 120 N/mm^2 से अधिक न रखना हो तो सुरक्षा गुणांक (Factor of Safety) 2 पर बॉयलर के खोल की मोटाई t ज्ञात कीजिए।

[**उत्तर :** 37.5 mm]

15. एक 20 सेमी आन्तरिक व्यास, 90 सेमी लम्बाई के एक पतले बेलनाकार खोल को, जिसकी प्लेट की मोटाई 8 mm है, इसे वायुमण्डलीय दाब पर पानी से भर दिया गया है। यदि इसमें 20 cm^3 अतिरिक्त (Extra) पानी पम्प द्वारा और भर दिया जाए तो इस पानी से उत्पन्न आन्तरिक दाब तथा खोल में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिए, यदि अनुदैर्ध्य जोड़ की दक्षता 80% हो। $m = 4$ तथा $E = 2\times 10^5$ N/mm^2 मानिये।

[**उत्तर :** 5.66 N/mm^2, $f_c = 88.43$ N/mm^2] [**संकेत :** उदाहरण 7 देखें]

16. एक पतला बेलनाकार खोल, जिसकी लम्बाई 900 mm, आन्तरिक व्यास, 150 mm तथा खोल की प्लेट की मोटाई 8 mm है वायुमण्डलीय दाब पर किसी द्रव से भरा हुआ है। यदि 20000 mm^3 आयतन का आन्तरिक द्रव बेलन खोल के अन्दर पम्प द्वारा भेजा जाये तो ज्ञात कीजिए— **(U.P. 2005)**

(1) बेलन पर आरोपित द्रव का दाब तथा (2) खोल में उत्पन्न परिधीय प्रतिबल।

यंगमापांक $E = 2\times 10^5 N/mm^2$, पायजन अनुपात $\frac{1}{m} = 0.3$ मानिये।

[**उत्तर :** द्रव का दाब P=14.12 N/mm^2, परिधीय प्रतिबल f_c=132.375 N/mm^2]

17. एक पतले बेलनाकार कोश का व्यास 1.5 m तथा उसके चादर की मोटाई 10 mm है। इसमें 2.2 N/mm^2 का आन्तरिक तरल दाब लगा है, कोश में उत्पन्न परिधीय प्रतिबल तथा परिधीय विकृति ज्ञात कीजिए। $E = 2\times 10^5$ N/mm^2 तथा $\frac{1}{m} = 0.25$ मानिये। **(U.P. 2004)**

[**उत्तर :** परिधीय प्रतिबल f_c=165 N/mm^2 तथा विकृति $e_c = 7.2\times 10^{-4}$]

18. एक बेलनाकार खोल की लम्बाई 2 मीटर, प्लेट की मोटाई 10 mm तथा व्यास 500 mm है। यह वायुमण्डलीय दाब पर पानी से पूरा भरा है। यदि इसमें 200 सेमी^{3} पानी पम्प द्वारा और भर दिया जाये तो खोल (Shell) में अधिकतम प्रतिबल (Hoop Stress) तथा आन्तरिक दाब (p) ज्ञात कीजिए। ($\frac{1}{m}$ 0.25 तथा E=200 GPa मानिये) Provided by Polytechnic study with atul

[**उत्तर :** 50.95 N/mm^2, 2.038 N/mm^2]

[**संकेत :** उदाहरण (6) देखें]

19. एक पतले बॉयलर खोल का व्यास 2.5 मी० तथा आन्तरिक दाब 1.40 N/mm^2 है। यदि अनुज्ञेय तनन प्रतिबल 100 N/mm^2 है तो खोल की मोटाई ज्ञात कीजिये। **(U.P.B.T.E. 2007)**

संकेत — [$f_c > f_l$ अत: $f_c = \frac{pd}{2t}$ से $t = ?$]

[**उत्तर :** t = 17.5 mm]

20. एक बॉयलर खोल 12 mm मोटी प्लेटों से बना है जो कि 1.5 N/mm^2 के भाप के दाब को सहन कर सके। यदि खोल के अनुदैर्ध्य जोड़ की दक्षता 75% तथा परिधीय जोड़ की दक्षता 35% है तो चादर में 100 N/mm^2 के अधिकतम तनाव प्रतिबल सीमा के लिये खोल का व्यास ज्ञात कीजिये।

[**संकेत :** उदाहरण (11) देखें]

[**उत्तर :** d = 1120 mm]

21. बॉयलर के एक खोल का व्यास 2 मीटर है और यह 20 mm मोटी मृदु इस्पात की प्लेटों से बना है। खोल में अनुदैर्ध्य जोड़ की दक्षता 70% तथा परिधीय जोड़ की दक्षता 60% है। खोल की प्लेटों में अधिकतम तनाव प्रतिबल 80 N/mm^2 से अधिक न होने देने के लिये खोल के अन्दर भाप का अधिकतम सुरक्षित अनुमेय दाब (Permissible Pressure) ज्ञात कीजिये।

[**उत्तर :** 1.12 N/mm^2]

[**संकेत :** उदाहरण (12) देखें]

22. कम्प्रेशर (Compressor) के एक बेलनाकार वायुग्राही (Air Receiver) का आन्तरिक व्यास 2 मीटर है और यह 15 mm मोटी प्लेटों से मिलकर बना है। यदि हूप प्रतिबल (Hoop Stress) का मान 900 kg/cm^2 (या 90 N/mm^2) से अधिक न हो तथा अक्षीय प्रतिबल (Longitudinal Stress) का मान 60 N/mm^2 से अधिक न हो तो अधिकतम सुरक्षित वायु दाब की गणना करो। **(U.P. 2013)**

[**संकेत :** $f_c = \frac{Pd}{2t}$ तथा $f_l = \frac{Pd}{4t}$ से अलग-अलग P का मान ज्ञात करो तो P का न्यूनतम मान ही सुरक्षित वायु दाब होगा। अत: P = 1.35 N/mm^2]

23. एक 80 सेमी व्यास वाले पानी के मुख्य पाइप (Water Main Pipe) में 100 मीटर के दाब शीर्ष (Pressure Head) पर पानी भरा है। यदि पानी का भार 1000 kg/m^3 (या 10 kN/m^3) है तो मुख्य पाइप लाइन (Water Main Pipe Line) की धातु की मोटाई ज्ञात कीजिये, जबकि अधिकतम अनुमेय प्रतिबल सीमा 20 N/mm^2 है।

[**संकेत :** दाब तीव्रता $p = wh = 10\times 100 = 1000 kN/m^2 = 1 N/mm^2$ फिर $f_c = \frac{pd}{2t}$ से t ज्ञात करो।]

[**उत्तर :** t = 20mm]

Scanned with CamScanner

Study PowerPoint

24. सीमेंट कँक्रीट के बने एक पानी के पाइप का व्यास 500 mm है और दीवार की मोटाई 20 mm है। यदि पाइप पर पानी-दाब की ऊँचाई 8 मीटर हो तो अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये।

[संकेत : उदाहरण 4 देखें] [उत्तर : 1 N/mm^2]

25. एक बेलनाकार पानी का टैंक 25 मी० ऊँचा तथा 2·2 मी० व्यास का है जो ऊर्ध्वाधर ऊपरी सिरे पर खुलता है। टैंक इस्पात का बना है। इस्पात के लिये पराभव प्रतिबल का मान 210 MN/ m^2 है। टैंक पानी से पूर्ण रूपेण भरा है। इस्पात चादर की मोटाई ज्ञात करो। अनुदैर्ध्य जोड़ की दक्षता = 70% एवं सुरक्षा गुणांक = 3 है। **(U.K. 2014, S Mech.)**

[संकेत : दाब $P = \rho \times gh = 1 \times 9{\cdot}81 \times 25 = 245{\cdot}25$ KN/ m^2 $= 0{\cdot}245$ N/ mm^2

फिर $f_c = \frac{Pd}{2t\eta_l}$ से $t = \frac{Pd}{2f_c \times \eta_l}$ यहाँ $f_c = \frac{210}{3} = 70$ N/ mm^2 तथा $\eta_l = 0{\cdot}70$ है।]

विशेष : गोलीय खोलों पर आधारित प्रश्न

26. 140 सेमी व्यास वाले एक पतले गोलीय खोल का आन्तरिक दाब 1.8 N/mm^2 है। यदि प्लेट के पदार्थ की अनुमेय प्रतिबल सामर्थ्य 140 N/mm^2 हो तथा जोड़ की दक्षता 75% हो तो खोल की न्यूनतम मोटाई ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : 6 mm]

[संकेत : सूत्र $t = \frac{pd}{4f\eta}$]

27. एक पतला गोलाकार कोश 75 mm व्यास का है तथा दीवार की मोटाई 3 mm है। इसमें 15 N/mm^2 दाब का तरल भरा है। यदि पदार्थ का प्रत्यास्थता मापांक 200 × 10^3 N/mm^2 तथा प्वासो अनुपात 0.3 है, तब ज्ञात कीजिए—

(i) दोनों स्पर्शरेखीय प्रतिबल **(U.P. 2011)**

(ii) कोश में आयतनी विकृति

[उत्तर : $fc = f_l = 93.75$ N/mm^2, $\frac{\Delta V}{V} = e_v = 9.8 \times 10^{-4}$]

28. 1 मी० व्यास और 1 सेमी० मोटाई वाले गोलाकार खोल के आयतन में वृद्धि ज्ञात कीजिये जब इसमें आन्तरिक दबाव 1.6×10^6 N/m^2 हो। लीजिए $E = 200 \times 10^9$ N/m^2 और $1/m = 0.3$ **(U.P.B.T.E. 2010)**

[उत्तर : $\Delta V = V \times \frac{3f}{E}(1 - \frac{1}{m})] = 2.2 \times 10^5$ mm^3] जहाँ $V = \frac{\pi d^3}{6}$ है।

29. ताँबे के बने एक गोलीय बर्तन (Spherical Vessel) का व्यास 200 mm तथा खोल की मोटाई 1 mm है। इसे समुद्र (Sea) में किस गहराई तक डुबाया जाये ताकि व्यास 0.01 mm कम हो जाये? यदि समुद्री जल का आपेक्षिक भार $w = 10.4$ kN/m^3 (1040 kg/m^3) है। $\frac{1}{m} = 0{\cdot}25$ और $E_c = 100\,GP_a$ है।

[उत्तर : 12.8 mm]

(संकेत उदाहरण 17 देखें)

30. एक पतले गोलीय खोल का व्यास 1 मीटर है। यह इस्पात से बनी 8 mm मोटी प्लेटों से बना है। दसके अन्दर भरी गैस का दाब 2·5 N/mm^2 है तथा जोडों कर दक्षता 75% है। यदि $m = 4$ तथा $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 है तो खोल की प्लेटों में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल का मान तथा खोल के व्यास में परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : $f = 104{\cdot}16$ N/mm^2, $\Delta d = 0{\cdot}39$ mm]

31. एक पतले गोलीय खोल का व्यास 1 मीटर है। यह इस्पात से बनी 8 mm मोटी प्लेटों से बना है। इसमें गैस का आन्तरिक दाब 2·5 N/mm^2 है। यदि $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 तथा $\frac{1}{m} = 0{\cdot}3$ है तो खोल में अधिकतम तनाव प्रतिबल, व्यास में परिवर्तन तथा आयतन में परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : 78·125 N/mm^2, 0·2734 mm, $4{\cdot}295 \times 10^5$ mm^3]

Scanned with CamScanner