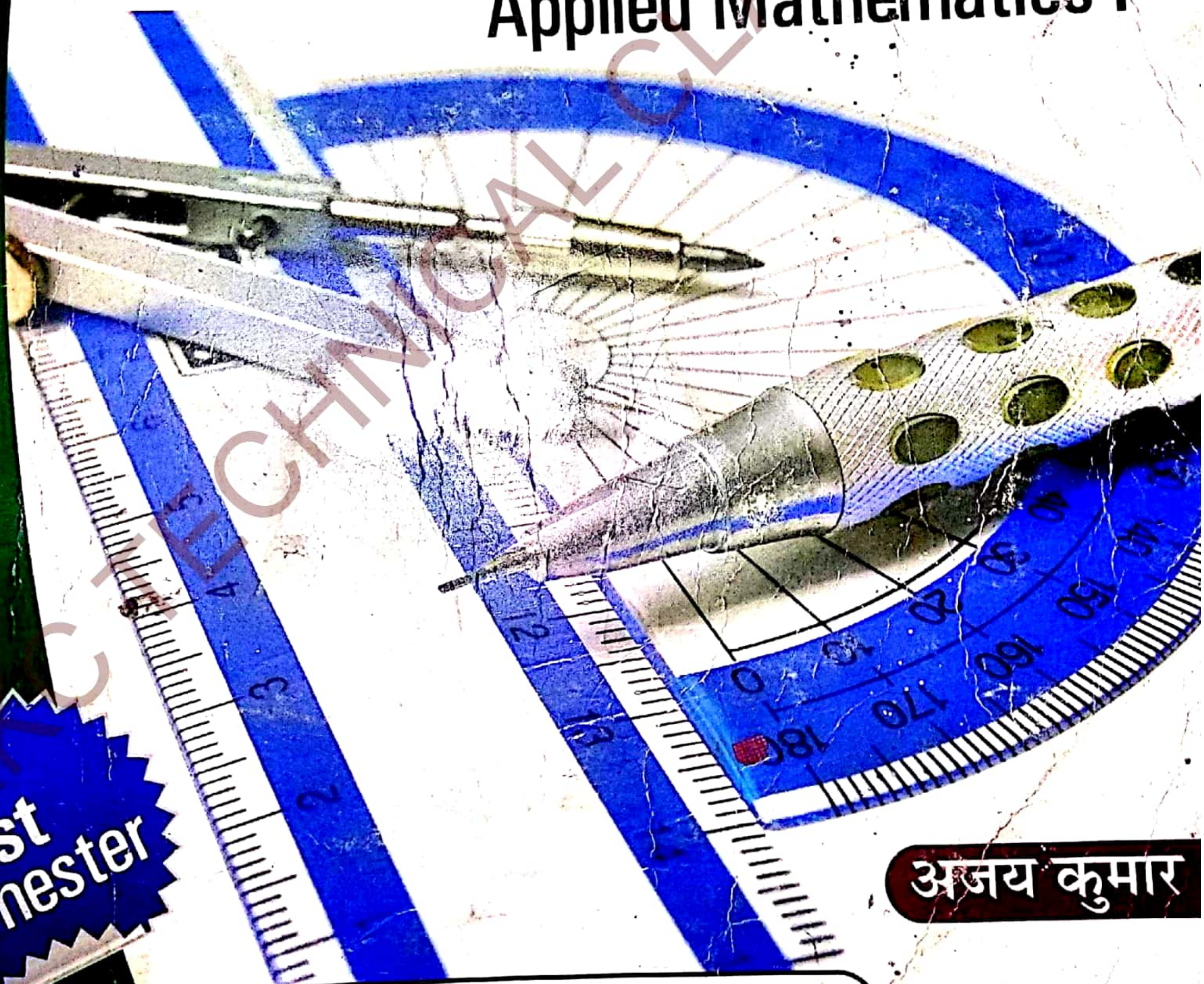
सार्थक

प्राविधिक शिक्षा परिषद् उ० प्र०
द्वारा 2018-19 से स्वीकृत नवीनतम
पाठ्यक्रमानुसार

अनुप्रयुक्त गणित-I

Applied Mathematics-I



For Ist Semester

अजय कुमार

Jai Prakash Nath Publications
Meerut

AK TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

सार्थक प्राविधिक शिक्षा परिषद् उत्तर प्रदेश द्वारा
2018-19 के स्वीकृत नवीनतम् पाठ्यक्रमानुसार

अनुप्रयुक्त
गणित-I
Applied Mathematics-I

(प्रथम सेमेस्टर : डिप्लोमा इन्जीनियरिंग के सभी विद्यार्थियों के लिए)

अजय कुमार
एम०एस-सी० (गणित)
कु० मायावती राजकीय पॉलीटेक्निक
बादलपुर (गौतमबुद्धनगर)

परामर्शदाता

श्रीमती अनुला
व्याख्याता (गणित विभाग)
राजकीय पॉलीटेक्निक
, बरेली

श्री राजकुमार रेयन
(प्रधानाचार्य)
राजकीय पॉलीटेक्निक,
जौनपुर

श्री ब्रजेश कुमार
(प्रधानाचार्य)
हंडिया पॉलीटेक्निक, हंडिया,
(प्रयागराज)

श्री राम भवन
व्याख्याता (गणित विभाग)
चंदौली पॉलीटेक्निक, चंदौली

श्री एस० के० माहौर
व्याख्याता (गणित विभाग)
रा० चर्म संस्थान, आगरा

AKC TECHNICAL CLASSES

प्रकाशक :
जय प्रकाश नाथ पब्लिकेशन्स
गाँधी आश्रम चौराहा
नौचन्दी रोड, मेरठ-250 002 (उ०प्र०)

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

SYLLABUS
Applied Mathematics-I
[Common to all Engineering Courses]

L	T	P
5	—	—

■ Rationale :

Contents of this course provide fundamental base for understanding elementary mathematics and their uses in solving engineering problems. Contents of this course will enable students to use basic mathematical function like logarithms, partial fractions, matrices and basic 2D, curves in solving various engineering problems of all fields.

■ Learning Outcomes :

After undergoing this course, the students will be able to :

- Apply Binomial theorem to solve engineering problems
- Apply determinants properties and Crammer's rule to solve engineering problems
- Apply dot & cross product of vectors to find the solution of engineering problems
- Use complex numbers in various engineering problems
- Apply differential calculus and higher order to solve engineering problems
- Find velocity, acceleration, errors and approximation in engineering problems with application of derivatives,

DETAILED CONTENTS

1. ALGEBRA-I **(08 PERIODS)**

1.1 Series : AP and GP : Sum, *n*th terms, Mean.

1.2 Binomial theorem for positive, negative and fractional index (without proof). Application of Binomial theorem.

1.3 Determinants : Elementary properties of determinant of order 2 and 3, Multiplication, System of algebraic equation, Consistency of equation, Crammer's rule.

2. ALGEBRA-II **(08 PERIODS)**

2.1 Vector algebra : Dot and cross product, Scalar and vector triple product.

2.2 Complex numbers.

Complex numbers, Representation, Modulus and Amplitude, De-Moivre theorem, its application in solving algebraic equations, Mod. function and its properties.

3. TRIGONOMETRY **(06 PERIODS)**

3.1 Relation between sides and angles of a triangle : Statement of various formulae showing relationship between sides and angles of a triangle.

3.2 Inverse Circular Functions : Simple case only.

4. DIFFERENTIAL CALCULUS-I **(10 PERIODS)**

4.1 Functions, limits continuity—functions and their graphs, range and domain, elementary methods of finding limits (right and left), elementary test for continuity and differentiability.

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

4.2 Methods of finding derivative, Trigonometric functions. Exponential function, Function of a function, Logarithmic differentiation, Differentiation of Inverse trigonometric function, Differentiation of implicit functions,

5. DIFFERENTIAL CALCULUS-II (10 PERIODS)

5.1 Higher order derivatives, Leibnitz theorem (without proof). Simple applications.

5.2 Application—Finding Tangent, Normal, Points of Maxima/Minima, Increasing/Decreasing functions, Rate, Measure, Velocity. Acceleration, Errors and Approximation.

■ Instructional Strategy :

The basic instructional strategy to teach basic mathematics, Binomial theorem, trigonometry, differential equations etc. should be conceptual with real world applications of relevant branch. More numerical and theory examples can be used for clear understanding of the content.

■ Means of Assessment :

- Assignments and Quiz/Class Tests
- Mid-term and End-term Written Tests
- Model/Prototype Making

SUGGESTED DISTRIBUTION OF MARKS

Topic	Time Allotted (Periods)	Marks Allotted (%)
1.	08	20
2.	08	20
3.	06	12
4.	10	24
5.	10	24
Total	**42**	**100**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

विषय सूची

खण्ड-1 : बीजगणित-I — **1-98**

1. समानांतर श्रेढी — 1-17
2. गुणोत्तर श्रेढी — 18-43
3. द्विपद सिद्धान्त — 44-70
4. सारणिक — 71-98

खण्ड-2 : सदिश बीजगणित-II — **99-184**

5. सदिशों का योग अन्तर एवं वियोजन — 99-110
6. दो सदिशों का अदिश या बिन्दु गुणन — 111-128
7. सदिश या वज्र गुणन — 129-143
8. अदिश त्रिगुणनफल — 144-153
9. सदिश त्रिगुणनफल — 154-160
10. सम्मिश्र संख्यायें — 161-173
11. डिमॉयवर प्रमेय — 174-184

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

खण्ड-3 : त्रिकोणमिति 185-216

12. त्रिभुज की भुजाओं और कोणों में सम्बन्ध 185-200

13. प्रतिलोम वृत्तीय फलन 201-216

खण्ड-4 : अवकलन गणित-I 217-288

14. फलन 217-231

15. सीमा 232-246

16. सततता एवं अवकलनीयता 247-253

17. प्रारंभिक अवकलन 254-288

खण्ड-5 : अवकलन गणित-II 289-346

18. उत्तरोत्तर अवकलन 289-299

19. अवकलन के सरल उपयोग 300-313

20. स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब 314-326

21. वर्द्धमान एवं ह्रासमान फलन 327-331

22. उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ 332-346

- वार्षिक परीक्षा प्रश्न-पत्र

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अध्याय 1

समानांतर श्रेढी (Arithmetic Progression)

1.1 परिभाषायें (Definitions)

1.1.1 अनुक्रम (Sequence)

संख्याओं का वह समूह जिसे एक निश्चित क्रम में सजाया गया हो तथा जो एक निश्चित गणितीय नियम का पालन करता हो एक अनुक्रम कहलाता है। अनुक्रम में आने वाली संख्यायें इसका पद कहलाती हैं।

जैसे : 2, 5, 8, 11, ...

अनुक्रम का उदाहरण है। क्योंकि इसका प्रत्येक पद अपने पूर्ववर्ती पद (Preceding term) में 3 जोड़ने से प्राप्त होता है।

1.1.2 परिमित अनुक्रम (Finite Sequence)

एक अनुक्रम जिसमें पदों की संख्या सीमित होती है, परिमित अनुक्रम कहलाती है। इसके पदों की गिनती की जा सकती है, परिमित अनुक्रम में हमेशा अंतिम पद होगा।

जैसे : 1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., 25

1.1.3 अपरिमित अनुक्रम (Infinite Sequence)

वह अनुक्रम जिसमें पदों की संख्या अपरिमित हो अपरिमित अनुक्रम कहलाती है। इनके पदों को गिनना संभव नहीं होता है।

जैसे : 1, 3, 5, 8, 9, ...

1.1.4 श्रेणी (Series)

यदि किसी अनुक्रम में सभी पद '+', '–' के चिह्न द्वारा जुड़े हों, तो इसे हम श्रेणी के नाम से जानते हैं,

जैसे : $1+3+5+7+\ldots+25$ एक श्रेणी है।

1.2 श्रेढी (Progression)

अनुक्रम या श्रेणी के पद यदि किसी विशेष गणितीय प्रतिबंध के अधीन लिखे गए हों तो वह श्रेणी या अनुक्रम 'श्रेढी' (Progression) कहलाता है।

1.2.1 समानांतर श्रेढी (Arithmetical Progression)

यदि किसी श्रेणी या अनुक्रम में प्रत्येक पद का अपने पूववर्ती पद से अन्तर एक स्थिर राशि हो, तो वह श्रेणी या अनुक्रम समानांतर श्रेढी (A.P.) में कही जाती है तथा इस स्थिर अन्तर को **सार्वअन्तर (Common Difference)** के नाम से जाना जाता है।

जैसे : $1+3+5+7+\ldots$

इसमें प्रत्येक पद का अपने पूर्ववर्ती पद से अन्तर 2 है।

अर्थात् $3-1=5-3=7-5=\ldots=2$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अतः यह श्रेणी समानांतर श्रेढी में है।

सामान्यतः किसी समानांतर श्रेढी के **प्रथम पद को a,** सार्वअन्तर को d से तथा **nवें पद** को T_n या t_n से सूचित किया जाता है। समानांतर श्रेढी के पदों को निम्न रूप में व्यक्त करते हैं :

$$a, \ a+d, \ a+2d, \ a+3d, \ a+4d, \ldots$$

समानांतर श्रेढी को संक्षिप्त रूप में 'स० श्रे०' या 'A.P.' से सूचित किया जाता है।

1.2.2 समानांतर श्रेढी का nवाँ पद ज्ञात करना (To find the nth term of an A.P.) :

माना कि किसी समानांतर श्रेढी का प्रथम पद a, सार्वअन्तर d तथा nवाँ पद T_n है।

स्पष्टतः श्रेढी के पद $a, \ a+d, \ a+2d, \ \ldots$ होंगे।

प्रथम पद $= T_1 = a = a + 0 = a + (1-1)\,d$

द्वितीय पद $= T_2 = a + d = a + (2-1)\,d$

तृतीय पद $= T_3 = a + 2d = a + (3-1)\,d$

... ...

... ...

nth पद $= T_n = a + (n-1)\,d$

$\therefore$ स० श्रे० (A.P.) में **nवाँ पद $= T_n = a + (n-1)\,d$**

किसी A. P. का nवाँ पद उसके **व्यापक पद (General Term)** के नाम से भी जाना जाता है। यदि व्यापक पद ज्ञात हो तो $n = 1, 2, 3, \ldots$ आदि रखकर सभी पद लिखे जा सकते हैं।

जैसे : A.P. में 5वाँ पद $= T_5 = a + (5-1)\,d = a + 4d$

यदि किसी स० श्रे० का **अन्तिम पद** l हो, तो $l = T_n = a + (n-1)\,d$

1.2.3 किसी स० श्रे० (A.P.) का अन्त से nवाँ पद ज्ञात करना

मान लिया स० श्रे० का प्रथम पद $= a$; सार्वअन्तर $= d$; अंतिम पद $= l$

$\therefore$ दी गई स० श्रे० $a, \ a+d, \ a+2d, \ldots \ l-2d, \ l-d, \ l$ होगी।

अब अन्तिम पद $= l = l + 0 \times d = l + (1-1)\,d$

अन्त से दूसरा पद $= l - d = l - (2-1)\,d$

अन्त से तीसरा पद $= l - 2d = l - (3-1)\,d$

$\therefore$ **अन्त से nवाँ पद $= l - (n-1)\,d$**

1.3 स० श्रेढी में n पदों का योग ज्ञात करना (To find sum of n terms in A.P.)

मान लिया दी गई स० श्रे० का प्रथम पद $= a$

सार्वअन्तर $= d$, nवाँ पद $= T_n = l$ एवं n पदों का योग $= S$

तो
$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + \ldots . + (l-2d) + (l-d) + l \qquad \ldots(1)$$

अब पदों को विपरीत क्रम में रखने पर

$$S = l + (l-d) + (l-2d) + \ldots . + \ldots . + (a+2d) + (a+d) + a \qquad \ldots(2)$$

(1) तथा (2) को जोड़ने पर

$$2S = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \ldots n \text{ पदों तक} = n\,(a+l)$$

$$\therefore \quad \boxed{S = \frac{n}{2}(a+l)}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)\,d] = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

इस तरह स० श्रे० में n पदों का योग

$$S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. (i) श्रेढी $3x, 5x, 7x, \ldots$ का nवाँ पद ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]**

(ii) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$ का 10वाँ पद ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]**

हल : (i) दी गई श्रेढी $3x, 5x, 7x, \ldots$

यह श्रेढी स० श्रे० में है, जिसका प्रथम पद $= a = 3x$

$\therefore$ सार्वअन्तर $= d = 5x - 3x = 7x - 5x = \ldots = 2x$

$\therefore$ $T_n = a + (n-1)d = 3x + (n-1)2x = 3x + 2nx - 2x = x(1 + 2n)$ **उत्तर**

(ii) दिया गया अनुक्रम $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$

अत: $a = -\frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$, $n = 10$ $\quad \therefore T_{10} = -\frac{1}{2} + (10-1) \times 1 = -\frac{1}{2} + 9 = \frac{17}{8} = 8\frac{1}{2}$ **उत्तर**

उदाहरण 2. (i) समानांतर श्रेढी $3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$ का कौन सा पद $-168\frac{1}{2}$ है ? **[उ० प्र० डिप्लोमा 2000]**

(ii) यदि दो श्रेणियाँ $9 + 7 + 5 + \ldots$ तथा $15 + 12 + 9 + \ldots$ के nवें पद समान हैं, तो n का मान ज्ञात करें।

हल : (i) दी गई श्रेढी $3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

यहाँ $\quad a = 3\frac{1}{2}$, $d = 1\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} = -2$

माना nवाँ पद $-168\frac{1}{2}$ है, अर्थात् $T_n = -168\frac{1}{2}$

दी गई शर्तों से $-168\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} + (n-1)(-2)$ $\quad [\because T_n = a + (n-1)d]$

या $\quad -168\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} - 2 = -2n$

अर्थात् $\quad -2n = -174 \quad \therefore \quad n = 87$

$\therefore$ श्रेढी का 87वाँ पद $-168\frac{1}{2}$ है। **उत्तर**

(ii) दी गई प्रथम श्रेणी $9 + 7 + 5 + \ldots$ स० श्रे० में है

यहाँ $a = 9$, nवाँ पद $= T_n$ तथा $d = 7 - 9 = -2$

$$\therefore \quad T_n = a + (n-1)d = 9 + (n-1)(-2)$$
$$= 9 - 2n + 2 = 11 - 2n \quad \ldots(1)$$

द्वितीय स० श्रे० $15 + 12 + 9 + \ldots$

यहाँ $\quad a = 15$, nवाँ पद $= T_n$ तथा $d = 12 - 15 = -3$

$\therefore \quad T_n = a + (n-1)d = 15(n-1)(-3) = 15 - 3n + 3 = 18 - 3n \quad \ldots(2)$

दी गई शर्तों से (1) तथा (2) बराबर हैं।

$\therefore \quad 11 - 2n = 18 - 3n$ या $3n - 2n = 18 - 11$ या $n = 7$

$\therefore$ दोनों श्रेणियों के 7वें पद बराबर होंगे। **उत्तर**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

उदाहरण 3. किसी स० श्रे० का तीसरा पद इसके पहले पद का चार गुना है तथा छठा पद 17 है तो श्रेणी ज्ञात कीजिए। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]**

हल : माना कि स० श्रे० का प्रथम पद $t_1 = a$ तथा सार्वअन्तर $= d$ है।

दिया गया है $t_3 = 4t_1 = 4a$ तथा $t_6 = 17$

अत:
$$a + 2d = 4a \quad \ldots(1)$$
$$a + 5d = 17 \quad \ldots(2)$$

(1) से $2d = 4a - a = 3a \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3}{2}a$

(2) में d का मान रखने पर $a + 5 \times \frac{3}{2}a = 17$ या $\frac{2a + 15a}{2} = 17$

या $17a = 34 \quad \therefore \quad a = \frac{34}{17} = 2 \quad \therefore \quad d = \frac{3}{2} \times 2 = 3$

$\therefore$ स० श्रे० $= a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots = 2 + 5 + 8 + \ldots$

उदाहरण 4. यदि $a + 1, 3a$ तथा $4a + 2$ स० श्रे० में हैं तो a का मूल्य ज्ञात कीजिए। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]**

$\therefore$ **हल :** दिया है $a + 1, 3a, 4a + 2$ स० श्रे० में हैं।

सार्वअन्तर $= 3a - (a + 1) = (4a + 2) - 3a$

या $3a - a - 1 = 4a + 2 - 3a$ या $2a - 1 = a + 2 \quad \Rightarrow \quad a = 3$ **उत्तर**

उदाहरण 5. किसी समानांतर श्रेढी का pवाँ पद q तथा qवाँ पद p है, तो उसका $(p + q)$वाँ पद बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1986, 87 S]**

हल : माना श्रेणी का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d है तो दी गई शर्तों से

pवाँ पद $= a + (p - 1)d = q \quad \ldots(1)$

qवाँ पद $= a + (q - 1)d = p \quad \ldots(2)$

(1) में से (2) को घटाने पर

$$\{(p - 1) - (q - 1)\}d = q - p \quad \Rightarrow \quad \{p - 1 - q + 1\}d = q - p$$

या $\{p - q\}d = q - p \quad \Rightarrow \quad d = \frac{q - p}{p - q} = \frac{-(p - q)}{p - q} = -1$

(1) में यह मान रखने पर $a + (p - 1)(-1) = q \quad \Rightarrow \quad a = q + p - 1$

$(p + q)$ वाँ पद $= a + (p + q - 1)d$

$= (q + p - 1) + (p + q - 1)(-1)$ [a तथा d का मान रखने पर]

$= q + p - 1 - p - q + 1 = 0$ **उत्तर**

उदाहरण 6. यदि स० श्रे० के pवें पद का p गुना, qवें पद के q गुना के बराबर हो तो श्रेणी का $(p + q)$वाँ पद ज्ञात करें।

हल : माना श्रेणी का प्रथम पद $= a$; सार्वअन्तर $= d$ तथा pवाँ पद $= T_p$

qवाँ पद $= T_q$ तथा $(p + q)$वाँ पद $= T_{p+q}$

प्रश्नानुसार, $pT_p = qT_q$

$$p[a + (p - 1)d] = q[a + (q - 1)d]$$

या $pa + p(p - 1)d = qa + q(q - 1)d$

या $\{p^2 - p - q^2 + q\}d = (q - p)a$

या $\{p^2 - q^2 - (p - q)\}d = (q - p)a$

या $\{(p + q)(p - q) - (p - q)\}d = (q - p)a$

या $\{(p - q)(p + q - 1)\}d = (q - p)a$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

या $$(p+q-1)\,d = \frac{q-p}{p-q}\,a = -a$$

या $$a+(p+q-1)\,d = 0$$

अत: $T_{p+q} = a+(p+q-1)\,d = 0$ **उत्तर**

उदाहरण 7. सिद्ध कीजिए कि किसी समानांतर श्रेणी के प्रारम्भ तथा अन्त से बराबर दूरी पर स्थित पदों का योग हमेशा स्थिर होता है।

हल : मान लिया स० श्रेणी का प्रथम पद $=a$, सार्वअन्तर $=d$ तथा अंतिम पद $=n$वाँ पद $=l$

अब प्रारम्भ से nवाँ पद $=t_n = a+(n-1)\,d$

अन्त से nवाँ पद $=T_n = l+(n-1)(-d)$ [$\because$ अन्त से सार्वअन्तर $=-d$, प्रथम पद $=l$]

$\therefore$ $t_n + T_n = a+(n-1)\,d + l-(n-1)\,d$

$= a+l =$ प्रथम पद + अंतिम पद

यह n के सभी मानों के लिए सत्य है।

अत: प्रारंभ तथा अन्त से बराबर दूरियों पर स्थित पदों का योग प्रथम तथा अंतिम पदों के योग के बराबर होगा जो कि एक स्थिर राशि है। **इति सिद्धम्**

उदाहरण 8. (i) श्रेणी $2+4+6+\ldots+2n$ के n पदों का योग बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]**

(ii) सिद्ध करें कि निम्नलिखित श्रेणी स० श्रे० है तथा इस श्रेणी के 50 पदों का योग ज्ञात करें :

$$\frac{4}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} + \frac{8}{\sqrt{2}} + \ldots$$

हल : (i) यहाँ प्रथम पद $=2$, सार्वअन्तर $=4-2=2$ तथा अंतिम पद $=l=2n$

अब स० श्रेणी में n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{n}{2}(2+2n) = \frac{n}{2}\times 2(1+n) = n\,(n+1)$ **उत्तर**

(ii) दी गई श्रेणी $\frac{4}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} + \frac{8}{\sqrt{2}} + \ldots$

यहाँ $T_1 = \frac{4}{\sqrt{2}},\ T_2 = 3\sqrt{2},\ T_3 = \frac{8}{\sqrt{2}}$

अब $$T_2 - T_1 = 3\sqrt{2} - \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}} = \frac{6-4}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

तथा $$T_3 - T_2 = \frac{8}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2} = \frac{8-3\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8-6}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$\therefore$ $$T_2 - T_1 = T_3 - T_2 = \sqrt{2}$$

$\therefore$ दी गई श्रेणी स० श्रे० में है।

अब $$a = \frac{4}{\sqrt{2}},\ d = \sqrt{2},\ n = 50$$

$\therefore$ $$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)\,d] = \frac{50}{2}\left[2\times\frac{4}{\sqrt{2}} + (50-1)\sqrt{2}\right]$$

$$= 25\,[4\sqrt{2} + 49\sqrt{2}] = 25\times 53\sqrt{2} = 1325\sqrt{2}$$ **उत्तर**

उदाहरण 9. श्रेणी $39, 33, 27, \ldots$ के कितने पदों का योग 144 है ? दो उत्तरों के कारण बतायें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1993]

हल : यहाँ प्रथम पद $=39$, सार्वअन्तर $=33-39=-6$ तथा n पदों का योग $=S_n = 144$

$\therefore$ $144 = \frac{n}{2}[2\times 39 + (n-1)(-6)]$

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$$=\frac{n}{2}[78-6n+6]=\frac{n}{2}[84-6n]=n\times[42-3n]=42n-3n^2$$

$\Rightarrow \quad 3n^2-42n+144=0 \quad \Rightarrow \quad n^2-14n+48=0$

$\Rightarrow \quad n^2-8n-6n+48=0 \quad \Rightarrow \quad n(n-8)-6(n-8)=0$

$\Rightarrow \quad (n-6)(n-8)=0 \quad \therefore \quad n-6=0$ या $n-8=0 \quad \therefore \quad n=6$ या $n=8$

अर्थात् दी गई स० श्रेणी के 6 तथा 8 पदों का योग 144 होगा चूँकि सार्वअन्तर d, –ve है। अत: 7वें तथा 8वें पद का योग शून्य होगा। इसीलिए श्रेणी के पदों के दो उत्तर प्राप्त हुए हैं।

उदाहरण 10. किसी समानांतर श्रेढी के 40 पदों का योग 430 है तथा 60 पदों का योग 945 है, तो उसका 20वाँ पद ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1992]

हल : माना दी गई स० श्रे० का प्रथम पद $=a$, सार्वअन्तर $=d$

अब प्रश्न से, $S_{40}=430, S_{60}=945$

अर्थात्
$$S_{40}=\frac{40}{2}[2a+(40-1)d]=430$$
$$S_{60}=\frac{60}{2}[2a+(60-1)d]=945$$

या
$$2a+39d=\frac{430}{20}=\frac{43}{2} \quad \ldots(1)$$
$$2a+59d=\frac{945}{30}=\frac{63}{2} \quad \ldots(2)$$

(1) तथा (2) को हल करने पर $a=1, d=\frac{1}{2}$

$\therefore$ 20वाँ पद $=T_{20}=a+(n-1)d=1+(20-1)\times\frac{1}{2}=1+\frac{19}{2}=\frac{21}{2}=10.5$ **उत्तर**

उदाहरण 11. यदि स० श्रेणी में प्रथम n पदों का योग $2n+3n^2$ है तो उसका rवाँ पद बतायें।

हल : मान लिया स० श्रेणी के n पदों का योग S_n है

तो प्रश्न से,
$$S_n=2n+3n^2$$

$\therefore$
$$S_{n-1}=2(n-1)+3(n-1)^2$$
$$=(n-1)[2+3(n-1)]=(n-1)[2+3n-3]$$
$$=(n-1)(3n-1)=3n^2-4n+1$$

$\therefore$
$$t_n=S_n-S_{n-1}$$
$$=(2n+3n^2)-(3n^2-4n+1)=6n-1$$

$\therefore \quad t_r=6r-1$ [n की जगह r रखने पर] **उत्तर**

उदाहरण 12. किसी समानांतर श्रेणी के प्रथम m पदों का योग n है तथा प्रथम n पदों का योग m है तो दिखाइए कि श्रेणी के $(m+n)$ पदों का योग $-(m+n)$ है।

हल : माना स० श्रेणी का प्रथम पद $=a$; सार्वअन्तर $=d$

प्रश्न से, $S_m=n, S_n=m$

$\therefore$
$$\frac{m}{2}[2a+(m-1)d]=n \quad \ldots(1)$$
$$\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]=m \quad \ldots(2)$$

$$\frac{m}{2}[2a+(m-1)d]-\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]=n-m$$ [(1) में से (2) को घटाने पर]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

या $$2a \times \frac{m}{2} + \frac{m^2}{2}d - \frac{m}{2}d - \frac{n}{2} \times 2a - \frac{n^2}{2}d + \frac{n}{2}d = n - m$$

या $$\left(\frac{m}{2} - \frac{n}{2}\right)2a - \left(\frac{m}{2} - \frac{n}{2}\right)d + \left(\frac{m^2}{2} - \frac{n^2}{2}\right)d = n - m$$

या $$\left(\frac{m-n}{2}\right)(2a - d) + \left\{\frac{(m+n)(m-n)}{2}\right\}d = n - m$$

या $$\frac{m-n}{2}\{(2a-d) + (m+n)d\} = n - m$$

या $$2a - d + (m+n)d = \frac{2(n-m)}{m-n}$$ या $$2a + (m+n-1)d = -2$$

$$\therefore \quad S_{m+n} = \frac{m+n}{2}[2a + (m+n-1)d] = \frac{m+n}{2} \times (-2) = -(m+n)$$ **उत्तर**

उदाहरण 13. यदि किसी स० श्रेणी के m तथा n पदों के योग का अनुपात $m^2 : n^2$ हो तो दिखायें कि उनका सार्वअन्तर प्रथम पद का दूना है।

हल : माना प्रथम पद $= a$, सार्वअन्तर $= d$

प्रश्न से $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$ जहाँ $S_m = m$ पदों का योग; $S_n = n$ पदों का योग

या $$\frac{\frac{m}{2}[2a + (m-1)d]}{\frac{n}{2}[2a + (n-1)d]} = \frac{m^2}{n^2}$$ या $$\frac{2a + (m-1)d}{2a + (n-1)d} = \frac{m^2}{n^2} \times \frac{n}{m} = \frac{m}{n}$$

या $$n[2a + (m-1)d] = m[2a + (n-1)d]$$ [तिर्यक गुणन से]

या $$2an + mnd - nd = 2am + mnd - md$$

या $$2a(n-m) - d(n-m) = 0$$ या $$(n-m)(2a-d) = 0$$

$\therefore$ $$n - m = 0 \text{ या } 2a - d = 0$$

यहाँ $n - m = 0 \Rightarrow n = m$, यह संभव नहीं है $[\because m \neq n]$

$\therefore$ $$2a - d = 0 \quad \therefore d = 2a$$

अर्थात् सार्वअन्तर $= 2 \times$ प्रथम पद

इति सिद्धम्

उदाहरण 14. यदि दो समानांतर श्रेणियों के n पदों के योगों का अनुपात $(7n+1) : (4n+27)$ हो, तो उनके 11वें पदों का अनुपात ज्ञात करें।

हल : माना प्रथम श्रेणी का प्रथम पद a_1 सार्वअन्तर d_1 तथा द्वितीय श्रेणी का प्रथम पद a_2 तथा सार्वअन्तर d_2 है तथा उनके n पदों के योग क्रमशः S_n तथा s_n हैं।

प्रश्न से, $$\frac{S_n}{s_n} = \frac{7n+1}{4n+27} \Rightarrow \frac{\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2 + (n-1)d_2]} = \frac{7n+1}{4n+27}$$

$$\Rightarrow \frac{2a_1 + (n-1)d_1}{2a_2 + (n-1)d_2} = \frac{7n+1}{4n+27} \Rightarrow \frac{2\left[a_1 + \frac{n-1}{2}d_1\right]}{2\left[a_2 + \frac{n-1}{2}d_2\right]} = \frac{7n+1}{4n+27}$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \qquad \frac{a_1 + \frac{n-1}{2} d_1}{a_2 + \frac{n-1}{2} d_2} = \frac{7n+1}{4n+27} \qquad \ldots(1)$$

अब $\dfrac{\text{प्रथम श्रेणी का 11 वाँ पद}}{\text{द्वितीय श्रेणी का 11 वाँ पद}} = \dfrac{a_1 + (11-1) d_1}{a_2 + (11-1) d_2}$ ...(2)

(1) का बायाँ पक्ष (2) के समान होगा यदि (1) में

$\frac{n-1}{2} = 10$ हो या $n-1 = 20$ या $n = 21$ हो।

(1) में $n = 21$ रखने पर $\dfrac{a_1 + 10d_1}{a_2 + 10d_2} = \dfrac{7 \times 21 + 1}{4 \times 21 + 1} = \dfrac{147+1}{84+27} = \dfrac{148}{111} = \dfrac{4}{3}$

$\therefore$ प्रथम श्रेणी का 11वाँ पद : द्वितीय श्रेणी का 11वाँ पद $= 4:3$

उदाहरण 15. यदि एक समानांतर श्रेढी के $n, 2n$ तथा $3n$ पदों के योगफल S_1, S_2 व S_3 हों तो सिद्ध करें कि $S_3 = 3(S_2 - S_1)$. **[उ० प्र० डिप्लोमा 2002]**

हल : माना स० श्रेणी का प्रथम पद $= a$ तथा सार्वअन्तर $= d$

तो प्रश्न से, $S_1 = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$, $S_2 = \frac{2n}{2}[2a + (2n-1)\,d]$ तथा $S_3 = \frac{3n}{2}[2a + (3n-1)\,d]$

अब $\text{R.H.S.} = 3(S_2 - S_1) = 3\left[\frac{2n}{2}\{2a + (2n-1)\,d\} - \frac{n}{2}\{2a + (n-1)\,d\}\right]$

$$= \frac{3n}{2}[2\{2a + (2n-1)\,d\} - \{(2a + (n-1)\,d\}]$$

$$= \frac{3n}{2}[4a + (4n-2)\,d - 2a - (n-1)\,d]$$

$$= \frac{3n}{2}[2a + (4n - 2 - n + 1)\,d] = \frac{3n}{2}[2a + (3n-1)\,d] = S_3$$ **इति सिद्धम्**

उदाहरण 16. प्रथम 1000 संख्याओं में से उन संख्याओं का योग ज्ञात करें जो 2 या 5 से विभाज्य हैं।

हल : 2 तथा 5 का ल० स० (LCM) = 10

2 से विभाज्य संख्याओं में वे संख्यायें भी शामिल हैं जो 10 से विभाज्य हैं । इसी तरह 5 से विभाज्य संख्याओं में वे संख्यायें भी शामिल हैं, जो 10 से विभाज्य हैं। इस तरह 10 से विभाज्य संख्यायें 2 बार आयेंगे।

अत: यदि 2 तथा 5 से विभाज्य संख्याओं का योग क्रमश: S_2 तथा S_5 से तथा 10 से विभाज्य संख्याओं का योग S_{10} से दिए जाएँ, तो

1 से 1000 तक 2 या 5 से विभाज्य संख्याओं का योग

$$S = S_2 + S_5 - S_{10}$$
$$= (2 + 4 + 6 \ldots + 1000) + (5 + 10 + 15 + \ldots + 1000) - (10 + 20 + 30 + \ldots + 1000)$$
$$= 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 500) + 5(1 + 2 + 3 + \ldots + 200) - 10(1 + 2 + 3 + \ldots + 100)$$
$$= 2 \times \frac{500 \times 501}{2} + 5 \times \frac{200 \times 201}{2} - 10 \times \frac{100 \times 101}{2} \qquad \left[\because S_n = \frac{n(n+1)}{2}\right]$$
$$= 500 \times 501 + 5 \times 100 \times 201 - 5 \times 100 \times 101$$
$$= 250500 + 100500 - 50500 = 351000 - 50500 = 300500$$ **उत्तर**

उदाहरण 17. यदि किसी स० श्रे० के p, q तथा r पदों के योग क्रमश: a, b, c हों, तो सिद्ध करें

$$\frac{a}{p}(q-r) + \frac{b}{q}(r-p) + \frac{c}{r}(p-q) = 0$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2001, 1993]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

हल : माना स० श्रे० का प्रथम पद $= x$ तथा सार्वअन्तर $= y$

प्रश्न से, $a = \frac{p}{2}[2x + (p-1)y]$; $b = \frac{q}{2}[2x + (q-1)y]$; $c = \frac{r}{2}[2x + (r-1)y]$

या
$$\frac{2a}{p} = 2x + (p-1)y \quad \ldots(1)$$
$$\frac{2b}{q} = 2x + (q-1)y \quad \ldots(2)$$
$$\frac{2c}{r} = 2x + (r-1)y \quad \ldots(3)$$

अब (1), (2) तथा (3) में क्रमशः $q-r$, $r-p$ तथा $p-q$ से गुणा कर जोड़ने पर

$$\frac{2a}{p}(q-r) + \frac{2b}{q}(r-p) + \frac{2c}{r}(p-q)$$
$$= (q-r)[2x + (p-1)y] + (r-p)[2x + (q-1)y] + (p-q)[2x + (r-1)y]$$
$$= 2x[q-r+r-p+p-q] + [(q-r)(p-1) + (r-p)(q-1) + (p-q)(r-1)]y$$
$$= 2x \times 0 + [pq - q - pr + r + qr - r - pq + p + pr - p - qr + q]y$$
$$= 0 + 0 = 0$$

$\therefore \quad \frac{a}{p}(q-r) + \frac{b}{q}(r-p) + \frac{c}{r}(p-q) = 0$ **इति सिद्धम्**

स्मरणीय उपयोगी सूत्र

1. किसी स० श्रे० का प्रथम पद a तथा सार्वअन्तर d हो तो श्रेणी के पद $a, a+d, a+2d, \ldots$ से दिए जायेंगे।
2. स० श्रे० में $T_2 - T_1 = T_3 - T_2 = \ldots = d$ (सार्वअन्तर)
3. (i) प्रारंभ से श्रेणी का nवाँ पद =
   $T_n =$ स० श्रे० का व्यापक पद $= a + (n-1)d$
   (ii) अन्त से nवाँ पद $= l - (n-1)d$, जहाँ l अंतिम पद है।
4. स० श्रे० में n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}(a+l) = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
5. यदि S_n स० श्रे० में n पदों का योग तथा T_n nवाँ पद हो तो $T_n = S_n - S_{n-1}$
6. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

प्रश्नावली 1.1

1. (i) श्रेणी $4, 6, 8, \ldots$ का 17वाँ पद ज्ञात करें।
   (ii) श्रेणी $1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \ldots$ का 15वाँ पद ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2007]**
   (iii) श्रेणी $\frac{1}{n^2}, \frac{1+n^2}{n^2}, \frac{1+2n^2}{n^2}, \ldots$ का nवाँ पद ज्ञात करें।
   (iv) श्रेणी $3a-b, 4a, 5a+b, \ldots$ का छठा पद ज्ञात करें।
   (v) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$ का 10 वाँ पद ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]**
   (vi) श्रेणी $2, 6, 10, \ldots, 86$ का अन्त से 12वाँ पद बतायें।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

(vii) श्रेणी $2+4+6+8+\ldots$ का nवाँ पद ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2015, 17(SB), 17(O)]**

(viii) श्रेणी $2+4+6+8+\ldots$ का 10वाँ पद ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]**

2. (i) दी गई श्रेणी $68+64+60+\ldots$ का कौन सा पद -8 है ?

(ii) श्रेढी $\frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, \ldots, 3$ में कितने पद हैं ?

(iii) समानांतर श्रेढी $3\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$ का कौन-सा पद $-168\frac{1}{2}$ है ? **[उ० प्र० डिप्लोमा 2000]**

3. (i) यदि किसी स० श्रे० के तीसरे तथा सातवें पद क्रमश: 18 और 30 हैं तो श्रेणी प्राप्त करें।

(ii) एक स० श्रे० का तीसरा पद 7 है तथा सातवाँ पद इसके तीसरे पद के तिगुने से 2 अधिक है, तो उसका प्रथम पद सार्वअन्तर ज्ञात करें।

(iii) किसी स० श्रे० का तीसरा पद इसके पहले पद का चार गुना है तथा छठा पद 17 है तो श्रेणी ज्ञात कीजिए। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]**

4. (i) किसी स० श्रेणी का pवाँ पद $\frac{1}{q}$ तथा qवाँ पद $\frac{1}{p}$ हो तो सिद्ध करें कि pqवाँ पद 1 होगा।

(ii) किसी समानांतर श्रेढी का pवाँ पद q तथा qवाँ पद p है, तो उसका $(p+q)$वाँ पद बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1986, 87 S]**

5. (i) यदि $2k+3$, $3k+1$ तथा $5k+3$ स० श्रेणी में हों तो k का मान बतायें।

(ii) a के किस मान के लिए $a, a+4, 3a$ समानांतर श्रेढी में हैं ?

(iii) सिद्ध करें कि $(a-b)^2, a^2+b^2$ तथा $(a+b)^2$ स० श्रे० में हैं।

6. किसी समानांतर श्रेढी के pवें, qवें तथा rवें पद क्रमश: a, b, c हैं, तो सिद्ध करें $p(b-c)+q(c-a)+r(a-b)=0$

7. सिद्ध करें कि निम्नलिखित श्रेणी स० श्रे० है तथा इस श्रेणी के 50 पदों का योग ज्ञात करें :

$$\frac{4}{\sqrt{2}}+3\sqrt{2}+\frac{8}{\sqrt{2}}+\ldots$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]

8. निम्न स० श्रेणियों के योग ज्ञात करें :

(i) $5+8+11+14+\ldots$ के 22 पदों का योगफल ज्ञात करें।

(ii) $1+4+7+\ldots$ के 18 पदों का योग ज्ञात करें।

(iii) $2+5\frac{1}{2}+9+12\frac{1}{2}+\ldots$ का 23वाँ पद तथा 23 पदों का योगफल ज्ञात करें।

(iv) $\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+\ldots$ के n पदों का योग ज्ञात करें।

(v) $(a+b)+2a+(3a-b)+\ldots$ के n पदों का योग ज्ञात करें।

9. निम्न श्रेणी का योग ज्ञात करें $92+90+88+\ldots+2$

10. (i) प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं (Natural Numbers) का योग ज्ञात करें।

(ii) श्रेणी $2+4+6+\ldots+2n$ के n पदों का योग बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]**

(iii) प्रथम n विषम प्राकृतिक संख्याओं (Odd Natural Numbers) का योग ज्ञात करें।

11. (i) श्रेणी $6+9+12+\ldots$ के कितने पदों का योग 81 है ? दुहरे उत्तर की व्याख्या कीजिए।

(ii) श्रेणी 32, 28, 24, ... के nपदों का योग 120 है तो n का मान ज्ञात करें।

12. (i) किसी स० श्रेणी का तीसरा पद 18 तथा सातवाँ पद 30 है तो श्रेणी के 20 पदों का योग ज्ञात करें।

(ii) किसी समानांतर श्रेढी के 15 पदों का योगफल शून्य है। यदि इसका चौथा पद 12 है, तो 12वाँ पद क्या होगा ?

(iii) किसी समानांतर श्रेढी के 40 पदों का योग 430 है तथा 60 पदों का योग 945 है, तो उसका 20वाँ पद ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1992]**

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

13. (i) यदि स० श्रेणी को n वाँ पद $2n+3$ हो तो श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2013]**

(ii) किसी स० श्रेणी के p पदों का योग p^2+10p हो तो श्रेणी के प्रथम चार पद तथा सार्व अन्तर ज्ञात करें।

14. यदि दो समानांतर श्रेणियों के प्रथम n पदों के योग का अनुपात $3n+8:7n+15$ हो तो श्रेणी के 12वें पदों का अनुपात बतायें।

15. यदि एक स० श्रेणी के प्रथम m तथा प्रथम n पदों के योगों का अनुपात $m^2:n^2$ हो तो सिद्ध करें mवाँ पद : nवाँ पद $=2m-1:2n-1$

16. यदि किसी स० श्रे० के प्रथम n पदों का योग शून्य है तो दिखायें कि अगले m पदों का योग $-\frac{am(m+n)}{n-1}$ है, जहाँ a श्रेणी का प्रथम पद है।

[**संकेत :** अगले m पदों का योग = प्रारंभ से $(m+n)$ पदों का योग − प्रारंभ से n पदों का योग तथा $S_n=0$ $\Rightarrow d=-\frac{2a}{n-1}$]

17. (i) यदि एक समानांतर श्रेढी के $n, 2n$ तथा $3n$ पदों के योगफल S_1, S_2 व S_3 हों तो सिद्ध करें कि

$$S_3=3(S_2-S_1)$$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2002]**

(ii) यदि n पदों वाली m समानांतर श्रेणियों के योग क्रमशः $S_1, S_2, S_3, \ldots S_m$ हों जिनके प्रथम पद एवं सार्वअन्तर (Common Difference) क्रमशः $1, 2, 3, \ldots m$ हों, तो सिद्ध करें कि

$$S_1+S_2+\ldots+S_m=\frac{1}{4}mn(m+1)(n+1).$$

18. यदि एक बहुभुज के अन्तःकोण स० श्रे० में हों तथा उनका सबसे छोटा कोण 120° तथा सार्वअन्तर 5 हो तो बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात करें।

[**संकेत :** बहुभुज के अन्तःकोणों का योग $=(2n-4)\frac{\pi}{2}$, प्रथम पद $=120°$, सार्वअन्तर $=5°$]

19. (i) 2 और 100 के बीच उन सभी विषम पूर्णांकों का योग ज्ञात करें जो 3 से विभाज्य हैं।

(ii) 1 से 100 तक उन पूर्णांकों का योग ज्ञात करें जो 2 या 5 से विभाज्य हैं।

(iii) 84 और 719 के बीच उन सभी पूर्णांकों का योग ज्ञात करें जो 5 से विभाज्य हैं।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1991]

20. किसी स० श्रे० का प्रथम पद a, द्वितीय पद b तथा अंतिम पद c हो, तो दिखायें कि श्रेणी का योग $\frac{(b+c-2a)(c+a)}{2(b-a)}$ होगा।

[**संकेत :** $d=b-a, c=a+(n-1)(b-a) \Rightarrow n=\frac{b+c-2a}{b-a}$]

21. एक समानांतर श्रेढी के p पदों का योग, q पदों के योग के बराबर है तो सिद्ध करें कि $p+q$ पदों का योग शून्य है।

22. किसी समानांतर श्रेणी के p पदों का योग q तथा q पदों का योग p है तो $p+q$ पदों का योग ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1996]

23. किसी स० श्रेणी का pवाँ पद $\frac{1}{q}$ तथा qवाँ पद $\frac{1}{p}$ है तो सिद्ध करें, pq पदों का योग $\frac{1}{2}(pq+1)$ होगा।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1997]

24. यदि किसी स० श्रे० का pवाँ पद a तथा qवाँ पद b हो, तो सिद्ध करें कि $(p+q)$ पदों का योग

$$\frac{p+q}{2}\left[a+b+\frac{a-b}{p-q}\right]$$ होगा।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

25. यदि किसी स० श्रे० के p, q तथा r पदों के योग क्रमशः a, b, c हों, तो सिद्ध करें

$$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0.$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2001, 1993]

उत्तरमाला

1. (i) 36 (ii) 6 (iii) $\frac{1+(n-1)n^2}{n^2}$ (iv) $8a+4b$ (v) $8\frac{1}{2}$ (vi) 42 (vii) $2n$ (viii) 20

2. (i) 20 (ii) 10 (iii) 87

3. (i) $12+15+18+\ldots$ (ii) प्रथम पद $=-1$, सार्वअन्तर $=4$ (iii) $2+5+8+\ldots$

4. (ii) 0

5. (i) -4 (ii) $a=4$ **7.** $1325\sqrt{2}$

8. (i) 803 (ii) 477 (iii) $t_{23}=79, S_{23}=931\frac{1}{2}$ (iv) $\frac{1}{2}(n-1)$

(v) $\frac{n}{2}[a(n+1)+b(3-n)]$ **9.** 2162

10. (i) $\frac{n(n+1)}{2}$ (ii) $n(n+1)$ (iii) n^2

11. (i) 6 (ii) 5 (iii) 2 **12.** $n=5$ या $n=12$

12. (i) 810 (ii) -12 (iii) $10\frac{1}{2}$

13. (i) $n(n+4)$ (ii) प्रथम चार पद 11, 13, 15, 17; सार्वअन्तर $=2$

14. 7 : 16 **18.** 9

19. (i) 867 (ii) 3050 (iii) 50,800 **22.** $-(p+q)$

1.4 समानांतर माध्य (Arithmetic Mean)

यदि तीन राशियाँ a, A तथा b स० श्रे० में हों, तो मध्य पद A को शेष दो राशियों a तथा b का समानांतर माध्य कहते हैं।

अब a, A तथा b स० श्रेणी में हैं

$$A-a=\text{सार्वअन्तर}=b-A \quad \text{या} \quad 2A=a+b \quad \therefore \quad A=\frac{a+b}{2}$$

अर्थात् दो राशियों a तथा b के बीच का समानांतर माध्य उनके योग का आधा होता है।

जैसे : 4 तथा 8 का समानांतर माध्य $\frac{4+8}{2}=6$ है।

1.4.1. दो दी गई राशियों के बीच n स० माध्य ज्ञात करना (To Insert n Arithmetic Means between Two Numbers)

मान लिया दी गई संख्यायें a तथा b हैं।

माना $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ इनके बीच n समानांतर माध्य (A. M.) है।

अर्थात् $a, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, b$ स० श्रे० में है।

माना इसका सार्वअन्तर d है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अब प्रथम पद $=T_1=a$; अंतिम पद $=T_{n+2}=b$

$$b=T_{n+2}=a+(n+2-1)\,d \Rightarrow b-a=(n+1)\,d$$

[∵ स० श्रे० के कुल पदों की संख्या $=n+2$]

$$d=\frac{b-a}{n+1}$$

∵ n समानांतर माध्य $x_1 . x_2, \dots x_n$ हैं जो क्रमश $a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)\,d$ से दिये जायेंगे।
अत: ये $a+\frac{b-a}{n+1}, a+\frac{2(b-a)}{n+1}, \dots, a+\frac{n(b-a)}{n+1}$ होंगे।

इस तरह $x_n=a+n\frac{b-a}{n+1}$ में $n=1, 2, \dots, n$ रखकर a तथा b के बीच n समानांतर माध्य ज्ञात किए जा सकते हैं।

1.4.2 दो राशियों के बीच के n समानांतर माध्यों का योग (Sum of n A.M.'s between Two Numbers)

माना दी गई राशियाँ a तथा b हैं तथा उनके बीच n समानांतर माध्य $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ हैं।
अत: $a, x_1, x_2, \dots x_n, b$ स० श्रे० में होंगे।
∴ $x_1, x_2, \dots, x_n$ भी समानांतर श्रेढी में होंगे।
अर्थात् $a+\frac{b-a}{n+1}, a+2\frac{b-a}{n+1}, \dots, a+n\frac{b-a}{n+1}$ स० श्रे० में होंगे। [धारा 1.4.(1) से]

$$\therefore \quad x_1+x_2+\dots+x_n=\frac{n}{2}[x_1+x_n] \qquad \left[\text{A.P. में } n \text{ पदों का योग } =\frac{n}{2}(a+l)\right]$$

$$=\frac{n}{2}\left[a+\frac{b-a}{n+1}+a+n\frac{b-a}{n+1}\right] \qquad \left[\because x_1=a+\frac{b-a}{n+1},\ x_n=a+n\frac{b-a}{n+1}\right]$$

$$=\frac{n}{2}\left[2a+\frac{(b-a)(1+n)}{n+1}\right]=\frac{n}{2}[2a+b-a]=\frac{n}{2}[a+b]=n\times\frac{a+b}{2}$$

$=n\times$ (a और b के बीच का समानांतर माध्य)

∴ a तथा b के बीच **n समानांतर माध्यों का योग** $= \boldsymbol{n\times A}$ **जहाँ** $\boldsymbol{A=\frac{a+b}{2}}$

जैसे : 5 तथा 11 के बीच 8 समानांतर माध्यों का योग $=8\times\frac{5+11}{2}=8\times 8=64$

1.5 समानांतर श्रेढी के महत्वपूर्ण गुण (Some Important Properties of A.P.)

1. यदि किसी स० श्रेढी के सभी पदों में एक ही राशि जोड़ी जाए या घटाई जाए तो इससे प्राप्त श्रेढी भी समानांतर श्रेढी में होती है तथा उसका सार्वअन्तर अपरिवर्तित रहेगा।
जैसे $5, 7, 9, 11, \dots$ स० श्रेढी में हैं, जिसका सार्वअन्तर 2 है
तो $5+3,\ 7+3, 9+3,\ 11+3 \dots$ स० श्रेढी में होंगे; अर्थात् $8, 10, 12, 14, \dots$ स० श्रेढी में होंगे।

2. किसी स० श्रेढी के सभी पदों में एक ही राशि से गुणा या भाग किया जाए तो प्राप्त श्रेढी भी स० श्रेढी में होती है, किंतु उस स० श्रेढी का सार्वअन्तर परिवर्तित हो जाता है।
जैसे $5, 7, 9, 11, \dots$ स० श्रेढी में हैं।
तो $3\times 5, 3\times 7, 3\times 9, 3\times 11, \dots$ स० श्रेणी में हैं अर्थात् 15, 21, 27, 33, ...भी स० श्रेढी में हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

टिप्पणी :

(i) स० श्रेढी में **तीन क्रमागत पद** $a-d, a, a+d$ लें।

(ii) स० श्रेढी में **चार क्रमागत पद** $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ लें।

(iii) स० श्रेढी में **पाँच क्रमागत पद** $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$ लें।

(iv) स० श्रेढी में **छः क्रमागत पद** $a-5d, a-3d, a-d, a+d, a+3d, a+5d$ लें।

अर्थात् यदि पदों की संख्या विषम हो तो मध्य पद a तथा सार्वअन्तर d रखते हुए अन्य पदों को लिखें और यदि पदों की संख्या सम हो तो मध्य पद $a-d$ तथा $a+d$ लें। तथा सार्वअन्तर $2d$ लेकर अन्य पदों को लिखें।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. $\frac{1}{2}$ तथा 3 के बीच 4 समानांतर माध्य डालें तथा उनका योग ज्ञात करें।

हल: माना x_1, x_2, x_3 तथा x_4 संख्याओं $\frac{1}{2}$ तथा 3 के बीच 4 समानांतर माध्य हैं।

अत: $\frac{1}{2}, x_1, x_2, x_3, x_4, 3$ स० श्रे० में होंगे। $\quad \therefore \quad a=\frac{1}{2}, \quad t_6=3$

माना सार्वअन्तर d है, अब $3=\frac{1}{2}+(6-1)d=\frac{1}{2}+5d$ $\quad [\because t_n=a+(n-1)d]$

या $5d=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \quad \therefore d=\frac{5}{2\times 5}=\frac{1}{2}$

$\therefore \quad x_1=a+d=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1; \; x_2=a+2d=\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

$x_3=a+3d=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{4}{2}=2; \; x_4=a+4d=\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

$\therefore$ स० माध्यों का योग $=x_1+x_2+x_3+x_4=1+\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}=7$

नोट :

• स० माध्यों का योग $=\frac{n(a+b)}{2}=\frac{4}{2}\left(\frac{1}{2}+3\right)=\frac{4}{2}\times\frac{7}{2}=7$

उदाहरण 2. n के किस मान के लिए a तथा b के बीच का समानांतर माध्य $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ होगा ?

हल : $\because \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ संख्याओं a तथा b का समानांतर माध्य है

$\therefore \quad \frac{a+b}{2}=\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ $\quad [\because a$ तथा b का स० माध्य $\frac{a+b}{2}]$

या $(a+b)(a^n+b^n)=2(a^{n+1}+b^{n+1})$

या $a^{n+1}+ab^n+a^nb+b^{n+1}=2a^{n+1}+2b^{n+1}$

या $a^{n+1}+b^{n+1}-ab^n-a^nb=0$ $\quad$ [पदांतर से]

या $a^{n+1}-a^nb+b^{n+1}-ab^n=0$

या $a^n(a-b)-b^n(a-b)=0$ या $(a-b)(a^n-b^n)=0$

$\therefore \quad a-b=0 \Rightarrow a=b$ जो संभव नहीं है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$\therefore \quad a^n - b^n = 0 \Rightarrow a^n = b^n \Rightarrow \dfrac{a^n}{b^n} = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = 1 = \left(\dfrac{a}{b}\right)^0 \quad \therefore \ n = 0$ **उत्तर**

उदाहरण 3. किसी स० श्रेढी में तीन संख्याओं का योग 27 है तथा उनका गुणनफल 504 है। उन संख्याओं को ज्ञात करें।

हल : माना स० श्रे० में तीन संख्यायें $a-d, a, a+d$ हैं।

प्रश्न से, इनका जोड़ $a-d+a+a+d=27 \Rightarrow 3a=27 \therefore a=9$ ...(1)

तथा गुणनफल $(a-d)\,a\,(a+d)=504 \Rightarrow a(a^2-d^2)=504$

$\Rightarrow \quad 9(81-d^2)=504 \Rightarrow 81-d^2=56$

$\Rightarrow \quad d^2=81-56=25 \Rightarrow d=\pm 5$

$\therefore$ $d=5$ लेने पर संख्यायें $a-d=9-5=4,\ a=9,\ a+d=9+5=14$

तथा $d=-5$ लेने पर संख्यायें $a-d=14, a=9, a+d=4$

अंत: संख्यायें 4, 9, 14 अथवा 14, 9, 4 हैं। **उत्तर**

उदाहरण 4. यदि a, b, c समानांतर श्रेढी में हैं तो सिद्ध करें कि

(i) $\dfrac{1}{bc}, \dfrac{1}{ca}, \dfrac{1}{ab}$ समान्तर श्रेढी में हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]**

(ii) $b+c, c+a$ तथा $a+b$ स० श्रेढी में हैं।

(iii) $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right), b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right), c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ स० श्रेढी में हैं।

हल : (i) माना $\dfrac{1}{bc}, \dfrac{1}{ca}, \dfrac{1}{ab}$ स० श्रेढी में हैं

$\therefore \quad \dfrac{abc}{bc}, \dfrac{abc}{ca}, \dfrac{abc}{ab}$ स० श्रेढी में होंगे। [प्रत्येक पद में abc से गुणा करने पर]

अर्थात् a, b, c स० श्रेढी में हैं।

(ii) माना $b+c, c+a$ तथा $a+b$ स० श्रेढी में हैं।

$\therefore \quad (b+c)-(a+b+c), (c+a)-(a+b+c), (a+b)-(a+b+c)$ स० श्रे० में होंगे।

[सभी पदों में से $a+b+c$ घटाने पर]

अर्थात् $-a, -b, -c$ स० श्रेढी में होंगे।

$(-1)\times(-a), (-1)\times(-b), (-1)\times(-c)$ स० श्रे० में होंगे। [(−1) से गुणा करने पर]

अर्थात् a, b, c स० श्रेढी में होंगे।

(iii) a, b, c स० श्रे० में हैं $\Rightarrow \dfrac{abc}{bc}, \dfrac{abc}{ca}, \dfrac{abc}{ab}$ स० श्रे० में हैं

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{bc}, \dfrac{1}{ca}, \dfrac{1}{ab}$ स० श्रे० में हैं [प्रत्येक पद में abc से भाग देने पर]

$\Rightarrow \quad \dfrac{ab+bc+ca}{bc}, \dfrac{bc+ca+ab}{ac}, \dfrac{ca+ab+bc}{ab}$ स० श्रे० में हैं

[प्रत्येक पद में $ab+bc+ca$ से गुणा करने पर]

$\Rightarrow \quad \dfrac{ab+ca}{bc}+1, \dfrac{bc+ab}{ac}+1, \dfrac{ca+bc}{ab}+1$ स० श्रे० में हैं

$\Rightarrow \quad \dfrac{a(b+c)}{bc}, \dfrac{b(c+a)}{ac}, \dfrac{c(a+b)}{ab}$ स० श्रे० में हैं $\Rightarrow a\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{b}\right), b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right), c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$ स० श्रे० में हैं।

उदाहरण 5. यदि a^2, b^2, c^2 स० श्रे० में हैं तो सिद्ध करें कि $\dfrac{1}{b+c}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{a+b}$ स० श्रेढी में होंगे।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1997]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

हल : माना $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ स० श्रेढी में हैं।

$\therefore \quad \frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a}$

या $\quad \frac{b-a}{b+c} = \frac{c-b}{a+b}$

या $\quad \frac{b+c-c-a}{(c+a)(b+c)} = \frac{a+c-a-b}{(a+b)(c+a)}$

या $\quad (b-a)(b+a) = (c-b)(c+b)$

अर्थात् $\quad b^2 - a^2 = c^2 - b^2 \quad \therefore \; a^2, b^2, c^2$ स० श्रेढी में हैं।

उदाहरण 6. $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ स० श्रेढी में हैं तो सिद्ध करें कि $\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}$ स० श्रेढी में होंगे।

हल : $\because \quad (b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ स० श्रेढी में हैं।

$\therefore \quad (c-a)^2 - (b-c)^2 = (a-b)^2 - (c-a)^2$

या $\quad (c-a+b-c)(c-a-b+c) = (a-b+c-a)(a-b-c+a)$

या $\quad (b-a)(2c-a-b) = (c-b)(2a-b-c)$

या $\quad -(a-b)(c-a-b+c) = -(b-c)(a-b-c+a)$ **[Note]**

या $\quad (a-b)[(c-a)-(b-c)] = (b-c)[(a-b)-(c-a)]$

या $\quad \frac{(a-b)[(c-a)-(b-c)]}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(b-c)[(a-b)-(c-a)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

[दोनों ओर से $(a-b)(b-c)(c-a)$ से भाग देने पर]

या $\quad \left[\frac{1}{b-c} - \frac{1}{c-a}\right] = \left[\frac{1}{c-a} - \frac{1}{a-b}\right]$

या $\quad -\left[\frac{1}{c-a} - \frac{1}{b-c}\right] = -\left[\frac{1}{a-b} - \frac{1}{c-a}\right]$

या $\quad \frac{1}{c-a} - \frac{1}{b-c} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{c-a}$

$\therefore \quad \frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}$ स० श्रेढी में हैं।

स्मरणीय उपयोगी सूत्र

1. दो संख्याओं a तथा b के बीच समानांतर माध्य (A. M.)

(i) एक समानांतर माध्य $= \frac{a+b}{2}$

(ii) n समानांतर माध्य $= a + \frac{b-a}{n+1}, \; a + 2\frac{b-a}{n+1}, \ldots, \; a + n\frac{b-a}{n+1}$

(iii) rवाँ समानांतर माध्य $= a + r\frac{b-a}{n+1}$

2. दो संख्याओं a तथा b के बीच n समानांतर माध्यों का योग $= n \times \frac{a+b}{2}$

3. किसी समानांतर श्रेढी में

(i) तीन पद $a-d, a, a+d$ लें। (ii) चार पद $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ लें।

4. किसी समानांतर श्रेढी के प्रत्येक पद में बराबर राशि जोड़ने या घटाने पर अथवा प्रत्येक पद में समान राशि से गुणा या भाग देने पर प्राप्त श्रेढी स० श्रे० में ही रहेगी।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

प्रश्नावली 1.2

1. निम्नलिखित के समानांतर माध्य (A.M.) बतायें :

(a) (i) 2 और 18 (ii) 8 और −20 (iii) $(x+y)^2$ और $(x-y)^2$

(b) (i) 3 और 18 के बीच चार समानांतर माध्य (A.M.) बतायें।

(ii) 5 और −9 के बीच 6 समानांतर माध्य डालें तथा इन समानांतर माध्यों का योग बतायें।

(iii) −1 तथा 9 के बीच 4 समानांतर माध्य डालें तथा उनका योग निकालें।

2. यदि a और b का समानांतर माध्य $\dfrac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$ हैं, तो n का मान बतायें।

3. यदि x, y, z समानांतर श्रेढी में हैं और x तथा y का समानांतर माध्य a तथा y और z का सामानांतर माध्य b हो तो सिद्ध करें a तथा b समानांतर माध्य y होगा।

4. 5 और 83 के बीच कितने सामानांतर माध्य रखे जायें कि पहले माध्य पद तथा अंतिम माध्य पद 1 : 7 के अनुपात में हों।

5. किसी स० श्रे० में 23 और 57 के बीच कितने समानांतर माध्य रखे जायें कि पहले माध्य पद तथा अंतिम माध्य पद 5 : 11 के अनुपात में हों।

6. किसी स० श्रेढी में ऐसी तीन संख्यायें ज्ञात करें जिनका योग 21 तथा गुणनफल 231 है।

7. ऐसी तीन संख्यायें बताइए जो समानांतर श्रेणी में हों और जिनमें पहली तथा तीसरी का योग 12 तथा पहली तथा दूसरी का गुणनफल 24 है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1990]**

8. (i) किसी स० श्रेढी के तीन क्रमागत संख्याओं का योग 39 तथा उनके वर्गों का योग 525 है। संख्यायें ज्ञात करें।

(ii) किसी समानांतर श्रेणी का चार संख्याओं का योगफल 20 और उनके वर्गों का योगफल 120 है। संख्यायें ज्ञात कीजिए। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(S)]**

9. यदि $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ समानांतर श्रेढी में हैं तो सिद्ध करें $\dfrac{b+c}{a}, \dfrac{a+c}{b}, \dfrac{a+b}{c}$ भी समानांतर श्रेढी में होंगे।

10. a, b, c समानांतर श्रेढी में हों तो सिद्ध करें कि $\dfrac{ab+ac}{bc}, \dfrac{bc+ba}{ca}, \dfrac{ca+cb}{ab}$ भी समानांतर श्रेढी में हैं।

11. a, b, c समानांतर श्रेढी में हों तो सिद्ध करें

(i) $ab+bc=2b^2$ (ii) $(a-c)^2=4(b^2-ac)$ (iii) $(c-a)^2=4(a-b)(b-c)$

उत्तरमाला

1. (a) (i) 10 (ii) −6 (iii) x^2+y^2

(b) (i) 6, 9, 12, 15 (ii) स० मा० 3, 1, −1, −3, −5, −7; योग = −12

(iii) स० मा० 1, 3, 5, 7; योग 16

2. $n=1$

4. 12

5. 16

6. 3, 7, 11

7. 4, 6, 8

8. (i) 10, 13, 16 (ii) 2, 4, 6, 8

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अध्याय 2

गुणोत्तर श्रेढी (Geometric Progression)

2.1 परिभाषायें (Definitions)

2.1.1 गुणोत्तर श्रेढी

वह श्रेढी जिसके प्रत्येक पद का अपने पूर्ववर्ती पद (Preceding Term) से अनुपात एक स्थिर राशि हो, गुणोत्तर श्रेढी (Geometric Progression) कहलाती है। इसे सामान्यत: गु० श्रे० या (G.P.) से सूचित करते हैं।

श्रेढी के दो लगातार पदों के अनुपात को इसका सार्वअनुपात (Common Ratio) कहते हैं। इसे सामान्यत: r से व्यक्त करते हैं।

इस तरह यदि $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}, t_n$ श्रेढी के प्रथम, द्वितीय, तृतीय, ..., $(n-1)$वाँ एवं nवाँ पद हों, तो गु० श्रे० में

$$r = \frac{t_2}{t_1}, = \frac{t_3}{t_2} = \ldots = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

जैसे : $3 + 9 + 27 + 81 + \ldots$ एक गु० श्रे० है तथा इसका प्रथम पद 3 तथा सार्वअनुपात 3 है।

2.1.2 गु० श्रे० का मानक रूप (Standard Form of a G.P.)

माना किसी गु० श्रे० का प्रथम पद $= a$ तथा सार्वअनुपात $= r$

तो गुणोत्तर श्रेढी के पद $a, ar, ar^2, \ldots$ से दिए जाते हैं तथा श्रेणी (Series) $a + ar + ar^2 + \ldots$ गु० श्रे० में होती है।

2.1.3 गुणोत्तर श्रेढी का व्यापक पद (General Term of a G.P.) :

मान लो गु० श्रे० का प्रथम पद $= a$ तथा सार्वअनुपात $= r$

माना $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय, ..., nवाँ पद को सूचित करता है, तो

$$t_1 = \text{प्रथम पद} = a = ar^{1-1}$$
$$t_2 = \text{द्वितीय पद} = ar = ar^{2-1}$$
$$t_3 = \text{तृतीय पद} = ar^2 = ar^{3-1}$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$t_n = n \text{ वाँ पद} = ar^{n-1}$$

$\therefore$ किसी गुणोत्तर श्रेढी का nवाँ पद

$$\boxed{t_n = ar^{n-1}}$$

इसे हम गु० श्रे० का **व्यापक** पद कहते हैं।

स्पष्टत: n पदों वाली किसी गुणोत्तर श्रेढी का अंतिम पद l हो, तो

$$\boxed{l = ar^{n-1}}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

नोट :

- ∴ किसी गु० श्रे० में अन्त से **nवाँ पद** $= \dfrac{l}{r^{n-1}}$ जहाँ l श्रेणी का अंतिम पद है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. श्रेढी $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \ldots$ का 10वाँ पद ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2010]

हल : श्रेणी $9+3+1+\frac{1}{3}+\ldots$, यहाँ $a=9, r=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$; $n=10$, t_{10} = 10वाँ पद

सूत्र से, $t_n = ar^{n-1}$ ∴ $t_{10} = 9\times\left(\frac{1}{3}\right)^{10-1} = 3^2\times\left(\frac{1}{3}\right)^9 = 3^2\times\frac{1}{3^9} = \frac{1}{3^7}$

∴ **श्रेणी का 10वाँ पद** $= \frac{1}{3^7}$

उदाहरण 2. किसी गुणोत्तर श्रेढी का 5वाँ पद 81 और दूसरा पद 24 है, तो श्रेढी ज्ञात करें।

हल : माना गु० श्रेढी का प्रथम पद $=a$, सार्वअनुपात $=r$

दिया गया है $t_5 = 81$ तथा $t_2 = 24$

अब गु० श्रेढी के लिए $t_n = ar^{n-1}$

∴ $81 = ar^{5-1}$ या $81 = ar^4$ ...(1)

$24 = ar^{2-1}$ या $24 = ar$ ...(2)

(2) में (1) से भाग देने पर $\dfrac{ar^4}{ar} = \dfrac{81}{24} = \dfrac{27}{8} \Rightarrow r^3 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3$ ∴ $r = \dfrac{3}{2}$

अब (2) में $r=\frac{3}{2}$ रखने पर, $a\times\frac{3}{2} = 24 \Rightarrow a = \frac{24\times 2}{3} = 16$

∴ श्रेढी के पद $16, 16\times\frac{3}{2}, 16\times\left(\frac{3}{2}\right)^2, 16\times\left(\frac{3}{2}\right)^3, \ldots$ या $16, 24, 36, 54, \ldots$ होंगे। **उत्तर**

उदाहरण 3. दी गई श्रेणी $9-3+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\ldots$ का कौन सा पद $-\frac{1}{243}$ है ?

हल : यहाँ प्रथम पद $=a=9$; सार्वअनुपात $=r=\frac{-3}{9}=-\frac{1}{3}$ तथा $t_n = -\frac{1}{243}$ (माना)

अब $-\dfrac{1}{243} = 9\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ [∵ $t_n = ar^{n-1}$]

$\Rightarrow -\dfrac{1}{3^5\times 3^2} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^7$ ∴ $n-1=7$ या $n=8$

∴ दी गई श्रेणी का 8वाँ पद $-\frac{1}{243}$ है। **उत्तर**

उदाहरण 4. किसी गु० श्रे० का $(p+q)$वाँ पद m और $(p-q)$वाँ पद n है। उस श्रेढी का pवाँ पद ज्ञात कीजिए।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1985]

हल : माना गु० श्रे० का प्रथम पद $=a$, सार्वअनुपात $=r$

∴ $(p+q)$वाँ पद $= t_{p+q} = ar^{p+q-1} = m$ ...(1)

तथा $(p-q)$वाँ पद $= t_{p-q} = ar^{p-q-1} = n$ ...(2)

[∵ $t_n = ar^{n-1}$]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$\therefore$ $ar^{p+q-1} \times ar^{p-q-1} = m \times n$ [(1) को (2) से गुणा करने पर]

या $a^2 r^{p+q-1+p-q-1} = m \times n$ या $a^2 r^{2(p-1)} = m \times n$

या $(ar^{p-1})^2 = mn$ या $ar^{p-1} = \pm\sqrt{mn}$ ...(4)

किन्तु $t_p = ar^{p-1}$

$\therefore$ (4) से pवाँ पद $= ar^{p-1} = \pm\sqrt{mn}$

उदाहरण 5. (i) यदि किसी गु० श्रे० के pवें, qवें तथा rवें पद क्रमशः x, y, z हों, तो दिखाइए कि $x^{q-r} y^{r-p} z^{p-q} = 1$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]

(ii) यदि किसी गु० श्रे० के pवें, qवें तथा rवें पद क्रमशः a, b तथा c हैं, तो सिद्ध करें कि

(a) $(q-r)\log a + (r-p)\log b + (p-q)\log c = 0$

(b) $\begin{vmatrix} \log a & p & 1 \\ \log b & q & 1 \\ \log c & r & 1 \end{vmatrix} = 0$

हल : (i) मान लिया गु० श्रे० का प्रथम पद $= A$

सूत्र से, $t_n = ar^{n-1}$, सार्वअनुपात $= R$

$\therefore$ $t_p = x = AR^{p-1}$; $t_q = y = AR^{q-1}$; $t_r = z = AR^{r-1}$

$\therefore$ $x^{q-r} . y^{r-p} . z^{p-q}$

$= (AR^{p-1})^{q-r} \times (AR^{q-1})^{r-p} \times (AR^{r-1})^{p-q}$

$= A^{q-r} \times A^{r-p} \times A^{p-q} \times R^{(p-1)(q-r)} \times R^{(q-1)(r-p)} \times R^{(r-1)(p-q)}$

$= A^{q-r+r-p+p-q} \times R^{(p-1)(q-r)) + (q-1)(r-p) + (r-1)(p-q)}$

$= A^0 \times R^{pq - pr - q + r + qr - pq - r + p + pr - qr - p + q}$

$= A^0 R^0 = 1 \times 1 = 1$ **सिद्धम्**

(ii) (a) मान लिया गु० श्रे० का प्रथम पद $= A$, सार्वअनुपात $= R$

प्रश्न से, $t_p = a = AR^{p-1}$; $t_q = b = AR^{q-1}$; $t_r = c = AR^{r-1}$

अतः वाम पक्ष $= (q-r)\log a + (r-p)\log b + (p-q)\log c$

$= \log a^{q-r} + \log b^{r-p} + \log c^{p-q}$ [$\because \log m^n = n \log m$]

$= \log (a^{q-r} \times b^{r-p} \times c^{p-q})$ [$\because \log m + \log n + \log p = \log(m \times n \times p)$]

$= \log [(AR^{p-1})^{q-r} \times (AR^{q-1})^{r-p} \times (AR^{r-1})^{p-q}]$ [a, b, c का मान रखने पर]

$= \log [A^{q-r+r-p+p-q} \times R^{(p-1)(q-r) + (q-1)(r-p) + (r-1)(p-q)}]$

$= \log [A^0 R^0]$

$= \log [1 \times 1] = \log 1 = 0$

$\therefore$ $(q-r)\log a + (r-p)\log b + (p-q)\log c = 0$ ...(1) **सिद्ध हुआ।**

(b) वाम पक्ष $= \begin{vmatrix} \log a & p & 1 \\ \log b & q & 1 \\ \log c & r & 1 \end{vmatrix} = 0$

$= \log a\,(q \times 1 - r \times 1) - \log b\,(p \times 1 - r \times 1) + \log c\,(p \times 1 - q \times 1)$

[विस्तार करने पर]

$= (q-r)\log a - (p-r)\log b + (p-q)\log c$

$= (q-r)\log a + (r-p)\log b + (p-q)\log c$

$= 0$ [(1) से]

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

स्मरणीय उपयोगी सूत्र

1. यदि गुणोत्तर श्रेढी के पद $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}, t_n$ हों, तो $\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \ldots = \frac{t_n}{t_{n-1}} = r$ (सार्वअनुपात)
2. गुणोत्तर श्रेढी का व्यापक पद या प्रारंभ से nवाँ पद $T_n = ar^{n-1}$
3. गुणोत्तर श्रेढी का अन्त से nवाँ पद $t_n = \frac{l}{r^{n-1}}$ जहाँ l श्रेढी का अंतिम पद है।

प्रश्नावली 2.1

1. (i) $2, 6, 18, 54, \ldots$ का 20वाँ पद ज्ञात करें।
(ii) $\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \ldots$ का 19वाँ पद ज्ञात करें।
(iii) $\sqrt{3} + 3 + 3\sqrt{3} + \ldots$ का अंतिम पद ज्ञात करें जबकि श्रेणी में 10 पद हैं।
(iv) $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$ का 10वाँ पद बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004, 17(S)]**
(v) श्रेणी $3, -6, 12, -24, \ldots$ का 10वाँ पद ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2012, 16(O)]**
(vi) श्रेणी $3 + 6 + 12 + \ldots$ का 10वाँ पद ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]**
(vii) श्रेणी $1, \sqrt{3}, 3 \ldots$ का nवाँ पद ज्ञात कीजिये। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2014(O)]**
(viii) श्रेणी $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots$ का nवाँ पद ज्ञात कीजिये। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]**
2. (i) $1, \sqrt{3}, 3, \ldots$ का कौन सा पद 81 है?
(ii) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, 1, \ldots$ का कौन सा पद 64 है?
(iii) $9, 6, 4, \ldots$ का कौन सा पद $64/81$ है? **[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(B)]**
(iv) किसी गु० श्रे० के द्वितीय तथा पाँचवें पद क्रमशः 24 तथा 81 हैं। गु० श्रे० ज्ञात करें।
(v) यदि किसी गु० श्रे० के द्वितीय, आठवें तथा अंतिम पद $27, \frac{1}{27}$ तथा $\frac{1}{729}$ हैं तो गु० श्रे० में पदों की संख्या बतायें।
(vi) यदि किसी गु० श्रे० का चौथा पद 16 तथा सातवाँ पद 128 है तो उस श्रेढी का 11वाँ पद बतायें।
3. यदि किसी गु० श्रे० का $(m+n)$वाँ पद p तथा $(m-n)$वाँ पद q है, तो श्रेढी का mवाँ तथा nवाँ पद ज्ञात करें।
4. एक गु० श्रे० के तीसरे एवं आठवें पदों का गुणनफल 243 है। यदि इसका चौथा पद 3 है तो सातवाँ पद ज्ञात करें।
5. यदि श्रेणी $1 + 2 + 4 + \ldots$ का nवाँ पद वही है जो श्रेणी $256 + 128 + 64 + \ldots$ का nवाँ पद है तो n का मान ज्ञात करें।
6. किसी गु० श्रे० के लिए सिद्ध करें $t_{n-r} \times t_{n+r} = (t_n)^2$
7. किसी गु० श्रे० का 9वाँ पद a, 14वाँ पद b तथा 24वाँ पद c है, तो दिखायें कि $b^3 = a^2c$
[संकेत : $a = AR^8; b = AR^{13}; c = AR^{23}$ $\therefore$ $a^2c = (AR^8)^2 \times (AR^{23})$]
8. यदि किसी गु० श्रे० के pवें तथा qवें पद क्रमशः q तथा p हैं तो सिद्ध करें कि श्रेढी का $(p+q)$वाँ पद $\left(\frac{q^p}{p^q}\right)^{\frac{1}{p-q}}$ होगा।
9. किसी गुणोत्तर श्रेढी का तीसरा पद पहले पद का वर्ग है, और पाँचवाँ पद 64 है, तो श्रेढी ज्ञात करें।
10. किसी गु० श्रे० में सिद्ध करें कि आदि और अन्त से समान दूरी वाले पदों का गुणनफल, प्रथम पद तथा अंतिम पद के गुणनफल के बराबर होता है।
11. यदि किसी गु० श्रे० के pवें, qवें तथा rवें पद क्रमशः x, y, z हों, तो दिखाइए कि $x^{q-r} y^{r-p} z^{p-q} = 1$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]**

AK TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

उत्तरमाला

1.(i) $2\times(3)^{19}$ (ii) $\sqrt{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{18}$ (iii) 243 (iv) 2^{10} (v) -1536 (vi) 1536 (vii) $(3)^{1/2(n-1)}$

(viii) $\frac{3^{n-3}}{2^{n-2}}$

2.(i) 9 (ii) 9 (iii) 7 (iv) $16+24+36+54+\ldots$ (v) 11 (vi) 2048

3. mवाँ पद $=\sqrt{pq}$, nवाँ पद $=p\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{m}{2n}}$ **4.** 81 **5.** 5 **9.** 4, 8, 16, 32,...

2.2 गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात करना (To Find Sum of n Terms of a G.P.)

माना दिए गए गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद $=a$; सार्वअनुपात $=r$ तथा n पदों का योग $=S_n$

तो $$S_n=a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1} \qquad \ldots(1)$$

(1) में दोनों तरफ r से गुणा करने पर

$$rS_n=ar+ar^2+\ldots+ar^n \qquad \ldots(2)$$

$\therefore$ $$S_n-rS_n=a-ar^n$$ [(1) में से (2) को घटाने पर]

या $$(1-r)S_n=a(1-r^n)$$

या $$S_n=\frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$$

$\therefore$ पुनः (2) में से (1) को घटाने पर, $(r-1)S_n=a(r^n-1)$ $\therefore$ $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

$\therefore$ गुणोत्तर श्रेणी में n पदों का योग $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $r\neq1$ या $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$, $r\neq1$

सामान्यतः यदि $r<1$, तो $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$ का प्रयोग किया जाता है

तथा यदि $r>1$, तो $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ का प्रयोग किया जाता है।

नोट :

• गुणोत्तर श्रे० का योग अंतिम पद के रूप में (Sum of G.P. in Terms of Last Term) :

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a-ar^n}{1-r}=\frac{a-ar^{n-1}r}{1-r}=\frac{a-lr}{1-r}, \qquad r\neq1, r<1$$

$\therefore$ $S_n=\frac{a-lr}{1-r}$, जहाँ l गु० श्रे० का अंतिम पद है, जब $r\neq1$ तथा $r<1$

इसी तरह $S_n=\frac{lr-a}{r-1}$, जब $r\neq1, r>1$

2.2.1 अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का योग (Sum of Infinite Terms in G.P.) :

माना गु० श्रे० का प्रथम पद $=a$; सार्वअनुपात $=r$, जहाँ $-1<r<1$ तथा पदों की संख्या $=n$

तो $r<1$ के लिए $$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r} \qquad \ldots(1)$$

AKO TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: यदि गु० श्रे० में अनन्त पदों का योग S_∞ से दिया जाए, तो (1) से

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} - 0 \qquad [\because \text{ यदि } r<1 \text{ तो } n\to\infty \Rightarrow r^n \to 0]$$

$$= \frac{a}{1-r}$$

∴ गु० श्रे० में **अनन्त पदों का योग**, जब $-1<r<1$, $\boldsymbol{S_\infty = \frac{a}{1-r}} = \frac{\text{प्रथम पद}}{1 - \text{सार्वअन्तर}}$

नोट :

- यदि $r>1$, तो गु० श्रे० में अनंत पदों का योग S_∞ = अनन्त (Infinite)

2.2.2 आवर्त दशमलव

निम्नलिखित भिन्नों के मान पर विचार करें

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots, \frac{1}{9} = 0.1111\ldots, \frac{122}{99} = 1.232323\ldots$$

इन भिन्नों के मानों में दशमलव के बाद अंक विशेष की बार-बार आवृत्ति हुई है, जो कभी समाप्त नहीं होती।

इन बार-बार आवृत्ति वाले अंकों के शीर्ष पर दशमलव चिह्न (·) लगा देते हैं। अंक के शीर्ष पर लगे इस दशमलव चिह्न को आवर्त दशमलव कहते हैं।

जैसे : $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots = 0.\dot{3}$, $\frac{1}{9} = 0.1111\ldots = 0.\dot{1}$, $\frac{122}{99} = 1.2323\ldots = 1.\dot{2}\dot{3}$

आवर्त दशमलव वाले अंकों को अनन्त गुणोत्तर श्रेणी में बदलकर उन्हें भिन्न के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

2.2.3 समानांतरीय गुणोत्तर श्रेणी (Airthmetico-geomertic Series)

यदि किसी श्रेणी का प्रत्येक पद एक समानांतर श्रेणी और एक गुणोत्तर श्रेणी के संगत पदों के गुणनफल से बना होता है तो उसे समानांतरीय गुणोत्तर श्रेणी कहते हैं।

जैसे : **समानांतर श्रेणी** $1+3+5+7+\ldots$

तथा गुणोत्तर श्रेणी $1+x+x^2+x^3+\ldots$ से बना समानांतरीय गुणोत्तर श्रेणी $1+3x+5x^2+7x^3+\ldots$ से दिया जाता है।

2.2.4 समानांतरीय गुणोत्तर श्रेणी का व्यापक रूप (General Form of Arithmeticogeometric Series) :

$$ab + (a+d)\,br + (a+2d)\,br^2 + (a+3d)\,br^3 + \ldots$$

समानांतरीय गुणोत्तर श्रेणी का व्यापक रूप है। इसमें $r=1$ तथा $b=1$ रखने पर समानांतर श्रेणी तथा $d=0, b=1$ रखने पर गुणोत्तर श्रेणी प्राप्त होती है।

इस श्रेणी का योग तथा nवाँ पद T_n निम्न सूत्रों की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है—

$$S_n = \frac{ab}{1-r} + \frac{dbr\,(1-r^{n-1})}{(1-r)^2} - \frac{[a+(n-1)\,d]\,br^n}{1-r}$$

$$S_\infty = \frac{ab}{1-r} + \frac{dbr}{(1-r)^2}$$

$$T_n = [a+(n-1)\,d]\,br^{n-1}$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. (i) दी गई श्रेणी के प्रथम 10 पदों का योग ज्ञात करें :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$$

(ii) गुणोत्तर श्रेणी $(x+y)+(x^2+2xy+y^2)+(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+\ldots$ के n पदों का योग ज्ञात करें।

(iii) यदि किसी गु० श्रे० का nवाँ पद 3×2^n हो, तो उसके n पदों का योग ज्ञात करें।

(iv) श्रेणी $2+6+18+\ldots+1458$ का योग ज्ञात करें।

हल : (i) दी गई श्रेणी $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$

$\therefore$ प्रथम पद $a=1$, सार्वअनुपात $r=\frac{1}{2}$ तथा $n=10$

अब गु० श्रे० में n पदों का योग $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$\therefore$ 10 पदों का योग $=S_{10}=\dfrac{1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{\frac{1}{2}}=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]$ **उत्तर**

(ii) दी गई गु० श्रे० $(x+y)+(x^2+2xy+y^2)+(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)+\ldots$

$$=(x+y)+(x+y)^2+(x+y)^3+\ldots$$

$\therefore$ प्रथम पद $=a=x+y$

सार्वअनुपात $=r=\frac{(x+y)^2}{x+y}=x+y$ तथा पदों की संख्या $=n$

$\therefore$ $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{(x+y)\{(x+y)^n-1\}}{x+y-1}$ **उत्तर**

(iii) दी गई गु० श्रे० के लिए $t_n=3\times 2^n$

$n=1, 2, 3, \ldots$ लेने पर

$\therefore$ $t_1=3\times 2=6$

$t_2=3\times 2^2=3\times 4=12$

$t_3=3\times 2^3=3\times 8=24$

... ...

... ...

$\therefore$ प्रथम पद $a=6$; सार्वअनुपात $r=\frac{12}{6}=2>1$

$\therefore$ n पदों का योग $=S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{6(2^n-1)}{2-1}=6(2^n-1)$ **उत्तर**

(iv) दी गई गु० श्रे० $2+6+18+\ldots+1458$

अत: प्रथम पद $a=2$, सार्वअनुपात $r=\frac{6}{2}=3>1$ तथा अंतिम पद $l=1458$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

सूत्र से, $S_n = \frac{lr-a}{r-1}$

$= \frac{1458 \times 3 - 2}{3-1} = \frac{4374-2}{2} = \frac{4372}{2} = 2186$ उत्तर

उदाहरण 2. श्रेणी $1+4+16+64+\ldots$ के कितने पदों का योग 5461 है ? **[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]**

हल : यहाँ $a=1$, सार्वअनुपात $=4>1$

माना इसके n पदों का योग 5461 है अर्थात् $S_n = 5461$

अब $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ $\therefore$ $5461 = \frac{1(4^n - 1)}{4-1}$

$\Rightarrow$ $3 \times 5461 = 4^n - 1$ $\Rightarrow$ $16383 + 1 = 4^n$

$\Rightarrow$ $16384 = 4^n$ $\Rightarrow$ $4^7 = 4^n$ $\therefore$ $n = 7$

$\therefore$ दी गई श्रेणी के 7 पदों का योग 5461 है। उत्तर

उदाहरण 3. किसी गु० श्रे० में प्रथम पद 7, अंतिम पद 448 तथा उनका योग 889 है, तो श्रेणी तथा सार्वअनुपात ज्ञात करें।

हल : दिया है : प्रथम पद $a=7$, अंतिम पद $l=448$ तथा पदों का योग $S_n = 889$

सूत्र से,

या $889 = \frac{448 \times r - a}{r-1}$ $\left[\because S_n = \frac{lr-a}{r-1}\right]$

$\Rightarrow$ $889(r-1) = 448r - 7$ $\Rightarrow$ $889r - 889 = 448r - 7$

$\Rightarrow$ $889r - 448r = 889 - 7$ $\Rightarrow$ $441r = 882$ $\therefore$ $r = \frac{882}{441} = 2$

किन्तु $a = 7$ $\therefore$ श्रेणी $= a + ar + ar^2 + \ldots = 7 + 14 + 28 + \ldots$

उदाहरण 4. (i) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \ldots$ का योग अनंत पदों तक निकालें।

(ii) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \frac{3}{5^5} + \frac{4}{5^6} + \ldots$ योग अनन्त पदों तक निकालें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1997]**

(iii) $9^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{1}{9}} \times 9^{\frac{1}{27}} \times \ldots$ का मान निकालें।

हल : (i) श्रेणी का प्रथम पद $a=1$; सार्वअनुपात $r = \frac{-\frac{1}{4}}{1} = \frac{\frac{1}{16}}{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}$; माना अनंत पदों का योग $= S_\infty$

सूत्र से, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ $\therefore$ $S_\infty = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$ उत्तर

(ii) माना $S = \frac{3}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \frac{4}{5^4} + \frac{3}{5^5} + \frac{4}{5^6} + \ldots$

$= \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{5^3} + \frac{3}{5^5} + \ldots\right) + \left(\frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^4} + \frac{4}{5^6} + \ldots\right) = S_1 + S_2$ (माना)

अब S_1 के लिए $a = \frac{3}{5}, r = \frac{\frac{3}{5^3}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ तथा S_2 के लिए $a = \frac{4}{5^2}, r = \frac{\frac{4}{5^4}}{\frac{4}{5^2}} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$\therefore \quad S = S_1 + S_2 = \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{25}} + \frac{\frac{4}{5^2}}{1-\frac{1}{25}} \qquad \left[S_\infty = \frac{a}{1-r} \text{ से}\right]$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{25}{24} + \frac{4}{25} \times \frac{25}{24} = \frac{15}{24} + \frac{4}{24} = \frac{19}{24}$$ उत्तर

(iii) $9^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{1}{9}} \times 9^{\frac{1}{27}} \times \ldots$

$$= 9^{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots} = 9^S \text{ (माना)} \qquad \ldots(1)$$

जहाँ $S = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$

यहाँ $a = \frac{1}{3},\ r = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \therefore \qquad S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ (1) से $\quad 9^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{1}{9}} \times 9^{\frac{1}{27}} \times \ldots = 9^{\frac{1}{2}} = (3)^2)^{\frac{1}{2}} = 3$ उत्तर

उदाहरण 5. निम्नलिखित श्रेणियों को n पदों तक जोड़ें :

(i) $5 + 55 + 555 + \ldots$ (ii) $.5 + .55 + .555 + \ldots$

हल: (i) दी गई श्रेणी $5 + 55 + 55 + \ldots$

माना $S_n = 5 + 55 + 555 + \ldots n$ पदों तक

$= 5[1 + 11 + 111 + \ldots n$ पदों तक]

$= \frac{5}{9}[9 + 99 + 999 + \ldots n$ पदों तक]

$= \frac{5}{9}[(10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \ldots n$ पदों तक]

$= \frac{5}{9}[(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots n$ पदों तक$) - (1 + 1 + 1 + \ldots n$ पदों तक$)]$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{10-1} - n\right] \qquad \left[\because S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}, r > 1\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}\right] = \frac{5}{81}[10^{n+1} - 9n - 10]$$ उत्तर

(ii) माना $S_n = [.5 + .55 + .555 + \ldots n$ पदों तक]

$= 5[.1 + .11 + .111 + \ldots n$ पदों तक]

$= \frac{5}{9}[.9 + .99 + .999 + \ldots n$ पदों तक]

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{9}{10} + \frac{99}{100} + \frac{999}{1000} + \ldots n \text{ पदों तक}\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\left(1 - \frac{1}{10}\right) + \left(1 - \frac{1}{100}\right) + \left(1 - \frac{1}{1000}\right) + \ldots n \text{ पदों तक}\right]$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$$= \frac{5}{9}\left[(1+1+1+\ldots n \text{ पदों तक}) - \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots n \text{ पदों तक}\right)\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[n - \frac{1}{10}\left\{\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n}{1-\frac{1}{10}}\right\}\right] = \frac{5}{9}\left[n - \frac{1}{10}\times\frac{10}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[n - \frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}\right]$$ उत्तर

उदाहरण 6. $0.1\dot{2}\dot{3}$ को गु० श्रे० की सहायता से भिन्न में बदलें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2007]**

हल : $0.1\dot{2}\dot{3} = 0.1232323\ldots = [.1 + .023 + .00023 + \ldots]$

$$= \left[\frac{1}{10}+\frac{23}{10^3}+\frac{23}{10^5}+\frac{23}{10^7}+\ldots\right] = \frac{1}{10}+\frac{23}{10^3}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{10}+\frac{23}{1000}\times\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}} \qquad \left[\because S_\infty = \frac{a}{1-r}, \text{ यहाँ } a=1, r=\frac{1}{10^2}\right]$$

$$= \frac{1}{10}+\frac{23}{1000}\times\frac{100}{99} = \frac{1}{10}+\frac{23}{990} = \frac{99+23}{990} = \frac{122}{990}$$ उत्तर

उदाहरण 7. यदि किसी गु० श्रे० का द्वितीय पद 2 तथा अनंत पदों का योग 8 है तो प्रथम पद ज्ञात करें।

हल : माना गु० श्रे० का प्रथम पद $= a$, सार्वअन्तर $= r$

अतः दी गई शर्तों से $\quad t_2 = ar = 2 \Rightarrow r = \frac{2}{a}$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = 8$$

या $$\frac{a}{1-\frac{2}{a}} = 8 \text{ या } \frac{a^2}{a-2} = 8 \Rightarrow a^2 = 8(a-2)$$

या $$a^2 - 8a + 16 = 0 \Rightarrow (a-4)^2 = 0 \Rightarrow a - 4 = 0 \quad \therefore a = 4 = \text{प्रथम पद}$$ उत्तर

उदाहरण 8. यदि pवें पद से प्रारंभ करके किसी गु० श्रे० के n पदों का योगफल P तथा q वें पद से प्रारंभ करके n पदों का योग Q हो तो सिद्ध करें कि $\frac{P}{r^p} = \frac{Q}{r^q}$, जहाँ r श्रेणी का सार्वअनुपात है।

हल : यदि a श्रेढी का प्रथम पद हो, तो $t_p = ar^{p-1}$ तथा $t_q = ar^{q-1}$

अब pवें पद से प्रारंभ करके अगले n पदों का योगफल $S_1 = \frac{ar^{p-1}(r^n-1)}{r-1} = P \quad \ldots(1)$

तथा qवें पद से प्रारंभ करके अगले n पदों का योगफल $S_2 = \frac{ar^{q-1}(r^n-1)}{r-1} = Q \quad \ldots(2)$

(1) में (2) से भाग देने पर

$$\frac{P}{Q} = \frac{\frac{ar^{p-1}(r^n-1)}{r-1}}{\frac{ar^{q-1}(r^n-1)}{r-1}} = \frac{ar^{p-1}(r^n-1)}{ar^{q-1}(r^n-1)} = r^{p-1-q+1} = r^{p-q}$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

या $$\frac{P}{Q}=\frac{r^p}{r^q} \quad \therefore \quad \frac{P}{r^p}=\frac{Q}{r^q}$$ सिद्धम्

उदाहरण 9. किसी अनन्त गु० श्रे० का प्रथम पद 1 है तथा उसका प्रत्येक पद अपने उत्तर पदों (Successive terms) के योग के बराबर है, तो श्रेणी ज्ञात करें।

हल : माना श्रेणी का सार्वअनुपात $=r$, प्रथम पद $=1$ (दिया गया है)

$\therefore$ श्रेणी $1+r+r^2+r^3+\ldots$

दी गई शर्तों से, $1=r+r^2+r^3+\ldots=\dfrac{r}{1-r}$ $\left[\because S_\infty=\dfrac{a}{1-r}\right]$

या $1-r=r$ या $2r=1 \Rightarrow r=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ अभीष्ट श्रेणी $=1+r+r^2+\ldots=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\ldots$ उत्तर

उदाहरण 10. (i) यदि $x=1+a+a^2+\ldots\infty, a<1$ तथा $y=1+b+b^2+\ldots\infty, b<1$ तो सिद्ध करें कि $1+ab+a^2b^2+\ldots\infty=\dfrac{xy}{x+y-1}$. **[उ० प्र० डिप्लोमा 2002]**

(ii) यदि $y=x+x^2+x^3+\ldots\infty$ तथा x इकाई से कम है अर्थात् $0<x<1$ तो सिद्ध करें $x=\dfrac{y}{1+y}$.

हल : (i) दिया गया है :

$$x=1+a+a^2+\ldots\infty=\frac{1}{1-a} \quad \ldots(1)$$

तथा $$y=1+b+b^2+\ldots=\frac{1}{1-b} \quad \ldots(2)$$

तथा $$1+ab+a^2b^2+\ldots\infty=\frac{1}{1-ab} \quad \ldots(3) \quad \left[\because S_\infty=\frac{a}{1-r}\right]$$

अब $$\frac{xy}{x+y-1}=\frac{\dfrac{1}{1-a}\times\dfrac{1}{a-b}}{\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1-b}-1} \quad [(1) \text{ तथा } (2) \text{ से }]$$

$$=\frac{1}{1-b+1-a-(1-a)(1-b)}=\frac{1}{2-a-b-1+b+a-ab}=\frac{1}{1-ab} \quad \ldots(4)$$

$\therefore$ (3) तथा (4) से, $1+ab+a^2b^2+\ldots\infty=\dfrac{xy}{x+y-1}$

(ii) यहाँ $y=x+x^2+x^3+\ldots\infty,\ 0<x<1$

$$=\frac{x}{1-x} \quad \left[\because S_\infty=\frac{a}{1-r}\right]$$

या $y(1-x)=x$ या $y-xy=x$ या $y=x+xy=x(1+y)$

$$\therefore \quad x=\frac{y}{1+y}$$ सिद्धम्

उदाहरण 11. यदि $x=a+\dfrac{a}{r}+\dfrac{a}{r^2}+\ldots\infty,\ y=b-\dfrac{b}{r}+\dfrac{b}{r^2}-\ldots\infty$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

तथा $z = c + \frac{c}{r^2} + \frac{c}{r^4} + \ldots\infty$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{xy}{z} = \frac{ab}{c}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]**

हल : दिया है :

$$x = a + \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \ldots\infty = \frac{a}{1-\frac{1}{r}} \quad \left[\because S_\infty = \frac{1}{1-r}\right]$$

अर्थात्
$$x = \frac{ar}{r-1} \quad \ldots(1)$$

$$y = b - \frac{b}{r} + \frac{b}{r^2} - \ldots\infty$$

⇒
$$y = \frac{b}{1-\left(-\frac{1}{r}\right)} = \frac{b}{1+\frac{1}{r}} = \frac{br}{r+1} \quad \ldots(2)$$

तथा
$$z = c + \frac{c}{r^2} + \frac{c}{r^4} + \ldots\infty \Rightarrow z = \frac{c}{1-\frac{1}{r^2}} = \frac{r^2c}{r^2-1}$$

अब
$$\frac{xy}{z} = \frac{\frac{ar}{r-1} \times \frac{br}{r+1}}{\frac{r^2c}{r^2-1}}$$ [(1), (2) तथा (3) से x, y, z का मान रखने पर]

$$= \frac{abr^2}{r^2-1} \times \frac{r^2-1}{r^2c} = \frac{ab}{c}$$ **सिद्धम्**

उदाहरण 12. यदि n अनन्त गु० श्रेणियों के योगफल $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n$ हों, तथा उनके प्रथम पद क्रमशः 1, 2, 3, ... n हों तथा सार्वअनुपात क्रमशः $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n+1}$ हों तो सिद्ध करें कि $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots S_n = \frac{n}{2}(n+3)$.

हल : किसी गु० श्रे० के अनंत पदों का योग

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

∴
$$S_1 = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$S_2 = \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{2\times 3}{2} = 3$$

$$S_3 = \frac{3}{1-\frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = \frac{3\times 4}{3} = 4$$

... ...

... ...

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$S_n = \frac{n}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{n(n+1)}{n+1-1} = \frac{n(n+1)}{n} = n+1$$

∴ $S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n = 2+3+4+\ldots+(n+1)$ ...(1)

अब $2+3+4+\ldots+(n+1)$ एक स० श्रे० है,

जिसमें प्रथम पद $a=2$, सार्वअन्तर $d=3-2=1$ तथा पदों की संख्या $=n$

∴ सूत्र $S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ का (1) में प्रयोग करने पर

$$S_1 + S_2 + S_3 \ldots + S_n = \frac{n}{2}[2\times 2+(n-1)1] = \frac{n}{2}[4+n-1] = \frac{n}{2}(n+3)$$ सिद्धम्

उदाहरण 13. (i) निम्नलिखित समानांतरीय गुणोत्तर श्रेणी का nवाँ पद ज्ञात करें :

$$1+3\times 2+5\times 2^2+7\times 2^3+\ldots$$

(ii) श्रेणी $1+2x+3x^2+\ldots\infty$ का योग ज्ञात करें, जबकि $x<1$. **[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]**

(iii) श्रेणी $1+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3^2}+\ldots\infty$ का योग ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1992]**

(iv) श्रेणी $1^2+3^2x+5^2x^2+\ldots\infty$ का योग ज्ञात करें।

हल : (i) दी गई श्रेणी $1+3\times 2+5\times 2^2+7\times 2^3+\ldots$

दी गई श्रेणी स० श्रे० $1+3+5+7+\ldots$ तथा गु० श्रे० $1+2+2^2+2^3+\ldots$

के संगत पदों के गुणनफल से प्राप्त हुई है

∴ स० श्रे० का nवाँ पद $=1+(n-1)\times 2$

$$=1+2n-2=2n-1$$

गुणोत्तर श्रे० का nवाँ पद $=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}$

∴ समानांतरीय गुणोत्तर श्रेणी का nवाँ पद $=(2n-1)\,2^{n-1}$

(ii) माना $S=1+2x+3x^2+\ldots\infty$ ...(1)

यह एक समानांतरीय गुणोत्तर श्रेणी है, जिसमें गु० श्रेणी $1+x+x^2+\ldots$ है। इसका सार्वअनुपात $=x$

(1) में x से गुणा करने पर $xS=x+2x^2+3x^2+\ldots\infty$ ...(2)

(1) में से (2) को घटाने पर

$$S = 1+2x+3x^2+\ldots\infty$$
$$xS = \quad x+2x^2+3x^3+\ldots\infty$$
$$-\quad -\quad -\quad -\quad -$$
$$(1-x)S = 1+x+x^2+\ldots\infty$$

∴ $$S=\frac{1}{1-x}[1+x+x^2+\ldots]=\frac{1}{1-x}S_1 \quad \text{(माना)}$$ ...(3)

जहाँ $S_1=1+x+x^2+\ldots$

यहाँ प्रथम पद $a=1$, सार्वअनुपात $r=x$

∴ सूत्र $S_\infty=\frac{a}{1-r}$ से, $S_1=\frac{1}{1-x}$

(3) में S_1 का मान रखने पर $S=\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1-x}=\frac{1}{(1-x)^2}$ उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(iii) माना $S = 1 + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{3^2} + \ldots \infty$ ...(1)

यह एक समानांतरीय गुणोत्तर श्रेणी है जिसमें गुणोत्तर श्रेणी $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots.$ का सार्वअनुपात $\frac{1}{3}$ है।

$$\therefore \quad \frac{1}{3} S = \frac{1}{3} + 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots. \quad \ldots(2)$$

$$\therefore \quad S\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots \infty \quad [(2) - (1) \text{ से}]$$

या $$\frac{2}{3} S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \qquad \therefore \ S = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$ **उत्तर**

(iv) माना $$S = 1^2 + 3^2 x + 5^2 x^2 + \ldots \infty$$

तो $$xS = \quad 1^2 x + 3^2 x^2 + S^2 x^3 + \ldots \infty$$

– – – – –

घटाने पर $(1 - x) S = 1^2 + (3^2 - 1^2) x + (5^2 - 3^2) x^2 + (7^2 - 5^2) x^3 + \ldots \infty$

या $(1 - x) S = 1 + 8x + 16x^2 + 24x^3 + \ldots \infty$ ...(1)

(1) में x से गुणा कर (1) में से घटाने पर

$$(1 - x) S = 1 + 8x + 16x^2 + 24x^3 + \ldots \infty$$

$$x(1 - x) S = \quad x + 8x^2 + 16x^3 + \ldots \infty$$

– – –

$$(1 - x) S - x(1 - x) S = 1 + 7x + 8x^2 + 8x^3 + 8x^4 + \ldots$$

या $$[1 - x - x + x^2] S = 1 + 7x + 8x^2 [1 + x + x^2 + \ldots \infty]$$

या $$[1 - 2x + x^2] S = 1 + 7x + 8x^2 \times \frac{1}{1 - x} \qquad \left[\because S_\infty = \frac{a}{1 - r} \text{ से}\right]$$

या $$(1 - x)^2 S = 1 + 7x + \frac{8x^2}{1 - x} = \frac{1 - x + 7x(1 - x) + 8x^2}{1 - x} = \frac{1 - x + 7x - 7x^2 + 8x^2}{1 - x}$$

या $$(1 - x)^2 S = \frac{1 + 6x + x^2}{1 - x} \qquad \therefore \quad S = \frac{1 + 6x + x^2}{(1 - x)(1 - x)^2} = \frac{1 + 6x + x^2}{(1 - x)^3}$$ **उत्तर**

स्मरणीय उपयोगी सूत्र

1. (i) गु० श्रे० में n पदों का योग

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{lr - a}{r - 1}, r > 1$$

$$= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a - lr}{1 - r}, r < 1$$

(ii) गु० श्रे० में अनंत पदों का योग $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$, $r < 1$ जहाँ r = सार्वअनुपात, a = प्रथम पद

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

2. (i) समानांतरीय गुणोत्तर श्रेणी का मानक रूप $S = ab + (a+d)\, br + (a+2d)\, br^2 + \ldots$
इसमें $b=1, r=1$ रखने से स० श्रेणी तथा $d=0, b=1$ रखने से गुणोत्तर श्रेणी प्राप्त होती है।

(ii) समानांतरीय गुणोत्तर श्रेणी का nवाँ पद $T_n = [a+(n-1)\, d]\, br^{n-1}$

(iii) समानांतरीय गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योग

$$S_n = \frac{ab}{1-r} + \frac{d\, br\, (1-r^{n-1})}{(1-r)^2} - \frac{[a+(n-1)\, d]\, br^n}{1-r}$$

(iv) समानांतरीय गु० श्रे० के अनंत पदों का योग $S_\infty = \dfrac{ab}{1-r} + \dfrac{dbr}{(1-r)^2}$

प्रश्नावली 2.2

1. निम्नलिखित श्रेणियों का योगफल ज्ञात करें :

(i) $1+2+4+8+\ldots$ के 10 पदों तक (ii) $\frac{2}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \ldots$ के 5 पदों तक

(iii) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots$ के 10 पदों तक **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]**

(iv) $(a+b) + (a^2 + 2b) + (a^3 + 3b) + \ldots n$ पदों तक
[संकेत : श्रेणी $[(a + a^2 + a^3 + \ldots) + (b + 2b + 3b + \ldots)]$]

(v) $(x+y) + (x^2 + xy + y^2) + (x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + \ldots$ के n पदों तक

[संकेत : प्रथम पद $= x + y = \dfrac{x+y}{x-y} \times x - y = \dfrac{x^2 - y^2}{x-y}$;

द्वितीय पद $= \dfrac{(x-y)}{x-y}(x^2 + xy + y^2) = \dfrac{x^3 - y^3}{x-y}; \ldots$

$\therefore$ श्रेणी $= \dfrac{1}{x-y}[(x^2 - y^2) + (x^3 - y^3) + (x^4 - y^4) + \ldots]$

$$= \frac{1}{x-y}[(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots) - (y^2 + y^3 + y^4 + \ldots)]$$

(vi) किसी गु० श्रे० का nवाँ पद $\dfrac{1}{2^n}$ है तो श्रेणी के 5 पदों का योग ज्ञात करें।

2. सिद्ध करें कि श्रेढी $a, ar, ar^2, \ldots$. के n पदों के व्युत्क्रमों (Reciprocals) का योग $\dfrac{1-r^n}{a(1-r)\, r^{n-1}}$ है।

3. (i) दी गई गु० श्रे० $1+4+16+\ldots$ के कितने पदों का योग 341 है ?

(ii) गु० श्रे० $\frac{2}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \ldots$ के कितने पदों का योग $\frac{55}{72}$ है ?

(iii) गु० श्रे० $1+2+4+8+\ldots$ के कितने पदों का योग 1023 है ? **[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]**

4. (i) किसी श्रेणी का प्रथम पद 3 और अंतिम पद 48 है। यदि सार्वअनुपात 2 हो तो पदों की संख्या तथा श्रेणी का योगफल ज्ञात करें।

(ii) किसी गुणोत्तर श्रेणी का अंतिम पद 128, सार्वअनुपात 2 तथा पदों का योग 255 है तो पदों की संख्या ज्ञात करें।

5. निम्नलिखित श्रेणियों का योगफल अनन्त तक ज्ञात करें :

(i) $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \ldots$ (ii) $0.9 + 0.03 + 0.001 + \ldots$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(iii) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\ldots$ (iv) $\frac{3}{4}-\frac{5}{4^2}+\frac{3}{4^3}-\frac{5}{4^4}+\ldots$

(v) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\infty$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

(vi) $\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots$ के n पदों का योगफल ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2014]

6. $16^{\frac{1}{2}}\times16^{\frac{1}{4}}\times16^{\frac{1}{8}}\times\ldots.$ का मान निकालें।

7. निम्नांकित श्रेणियों को n पदों तक जोड़ें :

(i) $6+66+666+\ldots$ (ii) $7+77+777+\ldots$

(iii) $.9+.99+.999+\ldots$ (iv) $.7+.77+.777+\ldots$

8. (a) निम्नलिखित आवर्त दशमलवों को गुणोत्तर श्रेणी की सहायता से भिन्न के रूप में प्रकट करें।

(i) $.\dot{2}\dot{3}$ (ii) $.\dot{4}3\dot{2}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]**

(iii) $2.\dot{2}\dot{5}$ (iv) $.2\dot{3}$

(b) (i) .123123123... का मान ज्ञात करें।

(ii) .4272727... का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1991]**

(iii) 1.424242... का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1992]**

9. यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के $n, 2n$ तथा $3n$ पदों के योग क्रमशः S_1, S_2 तथा S_3 हैं तो सिद्ध करें कि

$$S_1^2+S_2^2=S_1(S_2+S_3)$$

10. यदि किसी गु० श्रे० के n पदों का योग S, उनका गुणनफल P तथा उनके व्युत्क्रमों का योग R हो, तो सिद्ध करें

$$P^2=\left(\frac{S}{R}\right)^n$$

11. यदि $y=x-x^2+x^3-x^4+\ldots\infty$ तो सिद्ध करें कि $x=y+y^2+y^3+\ldots\infty$, जहाँ $0<x<1$.

12. $A=1+r^{\alpha}+r^{2\alpha}+\ldots\infty$ और $B=1+r^{\beta}+r^{2\beta}+\ldots\infty$ तो सिद्ध करें कि $r^2=\left(\frac{A-1}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{B-1}{B}\right)^{\frac{1}{\beta}}$

13. यदि $x=1+a+a^2+\ldots\infty, a<1$ तथा $y=1+b+b^2+\ldots\infty, b<1$ तो सिद्ध करें कि $1+ab+a^2b^2+\ldots\infty=\frac{xy}{x+y-1}$.

[उ० प्र० डिप्लोमा 2002]

14. यदि $x=a+\frac{a}{r}+\frac{a}{r^2}+\ldots\infty$, $y=b-\frac{b}{r}+\frac{b}{r^2}-\ldots\infty$ तथा $z=c+\frac{c}{r^2}+\frac{c}{r^4}+\ldots\infty$ तो सिद्ध कीजिए कि

$\frac{xy}{z}=\frac{ab}{c}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]

15. एक अनन्त गुणोत्तर श्रेढी का योगफल 3 है। इस श्रेढी के पदों के वर्गों को पद मानकर जो श्रेढी बनती है उसका योग भी 3 है तो पहली श्रेढी ज्ञात करें।

16. एक गु० श्रे० का प्रथम पद दूसरे से 2 अधिक है और उसके अनन्त पदों का योगफल 50 है। वह श्रेणी ज्ञात करें।

17. किसी गु० श्रे० के पहले दो पदों का योगफल 5 है तथा श्रेणी का प्रत्येक पद अपने सभी अनुवर्ती (Successive) पदों के योग के तिगुने के बराबर है। श्रेणी ज्ञात करें।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

18. एक ह्रासमान (Decreasing) गुणोत्तर श्रेणी के पहले दो पदों का योग $\frac{5}{4}$ तथा अनन्त पदों का योग $\frac{9}{4}$ है, तो सार्वअनुपात तथा प्रथम पद ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1988]**

19. (i) $1+\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\ldots$ के n पदो का योगफल ज्ञात करें।

(ii) $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\ldots$ के n पदों का योगफल ज्ञात करें।

(ii) $1+3x+5x^2+7x^3+\ldots$ के n पदों का योगफल ज्ञात करें। जब $|x|<1$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(S)]

20. (i) $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\ldots$ के अनंत पदों का योगफल बतायें।

(ii) $1+3x+5x^2+7x^3+\ldots$ के अनंत पदों का योगफल बतायें।

(iii) $1+2\times\frac{1}{3}+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3+\ldots$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1992]**

(iv) $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]**

21. निम्नलिखित श्रेणी का n पदों तक योगफल ज्ञात करें :

$$1\times 2+2\times 2^2+3\times 2^3+\ldots$$

22. $1+(1+b)r+(1+b+b^2)r^2+(1+b+b^2+b^3)r^3+\ldots$ का योगफल अनंत पदों तक निकालें जहाँ r तथा b शुद्ध भिन्न हैं।

[संकेत : $S-rS=1+br+b^2r^2+\ldots$ जहाँ $S=$ दी गई श्रेणी के अनंत पदों का जोड़ है।)

23. (i) श्रेणी $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots$ के n पदों का योगफल ज्ञात करें।

[संकेत : दी गई श्रेणी $\left[x^2+\frac{1}{x^2}+2\right]+\left[x^4+\frac{1}{x^4}+2\right]+\ldots$

$$=[(x^2+x^4+\ldots+x^{2n})+\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\ldots+\frac{1}{x^{2n}}\right)+(2+2+2+\ldots n \text{ पदों तक}]$$

(ii) $1+(1+x)+(1+x+x^2)+(1+x+x^2+x^3)+\ldots$

[संकेत : श्रेणी $\frac{1}{1-x}[(1-x)+(1-x)(1+x)+(1-x)(1+x+x^2)+\ldots]$

उत्तरमाला

1. (i) 1023 (ii) $\frac{55}{72}$ (iii) $-\frac{1023}{3}$ (iv) $a\left(\frac{a^n-1}{a-1}\right)+\frac{b\,n\,(n+1)}{2}$

(v) $\frac{1}{x-y}\left[\frac{x^2(1-x^n)}{1-x}-\frac{y^2(1-y^n)}{1-y}\right]$ (vi) $\frac{31}{32}$

3. (i) 5 (ii) 5 (iii) 10

4. (i) $n=5, S=93$ (ii) $n=8$

5. (i) $2\sqrt{2}$ (ii) $\frac{27}{29}$ (iii) $\frac{13}{24}$ (iv) $\frac{7}{15}$ (v) $\frac{3}{2}$ (vi) $\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

6. 16 **7.**(i) $\frac{6}{81}[10^{n+1}-9n-10]$ (ii) $\frac{7}{81}[10^{n+1}-9n-10]$

(iii) $\frac{1}{9}\left[9n-1+\frac{1}{10^n}\right]$ (iv) $\frac{7}{81}\left[9n-1+\frac{1}{10^n}\right]$

8.(a) (i) $\frac{23}{99}$ (ii) $\frac{432}{999}$ (iii) $\frac{223}{99}$ (iv) $\frac{21}{90}$ (b)(i) $\frac{123}{999}$ (ii) $\frac{47}{110}$ (iii) $\frac{141}{99}$

15. $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$ **16.** $10+8+\frac{32}{5}+\ldots$ **17.** $4+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots$

18. सार्वअनुपात $=\frac{2}{3}$, प्रथम पद $=\frac{3}{4}$ **19.** (i) $\frac{35}{16}-\frac{12n+7}{16\times 5^{n-1}}$

(ii) $6-\frac{1}{2^{n-3}}-\frac{n}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-1}}$ (iii) $\frac{1}{x-1}+\frac{2x(1-x^{n-1})}{(1-x)^2}-\frac{(2n-1)\,x^n}{1-x}$

20. (i) $\frac{2}{9}$ (ii) $\frac{1+x}{(1-x)^2}$ (iii) $\frac{9}{4}$ (iv) $\frac{1}{(1-x)^2}$

21. $2+(n-1)\,2^{n+1}$ **22.** $S=\frac{1}{(1-r)(1-br)}$

23. (i) $\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\left(x^2+\frac{1}{x^{2n}}\right)+2n$ (ii) $\frac{1}{(1-x)^2}[n(1-x)-x(1-x^n)]$

2.3.1 गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)

यदि तीन संख्यायें गु०श्रे० में हों तो मध्य पद को शेष दो पदों का गुणोत्तर माध्य कहते हैं। इसे सामान्यत: G.M. या गु० मा० से सूचित करते हैं।

जैसे—2, 4, 8 गु० श्रे० में हैं। अत: मध्य पद 4, सख्याओं 2 तथा 8 का गुणोत्तर माध्य होगा।

2.3.2 गुणोत्तर माध्य प्राप्त करना (To Find Geometric Mean)

दो दी गई राशियों के बीच **एक गुणोत्तर** माध्य ज्ञात करना :

माना G दो संख्याओं a तथा b के बीच गुणोत्तर माध्य है।

तो a, G, b गु० श्रे० में होंगे।

$$\therefore \quad \frac{G}{a}=\frac{b}{G} \quad \text{या} \quad G^2=ab \quad \therefore \quad G=\sqrt{ab}$$

अर्थात् गुणोत्तर माध्य = दोनों राशियों के गुणनफल का वर्गमूल।

उदाहरण : 2 तथा 8 का गु० मा० $=\sqrt{2\times 8}=4$ तथा 2, 4, 8 गु० श्रे० में हैं।

2.3.3 दो दी गई संख्याओं के बीच *n* गुणोत्तर माध्य ज्ञात करना (To Insert *n* Geometric Mean between Two Numbers)

माना a तथा b दो दी गई संख्यायें हैं एवं $G_1, G_2, G_3, \ldots G_n$ इनके बीच n गुणोत्तर माध्य है।

तो $a, G_1, G_2, G_3, \ldots G_n, b$ गु० श्रे० में होंगे।

माना r इस श्रेढी का सार्वअनुपात है।

अब $b=t_{n+2}=ar^{n+2-1}$ या $b=ar^{n+1}$ या $\frac{b}{a}=r^{n+1}$ $\therefore$ $r=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

अब n गुणोत्तर माध्य $G_1=ar; G_2=ar^2; G_3=ar^3; \ldots G_n=ar^n$ हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

∴ अभीष्ट गुणोत्तर माध्य

$$a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}, \ldots a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}} \text{ हैं।} \qquad \left[\because r=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n+1}}\right]$$

2.3.4 दो राशियों के बीच n गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल निकालना (To Find the Product of n Geometric Means between Two Numbers)

यदि दो दी गई राशियाँ a तथा b हैं तथा $G_1, G_2, G_3, \ldots G_n$ उनके बीच n गुणोत्तर माध्य हैं, तो

$$G_1 \times G_2 \times G_3 \times \ldots \times G_n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} \times a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}} \times a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}} \times \ldots \times a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}} \quad \text{(धारा 2.3.3 से)}$$

$$= a^n \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}+\frac{3}{n+1}+\ldots+\frac{n}{n+1}}$$

$$= a^n \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}[1+2+3+\ldots+n]} = a^n \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= a^n \times \left(\frac{b}{a}\right)^{n/2} = a^n \times \frac{b^{n/2}}{a^{n/2}} = a^{n-n/2} \times b^{n/2} = a^{n/2} \times b^{n/2}$$

$$= \{(ab)^{1/2}\}^n = (ab)^{n/2}$$

$$\therefore \mathbf{G_1 \times G_2 \times G_3 \times \ldots \times G_n = (\sqrt{ab})^n = (ab)^{n/2} = G^n} \quad [\because a \text{ तथा } b \text{ का एक गु० माध्य } G=\sqrt{ab}]$$

$$= (\text{एक माध्य})^n$$

अतः दो राशियों के बीच n गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल उनके बीच के एक गुणोत्तर माध्य के nवें घातांक के बराबर होता है।

उदाहरण : 5 तथा 10 के बीच 4 गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल $=(5\times 10)^{4/2} = (50)^2 = 2500$

2.3.5 गुणोत्तर श्रेढी के लिए कुछ महत्वपूर्ण तथ्य (Some Important Facts about Geometric Progression)

1. गुणोत्तर श्रेढी के प्रत्येक पद में एक अशून्य संख्या से गुणा या भाग दें तो प्राप्त श्रेढी भी गुणोत्तर श्रेढी में होगी।
2. दो धनात्मक संख्याओं a तथा b के बीच गुणोत्तर माध्य उनके बीच के समानांतर माध्य से छोटा होता है अर्थात् $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ अर्थात् समानांतर माध्य > गुणोत्तर माध्य
3. किसी गुणोत्तर श्रेणी में
   (i) यदि तीन लगातार पदों का गुणनफल दिया गया हो, तो पद $\frac{a}{r}, a, ar$ लिया जाता है। [गुणनफल $=a^3$]
   (ii) यदि चार लगातार पदों का गुणनफल दिया गया हो, तो पद $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ लिया जाता है। [गुणनफल $=a^4$]
   (iii) यदि पाँच लगातार पदों का गुणनफल दिया गया हो, तो पद $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$ लिया जाता है। [गुणनफल $=a^5$]
   (iv) यदि गुणोत्तर श्रेणी में पदों का गुणनफल न दिया गया हो, तो पदों को $a, ar, ar^2, \ldots$ लेना चाहिए।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

नोट :

- यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के प्रत्येक पद में समान राशि जोड़ी या घटाई जाए तो प्राप्त श्रेढी गु० श्रे० में नहीं होगी।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. (i) $\frac{3}{2}$ तथा $\frac{27}{2}$ के बीच गुणोत्तर माध्य ज्ञात करें।

(ii) 160 और 5 के बीच चार गुणोत्तर माध्य डालें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]**

हल : (i) सूत्र से a तथा b के बीच गु० मा० $=\sqrt{ab}$

$\therefore$ $\frac{3}{2}$ तथा $\frac{27}{2}$ के बीच गुणोत्तर माध्य $=\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{27}{2}}=\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{9}{2}$ **उत्तर**

(ii) दी गई संख्यायें $=160$ तथा 5

माना G_1, G_2, G_3, G_4 इनके बीच गुणोत्तर माध्य हैं। $160, G_1, G_2, G_3, G_4, 5$ गु० श्रे० में होंगे।

माना r इस श्रेढी का सार्वअनुपात है।

यहाँ $a=160$, $t_6=$ छठा पद $=5$ तो $\quad 5=160\times r^{6-1}$ $\quad [\because\ t_n=ar^{n-1}]$

या $\quad r^5=\frac{5}{160}=\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^5 \quad \therefore\ r=\frac{1}{2}$

$\therefore \quad G_1=t_2=ar=160\times\frac{1}{2}=80;\quad G_2=t_3=ar^2=160\times\frac{1}{2^2}=40$

$G_3=t_4=ar^3=160\times\frac{1}{2^3}=20;\quad G_4=t_5=ar^4=160\times\frac{1}{2^4}=10$

$\therefore$ अभीष्ट गु० मा० $=80, 40, 20, 10$

उदाहरण 2. यदि a, b, c, d गु० श्रे० में हैं तो साबित करें कि

(i) $a^n+b^n, b^n+c^n, c^n+d^n$ गु० श्रे० में हैं। (ii) $a+b, b+c, c+d$ गु० श्रे० में हैं।

हल : $\because$ a, b, c, d गु० श्रे० में हैं।

$\therefore \quad \frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=r$ (माना)

$\therefore \quad b=ar$

$$\left.\begin{aligned} c&=br=ar\times r=ar^2\\ d&=cr=ar^2\times r=ar^3\end{aligned}\right\} \quad [\because b=ar] \quad \ldots(1)$$

अब $\quad b^n+c^n=(ar)^n+(ar^2)^n$ $\quad$ [b तथा c का मान रखने पर]

या $\quad =a^nr^n+a^nr^{2n}=a^nr^n\,[1+r^n]$ $\quad \ldots(2)$

तथा $(a^n+b^n)(c^n+d^n)=(a^n+a^nr^n)\,[(ar^2)^n+(ar^3)^n]$ $\quad$ [b, c, d का मान (1) से रखने पर]

$=a^n\,(1+r^n)[a^nr^{2n}+a^nr^{3n}]$

$=a^n\,(1+r^n)\,a^nr^{2n}\,[1+r^n]$

$=a^{2n}\,r^{2n}\,(1+r^n)^2=[a^nr^n\,(1+r^n)]^2$

$=[b^n+c^n]^2$ $\quad$ [(2) से]

$\therefore \quad [b^n+c^n]^2=(a^n+b^n)(c^n+d^n)$

$\therefore \quad a^n+b^n, b^n+c^n, c^n+d^n$ गु० श्रे० में हैं।

दूसरी विधि : $\quad \frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c} \quad \therefore \quad \frac{b^n}{a^n}=\frac{c^n}{b^n}=\frac{d^n}{c^n}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$\therefore$ समानुपात नियम से $\dfrac{b^n+c^n}{a^n+b^n}=\dfrac{c^n+d^n}{b^n+c^n}$ या $(b^n+c^n)^2=(a^n+b^n)(c^n+d^n)$

(ii) (1) में $n=1$ रखने पर (ii) प्राप्त होता है। स्वयं हल करें।

उदाहरण 3. संख्यायें x, y तथा z गुणोत्तर श्रेढी में तथा $x+1, y+6$ और $z+3$ समानांतर श्रेढी में हैं। यदि $x+y+z=26$ हो तो x, y तथा z का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]**

हल : दिया है : x, y, z गु० श्रे० में हैं

$\therefore$ $$y^2=xz \quad ...(1)$$

तथा $x+1, y+6$ और $z+3$ स० श्रे० में हैं।

$\therefore$ $$2(y+6)=(x+1)+(z+3)$$ [a, b, c A. P. में हों तो $2b=a+c$]

या $$2y+12=x+z+4$$

या $$x-2y+z=8 \quad ...(2)$$

पुनः प्रश्न से $$x+y+z=26 \quad ...(3)$$

(3) में से (2) को घटाने पर

$$3y=18 \Rightarrow y=\frac{18}{3}=6 \Rightarrow y^2=36 \quad ...(4)$$

(1) तथा (4) से $$xz=36$$

तथा $$x+z=26-y=26-6=20$$ [y का मान रखने पर] ...(5)

अब $(x-z)^2=(x+z)^2-4xz=(20)^2-4\times 36$ [(4) तथा (5) से]

$$=400-144=256 \quad \therefore \quad x-z=\sqrt{256}=16 \quad ...(6)$$

(5) तथा (6) को हल करने पर $x=18, z=2$

उदाहरण 4. यदि a तथा b का स० माध्य x हो, b तथा c का स० माध्य y हो और a, b, c गु० श्रे० में हों, तो सिद्ध करें :

(i) $\dfrac{a}{x}+\dfrac{c}{y}=2$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1998]**

(ii) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{b}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2000]**

हल : दिया गया है

a तथा b का स० माध्य x है $\therefore$ $x=\dfrac{a+b}{2}$ ...(1)

b तथा c का स० माध्य $=y$ $\therefore$ $y=\dfrac{b+c}{2}$ ...(2)

तथा a, b, c गु० श्रे० में हैं। $\therefore$ $b^2=ac$ ...(3)

(i) अब बायाँ पक्ष $=\dfrac{a}{x}+\dfrac{c}{y}=\dfrac{a}{\frac{a+b}{2}}+\dfrac{c}{\frac{b+c}{2}}=\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{2c}{b+c}=\dfrac{2a(b+c)+2c(a+b)}{(a+b)(b+c)}$

$$=\frac{2[ab+ac+ac+bc]}{(a+b)(b+c)}=\frac{2[ab+b^2+ac+bc]}{(a+b)(b+c)} \quad [\because ac=b^2]$$

$$=\frac{2[b(a+b)+c(a+b)]}{(a+b)(b+c)}=\frac{2(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)}=2=\text{दायाँ पक्ष}$$

सिद्धम्

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(ii) बायाँ पक्ष $= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{a+b}{2}} + \frac{1}{\frac{b+c}{2}} = \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} = \frac{2[b+c+a+b]}{(a+b)(b+c)}$

$= \frac{2[a+2b+c]}{ab+ac+b^2+bc} = \frac{2[a+2b+c]}{ab+b^2+b^2+bc}$ $[\because b^2 = ac]$

$= \frac{2[a+2b+c]}{b[a+2b+c]} = \frac{2}{b} =$ दायाँ पक्ष **सिद्धम्**

उदाहरण 5. यदि a, b, c स० श्रे० में तथा x, y, z गु० श्रे० में हों तो साबित करें :

(i) $x^{b-c}\, y^{c-a}\, z^{a-b} = 1$ (ii) $x^b\, y^c\, z^a = x^c\, y^a\, z^b$

हल : दिया गया है :

a, b, c स० श्रे० में हैं

$\therefore$ $a - b = b - c$
तथा $2b = a + c$ ...(1)

तथा x, y, z गु० श्रे० में हैं

$\therefore$ $y^2 = xz$ ...(2)

अब (i) बायाँ पक्ष $= x^{b-c}\, y^{c-a}\, z^{a-b} = x^{b-c}\, y^{c-a}\, z^{b-c}$ [(1) से]

$= (xz)^{b-c}\, y^{c-a} = (y^2)^{b-c}\, y^{c-a}$ [(2) से]

$= y^{2b-2c} . y^{c-a} = y^{2b-2c+c-a} = y^{2b-c-a} = y^{a+c-c-a} = y^0 = 1$

अर्थात् $x^{b-c}\, y^{c-a}\, z^{a-b} = 1 =$ दायाँ पक्ष **सिद्धम्**

(ii) सिद्ध करना है $x^b y^c z^a = x^c y^a z^b$ या $\frac{x^b\, y^c\, z^a}{x^c\, y^a\, z^b} = 1$ या $x^{b-c}\, y^{c-a}\, z^{a-b} = 1$

[अब प्रश्न (i) की तरह बायाँ पक्ष लेकर हल करें]

उदाहरण 6. दो संख्याओं के समानांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य क्रमशः 34 तथा 16 हैं। संख्या बतायें।

हल : मान लिया संख्यायें a तथा b हैं।

प्रश्न से,

समानांतर माध्य $= \frac{a+b}{2} = 34$ तथा गुणोत्तर माध्य $= \sqrt{ab} = 16$

या $a + b = 34 \times 2 = 68$ ...(1)

$(\sqrt{ab})^2 = ab = 16^2 = 256$ ...(2)

अब $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 68^2 - 4 \times 256$ [(1) तथा (2) से]

$= 4624 - 1024$

अर्थात् $(a-b)^2 = 3600$ $\therefore$ $a - b = \sqrt{3600} = 60$ ...(3)

(1) तथा (3) को हल करने पर $a = 64, b = 4$

$\therefore$ अभीष्ट संख्यायें 64 तथा 4 हैं।

उदाहरण 7. यदि दो संख्याओं के मध्य एक गुणोत्तर माध्य G तथा दो समानांतर माध्य p तथा q हों तो दिखायें कि

$$G^2 = (2p - q)(2q - p)$$

हल : माना a तथा b दो संख्यायें हैं

तो प्रश्न से a तथा b का गुणोत्तर माध्य, $G = \sqrt{ab}$ या $G^2 = ab$ ...(1)

पुनः p तथा q इनके बीच स० मा० हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$\therefore$ a, p, q, b स० श्रे० में होंगे।

अर्थात् $p-a=q-p=b-q$

अब $p-a=q-p$ $\qquad \therefore \quad a=2p-q$ ...(2

तथा $q-p=b-q$ $\qquad \therefore \quad b=2q-p$ ...(3

(1) में (2) तथा (3) से a एवं b का मान रखने पर

$$G^2=(2p-q)(2q-p)$$

सिद्ध

उदाहरण 8. (i) गु० श्रे० की तीन संख्याओं का गुणनफल 216 है। दो-दो के गुणनफलों का योग 156 है। संख्यायें ज्ञात करें।

(ii) गुणोत्तर श्रेढी में ऐसी तीन संख्यायें ज्ञात करें जिनका योग 19 तथा गुणनफल 216 है।

हल : (i) माना गुणोत्तर श्रेढी में तीन संख्यायें $\frac{a}{r}, a, ar$ हैं।

प्रश्न से,

उनका गुणनफल $=\frac{a}{r}\times a\times ar=216 \Rightarrow a^3=216=6^3 \quad \therefore \ a=(6^3)^{1/3}=6$

तथा $\frac{a}{r}\times a+a\times ar+\frac{a}{r}\times ar=156$

$\Rightarrow \frac{6}{r}\times 6+6\times 6r+6\times 6=156$ $\qquad$ [a का मान रखने पर]

$\Rightarrow \frac{36}{r}+36r+36=156 \Rightarrow 36\left(\frac{1}{r}+r\right)=156-36=120$

या $3\left(\frac{1+r^2}{r}\right)=10 \Rightarrow 3(1+r^2)=10r$

या $3r^2-10r+3=0 \Rightarrow 3r^2-9r-r+3=0$

या $3r(r-3)-1(r-3)=0 \Rightarrow (r-3)(3r-1)=0$

$\therefore$ $r-3=0 \Rightarrow r=3$ तथा $3r-1=0 \Rightarrow r=\frac{1}{3}$

अत: यदि $a=6,\ r=3$ तो संख्यायें $\frac{6}{3}, 6, 6\times 3$ अर्थात् 2, 6, 18 हैं।

तथा यदि $a=6,\ r=\frac{1}{3}$, तो संख्यायें तो संख्यायें $6\times 3, 6, \frac{6}{3}$ अर्थात् 18, 6, 2 हैं।

(ii) माना गु० श्रे० में तीन संख्यायें $\frac{a}{r}, a, ar$ हैं।

प्रश्न से, $\frac{a}{r}\times a\times ar=216$

या $a^3=216=6^3 \Rightarrow a=(6^3)^{\frac{1}{3}}=6$

तथा $\frac{a}{r}+a+ar=19 \Rightarrow \frac{6}{r}+6+6r=19$ $\qquad$ [a का मान रखने पर

या $6r^2+6r+6=19r \Rightarrow 6r^2+6r-19r+6=0$

या $6r^2-13r+6=0 \Rightarrow 6r^2-9r-4r+6=0$

या $3r(2r-3)-2(r-3)=0 \Rightarrow (3r-2)(2r-3)=0$

$\therefore$ $3r-2=0$ या $2r-3=0 \Rightarrow r=\frac{2}{3}$ या $r=\frac{3}{2}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$\therefore$ संख्यायें $6\times\frac{3}{2}, 6, 6\times\frac{2}{3}$ या $6\times\frac{2}{3}, 6, 6\times\frac{3}{2}$

अर्थात् 9, 6, 4 या 4, 6, 9 हैं।

उदाहरण 9. यदि a और b के बीच समानांतर माध्य इनके बीच के गुणोत्तर माध्य का दुगुना हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$a:b=(2+\sqrt{3}):(2-\sqrt{3})$$

हल : माना a और b के बीच समानांतर माध्य A तथा गुणोत्तर माध्य G है।

तो $A=\frac{a+b}{2}$ तथा $G=\sqrt{ab}$

प्रश्नानुसार, $A=2G$ $\therefore$ $\frac{a+b}{2}=2\sqrt{ab}$ $\Rightarrow$ $\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}=\frac{2}{1}$

$\therefore$ योगान्तर अनुपात से, $\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}}=\frac{2+1}{2-1}$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+2\sqrt{a}\times\sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\times\sqrt{b}}=\frac{3}{1} \quad \Rightarrow \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}=\frac{3}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{3}}{1} \quad \Rightarrow \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \quad \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)^2}$$ [वर्ग रखने पर]

$$=\frac{3+1+2\sqrt{3}}{3+1-2\sqrt{3}}=\frac{4+2\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}=\frac{2[2+\sqrt{3}]}{2[2-\sqrt{3}]}$$

अतः $a:b=2+\sqrt{3}:2-\sqrt{3}$ सिद्धम्

स्मरणीय उपयोगी सूत्र

1. दो संख्याओं a तथा b के बीच एक गुणोत्तर माध्य $G=\sqrt{ab}=\sqrt{\text{संख्याओं का गुणनफल}}$

2. दो संख्याओं a तथा b के बीच n गुणोत्तर माध्य $=a\times\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, a\times\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \ldots a\times\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$

3. दो संख्याओं a तथा b के बीच n गुणोत्तर माध्यों का गुणनफल

$$=(ab)^{\frac{n}{2}}=(\sqrt{ab})^n$$

$$=(\text{एक माध्य})^n$$

4. यदि गुणोत्तर श्रेढी में

(i) तीन संख्याओं का गुणनफल दिया गया है, तो संख्यायें $\frac{a}{r}, a, ar$ लें [गुणनफल $=a^3$, सार्वअनुपात $=r$]

(ii) यदि चार संख्याओं का गुणनफल दिया गया है, तो $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$ लें।

[गुणनफल $=a^4$, सार्वअनुपात $=r^2$]

(iii) यदि पाँच संख्याओं का गुणनफल दिया गया है, तो $\frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$ लें।

[गुणनफल $=a^5$, सार्वअनुपात $=r$]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

प्रश्नावली 2.3

1. (i) 4 और 25 का गुणोत्तर माध्य बतायें।

(ii) $(x+y)^5$ और $\frac{1}{(x+y)^3}$ का गुणोत्तर माध्य बतायें।

(iii) $\frac{1}{3}$ और 432 के बीच तीन गुणोत्तर माध्य ज्ञात करें। [उ० प्र० डिप्लोमा 1984]

(iv) $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{243}$ के बीच तीन गुणोत्तर माध्य ज्ञात करें। [उ० प्र० डिप्लोमा 1990]

(v) $\frac{9}{4}$ और $\frac{8}{27}$ के बीच चार गुणोत्तर माध्य ज्ञात करें तथा उनका गुणनफल निकालें।

2. यदि a, b, c, d गुणोत्तर श्रेढी में हों, तो सिद्ध करें :

(i) a^2+b^2, b^2+c^2 तथा c^2+d^2 गु० श्रे० में होंगे।

(ii) $\frac{1}{a^3+b^3}, \frac{1}{b^3+c^3}, \frac{1}{c^3+d^3}$ गु० श्रे० में होंगे।

(iii) $(a+c)(c+d)=(b+c)(b+d)$

(iv) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

(v) $\frac{1}{(b^2+c^2)^2}=\frac{1}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

3. यदि a, b, c गु० श्रे० में हों तो सिद्ध कीजिए :

(i) $\log a, \log b, \log c$ स० श्रे० में होंगे। [उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]

(ii) $\frac{1}{\log_a n}, \frac{1}{\log_b n}, \frac{1}{\log_c n}$ स० श्रे० में होंगे।

[संकेत : $b^2=ac \Rightarrow \log_n b^2=\log_n a+\log_n c$

$\Rightarrow \frac{2}{\log_b n}=\frac{1}{\log_a n}+\frac{1}{\log_c n}$ $(\because \log_n a \times \log_a n=1)$]

4. सिद्ध करें कि दो धन संख्याओं का समानांतर माध्य उनके गु० माध्य से बड़ा होता है।

5. दो संख्याओं के समानांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य क्रमशः 10 तथा 8 हैं, तो संख्यायें बतायें।

6. दो संख्याओं का गुणोत्तर माध्य 8 तथा उनका अंतर 30 है, तो संख्यायें ज्ञात करें।

7. दो राशियों a तथा b का समानांतर माध्य A तथा गुणोत्तर माध्य G है। यदि $A:G=13:12$ तो $a:b$ का मान निकालें।

8. दो संख्याओं के समानांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य में $5:3$ का अनुपात है तो सिद्ध करें कि उन संख्याओं में $9:1$ का अनुपात है।

9. संख्यायें x, y, z गु० श्रे० में तथा $x, y+1, z$ समानांतर श्रेढी में हैं। यदि $x+y+z=14$ हो तो x, y तथा z का मान बतायें।

10. गुणोत्तर श्रेढी की किन्हीं तीन क्रमागत संख्याओं का योगफल 42 तथा गुणनफल 512 है, तो संख्यायें बतायें।

11. गुणोत्तर श्रेढी की किन्हीं तीन संख्याओं का गुणनफल 27 तथा क्रम से दो-दो संख्याओं के गुणनफलों का योग 39 है। संख्यायें ज्ञात करें।

12. गुणोत्तर श्रेणी की चार संख्याओं का योगफल 60 तथा प्रथम और अंतिम का समानांतर माध्य 18 है। संख्यायें ज्ञात करें।

[संकेत : यदि संख्यायें a, ar, ar^2, ar^3 हों तो, $a+ar^3=36 \Rightarrow a(a+r^3)=36$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

तथा $a + ar + ar^2 + ar^3 = 60 \Rightarrow a(1+r^3) + ar(1+r) = 60 \Rightarrow ar(1+r) = 24$

$\therefore \quad \frac{ar(1+r)}{a(1+r^3)} = \frac{24}{36} \Rightarrow r = 2$ या $r = \frac{1}{2}$]

13. यदि a, b, c गुणोत्तर श्रेढी में हों तो सिद्ध करें कि $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ समानांतर श्रेढी में होंगे।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]

14. यदि $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ तो सिद्ध करें कि x, y, z स० श्रे० में होंगे।

15. यदि a, b, c स० श्रे० में तथा x, y, z गु० श्रे० में हों तो साबित करें—

$$x^{b-c} y^{c-a} z^{a-b} = 1$$

उत्तरमाला

1. (i) 10 (ii) $x + y$ (iii) गु० माध्य 2, 12, 72 (iv) गु० मा० $\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$

(v) गु० माध्य $\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}$; गुणनफल $= \frac{4}{9}$

5. 16, 4 अथवा 4, 16

6. 32, 2 अथवा −2, −32

7. 9 : 4

9. $x = 8, y = 4, z = 2$

10. संख्याएँ 2, 8, 32 या 32, 8, 2

11. संख्याएँ 1, 3, 9 या 9, 3, 1

12. 4, 8, 16, 32 या 32, 16, 8, 4

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अध्याय 3

द्विपद सिद्धान्त (Binomial Theorem)

धनात्मक पूर्णांक घातांक (Positive Index)

3.1 परिभाषायें (Definitions)

3.1.1 द्विपद व्यंजक (Binomial Expression)

ऐसे बीजीय व्यंजक (Algebraic Expressions) जिनमें दो पद होते हैं, द्विपद व्यंजक कहलाते हैं।

जैसे—$a+2b$, $4x-3y$, $x+y$ इत्यादि द्विपद व्यंजक हैं।

3.1.2 द्विपद सिद्धान्त (Binomial Theorem)

द्विपद सिद्धांत एक बीजगणितीय सूत्र है जिसकी सहायता से किसी द्विपद के किसी भी घात का मान एक श्रेणी के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। सामान्यत: यह $(x+a)^n$ के रूप में, जहाँ n इसका घात है, व्यक्त किया जाता है।

3.1.3 धनात्मक पूर्णांक घातांक के लिए द्विपद सिद्धान्त (Binomial Theorem for Positive Integral Index)

कथन (Statement)—यदि n एक धनात्मक पूर्णांक हो, तो

$$(x+a)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}\, a + {}^nC_2\, x^{n-2}\, a^2 + \ldots + {}^nC_r\, x^{n-r}\, a^r + \ldots + {}^nC_n a^n$$

जहाँ x तथा a कोई दो संख्यायें हैं।

अर्थात् $$(x+a)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, x^{n-r}\, a^r$$

${}^nC_0, {}^nC_1, \ldots, {}^nC_r, \ldots, {}^nC_n$ द्विपद गुणांक (Binomial coefficients) तथा ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

3.1.4 $(x+a)^n$ के विस्तार में व्यापक पद (General Term in the Expansion of $(x+a)^n$)

$(x+a)^n$ के विस्तार में $(r+1)$ वें पद को इसका व्यापक पद कहते हैं। अत: यदि विस्तार का $(r+1)$ वाँ पद t_{r+1} हो, तो

व्यापक पद $= t_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r}\, a^r$ [धारा 3.1.3 से]

इसमें $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ रखकर विस्तार के विभिन्न पदों का मान ज्ञात किया जा सकता है।

जैसे : $(x+a)^{10}$ का व्यापक पद $t_{r+1} = {}^{10}C_r\, x^{10-r}\, a^r$ [$\because n = 10$]

यदि हमें विस्तार का 5वाँ पद ज्ञात करना है, तो $r=4$ रखने पर पाँचवाँ पद प्राप्त होगा।

$\therefore \quad t_{4+1} = t_5 = {}^{10}C_5\, x^{10-5}\, a^5 = {}^{10}C_5 \,.\, x^5\, a^5$

3.1.5 उपप्रमेय 1 : $(x-a)^n$ का विस्तार

$(x+a)^n$ के विस्तार में a के स्थान पर $-a$ रखने पर

$$(x-a)^n = {}^nC_0\, x^n - {}^nC_1\, x^{n-1}\, a + {}^nC_2\, x^{n-2} a^2 - \ldots + (-1)^r\, {}^nC_r\, x^{n-r}\, a^r + \ldots + (-1)^n\, {}^nC_n\, a^n$$

उपप्रमेय 2 : $$(a+x)^n = {}^nC_0\, a^n + {}^nC_1\, a^{n-1}\, x + {}^nC_2\, a^{n-2}\, x^2 + \ldots + {}^nC_2\, a^{n-r}\, x^r + \ldots + {}^nC_n\, x^n$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

तथा व्यापक पद $t_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}\, x^r$

उपप्रमेय 3 : $(a+x)^n$ के विस्तार में $a=1$ रखने पर

$$(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + \ldots + {}^nC_r\, x^r + \ldots + {}^nC_n\, x^n$$

3.1.6 $(x+a)^n$ के प्रसार के सम्बन्ध में कुछ महत्वपूर्ण तथ्य (Some Important Facts About $(x+a)^n$)

$(x+a)^n$ के विस्तार में

(i) n एक धनात्मक पूर्णांक है तथा इसे विस्तार का घातांक कहते हैं।

(ii) कुल $(n+1)$ पद अर्थात् घातांक से एक ज्यादा पद होते हैं। जैसे $n=5$ हो तो विस्तार में 6 पद होंगे।

(iii) व्यापक पद ${}^nC_r\, x^{n-r} a^r$ से स्पष्ट है कि x का घातांक C के पूर्वस्थ (Prefix) तथा उत्तरस्थ (Suffix) के अन्तर के बराबर तथा a का घात C के उत्तरस्थ (Suffix) के बराबर होता है। दोनों घातांकों का योग n के बराबर होता है।

(iv) विस्तार में समदूरस्थ पदों के द्विपद गुणांक बराबर होते हैं।

(v) विस्तार में **अंत से $(r+1)$ वाँ पद = प्रारंभ से $(n-r+1)$ वाँ पद**

3.1.7 ${}^nC_r$ का मान

(i) $${}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad \therefore\ {}^nC_0 = \frac{n!}{0!\,n!} = \frac{1}{0!} = 1$$

$${}^nC_1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n\,(n-1)!}{1\,(n-1)!} = n$$

इसी प्रकार, ${}^nC_2 = \dfrac{n\,(n-1)}{2!}$; ${}^nC_3 = \dfrac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3!}$; ${}^nC_n = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{1}{0!} = 1$

स्पष्ट है कि

$${}^{10}C_0 = {}^{10}C_{10} = 1,\ {}^{10}C_1 = {}^{10}C_9 = 10,\ {}^{10}C_2 = \frac{10\times 9}{2\times 1} = 45,\ {}^{10}C_3 = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1} = 120 \text{ इत्यादि।}$$

(ii) ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

$\therefore\ {}^nC_0 = {}^nC_n = 1,\ {}^nC_1 = {}^nC_{n-1},\ {}^nC_2 = {}^nC_{n-2}$ इत्यादि।

(iii) ${}^nC_x = {}^nC_y,\ x \neq y$ तो $x+y=n$

जैसे— ${}^5C_x = {}^5C_y \Rightarrow x+y=5$

3.1.8 $(x+a)^n$ के विस्तार में मध्य पद (Middle Term)

Case I : यदि n सम हो : इस स्थिति में विस्तार में पदों की संख्या $(n+1)$ होगी, जो विषम होगी। अत: मध्य पद **एक** ही होगा, जो $(n/2)+1$ **वाँ** पद होगा।

जैसे—यदि $n=6$ हो तो मध्य पद $(6/2)+1$ वाँ अर्थात् t_4 (चौथा पद) होगा।

Case II : यदि n विषम हो : इस स्थिति में भी विस्तार में $(n+1)$ पद होंगे जो एक सम संख्या होगी। अत: विस्तार में **दो मध्य पद** होंगे जो $\dfrac{n+1}{2}$ **वें** तथा $\dfrac{n+3}{2}$ या $\dfrac{n+1}{2}+1$ **वें** पद होंगे।

जैसे—यदि $n=9$ हो तो $\dfrac{9+1}{2}$ अर्थात् t_5 (पाँचवाँ) एवं $\dfrac{9+1}{3}$ अर्थात् t_6 (छठा पद) मध्य पद होंगे।

3.1.9 $(x+a)^n$ के प्रसार में x से मुक्त पद या अचर पद (Term independent of x or Constant Term in the expansion of $(x+a)^n$)

माना x से स्वतंत्र पद t_{r+1} है। दिए गए विस्तार से $(r+1)$ वाँ पद निकालकर उसमें x के घात को शून्य के बराबर कर देते हैं जिससे r का मान प्राप्त हो जाता है।

AK TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

जैसे : $\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$ के विस्तार में कौन-सा पद x से मुक्त होगा या अचर होगा ? पद का मान बतायें।

हल : माना $(r+1)$ वाँ पद x से मुक्त है।

अत: $t_{r+1} = {}^8C_r\, x^{8-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}^8C_r\, x^{8-r-r} = {}^8C_r\, x^{8-2r}$

दी गई शर्तों से $\quad 8-2r=0 \quad$ [x के घात को शून्य के बराबर करने पर]

$r=4$

$\therefore \quad t_5$ अर्थात् 5वाँ पद x से मुक्त होगा। तथा $t_5 = {}^8C_4 = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

Type I. प्रसार ज्ञात करना

उदाहरण 1. (i) $\left(x-\frac{1}{2x}\right)^6$ का प्रसार करें। (ii) $(1+x+x^2)^4$ का प्रसार करें।

हल : (i)
$$\left(x-\frac{1}{2x}\right)^6 = {}^6C_0\, x^6 + {}^6C_1\, x^5\times\left(-\frac{1}{2x}\right) + {}^6C_2\, x^4\times\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 + {}^6C_3\, x^3\times\left(-\frac{1}{2x}\right)^3 + {}^6C_4\, x^2\times\left(-\frac{1}{2x}\right)^4 + {}^6C_5\, x\times\left(-\frac{1}{2x}\right)^5 + {}^6C_6\left(-\frac{1}{2x}\right)^6$$

[द्विपद सिद्धान्त से]

$$= x^6 - 6x^5\times\frac{1}{2x} + \frac{6\times5}{2\times1}x^4\times\frac{1}{4x^2} + \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}x^3\times\left(-\frac{1}{8x^3}\right) + \frac{6\times5}{2\times1}x^2\times\frac{1}{16x^4} + 6x\times\left(-\frac{1}{32x^5}\right) + \frac{1}{64x^6}$$

$$= x^6 - 3x^4 + \frac{15}{4}x^2 - \frac{5}{2} + \frac{15}{16x^2} - \frac{3}{16x^4} + \frac{1}{64x^6}$$

उत्तर

(ii)
$$(1+x+x^2)^4 = \{(1+x)+x^2\}^4$$
$$= {}^4C_0\,(1+x)^4 + {}^4C_1\,(1+x)^3\times x^2 + {}^4C_2\,(1+x)^2\,(x^2)^2 + {}^4C_3\,(1+x)\,(x^2)^3 + {}^4C_4\,(x^2)^4$$
$$= 1\times[1+{}^4C_1\,x + {}^4C_2\,x^2 + {}^4C_3\,x^3 + {}^4C_4\,x^4] + 4\times[1+3x+3x^2+x^3]\,x^2 + \frac{4\times3}{2\times1}(1+2x+x^2)\,x^4 + 4\,(1+x)\,x^6 + 1\times x^8$$
$$= 1 + 4x + \frac{4\times3}{2\times1}x^2 + 4x^3 + 1\times x^4] + 4x^2 + 12x^3 + 12x^4 + 4x^5 + 6\,(1+2x+x^2)\,x^4 + 4x^6 + 4x^7 + x^8$$
$$= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4 + 4x^2 + 12x^3 + 12x^4 + 4x^5 + 6x^4 + 12x^5 + 6x^6 + 4x^6 + 4x^7 + x^8$$
$$= 1 + 4x + 10x^2 + 16x^3 + 19x^4 + 16x^5 + 10x^6 + 4x^7 + x^8$$

उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 2. द्विपद प्रमेय की सहायता से निम्न का मान ज्ञात करें :

(i) $(99)^4$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1986]**

(ii) $(0.99)^5$

हल : (i) $\because \ (99)^4 = (100-1)^4$

$$\therefore \quad (99)^4 = (100-1)^4 = (100)^4\left[1-\frac{1}{100}\right]^4$$

$$= (100)^4\left[{}^4C_0(1)^4 + {}^4C_1\,(1)^3\left(-\frac{1}{100}\right) + {}^4C_2\,(1)^2\left(-\frac{1}{100}\right)^2 + {}^4C_3\,(1)\left(-\frac{1}{100}\right)^3 + {}^4C_4\left(-\frac{1}{100}\right)^4\right]$$

$$= (100)^4\left[1-4\times1\times\frac{1}{100}+\frac{4\times3}{2\times1}\times\frac{1}{(100)^2}-4\times1\times\frac{1}{(100)^3}+\frac{1}{(100)^4}\right]$$

$$= 100^4 - 4\times(100)^3 + 6\times(100)^2 - 4\times100+1$$

$$= 100000000 - 4000000 + 60000 - 400 + 1 = 96059601$$ **उत्तर**

(ii) $(0.99)^5 = [1-.01]^5$ [अब भाग (i) की तरह स्वयं करें।]

Type II. पद ज्ञात करना

उदाहरण 3. (i) $(a+2x^3)^{16}$ का 12 वाँ पद बतायें।

(ii) $\left(x-\frac{5}{x}\right)^6$ के प्रसार में अन्त से दूसरा पद ज्ञात करें।

हल : (i) $(x+a)^n$ के प्रसार में $t_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r}\, a^r$ यहाँ $n=16, x=a, a=2x^3$

$\therefore \quad (a+2x^3)^{16}$ का 12वाँ पद

$$t_{12} = t_{11+1} = {}^{16}C_{11}\, a^{16-11}\,(2x^3)^{11}$$

$$= {}^{16}C_5\, a^5 \times 2^{11}\times x^{33} \qquad [{}^nC_r = {}^nC_{n-r}]$$

$$= \frac{16\times15\times14\times13\times12}{5\times4\times3\times2\times1}\times2^{11}\times a^5\times x^{33} = 4368\times2^{11}\,a^5\,x^{33}$$

(ii) $(x+a)^n$ के प्रसार में अन्त से $(r+1)$वाँ पद = प्रारंभ से $(n-r+1)$वाँ पद

$\therefore \quad \left(x-\frac{5}{x}\right)^6$ के प्रसार में

अन्त से दूसरा पद = प्रारम्भ से $(6-1+1)$वाँ पद = प्रारम्भ से छठा पद $= t_6$

$[\because n=6, r+1=2 \Rightarrow r=1]$

$$\therefore \quad t_6 = t_{5+1} = {}^6C_5\, x^{6-5}\left(-\frac{5}{x}\right)^5 = {}^6C_1\, x\times\frac{5^5}{x^5}(-1)^5$$

$$= -6\times5\times5\times5\times5\times5\times\frac{1}{x^4} = -18750\,x^{-4}$$ **उत्तर**

Type III. मध्य पद ज्ञात करना

उदाहरण 4. (i) $\left(2x-\frac{x^2}{4}\right)^9$ के प्रसार में मध्य पद ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2000]

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(ii) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$ के प्रसार में मध्य पद ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]

(iii) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{15}$ के प्रसार में मध्य पद ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2015]

(iv) सिद्ध कीजिए कि $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में मध्य पद $\frac{1\times 3\times 5\times \ldots (2n-1)}{n!}\times 2^n\, x^n$ है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2007]

हल : (i) दिया गया प्रसार $\left(2x-\frac{x^2}{4}\right)^9$

अत: $n=9$, जो एक विषम संख्या है। $\therefore$ विस्तार में दो मध्य पद होंगे।

प्रथम मध्य पद $=t_{\frac{9+1}{2}}=t_5$, तथा द्वितीय मध्य पद $=t_{\frac{9+1}{2}+1}=t_6$

अब $t_5=t_{4+1}={}^9C_4\,(2x)^{9-4}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^4$ $\qquad [\because t_{r+1}={}^nC_r\, x^{n-r}\, a^r]$

$$=\frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1}\times 2^5\times x^5\times \frac{x^8}{4^4}=\frac{126\times 32}{4\times 4\times 4\times 4}x^{13}=\frac{63}{4}\times x^{13}$$

तथा $t_6=t_{5+1}={}^9C_5\,(2x)^{9-5}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^5$

$$=\frac{9\times 8\times 7\times 6\times 5}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}\times 2^4 x^4\times (-1)^5\times \frac{x^{10}}{4^5}=-\frac{63}{32}x^{14}$$

$\therefore$ अभीष्ट मध्य पद $\frac{63}{4}x^{13}$ तथा $-\frac{63}{32}x^{14}$ होंगे।

(ii) दिया गया प्रसार $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$ $\quad \therefore \quad n=12,$ जो सम है।

$\therefore$ मध्य पद एक ही होगा एवं वह पद $t_{(12/2)+1}=t_7$ होगा।

$\therefore$ $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$ के प्रसार में सातवाँ पद

$t_7=t_{6+1}={}^{12}C_6\, x^{12-6}\left(-\frac{1}{x}\right)^6$ $\qquad [\because t_{r+1}={}^nC_r\, x^{n-r}\, a^r]$

$$=\frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}x^6\times \frac{1}{x^6}$$

$=924=x$ से मुक्त पद (अचर पद)

(iii) भाग (ii) की भाँति करें।

(iv) दिया गया प्रसार $=(1+x)^{2n}$

घातांक $=2n=$ एक सम संख्या

$\therefore$ पदों की संख्या $=2n+1$ तथा मध्य पद एक होगा।

$\therefore$ मध्य पद $=t_{(2n/2)+1}=t_{(n+1)}$

$$={}^{2n}C_n\,(1)^{2n-n}\,x^n={}^{2n}C_n\,x^n$$

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$= \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} x^n = \frac{(2n)!}{n!n!} x^n$$

$$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 .. \times (2n-1) \times 2n}{(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times n) \times n!} x^n$$

$$= \frac{1 \times 3 \times 5 \times ... (n-1) \{2 \times 4 \times 6 \times .. \times 2n\}}{\{1 \times 2 \times 3 \times ... \times n\} \times n!}$$

$$= \frac{[1 \times 3 \times 5 \times ... (2n-1)] \times 2^n \{1 \times 2 \times 3 \times ... \times n\}}{(1 \times 2 \times 3 \times ... \times n) n!} x^n$$

$$= \frac{1 \times 3 \times 5 \times ... (2n-1)}{n!} \times 2^n x^n$$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 5. $\left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^{15}$ के प्रसार में x से मुक्त पद (अचर पद) बतायें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2007]

हल : दिया गया प्रसार $= \left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^{15}$

माना t_{p+1}वाँ पद x से मुक्त पद है।

$\therefore \quad t_{p+1} = {}^{15}C_p (x^2)^{15-p} \left(-\frac{2}{x^3}\right)^p = {}^{15}C_p \, x^{30-2p} (-2)^p \times \left(\frac{1}{x^3}\right)^p$

$= {}^{15}C_p (-2)^p x^{30-2p-3p} = (-2)^p \, {}^{15}C_p \, x^{30-5p}$ ...(1)

$\because$ परिकल्पना से यह पद x से मुक्त है।

$\therefore \quad x^{30-5p} = x^0 \Rightarrow 30 - 5p = 0$ या $5p = 30 \quad \therefore \quad p = \frac{30}{5} = 6$

$\therefore \quad t_{6+1}$ अर्थात् t_7, x से मुक्त है तथा (1) में $p = 6$ रखने पर

$$t_7 = (-2)^6 \, {}^{15}C_6 = 64 \times \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 320320$$ **उत्तर**

Type IV. गुणांक ज्ञात करना

उदाहरण 6. $\left(x^3 - \frac{2}{x^3}\right)^{15}$ के प्रसार में x^3 का गुणांक ज्ञात करें।

हल : माना $\left(x^3 - \frac{2}{x^3}\right)^{15}$ के प्रसार में x^3, t_{p+1}वें पद में आता है।

$\therefore \quad t_{p+1} = {}^{15}C_p (x^3)^{15-p} \left(-\frac{2}{x^3}\right)^p$

$= {}^{15}C_p \, x^{45-3p} \times (-2)^p \times \frac{1}{x^{3p}} = (-2)^p \, {}^{15}C_p \, x^{45-6p}$ ...(1)

परिकल्पना से $x^{45-6p} = x^3$

या $45 - 6p = 3$ या $6p = 42 \quad \therefore \quad p = \frac{42}{6} = 7$

(1) में p का मान रखने पर x^3 का गुणांक $= (-2)^7 \, {}^{15}C_7$

$\therefore \quad x^3$ का गुणांक $= -128 \times \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = -823680$ **उत्तर**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

उदाहरण 7. (i) ${}^nC_{12} = {}^nC_{15}$, तब ${}^nC_{25}$ तथा ${}^{30}C_n$ का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2009, 16(B)]**

(ii) ${}^{10}C_r = {}^{10}C_{r+2}$ तो ${}^{10}C_r$ का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]**

हल : (i) दिया गया है : ${}^nC_{12} = {}^nC_{15}$

$\therefore \quad n = 12 + 15 = 27$ $\quad [\because {}^nC_x = {}^nC_y$ तो $x + y = n]$

$$\therefore \quad {}^nC_{25} = {}^{27}C_{25} = \frac{27!}{25!(27-25)!} = \frac{27 \times 26 \times 25!}{2!25!} = \frac{27 \times 26}{2 \times 1} = 351$$

तथा $${}^{30}C_n = {}^{30}C_{27} = \frac{30!}{27!(30-27)!} = \frac{30!}{3!27!} = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27!}{3 \times 2 \times 1 \times 27!} = 4060$$

(ii) दिया गया है : ${}^{10}C_r = {}^{10}C_{r+2}$

$\therefore \quad r + r + 2 = 10$ $\quad [\because {}^nC_x = {}^nC_y \Rightarrow x + y = n]$

$\Rightarrow \quad 2r + 2 = 10 \quad \Rightarrow \quad 2r = 10 - 2 = 8$

$\therefore \quad r = \frac{8}{2} = 4 \quad \therefore \quad {}^{10}C_r = {}^{10}C_4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6!} = 210$

Type V. अन्य प्रश्न

उदाहरण 8 : यदि $(x + a)^n$ के प्रसार में दूसरा, तीसरा और चौथा पद क्रमशः 240, 720 और 1080 हों तो x, a तथा n का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]**

हल : दिया गया है :

$$t_2 = 240 \quad \ldots(1)$$
$$t_3 = 720 \quad \ldots(2)$$
$$t_4 = 1080 \quad \ldots(3)$$

सूत्र $t_{r+1} = {}^nC_r \, x^{n-r} a^r$ से $\quad \therefore \quad t_2 = t_{1+1} = {}^nC_1 \, x^{n-1} a = 240$ [समी० (1) से]

$\therefore \quad nax^{n-1} = 240 \quad \ldots(4)$

$t_3 = t_{2+1} = {}^nC_2 \, x^{n-2} a^2 = 720$ [समी० (2) से]

या $\frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} a^2 = 720 \quad \therefore \quad n(n-1) a^2 x^{n-2} = 1440 \quad \ldots(5)$

तथा $t_4 = t_{3+1} = {}^nC_3 \, x^{n-3} a^3 = 1080$

या $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} a^3 x^{n-3} = 1080 \quad \therefore \quad n(n-1)(n-2) a^3 x^{n-3} = 6480 \quad \ldots(6)$

समीकरण (4) को (5) से भाग देने पर

$$\frac{na\,x^{n-1}}{n(n-1)a^2 x^{n-2}} = \frac{240}{1440} \quad \text{या} \quad \frac{x^{n-1-n+2}}{a(n-1)} = \frac{1}{6} \quad \therefore \quad x = \frac{1}{6}(n-1)a \quad \ldots(7)$$

समीकरण (5) को (6) से भाग देने पर $$\frac{n(n-1)a^2 x^{n-2}}{n(n-1)(n-2)a^3 x^{n-3}} = \frac{1440}{6480}$$

या $\frac{x^{n-2-n+3}}{(n-2)a} = \frac{2}{9} \quad \therefore \quad x = \frac{2}{9}(n-2)a \quad \ldots(8)$

अतः (7) तथा (8) से, $\frac{1}{6}(n-1)a = \frac{2}{9}(n-2)a$

या $9(n-1) = 12(n-2)$ $\quad$ या $9n - 9 = 12n - 24$

Scanned with CamScanner

या $12n - 9n = 24 - 9$ या $3n = 15$ $\therefore\ n = \frac{15}{3} = 5$

अब समीकरण (8) से, $x = \frac{2}{9}(5-2)\,a = \frac{2}{3}a$ ...(9)

$\therefore$ समीकरण (4) से $5a\left(\frac{2}{3}a\right)^4 = 240$ [$n = 5$ तथा $x = \frac{2}{3}a$ रखने पर]

या $5a \times \frac{16}{81}a^4 = 240$ या $a^5 = \frac{240 \times 81}{5 \times 16}$

या $a^5 = 3 \times 81 = 3 \times 3^4 = 3^5$ $\therefore\ a = 3$

$\therefore$ (9) से $x = \frac{2}{3} \times 3 = 2$ अत: $x = 2, a = 3, n = 5$ **उत्तर**

उदाहरण 9. यदि $(1+x)^{2n}$ के विस्तार में $(p+1)$ वें पद का गुणांक $(p+3)$ वें पद के गुणांक के बराबर हो, तो दिखायें कि $p = n - 1$

हल : दिया गया विस्तार $= (1+x)^{2n}$

$\therefore$ $(p+1)$ वें पद का गुणांक $= {}^{2n}C_p$ ...(1)

$\therefore$ $(p+3)$वें पद का गुणांक $= {}^{2n}C_{p+2}$ ...(2)

प्रश्न से (1) तथा (2) बराबर हैं

$\therefore$ ${}^{2n}C_p = {}^{2n}C_{p+2}$ या $p + p + 2 = 2n$ [$\because\ {}^nC_x = {}^nC_y \Rightarrow x + y = n$]

या $2p + 2 = 2n$ या $2(p+1) = 2n$ या $p + 1 = n$ $\therefore\ p = n - 1$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 10. यदि n एक धन पूर्णांक हो, तो सिद्ध कीजिये कि $3^{3n} - 26n - 1$, $(26)^2$ से पूर्णतया विभाज्य है।

हल : $\because$ $3^{3n} = (3^3) = (27)^n = (1+26)^n$

$$= 1 + {}^nC_1\,(26) + {}^nC_2\,(26)^2 + {}^nC_3\,(26)^3 + \ldots + (26)^n$$

अब $3^{3n} - 26n - 1 = 1 + 26n + \frac{n(n-1)}{1.2}.(26)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(26)^3 + \ldots + (26)^n - 26n - 1$

$$= \frac{n(n-1)}{1.2}(26)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(26)^3 + \ldots + (26)^n$$

$$= (26)^2\left[\frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(26)^3 + \ldots + (26)^{n-2}\right]$$

जोकि $(26)^2$ से पूर्णतया विभाज्य है।

स्मरणीय उपयोगी सूत्र

1. (i) $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \times 2 \times 1 = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$ आदि।

(ii) ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ (iii) ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

(iv) यदि ${}^nC_x = {}^nC_y$ जहाँ $x \neq y$ तो $x + y = n$

(v) ${}^nC_0 = 1, {}^nC_n = 1, {}^nC_1 = n, {}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2!}, {}^nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$ आदि।

(vi) ${}^nC_r + {}^nC_{r+1} = {}^{n+1}C_{r+1}$

2. (i) $(x+a)^n = {}^nC_0\,x^n + {}^nC_1\,x^{n-1}a + {}^nC_2\,x^{n-2} + \ldots + {}^nC_r\,x^{n-r}a^r + \ldots + {}^nC_n\,a^n$

(ii) $(x-a)^n = {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}a + {}^nC_2\,x^{n-2}a^2 - {}^nC_3\,x^{n-3}a^3 + \ldots$

$$+ (-1)^r\,{}^nC_r\,x^{n-r}a^r + \ldots (-1)^n\,{}^nC_n$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(iii) $(1+x)^n = 1 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + \ldots + {}^nC_r\, x^r + \ldots + {}^nC_n\, x^n$

जहाँ ${}^nC_0, {}^nC_1, \ldots, {}^nC_r, \ldots, {}^nC_n$ द्विपद गुणांक हैं।

(iv) (a) $(x+a)^n$ के विस्तार में व्यापक पद (General Term) $t_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r}\, a^r$

(b) $(a+x)^n$ के विस्तार में व्यापक पद $T_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}\, x^r$

(v) मध्य पद (Middle Term)

(i) यदि n सम (even) हो, तो मध्य पद एक होगा तथा वह पद $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वाँ पद होगा।

(ii) यदि n विषम (odd) हो तो मध्य पद दो होंगे, जो क्रमशः $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें तथा $\left(\frac{n+3}{2}\right)$ वें पद होंगे।

(vi) $(x+a)^n$ के विस्तार में अंत से $(r+1)$ वाँ पद = प्रारंभ से $(n-r+1)$ वाँ पद।

प्रश्नावली 3.1

1. निम्नलिखित व्यंजकों को द्विपद सिद्धान्त की सहायता से प्रसार करें :

(i) $(x+2)^4$ (ii) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$ (iii) $\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^5$ (iv) $(3-x^2)^5$ (v) $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^6$ (vi) $(x+2a)^5$

2. द्विपद सिद्धान्त की सहायता से निम्न का मान ज्ञात करें :

(i) $(51)^4$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1997]** (ii) $(1001)^3$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1996]**

(iii) $(49)^3$ (iv) $(1+\sqrt{5})^4 + (1-\sqrt{5})^4$

(v) $(2+\sqrt{x})^4 + (2-\sqrt{x})^4$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2000]**

3. (i) $\left(3x+\frac{y}{2}\right)^9$ का छठा पद ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1982]**

(ii) $\left(\frac{4x}{5}-\frac{5}{2x}\right)^8$ का पाँचवाँ पद बतायें। (iii) $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^9$ का व्यापक पद बतायें।

(iv) $\left(x^3-\frac{2}{x^3}\right)^9$ के विस्तार में अन्त से पाँचवाँ पद बतायें।

(v) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^n$ के विस्तार में व्यापक पद बतायें। (vi) $\left(\frac{4x}{5}-\frac{5}{4x}\right)^{10}$ के प्रसार में छठा पद ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(S), 17(SB)]

विस्तार में निम्नांकित के लिए मध्य पद प्राप्त करें।

4. (i) $\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)^{10}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]** (ii) $\left(3x-\frac{1}{2x}\right)^{16}$

(iii) $\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^{2n}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2000]** (iv) $\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)^{10}$

(v) $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{11}$ (vi) $\left(\frac{4x}{5a}+\frac{5a}{4x}\right)^{10}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]**

5. (i) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$ के विस्तार में x से मुक्त पद बतायें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(ii) $\left(x^2-\frac{2}{x^3}\right)^{15}$ के प्रसार में x से मुक्त पद (अचर पद) बतायें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2007]

(iii) $\left(\frac{4}{3}x^2-\frac{3}{2x}\right)^9$ के विस्तार में अचर पद बतायें।

(iv) $\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{3x}\right)^9$ के विस्तार में अचर पद बतायें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1992]

(v) $\left(3x-\frac{2}{x^2}\right)^{15}$ के प्रसार में x से मुक्त पद बतायें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2014]

6. (i) $\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^{17}$ के विस्तार में x^{11} का गुणांक बतायें।

(ii) $\left(2x^3-\frac{1}{3x^3}\right)^{10}$ के विस्तार में x^5 का गुणांक बतायें।

(iii) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ के प्रसार में x^r का गुणांक बतायें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1991]

(iv) $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^{12}$ के प्रसार में वह पद ज्ञात करें जिसमें x^3 हो।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(S)]

(v) $\left(\frac{4x}{5}+\frac{5}{2x}\right)^{17}$ के प्रसार में x^5 का गुणांक ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(O)]

7. (i) ${}^nC_{10}={}^nC_{15}$, तो ${}^{27}C_n$ का मान बतायें। (ii) ${}^nC_{14}={}^nC_{16}$, तो ${}^nC_{28}$ का मान बतायें।

(iii) सिद्ध करें : ${}^nC_r={}^nC_{n-r}$ (iv) ${}^{10}C_r={}^{10}C_{r+2}$ तो ${}^{10}C_r$ का मान बतायें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]

(v) $\frac{{}^{15}C_r}{{}^{15}C_{r-1}}=\frac{11}{5}$ तो r का मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]

8. $(1+x)^n$ के प्रसार में दूसरे, तीसरे एवं चौथे पद के गुणांक समानांतर श्रेढी में हों तो n का मान ज्ञात करें।
[संकेत : $2\,{}^nC_2={}^nC_1+{}^nC_3$]

9. यदि $(1+x)^n$ के विस्तार में तीन लगातार पदों के द्विपद गुणांक 220, 495 तथा 792 हैं, तो n का मान बतायें।
[संकेत : $\frac{t_{r+1}}{t_{r+2}}=\frac{220}{495}$; $\frac{t_{r+2}}{t_{r+3}}=\frac{495}{792}$]

10. यदि $(x+a)^n$ के प्रसार में विषम पदों का योगफल P तथा सम पदों का योगफल Q हो तो सिद्ध करें :

$$P^2-Q^2=(x^2-a^2)^n \quad \text{तथा} \quad 4PQ=(x+a)^{2n}-(x-a)^{2n}$$

[संकेत : $\because P+Q=(x+a)^n$ तथा $P-Q=(x-a)^n$

$\therefore \quad P^2-Q^2=(P+Q)(P-Q)=(x+a)^n(x-a)^n$

तथा $\quad 4PQ=(P+Q)^2-(P-Q)^2=\{(x+a)^n\}^2-\{(x-a)^n\}^2$]

11. यदि $(1+x)^{15}$ के विस्तार में $(2r+4)$ वें तथा $(r-2)$ वें पदों के गुणांक बराबर हैं, तो r का मान तथा r वाँ पद ज्ञात करें।

12. (i) यदि n इकाई से अधिक कोई धन पूर्णांक हो तो सिद्ध कीजिए कि $3^{3n}-26n-1$, $(26)^2$ से पूर्णतया विभाज्य है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(ii) यदि n इकाई से अधिक कोई धनपूर्णांक हो तो सिद्ध कीजिए कि $2^{4n} - 15n - 1$ संख्या 225 से पूर्णतया विभाज्य है।

(iii) यदि n इकाई से अधिक कोई धन पूर्णांक हो तो सिद्ध करें कि $3^{2n+2} - 8n - 9$, 64 से पूर्णतया विभाज्य है।

उत्तरमाला

1. (i) $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$ (ii) $x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$

(iii) $\frac{a^5}{x^5} + 5\frac{a^3}{x^3} + \frac{10a}{x} + \frac{10x}{a} + \frac{5x^3}{a^3} + \frac{x^5}{a^5}$ (iv) $243 - 405x^2 + 270x^4 - 90x^6 + 15x^8 - x^{10}$

(v) $64x^{12} - 576x^9 + 2160x^6 - 4320x^3 + 4860 - \frac{2916}{x^3} + \frac{729}{x^6}$

2. (i) 6765201 (ii) 1003003001 (iii) 117649 (iv) 112 (v) $2x^2 + 48x + 32$

3. (i) $\frac{5103}{16}x^4y^5$ (ii) 1120 (iii) ${}^9C_r\,(-2)^r\,x^{18-3r}$ (iv) $-\frac{4032}{x^3}$

(v) ${}^nC_r\left(\frac{a}{b}\right)^{n-2r}$ (vi) $-\frac{315}{x}$

4. (i) 252 (ii) $12870 \times \frac{3^8}{2^8}$ (iii) $(-1)^n\frac{(2n)!}{n!\,n!}$ (iv) -252

(v) $462\,x^7$; $462\,x^4$ (vi) 252

5. (i) 924 (ii) 320320 (iii) 2268 (iv) $\frac{7}{18}$ (v) छठा पद, ${}^{15}C_5(3)^5\,(-2)^5$

6. (i) 544 (ii) 0 (iii) $\frac{n!}{\frac{1}{2}(n-r)!\,\frac{1}{2}(n+r)!}$ (iv) चौथा पद $= 220x^3$ (v) ${}^{17}C_6\,\frac{4^8}{5^5}$

7. (i) 351 (ii) 435 (iv) 210 (v) $r = 5$

8. $n = 7$ **9.** $n = 12$ **11.** $r = 5$, पद $= 1365\,x^4$

3.2 महत्तम द्विपद गुणांक तथा महत्तम पद (Maximum Binomial Coefficent and Greatest Term)

3.2.1 $(x+a)^n$ के विस्तार में महत्तम गुणांक ज्ञात करना : (To Find Maximum Coefficent in the Expansion of $(x+a)^n$)

हम जानते हैं कि $(x+a)^n$ के विस्तार में व्यापक पद का गुणांक ${}^nC_r$ से दिया जाता है। इसमें $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ से रखने से अन्य गुणांक ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \ldots, {}^nC_n$ प्राप्त होते हैं। विस्तार में महत्तम द्विपद गुणांक के लिए r का मान निम्न विधि से ज्ञात किया जाता है। $(x+a)^n$ के विस्तार में

महत्तम द्विपद गुणांक = मध्य पद का द्विपद गुणांक

अतः **1. जब n सम संख्या हो :** इस स्थिति में ${}^nC_r$ महत्तम तब होता है जब $r = \frac{1}{2}n$

∴ महत्तम गुणांक = मध्य पद का गुणांक $= {}^nC_{n/2}$

जैसे : यदि $(x+a)^n$ में $n = 6$ हो तो महत्तम द्विपद गुणांक ${}^6C_{6/2}$ अर्थात् ${}^6C_3$ होगा।

2. जब n विषम हो : इस स्थिति में दो मध्य पद होते हैं। अतः महत्तम द्विपद गुणांक के लिए

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$r = \frac{n-1}{2} \text{ या } \frac{n+1}{2}$$

अर्थात् महत्तम द्विपद गुणांक = मध्य पद का द्विपद गुणांक = $^nC_{\frac{n-1}{2}}$ या $^nC_{\frac{n+1}{2}}$

यें दोनों मान में बराबर होते हैं।

जैसे : $(x+a)^7$ के विस्तार में महत्तम द्विपद गुणांक = $^7C_{\frac{7-1}{2}}$ तथा $^7C_{\frac{7+1}{2}}$

अर्थात् $^7C_3$ तथा $^7C_4$ होंगे जो मान में बराबर होंगे।

3.2.2 $(x+a)^n$ के विस्तार में महत्तम पद ज्ञात करना (To Find Greatest Term) :

माना $(x+a)^n$ के विस्तार में महत्तम पद $=(r+1)$ वाँ पद $=t_{r+1}$

अब $(x+a)^n$ के विस्तार में $t_{r+1} \geq t_r$

$$\therefore \quad \frac{t_{r+1}}{t_r} \geq 1 \qquad \text{या} \qquad \frac{^nC_r\, x^{n-r}\, a^r}{^nC_{r-1}\, x^{n-r+1}\, a^{r-1}} \geq 1$$

$$\text{या} \qquad \frac{\dfrac{n!}{r!(n-r)!}}{\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}}\, x^{n-r-n+r-1}\, a^{r-r+1} \geq 1$$

$$\text{या} \qquad \frac{\dfrac{1}{r(r-1)!(n-r)!}}{\dfrac{1}{(r-1)! \times (n-r+1)(n-r)!}}\, x^{-1}\, a \geq 1$$

$$\text{अर्थात्} \qquad \boldsymbol{\frac{n-r+1}{r}\,\frac{a}{x} \geq 1} \qquad \ldots(1)$$

इसे सूत्र के रूप में याद रखें।

$(x+a)^n$ या $(x-a)^n$ के विस्तार में महत्तम पद ज्ञात करने के लिए n, x तथा a का मान (1) में रखें तथा r का मान ज्ञात करें।

अब (i) यदि r का मान पूर्णांक हो तो r तथा $(r+1)$वाँ पद महत्तम पद होगा।

जैसे : $r=5$ हो तो पाँचवाँ तथा छठा पद महत्तम पद होगा।

(ii) यदि r का मान भिन्न हो, जैसे $r = 7\frac{2}{3}$ तो आठवाँ पद महत्तम पद होगा।

नोट :

- (i) r के मान ज्ञात करने के लिए सूत्र (1) का प्रयोग करते समय a का मान **धनात्मक** लेते हैं चाहे विस्तार $(x+a)^n$ या $(x-a)^n$ किसी रूप में लिखा हो।
- (ii) यदि विस्तार $(1+x)^n$ या $(1-x)^n$ के रूप का हो, सूत्र (1) निम्न रूप का हो जाता है :

$$\frac{n-r+1}{r}\, x \geq 1$$

n एवं x का मान रखकर r ज्ञात किया जाता है तथा पूर्वोक्त विधि से महत्तम पद का निर्धारण किया जाता है। क्रिया विधि आगे दिए हुए उदाहरणों से स्पष्ट हो जाएगी।

- (iii) $(x+a)^n$ के लिए $\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{n-r+1}{r}\,\frac{a}{x}$ तथा $(1+x)^n$ के लिए $\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{n-r+1}{r}\, x$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. यदि $x=4$, तो $(4-3x)^8$ के प्रसार में महत्तम पद ज्ञात करें। [उ० प्र० डिप्लोमा 200

हल : दिया गया प्रसार $=(4-3x)^8$

$\therefore$ $(x+a)^n$ से तुलना करने पर $x=4, a=-3x, n=8$

यदि t_{r+1} महत्तम पद हो तो $\frac{t_{r+1}}{t_r} \geq 1 \Rightarrow \frac{n-r+1}{r} \frac{a}{x} \geq 1 \Rightarrow \frac{8-r+1}{r} \frac{3x}{4} \geq 1$

[r के संख्यात्मक मान के लिए $3x$ +ve लिया गया है

$\Rightarrow \frac{8-r+1}{r} \times \frac{3 \times 4}{4} \geq 1$ [$x=4$ दिया गया है]

$\Rightarrow \frac{3(9-r)}{r} \geq 1$ या $27-3r \geq r$ या $4r \leq 27$ या $r \leq 6\frac{3}{4}$

$\because$ r एक पूर्णांक है अत: $r=6$

$\therefore$ महत्तम पद $t_{r+1}=t_7$ होगा।

अत: $(4-3x)^8$ के विस्तार में 7वाँ पद महत्तम पद होगा।

उदाहरण 2. $(2-3x)^7$ के प्रसार में महत्तम पद ज्ञात करें, जबकि $x=2$

हल : माना प्रसार के दो क्रमागत पद t_r तथा t_{r+1} हैं तथा t_{r+1} महत्तम पद है, तो

सूत्र से, $\frac{t_{r+1}}{t_r} = \frac{n-r+1}{r} \frac{a}{x}$

अब $(x+a)^n$ की $(2-3x)^7$ से तुलना करने पर $x=2, a=-3x, n=7$

$\therefore$ सूत्र से, $\frac{t_{r+1}}{t_r} \geq 1$ अर्थात् $\frac{7-r+1}{r} \frac{3x}{2} \geq 1$ [a का मान धनात्मक लिया गया है।]

या $\frac{8-r}{r} \frac{3 \times 2}{2} \geq 1$ [$x=2$ रखने पर]

या $3(8-r) \geq r$ या $24-3r \geq r$ या $4r \leq 24$ या $r \leq 6$

अत: t_{r+1} के महत्तम होने के लिए $r=5$ या 6

$\therefore$ महत्तम पद $=t_6$ या t_7 होगा जिनके मान बराबर होंगे।

$\therefore$ $(2-3x)^7$ के विस्तार में छठा या सातवाँ महत्तम पद है।

उदाहरण 3. $(1+x)^8$ के प्रसार में सबसे बड़ा गुणांक ज्ञात करें।

हल : दिया गया प्रसार $=(1+x)^8$

यहाँ $n=8$ जो सम है।

$\therefore$ $\left(\frac{8}{2}+1\right)$वाँ या 5वाँ पद मध्य पद है और इसका गुणांक महत्तम होगा।

$\therefore$ 5वें पद का गुणांक $= {}^8C_4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{35}{12}$

$\therefore$ महत्तम पद गुणांक $=\frac{35}{12}$

उत्तर

3.2.3 द्विपद गुणांक एवं उनके गुण (Binomial Coefficients and Their Properties)

हम जानते हैं, यदि n धनात्मक पूर्णांक हों, तो

$$(x+a)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1} a + {}^nC_2\, x^{n-2} a^2 + \ldots + {}^nC_r\, x^{n-r} a^r + \ldots + {}^nC_n\, a^n$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

यहाँ $^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \ldots, {}^nC_r, \ldots, {}^nC_n$ द्विपद गुणांक कहलाते हैं तथा संक्षेप में क्रमशः $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_r, \ldots, C_n$ से निरूपित किए जाते हैं।

अब (1) में $x=1$ तथा $a=x$ लेने पर

$$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_rx^2 + \ldots + C_nx^n \quad \text{[सूत्र]}$$

प्रमेय 1. द्विपद गुणांकों का योग 2^n होता है।

अर्थात् $$C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_r + \ldots + C_n = 2^n$$

सत्यापन : $\because (1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_r x^r + \ldots + C_nx^n$

इसमें $x=1$ रखने पर $(1+1)^n = C_0 + C_1 \times 1 + C_2 \times (1)^2 + \ldots + C_r (1)^r + \ldots + C_n (1)^n$

या, $$2^n = C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_r + \ldots + C_n$$

अर्थात् द्विपद गुणांकों का योग $= C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_n = 2^n$ **[सूत्र]**

प्रमेय 2. $(1+x)^n$ के प्रसार में सम पदों के गुणांकों का योग तथा विषम पदों के गुणांकों का योग बराबर होते हैं तथा इनका मान 2^{n-1} के बराबर होता है।

अर्थात् $C_0 + C_2 + C_4 + \ldots = C_1 + C_3 + C_5 + \ldots = 2^{n-1}$

सत्यापन : सूत्र से $(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n$

इसमें $x=-1$ रखने पर $(1-1)^n = C_0 + C_1(-1) + C_2(-1)^2 + \ldots + C_n(-1)^n$

या $0 = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \ldots + C_n(-1)^n$

या $C_1 + C_3 + C_5 + \ldots = C_0 + C_2 + C_4 + \ldots$

$$= \frac{1}{2} \times \text{सभी द्विपद गुणांकों का योग} = \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}$$

$\therefore$ **सम पदों के गुणांकों का योग = विषम पदों के गुणांकों का योग** $= 2^{n-1}$ **[सूत्र]**

प्रमेय 3. द्विपद प्रसार में प्रारंभ से तथा अन्त से बराबर दूरी पर स्थित पदों के द्विपद गुणांक बराबर होते हैं।

सत्यापन : माना दिया गया प्रसार $(1+x)^n$ है।

तो प्रारंभ से $(r+1)$ वें पद t_{r+1} का गुणांक $= {}^nC_r$ ...(1)

अब अन्त से $(r+1)$वाँ पद = प्रारंभ से $(n-r+1)$वाँ पद

$\therefore$ प्रारम्भ से $(n-r+1)$वें पद का गुणांक $= {}^nC_{n-r}$ ...(2)

किन्तु $^nC_r = {}^nC_{n-r}$

अत: (1) तथा (2) से

आरंभ से t_{r+1} वें पद का गुणांक = अन्त से t_{r+1} वें पद का गुणांक **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 3. निम्नलिखित के मान बतायें :

(i) $^{15}C_0 + {}^{15}C_1 + {}^{15}C_2 + \ldots + {}^{15}C_{15}$

(ii) $C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \ldots + (-1)^nC_n = 0$

(iii) $2C_0 + C_1 + 2C_2 + C_3 + 2C_4 + C_5 + \ldots = 3 \times 2^{n-1}$

हल : सूत्र से $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \ldots + {}^nC_n x^n$ ...(1)

(i) (1) में $x=1$ तथा $n=15$ रखने पर

$$(1+1)^{15} = {}^{15}C_0 + {}^{15}C_1(1) + {}^{15}C_2(1)^2 + \ldots + {}^{15}C_{15}(1)^{15}$$

या $2^{15} = {}^{15}C_0 + {}^{15}C_1 + {}^{15}C_2 + \ldots + {}^{15}C_{15}$

$\therefore$ $^{15}C_0 + {}^{15}C_1 + {}^{15}C_2 + \ldots + {}^{15}C_{15} = 2^{15}$

(ii) (1) में $x=-1$ रखने पर

$$(1-1)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1(-1) + {}^nC_2(-1)^2 + \ldots + {}^nC_n(-1)^n$$
$$= {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \ldots + {}^nC_n(-1)^n$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$= C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \ldots + C_n(-1)^n$ [${}^nC_0 = C_0, {}^nC_1 = C_1, \ldots, {}^nC_n = C_n$ लेने पर]

अर्थात् $C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \ldots + (-1)^n C_n = 0$ सिद्ध हुआ।

(iii) बायाँ पक्ष $= 2C_0 + C_1 + 2C_2 + C_3 + 2C_4 + C_5 + \ldots$

$= 2C_0 + 2C_2 + 2C_4 + \ldots + C_1 + C_3 + C_5 + \ldots$

$= 2(C_0 + C_2 + C_4 + \ldots) + (C_1 + C_3 + C_5 + \ldots)$

$= 2 \times 2^{n-1} + 2^{n-1}$

[∵ सम पदों के गुणांकों का योग = विषम पदों के गुणांकों का योग $= 2^{n-1}$]

$= 3 \times 2^{n-1}$ = दायाँ पक्ष

उदाहरण 4. सिद्ध करो—

$$\frac{C_1}{C_0} + \frac{2C_2}{C_1} + \frac{3C_3}{C_2} + \ldots + \frac{nC_n}{C_{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1996]

हल : L.H.S. $= \frac{C_1}{C_0} + 2 \times \frac{C_2}{C_1} + 3 \times \frac{C_3}{C_2} + \ldots + n \times \frac{C_n}{C_{n-1}}$

$$= \frac{n}{1} + 2 \times \frac{n(n-1)}{2!} \times \frac{1}{n} + 3 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \times \frac{2!}{n(n-1)} + \ldots + n \times \frac{1}{n}$$

[द्विपद गुणांकों के मान रखने पर]

$$= n + 2 \times \frac{n(n-1)}{2 \times 1} \times \frac{1}{n} + 3 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{2 \times 1}{n(n-1)} + \ldots + 1$$

$$= n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \left[\because 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

= R.H.S.

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 5. $C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \ldots + (n+1)C_n = 2^{n-1}(2+n)$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2001, 2008]**

हल : L.H.S. $= C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \ldots + (n+1)C_n$

$= (C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_n) + (C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \ldots + nC_n)$

अब $C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_n$ = द्विपद गुणांकों का योग $= 2^n$ ...(1)

तथा $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \ldots + nC_n = n + 2 \times \frac{n(n-1)}{2!} + 3 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \ldots + n \times 1$ ...(2)

[द्विपद गुणांकों के मान रखने पर]

$$= n + 2 \times \frac{n(n-1)}{2 \times 1} + \frac{3n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1} + \ldots + n$$

$$= n\left[1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2 \times 1} + \ldots + 1\right]$$

$$= n[{}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_2 + \ldots + {}^{n-1}C_{n-1}] = n[1+1]^{n-1} = n \times 2^{n-1} \qquad \ldots(3)$$

(1) में (2) तथा (3) से मान रखने पर

$C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \ldots + (n+1)C_n = 2^n + n \times 2^{n-1}$

$= 2^{n-1}[2+n]$ = R.H.S.

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 6. $(C_0 + C_1)(C_1 + C_2)(C_2 + C_3)\ldots(C_{n-1} + C_n)$

$$= \frac{(C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_{n-1})(n+1)^n}{n!}$$

हल : बायाँ पक्ष $= (C_0 + C_1)(C_1 + C_2)(C_2 + C_3)\ldots(C_{n-1} + C_n)$

Scanned with CamScanner

अब $C_0 + C_1 = 1 + n = \frac{n+1}{1}$

$$C_1 + C_2 = n + \frac{n(n-1)}{2!} = n\left[1 + \frac{n-1}{2}\right] = \frac{n(n+1)}{2} = C_1 \frac{(n+1)}{2}$$

$$C_2 + C_3 = \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}\left[1 + \frac{n-2}{3}\right] = \frac{n(n-1)}{2!}\left[\frac{3+n-2}{3}\right] = C_2 \frac{(n+1)}{3}$$

… … … … … … … … … … … … … … … …

… … … … … … … … … … … … … … … …

$$C_{n-1} + C_n = C_{n-1} \frac{(n+1)}{n}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $= \frac{(n+1)}{1} \times \frac{C_1 (n+1)}{2} \times \frac{C_2 (n+1)}{3} \times \ldots \times \frac{C_{n-1} (n+1)}{n}$

$$= (n+1)^n \times \frac{C_1 \times C_2 \times \ldots C_{n-1}}{n!}$$

$$= \frac{(C_1 C_2 C_3 \ldots C_{n-1})(n+1)^n}{n!} = \text{दायाँ पक्ष}$$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 7. $(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n$ हो, तो सिद्ध करें

$$C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \ldots + \frac{C_n}{n+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]

हल : बायाँ पक्ष $= C_0 + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} + \ldots + \frac{C_n}{n+1}$

$$= 1 + \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2! \times 3} + \ldots + \frac{1}{n+1}$$ [गुणांकों के मान रखने पर]

$$= \frac{1}{n+1}\left[(n+1) + \frac{(n+1)n}{2!} + \frac{(n+1)(n-1)}{3!} + \ldots + 1\right]$$

$$= \frac{1}{n+1}[{}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 + {}^{n+1}C_3 + \ldots + {}^{n+1}C_{n+1}]$$

$$= \frac{1}{n+1}[1 + {}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 + {}^{n+1}C_3 + \ldots + {}^{n+1}C_{n+1} - 1]$$

$$= \frac{1}{n+1}[(1+1)^{n+1} - 1] = \frac{1}{n+1}(2^{n+1} - 1) = \text{दायाँ पक्ष}$$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 8. यदि $(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n$ तो सिद्ध करें :

(i) $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_n^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = {}^{2n}C_n$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1982, 88, 93, 2016]

(ii) $C_0 C_1 + C_1 C_2 + C_2 C_3 + \ldots + C_{n-1} C_n = {}^{2n}C_{n-1} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$

हल : सूत्र से, $(1+x)^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n$ …(1)

तथा $(x+1)^n = C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n$ …(2)

(1) तथा (2) की गुणा करने पर

Scanned with CamScanner

$$(1+x)^n \times (x+1)^n = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^n) \times (C_0 x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \dots + C_n)$$

या $(1+x)^{2n} = (C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_nx^2)(C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \dots + C_n)$

$\Rightarrow$ $(1+x)^{2n} = (C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2)x^n + (C_0C_1 + C_1C_2 + \dots + C_{n-1}C_n)x^{n-1} + \dots$ ...(3)

[गुणा करके x के घातों के अवरोही क्रम में सजाने पर]

(3) में x^n के गुणांकों की तुलना करने पर

$$C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2 = (1+x)^{2n} \text{ में } x^n \text{ का गुणांक} \quad \dots(4)$$

माना $(1+x)^{2n}$ के विस्तार में x^n, $(r+1)$ वें पद में आता है, तो

$$(r+1) \text{ वाँ पद} = {}^{2n}C_r\, x^r$$

अत: कल्पना से $x^r = x^n \Rightarrow r = n$

$\therefore$ x^n का गुणांक $= {}^{2n}C_n = \dfrac{(2n)!}{n!(2n-n)!} = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$

(4) में यह मान रखने पर $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \dots + C_n^2 = 2nC_n = \dfrac{(2n)!}{n!n!}$ **इति सिद्धम्**

(ii) (3) से, दोनों तरफ से x^{n-1} के घातों की तुलना करने पर

$$C_0C_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \dots + C_{n-1}C_n = {}^{2n}C_{n-1}$$

$$= \frac{(2n)!}{(n-1)!(2n-n+1)!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 9. यदि $(1+x)^{15} = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_{15}x^{15}$ तो $C_2 + 2C_3 + 3C_4 + \dots + 14C_{15}$ का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1990]**

हल : $C_2 + 2C_3 + 3C_4 + \dots + 14C_{15}$

$$= (C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \dots + 15C_{15}) - (C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_{15}) \quad \dots(1)$$

अब $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \dots + 15C_{15} = {}^{15}C_1 + 2\times{}^{15}C_2 + 3\times{}^{15}C_3 + \dots + 15\times{}^{15}C_{15}$

$$= 15 + 2\times\frac{15\times14}{2\times1} + 3\times\frac{15\times14\times13}{3\times2\times1} + \dots + 15\times1 \quad \text{[गुणांकों के मान रखने पर]}$$

$$= 15\left[1 + 14 + \frac{14\times13}{2!} + \dots + 1\right] = 15[{}^{14}C_0 + {}^{14}C_1 + {}^{14}C_2 + \dots + {}^{14}C_{14}]$$

$$= 15\times[1+1]^{14} = 15\times2^{14} \quad \dots(2)$$

तथा $C_1 + C_2 + \dots + C_{15} = C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_{15} - C_0 = 2^{15} - 1$ ...(3)

[गुणांकों का योग $= 2^n$]

(2) तथा (3) का मान (1) में रखने पर

बायाँ पक्ष $= 15\times2^{14} - (2^{15} - 1) = 15\times2^{14} - 2^{15} + 1 = 2^{14}(15-2) + 1 = 2^{14}\times13 + 1$ **उत्तर**

स्मरणीय उपयोगी सूत्र

1. $(1+x)^n$ या $(x+a)^n$ के विस्तार में महत्तम द्विपद गुणांक = मध्य पद का द्विपद गुणांक

(i) यदि n **सम संख्या हो,** तो महत्तम गुणांक ${}^nC_{n/2}$ होगा, जो मध्य पद का गुणांक है।

(ii) यदि n **विषम संख्या हो,** तो महत्तम गुणांक ${}^nC_{\frac{n-1}{2}}$ या ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}$ होगा। ये दोनों मान में बराबर होते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

2. (i) $(x+a)^n$ के प्रसार में महत्तम पद ज्ञात करने के लिए $\frac{t_{r+1}}{t_r} \geq 1$ अर्थात् $\frac{n-r+1}{r} \frac{a}{x} \geq 1$ में n, a तथा x का मान रखकर r का संख्यात्मक मान प्राप्त किया जाता है। इस सूत्र में 'a' का मान धनात्मक लिया जाता है, भलें ही व्यंजक $(x+a)^n$ या $(x-a)^n$ रूप का हो।

अब यदि (i) r का मान पूर्णांक हो जैसे : $r \leq 4$ तो चौथे एवं पाँचवें पद महत्तम पद होंगे तथा संख्यात्मक मान में बराबर होंगे।

(ii) यदि r का मान भिन्नात्मक हो जैसे : $r < 3\frac{1}{2}$ तो $r = 3$ लेंगे तथा चौथा पद महत्तम पद होगा।

3. $(1+x)^n$ के विस्तार में

(i) ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots + {}^nC_n = 2^n$

(ii) **सम पदों के गुणांक = विषम पदों के गुणांक $= 2^{n-1}$**

अर्थात् $C_1 + C_3 + C_5 + \ldots = C_0 + C_2 + C_4 + \ldots = 2^{n-1}$

(iii) **आरंभ से t_{r+1} वें पद का गुणांक = अन्त से t_{r+1} वें पद का गुणांक।**

प्रश्नावली 3.2

1. निम्न विस्तार में महत्तम पद ज्ञात करें :

(i) $(1-2x)^8$ जब $x = \frac{1}{4}$ (ii) $(1+4x)^8$ जब $x = \frac{1}{3}$

(iii) यदि $x = 4$, तो $(4-3x)^8$ के प्रसार में महत्तम पद ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2002]**

2. निम्न विस्तार में महत्तम पद तथा उसका संख्यात्मक मान बतायें :

(i) $(2+3x)^8$ जब $x = \frac{1}{2}$ (ii) $(3-4x)^9$ जब $x = \frac{1}{4}$

(iii) $(1+x)^6$ जब $x = \frac{2}{3}$ (iv) $(x-y)^{30}$ जब $x = 11, y = 4$

3. निम्न के प्रसार में महत्तम द्विपद गुणांक बतायें :

(i) $(1+x)^{20}$ (ii) $(x+y)^{13}$

4. निम्नलिखित के मान ज्ञात करें :

(i) ${}^9C_1 + {}^9C_2 + {}^9C_3 + \ldots + {}^9C_9$ (ii) ${}^5C_0 + {}^5C_1 + {}^5C_2 + {}^5C_3 + {}^5C_4 + {}^5C_5$

(iii) ${}^6C_0 - {}^6C_1 + {}^6C_2 - {}^6C_3 + {}^6C_4 - {}^6C_5 + {}^6C_6$

5. सिद्ध करें :

(i) $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \ldots nC_n = n\,2^{n-1}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1998, 2012, 2013]**

(ii) $C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \ldots + (n+1)C_n = 2^{n-1}(2+n)$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2001, 08, 14(O)]**

(iii) $C_0 + 3C_1 + 5C_2 + \ldots + (2n+1)C_n = (n+1)\,2^n$

6. सिद्ध करें :

(i) $C_0 + \frac{1}{3}C_2 + \frac{1}{5}C_4 + \ldots = \frac{2^n}{n+1}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1991]**

(ii) $C_0 - \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} - \frac{C_3}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{C_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

(iii) $\frac{C_1}{C_0} + \frac{2C_2}{C_1} + \frac{3C_3}{C_2} + \ldots + \frac{nC_n}{C_{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1996]**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

7. $(1+x)^n$ के प्रसार में $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n$ के गुणांक क्रमशः $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$ हों तो सिद्ध करें कि

$$2C_0 + 2^2 \frac{C_1}{2} + 2^3 \frac{C_2}{3} + \ldots + 2^{n+1} \frac{C_n}{n+1} = \frac{3^{n+1} - 1}{n+1}$$

8. यदि $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n$; $(1+x)^n$ के प्रसार में द्विपद गुणांक को चिन्हित करते हों, तो सिद्ध करें :

(i) $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \ldots + C_n^2 = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1982, 88, 93, 16]

(ii) $C_0C_2 + C_1C_3 + C_2C_4 + \ldots + C_{n-2}C_n = \dfrac{(2n)!}{(n+2)!(n-2)!}$

(iii) $C_0C_r + C_1C_{r+1} + C_2C_{r+2} + \ldots + C_{n-r}C_n = \dfrac{(2n)!}{(n-r)!(n+r)!}$

उत्तरमाला

1. (i) तीसरा पद, चौथा पद (ii) छठा पद (iii) सातवाँ पद

2. (i) चौथा पद; 6048 (ii) तीसरा पद; 36×3^7 (iii) तीसरा पद; $\dfrac{20}{3}$

(iv) नवाँ पद ; ${}^{30}C_8 \times 11^{22} \times 4^8$

3. (i) ${}^{20}C_{10}$ (ii) 1716

4. (i) $2^9 - 1$ (ii) 2^5 (iii) 0

3.3 द्विपद प्रमेय : कोई घातांक (Binomial Theorem : Any Index)

पिछले अध्याय में हम यह देख चुके हैं कि यदि n एक धनात्मक पूर्णांक हो, तो

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \ldots + {}^nC_r x^r + \ldots + {}^nC_n x^n$$

इस अध्याय में हम n के ऋणात्मक तथा भिन्नात्मक मानों के लिए $(1+x)^n$ के विस्तार के बारे में जानेंगे।

3.3.1 कथन (Statement)

यदि n कोई ऋणात्मक पूर्णांक अथवा धनात्मक या ऋणात्मक भिन्न हो, तो

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} x^r + \ldots \infty \text{ तक}$$

जबकि $|x| < 1$ अर्थात् $-1 < x < 1$.

3.3.2 विस्तार के गुण (Properties of the Expansion)

(i) यहाँ विस्तार में पदों की संख्या अनंत है जबकि यदि n धनात्मक पूर्णांक होता है तो पदों की संख्या $n+1$ होती है जो परिमित (finite) है।

(ii) यहाँ विस्तार में ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \ldots, {}^nC_r$ इत्यादि का प्रयोग अर्थहीन है क्योंकि ऋणात्मक संख्या या किसी भिन्न के लिए इनका कोई अर्थ नहीं है।

(iii) यह विस्तार तभी संभव है जब द्विपद का प्रथम पद 1 हो। अतः यदि द्विपद $(x+a)^n$ के रूप में लिखा हो, तथा $x > a$ हो तो सर्वप्रथम इसे $x^n\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^n$ जहाँ $\left|\dfrac{a}{x}\right| < 1$ के रूप में लिखकर $\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^n$ का विस्तार उपर्युक्त विधि से किया जाता है और यदि $a > x$ तो $(x+a)^n$ को $a^n\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^n$ जहाँ $\left|\dfrac{x}{a}\right| < 1$, के रूप में लिखकर इसका विस्तार उपर्युक्त सूत्र से किया जाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

जैसे : $(4+3x)^{\frac{1}{2}}$ को पहले $4^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}$ के रूप में लिखकर $\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}$ का विस्तार किया जाएगा, यदि $\left|\frac{3}{4}x\right|<1$

(iv) यहाँ पदों की संख्या अनंत होती है। अत: विस्तार में कोई मध्य पद नहीं होता।

3.3.3 विस्तार का व्यापक पद (General Term of the given Expansion) :

विस्तार का $(r+1)$वाँ पद t_{r+1} इसका व्यापक पद कहलाता है

तथा यह पद $t_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}x^r$ से दिया जाता है।

अन्य महत्वपूर्ण परिणाम

1. यदि n कोई ऋणात्मक पूर्णांक अथवा धनात्मक या ऋणात्मक भिन्न हो, तो

(i) $(1-x)^n=1-nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2-\dots+(-1)^r\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}x^r+\dots\infty$

(ii) $(1+x)^{-n}=1-nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2-\dots+(-1)^r\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!}x^r+\dots\infty$

(iii) $(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\dots+(-1)^{2r}\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!}x^r+\dots\infty$

2. (i) $(1+x)^n$ के विस्तार में व्यापक पद $=t_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}x^r$

(ii) $(1+x)^{-n}$ के विस्तार में व्यापक पद $=t_{r+1}=(-1)^r\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+r-1)}{r!}x^r$

3. (i) $(1+x)^{-1}=1-x+x^2+\dots+(-1)^r x^r+\dots\infty$

(ii) $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\dots+x^r+\dots\infty$

(iii) $(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+\dots+(-1)^r(r+1)x^r+\dots\infty$

(iv) $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\dots+(r+1)x^r+\dots\infty$

(v) $(1+x)^{-3}=1-3x+6x^2-\dots+(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{r!}x^r+\dots\infty$

(vi) $(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+\dots+\frac{(r+1)(r+2)}{r!}x^r+\dots\infty$

नोट :

- ये परिणाम (1) के द्वारा दिए गए विस्तारों में n का मान $-1, -2$ तथा -3 रखने पर प्राप्त होते हैं।

3.3.4 महत्तम पद (Greatest Term)

$(1+x)^n$ के विस्तार में, जब n कोई भिन्न अथवा ऋण पूर्णांक है, संख्यात्मक रूप से महत्तम पद उसी प्रकार ज्ञात किया जाता है जिस प्रकार n के धनपूर्णांक होने पर [अनुच्छेद 3.2.2] ज्ञात किया जाता है।

3.3.5 सन्निकट मान ज्ञात करना (Application to Approximation)

द्विपद सिद्धान्त से, $(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\dots\infty$ तक

जहाँ $|x|<1$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

चूँकि $|x|<1$, अतः उपर्युक्त विस्तार के पद उत्तरोत्तर छोटे होते जाते हैं क्योंकि $x^2, x^3, \ldots$ इत्यादि का मान उत्तरोत्तर छोटा होता जाता है। यदि x बहुत छोटी राशि हो तो हम विस्तार में x के ऊँचे घातों की उपेक्षा कर सकते हैं।

(a) यदि x इतना छोटा हो कि इसके वर्ग तथा ऊँचे घात उपेक्षणीय हों तो $(1+x)^n = 1+nx$.

यह $(1+x)^n$ का सन्निकट मान (Approximate Value) कहलाता है।

(b) कई बार सूक्ष्म सन्निकटन के लिए x के वर्ग वाले पद को रखा जाता है तथा शेष ऊँचे घातों वाले पदों की उपेक्षा कर दी जाती है, तब $(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2$ से दिया जाता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. (i) $(4+3x)^{1/2}$ का चार पदों तक विस्तार करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2010]**

(ii) $(1-x^2)^{7/2}$ का चार पदों तक विस्तार करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]**

हल : (i) द्विपद सिद्धान्त से $(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots, |x|<1$

$$\therefore \quad (4+3x)^{1/2} = 4^{1/2}\left[1+\frac{3}{4}x\right]^{1/2} = 2\left[1+\frac{3}{4}x\right]^{1/2}$$

$$= 2\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{3}{4}x\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(\frac{3}{4}x\right)^3+\ldots\right]$$

$$= 2\left[1+\frac{3}{8}x+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{9}{16}x^2+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{3\times2\times1}\times\frac{27}{64}x^3+\ldots\right]$$

$$= 2\left[1+\frac{3}{8}x-\frac{9}{128}x^2+\frac{27}{1024}x^3+\ldots\right]$$

$$= 2+\frac{3}{4}x-\frac{9}{64}x^2+\frac{27}{512}x^3+\ldots$$

उत्तर

(ii) $$\therefore \quad (1-x^2)^{7/2} = 1+\frac{7}{2}(-x^2)+\frac{\frac{7}{2}\left(\frac{7}{2}-1\right)}{2!}(-x^2)^2+\frac{\frac{7}{2}\left(\frac{7}{2}-1\right)\left(\frac{7}{2}-2\right)}{3!}(-x^2)^3+\ldots$$

[सूत्र के प्रयोग से]

$$= 1+\frac{7}{2}x^4+\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{2\times1}x^4+\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{3\times2\times1}(-x^6)+\ldots$$

$$= 1+\frac{7}{2}x^4+\frac{35}{8}x^4-\frac{35}{16}x^6+\ldots$$

उत्तर

उदाहरण 2. $\frac{1+x}{(1+x)^4}$ का प्रसार करें यदि $|x|<1$

हल : दिया गया व्यंजक $= \frac{1+x}{(1+x)^4} = (1+x)(1+x)^{-4}$

$$= (1+x)\left[1+(-4)x+\frac{(-4)(-4-1)}{2!}x^2+\frac{(-4)(-4-1)(-4-2)}{3!}x^3+\ldots\right]$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$= (1+x)\left[1 - 4x + \frac{4\times 5}{2\times 1}x^2 - \frac{4\times 5\times 6}{3\times 2\times 1}x^3 + \ldots\right]$$
$$= (1+x)[1 - 4x + 10x^2 - 20x^3 + \ldots]$$
$$= 1[1 - 4x + 10x^2 - 20x^3 + \ldots] + x[1 - 4x + 10x^2 - 20x^3 + \ldots]$$
$$= [1 - 4x + 10x^2 - 20x^3 + \ldots + x - 4x^2 + 10x^3 - 20x^4 + \ldots]$$
$$= [1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + \ldots]$$

उदाहरण 3. (i) $(1-x)^{-3}$ के प्रसार में व्यापक पद बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]**

(ii) $(4-3x)^{-1/2}$ के प्रसार में x^5 का गुणांक बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]**

हल : (i) हम जानते हैं कि $(1+x)^n$ के विस्तार में $(r+1)$ वाँ पद व्यापक पद हो तो

$$t_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}x^r$$

यहाँ $n = -3$, $x = -x$

$$\therefore \quad t_{r+1} = \frac{(-3)(-3-1)(-3-2)\ldots(-3-r+1)}{r!}(-x)^r$$
$$= \frac{(-1)^r\, 3\times 4\times 5\times\ldots(r+2)}{r!}(-1)^r x^r = (-1)^{2r}\frac{3\times 4\times 5\times\ldots(r+2)}{r!}x^r$$
$$= \frac{3\times 4\times 5\times\ldots\times(r+2)}{r!}x^r = \frac{(1\times 2\times 3\times 4\times 5\times\ldots\times r\times(r+1)(r+2)}{1\times 2\times r!}x^r$$
$$= \frac{r!(r+1)(r+2)}{2!\times r!}x^r = \frac{(r+1)(r+2)}{2!}x^r$$ उत्तर

(ii) दिया गया व्यंजक $= (4-3x)^{-1/2} = 4^{-1/2}\left[1 - \frac{3}{4}x\right]^{-1/2}$

स्पष्ट है कि x^5 विस्तार के छठे पद में आएगा।

$$\therefore \quad \text{छठा पद} = t_6 = t_{5+1} = 4^{-1/2}\times\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\left(-\frac{1}{2}-3\right)\left(-\frac{1}{2}-4\right)}{5!}\times\left(-\frac{3}{4}x\right)^5$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4}}\left\{\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\times\left(-\frac{9}{2}\right)}{5!}\right\}\times\left(-\frac{3^5}{4^5}\right)x^5$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{1\times 3\times 5\times 7\times 9}{2^5\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}\times\frac{3^5}{2^{10}}x^5 \qquad [\because 4^5 = (2^2)^5 = 2^{10}]$$
$$= \frac{1\times 7\times 3^2\times 3^5}{2\times 2^5\times 2^2\times 2^{10}\times 2}x^5 = \frac{7\times 3^7}{2^{19}}x^5$$

$\therefore \quad x^5$ का गुणांक $= \dfrac{7\times 3^7}{2^{19}}$ उत्तर

उदाहरण 4. द्विपद सिद्धान्त की सहायता से

(i) $(515)^{1/3}$ का मान दशमलव के तीन अंकों तक शुद्ध निकालिए। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]**

(ii) 100 का घनमूल दशमलव के दो स्थानों तक निकालिए।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

हल : दी गई राशि $(515)^{1/3} = (512+3)^{1/3} = (8^3+3)^{1/3} = (8^3)^{1/3}\left[1+\frac{3}{8^3}\right]^{1/3}$

$$= 8\left[1+\frac{1}{3}\times\frac{3}{8^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{3}{8^3}\right)^2+\ldots\right]$$ [द्विपद सिद्धांत से विस्तार करने पर]

$$= 8\left[1+\frac{1}{8^3}+\frac{\frac{1}{3}\times\left(-\frac{2}{3}\right)}{2\times 1}\frac{9}{8^6}+\ldots\right]$$

$$= 8+\frac{1}{8^2}-\frac{2}{3\times 3\times 2}\frac{9}{8^5}+\ldots$$

$$= 8+\frac{1}{8^2}-\frac{1}{8^5}+\ldots$$

$= 8 + 0.015625 - 0.0000305$ [ऊँचे घातों को छोड़ने पर]

$= 8 + .0156 = 8.016$ [दशमलव के तीन अंकों तक शुद्ध मान लेने पर]

(ii) 100 का घनमूल $= (100)^{1/3} = (125-25)^{1/3} = (125)^{1/3}\left[1-\frac{25}{125}\right]^{1/3} = (5^3)^{1/3}\left[1-\frac{1}{5}\right]^{1/3}$

$$= 5[1-0.2]^{1/3}$$

$$= 5\left[1+\frac{1}{3}(-0.2)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}(-0.2)^2+\ldots\right]$$

$$= 5\left[1-0.066-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 0.04-\ldots\right]$$

$= 5[1-0.066-0.0044\ldots] = 5[1-0.0704] = 4.648$ (लगभग)

$= 4.65$

उदाहरण 5. यदि c इतनी छोटी राशि हो कि l^3 की अपेक्षा c^3 नगण्य हो तो सिद्ध करें : **उत्तर**

$$\sqrt{\frac{l}{l+c}}+\sqrt{\frac{l}{l-c}} = 2+\frac{3c^2}{4l^2}$$

हल : L.H.S. $= \sqrt{\frac{l}{l+c}}+\sqrt{\frac{l}{l-c}} = \left(\frac{l}{l+c}\right)^{1/2}+\left(\frac{l}{l-c}\right)^{1/2} = \left[\frac{1}{\frac{l+c}{l}}\right]^{1/2}+\left[\frac{1}{\frac{l-c}{l}}\right]^{1/2}$

$$= \left[\frac{1}{1+\frac{c}{l}}\right]^{1/2}+\left[\frac{1}{1-\frac{c}{l}}\right]^{1/2} = \left[\left(1+\frac{c}{l}\right)^{-1}\right]^{1/2}+\left[\left(1-\frac{c}{l}\right)^{-1}\right]^{1/2}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$=\left[1+\frac{c}{l}\right]^{-1/2}+\left[1-\frac{c}{l}\right]^{-1/2}=\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{l}\right)+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(\frac{c}{l}\right)^2+\ldots\right]$$

$$+\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{c}{l}\right)+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(-\frac{c}{l}\right)^2+\ldots\right]$$

$$=\left[1-\frac{1}{2}\frac{c}{l}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2\times 1}\frac{c^2}{l^2}\right]+\left[1+\frac{1}{2}\frac{c}{l}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2\times 1}\times\frac{c^2}{l^2}\right]$$

$\left[\frac{c^3}{l^3}\right.$ तथा ऊँचे घातों को छोड़ने पर$\left.\right]$

$$=\left[1-\frac{1}{2}\frac{c}{l}+\frac{3}{8}\frac{c^2}{l^2}+1+\frac{1}{2}\frac{c}{l}+\frac{3}{8}\frac{c^2}{l^2}\right]=\left[2+2\times\frac{3}{8}\frac{c^2}{l^2}\right]=2+\frac{3}{4}\frac{c^2}{l^2}$$ उत्तर

उदाहरण 6. सिद्ध करें :

(i) $(1+x+x^2+\ldots\infty)^3 = 1+3x+6x^2+10x^3+\ldots\infty$

(ii) $(1+x)^n = 2^n\left[1-n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+\frac{n(n+1)}{2!}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2-\ldots\infty\right]$

हल : L.H.S. $=(1+x+x^2+\ldots\infty)^3=[(1-x)^{-1}]^3$ $[(1-x)^{-1}$ के विस्तार से]

$=(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+10x^3+\ldots$ [सूत्र से]

(ii) L.H.S. $=(1+x)^n=\left(\frac{1}{1+x}\right)^{-n}=\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{1+x}\right)^{-n}$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1-x}{1+x}\right)\right]^{-n}=\frac{1}{2^{-n}}\left[1+\frac{1-x}{1+x}\right]^{-n}$$

$$=2^n\left[1+(-n)\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+\frac{(-n)(-n-1)}{2!}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2+\ldots\infty\right]$$

$$=2^n\left[1-n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+\frac{n(n+1)}{2!}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2+\ldots\infty\right]=\text{R.H.S.}$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 7. $(1+x)^{15/2}$ के प्रसार में संख्यात्मक रूप से महत्तम पद ज्ञात करें, जबकि $x=\frac{2}{3}$.

हल : दिये गये व्यंजक $(1+x)^{15/2}$ की $(1+x)^n$ से तुलना करने पर $n=\frac{15}{2}$, $x=x$

$$\therefore\quad \frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{\frac{15}{2}-r+1}{r}\times\frac{2}{3}=\frac{15-2r+2}{3r}\qquad\left[\because \frac{t_{r+1}}{t_r}=\frac{n-r+1}{r}x\right]$$

अब महत्तम पद के लिए $\frac{t_{r+1}}{t_r}\geq 1$ अर्थात् $\frac{15-2r+2}{3r}\geq 1$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

या $17-2r \geq 3r$ या $5r \leq 17$ $\therefore$ $r \leq \frac{17}{5}$ अर्थात् $r \leq 3\frac{2}{5}$

$\therefore$ $r=3$ अतः चौथा पद महत्तम पद होगा।

$$\therefore \quad t_4 = t_{3+1} = \frac{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-1\right)\left(\frac{15}{2}-2\right)}{3!} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \qquad [\text{सूत्र } t_{r+1} = {}^nC_r\, x^r \text{ से}]$$

$$= \frac{15}{2} \times \frac{13}{2} \times \frac{11}{2} \times \frac{1}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{8}{27} = \frac{15 \times 13 \times 11}{3 \times 2 \times 27} = \frac{715}{54}$$ उत्तर

उदाहरण 8. द्विपद सिद्धांत की सहायता से सिद्ध करें :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1 \times 3}{4 \times 8} + \frac{1 \times 3 \times 5}{4 \times 8 \times 16} + \ldots = \sqrt{2}$$

हल : सूत्र से, $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots$ ...(1)

दी गई श्रेणी : $1 + \frac{1}{4} + \frac{1 \times 3}{4 \times 8} + \frac{1 \times 3 \times 5}{4 \times 8 \times 16} + \ldots$

इस श्रेणी की तुलना (1) से करने पर, $nx = \frac{1}{4}$ ...(2)

तथा $\frac{n(n-1)}{2!}x^2 = \frac{1 \times 3}{4 \times 8} = \frac{3}{32}$ ...(3)

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}x^2}{n^2x^2} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{1}{16}} \qquad [(3) \text{ को } (2) \text{ के वर्ग से भाग देने पर}]$$

या $\frac{n(n-1)}{2}x^2 \times \frac{1}{n^2x^2} = \frac{3}{32} \times 16$ या $\frac{n-1}{2n} = \frac{3}{2}$

या $n-1 = 3n$ या $2n = -1$ $\therefore$ $n = -\frac{1}{2}$

(2) में n का मान रखने पर $-\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$ $\therefore$ $x = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ दी गई श्रेणी $= \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1/2}$ [(1) में n तथा x का मान रखने पर]

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1/2} = (2)^{1/2} = \sqrt{2}$$ सिद्ध हुआ।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्नलिखित द्विपदों का पाँच पदों तक विस्तार करें।

(a) (i) $(1+x)^{-3}$, यदि $|x|<1$

(ii) $(2+3x)^{-4}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1993]

(iii) $(x^2+4)^{1/2}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1980]

(b) (i) $(8+3x)^{2/3}$ का चार पदों तक विस्तार करें। [उ० प्र० डिप्लोमा 2009]

(ii) $(3+2x)^{3/2}$ का चार पदों तक विस्तार करें। [उ० प्र० डिप्लोमा 17(SB)]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

2. (i) $(1-2x)^{-1/2}(1+3x)^{1/3}$ के प्रसार में प्रथम तीन पद लिखिए। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1984]**

(ii) $\dfrac{1+x^2}{(1-x)^4}$ को x के आरोही घातों में चार पद तक रखिए, जब $-1<x<1$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1988, 1993]

3. (i) $(x-2x^2)^{-3}$ के प्रसार में x^7 का गुणांक ज्ञात करें।

(ii) $\dfrac{(1+2x)^2}{(1-3x)^3}$ के विस्तार में x^2 का गुणांक ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1996]

(iii) $(4-3x)^{-1/2}$ के प्रसार में x^5 का गुणांक बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]**

(iv) $(1+x)^{-4}$ के विस्तार में व्यापक पद बतायें।

(v) $(1-2x)^{-1}$ का 5वाँ पद बतायें।

(vi) $(1-2x^3)^{11/2}$ के विस्तार में 5वाँ पद बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1995]**

4. (i) समुचित द्विपद व्यंजक रखकर $\sqrt{26}$ का पाँच दशमलव तक मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1987, 92]

(ii) $\sqrt{30}$ का दशमलव के चार अंकों तक मान निकालें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]**

(iii) $(624)^{1/4}$ का मान द्विपद सिद्धांत की सहायता से चार दशमलव अंक तक निकालें।

5. (i) दिखायें $(1+2x+3x^2+\dots\infty)^{1/2}=1+x+x^2+\dots\infty$

(ii) $(a-b)^n=a^n\left[1-n\left(\dfrac{b}{a-b}\right)+\dfrac{n(n+1)}{2!}\left(\dfrac{b}{a-b}\right)^2-\dots\infty\right]$

[**संकेत** : $(a-b)^n=\left(\dfrac{1}{a-b}\right)^{-n}=a^n\left(\dfrac{a}{a-b}\right)^{-n}=a^n\left(1+\dfrac{b}{a-b}\right)^{-n}$]

(iii) $1+n\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)+\dfrac{n(n+1)}{2!}\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)^2+\dots\infty=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^n$

[**संकेत** : $\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^n=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-n}=\left(\dfrac{1+x-2x}{1+x}\right)^{-n}=\left(1-\dfrac{2x}{1+x}\right)^{-n}$]

6. (i) यदि x इतना छोटा हो कि उसके वर्ग तथा ऊँचे घात उपेक्षणीय हैं, तो दिखायें कि

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}\times(1+x)^{1/4}}{(1-x)^{1/3}}=1+\frac{11}{12}x \text{ (लगभग)}$$

(ii) यदि x^3 तथा इसके ऊँचे घात उपेक्षणीय हैं, तो दिखायें

$$\frac{(4+x)^{1/2}}{(1-x^2)}=2+\frac{x}{4}+\frac{127}{64}x^2$$

(iii) यदि x इतना छोटा हो कि इसके घन तथा ऊँचे घात उपेक्षणीय हों तो $\dfrac{(1-7x)^{1/3}}{(1+2x)^{3/4}}$ का मान बतायें।

7. संख्यात्मक दृष्टि से महत्तम पद का मान बतायें :

(i) $(1-2x)^{-7}$ जबकि $x=\dfrac{1}{5}$

(ii) $(1-x)^{15/2}$ जबकि $x=\dfrac{2}{3}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

8. (i) श्रेणी $1+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3^2}+4\times\frac{1}{3^3}+\ldots\infty$ का योग ज्ञात करें। [उ० प्र० डिप्लोमा 1992]

(ii) $(1+x+x^2+\ldots\infty)^2$ के विस्तार में x^n का गुणांक ज्ञात करें।

9. श्रेणी $1+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{5}{8}+\frac{3\times5\times7}{4\times8\times12}+\ldots$ का अनन्त पदों तक योग ज्ञात करें।

10. श्रेणी $1-\frac{1}{8}+\frac{1\times3}{8\times16}-\frac{1\times3\times5}{8\times16\times24}+\ldots$ का अनन्त पदों तक योग ज्ञात करें।

उत्तरमाला

1. (a) (i) $1-3x+6x^2-10x^3+15x^4$ (ii) $\frac{1}{16}\left[1-6x+\frac{45}{2}x^2-\frac{135}{2}x^3+\frac{2835}{16}x^4\right]$

(iii) $x+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^5}$

(b) (i) $4+x-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{96}x^3$ (ii) $3^{3/2}\left[1+x+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{54}x^3\right]$

2. (i) $1+\frac{5}{2}x+\frac{15}{8}x^2$ (ii) $1+4x+11x^2+24x^3$

3. (i) 67584 (ii) 94 (iii) $\frac{7\times3^7}{2^{19}}$

(iv) $(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3!}x^r$ (v) $16x^4$ (vi) $\frac{1155}{8}x^{12}$

4. (i) 5.09901 (ii) 5.4775 (iii) 4.9980

6. (iii) $1-\frac{23}{6}x+\frac{49}{72}x^2$

7. (i) $\frac{672}{125}$ (ii) $-\frac{715}{54}$

8. (i) $\frac{9}{4}$ (ii) $n+1$ 9. $2\sqrt{2}$ 10. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

अध्याय 4

सारणिक (Determinants)

4.1 प्रस्तावना (Introduction)

सारणिक का विकास युगपत समीकरणों के हल को आसान बनाने के लिए हुआ। बाद में इसका प्रयोग गणित की अनेक शाखाओं में होने लगा।

4.1.1. परिभाषा (Definitions)

मान लिया
$$a_1 x + b_1 y = 0 \quad \ldots(i)$$
$$a_2 x + b_2 y = 0 \quad \ldots(ii)$$

(i) तथा (ii) से
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{-y}{x} = \frac{a_2}{b_2}$$

अर्थात्
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{या} \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \quad \ldots(iii)$$

इस फलन को निम्नलिखित रूप से व्यक्त किया जा सकता है—
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots(iv)$$

∴ (iii) तथा (iv) से
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad \ldots(v)$$

(v) में बायें पक्ष $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ को द्वितीय क्रम का सारणिक (determinant) कहते हैं। a_1, b_1, a_2, b_2 को सारणिक के **अवयव** कहते हैं। **क्षैतिज** (Horizontal) रूप में लिखे गए अवयव पंक्तियाँ तथा ऊर्ध्वाधर (Vertical) रूप में लिखे गए अवयव **स्तम्भ** कहलाते हैं। स्पष्ट है (v) में दो पंक्तियाँ $|a_1 \quad b_1|$ तथा $|a_2 \quad b_2|$, तथा दो स्तम्भ $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$ तथा $\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}$ हैं। a_1, b_2 जो विकर्ण के अवयव के रूप में रखे गए हैं, उसे इस सारणिक का **मुख्य विकर्ण** (leading diagonal) कहते हैं।

(v) के दाहिने पक्ष अर्थात् $a_1 b_2 - a_2 b_1$ को सारणिक का मान (value) कहते हैं। सामान्यत: मान को Δ या D से सूचित किया जाता है।

इसी तरह यदि $a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0$; $a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0$; $a_3 x + b_3 y + c_3 z = 0$

तो इन समीकरणों से x, y, z को विलुप्त करने पर प्राप्त राशि को निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है—
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - b_1 (a_2 c_3 - a_3 c_2) + c_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) \quad \ldots(vi)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(vi) के बायें पक्ष को हम तृतीय क्रम (या कोटि) का सारणिक कहते हैं क्योंकि इसमें तीन पंक्तियाँ $|a_1\ b_1\ c_1|$, $|a_2\ b_2\ c_2|$ तथा $|a_3\ b_3\ c_3|$ तथा तीन स्तंभ $\begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}$ तथा $\begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix}$ होते हैं।

(vi) का दायाँ पक्ष सारणिक **मान** या **विस्तार** के नाम से जाना जाता है। जिस विकर्ण में अवयव a_1, b_2, c_3 स्थित हैं उसे मुख्य विकर्ण कहते हैं। मुख्य विकर्ण के पदों में इसे सारणिक (a_1, b_2, c_3) से भी व्यक्त किया जाता है।

उपरोक्त विवेचन से स्पष्ट है कि किसी सारणिक में **पंक्ति तथा स्तंभ की संख्या बराबर** होती है अर्थात् इसका रूप **वर्गाकार** होता है।

4.1.2 सारणिक की कोटि या क्रम (Order of a Determinant)

किसी सारणिक में जितनी पंक्तियाँ या स्तम्भ होते हैं उसे सारणिक का **क्रम** या **कोटि** कहते हैं।

किसी सारणिक में अवयवों की **संख्या** उसके **कोटि के वर्ग** के बराबर होती है। जैसे—द्वितीय क्रम के सारणिक में अववयों की संख्या 2^2 अर्थात् 4 तथा तृतीय क्रम के सारणिक में अवयवों की संख्या के 3^2 या 9 होगी।

इस तरह

सारणिक में अवयवों की संख्या $= n^2$

जहाँ n सारणिक की कोटि है।

4.1.3 उपसारणिक या लघुघटक (Minors)

किसी सारणिक के किसी अवयव से होकर जाने वाली पंक्ति तथा स्तंभ को निकाल देने पर जो सारणिक प्राप्त होता है उसे उस अवयव का उपसारणिक या लघुघटक कहते हैं।

जैसे—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad ...(1)$$

में a_1 का उपसारणिक $= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

c_1 का उपसारणिक $= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

4.1.4 सहखंड (Co-factors)

किसी सारणिक के किसी अवयव a_{ij} का सहखंड उस अवयव के उपसारणिक M_{ij} में उचित चिह्न (धन या ऋण) लगाने से प्राप्त होता है। यह उचित चिह्न $(-1)^{i+j}$ से दिया जाता है, जहाँ i तथा j क्रमशः उस पंक्ति तथा स्तंभ को बताते हैं जिसमें वह अवयव स्थित है।

अर्थात् a_{ij} का सहखंड $= (-1)^{i+j}, M_{ij}$

जैसे : सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ में 1 का सहखंड $= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = (-1)^2 (45-48) = 1 \times (-3) = -3$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

इसी तरह 6 का सहखंड $=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\7 & 8\end{vmatrix}$

$$=(-1)^5\ (8-14)=-1\times(-6)=6$$

[$\because$ 1 प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ में है अतः $i=1, j=1$ इसी तरह 6 के लिए $i=2, j=3$]

4.1.5.1 सारणिक का विस्तार (Expansion of a Determinant)

(i) द्वितीय क्रम का सारणिक : हम देख चुके है कि

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$$

$$-\qquad +$$

स्पष्ट है कि द्वितीय कोटि के सारणिक के विस्तार के लिए हम मुख्य विकर्ण के अवयवों को गुणा कर उसमें से दूसरे विकर्ण के अवयवों के गुणनफल को घटा देते हैं।

जैसे : $\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{vmatrix}=2\times5-4\times3=10-12=-2$

$$-\qquad +$$

(ii) तृतीय क्रम का सारणिक : हम देख चुके हैं कि

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1\ (b_2\ c_3-b_3c_2)-b_1\ (a_2c_3-a_3c_2)+c_1\ (a_2b_3-a_3b_2)$$

$$=a_1\begin{vmatrix}b_2 & c_2\\b_3 & c_3\end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix}a_2 & c_2\\a_3 & c_3\end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{vmatrix}=a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1$$

जहाँ A_1, B_1 तथा C_1 क्रमशः a_1, b_1 तथा c_1 के सहखण्ड हैं।

कार्यविधि : प्रथम पंक्ति (या प्रथम स्तंभ) के प्रयोग से सारणिक का मान :

(i) प्रथम पंक्ति (या प्रथम स्तंभ) के प्रत्येक अवयव का लघुघटक ज्ञात करें।

(ii) प्रथम अवयव से प्रारम्भ कर इनके संगत लघुघटकों से गुणा करें।

(iii) पहले गुणनफल से पहले '+'; द्वितीय से पहले '–' तथा तृतीय से पहले '+' का चिह्न लगायें।

(iv) इनका योग सारणिक का मान होगा।

उदाहरण : $\begin{vmatrix}a & h & g\\h & b & f\\g & f & c\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}b & f\\f & c\end{vmatrix}-h\begin{vmatrix}h & f\\g & c\end{vmatrix}+g\begin{vmatrix}h & b\\g & f\end{vmatrix}$ [प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर]

$$=a(bc-f^2)-h\ (ch-gf)+g\ (hf-bg)$$
$$=abc-af^2-ch^2+fgh+fgh-bg^2$$
$$=abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$

टिप्पणी : सारणिक का विस्तार किसी भी पंक्ति या स्तंभ के अनुसार किया जा सकता है। परन्तु विद्यार्थीगण पहली पंक्ति या स्तंभ के अनुसार ही विस्तार का अभ्यास करें।

4.1.5.2 सैरस विधि से तृतीय क्रम के सारणिक का विस्तार (Expansion by Sarrus Diagram)

माना तृतीय कोटि का सारणिक

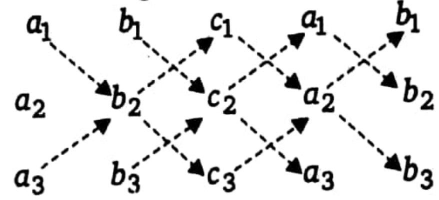
$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

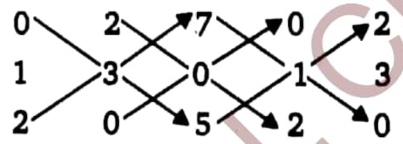
Scanned with CamScanner

इसका विस्तार सैरस विधि से करने के लिए दी गई सारणिक के दाहिनी ओर प्रथम स्तंभ एवं द्वितीय स्तंभ के अवयवों को निम्न रूप में लिखते हैं तथा चित्रानुसार बिंदुदार रेखायें विकर्ण के समानान्तर तथा लंबवत् खींचते हैं। पुनः विकर्ण के सामनांतर अवयवों (ऊपर से नीचे की ओर) के गुणनफल का योग प्राप्त करते हैं एवं इसमें से विकर्ण के लंबवत् (नीचे से ऊपर की ओर) के अवयवों के गुणनफल के योग का अंतर प्राप्त करते हैं।



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$$

जैसे : $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ को सैरस विधि से लिखने पर



$$\therefore \quad \Delta = (0\times 3\times 5 + 2\times 0\times 2 + 7\times 1\times 0) - (2\times 3\times 7 + 0\times 0\times 0 + 5\times 1\times 2)$$
$$= 0 + 0 + 0 - (42 + 0 + 10) = -52$$

नोट :

- यह विधि तृतीय कोटि के सारणिक के लिए प्रयुक्त होती है।

4.1.6. सारणिकों के गुण (Properties of Determinants)

(i) किसी सारणिक के प्रत्येक पंक्ति को स्तंभ में तथा प्रत्येक स्तंभ को पंक्ति में परिवर्तित कर दिया जाए तो सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता।

माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ...(1)

तो $\Delta = a_1 (b_2c_3 - b_3c_2) - b_1 (a_2 c_3 - a_3c_2) + c_1 (a_2b_3 - a_3b_2)$ ...(2)

$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ [पंक्तियों तथा स्तंभों को परस्पर बदलने पर]

$= a_1 (b_2c_3 - c_2b_3) - a_2 (b_1c_3 - b_3c_1) + a_3 (b_1c_2 - b_2c_1)$

$= a_1 (b_2c_3 - c_2b_3) - b_1 (a_2c_3 - c_2a_3) + c_1 (a_2b_3 - a_3b_2)$ ...(3)

$\therefore$ (2) तथा (3) से $\Delta = \Delta'$

(ii) यदि किसी सारणिक के दो आसन्न (adjacent) पंक्तियों या स्तंभों को परस्पर बदल दिया जाए तो सारणिक के संख्यात्मक मान में कोई परिवर्तन नहीं होता किन्तु उसका चिह्न बदल जाता है।

उपपत्ति : माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ...(1)

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$
$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2$$

अर्थात् $\Delta = (a_1b_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3) - (a_1b_3c_2 + b_1a_2c_3 + c_1a_3b_2)$ ...(2)

तथा मान $\Delta' = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ [(1) में प्रथम दो पंक्तियों को परस्पर बदलने पर]

$$= a_2(b_1c_3 - b_3c_1) - b_2(a_1c_3 - a_3c_1) + c_2(a_1b_3 - a_3b_1)$$
$$= a_2b_1c_3 - a_2b_3c_1 - b_2a_1c_3 + b_2a_3c_1 + c_2a_1b_3 - c_2a_3b_1$$
$$= (a_2b_1c_3 + b_2a_3c_1 + c_2a_1b_3) - (a_2b_3c_1 + b_2a_1c_3 + c_2a_3b_1)$$
$$= -[(a_1b_2c_3 + b_1a_3c_2 + c_1a_2b_3) - (a_1b_3c_2 + b_1a_2c_3 + c_1b_2a_3)]$$

$= -\Delta$ [(2) से]

अर्थात् $\Delta' = -\Delta$

(iii) यदि किसी सारणिक की किसी पंक्ति या स्तंभ के सभी अवयव शून्य हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।

जैसे : $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0(2\times 6 - 3\times 5) - 0(1\times 6 - 4\times 3) + 0(1\times 5 - 2\times 4) = 0$

[प्रथम स्तंभ से विस्तार करने पर]

(iv) यदि किसी सारणिक में कोई दो पंक्तियाँ या दो स्तंभ समान (Identical) हों तो सारणिक का मान शून्य होता है।

उपपत्ति : माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ [यहाँ पहली तथा दूसरी पंक्ति समान हैं]

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ [पहली तथा दूसरी पंक्ति को परस्पर बदलने पर]

$= -\Delta$ [गुण (ii) से]

अर्थात् $\Delta = -\Delta$ या $2\Delta = 0$ $\therefore \Delta = 0$

(v) यदि किसी सारणिक के किसी पंक्ति या स्तंभ के प्रत्येक अवयव में किसी एक अशून्य संख्या m से गुणा किया जाए तो सारणिक का मान m गुना हो जाता है।

उपपत्ति : माना $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta$ तो

$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_1 - b_2c_1)$ [विस्तार से] ...(1)

$$\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ma_1(b_2c_3 - b_3c_2) - ma_2(b_1c_3 - b_3c_1) + ma_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$
$$= m\{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)\}$$

$= m\times\Delta$ [(1) से]

(vi) यदि किसी पंक्ति या स्तंभ का प्रत्येक अवयव दो राशियों का योग हो तो सारणिक को उसी कोटि के दो सारणिकों के योग के रूप में प्रकट किया जा सकता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अर्थात् $\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(vii) यदि सारणिक की किसी पंक्ति या स्तंभ के प्रत्येक अवयव को समान संख्या से गुणा कर दूसरी पंक्ति या स्तंभ के संगत अवयवों में जोड़ या घटा दिया जाए तो सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता।

4.1.7 सारणिक के मान प्राप्त करने की कार्य विधि (Working Rule)

यदि दिया गया सारणिक द्वितीय क्रम का है तो मान आसानी से निकल आता है। किन्तु यदि सारणिक तृतीय या ऊँचे क्रम का हो, तो हम सारणिक के गुणों का प्रयोग करके किसी पंक्ति या स्तंभ में अधिक से अधिक शून्य लाने की कोशिश करते हैं। तत्पश्चात् उस पंक्ति या स्तंभ के सापेक्ष उसका विस्तार कर देते हैं।

(i) यदि किसी सारणिक के ith पंक्ति R_i (या स्तंभ C_i) में jth पंक्ति R_j (या स्तंभ C_j) के अवयवों को m से गुणा कर जोड़ते हैं, तो इसे हम निम्न प्रकार से लिखेंगे :

$$R_i \to R_i + mR_j \quad \text{या } R_i = R_i + mR_j$$
$$C_i \to C_i + mC_j \quad \text{या } C_i = C_i + mC_j$$

जैसे : $R_2 = R_2 + 2R_3$ बतलाता है कि दूसरी पंक्ति के अवयवों को दूसरी पंक्ति के अवयव तथा तीसरी पंक्ति के संगत अवयव में 2 से गुणा कर जोड़ने से प्राप्त परिणामों के जोड़ के रूप में लिखा गया है।

(ii) यदि दो पंक्तियों R_i तथा R_j को परस्पर बदला जाए तो इसे $R_i \leftrightarrow R_j$ तथा इसी प्रकार दो स्तंभों C_i तथा C_j के परस्पर बदलाव को $C_i \leftrightarrow C_j$ से सूचित करते हैं।

(iii) KR_i (या KC_j) i वीं पंक्ति (या jवें स्तंभ) के प्रत्येक अवयव को K से गुणनफल को बताता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ में

(i) अवयव 1, 5 तथा 9 के लघुघटक ज्ञात करें। (ii) 4 तथा 8 के सहखण्ड ज्ञात करें।

हल : (i) अवयव 1 का लघुघटक $= \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 5\times 9 - 8\times 6 = 45 - 48 = -3$

अवयव 5 का लघुघटक $= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9\times 1 - 7\times 3 = 9 - 21 = -12$

अवयव 9 का लघुघटक $= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\times 5 - 4\times 2 = 5 - 8 = -3$

(ii) सूत्र से किसी अवयव का सहखण्ड $= (-1)^{i+j} \times$ अवयव का लघुघटक

4 का सहखण्ड $= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$ [$\because$ 4 द्वितीय पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ में है $\therefore i = 2, j = 1$]

$= (-1)^3 (18 - 24) = (-1) \times (-6) = 6$

8 का सहखण्ड $= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$ [$\because i = 3, j = 2$]

$= (-1)^5 (6 - 12) = (-1)(-6) = 6$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

उदाहरण 2. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ का मान बतायें।

हल : यदि सारणिक का मान Δ हो, तो प्रथम पंक्ति के सापेक्ष विस्तार करने पर

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(18-2) - 3(15-1) + 4(10-6)$$

$$= 2 \times 16 - 3 \times 14 + 4 \times 4 = 32 - 42 + 16 = 48 - 42 = 6$$

उदाहरण 3. बिना प्रसार किए निम्न सारणिकों का मान ज्ञात करें।

(i) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1999, 2015]**

(ii) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1978]**

हल : (i) दिया गया सारणिक $= \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & b+c \\ 1 & b+c+a & c+a \\ 1 & c+a+b & a+b \end{vmatrix}$ $[C_2 = C_2 + C_3$ से$]$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b+c \\ 1 & 1 & c+a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$ $[(a+b+c)$ उभयनिष्ठ है$]$

$$= (a+b+c) \times 0$$ $[\because C_1 = C_2]$

$$= 0$$

उत्तर

(ii) माना $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ यहाँ $R_2 = R_3$, अत: इसका मान शून्य होगा।

अर्थात् $\Delta = 0$

उत्तर

उदाहरण 4. (i) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1988, 2011]

(ii) सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2013]

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ ...(1)

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

पंक्ति तथा स्तंभ के रूपांतरण से

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \therefore \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad \ldots(2)$$

प्रमाणित हुआ।

पुनः (1) से $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} R_2 = R_2 - R_1 \\ R_3 = R_3 - R_1 \text{ से} \end{bmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & (b+a)(b-a) \\ 0 & c-a & (c+a)(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$$

[R_2 तथा R_3 से क्रमशः $b-a$ तथा $c-a$ उभयनिष्ठ (common) लेने पर]

$$= (b-a)(c-a)\left[1\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & c+a \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} a & a^2 \\ 1 & b+a \end{vmatrix}\right]$$

$$= (b-a)(c-a)[(c+a)-(b+a)-0+0] = (b-a)(c-a)[c+a-b-a]$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) = \{-(a-b)\}\{-(b-c)\} \times (c-a)\}$$

$\therefore$ $\Delta = (a-b)(b-c)(c-a)$ $\ldots(3)$

अर्थात् $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad [(2) \text{ तथा } (3) \text{ से}]$$

सिद्ध हुआ।

(ii) $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-y & x^2-y^2 & -z(x-y) \\ y-z & y^2-z^2 & x(y-z) \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} R_1 = R_1 - R_2 \\ R_2 = R_2 - R_3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x-y & (x+y)(x-y) & -z(x-y) \\ y-z & (y-z)(y-z) & x(y-z) \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 1 & x+y & -z \\ 1 & y+z & -x \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & x-z & x-z \\ 1 & y+z & -x \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} \quad [R_1 = R_1 - R_2]$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$=(x-y)(y-z)(x-z)\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & y+z & -x\\ z & z^2 & xy\end{vmatrix}$$

$$=-(x-y)(y-z)(z-x)\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & x+y+z & -x\\ z & z^2-xy & xy\end{vmatrix} \quad [C_2=C_2-C_3]$$

$$=-(x-y)(y-z)(z-x)\left\{0-0+1\begin{vmatrix}1 & x+y+z\\ z & z^2-xy\end{vmatrix}\right\}$$

$$=-(x-y)(y-z)(z-x)\{z^2-xy-xz-yz-z^2\}$$

$$=-(x-y)(y-z)(z-x)\{-(xy+yz+zx)\}$$

$$=(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)=\text{R.H.S.}$$

उदाहरण 5. सिद्ध करें कि $\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\\ 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1+c\end{vmatrix}=abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=bc+ca+ab+abc$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2007]

हल : माना $\Delta=\begin{vmatrix}1+a & -a & -a\\ 1 & b & 0\\ 1 & 0 & c\end{vmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix}C_2=C_2-C_1\\ C_3=C_3-C_1 \text{ से}\end{bmatrix}$

$$\Delta=(1+a)\begin{vmatrix}b & 0\\ 0 & c\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-a & -a\\ 0 & c\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-a & -a\\ b & 0\end{vmatrix}$$

$=(1+a)(bc-0)-1(-ac-0)+(0+ab)$ (स्तम्भ के विस्तार करने पर)

$=(1+a)bc+ac+ab$

$=bc+abc+ac+ab=abc\left[\frac{1}{a}+1+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]=abc\left[1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 6. सारणिक $\begin{vmatrix}1 & a & a^2-bc\\ 1 & b & b^2-ca\\ 1 & c & c^2-ab\end{vmatrix}$ का मान बिना प्रसार किए प्राप्त करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2000]

हल : माना $\Delta=\begin{vmatrix}1 & a & a^2-bc\\ 1 & b & b^2-ca\\ 1 & c & c^2-ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & a & -bc\\ 1 & b & -ca\\ 1 & c & -ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & a & bc\\ 1 & b & ca\\ 1 & c & ab\end{vmatrix}$

$=\Delta_1-\Delta_2$ (माना) ...(1)

अब $\Delta_1=\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}=\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}abc & a & a^2\\ abc & b & b^2\\ abc & c & c^2\end{vmatrix}$ $[C_1$ में abc से गुणा करने पर]

$=\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix}bc & 1 & a\\ ac & 1 & b\\ ab & 1 & c\end{vmatrix}$ $[R_1$ से a, R_2 से b तथा R_3 से c उभयनिष्ठ लेने पर]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$= -\begin{vmatrix} 1 & bc & a \\ 1 & ac & b \\ 1 & ab & c \end{vmatrix}$$ [C_1 तथा C_2 को परस्पर बदलने पर]

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$ [पुनः C_2 तथा C_3 को परस्पर बदलने पर]

अर्थात् $\Delta_1 = \Delta_2$ $\therefore$ $\Delta_1 - \Delta_2 = 0$

अर्थात् $\Delta = 0$ [(1) से]

उत्तर

उदाहरण 7. यदि ω इकाई का काल्पनिक घनमूल हो तो सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात करें।

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2 \\ \omega+\omega^2+1 & \omega^2 & 1 \\ \omega^2+1+\omega & 1 & \omega \end{vmatrix}$ [$C_1 = C_1 + C_2 + C_3$ से]

$$= \begin{vmatrix} 0 & \omega & \omega^2 \\ 0 & \omega^2 & 1 \\ 0 & 1 & \omega \end{vmatrix}$$ [$\because 1 + \omega + \omega^2 = 0$]

$= 0$

उत्तर

उदाहरण 8. सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc\,(a+b+c)^3$

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} (b+c)^2 - a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & (c+a)^2 - b^2 & b^2 \\ c^2 - (a+b)^2 & c^2 - (a+b)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} C_1 = C_1 - C_3 \\ C_2 = C_2 - C_3 \text{ से} \end{bmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} (b+c+a)(b+c-a) & 0 & a^2 \\ 0 & (c+a+b)(c+a-b) & b^2 \\ (c+a+b)[c-(a+b)] & (c+a+b)[c-(a+b)] & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ c-a-b & c-a-b & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

[C_1 तथा C_2 से उभयनिष्ठ $(a+b+c)$ बाहर निकालने पर]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -2b & -2a & 2ab \end{vmatrix} \quad [R_3=R_3-(R_1+R_2) \text{ से}]$$

$$=(a+b+c)^2\times\frac{1}{ab}\begin{vmatrix} ab+ac-a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & bc+ab-b^2 & b^2 \\ -2ab & -2ab & 2ab \end{vmatrix} \quad [C_1=aC_1 \text{ तथा } C_2=bC_2 \text{ से}]$$

$$=(a+b+c)^2\times\frac{1}{ab}\begin{vmatrix} a(b+c) & a^2 & a^2 \\ b^2 & b(c+a) & b^2 \\ 0 & 0 & 2ab \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} C_1=C_1+C_3 \\ C_2=C_2+C_3 \text{ से} \end{bmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\,\frac{ab}{ab}\times 2ab\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} R_1 \text{ से } a,\ R_2 \text{ से } b \\ \text{तथा } R_3 \text{ से } 2ab \text{ बाहर निकालने पर} \end{bmatrix}$$

$=2ab\,(a+b+c)^2\ [(b+c)\{(c+a)-b\times 0\}-b\{a-0\}+0\times\{ab-a(c+a)]$

$=2ab\,(a+b+c)^2\ [(b+c)(c+a)-ab]$

$=2ab\,(a+b+c)^2\,[bc+ab+c^2+ac-ab]$

$=2ab\,(a+b+c)^2\times c\,(b+c+a)=2abc\,(a+b+c)^3$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 9. दिखायें कि $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)^3$

हल: बायाँ पक्ष $\Delta=\begin{vmatrix} a-b-c+2b+2c & 2a+b-c-a+2c & 2a+2b+c-a-b \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

$[R_1=R_1+R_2+R_3$ से$]$

$$=\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$[(a+b+c)$ को उभयनिष्ठ रूप में बाहर लेने पर$]$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -(a+b+c) & 0 \\ 2c & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix} \quad \begin{bmatrix} C_2=C_2-C_1 \\ C_3=C_3-C_1 \text{ से} \end{bmatrix}$$

प्रथम पंक्ति के सापेक्ष विस्तार करने पर

$$=(a+b+c)\left[1\begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 \\ 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}-0\begin{vmatrix} 2b & 0 \\ 2c & -(a+b+c) \end{vmatrix}+0\begin{vmatrix} 2b & -(a+b+c) \\ 2c & c \end{vmatrix}\right.$$

$=(a+b+c)\,[\{-(a+b+c)\}\times\{-(a+b+c)\}-0]-0+0$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$= (a+b+c)\,(a+b+c)^2$$
$$= (a+b+c)^3$$

उदाहरण 10. सिद्ध करें कि $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)$

हल : बायाँ पक्ष $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \beta+\gamma+\alpha & \gamma+\alpha+\beta & \alpha+\beta+\gamma \end{vmatrix}$ $[R_3 = R_3 + R_1$ से]

$$\Delta = (\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix} \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha \\ \alpha^2 & \beta^2-\alpha^2 & \gamma^2-\alpha^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{bmatrix}$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \alpha^2 & \beta+\alpha & \gamma+\alpha \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\,[1(\gamma+\alpha)-(\beta+\alpha)-0+0]$$ [तृतीय पंक्ति से विस्तार से]

$$= (\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$
$$= (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma) = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 11. दिखायें कि $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-b & b-c & c-a \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc$

हल : बायाँ पक्ष $\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a-b+b-c+c-a & b-c & c-a \\ b+c+c+a+a+b & c+a & a+b \end{vmatrix}$ $[C_1 = C_1 + C_2 + C_3$ से]

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ 0 & b-c & c-a \\ 2(a+b+c) & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & b-c & c-a \\ 2 & c+a & a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & b-c & c-a \\ 0 & c+a-2b & a+b-2c \end{vmatrix} \quad [R_3 \to R_3 - 2R_1]$$

$$= (a+b+c)\left[1\begin{vmatrix} b-c & c-a \\ c+a-2b & a+b-2c \end{vmatrix} - 0 + 0\right]$$

$$= (a+b+c)\,[(b-c)(a+b-2c)-(c-a)(c+a-2b)]$$ [प्रथम स्तंभ के सापेक्ष प्रसार से]

$$= (a+b+c)\,[ab+b^2-2bc-ac-bc+2c^2-c^2-ac+2bc+ac+a^2-2ab]$$
$$= (a+b+c)\,[a^2+b^2+2c^2-c^2+ab-2ab-2bc-bc+2bc-ac-ac+ac]$$
$$= (a+b+c)\,(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

$\therefore \quad \Delta = a^3+b^3+c^3-3abc = $ दायाँ पक्ष

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 12. यदि a, b, c सभी धनात्मक हैं तथा एक गुणोत्तर श्रेढी के क्रमशः pवें qवें तथा rवें पद हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} \log a & p & 1 \\ \log b & q & 1 \\ \log c & r & 1 \end{vmatrix} = 0$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

हल : माना दी गई गुणोत्तर श्रेढी का प्रथम पद A, सार्वअनुपात R है, तो

प्रश्न से
$$a = AR^{p-1} \quad ...(1)$$
$$b = AR^{q-1} \quad ...(2)$$
$$c = AR^{r-1} \quad ...(3)$$

(1), (2), (3) का दोनों तरफ log लेने पर
$$\log a = \log A + (p-1)\log R \quad ...(4)$$
$$\log b = \log B + (q-1)\log R \quad ...(5)$$
$$\log c = \log C + (r-1)\log R \quad ...(6)$$

अब
$$\begin{vmatrix} \log a & p & 1 \\ \log b & q & 1 \\ \log c & r & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log A + (p-1)\log R & p & 1 \\ \log B + (q-r)\log R & q & 1 \\ \log C + (r-1)\log R & r & 1 \end{vmatrix} \quad [(4), (5) \text{ एवं } (6) \text{ से}]$$

$$= \begin{vmatrix} \log A & p & 1 \\ \log A & q & 1 \\ \log A & r & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (p-1)\log R & p & 1 \\ (q-1)\log R & q & 1 \\ (r-1)\log R & r & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \log A & p & 1 \\ \log A & q & 1 \\ \log A & r & 1 \end{vmatrix} + \log R \begin{vmatrix} p-1 & p & 1 \\ q-1 & q & 1 \\ r-1 & r & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \log A \begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ 1 & q & 1 \\ 1 & r & 1 \end{vmatrix} + \log R \begin{vmatrix} p & p & 1 \\ q & q & 1 \\ r & r & 1 \end{vmatrix} \quad [C_1 = C_1 + C_3 \text{ से}]$$

$$= \log A \times 0 + 0 \times \log R \quad [\because \text{ दो स्तंभ समान हैं}]$$
$$= 0$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} \log a & p & 1 \\ \log b & q & 1 \\ \log c & r & 1 \end{vmatrix} = 0$$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 13. यदि $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$, तो सिद्ध करें कि $xyz = -1$

हल : दिया गया है कि
$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0 \quad ...(1)$$

अब
$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x \\ 1 & y^2 & y \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix} + xyz \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} + xyz \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}(1+xyz) = 0 \qquad [(1) \text{ से}]$$

अत: $1 + xyz = 0 \quad \Rightarrow \quad xyz = -1$ सिद्ध हुआ।

समीकरणों को हल करने पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 14. सिद्ध करें कि $x=1$ निम्न समीकरण का मूल (root) है।

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

हल : दिये गये समीकरण के बायें पक्ष में $x=1$ रखने पर

$$\begin{vmatrix} 1+1 & 3 & 5 \\ 2 & 1+2 & 5 \\ 2 & 3 & 1+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$ [∵ तीनों पंक्तियाँ समान हैं]

$\therefore$ $x=1$ दिए गए समीकरण का मूल है।

उदाहरण 15. x का मान ज्ञात करें जबकि $\begin{vmatrix} a & a & x \\ x & x & x \\ b & x & b \end{vmatrix} = 0$

हल : समीकरण में $x=0$ रखने पर $\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix} = 0$

$\therefore$ $x=0$ समीकरण (1) का एक मूल है।

पुन: $x=a$ रखने पर $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ b & a & b \end{vmatrix} = 0$ [∵ प्रथम एवं द्वितीय पंक्तियाँ समान हैं]

$\therefore$ $x=a$, समीकरण का दूसरा मूल है।

पुन: $x=b$ रखने पर $\begin{vmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ b & b & b \end{vmatrix} = 0$ [∵ द्वितीय एवं तृतीय पंक्तियाँ समान हैं]

$\therefore$ $x=b$ समीकरण का एक मूल है। $\therefore$ $x=0, a, b$ दिए गए समीकरण के मूल हैं।

उदाहरण 16. समीकरण $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$ को हल कीजिए।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1984]

हल : दिया गया समीकरण $\begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ x+a+b+c & x+b & c \\ x+a+b+c & b & x+c \end{vmatrix} = 0$ [$C_1 = C_1 + C_2 + C_3$ से]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

या $(x+a+b+c)\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 1 & x+b & c\\ 1 & b & x+c\end{vmatrix}=0$ [उभयनिष्ठ $x+a+b+c$ बाहर लेने पर]

या $(x+a+b+c)\begin{vmatrix}1 & b & c\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & x\end{vmatrix}=0$ $\begin{bmatrix}R_2=R_2-R_1\\ R_3=R_3-R_1 \text{ से}\end{bmatrix}$

या $(x+a+b+c)\,x^2=0 \Rightarrow$ $x^2=0$ $i.e.$ $x=0$

या $x+a+b+c=0$ $i.e.$ $x=-(a+b+c)$ $\therefore$ $x=0, -(a+b+c)$ **उत्तर**

उदाहरण 17. समीकरण $\begin{vmatrix}x+1 & 3 & 5\\ 2 & x+2 & 5\\ 2 & 3 & x+4\end{vmatrix}=0$ को हल करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2010]

हल : दिया गया समीकरण $\begin{vmatrix}x+9 & 3 & 5\\ x+9 & x+2 & 5\\ x+9 & 3 & x+4\end{vmatrix}=0$ $[C_1=C_1+C_2+C_3$ से$]$

या $(x+9)\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 1 & x+2 & 5\\ 1 & 3 & x+4\end{vmatrix}=0$ या $(x+9)\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & x-1 & 0\\ 0 & 0 & x-1\end{vmatrix}=0$ $\begin{bmatrix}R_2=R_2-R_1\\ R_3=R_3-R_1 \text{ से}\end{bmatrix}$

या $(x+9)(x-1)^2=0$ $\therefore x+9=0$ या $(x-1)^2=0$

अर्थात् $x=-9$ या $x=1, 1$ $\therefore$ अभीष्ट हल $x=-9, 1, 1$ **उत्तर**

उदाहरण 18. समीकरण $\begin{vmatrix}x & -6 & -1\\ 2 & -3x & x-3\\ -3 & 2x & x+2\end{vmatrix}=0$ को हल करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]

हल : दिया गया समीकरण $x\begin{vmatrix}-3x & x-3\\ 2x & x+2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-6 & -1\\ 2x & x+2\end{vmatrix}+(-3)\begin{vmatrix}-6 & -1\\ -3x & x-3\end{vmatrix}=0$

या $x\{-3x(x+2)-2x(x-3)\}-2\{-6(x+2)-(-1)(2x)\}-3\{(-6)(x-3)-(-1)(-3x)\}$

या $x\{-3x^2-6x-2x^2+6x\}-2\{-6x-12+2x\}-3\{-6x+18-3x\}$

या $x\times(-5x^2)-2\{-4x-12\}-3\{-9x+18\}=0$

या $-5x^3+8x+24+27x-54=0$ या $-5x^3+35x-30=0$

या $5(x^3-7x+6)=0$ या $x^3-7x+6=0$

या $x^3-x^2+x^2-x-6x+6=0$ या $x^2(x-1)+x(x-1)-6(x-1)=0$

या $(x-1)(x^2+x-6)=0$ या $(x-1)(x^2+3x-2x-6)=0$

या $(x-1)\{x(x+3)-2(x+3)\}=0$ या $(x-1)(x+3)(x-2)=0$

$\therefore$ $x-1=0 \Rightarrow x=1$

या $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

या $x-2=0 \Rightarrow x=2$ $\therefore$ $x=1, -3, 2$ **उत्तर**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

प्रश्नावली 4.1

1. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ में

(i) अवयव 1, 6 एवं 7 के लघुघटक (Minor) ज्ञात करें।

(ii) 1, 2 तथा 3 के सहखंड (Cofactor) ज्ञात करें।

2. निम्न सारणियों का विस्तार के द्वारा मान निकालें—

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1984]

(iii) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1988]

(iv) $\begin{vmatrix} 12 & 3 & 7 \\ 27 & 7 & 17 \\ 36 & 9 & 22 \end{vmatrix}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1985]

(v) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$ (vi) $\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix}$ (vii) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

3. गुणों के प्रयोग से मान निकालें—

(i) $\begin{vmatrix} 225 & 240 & 189 \\ 210 & 225 & 204 \\ 212 & 252 & 188 \end{vmatrix}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1985, 2015]

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2007]

(iii) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}$ (iv) $\begin{vmatrix} 1/a & a^2 & bc \\ 1/b & b^2 & ca \\ 1/c & c^2 & ab \end{vmatrix}$ [संकेत : $R_1 \to aR_1, R_2 \to bR_2, R_3 \to cR_3$]

(v) $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix}$ (vi) $\begin{vmatrix} x^2 & 2x & 1 \\ x & x+1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2016(S)]

(vii) $\begin{vmatrix} 25 & 9 & -18 \\ 10 & -27 & 20 \\ 12 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

सिद्ध करें :

4. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$

5. $\begin{vmatrix} 0 & ab & ac \\ ba & 0 & bc \\ ca & cb & 0 \end{vmatrix} = 2a^2b^2c^2$

6. $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x+2a)(x-a)^2$

7. $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

8. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$

[संकेत : $C_1 \to aC_1$; $C_2 \to bC_2$; $C_3 \to cC_3$ से

$$\frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a(a^2+1) & ab^2 & ac^2 \\ a^2b & b(b^2+1) & bc^2 \\ a^2c & b^2c & c(c^2+1) \end{vmatrix}$$]

9. सिद्ध करें $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

10. सिद्ध करें (i) $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2013, 17(SB), 17(O)]

(ii) यदि $x \neq y \neq z$ तथा $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0$ तो दिखायें $xyz = -1$.

11. सिद्ध करें $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2000]

12. सिद्ध करें (i) $\begin{vmatrix} a+b & b & c \\ b+c & c & a \\ c+a & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$ (ii) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$

13. सिद्ध करें $\begin{vmatrix} \alpha_{C_1} & \alpha_{C_2} & \alpha_{C_3} \\ \beta_{C_1} & \beta_{C_2} & \beta_{C_3} \\ \gamma_{C_1} & \gamma_{C_2} & \gamma_{C_3} \end{vmatrix} = \frac{1}{12}\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

[संकेत : $\alpha_{C_1} = \alpha; \beta_{C_1} = \beta; \gamma_{C_1} = \gamma$ तथा $\alpha_{C_1} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}; \alpha_{C_3} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}$ आदि]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

14. यदि a, b, c धनात्मक एवं असमान हैं, तो दिखाये $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ का मान ऋणात्मक है।

15. सिद्ध करें $x=1$ निम्न समीकरण का मूल है

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

16. सिद्ध करें $x=-1$ निम्न समीकरण का मूल है

$$\begin{vmatrix} 2-x & 3 & 3 \\ 3 & 4-x & 5 \\ 3 & 5 & 4-x \end{vmatrix} = 0$$

हल करें :

17. $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2010]**

18. $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1984]**

19. $\begin{vmatrix} a+x & a-x & a-x \\ a-x & a+x & a-x \\ a-x & a-x & a+x \end{vmatrix} = 0$

20. $\begin{vmatrix} p+x & q+x & r+x \\ q+x & r+x & p+x \\ r+x & p+x & q+x \end{vmatrix} = 0$

21. $\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]**

22. यदि $a+b+c=0$, तो समीकरण $\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$ को हल करें।

सैरस डायग्राम (Sarrus Diagram) की सहायता से मान निकालें—

23. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

उत्तरमाला

1. (i) 1 का लघुघटक $=-3$; 6 का लघुघटक $=-6$; 7 का लघुघटक $=-3$
   (ii) 1 का सहखंड $=-3$; 2 का सहखंड $=6$; 3 का सहखंड $=-3$
2. (i) -8 (ii) -52 (iii) 0 (iv) 3 (v) 1 (vi) $a^2+b^2+c^2+d^2$ (vii) -87
3. (i) -158400 (ii) 0 (iii) $(x+a+b+c)\,x^2$ (iv) 0 (v) $4a^2b^2c^2$ (vi) $(x-1)^3$
   (vii) -26112

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

17. $x = 1, -9$ **18.** $x = 0, -(a+b+c)$ **19.** $x = 0, 3a$ **20.** $x = -\frac{1}{3}(p+q+r)$

21. $1, -3, 2$ **22.** $x = 0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)}$ **23.** -12 **24.** 60

4.2 रैखिक समीकरण निकाय (System of Linear Equations)

4.2.1 परिभाषा :

रैखिक समीकरण निकाय मुख्यत: निम्न प्रकार के होते हैं—

(i) समघाती (Homogeneous) रैखिक समीकरण निकाय—जौ रैखिक समीकरण $ax + by + cz = 0$ के रूप में लिखे जा सकते हैं वे x, y तथा z में समघाती रैखिक समीकरण कहलाते हैं तथा उनका निकाय समघाती रैखिक समीकरण निकाय कहलाता है।

जैसे : $2x + 3y + 4z = 0;\ 3x + 5y + 5z = 0$ तथा $x + y + z = 0$

एक रैखिक समघाती समीकरण निकाय है।

(ii) असमघाती (Non-homogeneous) रैखिक समीकरण निकाय—जो रैखिक समीकरण $ax + by + cz + d = 0$ जहाँ $d \neq 0$, के रूप में लिखे जा सकते हैं वे x, y तथा z में असमघाती रैखिक समीकरण कहलाते हैं तथा उनका निकाय असमघाती रैखिक समीकरण निकाय कहलाता है।

जैसे : $2x + 3y + 4z = 5;\ 4x + 4y - 5z = 6;\ x + y + z = 1$

असमघाती रैखिक समीकरण निकाय है।

(iii) संगत समीकरण (Consistant Equation)—समीकरणों का वह निकाय जिसका **हल निकाला जा सकता है, संगत समीकरण** कहलाता है।

हल **अद्वितीय** (unique) हो सकता है, **या एक से अधिक हल** हो सकते हैं।

(iv) असंगत समीकरण (Inconsistent Equation)—समीकरणों का ऐसा निकाय जिसका कोई हल नहीं निकाला जा सकता असंगत समीकरण निकाय कहलाता है।

4.2.2 क्रेमर नियम (Cramer's rule)

संगत रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करने के लिए गणितज्ञ क्रेमर ने सारणिक विधि विकसित की, जो क्रेमर नियम के नाम से जानी जाती है।

माना $a_1x + b_1y + c_1z = d_1,\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2,\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

संगत रैखिक समीकरणों का निकाय है, तो इसका हल निम्न रूप से दिया जाता है।

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

जहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ = गुणांकों का सारणिक तथा $\Delta \neq 0$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

4.2.3 कार्यविधि (Working rule)

क्रेमर के नियम से रैखिक समीकरणों को हल करने की सरल विधि निम्न है—

1. दिए गए समीकरणों का गुणांक सारणिक बनायें तथा इसे Δ से सूचित करें तथा Δ का मान प्राप्त करें।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

2. अब इस सारणिक Δ के प्रथम स्तंभ के स्थान पर समीकरण के अचर पदों का स्तंभ लिखें तथा इसे Δ_1 से सूचित करें एवं इसका मान प्राप्त करें।

3. इसी प्रकार Δ के द्वितीय तथा तृतीय स्तंभों को अचरों से प्रतिस्थापित कर Δ_2 तथा Δ_3 का मान निकालें।

4. अब $x=\frac{\Delta_1}{\Delta}; y=\frac{\Delta_2}{\Delta}; z=\frac{\Delta_3}{\Delta}$ से x, y, z का मान प्राप्त करें।

नोट :

- क्रेमर नियम से हल करने के लिए $\Delta \neq 0$ आवश्यक है।

4.2.4 असंगतता तथा संगतता के लिए आवश्यक शर्तें (Conditions for Inconsistency and Consistency)

(i) यदि $\Delta \neq 0$ तो दिया गया समीकरण निकाय संगत होगा और इसका हल अद्वितीय होगा।

(ii) दिया गया समीकरण निकाय असंगत होगा यदि $\Delta = 0$ तथा Δ_1, Δ_2 एवं Δ_3 में कम-से-कम एक शून्य नहीं हो। इस स्थिति में निकाय का कोई हल नहीं होगा।

(iii) यदि $\Delta = 0$ तथा $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ तो निकाय के अनंत हल होंगे या कोई हल नहीं होगा। अत: इस स्थिति में निकाय संगत भी हो सकता है और असंगत भी। [देखें उदाहरण 5 एवं 7]

4.2.5 रैखिक समघात समीकरणों का हल (Solution of Linear Homogeneous Equations)

कार्यविधि : माना समीकरण

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

तो (i) सर्वप्रथम गुणांकों का सारणिक Δ बनायें

अर्थात् $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(ii) Δ का मान ज्ञात करें।

(a) यदि $\Delta \neq 0$, तब समघात समीकरणों के निकाय का हल अद्वितीय है, जो $x = 0, y = 0, z = 0$ से दिया जाएगा। यह ट्रिवियल हल या शून्य हल (Trivial Solution) कहलाता है।

(b) यदि $\Delta = 0$, तो समीकरणों के निकाय के अनंत हल होंगे। ये हल या अशून्य हल (Non-trivial Solutions) कहलाते हैं। इसे ज्ञात करने के लिए $z = k$ लेते हैं तथा x एवं y को k के पदों में व्यक्त करते हैं तथा $k = 1, 2, 3, \ldots$ रखकर x, y, z के अनंत हल प्राप्त करते हैं। [देखें उदाहरण 2]

4.2.6 दो सारणिकों का गुणनफल (Multiplication of Two Determinants)

माना $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}$ तथा $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1' \\ R_2' \\ R_3' \end{matrix}$

$$\text{तो } \Delta_1 \times \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$\text{अर्थात् } \Delta_1\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} R_1 R_1' & R_1 R_2' & R_1 R_3' \\ R_2 R_1' & R_2 R_2' & R_2 R_3' \\ R_3 R_1' & R_3 R_2' & R_3 R_3' \end{vmatrix}$$

इसे पंक्ति से पंक्ति का गुणनफल (Row by Row Multiplication) कहते हैं। इसी तरह स्तभ व स्तंभ का गुणनफल (Column by Column Multiplication) प्राप्त किया जा सकता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. नीचे दिए गए समीकरणों को क्रेमर विधि से हल करें—

$$7x + 5y = 16;\ 2x - 3y = 9$$

हल : दिया गया समीकरण $7x + 5y = 16;\ 2x - 3y = 9$

$$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 7(-3) - 5 \times 2 = -21 - 10 = -31 \quad \therefore \quad \Delta \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & 5 \\ 9 & -3 \end{vmatrix}$$ [Δ के प्रथम स्तंभ को अचर से प्रतिस्थापित करने पर]

$$= -16 \times 3 - 9 \times 5 = -48 - 45 = -93$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$ [Δ के द्वितीय स्तंभ को अचर से प्रतिस्थापित करने पर]

$$= 7 \times 9 - 16 \times 2 = 63 - 32 = 31$$

$$\therefore \quad x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-93}{-31} = 3$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{31}{-31} = -1 \qquad \therefore \quad x = 3,\ y = -1$$ अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 2. निम्न समीकरणों को हल करें—

$$2x + 3y + 4z = 0;\ x + y + z = 0;\ 2x - y + 3z = 0$$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]**

हल : $$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(3+1) - 3(3-2) + 4(-1-2)$$

$$= 2 \times 4 - 3 \times 1 + 4 \times (-3)$$

$$= 8 - 3 - 12 = 8 - 15 = -7 \neq 0$$

अत: दिए गए समीकरणों का एक हल होगा, जो $x = 0, y = 0, z = 0$ से दिया जाएगा।

उदाहरण 3. समीकरण निकाय $6x + y - 3z = 5,\ x + 3y - 2z = 5$

$2x + y + 4z = 8$ को क्रेमर नियम से हल करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

हल : यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6\{12-(-2)\} - 1\{4-(-4)\} + (-3)\{1-6\}$

$$= 6 \times 14 - 1 \times 8 + (-3) \times (-5) = 84 - 8 + 15 = 91 \quad \ldots(1)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$ [प्रथम स्तंभ को अचर से प्रतिस्थापित करने पर]

$$\Delta_1 = 5\{12-(-2)\} - 1\{20-(-16)\} + (-3)\{5-24\}$$
$$= 5 \times 14 - 1 \times 36 + (-3) \times (-19) = 70 - 36 + 57$$
$$= 91 \quad \ldots(2)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 5 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$ [द्वितीय स्तंभ को अचर से प्रतिस्थापित करने पर]

$$= 6\{20-(-16)\} - 5\{4-(-4)\} + (-3)\{8-10\}$$
$$= 6 \times 36 - 5 \times 8 + (-3) \times (-2) = 216 - 40 + 6$$
$$= 182 \quad \ldots(3)$$

तथा $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ [तृतीय स्तंभ को अचर से प्रतिस्थापित करने पर]

$$= 6(24-5) - 1(8-10) + 5(1-6)$$
$$= 6 \times 19 - 1 \times (-2) + 5 \times (-5) = 114 + 2 - 25 = 91 \quad \ldots(4)$$

∴ क्रेमर नियम से

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{91}{91} = 1, \; y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{182}{91} = 2, \; z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{91}{91} = 1$$

[(1) तथा (2), (3) एवं (4) के प्रयोग से]

∴ $x = 1, \; y = 2, \; z = 1$ अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 4. निम्न समीकरण निकाय को क्रेमर नियम से हल करें।

$x + y + z = 8; \; 4x + 2y + z = 11; \; 9x - 3y + z = 6$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2006, 15, 17(S)]**

हल : यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1\{2-(-3)\} - 1\{4-9\} + 1\{-12-18\}$

$$= 1 \times 5 - 1 \times (-5) + 1 \times (-30) = 5 + 5 - 30 = -20 \neq 0 \quad \ldots(1)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 8\{2-(-3)\} - 1\{11-6\} + 1\{-33-12\}$$

$$= 8 \times 5 - 1 \times 5 + 1 \times (-45) = 40 - 5 - 45 = -10 \quad \ldots(2)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 4 & 11 & 1 \\ 9 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1(11-6) - 8(4-9) + 1(24-99)$$

$$= 1 \times 5 - 8 \times (-5) + 1 \times (-75) = 5 + 40 - 75 = -30 \quad \ldots(3)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

तथा $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 11 \\ 9 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 1\{12-(-33)\} - 1\{24-99\} + 8\{-12-18\}$

$= 1 \times 45 - 1 \times (-75) + 8 \times (-30) = 45 + 75 - 240 = -120$ ...(4)

$\therefore$ क्रेमर नियम से $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-10}{-20} = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-30}{-20} = \frac{3}{2}$, $z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-120}{-20} = 6$

[(1) तथा (2), (3) एवं (4) के प्रयोग से]

$\therefore$ $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$, $z = 6$ अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 5. निम्न समीकरण निकाय को हल करें $x + y + z = 1$; $x + 2y + 3z = 4$; $x + 3y + 5z = 7$

दिया गया समीकरण $x + y + z = 1$ ...(1)

$x + 2y + 3z = 4$ ...(2)

$x + 3y + 5z = 7$ ...(3)

हल : यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1(10-9) - 1(5-3) + 1(3-2)$

$= 1 \times 1 - 1 \times 2 + 1 \times 1 = 1 - 2 + 1 = 0$

$\therefore$ $\Delta = 0$

$\therefore$ निकाय का हल अद्वितीय नहीं है।

पुनः $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1(10-9) - 1(20-21) + 1(12-14)$

$= 1 \times 1 - 1 \times (-1) + 1 \times (-2) = 1 + 1 - 2 = 0$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 1(20-21) - 1(5-3) + 1(7-4)$

$= 1 \times (-1) - 1 \times 2 + 1 \times 3 = -1 - 2 + 3 = 0$

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 1(14-12) - 1(7-4) + 1(3-2)$

$= 1 \times 2 - 1 \times 3 + 1 \times 1 = 2 - 3 + 1 = 0$

इस तरह $\Delta = 0$, $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$

$\therefore$ निकाय संगत भी हो सकता है या असंगत भी।

माना $z = k$

$\therefore$ समीकरण (1) तथा (2) से $x + y = 1 - k$ ...(4)

तथा $x + 2y = 4 - 3k$ ...(5)

(4) में से (5) घटाने पर $-y = -3 + 2k \Rightarrow y = 3 - 2k$

$\therefore$ (4) से $x = 1 - k - (3 - 2k) = 1 - k - 3 + 2k = k - 2$

अब समीकरण (3) में $x = k - 2$, $y = 3 - 2k$ तथा $z = k$ रखने पर

$k - 2 + 3(3 - 2k) + 5k = k - 2 + 9 - 6k + 5k = 7$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अत: ये मान समीकरण को संतुष्ट करते हैं। अत: निकाय संगत है।

∴ अभीष्ट हल $x = k-2,\ y = 3-2k,\ z = k,$ जहाँ $k = 0, 1, 2, \ldots$ इत्यादि। उत्तर

उदाहरण 6. दिखायें कि समीकरणों का निम्न निकाय असंगत है—

$$x - 3y + 2z = 4;\ 2x + y - 3z = -2;\ 4x - 5y + z = 5$$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2012]**

हल : यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1\{1-15\} - (-3)\{2-(-12)\} + 2\{-10-4\}$

$$= 1\times(-14) + 3\times 14 + 2\times(-14) = -14 + 42 - 28 = 0$$

तथा $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ 5 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 4\{1-15\} - (-3)\{(-2)-(-15)\} + 2\{10-5\}$

$$= 4\times(-14) + 3\times 13 + 2\times 5 = -56 + 39 + 10 = -7 \neq 0$$

∵ $\Delta = 0$ तथा $\Delta_1 \neq 0$

स्पष्ट है कि कम-से-कम एक सारणिक शून्य नहीं है।

∴ दिया गया समीकरण निकाय असंगत है।

उदाहरण 7. क्या समीकरणों का निम्न निकाय संगत है ?

$$2x - y + 3z = 4;\ 4x - 2y + 6z = 8;\ 2x - y + 3z = 5$$

हल : यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 6\times 0 = 0$ [∵ प्रथम तथा तृतीय स्तंभ समान हैं]

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 8 & -2 & 6 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$= (-1)\times 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\times 0 = 0$ [द्वितीय स्तंभ तथा तृतीय स्तंभ समान हैं।]

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 6\times 0$ [∵ प्रथम तथा तृतीय स्तंभ समान हैं]

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\times(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

$= -2\times 0$ [∵ प्रथम तथा द्वितीय स्तंभ समान हैं]

∴ $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$

अत: समीकरण निकाय संगत भी हो सकता है और असंगत भी।

यदि $z = k$

पहले समीकरण से $2x - y = 4 - 3k$ ...(1)

दूसरे समीकरण से $2x - y = 4 - 3k$ ...(2)

तीसरे समीकरण से $2x - y = 5 - 3k$ ...(3)

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अत: (1), (2) तथा (3) समानांतर रेखाओं को निरूपित करते हैं। अत: इन समीकरणों का कोई हल नहीं है,

$\therefore$ समीकरण निकाय असंगत है।

उदाहरण 8. k के किन मानों के लिए समीकरण समूह

$$3x - y + kz = 1;\ 2x + y + z = 2;\ x + 2y - k = -1 \text{ संगत है।}$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]

हल : यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -k \end{vmatrix} = 3\{-k-2\} - (-1)\{-2k-1\} + k(4-1)$

$$= -3k - 6 - 2k - 1 + 3k = -2k - 7 \quad \ldots(1)$$

$\therefore$ समीकरण निकाय संगत है

(i) यदि $\Delta \neq 0 \quad \Rightarrow \quad -2k - 7 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad k \neq \frac{-7}{2}$

(ii) यदि $\Delta = 0$ तथा $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$

किन्तु $\Delta = 0 \Rightarrow k = -\frac{7}{2}$

अब $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -k \end{vmatrix} = 2k - 1$ [प्रसार से]

$$= 2 \times \frac{-7}{2} - 1 = -8 \neq 0 \qquad [k = -\frac{7}{2} \text{ के लिए}]$$

अत: $k = \frac{-7}{2}$ के लिए $\Delta_1 \neq 0$

$\therefore$ इस स्थिति में समीकरण निकाय संगत नहीं है,

$\therefore$ यदि $k \neq \frac{-7}{2}$ तो समीकरण निकाय संगत है।

गुणन पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 9 : यदि $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ हो, तो $\Delta_1 \Delta_2$ प्राप्त करें।

हल : $\Delta_1 \times \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$$\Delta_1 \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 & 1\times 0 + 2\times 2 + 3\times 5 & 1\times 1 + 2\times 2 + 3\times 0 \\ 2\times 2 + 0\times 3 + 3\times 4 & 2\times 0 + 0\times 2 + 3\times 5 & 2\times 1 + 0\times 2 + 3\times 0 \\ 4\times 2 + 5\times 3 + 0\times 4 & 4\times 0 + 5\times 2 + 0\times 5 & 4\times 1 + 5\times 2 + 0\times 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2+6+12 & 0+4+15 & 1+4+0 \\ 4+0+12 & 0+0+15 & 2+0+0 \\ 8+15+0 & 0+10+0 & 4+10+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 19 & 5 \\ 16 & 15 & 2 \\ 23 & 10 & 14 \end{vmatrix}$$

उदाहरण 10. दिखायें कि $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

AKCTECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

हल : बायाँ पक्ष $=\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0\times 0+c\times c+b\times b & 0\times c+c\times 0+b\times a & 0\times b+c\times a+b\times 0 \\ c\times 0+0\times c+a\times b & c\times c+0\times 0+a\times a & c\times b+0\times a+a\times 0 \\ b\times 0+a\times c+0\times b & b\times c+a\times 0+0\times a & b\times b+a\times a+0\times 0 \end{vmatrix}$$

[पंक्ति का पंक्ति से गुणा करने पर]

$$= \begin{vmatrix} c^2+b^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & b^2+a^2 \end{vmatrix}$$ **सिद्ध हुआ।**

पुनः $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} c & a \\ b & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} c & 0 \\ c & a \end{vmatrix} = 0 - c\,(0-ab) + b\,(ac-0) = abc + abc = 2abc$

$\therefore \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = (2abc)^2 = 4a^2b^2c^2$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 11. सिद्ध करो कि $\begin{vmatrix} 2y_1z_1 & y_1z_2+y_2z_1 & y_1z_3+y_3z_1 \\ y_1z_2+y_2z_1 & 2y_2z_2 & y_2z_3+y_3z_2 \\ y_1z_3+y_3z_1 & y_2z_3+y_3z_2 & 2y_3z_3 \end{vmatrix} = 0$

हल : माना $\Delta = \begin{vmatrix} 2y_1z_1 & y_1z_2+y_2z_1 & y_1z_3+y_3z_1 \\ y_1z_2+y_2z_1 & 2y_2z_2 & y_2z_3+y_3z_2 \\ y_1z_3+y_3z_1 & y_2z_3+y_3z_2 & 2y_3z_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} y_1z_1+y_1z_1 & y_1z_2+y_2z_1 & y_1z_3+y_3z_1 \\ y_1z_2+y_2z_1 & y_2z_2+y_2z_2 & y_2z_3+y_3z_2 \\ y_1z_3+y_3z_1 & y_2z_3+y_3z_2 & y_3z_3+y_3z_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} z_1 & y_1 & 0 \\ z_2 & y_2 & 0 \\ z_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 0 \\ y_2 & z_2 & 0 \\ y_3 & z_3 & 0 \end{vmatrix} = 0\times 0 = 0$$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 12 : सारणिक $\begin{vmatrix} (1+ax)^2 & (1+ay)^2 & (1+az)^2 \\ (1+bx)^2 & (1+by)^2 & (1+bz)^2 \\ (1+cx)^2 & (1+cy)^2 & (1+cz)^2 \end{vmatrix}$ को दो सारणिकों के गुणनफल के रूप में लिखें।

हल : $\begin{vmatrix} (1+ax)^2 & (1+ay)^2 & (1+az)^2 \\ (1+bx)^2 & (1+by)^2 & (1+bz)^2 \\ (1+cx)^2 & (1+cy)^2 & (1+cz)^2 \end{vmatrix}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$$= \begin{vmatrix} 1+2ax+a^2x^2 & 1+2ay+a^2y^2 & 1+2ax+a^2z^2 \\ 1+2bx+b^2x^2 & 1+2by+b^2y^2 & 1+2bz+b^2z^2 \\ 1+2cx+c^2x^2 & 1+2cy+c^2y^2 & 1+2cz+c^2z^2 \end{vmatrix} \quad ...(1)$$

अब (1) में प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तंभ का अवयव

$$1 + 2ax + a^2x^2 = 1 \times 1 + 2a \times x + a^2 \times x^2$$

$\therefore$ पहले सारणिक की पहली पंक्ति $1 \ 2a \ a^2$

दूसरे सारणिक की पहली पंक्ति $1 \ x \ x^2$

इसी तरह पहले सारणिक की द्वितीय पंक्ति $1 \ 2b \ b^2$

दूसरे सारणिक की द्वितीय पंक्ति $1 \ y \ y^2$

पहले सारणिक की तृतीय पंक्ति $1 \ 2c \ c^2$

दूसरे सारणिक की तृतीय पंक्ति $1 \ z \ z^2$

$$\therefore \begin{vmatrix} (1+ax)^2 & (1+ay)^2 & (1+az)^2 \\ (1+bx)^2 & (1+by)^2 & (1+bz)^2 \\ (1+cx)^2 & (1+cy)^2 & (1+cz)^2 \end{vmatrix} \quad \therefore \begin{vmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 1 & 2b & b^2 \\ 1 & 2c & c^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

उत्तर

प्रश्नावली 4.2

1. क्रेमर नियम के प्रयोग से हल करें—

(i) $6x - 4y = -24;\ 5x - 11y = -43$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2001]

(ii) $x + y + z = 6;\ x - y + z = 2;\ 2x + y - z = 1$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1996]

(iii) $x + y + z = 3;\ x + 2y + 3z = 4;\ x + 4y + 9z = 6$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1998]

(iv) $x + y + z = 6;\ x + 2y + 3z = 14;\ x + 4y + 9z = 36$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1999]

(v) $x - 3y + z = 2;\ 3x + y + z = 6\ ;\ 5x + y + 3z = 3$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1984, 16(S)]

(vi) $2x - y + z = 3;\ x + 3y - 2z = 11;\ 3x - 2y + 4z = 1$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1988]

(vii) $4x + y + 4z = 7;\ 2x + 3y + 2z = 6;\ 6x + 9y + 2z = 14$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1982]

(viii) $x + y + z + 1 = 0;\ x + 2y + 3z + 4 = 0;\ x + 3y + 4z + 6 = 0$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2014, 16]

(ix) $x + 2y + 3z = 1;\ 2x + y - z = 2;\ 3x + 4y + z = 6$

(x) $x + y = 5;\ y + z = 3;\ x + z = 4$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2002]

(xi) $x + 2y + 3z = 2;\ 2x + 4y + z = 9;\ 3x + 2y + 5z = 2$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2016]

(xii) $x + y + z = 7,\ x + 2y + 3z = 16,\ x + 3y + 4z = 22$

2. निम्न समीकरणों की संगतता की जाँच करें—

(i) $2x - y + z = 4;\ x + 3y + 2z = 12;\ 3x + 2y + 3z = 10$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2012]

(ii) $x - 3y + 2z = 4;\ 2x + y - 3z = -2;\ 4x - 5y + z = 5$

(iii) $5x - 7y + z = 11;\ 6x - 8y - z = 15;\ 3x + 2y - 6z = 7$

3. निम्न समीकरणों को हल करें—

(a) (i) $x + y - z = 0;\ x - 2y + z = 0;\ 3x + 6y - 5z = 0$

(ii) $3x - 4y + 5z = 0;\ x + y - 2z = 0;\ 2x + 3y + z = 0$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

(b) दिखायें $\lambda = \frac{57}{10}$ के लिए समीकरण निकाय

$$2x + 3y - 2z = 0;\ 2x - y + 3z = 0;\ 7x + \lambda y - z = 0$$

का अशून्य हल (Non-trivial) है।

[संकेत : $\Delta = 0$ के लिए शर्त प्राप्त करें]

4. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ तथा $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -a & c & b \\ -b & a & c \\ -c & b & a \end{vmatrix}$ तो $\Delta_1 \times \Delta_2$ का मान बतायें।

5. गुणनफल ज्ञात करें $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

6. सिद्ध करें $\begin{vmatrix} 1 & \cos(\beta - \alpha) & \cos(\gamma - \alpha) \\ \cos(\alpha - \beta) & 1 & \cos(\gamma - \beta) \\ \cos(\alpha - \gamma) & \cos(\beta - \gamma) & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\left[\text{संकेत : } \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \end{vmatrix}\right]$

7. सिद्ध करें $\begin{vmatrix} a_1x_1 + b_1y_1 & a_1x_2 + b_1y_2 & a_1x_3 + b_1y_3 \\ a_2x_1 + b_2y_1 & a_2x_2 + b_2y_2 & a_2x_3 + b_2y_3 \\ a_3x_1 + b_3y_1 & a_3x_2 + b_3y_2 & a_3x_3 + b_3y_3 \end{vmatrix} = 0$

$\left[\text{संकेत : } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} = 0\right]$

उत्तरमाला

1. (i) $x = -2, y = 3$ (ii) $x = 1, y = 2, z = 3$ (iii) $x = 2, y = 1, z = 0$ (iv) $x = 1, y = 2, z = 3$

(v) $x = \frac{13}{3}, y = \frac{-7}{6}, z = -\frac{35}{6}$ (vi) $x = 3, y = 2, z = -1$ (vii) $x = \frac{1}{2}, y = 1, z = 1$

(viii) $x = 1, y = -1, z = -1$ (ix) $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{21}{10}, z = \frac{-9}{10}$ (x) $x = 3, y = 2, z = 1$

(xi) $x = 1, y = 2, z = -1$ (xii) $x = 1, y = 3, z = 3$

2. (i) असंगत (ii) असंगत (iii) संगत

3. (i) $x = k, y = 2k, z = 3k, k \in R$ (ii) $x = 0, y = 0, z = 0$ (vi)

4. $\begin{vmatrix} 2bc - a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac - b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab - c^2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 11 & 27 & 24 \\ 8 & 31 & 18 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}$

❑❑❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

खण्ड-2 : सदिश बीजगणित-II

अध्याय 5

सदिशों का योग, अन्तर एवं वियोजन (Addition, Subtraction and Resolution of Vectors)

(पुनरावृत्ति)

5.1 प्रस्तावना (Introduction)

दैनिक जीवन में हमें दो प्रकार की भौतिक राशियाँ मिलती हैं। पहले प्रकार की राशियों में केवल परिमाण होता है। जैसे—दूरी, समय, द्रव्यमान, आयतन इत्यादि। दूसरे प्रकार की राशियों में परिमाण के साथ-साथ निश्चित दिशा भी होती है। जैसे—बल, वेग, त्वरण, विस्थापन आदि।

पहले प्रकार की राशियाँ अदिश (Scalars) तथा दूसरे प्रकार की राशियाँ सदिश (Vectors) कहलाती हैं।

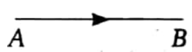
अत: इनकी परिभाषा निम्न रूप में दी जा सकती हैं—

अदिश राशि (Scalar Quantity)—अदिश राशि एक ऐसी भौतिक राशि है जिसमें केवल परिमाण होता है। इससे किसी निश्चित दिशा का ज्ञान नहीं होता।

सदिश राशि (Vector Quantity)—सदिश राशि एक ऐसी भौतिक राशि है जो पूर्णत: अपने परिमाण तथा दिशा दोनों से निर्दिष्ट होती है।

5.2 सदिश राशि का निरूपण (Representation of a Vector)

किसी सदिश राशि को तीरयुक्त रेखाखंड (Directed Line Segment) द्वारा प्रदर्शित करते हैं। सरल रेखाखंड की लम्बाई उसके परिमाण तथा उस पर लगा हुआ तीर उसकी दिशा को बताता है। प्रतीक रूप में किसी सदिश को निरूपित करने के लिए अंग्रेजी वर्णमाला के दो अक्षरों के ऊपर एक तीर खींच देते हैं।



चित्र में $\vec{AB}$ एक सदिश को निरूपित करता है जिसका परिमाण AB की लम्बाई से निरूपित है तथा दिशा A से B की ओर है जहाँ A सदिश प्रारंभिक बिंदु (Initial Point) तथा B अंतिम बिंदु (Terminal Point) है।

व्यवहार में सदिश को निरूपित करने के लिए अंग्रेजी वर्णमाला का कोई अक्षर (Capital या Small) लिखकर उस पर तीर लगा देते हैं। जैसे—$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ इत्यादि। पुस्तकों में इसे bold letter **a, b, c** या $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ से भी प्रदर्शित किया जाता है।

5.3 कुछ मुख्य परिभाषायें (Some Important Definitions)

(i) सदिश का मापांक (Modulus of a Vector)—किसी सदिश का मापांक वह धनात्मक राशि है जो उस सदिश के परिमाण को बतलाता है।

किसी सदिश $\vec{a}$ अथवा $\vec{AB}$ के मापांक को $|\vec{a}|$ या $|\vec{AB}|$ से निरूपित करते हैं।

(ii) शून्य सदिश (Zero or Null Vector)—जिस सदिश आदि एवं अंतिम बिंदु संपाती (incident) हो, शून्य सदिश कहलाता है। इसका मापांक शून्य और इसकी दिशा अज्ञात होती है। इसे $\vec{0}$ या **0** या $\vec{AA}, \vec{BB}$ आदि से सूचित किया जाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

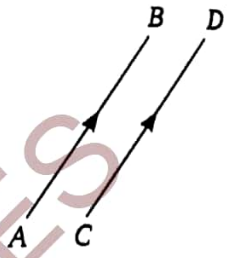
Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(iii) एकक या इकाई सदिश (Unit Vector)—जिस सदिश का मापांक इकाई हो उस एकक या इकाई सदिश कहते हैं। इकाई सदिश को सदिश के ऊपर प्रतीक ∧ लगाकार सूचित करते हैं। जैसे : $\hat{\mathbf{a}}$, सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ की दिशा में इकाई सदिश है।

इसका मान सदिश में उसके मापांक से भाग देकर प्राप्त किया जाता है।

अर्थात् $\hat{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}$ की दिशा में इकाई सदिश $= \dfrac{\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{a}}|}$



(iv) समान सदिश (Equal Vectors)—यदि दो सदिशों के मापांक बराबर हों और उनकी दिशा एक ही हो तो वे समान सदिश कहलाते हैं।

इनके आदि बिंदु कहीं भी हो सकते हैं।

चित्र में $\vec{AB} = \vec{CD}$ क्योंकि $|\vec{AB}| = |\vec{CD}|$ तथा $\vec{AB}$ और $\vec{CD}$ की दिशा समान है।

(v) समरेखीय सदिश (Collinear Vectors)—दो सदिश समरेख कहे जाते हैं यदि वे एक ही रेखा पर हों या एक ही सरल रेखा के समान्तर हों।

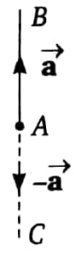
यदि $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ समरेखीय सदिश हों, तो $\vec{\mathbf{a}} = \lambda \vec{\mathbf{b}}$ जहाँ λ कोई अदिश है।

(vi) समदिश सदिश एवं असमदिश सदिश (Like Vectors and Unlike Vectors)—यदि संरेख सदिशों की दिशायें एक ही हों तो वे समदिश या सदृश सदिश तथा विपरीत दिशा में हों तो असमदिश या असदृश सदिश कहलाते हैं। इनका परिमाण भिन्न अथवा विशेष दशा में समान हो सकता है।

ऊपर के चित्र में $\vec{AB}$ तथा $\vec{CD}$ समदिश सदिश हैं।

(vii) एक समतलीय सदिश (Coplanar Vector)— वे सदिश जो एक ही तल में हों या जिनकी दिशायें एक ही तल के समानांतर हों एकतलीय या समतलीय सदिश कहलाते हैं।

यदि वे एक तल के समानांतर न हों तो **नैकतलीय (Non-coplanar)** सदिश कहलाते हैं।



(viii) ऋण सदिश (Negative Vector)—यदि दो सदिशों के मापांक बराबर हों किन्तु दिशायें विपरीत हों तो वे परस्पर ऋणात्मक सदिश कहलाते हैं।

यदि $\vec{AB} = \vec{\mathbf{a}}$ तो $\vec{BA} = -\vec{\mathbf{a}}$। यदि बिन्दु A, BC के बीच इस प्रकार हों कि $AB = AC$ तथा $\vec{AB} = \vec{\mathbf{a}}$ तो $\vec{AC} = -\vec{\mathbf{a}}$

5.4 सदिश का वास्तविक संख्या या अदिश से गुणनफल (Multiplication of a Vector by a Real Number or Scalar)

यदि m एक वास्तविक धनात्मक संख्या तथा $\vec{OA}$, सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ को निरूपित करता है तो $m\vec{\mathbf{a}}$ उस सदिश को निरूपित करेगा जिसकी दिशा $\vec{OA}$ की दिशा में होगी किन्तु उसका मापांक $\vec{OA}$ के मापांक का m गुना होगा।

इसी प्रकार $-m\vec{\mathbf{a}}$ उस सदिश को निरूपित करेगा जिसकी दिशा $\vec{OA}$ की दिशा के विपरीत होगी तथा मापांक $\vec{OA}$ का m गुणा होगा। जैसे : $3\vec{\mathbf{a}}$ परिमाण में सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का तीन गुना या $\vec{\mathbf{a}}$ की समान दिशा में है जबकि $-3\vec{\mathbf{a}}$ परिमाण में $\vec{\mathbf{a}}$ का तीन गुना किन्तु विपरीत दिशा में है।

गुण : यह क्रम विनिमेय साहचर्य तथा वितरण नियम का पालन करता है।

(i) $m\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}}m$ [क्रम विनिमेय नियम (Commutative Law)]

(ii) $m(n\vec{\mathbf{a}}) = n(m\vec{\mathbf{a}}) = mn\,\vec{\mathbf{a}}$ [साहचर्य नियम (Associative Law)]

(iii) $m(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = m\,\vec{\mathbf{a}} + m\,\vec{\mathbf{b}}$ [वितरण नियम (Distributive Law)]

AKC TECHNICAL CLASSES

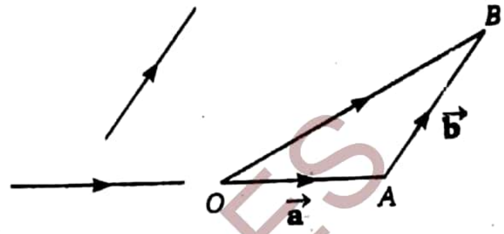
Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

5.5 सदिशों का योग त्रिभुज नियम (Triangle Law of Addition of Vectors)

यदि किसी त्रिभुज की क्रम से ली गई दो भुजाएँ दो सदिशों को परिमाण तथा दिशा में निरूपित करती हैं तो विपरीत क्रम में ली गई त्रिभुज की तीसरी भुजा सदिशों के योग अथवा परिणामी को सूचित करती है।

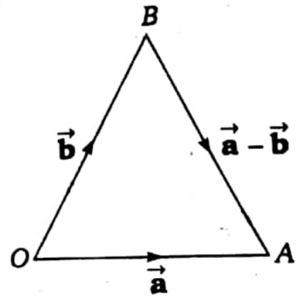
यह नियम सदिश **योग त्रिभुज नियम** कहलाता है।



माना $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ कोई दो सदिश हैं। यदि $\vec{\mathbf{a}}$ के अंतिम बिंदु को $\vec{\mathbf{b}}$ के आदि बिंदु के रूप में इस प्रकार लें कि $\vec{OA} = \vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{AB} = \vec{\mathbf{b}}$ तो $\vec{OB} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ को $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ का परिणामी (Resultant) अथवा योग (Sum) कहते हैं।

इस प्रकार $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{a} + \vec{b}$

5.6 सदिशों को घटाना (Subtraction of Vecors)



$\vec{\mathbf{a}}$ से सदिश $\vec{\mathbf{b}}$ को घटाने का अर्थ है $-\vec{\mathbf{b}}$ को $\vec{\mathbf{a}}$ से जोड़ना

अर्थात् $\vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$

मान लिया $\vec{OA} = \vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{OB} = \vec{\mathbf{b}}$

$\vec{\mathbf{OB}} = \vec{\mathbf{b}} \Rightarrow \vec{\mathbf{BO}} = -\vec{\mathbf{b}}$

अत: $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} + (-\vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{OA}} + \vec{\mathbf{BO}}$

किन्तु $\vec{\mathbf{BO}} + \vec{\mathbf{OA}} = \vec{\mathbf{BA}} \Rightarrow \vec{\mathbf{OA}} + \vec{\mathbf{BO}} = \vec{\mathbf{BA}} \Rightarrow \vec{\mathbf{OA}} - \vec{\mathbf{OB}} = \vec{\mathbf{BA}}$ अत: $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{BA}}$

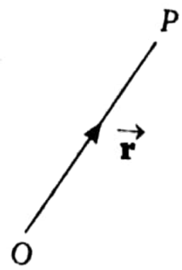
5.7 सदिश योग के गुण (Properties of Addition of Vectors)

सदिश योग क्रम विनिमेय नियम तथा साहचर्य नियम का पालन करता है।
अत:

(i) $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}$ [क्रम विनिमेय नियम]

(ii) $(\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) + \vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}})$ [साहचर्य नियम]

5.8 स्थिति सदिश (Position Vectors)



परिभाषा : किसी निर्देश बिन्दु (Reference point) O के सापेक्ष किसी बिन्दु P का स्थिति सदिश $\vec{OP}$ से दिया जाए तो सदिश $\vec{OP}$ को O के सापेक्ष P का स्थिति सदिश कहते हैं।

यदि $\vec{OP} = \vec{\mathbf{r}}$ तो P को सामान्यत: $P(\vec{\mathbf{r}})$ से व्यक्त करते हैं।

चित्र में $\vec{OA}$ तथा $\vec{OB}$ क्रमश: बिन्दु A तथा B के स्थिति सदिश हैं।

5.8.1 सदिश को उसके सिरे के स्थिति सदिशों के पदों में व्यक्त करना।

चित्र से

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$

या $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} =$ **बिन्दु B का स्थिति सदिश − बिन्दु A का स्थिति सदिश**

AKC TECHNICAL CLASSES

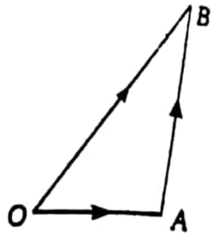
Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

इसी तरह

$\overrightarrow{AC}$ = बिन्दु C का स्थिति सदिश − बिंदु A का स्थिति सदिश $= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{BC}$ = बिन्दु C का स्थिति सदिश − बिंदु B का स्थिति सदिश $= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

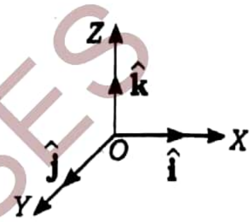


5.9 समकोणिक इकाई सदिश (Rectangular Unit Vectors)

समकोणिक अक्षों OX, OY तथा OZ का धन दिशा के अनुदिश इकाई सदिशों को क्रमशः $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{k}}$ से सूचित किया जाता है।

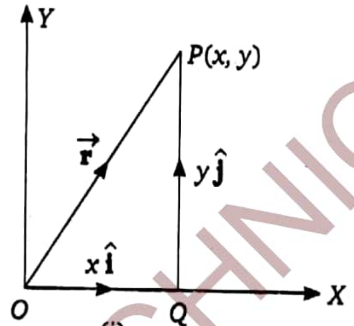
इन इकाई सदिशों के लिए $|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1$

इन सदिशों का उपयोग समकोणीय निर्देश तंत्र (Rectangular system of coordinates) में अक्षों की दिशायें निरूपित करने के लिए किया जाता है।

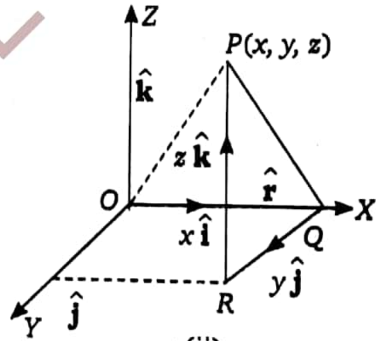


5.10 समकोणीय इकाई सदिशों के पदों में किसी बिंदु का स्थिति सदिश (Position Vector of a point in terms of perpendicular Unit vectors)

(i) द्विविम आकाश (Two dimensional Space)—यदि द्विविमीय आकाश में $P(x, y)$ कोई बिन्दु हो, तो (चित्र i)



(i)



(ii)

P का स्थिति सदिश $\overrightarrow{OP} = \vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$ तथा $|\overrightarrow{OP}| = |\vec{\mathbf{r}}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

(ii) त्रिविम आकाश (Three dimensional space)—यदि त्रिविमीय आकाश में $P(x, y, z)$ कोई बिन्दु हो, तो (चित्र ii)

$$P \text{ का स्थिति सदिश } = \overrightarrow{OP} = \vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad \text{तथा} \quad |\overrightarrow{OP}| = |\vec{\mathbf{r}}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

5.11 दिक् कोज्यायें (Direction Cosines)

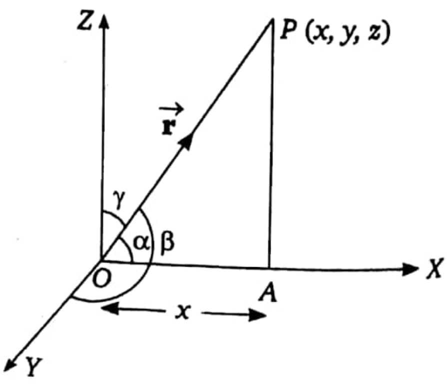
कोई सदिश समकोणिक अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ जो कोण बनाता है, उनकी कोज्याओं (cosines) को उसकी दिक् कोज्यायें कहते हैं।

माना कोई सदिश $\overrightarrow{OP}$ समकोणिक अक्षों OX, OY तथा OZ की धनात्मक दिशाओं के साथ क्रमशः α, β तथा γ कोण बनाता है, तो $\cos\alpha$, $\cos\beta$ तथा $\cos\gamma$ उसकी दिक् कोज्यायें कहलाती हैं। इसे सामान्यतः l, m, n से व्यक्त करते हैं।

अर्थात् $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$ तथा $n = \cos\gamma$

α, β तथा γ दिक् कोण (direction angles) कहलाते हैं

तथा $0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$



AYC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

गुण : (i) यदि $\vec{OP} = \vec{\mathbf{r}} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$ तो $|\vec{\mathbf{r}}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

तथा $\vec{OP}$ की दिक् कोज्यायें $\cos\alpha, \cos\beta$ तथा $\cos\gamma$ हों

तो $\cos\alpha = \dfrac{x}{|\vec{\mathbf{r}}|} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{|\vec{\mathbf{r}}|} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{z}{|\vec{\mathbf{r}}|} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

अर्थात् $\cos\alpha = \dfrac{\hat{\mathbf{i}} \text{ का गुणांक}}{\text{सदिश } \vec{\mathbf{r}} \text{ का मापांक}}$; $\cos\beta = \dfrac{\hat{\mathbf{j}} \text{ का गुणांक}}{\text{सदिश } \vec{\mathbf{r}} \text{ का मापांक}}$; $\cos\gamma = \dfrac{\hat{\mathbf{k}} \text{ का गुणांक}}{\text{सदिश } \vec{\mathbf{r}} \text{ का मापांक}}$

(ii) दिक् कोज्यायों के वर्गों का योग हमेशा 1 होता है।

(i) से $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1$

अर्थात् $l^2 + m^2 + n^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

(iii) x-अक्ष तथा y-अक्ष की दिक् कोज्यायें क्रमशः 1, 0, 0; 0, 1, 0 तथा 0, 0, 1 से दी जाती हैं, क्योंकि वे अक्षों से क्रमशः $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$ तथा $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0$ कोण बनाती हैं।

नोट :

- यदि $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ कोई दो बिन्दु हों तो PQ के दिक् अनुपात (direction ratios) $x_2 - x_1, y_2 - y_1$ तथा $z_2 - z_1$ से दिये जाते हैं तथा **दिक् कोज्यायें** $\dfrac{x_2-x_1}{r}, \dfrac{y_2-y_1}{r}$ तथा $\dfrac{z_2-z_1}{r}$ से दिए जाते हैं, जहाँ

$$r = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

5.12 समतलीय सदिश एवं असममतलीय सदिशों से संबधित महत्वपूर्ण परिणाम (Important results on Planar and Non-co-planar Vector)

परिभाषा : तीन या तीन से अधिक अशून्य सदिश समतलीय सदिश कहलाते हैं यदि वे एक ही समतल में हों या एक ही समतल के समानांतर हों।

यदि $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ तीन समतलीय सदिश हों तो किसी भी एक सदिश को अन्य दो सदिशों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।

अर्थात् $\vec{\mathbf{c}} = l\vec{\mathbf{a}} + m\vec{\mathbf{b}}$ जहाँ l तथा m अदिश हैं।

नोट :

- यदि $\vec{\mathbf{a}} = x_1\hat{\mathbf{i}} + y_1\hat{\mathbf{j}} + z_1\hat{\mathbf{k}}$; $\vec{\mathbf{b}} = x_2\hat{\mathbf{i}} + y_2\hat{\mathbf{j}} + z_2\hat{\mathbf{k}}$; $\vec{\mathbf{c}} = x_3\hat{\mathbf{i}} + y_3\hat{\mathbf{j}} + z_3\hat{\mathbf{k}}$ तथा

(i) यदि $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

तो सदिश $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ समतलीय तथा एकघातीय स्वतंत्र सदिश (Linearly independent vectors) कहलाते हैं।

(ii) यदि $\Delta \neq 0$ तो सदिश $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ असमतलीय तथा एकघातीय आश्रित सदिश (Linearly dependent vectors) कहलाते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

कुछ अन्य महत्वपूर्ण परिणाम

1. दो बिन्दुओं के बीच की दूरी : यदि निर्देश बिन्दु O के सापेक्ष दो बिन्दु P_1 तथा P_2 के नियामक क्रमशः (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) हों, तो

$$OP_1 = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$
$$OP_2 = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$$

$$\therefore \quad \vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\therefore \quad |\vec{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

अर्थात् बिन्दुओं (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2. दो सदिशों की समता : दो सदिश $\vec{r_1} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$, $\vec{r_2} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ तथा $\vec{r_1} = \vec{r_2}$ हो, तो $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$

3. संरेख सदिश :

(i) दो सदिश $\vec{r}$ तथा तथा $\vec{a}$ संरेख होंगे यदि $\vec{r} = x\vec{a}$

(ii) तीन बिन्दु A, B, C जिनमें स्थिति सदिश क्रमश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ हों संरेख होंगे, यदि $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$ तथा $x + y + z = 0$ जहाँ x, y, z (सभी शून्य नही) अदिश राशियाँ हैं।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. निम्न सदिशों के मापांक बतायें—

(i) $3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ (ii) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

हल : हम जानते हैं कि $|x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

अत: (1) $|3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$ उत्तर

तथा (ii) $|\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि $\vec{r_1} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $\vec{r_2} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, तो

(i) $\vec{r_1} + \vec{r_2}$ का मान ज्ञात करें। (ii) $\vec{r_1} - \vec{r_2}$ का मान ज्ञात करें।

(iii) $|\vec{r_1} + \vec{r_2}|$ तथा $|\vec{r_1} - \vec{r_2}|$ का मान ज्ञात करें।

(iv) $\vec{r_1}$ तथा $\vec{r_2}$ के योग के समानांतर इकाई सदिश ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1982, 88]**

हल : यहाँ $\vec{r_1} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$; $\vec{r_2} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

(i) $\vec{r_1} + \vec{r_2} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) + (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 2\hat{i} + \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{j} - 5\hat{k} + 3\hat{k} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$

(ii) $\vec{r_1} - \vec{r_2} = (2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 2\hat{i} - \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{j} - 5\hat{k} - 3\hat{k} = \hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$

(iii) $\because \quad \vec{r_1} + \vec{r_2} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k} \quad \therefore |\vec{r_1} + \vec{r_2}| = \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$ उत्तर

तथा $\vec{r_1} - \vec{r_2} = \hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k} \quad \therefore |\vec{r_1} - \vec{r_2}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-8)^2} = \sqrt{1 + 4 + 64} = \sqrt{69}$ उत्तर

(iv) सदिश $(\vec{r_1} + \vec{r_2})$ के समानांतर इकाई सदिश

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

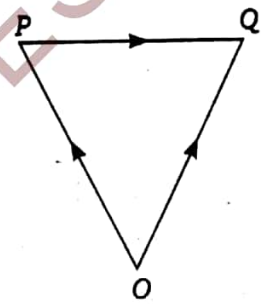
$$\frac{\vec{r_1}+\vec{r_2}}{|\vec{r_1}+\vec{r_2}|}=\frac{3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{3^2+6^2+(-2)^2}}=\frac{3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{49}}=\frac{3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}}{7}=\frac{1}{7}(3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k})$$ उत्तर

उदाहरण 3. यदि $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ तो $\vec{a}$ की दिशा में संगत इकाई सदिश निकालें।

हल : $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ $\quad\therefore\quad |\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}=\sqrt{4+9+36}=\sqrt{49}=7$

अतः इकाई सदिश $\hat{a}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}}{7}=\dfrac{2}{7}\hat{i}+\dfrac{3}{7}\hat{j}-\dfrac{6}{7}\hat{k}$ उत्तर

उदाहरण 4. यदि बिन्दु P तथा Q के स्थिति सदिश क्रमशः $-\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ तथा $7\hat{i}-6\hat{k}$ हों, तो $\vec{PQ}$ निकालें।



हल : माना O मूल बिन्दु है।

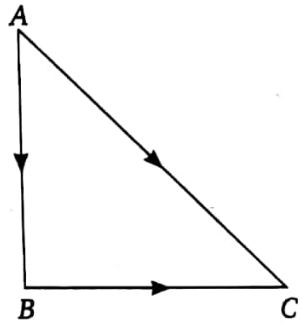
यहाँ $\vec{OP}=-\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$; $OQ=7\hat{i}-6\hat{k}$

$$\therefore\quad \vec{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}=(7\hat{i}-6\hat{k})-(-\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})$$
$$=7\hat{i}+\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}+3\hat{k}$$
$$=8\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$$ उत्तर

उदाहरण 5. सिद्ध कीजिए कि सदिश $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ और $3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

हल : मान लिया $\vec{AB}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$; $\vec{BC}=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$; $\vec{AC}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$

अब $\quad \vec{AB}+\vec{BC}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}+\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}=\vec{AC}$



अतः दिए गए सदिशों से एक त्रिभुज बनता है।

अब $\quad |\vec{AB}|=\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(1)^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$\therefore\quad \vec{AB}=|\vec{AB}|^2=(\sqrt{6})^2=6$

तथा $\quad |\vec{BC}|=\sqrt{(1)^2+(-3)^2+(-5)^2}=\sqrt{1+9+25}=\sqrt{35}$

$\therefore\quad BC^2=|\vec{BC}|^2=35$

तथा $\quad |\vec{AC}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16+16}=\sqrt{41}$

$\therefore\quad AC^2=|\vec{AC}|^2=41$

अब $\because\ AB^2+BC^2=6+35=41=AC^2$

$\therefore\quad \Delta ABC$ एक समकोण त्रिभुज है।

उदाहरण 6. प्रमाणित करें कि $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ और $3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल : मान लिया O मूल बिंदु है तथा दिए गए बिन्दु क्रमशः A, B, C हैं।

तो $\vec{OA}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$; $\vec{OB}=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$; $\vec{OC}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$

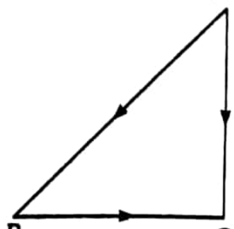
$\therefore\quad \vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})-(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=\hat{i}-2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{j}-5\hat{k}-\hat{k}=-\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}$

$\quad \vec{BC}=\vec{OC}-\vec{OB}=(3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k})-(\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

तथा $\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=(3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k})-(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$

अब $\vec{AB}+\vec{BC}=(-\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k})+(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}=\vec{AC}$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner



$\therefore$ अतः A, B, C एक त्रिभुज के शीर्ष हैं।

पुन : $AB^2 = |\vec{AB}|^2 = (-1)^2 + (-2)^2 + (-6)^2 = 1 + 4 + 36 = 41$

$BC^2 = |\vec{BC}|^2 = (2)^2 + (-1)^2 + (1)^2 = 4 + 1 + 1 = 6$

$AC^2 = (\vec{AC})^2 = 1^2 + (-3)^2 + (-5)^2 = 1 + 9 + 25 = 35$

अब $BC^2 + AC^2 = 6 + 35 = 41 = AB^2$

$\therefore$ ΔABC एक समकोण Δ है।

उदाहरण 7. सदिश $3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$ की दिक् कोज्यायें ज्ञात करें तथा दिखायें कि $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

हल : माना $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$

$\therefore$ $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (12)^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$

$\therefore$ $\vec{a}$ की दिशा में इकाई सदिश $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}}{13} = \dfrac{3}{13}\hat{i} - \dfrac{4}{13}\hat{j} + \dfrac{12}{13}\hat{k}$

$\therefore$ अभीष्ट दिक् कोज्यायें $l = \cos\alpha = \dfrac{3}{13}$; $m = \cos\beta = -\dfrac{4}{13}$; $n = \cos\gamma = \dfrac{12}{13}$

अब $l^2 + m^2 + n^2 = \left(\dfrac{3}{13}\right)^2 + \left(-\dfrac{4}{13}\right)^2 + \left(\dfrac{12}{13}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{13}\right)^2 [3^2 + 4^2 + 12^2]$

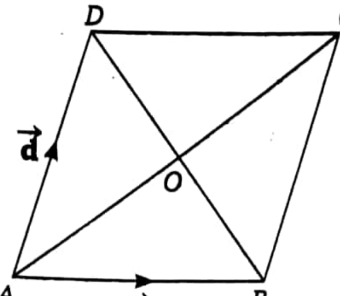
$= \dfrac{1}{169} \times [9 + 16 + 144] = \dfrac{169}{169} = 1$ **सिद्ध हुआ।**

● ज्यामिति पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 8. सदिश विधि से सिद्ध करें कि समानांतर चतुर्भुज के कर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1992]

हल : मान लिया $ABCD$ एक समानांतर चतुर्भुज है। यदि A मूल बिंदु हो तथा A के सापेक्ष B तथा D के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{b}$ तथा $\vec{d}$ हों, तो $\vec{AB} = \vec{b}$ तथा $\vec{AD} = \vec{d}$



अब $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{b} + \vec{d}$

$\therefore$ $\vec{AC}$ के मध्य-बिंदु का स्थिति सदिश

$= \dfrac{\vec{AC}}{2} = \dfrac{\vec{b} + \vec{d}}{2}$ ...(1)

$\vec{BD}$ के मध्य-बिन्दु का स्थिति सदिश $= \dfrac{\vec{AB} + \vec{AD}}{2} = \dfrac{\vec{b} + \vec{d}}{2}$ ...(2)

(1) तथा (2) से

$\vec{AC}$ के मध्य-बिन्दु का स्थिति सदिश $= \vec{BD}$ के मध्य बिंदु का स्थिति सदिश

$\therefore$ $\vec{AC}$ तथा $\vec{BD}$ एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

उदाहरण 9. सदिश विधि से सिद्ध करें कि किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिंदु को मिलाने वाली सरल रेखा तीसरी भुजा के समानांतर तथा उसकी आधी होती है।

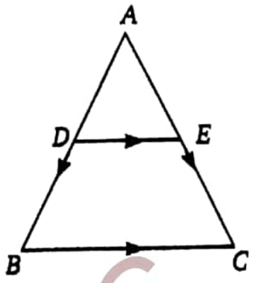
हल : माना ΔABC में AB का मध्य-बिंदु D तथा AC का मध्य-बिन्दु E है।

माना A के सापेक्ष B तथा C के स्थिति सदिश $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ हैं तो $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$

अब $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{c} - \vec{b}$

AYC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner



$\vec{DE} = \vec{AE} - \vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{BC}$

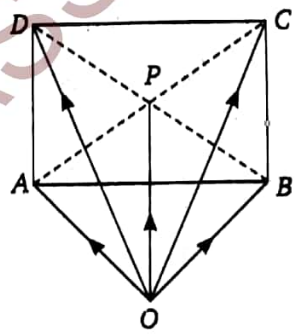
$\therefore$ $\vec{DE} \parallel \vec{BC}$ तथा $|\vec{DE}| = \frac{1}{2}|\vec{BC}|$

अर्थात् $DE = \frac{1}{2} BC$

अर्थात् DE, BC के समानांतर तथा उसके आधे के बराबर है।

उदाहरण 10. किसी समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के विकर्णों का प्रतिच्छेद बिंदु P है तथा O कोई बिन्दु है तो सिद्ध करें $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 4\vec{OP}$.

हल : माना $ABCD$ एक समानांतर चतुर्भुज है तथा विकर्ण AC तथा BD एक-दूसरे को P पर समद्विभाजित करते हैं।



चित्र से, P का स्थिति सदिश $\vec{OP} = \frac{\vec{OA} + \vec{OC}}{2}$

या $\vec{OA} + \vec{OC} = 2\vec{OP}$ ...(1)

तथा $\vec{OP} = \frac{\vec{OB} + \vec{OD}}{2}$

या $\vec{OB} + \vec{OD} = 2\vec{OP}$ ...(2)

(1) तथा (2) को जोड़ने पर

$2\vec{OP} + 2\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB} + \vec{OD}$ या $4\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$ **यही सिद्ध करना था।**

● समरैखिक एवं समतलीय सदिशों पर प्रश्न

उदाहरण 11. सिद्ध करें $3\vec{a} + \vec{b} + 5\vec{c}$, $4\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ तथा $-6\vec{a} + 5\vec{b} + 4\vec{c}$ समतलीय हैं।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]

हल : हम जानते हैं कि यदि तीन सदिश समतलीय हों तो किसी एक सदिश को अन्य दो के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।

माना $-6\vec{a} + 5\vec{b} + 4\vec{c} = \alpha(3\vec{a} + \vec{b} + 5\vec{c}) + \beta(4\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c})$ जहाँ α तथा β अदिश हैं।

दोनों तरफ से गुणांकों की तुलना करने पर

$$3\alpha + 4\beta = -6 \quad ...(1)$$

$$\alpha - \beta = 5 \quad ...(2)$$

$$5\alpha + 2\beta = 4 \quad ...(3)$$

हल करने पर $\alpha = 2, \beta = 3$

α तथा β के ये मान समीकरण (3) को संतुष्ट करते हैं।

$\therefore$ ये सदिश समतलीय हैं।

उदाहरण 12. सिद्ध करें कि $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$, $5\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$ तथा $8\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$ समरेख हैं।

हल : माना O मूलबिन्दु है तथा दिए गए सदिश क्रमशः A, B, C हैं।

तो $\vec{OA} = 2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; $\vec{OB} = 5\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}$; $\vec{OC} = 8\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$

$\therefore$ $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (5\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}) - (2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$

तथा $\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (8\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}) - (5\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}) = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$

$\therefore$ $\vec{AB} = \vec{BC}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

यह तभी सम्भव है, जब दिए गए बिन्दु A, B तथा C संरेख हों।

उदाहरण 13. यदि सदिश $2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$, $\hat{i}-\lambda\hat{j}+\hat{k}$, $3\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$ समतलीय हैं तो λ का मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]

हल : चूँकि दिए हुए सदिश समतलीय हैं

$$\therefore \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(5\lambda-2)-(-4)(-5-3)+5(2+3\lambda)=0$$

$$\Rightarrow \quad 10\lambda-4-32+10+15\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad 25\lambda=26 \qquad \therefore \quad \lambda=\frac{26}{25}$$

उदाहरण 14. दो बिन्दुओं (3, 4, 5) तथा (– 1, 3, 3) के बीच की दूरी ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2007]**

हल : यहाँ $x_1=3,\ y_1=4,\ z_1=5,\ x_2=-1,\ y_2=3,\ z_2=-3$

यदि $A=(3, 4, 5)$ तथा $B=(-1, 3, 3)$ तो

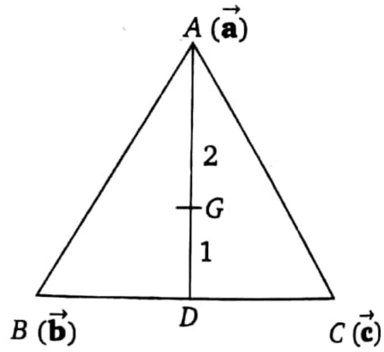
$$AB=\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\}^{1/2}$$
$$=\{(-1-3)^2+(3-4)^2+(-3-5)^2\}^{1/2}$$
$$=\{16+1+64\}^{1/2}=\sqrt{81}=9$$

उत्तर

उदाहरण 15. सदिश विधि से सिद्ध करें कि त्रिभुज की माध्यिकायें (Medians) संगामी होती हैं।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(S)]

हल : मान लिया ΔABC के शीर्षों के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ हैं।



मान लिया BC का मध्य-बिन्दु D है, तो D का स्थिति सदिश $=\dfrac{\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}}{2}$

$\therefore$ मध्यिका AD को $2:1$ में बाँटने वाले बिंदु G का स्थिति सदिश

$$=\frac{2\times\dfrac{\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}}{2}+\vec{\mathbf{a}}}{2+1}=\frac{\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}}{3}$$

सममिति (Symmetry) से स्पष्ट है कि बिंदु $G\left(\dfrac{\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}}{3}\right)$ शेष दोनों मध्यिकाओं पर भी स्थित है। इसलिए तीनों मध्यिकायें $G\left(\dfrac{\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}}{3}\right)$ से गुजरती हैं।

$\therefore$ वे संगामी होती हैं।

नोट :

- त्रिभुज के केन्द्रक (centroid) का स्थिति सदिश $=\dfrac{1}{3}(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})=\dfrac{1}{3}\times$ शीर्षों के स्थिति सदिश का योग।

उदाहरण 16. दिखाइये कि किसी त्रिभुज के शीर्षों को विपरीत भुजाओं के मध्य-बिन्दु से मिलाने वाली रेखाओं की दिशाओं में सदिशों का बीजगणितीय योग शून्य सदिश होता है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]

हल : माना त्रिभुज ABC के शीर्षों A, B तथा C को सम्मुख भुजाओं के मध्य-बिंदुओं से मिलाने वाली रेखायें AD, BE तथा CF हैं,

तो ΔABD से, $\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{BD}=\vec{AB}+\dfrac{1}{2}\vec{BC}$ [$\because$ D भुजा BC का मध्य-बिंदु है]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

ΔBEC से, $\vec{BE} = \vec{BC} + \vec{CE} = \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CA}$ [$\because$ E भुजा AC का मध्य-बिन्दु है]

तथा ΔCAF से, $\vec{CF} = \vec{CA} + \vec{AF} = \vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB}$ [$\because$ F भुजा AB का मध्य-बिन्दु है]

$$\therefore \quad \vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \left(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}\right) + \left(\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CA}\right) + \left(\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB}\right)$$

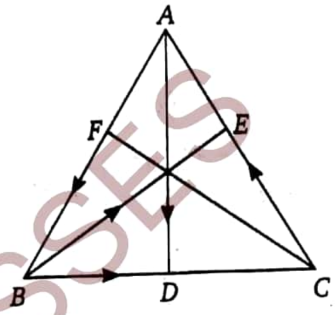
$$= \frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{BC} + \frac{3}{2}\vec{CA}$$

$$= \frac{3}{2}(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA})$$

$$= \frac{3}{2}(\vec{AC} + \vec{CA}) \quad [\because \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}]$$

$$= \frac{3}{2}(\vec{AC} - \vec{AC}) \quad [\because \vec{CA} = -\vec{AC}]$$

$$= \frac{3}{2} \times 0 = 0$$



AKC TECHNICAL CLASSES

प्रश्नावली 5.1

1. (a) यदि $\vec{\mathbf{a}} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{\mathbf{b}} = 4\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{\mathbf{c}} = -5\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तो

(i) $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}$ का मान बतायें। (ii) $|\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}|$ का मान बतायें।

(b) (i) यदि सदिश $\vec{\mathbf{a}} = 3\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 5\vec{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{i}} - 5\vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}}$ तो $\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}$ का मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2015]

(ii) यदि सदिश $\vec{\mathbf{a}} = 3\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 5\vec{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{i}} - 5\vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}}$ तो $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ का मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

2. यदि $\vec{\mathbf{a}} = 7\hat{i} + 5\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{\mathbf{b}} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$, $\vec{\mathbf{c}} = -11\hat{i} + 6\hat{j} + 15\hat{k}$ तो

(i) $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{c}}$ का मान बतायें। (ii) $3\vec{\mathbf{a}} + 2\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{c}}$ का मान बतायें।

(iii) $\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}$ का मापांक बतायें।

3. सिद्ध करें सदिशों $(2, -1, 0), (3, 2, 1), (-4, 0, 5)$ और $(1, 2, -3)$ का योग $(2, 3, 3)$ है।

4. $3\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$ की दिक् कोज्या प्राप्त करें।

5. (i) यदि $\vec{OP} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{OQ} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$, तो $\vec{PQ}$ की दिक् कोज्या प्राप्त करें तथा $\vec{PQ}$ के संगत इकाई सदिश प्राप्त करें।

(ii) $3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ के संगत इकाई सदिश प्राप्त करें।

(iii) यदि सदिश $\vec{\mathbf{OA}} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ तथा $\vec{\mathbf{OB}} = 5\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ तो $\vec{\mathbf{AB}}$ का मान ज्ञात करों।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

(iv) यदि बिन्दुओं P तथा Q के स्थिति सदिश क्रमशः $3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ और $4\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$ है तो सदिश $\vec{PQ}$ का मान ज्ञात करों।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]

6. यदि $\vec{\mathbf{r}}_1 = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $\vec{\mathbf{r}}_2 = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तो इनके योग के समानांतर इकाई सदिश प्राप्त करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1990, 98]

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

7. सिद्ध करें $3\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}$, $2\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ और $5\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ एक समबाहु त्रिभुज की भुजायें हैं।

8. सिद्ध करें कि $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $-\hat{i}-\hat{j}+8\hat{k}$ और $-4\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$ एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

9. (i) सिद्ध करें कि सदिश $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ एक समकोण त्रिभुज की भुजायें हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1990, 96]**

(ii) सिद्ध कीजिये कि सदिशों $3\hat{i}-2\hat{j}+\mathbf{k}$, $\hat{i}-3\hat{j}+5\mathbf{k}$ और $2\hat{i}+\hat{j}-4\hat{j}$ से समकोण त्रिभुज बनता है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2013]**

10. दिखायें (3, – 2, 4), (6, 3, 7), (5, 7, 8) तथा (2, 2, 5) समतलीय बिंदु हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2007]**

11. सिद्ध कीजिए $3\vec{a}+\vec{b}+5\vec{c}$, $4\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ तथा $-6\vec{a}+5\vec{b}+4\vec{c}$ समतलीय हैं, जबकि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ कोई सदिश हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]**

12. सिद्ध कीजिए कि वे चार बिंदु जिनके स्थिति सदिश $4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}$, $-\hat{j}-\hat{k}$, $3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k}$ और $-4\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k}$ समतलीय हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]**

13. λ का मान ज्ञात करें ताकि सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ एक समतल में हों, जहाँ $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$, $\vec{c}=3\hat{i}+\lambda\hat{j}+4\hat{k}$। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1991]**

14. यदि सदिश $2\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$, $\hat{i}-\lambda\hat{j}+\hat{k}$, $3\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}$ समतलीय हैं, तो λ का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005, 08]**

15. सिद्ध करें सदिश $\hat{i}-3\hat{j}+2\mathbf{k}$, $2\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ तथा $3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ असमतलीय सदिश हैं।

$$\left[\textbf{संकेत : } \Delta=\begin{vmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & -4 & -4\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}\neq 0\right]$$

16. (i) सिद्ध करें बिन्दु $-2\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}$, $\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$ तथा $7\vec{a}-\vec{c}$ संरेख हैं।

(ii) सिद्ध करें कि तीन बिन्दु $\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$, $2\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}$ तथा $-7\vec{b}+10\vec{c}$ संरेख हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(S)]**

17. λ के किस मान के लिए बिंदु $2\vec{a}+\vec{b}$, $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ तथा $\vec{a}-2\vec{b}$ संरेख हैं ?

18. सिद्ध कीजिए किसी त्रिभुज की मध्यिकीय संगामी होती है और एक दूसरे को 2 : 1 में काटती है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(S)]**

उत्तरमाला

1. (a) (i) $\hat{i}$ (ii) 1   (b) (i) $2\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$ (ii) $4\hat{i}-6\hat{j}+8\hat{k}$

2. (i) $21\hat{i}-5\hat{j}-12\hat{k}$ (ii) $38\hat{i}+\hat{j}-13\hat{k}$ (iii) $\sqrt{374}$

4. $\frac{3}{\sqrt{61}}, \frac{4}{\sqrt{61}}, \frac{-6}{\sqrt{61}}$

5. दिक् कोज्या (i) $\frac{1}{\sqrt{59}}, \frac{-7}{\sqrt{59}}, \frac{3}{\sqrt{59}}$; इकाई सदिश $=\frac{1}{\sqrt{59}}[\hat{i}-7\hat{j}+3\hat{k}]$

(ii) $\frac{3\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}}{\sqrt{29}}$ (iii) $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ (iv) $\hat{i}+6\hat{j}-5\hat{k}$

6. $\frac{3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}}{7}$ 13. $-\frac{23}{7}$ 14. $\lambda=\frac{26}{25}$ 17. $\lambda=2$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अध्याय

6

दो सदिशों का अदिश या बिन्दु गुणन
(Scalar or Dot Product of Two Vectors)

6.1 प्रस्तावना (Introduction)

पिछले अध्याय में आपने किसी सदिश को अदिश से गुणा करने के सम्बन्ध में पढ़ा। इस अध्याय में हम दो सदिशों के अदिश गुणन के बारे में जानेंगे।

सदिशों के गुणन दो प्रकार के होते हैं—

(i) अदिश गुणन या बिंदु गुणन (Scalar Product or Dot Product)

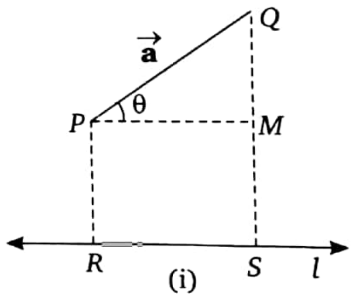
(ii) सदिश गुणन या वज्र गुणन (Vector Product or Cross Product)

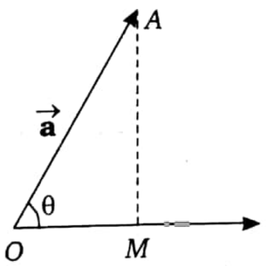
इनके बारे में जानने से पहले हम सदिश के प्रक्षेप के बारे में जानेंगे।

6.2 किसी सदिश का किसी सरल रेखा पर प्रक्षेप (Projection of a Vector on a Line)

माना $\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = \vec{\mathbf{a}}$ कोई दिया गया सदिश तथा l कोई सरल रेखा है। यदि बिन्दु P तथा Q से सरल रेखा l पर डाले गए लंब इससे बिन्दु R तथा S पर मिलते हैं [चित्र (i)] तो RS को सरल रेखा l पर सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ का प्रक्षेप (Projection) कहते हैं।

यदि $\overrightarrow{\mathbf{OA}} = \vec{\mathbf{a}}$ तथा सरल रेखा l, O से गुजरती है [चित्र (ii)], तो OM, $\vec{\mathbf{a}}$ का l पर प्रक्षेप होगा।



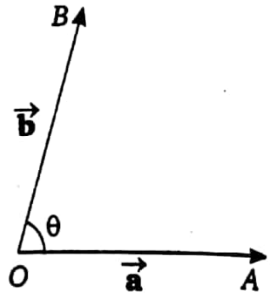


(ii)

6.3 अदिश या बिन्दु गुणन (Scalar or Dot Product)

माना $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ दो अशून्य सदिश हैं तथा उनके बीच का कोण θ है, तो $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ का अदिश गुणन उनके मापांक तथा उनके बीच के कोण की कोज्या (cosine) के गुणनफल के बराबर होता है तथा इसे $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}$ से सूचित करते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

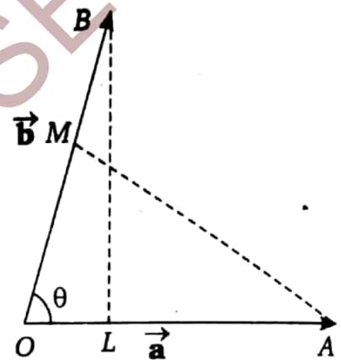


अत: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$= a\,b\cos\theta$, जहाँ $0 \le \theta \le \pi$

$\vec{a}.\vec{b}$ को "$\vec{a}$ dot $\vec{b}$" पढ़ते हैं। यह एक अदिश राशि होती है।

6.4 अदिश गुणन का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical Interpretation of Scalar Product)



माना $\vec{a} = \vec{OA}$ तथा $\vec{b} = \vec{OB}$ दो सदिश हैं तथा $\vec{OA}$ एवं $\vec{OB}$ के बीच का कोण θ है।

$BL \perp OA$ तथा $AM \perp OB$ खींचे।

अब ΔOBL से $\cos\theta = \dfrac{OL}{OB}$

$\therefore$ $OL = OB\cos\theta = \vec{b}$ का $\vec{a}$ पर प्रक्षेप ...(i)

तथा ΔOAM से $\cos\theta = \dfrac{OM}{OA}$

$\therefore$ $OM = OA\cos\theta = \vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप ...(ii)

अब $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|(OB\cos\theta)$ $[\because\ |\vec{b}| = OB]$

$= |\vec{a}| \times (OL)$ [(i) से]

$= \vec{a}$ का मापांक $\times$ ($\vec{b}$ का $\vec{a}$ पर प्रक्षेप) ...(iii)

पुन: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta = |\vec{b}|(OA\cos\theta) = |\vec{b}| \times (OM)$ [(ii) से]

$= \vec{b}$ का मापांक $\times$ $\vec{a}$ का $\vec{b}$ पर प्रक्षेप ...(iv)

(iii) तथा (iv) से स्पष्ट है कि

"दो सदिशों का अदिश गुणन उनमें से एक सदिश के मापांक तथा उसकी दिशा में दूसरे सदिश के प्रक्षेप के गुणनफल के बराबर होता है।"

यही इसका ज्यामितीय अर्थ है।

6.4.1 सदिश $\vec{a}$ की दिशा में सदिश $\vec{b}$ का प्रक्षेप $= \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.\vec{b} = \hat{a}.\vec{b}$

सदिश $\vec{b}$ की दिशा में सदिश $\vec{a}$ का प्रक्षेप $= \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}.\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}.\hat{b}$

6.5 अदिश गुणन के गुण एवं अन्य परिणाम (Properties and Other Results of Scalar Product)

(i) यह क्रम विनिमेय नियम (Commutative Law) का पालन करता है। अर्थात्

$$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

प्रमाण : परिभाषा से, $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta = |\vec{\mathbf{b}}||\vec{\mathbf{a}}| \cos\theta = \vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{a}}$

(ii) $m(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) = (m\vec{\mathbf{a}}) \cdot \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} \cdot (m\vec{\mathbf{b}})$

जहाँ m अदिश गुणक है।

प्रमाण : $\because m(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) = m|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta = (m|\vec{\mathbf{a}}|)|\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta$

$$= |m\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta = (m\vec{\mathbf{a}}) \cdot \vec{\mathbf{b}} \quad \ldots\text{(i)}$$

पुन: $m(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) = m|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta = |\vec{\mathbf{a}}||m\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta = \vec{\mathbf{a}} \cdot (m\vec{\mathbf{b}})$ ...(ii)

(i) तथा (ii) से $m(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) = (m\vec{\mathbf{a}}) \cdot \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} \cdot (m\vec{\mathbf{b}})$

(iii) यदि m और n दो अदिश हों, तो $m\vec{\mathbf{a}} \cdot n\vec{\mathbf{b}} = mn(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})$

प्रमाण : $m\vec{\mathbf{a}} \cdot n\vec{\mathbf{b}} = |m\vec{\mathbf{a}}||n\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta = m|\vec{\mathbf{a}}|n|\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta = mn|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta = mn(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})$

(iv) यदि $\vec{\mathbf{a}}$ कोई अशून्य सदिश हो, तो $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = a^2$

क्योंकि $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{a}}| \cos 0° = |\vec{\mathbf{a}}|^2 = a^2$, जहाँ $|\vec{\mathbf{a}}| = a$ [समान सदिशों के बीच का कोण $= 0°$]

अत: किसी सदिश का स्वयं के साथ अदिश गुणन उनके मापांक का वर्ग होता है।

(v) दो अशून्य सदिशों के लंब होने का आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबंध यह है कि उनका अदिश गुणन शून्य होगा

अर्थात् $\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0$

क्योंकि $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos 90° = 0$ $[\because \cos 90° = 0]$

(vi) यदि $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ **एक ही दिशा** में हों या **समानांतर** हों, तो $\theta = 0°$

$\therefore$ $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos 0° = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|$ $[\because \cos 0° = 1]$

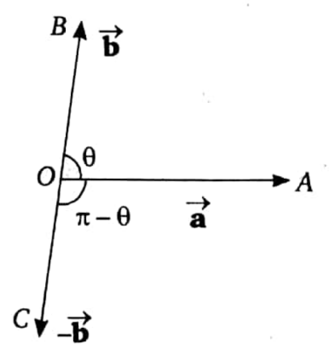
(vii) यदि $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ **विपरीत दिशा में हों**, तो $\theta = \pi$

$\therefore$ $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{a}}| \cos\pi = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \times (-1) = -|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|$

अर्थात् $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = -|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|$ जब $\theta = \pi$

(viii) $\vec{\mathbf{a}} \cdot (-\vec{\mathbf{b}}) = -(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})$

प्रमाण : मान लो $\vec{\mathbf{OA}} = \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{OB}} = \vec{\mathbf{b}}$ तथा इनके बीच का कोण θ है।



BO को C तक इतना बढ़ाया कि $OC = OB$, तो

$$\vec{\mathbf{OC}} = -\vec{\mathbf{OB}} = -\vec{\mathbf{b}}$$

और सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $-\vec{\mathbf{b}}$ के बीच का कोण $= \pi - \theta$

$\therefore$ $\vec{\mathbf{a}} \cdot (-\vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{OA}} \cdot \vec{\mathbf{OC}} = |\vec{OA}||\vec{OC}| \cos(\pi - \theta)$

$$= (OA)(OC)(-\cos\theta) = -(OA \times OC \times \cos\theta)$$

$$= -(OA \times OB \cos\theta) \quad (\because OC = OB)$$

$$= -(|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \cos\theta) = -(\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})$$

(ix) वितरण नियम (Distributive Law) : यदि $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ तथा $\vec{\mathbf{c}}$ कोई तीन सदिश हों, तो

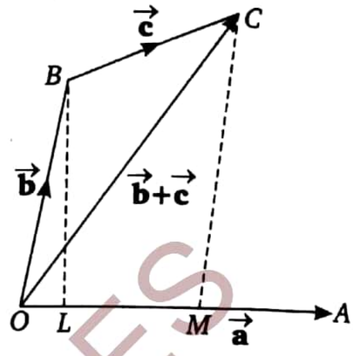
$$\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

प्रमाण : माना $\vec{\mathbf{OA}}, \vec{\mathbf{OB}}$ तथा $\vec{\mathbf{OC}}$ क्रमशः सदिश $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ तथा $\vec{\mathbf{c}}$ को निरूपित करते हैं, तो



$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} \quad \text{[सदिश योग का त्रिभुज नियम]}$$

$$= \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}$$

$BL \perp OA$ तथा $CM \perp OA$ खींचा।

अब $\vec{\mathbf{a}}.(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}) = |\vec{\mathbf{a}}| \times (\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}})$ का $\vec{\mathbf{a}}$ पर प्रक्षेप

$= |\vec{\mathbf{a}}| \times (\vec{\mathbf{OC}}$ का $\vec{\mathbf{OA}}$ पर प्रक्षेप)

$= |\vec{\mathbf{a}}|(OM) = |\vec{\mathbf{a}}|(OL+LM) = |\vec{\mathbf{a}}| \times OL + |\vec{\mathbf{a}}| \times LM$

$= |\vec{\mathbf{a}}|(\vec{\mathbf{b}}$ का $\vec{\mathbf{a}}$ पर प्रक्षेप) $+ |\vec{\mathbf{a}}| \times (\vec{\mathbf{c}}$ का $\vec{\mathbf{a}}$ पर प्रक्षेप) $= \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{c}}$

$\therefore \quad \vec{\mathbf{a}}.(\vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{c}}$

(x) $\vec{\mathbf{a}}.(\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{c}}$

प्रमाण : $\vec{\mathbf{a}}.(\vec{\mathbf{b}}-\vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{a}}.[\vec{\mathbf{b}}+(-\vec{\mathbf{c}})] = \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}}.(-\vec{\mathbf{c}})$ (वितरण नियम से)

$= \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} + [-(\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{c}}] = \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{c}}$

(xi) किन्हीं दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ के लिए

(i) $|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}|^2 = |\vec{\mathbf{a}}|^2 + |\vec{\mathbf{b}}|^2 + 2\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}$ (ii) $|\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}|^2 = |\vec{\mathbf{a}}|^2 + |\vec{\mathbf{b}}|^2 - 2\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}$

(iii) $(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}) = |\vec{\mathbf{a}}|^2 - |\vec{\mathbf{b}}|^2$

प्रमाण : (i) $|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}|^2 = (\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}).(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}})$ $[\because \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{a}} = |\vec{\mathbf{a}}|^2]$

$= (\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}).\vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}).\vec{\mathbf{b}}$ [वितरण नियम से]

$= \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{b}}$

अर्थात् $|\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}|^2 = |\vec{\mathbf{a}}|^2 + 2\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} + |\vec{\mathbf{b}}|^2$ $[\because \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{a}}]$

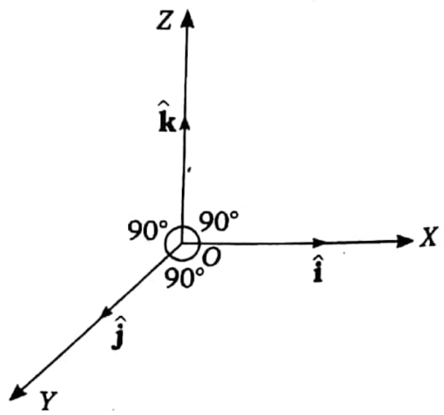
(ii) भाग (i) की तरह हल करें।

(iii) $(\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}).(\vec{\mathbf{a}}-\vec{\mathbf{b}}) = (\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}).\vec{\mathbf{a}} - (\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}).\vec{\mathbf{b}}$ [वितरण नियम से]

$= \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}|^2 - |\vec{\mathbf{b}}|^2$ $[\because \vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{b}}.\vec{\mathbf{a}}]$

6.6 इकाई सदिशों $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$ का अदिश गुणन (Scalar Prouduct of Unit Vectors)

माना OX, OY तथा OZ तीन समकोणीय अक्ष हैं तथा इन अक्षों के अनुदिश इकाई सदिश क्रमशः $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{k}}$ हैं।



स्पष्टतः $|\hat{\mathbf{i}}| = |\hat{\mathbf{j}}| = |\hat{\mathbf{k}}| = 1$

अब $\vec{i}.\vec{j} = |\hat{\mathbf{i}}|.|\hat{\mathbf{j}}|\cos\frac{\pi}{2}$ $[\because \hat{\mathbf{i}} \perp \hat{\mathbf{j}}]$

$= 1 \times 1 \times 0 = 0$

$\therefore \quad \hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}} = 0$

पुनः $\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{k}} = |\hat{\mathbf{i}}||\hat{\mathbf{k}}|\cos\frac{\pi}{2}$ $[\because \hat{\mathbf{i}} \perp \hat{\mathbf{k}}]$

$= 1 \times 1 \times 0 = 0$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

तथा $\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{k}} = |\hat{\mathbf{j}}||\hat{\mathbf{k}}|\cos\frac{\pi}{2}$ $[\because \hat{\mathbf{i}} \perp \hat{\mathbf{k}}]$

$= 1 \times 1 \times 0 = 0$

$\therefore$ $\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}.\hat{\mathbf{i}} = 0$

पुनः $\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}} = |\hat{\mathbf{i}}||\hat{\mathbf{i}}|\cos 0° = 1 \times 1 \times 1 = 1$

इसी तरह $\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}} = 1;$ $\hat{\mathbf{k}}.\hat{\mathbf{k}} = 1$ $\therefore$ $\hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}.\hat{\mathbf{k}} = 1$

6.6.1 आयताकार घटक के पदों में अदिश गुणन (Scalar Product in Terms of Rectangular Components)

यदि $\vec{\mathbf{a}} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}};\ \vec{\mathbf{b}} = b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}}$ तो $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

इस तरह दो सदिशों का अदिश गुणनफल उनके संगत घटकों के गुणनफल के योग के बराबर होता है।

जैसे—यदि $\vec{\mathbf{a}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$; $\vec{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$

तो $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = 2 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 3 = 2 + 6 + 12 = 20$

6.7 दो सदिशों के बीच का कोण (Angle between two Vectors)

यदि दो सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ के बीच कोण θ हो, तो $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\cos\theta$

$\Rightarrow$ $\cos\theta = \dfrac{\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|}$ $\therefore$ $\boxed{\theta = \cos^{-1}\dfrac{\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|}}$

पुनः यदि $\vec{\mathbf{a}} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}};\ \vec{\mathbf{b}} = b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}}$

तो $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3;$ $|\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2};$ $|\vec{\mathbf{b}}| = \sqrt{b_1^2 + b_1^2 + b_3^2}$

$\therefore$ $\cos\theta = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ अतः $\theta = \cos^{-1}\dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

6.8 दो सदिशों के समानांतर तथा लंब होने का प्रतिबंध

(i) **यदि सदिश समानांतर हैं :** मान लिया दो सदिश $\vec{\mathbf{a}} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}} = b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}}$ हैं, तो $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ के **समानांतर** होंगे, यदि

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}}$$

अर्थात् दोनों सदिशों में $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{k}}$ के गुणांक समान अनुपात में हैं।

(ii) **यदि सदिश लंब हैं :** यदि $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ लंब हैं तो उनके बीच का कोण $\theta = \frac{\pi}{2}$ तथा $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$

अतः $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ के परस्पर लम्ब होंगे यदि $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = 0 \Rightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

अर्थात् दोनों सदिशों में $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ के संगत गुणांकों के गुणनफल का योग शून्य होगा।

AKC TECHNICAL CLASSES

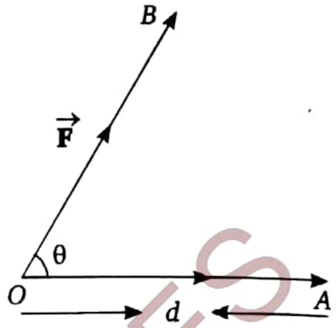
Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

6.9 कार्य (Work)

यदि कोई बल किसी कण पर लगकर उसे अपनी दिशा में विस्थापित कर देता है, तो कहा जाता है कि बल के द्वारा कार्य हुआ।

कार्य एक अदिश राशि है तथा इसका मान **बल के परिमाण तथा बल की दिशा में कण के विस्थापन के वियोजित भाग के गुणनफल से प्राप्त होता है।**



अर्थात् कृत कार्य $= |\vec{\mathbf{F}}||\vec{\mathbf{d}}|\cos\theta$

जहाँ $\vec{\mathbf{d}}$ = विस्थापन तथा θ बल और विस्थापन के बीच का कोण है।

अत: कृत कार्य $W = \vec{\mathbf{F}}.\vec{\mathbf{d}}$

टिप्पणी : विस्थापन तथा बल की दिशा परस्पर लंब नहीं होनी चाहिए, अन्यथा कृत कार्य शून्य होगा, क्योंकि यदि $\theta = \frac{\pi}{2}$, तो $\cos\theta = 0$

$$\therefore \quad \vec{\mathbf{F}}.\vec{\mathbf{d}} = |\vec{\mathbf{F}}|.|\vec{\mathbf{d}}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

6.9.1 कई बलों द्वारा किया गया कार्य (Work done by more than one force)

माना बिन्दु O पर कई बल $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ क्रियाशील हैं, जिससे कण O से A पर विस्थापित हो जाता है।

अर्थात् $\vec{\mathbf{OA}} = \vec{\mathbf{d}}$

तथा परिणामी बल $\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F_1}} + \vec{\mathbf{F_2}} + \vec{\mathbf{F_3}} + \ldots + \vec{\mathbf{F_n}}$

$\therefore$ बल द्वारा वृत्त कार्य $W = (\vec{\mathbf{F_1}} + \vec{\mathbf{F_2}} + \vec{\mathbf{F_3}} + \ldots + \vec{\mathbf{F_n}}).\vec{\mathbf{d}} = \vec{\mathbf{F}}.\vec{\mathbf{d}}$

= परिणामी बल द्वारा किया गया कार्य

अत: यदि किसी कण पर कई बल क्रियाशील हों तो बलों द्वारा किया गया कार्य उनके परिणामी तथा परिणामी की दिशा में कण के विस्थापन के अदिश गुणनफल के बराबर होता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. निम्नलिखित का मान बतायें—

(i) $\hat{\mathbf{j}}.(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})$ (ii) $(2 + \hat{\mathbf{i}}).(2 - \hat{\mathbf{i}})$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]**

हल : दिया गया गुणन

(i) $\hat{\mathbf{j}}.(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) = \hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{k}} = 0 + 1 + 0 = 1$ [$\because \hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{j}} = 1$ तथा $\hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}.\hat{\mathbf{k}} = 0$]

(ii) $(2 + \hat{\mathbf{i}}).(2 - \hat{\mathbf{i}}) = 2 \times 2 - 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}} = 4 - 0 - 1 = 3$ [$\because \hat{\mathbf{i}}.\hat{\mathbf{i}} = 1$]

उदाहरण 2. यदि $A = 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$; $\vec{\mathbf{B}} = 6\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ तो

(i) $\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}}$ का मान निकालें। (ii) $\vec{\mathbf{A}}$ तथा $\vec{\mathbf{B}}$ के बीच का कोण ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1982, 86, 87, 88]

हल : (i) $\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}} = (2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}).(6\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}})$

$= (2\hat{\mathbf{i}}).(6\hat{\mathbf{i}}) + (2\hat{\mathbf{j}}).(-3\hat{\mathbf{j}}) + (-\hat{\mathbf{k}}).(2\hat{\mathbf{k}})$

[यदि $\vec{\mathbf{a}} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{b}} = b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}}$ तो $\vec{\mathbf{a}}.\vec{\mathbf{b}} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$= 12\hat{i}.\hat{i} - 6\hat{j}.\hat{j} - 2\hat{k}.\hat{k} = 12\times 1 - 6\times 1 - 2\times 1$$

$$= 12 - 6 - 2 = 12 - 8 = 4 \qquad [\because \hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1]$$

(ii) यहाँ $\vec{A}.\vec{B} = 4$

$$|\vec{A}| = |2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{B}| = |6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{4}{3\times 7} = \frac{4}{21} \qquad \left[\because \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}\right]$$

अर्थात् $\theta = \cos^{-1}\frac{4}{21}$ जहाँ θ सदिशों $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के बीच का कोण है।

उदाहरण 3. (i) दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात करें यदि उनके मापांक क्रमश: 2 तथा 1 हैं तथा $\vec{a}.\vec{b} = \sqrt{3}$

(ii) यदि $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ तो इनके बीच का कोण ज्ञात करें।

हल : (i) यहाँ $\vec{a}.\vec{b} = \sqrt{3}$; $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$

माना इनके बीच का कोण θ है,

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\sqrt{3}}{2\times 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$ उत्तर

(ii) यदि $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 0\hat{k}$

$$\therefore \quad |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

तथा $\vec{a}.\vec{b} = (3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}).(2\hat{i} + 3\hat{j} + 0.\hat{k}) = 3\times 2 + (-2)(3) + 1\times 0 = 6 - 6 + 0 = 0$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{13}} = 0$$

अर्थात् $\cos\theta = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$ $\qquad \therefore \theta = \frac{\pi}{2}$ अत: $\vec{a} \perp \vec{b}$

उदाहरण 4. (i) दिखायें कि $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $-\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ और $-3\hat{i} + 3\hat{j}$ परस्पर लंब हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1991]**

(ii) यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + p\hat{j} + 2\hat{k}$ परस्पर लंब हैं, तो p का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]**

(iii) यदि सदिश $a\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ और $3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$ परस्पर लंब हैं तो a का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2015]**

(iv) यदि $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{C} = 3\hat{i} + \hat{j}$ तो t का मान ज्ञात करें जबकि $\vec{A} + t\vec{B}$ सदिश $\vec{C}$ पर लंब है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2000]**

(v) p के किस मान के लिए $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + p\hat{j} + 3\hat{k}$ समानांतर हैं ? **[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

हल : (i) माना $\vec{A} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k};\ \vec{B} = -\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k};\ \vec{C} = -3\hat{i} + 3\hat{j}$

अब $\vec{A}.\vec{B} = (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}).(-\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k})$

$= -\hat{i}.\hat{i} - \hat{j}.\hat{j} + \hat{k}.2\hat{k}$ $[\because \hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0]$

$= -1 - 1 + 2$ $[\because \hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1]$

$= 0$ $\therefore \vec{A} \perp \vec{B}$ ...(1)

पुन: $\vec{B}.\vec{C} = (-\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}).(-3\hat{i} + 3\hat{j} + 0\hat{k})$

$= 3\hat{i}.\hat{i} - 3\hat{j}.\hat{j} - 0 = 3 \times 1 - 3 \times 1 = 3 - 3 = 0$ $\therefore \vec{B} \perp \vec{C}$ ...(2)

तथा $\vec{C}.\vec{A} = (-3\hat{i} + 3\hat{j} + 0\hat{k}).(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

$= -3\hat{i}.\hat{i} + 3\hat{j}.\hat{j} + 0\hat{k}.\hat{k} = -3 + 3 = 0$ $\therefore \vec{C} \perp \vec{A}$ ...(3)

(1), (2) तथा (3) से, तीनों सदिश एक दूसरे के लंबवत हैं।

(ii) हल : यहाँ $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k};\ \vec{b} = 3\hat{i} + p\hat{j} + 2\hat{k}$

$\because \vec{a} \perp \vec{b}$ $\therefore \vec{a}.\vec{b} = 0$

अर्थात् $(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}).(3\hat{i} + p\hat{j} + 2\hat{k}) = 0$

या $2 \times 3 + 3 \times p + 6 \times 2 = 0$ [गुणन सूत्र से]

अर्थात् $6 + 12 + 3p = 0$

या $3p = -18$ $\therefore p = \dfrac{-18}{3} = -6$ उत्तर

(iii) दिये गए सदिश परस्पर लंब हैं, अत: $(a\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}).(3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}) = 0$

$\Rightarrow 3a + 8 + 4 = 0$ $\Rightarrow 3a = -12 \Rightarrow a = -4$

(iv) यहाँ $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k},\ \vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k},\ \vec{C} = 3\hat{i} + \hat{j}$

$\therefore \vec{A} + t\vec{B} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + t(-\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$

$= (1 - t)\hat{i} + (2 + t)\hat{j} + (3 + t)\hat{k}$ ...(1)

यदि $\vec{A} + t\vec{B}$ सदिश $\vec{C}$ पर लंबवत् है, तो $(\vec{A} + t\vec{B}).\vec{C} = 0$

या $\{(1 - t)\hat{i} + (2 + t)\hat{j} + (3 + t)\hat{k}\}.\{(3\hat{i} + 2\hat{j} + 0.\hat{k}\} = 0$

या $(1 - t) \times 3 + (2 + t) \times 2 + (3 + t) \times 0 = 0$

या $3 - 3t + 4 + 2t + 0 = 0$ या $7 - t = 0$ या $t = 7$ उत्तर

(v) यहाँ $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k};\ \vec{b} = \hat{i} + p\hat{j} + 3\hat{k}$

यदि a तथा b समानांतर हैं तो $\dfrac{3}{1} = \dfrac{2}{p} = \dfrac{9}{3}$

$\left[\because a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} = 0 \text{ और } b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} = 0\right.$ समानांतर हैं तो $\left.\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}\right]$

अब $\dfrac{2}{p} = 3 \Rightarrow p = \dfrac{2}{3}$ उत्तर

उदाहरण 5. यदि $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ तो सिद्ध करें कि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ परस्पर लंबवत् हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2007]**

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

हल : दिया गया है $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ $\Rightarrow$ $|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$ [दोनों तरफ वर्ग करने पर]

$\Rightarrow$ $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})$

$\Rightarrow$ $\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}$ [वितरण नियम से]

$\Rightarrow$ $|\vec{a}|^2+2\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$\Rightarrow$ $4\vec{a}.\vec{b}=0$ $\Rightarrow$ $\vec{a}.\vec{b}=0$ $\therefore$ $\vec{a}\perp\vec{b}$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 6. समतल में कोई सदिश $\vec{a}$ है तो दिखायें $(\vec{a}.\hat{i})\hat{i}+(\vec{a}.\hat{j})\hat{j}+(\vec{a}.\hat{k})\hat{k}=\vec{a}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2010]

हल : माना $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$

तो $\vec{a}.\hat{i}=(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}).\hat{i}=a_1\hat{i}.\hat{i}+a_2\hat{j}.\hat{i}+a_3\hat{k}.\hat{i}$

$=a_1\times 1+0+0$ $[\because \hat{i}.\hat{i}=1, \hat{j}.\hat{i}=\hat{k}.\hat{i}=0]$

$=a_1$

$\vec{a}.\vec{j}=(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}).\hat{j}=a_1\hat{i}.\hat{j}+a_2\hat{j}.\hat{j}+a_3\hat{k}.\hat{j}=0+a_2\times 1+0=a_2$

तथा $\vec{a}.\hat{k}=(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}).\hat{k}=a_1\hat{i}.\hat{k}+a_2\hat{j}.\hat{k}+a_3\hat{k}.\hat{k}=0+0+a_3\times 1=a_3$

$\therefore$ $(\vec{a}.\hat{i})\hat{i}+(\vec{a}.\hat{j})\hat{j}+(\vec{a}.\hat{k})\hat{k}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}=\vec{a}$ [परिकल्पना से] **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 7. सदिश $\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ का सदिश $\vec{B}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात करें। $\vec{B}$ का $\vec{A}$ पर भी प्रक्षेप ज्ञात कीजिए।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1992]

हल : दिए गए सदिश $\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{B}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

$\therefore$ $|\vec{A}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}$ ...(1)

$|\vec{B}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(3)^2}=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$ ...(2)

तथा $\vec{A}.\vec{B}=(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}).(2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})$

$=1\times 2+1\times(-1)+1\times 3=2-1+3=5-1=4$ ...(3)

अब $\vec{A}.\vec{B}=|\vec{B}|\times$ सदिश $\vec{A}$ का सदिश $\vec{B}$ पर प्रक्षेप

$\therefore$ सदिश $\vec{A}$ का सदिश $\vec{B}$ पर प्रक्षेप $=\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}=\dfrac{4}{\sqrt{14}}$ [(2) तथा (3) से]

पुनः सदिश $\vec{B}$ का सदिश $\vec{A}$ पर प्रक्षेप $=\dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ [(1) तथा (3) से]

उदाहरण 8. यदि $\hat{a}$ तथा $\hat{b}$ दो मात्रक सदिश हैं, जिनके बीच का कोण θ है, तो सिद्ध करें—

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\hat{a}-\hat{b}|$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1998]

हल : $\because$ $|\hat{a}-\hat{b}|^2=(\hat{a}-\hat{b}).(\hat{a}-\hat{b})$ $[\because \vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2]$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$= \hat{a}.\hat{a} - \hat{a}.\hat{b} - \hat{b}.\hat{a} + \hat{b}.\hat{b}$$
$$= |\hat{a}|^2 - 2\hat{a}.\hat{b} + |\hat{b}|^2$$
$$= |\hat{a}|^2 - 2|\hat{a}||\hat{b}|\cos\theta + |\hat{b}|^2 \quad [\because \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta]$$
$$= 1 - 2\cos\theta + 1 \quad [\because |\hat{a}| = |\hat{b}| = 1]$$
$$= 2 - 2\cos\theta = 2(1-\cos\theta) = 2\times 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

अर्थात् $|\hat{a} - \hat{b}|^2 = 4\sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}|\hat{a}-\hat{b}|^2 \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\hat{a}-\hat{b}|$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 9. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ऐसे सदिश हैं कि $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 3$ और प्रत्येक दूसरे दो के योग के लंबवत् हैं, तब $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1997]**

हल : दिया गया है :

$$|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 4 \text{ तथा } |\vec{c}| = 3 \text{ तथा } \vec{a}\perp(\vec{b}+\vec{c}), \vec{b}\perp(\vec{c}+\vec{a}) \text{ तथा } \vec{c}\perp(\vec{a}+\vec{b})$$

अब $\vec{a}\perp(\vec{b}+\vec{c}) \Rightarrow \vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = 0$ या $\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c} = 0$ ...(1)

इसी प्रकार $\vec{b}\perp(\vec{c}+\vec{a}) \Rightarrow \vec{b}.(\vec{c}+\vec{a}) = 0$ या $\vec{b}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{a} = 0$ ...(2)

तथा $\vec{c}\perp(\vec{a}+\vec{b}) \Rightarrow \vec{c}.(\vec{a}+\vec{b}) = 0$ या $\vec{c}.\vec{a}+\vec{c}.\vec{b} = 0$ ...(3)

(1) + (2) + (3) से

$$2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}) = 0 \quad ...(4)$$

अब $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$$= \vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}+\vec{c}.\vec{b}+\vec{c}.\vec{c}$$
$$= |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}) + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 = 5^2 + 0 + 4^2 + 3^2$$

[(1) तथा (4) से]

$$= 25 + 16 + 9 = 50$$

$\therefore \quad |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ उत्तर

उदाहरण 10. दिखायें $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$, $3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ समकोण त्रिभुज बनाते हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1981, 90]**

हल : माना $\vec{AB} = \vec{a} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$; $\vec{BC} = \vec{b} = \hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$; $\vec{AC} = \vec{c} = 3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$

अब $\vec{a}+\vec{b} = (2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}) + (\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}) = 3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k} = \vec{c}$

अर्थात् $\vec{a}+\vec{b} = \vec{c}$ $\quad\therefore\quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ त्रिभुज की भुजायें हैं।

पुनः $\vec{a}.\vec{b} = (2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})$

$$= 2\times 1 + (-1)(-3) + 1\times(-5) = 2+3-5 = 5-5 = 0$$

$\therefore \quad \vec{a}\perp\vec{b}$ अर्थात् $\vec{AC}\perp\vec{CB}$

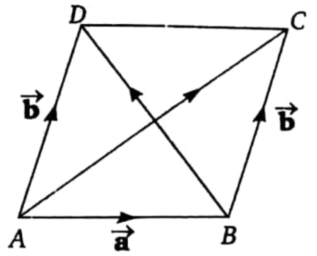
$\therefore \quad \Delta ABC$ एक समकोण त्रिभुज है।

उदाहरण 11. सिद्ध करें समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर काटते हैं।

हल : माना $ABCD$ एक समचतुर्भुज है जिसमें

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$\vec{AB} = \vec{a},\ \vec{AD} = \vec{b}$ $\quad\therefore\quad \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}$



$\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$

अब $\quad \vec{AC}\,.\,\vec{BD} = (\vec{a} + \vec{b})\,.\,(\vec{b} - \vec{a})$

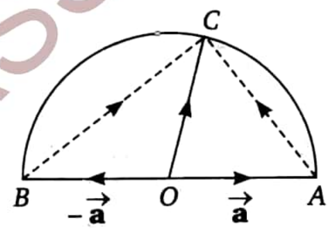
$= \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{a} + \vec{b}.\vec{b} - \vec{b}.\vec{a}$

$= |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0 \qquad [\because\ \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}]$

$\therefore$ विकर्ण $\vec{AC}$ तथा $\vec{BD}$ परस्पर लंब हैं। **साबित हुआ।**

उदाहरण 12. सदिश विधि से सिद्ध करें कि अर्द्धवृत्त में बना कोण एक समकोण होता है।

हल : माना अर्द्धवृत्त का केन्द्र O है तथा $\vec{OA} = \vec{a} \quad \therefore \quad \vec{OB} = -\vec{a}$



माना $\vec{OC} = \vec{r}$

तो $\quad \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{r} - \vec{a}$

$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \vec{r} - (-\vec{a}). = \vec{r} + \vec{a}$

अब $\quad \vec{AC}\,.\,\vec{BC} = (\vec{r} - \vec{a})\,.\,(\vec{r} + \vec{a})$

$= \vec{r}\,.\,\vec{r} + \vec{r}\,.\,\vec{a} - \vec{a}\,.\,\vec{r} - \vec{a}\,.\,\vec{a} = |\vec{r}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0 \qquad [\because\ |\vec{r}| = |\vec{a}| =$ त्रिज्या$]$

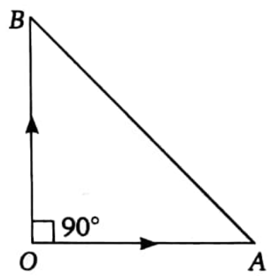
$\therefore \quad \vec{AC} \perp \vec{BC}$

$\therefore \quad \angle BCA =$ अर्द्धवृत का कोण $= 90°$ अर्थात् वृत्तार्द्ध का कोण समकोण है। **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 13. सदिश विधि से सिद्ध करें कि समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

हल : माना OAB एक त्रिभुज है जिसमें $\angle AOB = 90°$ तथा AB कर्ण है,

माना O मूल बिंदु है तथा



A का स्थिति सदिश $= \vec{OA} = \vec{a}$ एवं B का स्थिति सदिश $= \vec{OB} = \vec{b}$

$\therefore \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$

अब $\quad \vec{OA} \perp \vec{OB} \quad \Rightarrow \quad \vec{OA}\,.\,\vec{OB} = \vec{a}\,.\,\vec{b} = 0$

तथा $|\vec{AB}|^2 = \vec{AB}\,.\,\vec{AB} = (\vec{b} - \vec{a})\,.\,(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}\,.\,\vec{b} - \vec{b}\,.\,\vec{a} - \vec{a}\,.\,\vec{b} + \vec{a}\,.\,\vec{a}$

$= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\,.\,\vec{b} + |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 \qquad [\because\ \vec{a}\,.\,\vec{b} = 0]$

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

अर्थात् $\quad AB^2 = OA^2 + OB^2$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 14. सदिश विधि से सिद्ध करें कि किसी त्रिभुज के शीर्ष बिंदुओं से सम्मुख भुजाओं पर डाले गए लंब एक बिंदुगामी (Concurrent) होते हैं।

हल : मान लें कि ΔABC में $AD \perp BC$ तथा $BE \perp CA$

माना AD तथा BE का कटान बिंदु O है। C तथा O को मिलायें जो बढ़ाये जाने पर BA से F बिन्दु पर मिलती है।

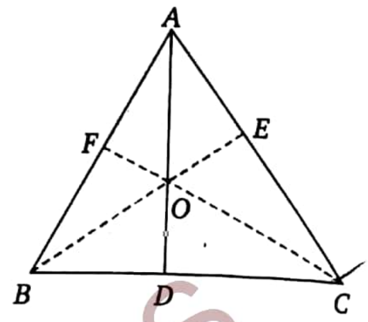
हमें सिद्ध करना है $CF \perp AB$

मान लिया O मूल बिन्दु है तथा $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$ और $\vec{OC} = \vec{c}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner



तो $\quad \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}$ [सदिश योग नियम से]

$\therefore \quad \vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \vec{c} - \vec{b}$ ...(1)

तथा $\quad \vec{OC} + \vec{CA} = \vec{OA}$

$\therefore \quad \vec{CA} = \vec{OA} - \vec{OC} = \vec{a} - \vec{c}$ ...(2)

तथा $\quad \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \quad \therefore \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$

अब $\because \quad AD \perp BC$ अर्थात् $\vec{OA} \perp \vec{BC}$

$\therefore \quad \vec{OA} \cdot \vec{BC} = 0$ या $\vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$

$\Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{b}$ ...(3)

पुनः $BE \perp CA$ अर्थात् $\vec{OB} \perp \vec{CA}$

$\therefore \quad \vec{OB} \cdot \vec{CA} = 0$ या $\vec{b} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0$

या $\vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$ या $\vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{c}$

अर्थात् $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ ...(4)

(3) तथा (4) से

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\vec{c} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{OC} = 0$$

$\therefore \quad \vec{OC} \perp \vec{AB} \qquad \therefore \quad CF \perp AB$

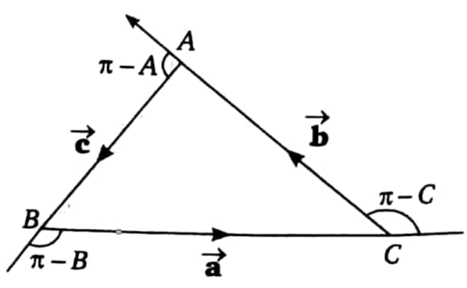
अतः किसी त्रिभुज के शीर्ष से सामने की भुजा पर डाला गया लंब एक बिंदुगामी होते हैं।

उदाहरण 15. किसी त्रिभुज ABC में सदिश विधि से सिद्ध करें—

(i) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ (ii) $c = a \cos B + b \cos A$

हल : (i) माना $\quad \vec{BC} = \vec{a}; \quad \vec{CA} = \vec{b}; \quad \vec{AB} = \vec{c}$

अब AB, BC तथा CA, ΔABC की भुजायें हैं।



$\therefore \quad \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$ या $\vec{BC} + \vec{CA} = -\vec{AB}$

या $\quad |\vec{BC} + \vec{CA}|^2 = |\vec{AB}|^2$ [वर्ग करने पर]

या $\quad |\vec{c}|^2 = \vec{BC}^2 + \vec{CA}^2 + 2\vec{BC} \cdot \vec{CA}$

या $\quad |\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

या $\quad c^2 = a^2 + b^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos(\pi - C)$ जहाँ $|\vec{a}| = a, |\vec{b}| = b$

$\quad = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ $[\because \cos(\pi - C) = -\cos C]$

अर्थात् $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

सिद्ध हुआ।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(ii) पुनः $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = 0$

$\Rightarrow \vec{AB} = -(\vec{BC} + \vec{CA})$

$\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AB} = -(\vec{BC} + \vec{CA}) \cdot \vec{AB}$

$\Rightarrow |\vec{AB}|^2 = -\vec{BC} \cdot \vec{AB} - \vec{CA} \cdot \vec{AB}$

$\Rightarrow |\vec{c}|^2 = -\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{b} \cdot \vec{c}$

$\Rightarrow |\vec{c}|^2 = -|\vec{a}||\vec{c}| \cos(\pi - B) - |\vec{b}||\vec{c}| \cos(\pi - A)$

$\Rightarrow c^2 = ac \cos B + bc \cos A \quad \Rightarrow \quad c^2 = c(a \cos B + b \cos A)$

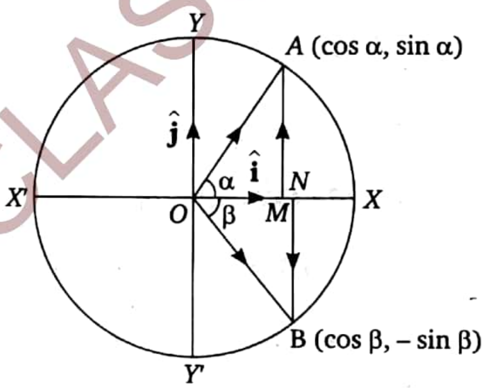
$\Rightarrow c = a \cos B + b \cos A$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 16. सदिश विधि से सिद्ध करें कि $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$. **[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]**

हल : माना इकाई त्रिज्या का एक वृत्त है, जिस पर A तथा B कोई दो बिंदु इस प्रकार लिए गए हैं कि OA, OX के साथ कोण α तथा OB, OX के साथ β कोण बनाती है।

चित्र से स्पष्ट है कि



$\angle AOB = \alpha + \beta$

तथा $OA = OB = 1$ [वृत्त की त्रिज्या इकाई है]

अब $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}||\vec{OB}| \cos(\alpha + \beta)$

$= \cos(\alpha + \beta) \quad \ldots(1)$

अब $\cos\alpha = \dfrac{OM}{OA} = \dfrac{OM}{1} \quad \Rightarrow \quad OM = \cos\alpha$

तथा $\sin\alpha = \dfrac{AM}{OA} = \dfrac{AM}{1} \quad \Rightarrow \quad AM = \sin\alpha$

इसी तरह $ON = \cos\beta$ तथा $NB = \sin\beta$

अतः बिन्दु A तथा B के निर्देशांक $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ एवं $(\cos\beta, -\sin\beta)$ हैं।

अब यदि OX तथा OY के अनुदिश इकाई सदिश $\hat{\mathbf{i}}$ तथा $\hat{\mathbf{j}}$ हों तो

$\vec{OM} = \cos\alpha\, \hat{\mathbf{i}}, \vec{ON} = \cos\beta\, \hat{\mathbf{j}}, \vec{MA} = \sin\alpha\, \hat{\mathbf{j}},$ तथा $\vec{NB} = -\sin\beta\, \hat{\mathbf{j}}$

अब $\vec{OA} = \vec{OM} + \vec{MA} = \cos\alpha\, \hat{\mathbf{i}} + \sin\alpha\, \hat{\mathbf{j}}$

$\vec{OB} = \vec{ON} + \vec{NB} = \cos\beta\, \hat{\mathbf{j}} - \sin\beta\, \hat{\mathbf{j}}$

$\therefore \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = (\cos\alpha\, \hat{\mathbf{i}} + \sin\alpha\, \hat{\mathbf{j}}) \cdot (\cos\beta\, \hat{\mathbf{i}} - \sin\beta\, \hat{\mathbf{j}})$

$= \cos\alpha \cdot \cos\beta\, \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} - \sin\alpha \cdot \sin\beta\, \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + \sin\alpha \cos\beta\, \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} - \cos\alpha \sin\beta\, \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}}$

$= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \qquad \left[\because \begin{array}{l} \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 1 \\ \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0 \end{array}\right]$

अर्थात् $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ [(1) से]

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 17. (i) घन के कर्ण द्वारा घन के किसी कोर के साथ बनने वाले कोण को ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]

(ii) दिखायें कि किसी घन के दो विकर्णों के बीच का कोण $\cos^{-1} \dfrac{1}{3}$ है।

हल : (i) मान लें कि घन की प्रत्येक भुजा a है तथा $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{k}}$ क्रमशः X-अक्ष, Y-अक्ष तथा Z-अक्ष के अनुदिश इकाई सदिश हैं।

OP घन का विकर्ण है।

स्पष्ट है P के नियामक (a, a, a) तथा A के नियामक $(a, 0, 0)$ हैं।

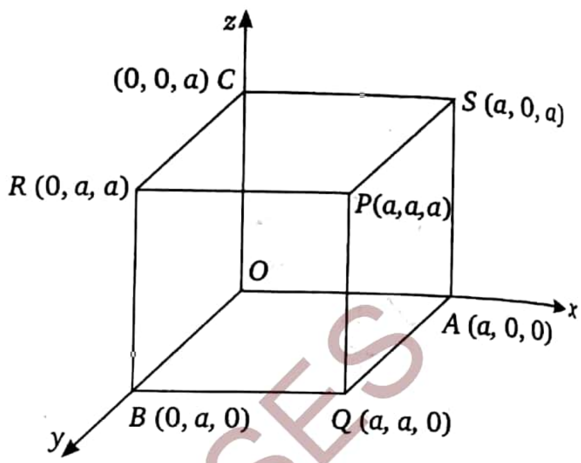
अब $\vec{OP} = a\hat{\mathbf{i}} + a\hat{\mathbf{j}} + a\hat{\mathbf{k}}$ तथा $\vec{OA} = a\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}} = a\hat{\mathbf{i}}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अब यदि $\vec{OA}$ तथा $\vec{OP}$ के बीच का कोण θ हो, तो



$$\cos\theta = \frac{\vec{OA}\cdot\vec{OP}}{|\vec{OA}||\vec{OP}|}$$

$$= \frac{a\hat{\mathbf{i}}\cdot(a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}}+a\hat{\mathbf{k}})}{\sqrt{a^2+0^2+0^2}\sqrt{a^2+a^2+a^2}}$$

$$= \frac{a^2\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}}+0+0}{a\times\sqrt{3}\,a} \quad [\because \hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}}=\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{k}}=0]$$

$$= \frac{a^2\times 1}{a^2\times\sqrt{3}}$$

अर्थात् $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad \therefore \quad \theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$

(ii) चित्र से स्पष्ट है कि OP, AR, BS तथा CQ दिए गए घन के विकर्ण हैं।

अब $\vec{OP} = a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}}+a\hat{\mathbf{k}}$

$\vec{AR} = R$ का स्थिति सदिश $-A$ का स्थिति सदिश $=(0\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}}+a\hat{\mathbf{k}})-(a\hat{\mathbf{i}}+0\hat{\mathbf{j}}+0\hat{\mathbf{k}}) = -a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}}+a\hat{\mathbf{k}}$

यदि $\vec{OP}$ तथा $\vec{AR}$ के बीच का कोण α हो, तो

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{OP}|.|\vec{AR}|}{|\vec{OP}||\vec{AR}|} = \frac{(a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}}+a\hat{\mathbf{k}})\cdot(-a\hat{\mathbf{i}}+a\hat{\mathbf{j}}+a\hat{\mathbf{k}})}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\sqrt{(-a)^2+(a)^2+(a)^2}} = \frac{-a^2+a^2+a^2}{\sqrt{3}\,a\times\sqrt{3}\,a} = \frac{1}{3}$$

$\therefore \quad \alpha = \cos^{-1}\frac{1}{3}$

इसी तरह अन्य विकर्ण-युग्मों के बीच का कोण $= \cos^{-1}\frac{1}{3}$ है।

● कार्य पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 18. किसी बल $\vec{\mathbf{F}} = 2\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$ द्वारा किसी कण को बिंदु $A\,(1, 1, 1)$ से बिन्दु $B\,(2, 1, 3)$ तक विस्थापित करने में किए जाने वाले कार्य की गणना करें।

दिया गया बल $\vec{\mathbf{F}} = 2\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$ ...(1)

हल : माना बिंदु A का स्थिति सदिश $\vec{OA} = \hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$

तथा बिंदु B का स्थिति सदिश $\vec{OB} = 2\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$

$\therefore$ विस्थापन $\vec{AB} = \vec{OB}-\vec{OA}$

$$= (2\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}})-(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})$$
$$= \hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{k}} \quad ...(2)$$

$\therefore$ किया गया कार्य $= \vec{\mathbf{F}}\cdot\vec{AB}$

$= (2\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})\cdot(\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{k}})$ [(1) तथा (2) से]

$= 2\times1+1\times0+1\times2 = 2+0+2 = 4$ इकाई

अर्थात् किया गया कार्य $= 4$ इकाई।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

उदाहरण 19. एक बल $\vec{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ किसी कण पर क्रियाशील है। यदि कण बिन्दु A, जिसका स्थिति सदिश $4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ है, से बिन्दु B जिसका स्थिति सदिश $6\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ है, पर स्थानांतरित होता है, तो कृत कार्य की गणना करें।

हल : दिया गया बल $\vec{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$

यदि O मूल बिन्दु है, तो $\vec{OA} = 4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$ तथा $\vec{OB} = 6\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$

$\therefore$ विस्थापन $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (6\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}) - (4\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) = 2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ बल द्वारा दिया गया कार्य $= \vec{F} . \vec{AB} = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}) . (2\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})$

$= 2 \times 2 + 3 \times 4 + 7 \times (-1) = 4 + 12 - 7 = 9$ इकाई **उत्तर**

उदाहरण 20. एक कण पर क्रिया करते हुए दो अचर बल $4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ और $3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ कण को बिन्दु $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ से बिंदु $5\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ तक हटा देते हैं। बलों द्वारा किया गया संपूर्ण कार्य ज्ञात करें।

हल : माना $\vec{F_1} = 4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$; $\vec{F_2} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\therefore$ परिणामी $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = (4\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}) + (3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$

$= 7\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$

माना बल F कण को बिंदु A से बिंदु B तक विस्थापित कर देता है, तो

बिन्दु A का स्थिति सदिश $\vec{OA} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा बिन्दु B का स्थिति सदिश $\vec{OB} = 5\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$

$\therefore$ विस्थापन $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (5\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore$ बलों द्वारा किया गया संपूर्ण कार्य $= \vec{F} . \vec{AB}$

$= (7\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) . (4\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$

$= 7 \times 4 + 2 \times 2 + (-4) \times (-2)$

$= 28 + 4 + 8 = 40$ इकाई **उत्तर**

महत्वपूर्ण सूत्र

1. यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो अशून्य सदिश हैं, जिनके बीच का कोण θ है, तो

(i) $\vec{a} . \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$ तथा $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} . \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

(ii) $\vec{a} . \vec{b} = |\vec{a}| \times$ ($\vec{a}$ की दिशा में $\vec{b}$ का प्रक्षेप) $= |\vec{b}| \times$ ($\vec{b}$ की दिशा में $\vec{a}$ का प्रक्षेप)

2. (i) $\vec{a}$ की दिशा में $\vec{b}$ का प्रक्षेप $= \dfrac{\vec{a} . \vec{b}}{|\vec{a}|} = \vec{b} . \hat{a}$ (ii) $|\vec{b}|$ की दिशा में $\vec{a}$ का प्रक्षेप $= \dfrac{\vec{a} . \vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a} . \hat{b}$

(iii) $|\vec{b}|$ का $\vec{a}$ की दिशा में वियोजित भाग $= \dfrac{\vec{a} . \vec{b}}{|\vec{a}|}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(iv) $|\vec{a}|$ का $\vec{b}$ की दिशा में वियोजित भाग $= \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

3. (i) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ (क्रम विनिमेय नियम)

(ii) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ (वितरण नियम)

(iii) $m\vec{a}\cdot\vec{b} = m(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot m\vec{b}$, जहाँ m अदिश है

(iv) $m\vec{a}\cdot n\vec{b} = mn(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (mn\,\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(mn\,\vec{b})$, जहाँ m, n अदिश हैं

4. $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

5. (i) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2$, जहाँ $|\vec{a}| = a$ (ii) $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$

(iii) $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$

6. यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, तो

(i) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ (ii) $\cos\theta = \dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\,\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

7. (i) यदि बल $\vec{F}$ किसी कण को बिंदु A से बिंदु B तक विस्थापित कर देता है, तो कृत कार्य

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} \text{ जहाँ } \vec{d} = \vec{AB}$$

(ii) यदि एक बिंदु पर कई बल $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \ldots,$ क्रियाशील हों तो परिणमी बल $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \ldots$

$$\therefore \quad W = \vec{F}\cdot\vec{d} = (\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \ldots)\cdot\vec{d}$$

प्रश्नावली 6.1

1. निम्नलिखित के मान बतायें—

(i) $2\hat{i}\cdot(3\hat{j}+4\hat{k})$ (ii) $(\hat{i}-4\hat{k})\cdot(\hat{j}+5\hat{k})$ (iii) $(2+\hat{i})\cdot(2-\hat{i})$

2. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ का मान ज्ञात करें, यदि

(i) $\vec{a} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

(ii) $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

(iii) $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{b} = -3\hat{i} + 3\hat{j}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2014(O)]

3. (i) सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{b} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात करें।

(ii) सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = 4\hat{i} - 3\hat{j} - 4\hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात करें।

(iii) सदिशों $\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ के मध्य बनें कोणों का मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

4. (i) सिद्ध करें कि सदिश $\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ तथा $-2\hat{i} + 6\hat{j} + 4\hat{k}$ परस्पर लंब हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(ii) यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ तो दिखायें $\vec{a} + \vec{b}$ तथा $\vec{a} - \vec{b}$ परस्पर लंब हैं।

(iii) यदि $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ तो सिद्ध करें कि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ परस्पर लंब हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1990, 98]**

(iv) दिखाइये सदिश $\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ और $-3\hat{i} + 3\hat{j}$ परस्पर लंब है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2014(B), 16(B)]**

5. (i) यदि सदिश $a\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $-\hat{i} + 5\hat{j} + a\hat{k}$ परस्पर लंब हैं, तो a का मान ज्ञात करें।

(ii) यदि $\vec{A} = a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{B} = 2a\hat{i} + a\hat{j} - 4\hat{k}$ तो a का वह मान प्राप्त करें जिसके लिए $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ परस्पर लंबवत् हैं।

(iii) अदिश x का मान ज्ञात करें ताकि सदिश $x\hat{i} - 2x\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ लंबवत् हों।

(iv) a का वह मान ज्ञात करें जिसके लिए $2\hat{i} + 6\hat{j} + 9\hat{k}$ तथा $a\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$ परस्पर समानांतर हैं।

(v) यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + p\hat{j} + 2\hat{k}$ परस्पर लंब हैं, तो p का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]**

(vi) यदि $a\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ और $3\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}$ परस्पर लंब हैं, तो a का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2015, 17(SB)]**

(vii) p के किस मान के लिए $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + p\hat{j} + 3\hat{k}$ समानांतर है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]**

(viii) यदि सदिश $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ और $a\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ पर लंब हैं, तो a का मान ज्ञात करें।

(ix) यदि सदिश $\lambda\hat{i} - 2\lambda\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ परस्पर लंब हैं, तो λ का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]**

6. सदिश $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ का सदिश $\vec{b} = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ पर प्रक्षेप ज्ञात कीजिए। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1992]**

7. यदि $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ तो सिद्ध कीजिए कि या तो $\vec{a} = 0$ अथवा $\vec{b} = \vec{c}$ अथवा $\vec{a}$ और $\vec{b} - \vec{c}$ परस्पर लंबवत् हैं।

8. यदि $\hat{a}$ तथा $\hat{b}$ दो मात्रक सदिश (unit vectors) हैं और उनके बीच का कोण θ है तो सिद्ध करें—

(i) $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\hat{a} + \hat{b}|$ (ii) $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}|\hat{a} - \hat{b}|$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1998]**

(iii) $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{|\hat{a} - \hat{b}|}{|\hat{a} + \hat{b}|}$

9. यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो सदिश हैं, जिनके मापांक a तथा b हैं तो सिद्ध करें कि $\left(\frac{\vec{a}}{a^2} - \frac{\vec{b}}{b^2}\right)^2 = \left(\frac{\vec{a} - \vec{b}}{ab}\right)^2$

10. दिखायें कि $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{c} = 2\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}$ समकोण त्रिभुज बनाते हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1999, 2013]**

11. दिखायें कि बिंदु $\vec{a} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{b} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ तथा $\vec{c} = \hat{i} - \hat{j}$ समकोण त्रिभुज बनाते हैं।

12. सदिश विधि से सिद्ध करें—

(i) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1989, 97]**

(ii) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

13. सदिश विधि से सिद्ध करें—

(i) $a = b\cos C + c\cos B$ (ii) $b = c\cos A + a\cos C$

14. यदि त्रिभुज ABC में भुजा BC का मध्य बिंदु D हो तो सिद्ध करें $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

15. सिद्ध कीजिये कि समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

16. सिद्ध कीजिए कि समानांतर चतुर्भुज जिसके विकर्ण बराबर हों एक आयत होता है।

17. सिद्ध कीजिए कि समानांतर चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योग उसके भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

18. सदिश विधि से सिद्ध कीजिए कि $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1992, 2008]**

19. सिद्ध कीजिए कि किसी समचतुर्भुज के विकर्ण बराबर हों तो वह एक वर्ग होगा।

20. (i) यदि $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ दो सदिश हैं तथा $|\vec{\mathbf{a}}| = 2, |\vec{\mathbf{b}}| = 3$ तथा $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 4$ हो तो $|\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}|$ का मान बतायें।

(ii) यदि $\hat{\mathbf{a}}$ एक इकाई सदिश हो तथा $(\vec{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{a}}) \cdot (\vec{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{a}}) = 8$, तो $|\vec{\mathbf{x}}|$ का मान बतायें।

21. किसी गतिमान कण को बिंदु P जिसकी स्थिति सदिश $2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$ है, से बिंदु Q जिसकी स्थिति सदिश $2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ है, तक बल $\vec{\mathbf{F}} = -\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ लगाकार प्रतिस्थापित करने में किया गया कार्य ज्ञात करें।

22. अचल बल $\vec{\mathbf{P}}$ तथा $\vec{\mathbf{Q}}$ जो क्रमश: $2\hat{\mathbf{i}} - 5\hat{\mathbf{j}} + 6\hat{\mathbf{k}}$ और $-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ हैं, एक कण पर कार्य करते हैं। अगर वे कण को A से B पर खिसका दें जिनके सदिश क्रमश: $4\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$ तथा $6\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$ हैं तो उनके द्वारा किया गया कार्य निकालें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1995]

23. एक कण दो अपरिवर्ती बलों $4\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$ तथा $3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$ के लगाए जाने पर, बिंदु $\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ से बिंदु $5\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ तक विस्थापित हो जाता है तो बलों द्वारा किया गया कुल कार्य ज्ञात करें।

उत्तरमाला

1. (i) 0 (ii) −20 (iii) 3 **2.** (i) −7 (ii) $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ (iii) 0

3. (i) $\cos^{-1}\frac{4}{21}$ (ii) $\cos^{-1}\sqrt{\frac{6}{41}}$ (iii) $\frac{\pi}{2}$

5. (i) −5 (ii) 2, −1 (iii) $x = 1$ (iv) $\frac{4}{3}$ (v) −6 (vi) −4

(vii) $p = \frac{2}{3}$ (viii) $\frac{7}{3}$ (ix) 1

6. $\frac{19}{9}$ **20.** (i) $\sqrt{5}$ (ii) 3

21. 7 इकाई **22.** −15 मात्रक **23.** 40 मात्रक

AKC TECHNICAL CLASSES

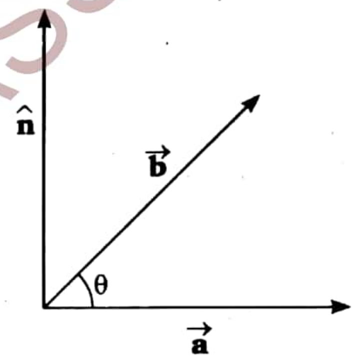
Scanned with CamScanner

अध्याय 7

सदिश या वज्र गुणन (Vector or Cross Product)

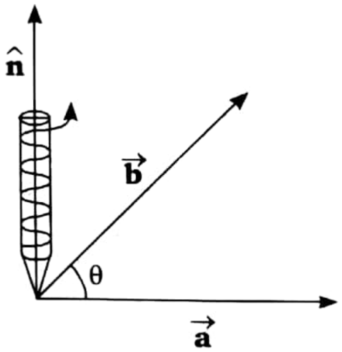
7.1 सदिश (या वज्र) गुणन

परिभाषा : यदि $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ दो अशून्य एवं असमानांतर सदिश हों, तो सदिश गुणन $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ ($\vec{\mathbf{a}}$ क्रॉस $\vec{\mathbf{b}}$) निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है।



$$\therefore \quad \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \sin \theta\, \hat{\mathbf{n}} = ab \sin \theta\, \hat{\mathbf{n}}$$

जहाँ a तथा b क्रमशः सदिश $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ के मापांक हैं, θ उनके बीच का कोण है तथा $\hat{\mathbf{n}}$ इकाई सदिश है जो $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ के समतल पर अभिलंब हैं। $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ तथा $\hat{\mathbf{n}}$ की दिशायें दक्षिणावर्ती तंत्र (Right Handed System) बनाती हैं। स्पष्ट है कि इस सदिश की दिशा दोनों सदिशों $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ के भी लंबवत् होगी।



टिप्पणी : (i) चूँकि $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ के बीच '×' (Cross) का प्रयोग किया गया है अतः इसे वज्रगुणन (cross product) भी कहा जाता है।

(ii) दक्षिणावर्ती तंत्र (Right Handed System) का अर्थ यह है कि यदि $\vec{\mathbf{a}}$ को $\vec{\mathbf{b}}$ की ओर θ कोण से घुमाया जाए तो पेंच (Screw) $\hat{\mathbf{n}}$ की ओर उठेगा। इसे **दक्षिणावर्ती पेंच नियम** (Right Handed Screw Rule) कहते हैं। $\hat{\mathbf{n}}$ का मान घड़ी की दिशा (cloockwise direction) में –ve तथा घड़ी की विपरीत दिशा (anticlockwise direction) में +ve लेते हैं।

7.2 दो सदिशों के सदिश गुणन का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical Meaning of Vector Product)

मान लिया $\vec{\mathbf{OA}} = \vec{\mathbf{a}}; \vec{\mathbf{OB}} = \vec{\mathbf{b}}$ समानांतर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजायें हैं और $\angle AOB = \theta$,

तो $\quad \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{OA}}||\vec{\mathbf{OB}}| \sin \theta\, \hat{\mathbf{n}}$

$\therefore \quad |\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}| = OA \,.\, OB \sin \theta \qquad [\because |\vec{\mathbf{OA}}| = OA, |\vec{\mathbf{OB}}| = OB]$

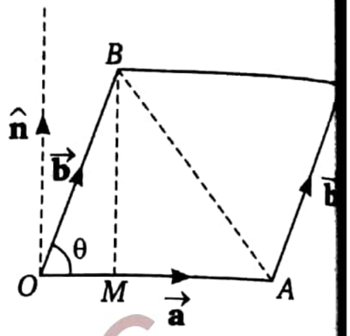
$= 2 \times \left(\dfrac{1}{2} OA \,.\, OB \sin \theta\right) = 2 \times \dfrac{1}{2} OA \,.\, BM \qquad \left[\because \dfrac{BM}{OB} = \sin \theta\right]$

= समानांतर चतुर्भुज $OACB$ का क्षेत्रफल

AK TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

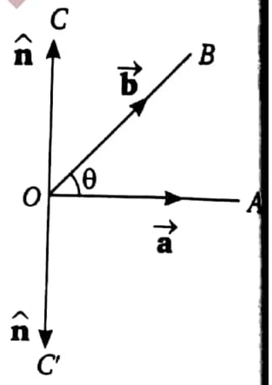


अतः $\overrightarrow{\mathbf{OA}} \times \overrightarrow{\mathbf{OB}} = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} =$ स० च० $OACB$ का सदिश क्षेत्रफल

अतः $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ उस सदिश को निरूपित करता है जिसका परिमाण उस समानांतर चतुर्भुज के सदिश क्षेत्रफल के बराबर होता है जिसकी दो आसन्न भुजायें $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ से दी जाती हैं।

7.3 गुण तथा अन्य परिणाम (Properties and Other Results)

(i) दो सदिशों का सदिश गुणन क्रम विनिमेय नियम (Commutative Law) का पालन नहीं करता। अर्थात् यदि $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ दो अशून्य असमानान्तर सदिश हैं, तो



$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \neq \vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}}$$

प्रमाण : परिभाषा से $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = ab \sin\theta\, \hat{\mathbf{n}}$ ...(i)

तथा $\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}} = (ba \sin\theta)(-\hat{\mathbf{n}}) = -ab \sin\theta\ \hat{\mathbf{n}}$ ...(ii)

$\therefore$ $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} \neq \vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}}$ [(i) तथा (ii) से]

किन्तु (i) तथा (ii) से यह भी स्पष्ट है कि

$$\boxed{\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = -(\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}})}$$

(ii) यदि m कोई अदिश राशि है तो $m(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) = (m\,\vec{\mathbf{a}}) \times \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{a}} \times (m\,\vec{\mathbf{b}})$

(iii) सदिश गुणन वितरण नियम का पालन करता है अर्थात्

$$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{c}}$$

तथा

$$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{c}}$$

(iv) दो अशून्य सदिश समानांतर या संरेख (Collinear) होंगे यदि और केवल यदि (iff) उनका सदिश गुणन शून्य हो, अर्थात् यदि $\theta = 0$ या $180°$ तो $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = 0$

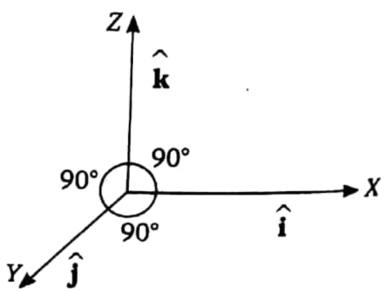
[$\because$ $\sin 0 = 0, \sin\pi = 0$]

(v) दो समान सदिशों का सदिश गुणनफल शून्य होता है। अर्थात् $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{a}} = 0$

प्रमाण : $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{a}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{a}}|\sin 0 . \hat{\mathbf{n}} = a \times a \times 0 \times \hat{\mathbf{n}} = 0$

7.4 परस्पर लंब इकाई सदिशों $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ का सदिश गुणन (Vector Product of Unit Vectors $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ and $\hat{\mathbf{k}}$)

(i) हम जानते हैं कि $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$ तथा $\hat{\mathbf{k}}$ परस्पर लंबवत् इकाई सदिश हैं। अतः इनमें से किन्हीं दो सदिशों से होकर खींचा गया समतल, तीसरे सदिश के लंबवत् होगा। अर्थात् $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ से होकर खींचा गया समतल तीसरे सदिश $\hat{\mathbf{k}}$ के लम्बवत् होगा। इसलिए सदिश $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}$ की अभिदिशा $\hat{\mathbf{k}}$ के अनुदिश होगी।



$\therefore$ $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = |\hat{\mathbf{i}}||\hat{\mathbf{j}}|\sin\frac{\pi}{2}\hat{\mathbf{k}} = 1 \times 1 \times 1 \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}$

KC TECHNICAL CLASSES

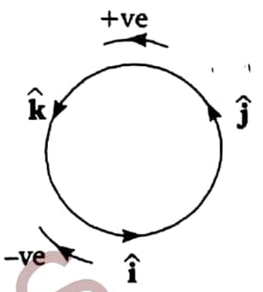
Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अर्थात् $\quad \boxed{\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}}$

इसी तरह $\quad \boxed{\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}};\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}}$

और $\quad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}};\ \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}};\ \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}$



इन परिणामों को दिए गए चित्र के माध्यम से याद रखा जा सकता है।

(ii) $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = 0 \qquad [\because \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{a}} = 0]$

7.5 घटक के पदों में सारणिक रूप में सदिश गुणन (Vector Product in Terms of its Components in Determinant Form)

माना $\quad \vec{\mathbf{a}} = a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}; \qquad \vec{\mathbf{b}} = b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}}$

तब $\quad \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = (a_1\hat{\mathbf{i}} + a_2\hat{\mathbf{j}} + a_3\hat{\mathbf{k}}) \times (b_1\hat{\mathbf{i}} + b_2\hat{\mathbf{j}} + b_3\hat{\mathbf{k}})$

$$= a_1b_1\,(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}}) + a_1b_2\,(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}) + a_1b_3\,(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}}) + (a_2b_1\,(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}})$$
$$+ a_2b_2\,\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} + a_2b_3\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} + a_3b_1\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} + a_3b_2\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} + a_3b_3\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}$$
$$= a_1b_1\,(0) + a_1b_2\,(\hat{\mathbf{k}}) + a_1b_3\,(-\hat{\mathbf{j}}) + a_2b_1\,(-\hat{\mathbf{k}}) + a_2b_2\,(0) + a_2b_3\,(\hat{\mathbf{i}}) + a_3b_1\,(\hat{\mathbf{j}})$$
$$+ a_3b_2\,(-\hat{\mathbf{i}}) + a_3b_3\,(0)$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\hat{\mathbf{i}} - (a_1b_3 - a_3b_1)\,\hat{\mathbf{j}} + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\therefore \quad \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$ [दायें पक्ष को सारणिक के रूप में रखने पर]

7.6 दो सदिशों के बीच का कोण (Angle between Two Vectors)

माना $\vec{\mathbf{a}}$ और $\vec{\mathbf{b}}$ के बीच का कोण θ है, तो $\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \sin\theta\,\hat{\mathbf{n}}$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|} \qquad \Rightarrow \quad \theta = \sin^{-1} = \frac{|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|}$$

7.6.1 दो दिए गए सदिशों के तल पर लंबवत् सदिश (Vector Normal to the Plane of Two Given Vectors)

(i) यदि $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ दो अशून्य तथा असमानांतर सदिश हैं तो

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = |\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}| \sin\theta\,\hat{\mathbf{n}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\hat{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|}}$$

जहाँ $\hat{\mathbf{n}}$ इकाई सदिश है जो $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ के समतल पर लंबवत् है तथा $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{n}}$ दक्षिणावर्त क्रम (Right Handed System) में हैं।

नोट :

- (i) $-\dfrac{\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|}$ भी $\vec{\mathbf{a}}$ तथा $\vec{\mathbf{b}}$ के समतल पर लंबवत् इकाई सदिश है।

AKC TECHNICAL CLASSES

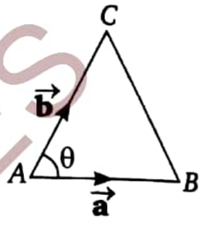
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

• (ii) λ मापांक का सदिश जो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के समतल पर लंबवत् है, का मान

$$\pm \frac{\lambda(\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$ से दिया जाता है।

7.7 अन्य महत्वपूर्ण परिणाम

(i) ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$ जहाँ $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b}$ [चित्र (i)]

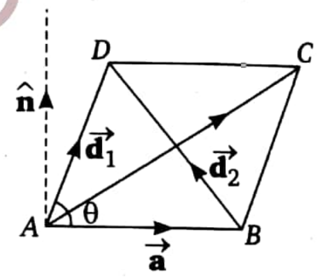


चित्र (i)

(ii) समानांतर चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2|$ जहाँ $\vec{AC} = \vec{d}_1$ तथा $\vec{BD} = \vec{d}_2$ जिसके विकर्ण d_1 तथा d_2 हैं। [चित्र (ii)]

(iii) यदि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ किसी त्रिभुज के शीर्ष हों तो ΔABC का सदिश क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}[\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}]$$



चित्र (ii)

(iv) **तीन बिंदुओं के संरेख (Collinear) होने का प्रतिबंध :** यदि तीन बिंदु संरेख होंगे तो उनसे बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा।

अर्थात् $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 0$

यह तीन बिन्दुओं के संरेख होने का प्रतिबंध है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. यदि $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ और $\vec{b} = 7\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$ तो $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$ तथा उसके मापांक का मान निकालें।

हल : यहाँ $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$; $\vec{b} = 7\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore \quad \vec{a} + \vec{b} = (3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) + (7\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}) = 10\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

तथा $\quad \vec{a} - \vec{b} = (3\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}) - (7\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}) = 3\hat{i} - 7\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{j} - 5\hat{k} - 6\hat{k} = -4\hat{i} + 7\hat{j} - 11\hat{k}$

$\therefore \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = (10\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \times (-4\hat{i} + 7\hat{j} - 11\hat{k})$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 10 & 1 & 1 \\ -4 & 7 & -11 \end{vmatrix} = \hat{i}(-11 - 7) - \hat{j}(-110 + 4) + \hat{k}(70 + 4)$$

$$= -18\hat{i} + 106\hat{j} + 74\hat{k}$$

$\therefore \quad |(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = \sqrt{(-18)^2 + (106)^2 + (74)^2} = \sqrt{17036}$

अतः $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = -18\hat{i} + 106\hat{j} + 74\hat{k}; |(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})| = \sqrt{17036}$ **उत्तर**

उदाहरण 2. (i) सदिश $2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ के लंबवत् इकाई सदिश का मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

(ii) यदि $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ तो $\vec{A} \cdot \vec{B}$ तथा $\vec{A} \times \vec{B}$ का मान ज्ञात करें। एक इकाई सदिश ज्ञात करें जो $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ दोनों पर लंब हो।
इनके बीच के कोण का sine तथा cosine प्राप्त करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1996]**

(iii) परिमाण 9 का वह सदिश प्राप्त करें जो $4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $-2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ दोनों पर लंब हो।

हल : (i) माना $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$; $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

तो $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\hat{i}(-1+1) - \hat{j}(2+1) + \hat{k}(2+1)$$

$$= \hat{i}(0) - 3\hat{j} + 3\hat{k} = -3\hat{j} + 3\hat{k}$$

$\therefore$ $$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$\therefore$ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ पर लंब इकाई सदिश $$\hat{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{-3\hat{j} + 3\hat{k}}{3\sqrt{2}} = \frac{3(-\hat{j} + \hat{k})}{3\sqrt{2}} = \frac{-\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{2}}$$ उत्तर

(ii) यहाँ $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$; $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \cdot (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 2 \times 6 + 2 \times (-3) + (-1)(2) = 12 - 6 - 2 = 4$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) \times (6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(4-3) - \hat{j}(4+6) + \hat{k}(-6-12) = \hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k}$$

$\therefore$ $$|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{1^2 + (-10)^2 + (-18)^2} = \sqrt{1 + 100 + 324} = \sqrt{425} = 5\sqrt{17}$$

माना $\hat{n}$ वह इकाई सदिश है जो $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ लंब है, तो $$\hat{n} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{\hat{i} - 10\hat{j} - 18\hat{k}}{5\sqrt{17}}$$

पुनः $$|\vec{A}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7$$

यदि $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के बीच का कोण θ हो तो

$$\sin\theta = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{5\sqrt{17}}{3 \times 7} = \frac{5\sqrt{17}}{21} \quad \text{तथा} \quad \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{4}{3 \times 7} = \frac{4}{21}$$

(iii) माना $\vec{a} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$; $\vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ तो $$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (2-3)\hat{i} - (-8+6)\hat{j} + (4-2)\hat{k} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

तथा $$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

अब सूत्र से λ मापांक का सदिश जो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के तल पर लंब हो $=\dfrac{\lambda(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$; यहाँ $\lambda=9$

$\therefore$ अभीष्ट सदिश $=9\left\{\dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}\right\}=\dfrac{9}{3}(-\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})=-3\hat{i}+6\hat{j}+6\hat{k}$ **उत्तर**

उदाहरण 3. यदि किसी समानांतर चतुर्भुज के विकर्ण $3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ तथा $\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ हैं, तो समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1992]**

हल : माना $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$; $\vec{b}=\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$

$$\therefore \quad \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 1 & -2\\ 1 & -3 & 4\end{vmatrix}=(4-6)\hat{i}-(12+2)\hat{j}+(-9-1)\hat{k}=-2\hat{i}-14\hat{j}-10\hat{k}$$

तथा $|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+(-14)^2+(-10)^2}=\sqrt{300}$

$\therefore$ समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $=\dfrac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{300}$ वर्ग इकाई

उदाहरण 4. उस समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसकी आसन्न भुजायें $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ तथा $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ हैं।

हल : माना $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$; $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ तो

सामानान्तर चतुर्भुज का सदिश क्षेत्रफल $=\vec{a}\times\vec{b}$

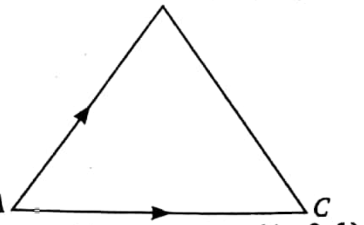
$$=(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})\times(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$$

$$=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}=\hat{i}(2+6)-\hat{j}(1-9)+\hat{k}(-2-6)=8\hat{i}+8\hat{j}-8\hat{k}$$

$\therefore$ समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{8^2+8^2+(-8)^2}=8\sqrt{3}$ वर्ग इकाई

उदाहरण 5. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसके शीर्ष $A(3,-1,2)$, $B(1,-1,-3)$ तथा $C(4,-3,1)$ हैं।

हल : माना $\vec{a},\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ बिन्दुओं A, B तथा C के स्थिति सदिश हैं, तो $\vec{a}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$ तथा $\vec{c}=4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$



अब ΔABC का क्षेत्रफल $=\dfrac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$

अतः $\vec{AB}=B$ का स्थिति सदिश $-A$ का स्थिति सदिश

$$=\vec{b}-\vec{a}=(\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})-(3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})$$
$$=-2\hat{i}+0\hat{j}-5\hat{k}=-2\hat{i}-5\hat{k}$$

तथा $\vec{AC}=C$ का स्थिति सदिश $-A$ का स्थिति सदिश

$$=\vec{c}-\vec{a}=(4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})-(3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})=\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$$\therefore \quad \vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 0 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}(0-10)-\hat{j}(2+5)+\hat{k}(4-0) = -10\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{AB}\times\vec{AC}| = \sqrt{(-10)^2+(-7)^2+(4)^2} = \sqrt{100+49+16} = \sqrt{165}$$

$\therefore$ ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\sqrt{165}$ वर्ग इकाई

नोट :

- इसे $\Delta = \frac{1}{2}|[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}]|$ से भी निकाला जा सकता है।

उदाहरण 6. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन ऐसे सदिश हैं कि $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c}$ तथा $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{c}, \vec{a}\neq 0$ तो दिखायें $\vec{b} = \vec{c}$.

हल : यहाँ $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{c}$ तथा $\vec{a}\neq 0$

$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}-\vec{a}.\vec{c} = 0 \qquad \Rightarrow \vec{a}.(\vec{b}-\vec{c}) = 0$

$\Rightarrow \vec{b}-\vec{c} = 0$ या $\vec{a}\perp\vec{b}-\vec{c} \qquad [\because \vec{a}\neq 0]$

$\Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$ या $\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$ ...(i)

पुनः $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{c}$ तथा $\vec{a}\neq 0$

$\Rightarrow \vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c} = 0 \qquad \Rightarrow \vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c}) = 0$

$\Rightarrow \vec{b}-\vec{c} = 0$ या $\vec{a}||(\vec{b}-\vec{c}) \qquad [\because \vec{a}\neq 0]$

$\Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$ या $\vec{a}||(\vec{b}-\vec{c})$ ...(ii)

$\therefore$ (i) तथा (ii) से $\vec{b} = \vec{c}$ क्योंकि $\vec{a}$ एक साथ $\vec{b}-\vec{c}$ के समानांतर तथा लंब नहीं हो सकता।

उदाहरण 7. यदि $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}\times\vec{d}$ तथा $\vec{a}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{d}$, तो दिखायें $\vec{a}-\vec{d}$ तथा $\vec{b}-\vec{c}$ समानांतर सदिश हैं, जहाँ $\vec{a}\neq\vec{d}$ तथा $\vec{b}\neq\vec{c}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(O)]**

हल : हम जानते हैं कि दो सदिश समानांतर होंगे यदि उनका सदिश गुणन शून्य होगा।

दिया गया है : $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}\times\vec{d}$ तथा $\vec{a}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{d}$ ...(1)

जहाँ $\vec{a}\neq\vec{d}, \vec{b}\neq\vec{c}$

अब $(\vec{a}-\vec{d})\times(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{d}\times\vec{b}+\vec{d}\times\vec{c}$

$= \vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d}-\vec{c}\times\vec{d} \quad [\because \vec{r_1}\times\vec{r_2} = -\vec{r_2}\times\vec{r_1}]$

$= \vec{c}\times\vec{d}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{c}-\vec{c}\times\vec{d}$

$= 0 \qquad$ [(1) से]

किन्तु $\vec{a}-\vec{d} = 0$ तथा $\vec{b}-\vec{c} = 0$ सम्भव नहीं। $[\because \vec{a}\neq\vec{d}, \vec{b}\neq\vec{c}]$

$\therefore (\vec{a}-\vec{d})||(\vec{b}-\vec{c})$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

उदाहरण 8. सिद्ध करें तीन बिन्दु A, B तथा C संरेख होंगे यदि और केवल यदि $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 0$ जहाँ $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ क्रमशः बिन्दु A, B तथा C के स्थिति सदिश हैं।

हल : A, B तथा C संरेख हैं। $\Leftrightarrow$ $\vec{AB}$ तथा $\vec{BC}$ समान्तर सदिश हैं $\Leftrightarrow$ $\vec{AB} \times \vec{BC} = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{b}) = 0$ $\quad [\because \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}; \vec{BC} = \vec{c} - \vec{a}]$

$\Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{c} - (\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{b} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{b}) = 0$

$\Leftrightarrow (\vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a}) - (0 - \vec{a} \times \vec{b}) = 0$ $\quad [\because \vec{a} \times \vec{c} = -\vec{c} \times \vec{a}]$

$\Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = 0$

उदाहरण 9. दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लिए सिद्ध करें :

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} . \vec{b})^2 = \begin{vmatrix} \vec{a} . \vec{a} & \vec{a} . \vec{b} \\ \vec{a} . \vec{b} & \vec{b} . \vec{b} \end{vmatrix}$$

अथवा $\quad |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} . \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$

हल : $\because \quad \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta\, \hat{n} \quad \therefore \quad |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2\theta$

$$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2\theta) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2\theta$$

$$= |\vec{a}|^2 \times |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta)^2 = |\vec{a}|^2 \times |\vec{b}|^2 - (\vec{a} . \vec{b})^2$$

अर्थात् $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} . \vec{b})^2$ **सिद्ध हुआ।**

पुनः $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} . \vec{b})^2 = \begin{vmatrix} |\vec{a}|^2 & \vec{a} . \vec{b} \\ \vec{a} . \vec{b} & |\vec{b}|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a} . \vec{a} & \vec{a} . \vec{b} \\ \vec{a} . \vec{b} & \vec{b} . \vec{b} \end{vmatrix}$ **सिद्ध हुआ।**

इस तरह $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} . \vec{b})^2$

$\Rightarrow \quad |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} . \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$

सिद्ध हुआ।

टिप्पणी : यह **लैगरांज तत्समक (Lagrange's Indentity)** के नाम से जाना जाता है तथा सूत्र के रूप में प्रयुक्त होता है।

उदाहरण 10. यदि $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 2$ तथा $\vec{a} . \vec{b} = 12$ तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ का मान बतायें।

हल : सूत्र से $(\vec{a} . \vec{b})^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \quad \therefore \quad (12)^2 + |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 10^2 \times 2^2$

या $\quad |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = 400 - 144 = 256 \quad \therefore \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{256} = 16$ **उत्तर**

उदाहरण 11. किन्हीं तीन सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के लिए सिद्ध करें कि

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = 0$$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2011, 18(SB)]**

हल : दिया गया व्यंजक $= \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$

$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$ $\quad$ [वितरण नियम से]

$= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{c}$ $\quad [\because \vec{r_1} \times \vec{r_2} = -\vec{r_2} \times \vec{r_1}]$

$= 0$

सिद्ध हुआ।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

उदाहरण 12. यदि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ तीन ऐसे सदिश हों जिनके लिए $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ तो सिद्ध करें $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

[उ० प्र० डिप्लेमा 2012]

हल : दिया गया है, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$

$\Rightarrow \quad \vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times 0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=0$

$\Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{a}=0 \qquad [\because \vec{a}\times\vec{a}=0,\ \vec{a}\times\vec{c}=-\vec{c}\times\vec{a}]$

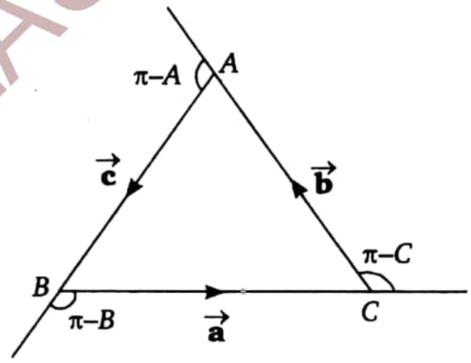
$\Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$ ...(i)

इसी तरह $\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{b}\times 0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ ...(ii)

$\therefore$ (i) तथा (ii) से, $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 13. सदिश विधि से सिद्ध करें :

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



हल : मान लिया ΔABC में $\vec{BC}=\vec{a},\ \vec{CA}=\vec{b}$ तथा $\vec{AC}=\vec{c}$

तो सदिश योग नियम से $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=0$

अर्थात् $\vec{c}+\vec{a}+\vec{b}=0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0$

$\Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}=0$

$\Rightarrow \quad 0+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{c}\times\vec{a}=0 \qquad [\because \vec{a}\times\vec{a}=0, \vec{a}\times\vec{c}=-\vec{c}\times\vec{a}]$

$\Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$ ...(1)

इसी प्रकार $\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ ...(2)

$\therefore$ (1) तथा (2) से

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a} \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{b}\times\vec{c}|=|\vec{c}\times\vec{a}|$$

$\Rightarrow \quad |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\pi-C)=|\vec{b}||\vec{c}|\sin(\pi-A)=|\vec{c}||\vec{a}|\sin(\pi-B)$

$\Rightarrow \quad ab\sin C=bc\sin A=ca\sin B \qquad [|\vec{a}|=a, |\vec{b}|=b, |\vec{c}|=c$ लेने पर]

$\Rightarrow \quad \frac{ab\sin C}{abc}=\frac{bc\sin A}{abc}=\frac{ca\sin B}{abc} \qquad \Rightarrow \quad \frac{\sin C}{c}=\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}$

$\Rightarrow \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ **सिद्धम्**

उदाहरण 14. सिद्ध करें :

$$\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})=2\vec{a}$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]

हल : माना $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$

तो $\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i}) =\hat{i}\times[a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}]\times\hat{i}$

$\qquad =\hat{i}\times[a_1\hat{i}\times\hat{i}+a_2\hat{j}\times\hat{i}+a_3\hat{k}\times\hat{i}]$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$= \hat{\mathbf{i}} \times [a_1 (0) + a_2 (-\hat{\mathbf{k}}) + a_3 (\hat{\mathbf{j}})] \quad [\because \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = 0, \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}]$$

$$= \hat{\mathbf{i}} \times [a_3 \hat{\mathbf{j}} - a_2 \hat{\mathbf{k}}] = a_3 \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} - a_2 \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = a_3 \hat{\mathbf{k}} + a_2 \hat{\mathbf{j}} \quad \ldots(1)$$

इसी तरह
$$\hat{\mathbf{j}} \times (\vec{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{j}}) = a_1 \hat{\mathbf{i}} + a_3 \hat{\mathbf{k}} \quad \ldots(2)$$

तथा
$$\hat{\mathbf{k}} \times (\vec{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{k}}) = a_2 \hat{\mathbf{j}} + a_1 \hat{\mathbf{i}} \quad \ldots(3)$$

$(1) + (2) + (3)$ से

$$\hat{\mathbf{i}} \times (\vec{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{i}}) + \hat{\mathbf{j}} (\vec{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{j}}) + \hat{\mathbf{k}} (\vec{\mathbf{a}} + \hat{\mathbf{k}}) = a_3 \hat{\mathbf{k}} + a_2 \hat{\mathbf{j}} + a_1 \hat{\mathbf{i}} + a_3 \hat{\mathbf{k}} + a_2 \hat{\mathbf{j}} + a_1 \hat{\mathbf{i}}$$

$$= 2 (a_1 \hat{\mathbf{i}} + a_2 \hat{\mathbf{j}} + a_3 \hat{\mathbf{k}}) = 2 \vec{\mathbf{a}}$$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 15. यदि $\vec{\mathbf{V}} = \dfrac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ तो सिद्ध करें :

(i) $\vec{\mathbf{V}} . \vec{\mathbf{V}} = 1$ (ii) $\vec{\mathbf{V}} \times \vec{\mathbf{V}} = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1995]**

हल : (i) $\vec{\mathbf{V}} = \dfrac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{i}} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{j}} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{k}}$

$$\therefore \quad \vec{\mathbf{V}} . \vec{\mathbf{V}} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{k}} \right)$$

$$\cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{j}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{\mathbf{k}} \right)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\times \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \times \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

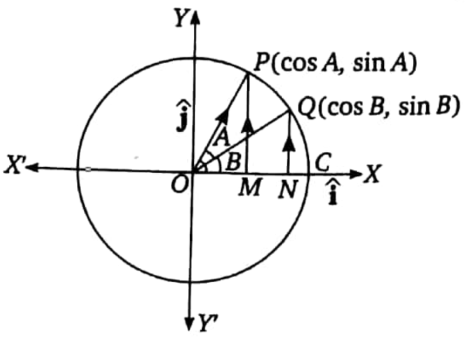
$$= \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = 1$$ **सिद्ध हुआ।**

तथा $\vec{\mathbf{V}} \times \vec{\mathbf{V}} = 0$ [समान सदिशों का सदिश गुणन शून्य होता है।]

● ज्यामिति तथा त्रिकोणमिति पर आधारित प्रश्न :

उदाहरण 16. सदिश विधि से सिद्ध करें :

$$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$



हल : चित्र में इकाई त्रिज्या का एक वृत्त खींचा गया है जिसका केन्द्र O है। माना P तथा Q वृत्त की परिधि पर दो बिंदु हैं।

P तथा Q से वृत्त की त्रिज्या OC पर लंब PM तथा QN डाले गए हैं।

माना केन्द्र बिंदु O मूल बिंदु OX, x-अक्ष एवं OY. y-अक्ष हैं; चित्र में

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

माना $\angle POX = A$ तथा $\angle QOX = B$ तो $\angle POQ = A - B$

अब $\overrightarrow{\mathbf{OQ}} \times \overrightarrow{\mathbf{OP}} = |\overrightarrow{\mathbf{OQ}}||\overrightarrow{\mathbf{OP}}| \sin(A - B)\,\hat{\mathbf{n}}$

$= 1 \times 1 \times \sin(A - B)\,\hat{\mathbf{n}}$ $\quad [\because |\overrightarrow{\mathbf{OP}}| = |\overrightarrow{\mathbf{OQ}}| = 1 =$ त्रिज्या$]$

$\therefore \quad |\overrightarrow{\mathbf{OQ}} \times \overrightarrow{\mathbf{OP}}| = \sin(A - B)$ $\quad [\because |\hat{\mathbf{n}}| = 1]$ ...(1)

$\overrightarrow{\mathbf{OQ}} = \overrightarrow{\mathbf{ON}} + \overrightarrow{\mathbf{NQ}} = ON\,\hat{\mathbf{i}} + NQ\,\hat{\mathbf{j}} = \cos B\,\hat{\mathbf{i}} + \sin B\,\hat{\mathbf{j}}$ $\quad \left[\because \cos B = \frac{ON}{OQ} = \frac{ON}{1}; \sin B = \frac{QN}{OQ} = \frac{QN}{1}\right]$

तथा $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{OM}} + \overrightarrow{\mathbf{MP}} = OM\,\hat{\mathbf{i}} + MP\,\hat{\mathbf{j}} = \cos A\,\hat{\mathbf{i}} + \sin A\,\hat{\mathbf{j}}$ $\quad \left[\because \cos A = \frac{OM}{1}, \sin A = \frac{PM}{1}\right]$

$\therefore \quad \overrightarrow{\mathbf{OQ}} \times \overrightarrow{\mathbf{OP}} = (\cos B\,\hat{\mathbf{i}} + \sin B\,\hat{\mathbf{j}}) \times (\cos A\,\hat{\mathbf{i}} + \sin A\,\hat{\mathbf{j}})$

$= \cos A \cos B\,\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} + \cos B \sin A\,\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} + \sin B \cos A\,\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} + \sin B \sin A\,\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}$

$= 0 + \cos B \sin A\,\hat{\mathbf{k}} - \sin B \cos A\,\hat{\mathbf{k}} + 0$ $\quad [\because \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = 0]$

$= (\sin A \cos B - \cos A \sin B)\,\hat{\mathbf{k}}$

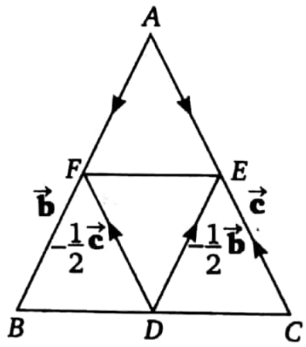
$\therefore \quad |\overrightarrow{\mathbf{OQ}} \times \overrightarrow{\mathbf{OP}}| = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ ...(2)

$\therefore$ (1) तथा (2) से $\quad \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ **सिद्धम्**

उदाहरण 17. यदि D, E तथा F ΔABC में क्रमशः भुजा BC, CA तथा AB के मध्य बिंदु हैं, तो सिद्ध करें

$$\text{क्षेत्रफल } (\Delta DEF) = \frac{1}{4} \text{ क्षेत्रफल } (\Delta ABC)$$

हल : माना ΔABC में शीर्ष A के सापेक्ष B तथा C के स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{\mathbf{b}}$ तथा $\vec{\mathbf{c}}$ हैं तथा D, E तथा F क्रमशः भुजाओं BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु हैं



$\therefore \quad D$ का स्थिति सदिश $= \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}})$;

E का स्थिति सदिश $= \frac{1}{2}\vec{\mathbf{c}}$; F का स्थिति सदिश $= \frac{1}{2}\vec{\mathbf{b}}$

$\overrightarrow{\mathbf{DE}} = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{c}} - \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}})$; $\quad \overrightarrow{\mathbf{DF}} = -\frac{1}{2}\vec{\mathbf{b}} - \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}) = -\frac{1}{2}\vec{\mathbf{c}}$

अब ΔDEF का सदिश क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times \overrightarrow{\mathbf{DE}} \times \overrightarrow{\mathbf{DF}} = \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{2}\vec{\mathbf{b}}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\vec{\mathbf{c}}\right)\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}(\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}})\right]$

$= \frac{1}{4}\Delta ABC$ का सदिश क्षेत्रफल

अतः ΔABC का क्षेत्रफल $= 4 \times \Delta DEF$ का क्षेत्रफल **सिद्धम्**

उदाहरण 18. सिद्ध कीजिए $(\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}) \times (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = 2\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}$ तथा इसकी ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

हल : बायाँ पक्ष $= (\vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}}) \times (\vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}) = \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}} - \vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{b}}$

AKC TECHNICAL CLASSES

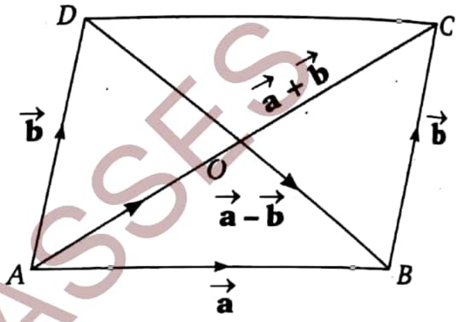
Scanned with CamScanner

$$= 0 + \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} - 0 \qquad \left[\because \vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} = 0 \atop \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}\right]$$

$$= 2\vec{a} \times \vec{b} \qquad \ldots(1)$$

● ज्यामितीय व्याख्या :

माना $ABCD$ एक समानांतर चतुर्भुज है तथा उसके विकर्ण AC तथा BD एक दूसरे को O पर समद्विभाजित करते हैं।



माना $\quad \vec{AB} = \vec{a}$ तथा $\vec{AD} = \vec{b}$

$\therefore \quad \Delta ABC$ से $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \Rightarrow \vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

$\therefore \quad \Delta ABD$ से $\vec{AD} + \vec{DB} = \vec{AB}$

$\Rightarrow \quad \vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{a} - \vec{b}$

अब $\quad (\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b}) \Rightarrow \vec{DB} \times \vec{AC} = 2(\vec{AB} \times \vec{AD})$

अत: किसी समानांतर चतुर्भुज के विकर्णों द्वारा बने समानांतर चतुर्भुज को क्षेत्रफल उस समानांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का दूना होता है।

महत्वपूर्ण सूत्र

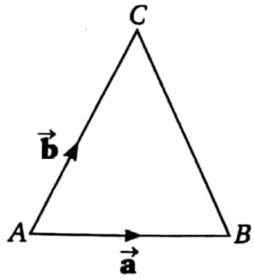
1. $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta\, \hat{n}$, जहाँ $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण θ है और $\hat{n}$ दोनों सदिशों तथा उनके समतल पर लंब इकाई सदिश है।

2. $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin\theta$, जहाँ $|\vec{a}| = a, |\vec{b}| = b$

3. $\sin\theta = \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

4. $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ पर लंब इकाई सदिश $\hat{n} = \dfrac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$

5. (i) Δ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$



(ii) $\Delta = \frac{1}{2}|(\vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{C} + \vec{C} \times \vec{A})|$,

जहाँ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ त्रिभुज के शीर्षों के स्थिति सदिश हैं।

6. (i) समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= |\vec{a} \times \vec{b}|$, जहाँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समानान्तर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजायें हैं,

(ii) समानान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}|\vec{d_1} \times \vec{d_2}|$,

जहाँ $\vec{d_1}$ तथा $\vec{d_2}$ समानान्तर चतुर्भुज के विकर्ण हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

7. यदि $\vec{a} \parallel \vec{b}$ तो (i) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

(ii) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$, जहाँ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$; $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

8. यदि $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ किन्हीं तीन बिन्दुओं के स्थिति सदिश हों, तो तीनों बिंदु समरेखीय होंगे यदि $\vec{A} \times \vec{B} + \vec{B} \times \vec{C} + \vec{C} \times \vec{A} = 0$

9. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, जहाँ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$; $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

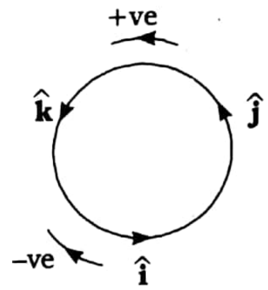
10. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ तथा $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ अर्थात् सदिश गुणन क्रम-विनिमेय नियम का पालन नहीं करता।

11. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ [वितरण नियम]

12. (i) $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$; $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$; $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

(ii) $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$; $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$; $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

(iii) $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$



13. $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} . \vec{b})^2$ [लैगरांज आइडेंटिटी]

प्रश्नावली 7.1

1. (a) यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ तो निम्नलिखित का मान निकालें :

(i) $\vec{a} \times \vec{b}$ (ii) $\vec{b} \times \vec{a}$ (iii) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$

(b) (i) यदि सदिश $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तो $\vec{a} \times \vec{b}$ का मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2014]

(ii) यदि सदिश $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ तो $\vec{a} \times \vec{b}$ का मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

2. (i) यदि $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ का मान बतायें।

(ii) यदि $\vec{a} = (\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) \times (\hat{i} + 3\hat{k})$ तो $|\vec{a}|$ का मान बतायें।

(iii) यदि $\vec{a} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$ तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ का मान बतायें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]

3. (i) यदि $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ तो वह इकाई सदिश ज्ञात करें जो सदिश $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ पर लम्ब है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1994, 2016]

(ii) उस इकाई सदिश को ज्ञात करें जो सदिश $\hat{i} - 2\hat{j}$ तथा $3\hat{j} - \hat{k}$ पर लंब है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1990]**

4. यदि $\vec{\alpha} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{\beta} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{\gamma} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तब $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) . (\vec{\alpha} \times \vec{\gamma})$ का मान बतायें।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

5. (i) दिखाइए कि सदिशों $3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ और $2\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ के मध्यस्थ कोण का sine $(2/\sqrt{7})$ है।

(ii) सदिशों $\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $2\hat{i}-4\hat{j}+\hat{k}$ के बीच के कोण का ज्या (sine) ज्ञात कीजिए।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(S)]

6. (i) यदि $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$, $\vec{b}=3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}$ और $\vec{c}=6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ तो दिखायें कि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ परस्पर लंब हैं। $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{c}\times\vec{a}$ तथा $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{a})$ का मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1993]

(ii) यदि सदिश $\vec{a}=3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{c}=\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ सिद्ध कीजिए $\vec{a}\times\vec{b}$ सदिश $\vec{c}$ पर लंब हैं।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

7. यदि $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=7$ और $\vec{a}\times\vec{b}=3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k}$ तो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात करें।

[**संकेत :** $\sin\theta=\dfrac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

8. यदि $(2\hat{i}+6\hat{j}+27\hat{k})\times(\hat{i}+\lambda\hat{j}+\mu\hat{k})=0$ तो λ तथा μ का मान ज्ञात करें।

9. यदि सदिश जिसका परिमाण 49 है, $2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$ तथा $3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}$ पर लंब है, तो सदिश प्राप्त करें।

10. (i) यदि किसी समानांतर चतुर्भुज की आसन्न भुजायें $3\hat{i}+4\hat{j}$ तथा $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ हों तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात करें।

(ii) उस समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसकी आसन्न भुजायें $2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ और $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ हैं।

11. उस समानांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसके विकर्ण

(i) $3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ तथा $\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ हैं।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1992]

(ii) $2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$ तथा $3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}$

12. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसकी दो आसन्न भुजायें सदिश $2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $10\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ से दी जाती हैं।

13. यदि किसी त्रिभुज के शीर्षों A, B तथा C के स्थिति सदिश क्रमशः $\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$, $2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ तथा $-\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

14. सिद्ध करें कि

(i) $(\vec{a}\times\vec{b})^2=a^2b^2-(\vec{a}.\vec{b})^2$, जहाँ $|\vec{a}|=a, |\vec{b}|=b$

(ii) $(\vec{a}\times\vec{b})^2=\begin{vmatrix}\vec{a}.\vec{a} & \vec{a}.\vec{b}\\ \vec{a}.\vec{b} & \vec{b}.\vec{b}\end{vmatrix}$

(iii) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}+\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=0$

(iv) $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]

15. यदि $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=5$ और $|\vec{a}\times\vec{b}|=25$ तो $\vec{a}.\vec{b}$ का मान प्राप्त करें।

16. सिद्ध करें बिंदु $-2\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$, $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $7\hat{i}-\hat{k}$ एक रैखिक हैं।

17. सिद्ध करें $\Delta=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|$, जहाँ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ त्रिभुज के शीर्षों के स्थिति सदिश हैं।

18. यदि $\vec{A}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{B}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{C}=\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ तो

(i) $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ ज्ञात करें।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(ii) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ ज्ञात करें तथा दिखायें $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}\neq\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$.

19. निम्नलिखित को जाँचें :

(a) (i) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ (ii) $(\vec{c}+\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{c}$

जबकि $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$; $\vec{b}=2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$; $\vec{c}=\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$

(b) यदि $\vec{A}=\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{B}=\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{C}=\hat{i}-\hat{k}$ तो दिखायें $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$ तथा नियम का नाम दें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]**

20. यदि $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ तो सिद्ध करें $\vec{a}=0$ या $\vec{b}=0$ या $\vec{a}$ तथा $\vec{b}-\vec{c}$ समानांतर सदिश हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1991]**

21. यदि $\vec{a}+2\vec{b}$ तथा $5\vec{a}-4\vec{b}$ परस्पर लंब हो, जहाँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ इकाई सदिश है, तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण बताओं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]**

22. सदिश विधि से सिद्ध करें $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1990]**

उत्तरमाला

1. (a) (i) $10\hat{i}+3\hat{j}+11\hat{k}$ (ii) $-10\hat{i}-3\hat{j}-11\hat{k}$ (iii) $-20\hat{i}-6\hat{j}-22\hat{k}1$

(b) (i) $4\hat{i}-2\hat{j}-4\hat{k}$ (ii) $2\hat{i}+7\hat{j}+3\hat{k}$

2. (i) $\sqrt{26}$ (ii) $\sqrt{115}$ (iii) $5\sqrt{82}$

3. (i) $\dfrac{7\hat{i}-6\hat{j}-10\hat{k}}{\sqrt{185}}$ (ii) $\dfrac{2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}}{\sqrt{14}}$

4. -74 **5.** (ii) $\frac{1}{7}\sqrt{\frac{115}{3}}$ **6.** $42\hat{i}+14\hat{j}-21\hat{k}$, $21\hat{i}-42\hat{j}+14\hat{k}$, 0

7. $\frac{\pi}{6}$ **8.** $\lambda=3, \mu=\frac{27}{2}$

9. $42\hat{i}+14\hat{j}-21\hat{k}$ **10.** (i) $\sqrt{26}$ (ii) $11\sqrt{5}$

11. (i) $5\sqrt{3}$ वर्ग इकाई (ii) $\frac{49}{2}$ वर्ग इकाई

12. $\sqrt{74}$ वर्ग इकाई **13.** $\frac{1}{2}\sqrt{155}$. वर्ग इकाई **15.** 60

18. (i) $24\hat{i}+7\hat{j}-5\hat{k}$ (ii) $15\hat{i}+15\hat{j}-15\hat{k}$ **21.** $\frac{\pi}{3}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अध्याय

8

अदिश त्रिगुणनफल (Scalar Triple Product)

8.1 परिभाषा (Definitions)

यदि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ कोई तीन सदिश हैं तो अदिश गुणन $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ को $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ का अदिश त्रिगुणनफल कहते हैं तथा इसे $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ या $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ से निरूपित करते हैं।

अत: $\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

इसका मान उस समानांतर षट्फलक के आयतन के बराबर होता है जिसकी संगामी कोरें सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ से दी जाती हैं।

8.2 अदिश त्रिगुणनफल $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ का मान सारणिक के रूप में ज्ञात करना (Value of $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ in Determinant Form)

माना $\quad \vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k};\ \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k};\ \vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$

अब $$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \hat{i}(b_2c_3 - b_3c_2) - \hat{j}(b_1c_3 - b_3c_1) + \hat{k}(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$\therefore\ \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})\cdot[(b_2c_3 - b_3c_2)\hat{i} - (b_1c_3 - b_3c_1)\hat{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\hat{k}]$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

अर्थात् $$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

8.3 अदिश त्रिगुणनफल का ज्यामितीय निरूपण (Geometrical Representation)

माना $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ तथा $\vec{OC} = \vec{c}$, किसी समानांतर षट्फलक के संगामी कोर हैं, तब सदिश $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के तल पर लंब होगा।

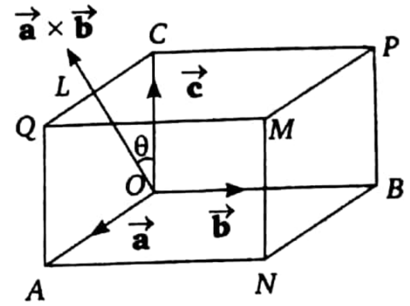
माना θ $\vec{a}\times\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के बीच का कोण है।

अब $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ $\qquad$ [(•) तथा (×) को परस्पर बदलने पर]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner



$= |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \cos\theta$

= समानांतर चतुर्भुज *OANB* का क्षेत्रफल × $\vec{c}$ का $\vec{a} \times \vec{b}$ की दिशा में प्रक्षेप

= समानांतर चतुर्भुज *OANB* का क्षेत्रफल × *OL*

= संगामी कोर $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ वाले समानांतर षट्फलक का आयतन

इस तरह अदिश त्रिगुणन $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ का मान उस समानांतर षट्फलक के आयतन के बराबर होगा जिसकी संगामी कोरें $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ से दी जाती हैं।

8.4 अदिश त्रिगुणनफल के गुण (Properties of Scalar Triple Product)

1. यदि अदिश त्रिगुणनफल में $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ चक्रीय क्रम में लिए गए हों तो इसका मान अपरिवर्तित रहता है।

अर्थात् $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$

2. यदि सदिशों के चक्रीय क्रम में परिवर्तन हो जाता है तो गुणनफल का मान अपरिवर्तित रहता है किन्तु उनका चिह्न बदल जाता है।

अर्थात् $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = -[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}] = -[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}] = -[\vec{c}\ \vec{b}\ \vec{a}]$

3. किसी अदिश त्रिगुणनफल में डॉट (·) तथा 'क्रॉस' (×) को परस्पर बदला जा सकता है यदि चक्रीय क्रम में कोई परिवर्तन न किया गया हो

अर्थात् $(\vec{a} \times \vec{b}) . \vec{c} = \vec{a} . (\vec{b} \times \vec{c});\ \vec{b} . (\vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{b} \times \vec{c}) . \vec{a}$ आदि।

4. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ कोई तीन सदिश हों तथा λ कोई अदिश हो तो $[\lambda\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \lambda[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

5. अदिश त्रिगुणनफल का मान शून्य होता है यदि उनमें से कोई दो बराबर अथवा समानांतर या संरेखीय हों।

अर्थात् $[\vec{a}\ \vec{a}\ \vec{b}] = [\vec{a}\ \lambda\vec{b}\ \vec{b}] = [\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{c}] = 0$ आदि।

6. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ कोई चार सदिश हों तो $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\ \vec{d}] = [\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{d}] + [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]$

प्रमाण : $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\ \vec{d}] = [(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}] . \vec{d} = (\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}) . \vec{d}$

$(\vec{a} \times \vec{c}) . \vec{d} + (\vec{b} \times \vec{c}) . \vec{d} = [\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{d}] + [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]$ **सिद्ध हुआ।**

7. कोई तीन अशून्य (non-zero) तथा असंरेखीय (Non-collinear) सदिश समतलीय (Coplanar) होंगे यदि और केवल यदि $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$, अर्थात् $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समतलीय हैं $\Leftrightarrow [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$

8. चार बिन्दु जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ हैं, समतलीय होंगे यदि $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}] + [\vec{a}\ \vec{d}\ \vec{c}] + [\vec{d}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

9. $[\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}] = [\hat{j}\ \hat{k}\ \hat{i}] = [\hat{k}\ \hat{i}\ \hat{j}] = 1$

10. तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ एक दक्षिणावर्त क्रम (Right Handed System) में होंगे यदि $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] > 0$ तथा वामावर्त क्रम (Left Handed System) में होंगे यदि $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] < 0$.

8.5 समचतुष्फलक का आयतन (Volume of a Tetrahedron)

माना *ABCD* एक समचतुष्फलक है

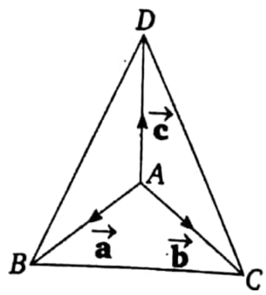
∴ समचतुष्फलक का आयतन $V = \frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$$=\frac{1}{3}[\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} \times \text{ऊँचाई}]$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\vec{AB}\times\vec{AC}).\vec{AD}\right]$$

$$=\frac{1}{6}[(\vec{AB}\times\vec{AC}).\vec{AD}]=\frac{1}{6}[(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}]$$



साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1 : मान निकालें :

$$[\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]+[\hat{j}\ \hat{k}\ \hat{i}]$$

हल : दिया गया व्यंजक $[\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]+[\hat{j}\ \hat{k}\ \hat{i}]=(\hat{i}\times\hat{j}).\hat{k}+(\hat{j}\times\hat{k}).\hat{i}=\hat{k}.\hat{k}+\hat{i}.\hat{i}=1+1=2$

उदाहरण 2 : यदि $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k};\ \vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{c}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

तो $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ तथा $[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]$ का मान बतायें तथा इस तरह दिखायें $[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]=-[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

हल : दिया गया है $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k};\ \vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k};\ \vec{c}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

$$\therefore\quad [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$$

$$=1(-3-2)-1(6-1)+(-1)(4+1)=-5-5-5=-15$$

अर्थात् $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=-15$ ...(1)

तथा
$$[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=1(2+3)-1(1-6)+(-1)(-1-4)=5+5+5=15$$

अर्थात् $[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]=15$

$\therefore$ (1) तथा (2) से $[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]=-[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ ...(2)

उदाहरण 3 : उस समान्तर षट्फलक का आयतन ज्ञात करें जिसके किनारे $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}, \hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ से दिये जाते हैं।

हल : माना $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k};\ \vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{c}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$

अतः समानांतर षट्फलक का आयतन
$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}$$

$$=1(1-2)-1(-1-1)+1(2+1)=-1+2+3=4$$

$\therefore$ समानांतर षट्फलक का आयतन $=4$ घन इकाई

उदाहरण 4 : सिद्ध कीजिए $3\vec{a}+\vec{b}+5\vec{c}, 4\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ तथा $-6\vec{a}+5\vec{b}+4\vec{c}$ समतलीय हैं जबकि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ कोई सदिश हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]**

हल : माना $\vec{\alpha}=3\vec{a}+\vec{b}+5\vec{c};\ \vec{\beta}=4\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c};\ \vec{\gamma}=-6\vec{a}+5\vec{b}+4\vec{c}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

तो $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ तथा $\vec{\gamma}$ समतलीय होंगे यदि $[\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}]=0$

अब $[\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}]=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & 4 \end{vmatrix}[\vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{b}}\ \vec{\mathbf{c}}]$

$=[3(-4-10)-1(16+12)+5(20-6)]\ [\vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{b}}\ \vec{\mathbf{c}}]$

$=[3\times(-14)-1\times 28+5\times 14]\ [\vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{b}}\ \vec{\mathbf{c}}]$

$=[-42-28+70]\ \ [\vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{b}}\ \vec{\mathbf{c}}]=0$

अर्थात् $[\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}]=0$

$\therefore$ दिए गए सदिश समतलीय हैं। **सिद्धम्**

उदाहरण 5 : सिद्ध करें कि वे चार बिन्दु जिनके स्थिति सदिश $(4\hat{\mathbf{i}}+5\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})$, $(-\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}})$, $(3\hat{\mathbf{i}}+9\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}})$, तथा $-4\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}}$ हैं, समतलीय हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]**

हल : माना दिए गये बिंदु A, B, C तथा D हैं, तो

$\vec{\mathbf{AB}}=B$ का स्थिति सदिश $-A$ का स्थिति सदिश

$=(-\hat{\mathbf{j}}-\hat{\mathbf{k}})-(4\hat{\mathbf{i}}+5\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})=-4\hat{\mathbf{i}}-6\hat{\mathbf{j}}-2\hat{\mathbf{k}}=\vec{\mathbf{a}}$ (माना)

$\vec{\mathbf{AC}}=C$ का स्थिति सदिश $-A$ का स्थिति सदिश

$=(3\hat{\mathbf{i}}+9\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}})-(4\hat{\mathbf{i}}+5\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})=-\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}=\vec{\mathbf{b}}$ (माना)

तथा $\vec{\mathbf{AD}}=D$ का स्थिति सदिश $-A$ का स्थिति सदिश

$=(-4\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}})-(4\hat{\mathbf{i}}+5\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})=-8\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}=\vec{\mathbf{c}}$ (माना)

अब A, B, C, D समतलीय होंगे, तो $\vec{\mathbf{AB}}, \vec{\mathbf{AC}}$ तथा $\vec{\mathbf{AD}}$ भी समतलीय होंगे अर्थात् $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ तथा $\vec{\mathbf{c}}$ समतलीय होंगे।

अब $[\vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{b}}\ \vec{\mathbf{c}}]=\begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-4(12+3)-(-6)(-3+24)+(-2)(1+32)$

$=-4\times 15+6\times 21-2\times 33=-60+126-66=0$

$\therefore$ $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ समतलीय हैं। $\Rightarrow$ A, B, C, D समतलीय हैं।

उदाहरण 6 : λ का मान ज्ञात कीजिए जबकि सदिश $\vec{\mathbf{a}}=2\hat{\mathbf{i}}-3\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}}$

$\vec{\mathbf{b}}=\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}-3\hat{\mathbf{k}}$ और $\vec{\mathbf{c}}=\hat{\mathbf{j}}+\lambda\hat{\mathbf{k}}$ समतलीय हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]**

हल : दिए गए सदिश $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ समतलीय हैं।

$\therefore$ $[\vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{b}}\ \vec{\mathbf{c}}]=0$ $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=0$

या $2(2\lambda+3)-(-3)(\lambda-0)+1(1-0)=0$

या $4\lambda+6+3\lambda+1=0$ या $7\lambda=-7$ $\therefore$ $\lambda=-1$ **उत्तर**

उदाहरण 7 : (i) दिखायें $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}$ समतलीय होंगे यदि और केवल यदि $\vec{\mathbf{a}}+\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{b}}+\vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{c}}+\vec{\mathbf{a}}$ समतलीय हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

(ii) सिद्ध करें $[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}] = 2[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

हल : माना $\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}$ समतलीय हैं

$\Leftrightarrow\ [\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}] = 0$ $\Leftrightarrow\ (\vec{a}+\vec{b})\ .\ [(\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a})] = 0$

$\Leftrightarrow\ (\vec{a}+\vec{b})\ .\ [\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}] = 0$

$\Leftrightarrow\ (\vec{a}+\vec{b})\ .\ [\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+0+\vec{c}\times\vec{a}] = 0$

$\Leftrightarrow\ \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a}) = 0$

$\Leftrightarrow\ [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]+[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a}]+[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{a}]+[\vec{b}\ \vec{b}\ \vec{c}]+[\vec{b}\ \vec{b}\ \vec{a}]+[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = 0$

$\Leftrightarrow\ [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]+0+0+0+0+[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = 0$ [$\because$ $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a}] = [\vec{b}\ \vec{b}\ \vec{a}] = 0$ इत्यादि]

$\Leftrightarrow\ [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]+[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = 0$ $\Leftrightarrow\ [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]+[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$

$\Leftrightarrow\ 2[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$ $\Leftrightarrow\ [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$

$\Leftrightarrow\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समतलीय हैं। **सिद्धम्।**

(ii) (i) के बायें पक्ष की तरह हल करें।

उदाहरण 8 : यदि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ कोई तीन सदिश हों तो सिद्ध करें :

(i) $[\vec{a}-\vec{b}, \vec{b}-\vec{c}, \vec{c}-\vec{a}] = 0$ (ii) $[\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}] = 0$

हल : (i) बायाँ पक्ष $= [\vec{a}-\vec{b}, \vec{b}-\vec{c}, \vec{c}-\vec{a}] = (\vec{a}-\vec{b}).[(\vec{b}-\vec{c})\times(\vec{c}-\vec{a})]$

$= (\vec{a}-\vec{b}).[\vec{b}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{a}-\vec{c}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}]$

$= (\vec{a}-\vec{b}).[\vec{b}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}]$ [$\because$ $\vec{c}\times\vec{c} = 0$]

$= \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})-\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{a})$

$-\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{a})-\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})$

$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]-[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a}]+[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{a}]-[\vec{b}\ \vec{b}\ \vec{c}]+[\vec{b}\ \vec{b}\ \vec{a}]-[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]$

$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]-0+0-0+0-[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]$ [$\because$ $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{a}] = [\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{a}] = 0$ इत्यादि]

$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]-[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ [$\because$ $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}]$]

$= 0$

(ii) $[\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}] = [\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})].(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$= [(\vec{a}\times\vec{b})+\vec{a}\times\vec{c}].(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$= (\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+(\vec{a}\times\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$= (\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a}+(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{b}+(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{c}).\vec{a}$

$+(\vec{a}\times\vec{c}).\vec{b}+(\vec{a}\times\vec{c}).\vec{c}$

$= 0+0+[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]+0+[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}]+0$

$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]-[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$ [$\because$ $[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}] = -[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$]

$= 0$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

उदाहरण 9. यदि $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=|\vec{a}|.|\vec{b}|.|\vec{c}|$ तो सिद्ध करें कि $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

हल : हम जानते हैं $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ समानांतर षट्फलक का आयतन है। तथा $|\vec{a}|.|\vec{b}|.|\vec{c}|$ क्यूबॉयड (Cuboid) का आयतन है।

जहाँ सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ कोरों को निरूपित करते हैं।

दिया गया है $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=|\vec{a}|.|\vec{b}|.|\vec{c}|$ $\Rightarrow$ समानांतर षट्फलक का आयतन = क्यूबॉयड का आयतन

$\therefore$ समानांतर षट्फलक का कोर = क्यूबॉयड का कोर

$\therefore$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=0$ [$\because$ क्यूबॉयड के कोर परस्पर लंब होते हैं]

उदाहरण 10 : यदि चार बिंदु जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ समतलीय हैं तो सिद्ध करें

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]+[\vec{a}\ \vec{d}\ \vec{c}]+[\vec{d}\ \vec{b}\ \vec{c}]$$

हल : माना A, B, C, D चार बिन्दु हैं जिनके स्थिति सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ हैं, तो

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{b}-\vec{a}$$

$$\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=\vec{c}-\vec{a}$$

$$\vec{AD}=\vec{OD}-\vec{OA}=\vec{d}-\vec{a}$$

अब $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ समतलीय हैं।

$\therefore$ $\vec{AB}\cdot(\vec{AC}\times\vec{AD})=0$ $\Rightarrow$ $(\vec{b}-\vec{a})\cdot[(\vec{c}-\vec{a})\times(\vec{d}-\vec{a})]=0$

$\Rightarrow$ $(\vec{b}-\vec{a})\cdot[\vec{c}\times\vec{d}-\vec{c}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{d}+\vec{a}\times\vec{a}]=0$

$\Rightarrow$ $(\vec{b}-\vec{a})\cdot[\vec{c}\times\vec{d}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{d}\times\vec{a}+0]=0$ [$\because$ $\vec{a}\times\vec{a}=0$]

$\Rightarrow$ $\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})+\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})+\vec{b}\cdot(\vec{d}\times\vec{a})-\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{d})-\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})-\vec{a}\cdot(\vec{d}\times\vec{a})]=0$

$\Rightarrow$ $[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]+[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{c}]+[\vec{b}\ \vec{d}\ \vec{a}]-[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{d}]-0-0=0$

$\Rightarrow$ $[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]-[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]+[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]+[\vec{a}\ \vec{d}\ \vec{c}]=0$

$\Rightarrow$ $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]+[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]+[\vec{a}\ \vec{d}\ \vec{c}]=[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]+[\vec{a}\ \vec{d}\ \vec{c}]+[\vec{d}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

उदाहरण 11 : यदि किसी समानांतर षट्फलक के संगामी कोर सदिश $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ तथा $\vec{OC}$ क्रमशः $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $-3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ से दिए जाएँ तो $\vec{OA}$ तथा $\vec{OB}$ से बने फलक (Face) का आयतन तथा क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल : दिया गया है :

$$\vec{OA}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k};\ \vec{OB}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k};\ \vec{OC}=-3\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$$

$\therefore$ दिए गए ठोस का आयतन $=(\vec{OA}\times\vec{OB})\cdot\vec{OC}$

अब $\vec{OA}\times\vec{OB}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=(3+2)\hat{i}-\hat{j}(6+1)+\hat{k}(4-1)$

अर्थात् $\vec{OA}\times\vec{OB}=5\hat{i}-7\hat{j}+3\hat{k}$ ...(1)

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

∴ आयतन $=(5\hat{\mathbf{i}}-7\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}).(-3\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}+\hat{\mathbf{k}})$

$$=5\times(-3)+(-7)\times(-1)+3\times1=-15+7+3=-5$$

अर्थात् आयतन $=5$ घन इकाई ($-$ ve चिह्न छोड़ने पर)

तथा $\vec{\mathbf{OA}}$ तथा $\vec{\mathbf{OB}}$ से बने फलक का सदिश क्षेत्रफल $=\vec{\mathbf{OA}}\times\vec{\mathbf{OB}}=5\hat{\mathbf{i}}-7\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$

∴ क्षेत्रफल $=|\vec{\mathbf{OA}}\times\vec{\mathbf{OB}}|=\sqrt{5^2+(-7)^2+(3)^2}=\sqrt{25+49+9}=\sqrt{83}$ वर्ग इकाई

उदाहरण 12 : एक प्रिज्म ($ABC\ A'\ B'\ C'$) का आयतन ज्ञात करें यदि

$$\vec{\mathbf{AB}}=3\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}}+12\hat{\mathbf{k}};\ \vec{\mathbf{AC}}=12\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}};\ \vec{\mathbf{AA}}'=4\hat{\mathbf{i}}+12\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$$

हल : सूत्र से आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

$$=\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} \times AA'=\frac{1}{2}(\vec{\mathbf{AB}}\times\vec{\mathbf{AC}}).\vec{\mathbf{AA}}$$

$$=\frac{1}{2}[(3\hat{\mathbf{i}}+4\hat{\mathbf{j}}+12\hat{\mathbf{k}})\times(12\hat{\mathbf{i}}+3\hat{\mathbf{j}}+4\hat{\mathbf{k}})].(4\hat{\mathbf{i}}+12\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}})$$

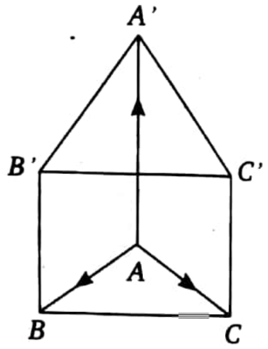
$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 4 & 12\\ 12 & 3 & 4\\ 4 & 12 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}[3(9-48)-4(36-16)+12(144-12)]$$

$$=\frac{1}{2}[3\times(-39)-4\times20+12\times132]$$

$$=\frac{1}{2}[-117-80+1584]$$

$$=\frac{1}{2}\times1387=693.5 \text{ घन इकाई}$$



महत्वपूर्ण सूत्र तथा उपयोगी तथ्य

1. तीन सदिशों का अदिश त्रिगुणनफल : यदि $\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}$ तीन सदिश हों $\vec{\mathbf{a}}.(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})$, $\vec{\mathbf{b}}.(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{a}})$, $\vec{\mathbf{c}}.(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})$, $(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}).\vec{\mathbf{c}}$, $(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}}).\vec{\mathbf{a}}$ तथा $(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{a}}).\vec{\mathbf{b}}$ इनमें से प्रत्येक इन सदिशों के अदिश त्रिगुणनफल को सूचित करता है।

2. (i) $(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}}).\vec{\mathbf{c}}=\vec{\mathbf{a}}.(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})$

अर्थात् अदिश त्रिगुणनफल में 'डॉट' (•) तथा 'क्रॉस' (×) को परस्पर बदला जा सकता है, यदि उनके चक्रीय क्रम में कोई परिवर्तन न हो।

(ii) $\vec{\mathbf{a}}.(\vec{\mathbf{b}}\times\vec{\mathbf{c}})=\vec{\mathbf{b}}.(\vec{\mathbf{c}}\times\vec{\mathbf{a}})=\vec{\mathbf{c}}.(\vec{\mathbf{a}}\times\vec{\mathbf{b}})\Rightarrow[\vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{b}}\ \vec{\mathbf{c}}]=[\vec{\mathbf{b}}\ \vec{\mathbf{c}}\ \vec{\mathbf{a}}]=[\vec{\mathbf{c}}\ \vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{b}}]$

अर्थात् यदि $\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}$ के चक्रीय क्रम में परिवर्तन न हो तो अदिश त्रिगुणनफल के मान बाराबर होते हैं।

(iii) $[\vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{b}}\ \vec{\mathbf{c}}]=-[\vec{\mathbf{b}}\ \vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{c}}]=[\vec{\mathbf{c}}\ \vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{b}}]=-[\vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{c}}\ \vec{\mathbf{b}}]$

अर्थात् यदि $\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}},\vec{\mathbf{c}}$ के चक्रीय क्रम में परिवर्तन हो तो अदिश त्रिगुणनफल का चिह्न बदल जाता है किन्तु उसके मान में परिवर्तन नहीं होता।

3. $[\vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{b}}]=[\vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{b}}\ \vec{\mathbf{b}}]=[\vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{c}}\ \vec{\mathbf{c}}]=0$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अर्थात् तीन सदिशों के अदिश त्रिगुणनफल का मान शून्य होता है यदि उनमें कोई दो समान हों।

4. $[\lambda\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \lambda[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$, जहाँ λ कोई अदिश है।

5. $[\vec{a}+\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}] = [\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{d}] + [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}]$

6. (i) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समतलीय हैं $\Leftrightarrow [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$ (ii) $[\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}] = [\hat{j}\ \hat{k}\ \hat{i}] = [\hat{k}\ \hat{i}\ \hat{j}] = 1$

7. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ किन्हीं चार समतलीय बिन्दुओं के स्थिति सदिश हों तो $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

$$= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}] + [\vec{a}\ \vec{d}\ \vec{c}] + [\vec{d}\ \vec{b}\ \vec{c}]$$

8. यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$

तो $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

9. यदि $|\vec{a}|, |\vec{b}|, |\vec{c}|$ किसी समानांतर षट्फलक के संगामी कोरें हों तो

(i) समानांतर षट्फलक का आयतन $= [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

(ii) $|\vec{b}\times\vec{c}|, |\vec{c}\times\vec{a}|$ तथा $|\vec{a}\times\vec{b}|$ का मान समानांतर षट्फलक के फलकों के क्षेत्रफल के बराबर होता है।

(iii) समचतुष्फलक आयतन $= \frac{1}{6}[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$.

प्रश्नावली 8.1

1. मान निकालें :

(i) $[\hat{j}\ \hat{k}\ \hat{i}] + [\hat{k}\ \hat{i}\ \hat{j}]$ (ii) $[\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}] + [\hat{j}\ \hat{k}\ \hat{i}] + [\hat{k}\ \hat{i}\ \hat{j}]$

(iii) $[2\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}] + [\hat{j}\ 3\hat{k}\ \hat{i}]$

2. $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ का मान ज्ञात करें, यदि

(a) (i) $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2013]**

(ii) $\vec{a} = -4\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{c} = -8\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$

(b) यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $\vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ तो $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ का मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]

3. उस समानांतर षट्फलक का आयतन करें, जिसकी संगामी कोरें

(i) $2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ हैं।

(ii) $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$, $\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ हैं।

4. दिखायें सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ समतलीय हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

5. दिखायें सदिश $\vec{a} = -4\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{c} = -8\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ समतलीय हैं।

6. λ का मान ज्ञात करें जबकि सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ एक ही समतल में हों, $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{c} = 3\hat{i} + \lambda\hat{j} + 4\hat{k}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1991]**

7. सदिश $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$, $\hat{i} - \lambda\hat{j} + \hat{k}$, $3\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ समतलीय हैं तो λ का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]**

8. अचर राशि a का मान ज्ञात करें यदि $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, तथा $3\hat{i} + a\hat{j} + 5\hat{k}$ समतलीय हैं।

9. दिखायें चार बिंदु जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $-(\hat{j} + \hat{k})$, $3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $4(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ हैं, समतलीय हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]**

10. वे चार बिन्दु जिनके स्थिति सदिश $6\hat{i} - 7\hat{j}$, $16\hat{i} - 29\hat{j} - 4\hat{k}$, $3\hat{j} - 6\hat{k}$, $2\hat{i} + 5\hat{j} + 10\hat{k}$ हैं, समतलीय हैं।

11. यदि $a\hat{i} + a\hat{j} + c\hat{k}$, $\hat{i} + \hat{k}$ तथा $c\hat{i} + c\hat{j} + b\hat{k}$ समतलीय हैं, जहाँ $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ तो a, c, b गुणोत्तर श्रेढी में होंगे।

[संकेत : $[a\hat{i} + a\hat{j} + c\hat{k}, \hat{i} + \hat{k}, c\hat{i} + c\hat{j} + b\hat{k}] = 0 \Rightarrow c^2 = ab$

12. सिद्ध करें :

(i) $(\vec{A} + \vec{B}).[(\vec{B} + \vec{C}) \times (\vec{C} + \vec{A})] = 2\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2000]**

(ii) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).[(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{c})] = -[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]$

13. सिद्ध करें कि यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ असमतलीय हैं तो $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} + \vec{a}$ भी असमतलीय होंगे।

14. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन समतलीय सदिश हों तो सिद्ध करें कि $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$ तथा $\vec{c} - \vec{a}$ समतलीय होंगे।

[संकेत : $\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{c}, \vec{c} - \vec{a}$ समतलीय हैं

$\Rightarrow [\vec{a} - \vec{b}\ \ \vec{b} - \vec{c}\ \ \vec{c} - \vec{a}] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$

15. एक समानांतर षट्फलक की संगामी कोरें क्रमशः $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ से दी गई हों, जहाँ आधार की कोरें $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हैं, तो षट्फलक की ऊँचाई ज्ञात करें।

[संकेत : ऊँचाई $= \dfrac{\text{आयतन}}{\text{आधार का क्षेत्रफल}} = \dfrac{[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$]

16. उस समान्तर षट्फलक का आयतन ज्ञात कीजिये जिसकी कोरें सदिशों $\vec{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\vec{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\vec{c} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ द्वारा निर्मित हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2013]**

17. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ अशून्य तथा समतलीय सदिश हैं तो सिद्ध करें कि $\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$, $-2\vec{a} + 3\vec{b} - 4\vec{c}$ तथा $\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$ भी समतलीय हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

[संकेत : यदि दिए गए सदिश $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ तथा $\vec{\gamma}$ हों तो $[\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ a & -3 & 5 \end{vmatrix} [\vec{\mathbf{a}}\ \vec{\mathbf{b}}\ \vec{\mathbf{c}}]$ का मान निकालें जो शून्य के बराबर है। $\therefore$ $\vec{\alpha}\ \vec{\beta}\ \vec{\gamma}$ समतलीय हैं।]

18. यदि $\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}$ तथा $\vec{\mathbf{C}}$ तीन असमतलीय सदिश हैं तो $\dfrac{\vec{\mathbf{A}}\cdot(\vec{\mathbf{B}}\times\vec{\mathbf{C}})}{(\vec{\mathbf{C}}\times\vec{\mathbf{A}})\cdot\vec{\mathbf{B}}} + \dfrac{\vec{\mathbf{B}}\cdot(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{C}})}{\vec{\mathbf{C}}\cdot(\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}})}$ का मान बतायें।

[संकेत : $\dfrac{[\vec{\mathbf{A}}\ \vec{\mathbf{B}}\ \vec{\mathbf{C}}]}{[\vec{\mathbf{C}}\ \vec{\mathbf{A}}\ \vec{\mathbf{B}}]} + \dfrac{[\vec{\mathbf{B}}\ \vec{\mathbf{A}}\ \vec{\mathbf{C}}]}{[\vec{\mathbf{C}}\ \vec{\mathbf{A}}\ \vec{\mathbf{B}}]} = 1 - 1 = 0$]

19. यदि सदिश $a\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ तथा $\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}}$ $(a \neq b \neq c \neq 1)$ समतलीय हैं तो सिद्ध करें

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = 1.$$

[संकेत : $[a\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{i}} + b\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + c\hat{\mathbf{k}}] = 0$]

उत्तरमाला

1. (i) 2 (ii) 3 (iii) 5

2. (a) (i) −7 (ii) 0 (b) −10

3. (i) 5 (ii) 4

6. −7 **7.** $\lambda = \dfrac{26}{25}$ **8.** 4

15. $\dfrac{42}{\sqrt{234}}$ **16.** 7 घन इकाई **18.** 0

❑❑❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

अध्याय 9

सदिश त्रिगुणनफल (Vector Triple Product)

9.1 परिभाषा (Definitions)

यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ कोई तीन अशून्य सदिश हों, तो $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ या $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ को इनके सदिश त्रिगुणनफल के नाम से जाना जाता है तथा इसे निम्न रूप से परिभाषित किया जाता है,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}.$$

इसी तरह $(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a}$, $(\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b}$, $\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a})$, $\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$ भी सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के त्रिगुणनफल को प्रदर्शित करते हैं।

9.2 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ का मान (Value of $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$)

किन्हीं तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के लिये $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$

प्रमाण : माना $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k};\ \vec{b} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k};\ \vec{c} = c_1 \hat{i} + c_2 \hat{j} + c_3 \hat{k}$

तो
$$\vec{b} \times \vec{c} = (b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}) \times (c_1 \hat{i} + c_2 \hat{j} + c_3 \hat{k}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (b_2 c_3 - c_2 b_3)\,\hat{i} - (b_1 c_3 - c_1 b_3)\,\hat{j} + \hat{k}\,(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$\therefore\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times \{(b_2 c_3 - c_2 b_3)\,\hat{i} + (b_3 c_1 - b_1 c_3)\,\hat{j} + \hat{k}\,(b_1 c_2 - b_2 c_1)\}$$

$$= [a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3)]\,\vec{i} + [a_3 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_1 (b_1 c_2 - b_2 c_1)]\,\vec{j}$$
$$+ [a_1 (b_3 c_1 - b_1 c_3) - a_2 (b_2 c_3 - b_3 c_2)]\,\vec{k} \quad \left[\because\ \hat{i} \times \hat{i}, \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0;\ \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}\right]$$

$$= (a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3)(b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)(c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} + c_3 \vec{k})$$

$$= (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$$

$$\therefore\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$$

अन्य सदिश त्रिगुणनफलों के मान

$$\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{b} \cdot \vec{a})\,\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a}; \quad \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{c} \cdot \vec{b})\,\vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\,\vec{b}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = -[(\vec{c}.\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a})\vec{b}] = (\vec{c}.\vec{a})\vec{b}-(\vec{c}.\vec{b})\vec{a}$$

इसी तरह $(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} = (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}$; $(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}-(\vec{b}.\vec{a})\vec{c}$

नोट :

- इन मानों को सरल रूप में निम्न रूप में याद किया जा सकता है :

(i) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$
 I II III I III II I II III

स्पष्ट है I × (II × III) = (I . III) II – (I . II) III

किन्तु यह नियम तभी लागू होगा जब I (इस स्थिति में $\vec{a}$) ब्रेकेट के बायीं ओर हो।

(ii) यदि ब्रेकेट के बाहर का सदिश दाहिनी ओर हो, तो सर्वप्रथम इसे ब्रेकेट के बायीं ओर लायें, तब उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करें। ध्यान रखें इस स्थिति में चिह्न में भी परिवर्तन होगा।

जैसे—$(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} = -\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = -[(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}] = (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}$
 I II III I III II I II III I II III I III II

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1 : यदि $\vec{a} = 3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{c} = \hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ तो

(i) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ का मान बतायें। (ii) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ का मान बतायें।

हल : (i) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$ ...(1)

यहाँ $\vec{a}.\vec{c} = (3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}).(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}) = 3\times1+(-1)\times(-2)+2\times2 = 3+2+4 = 9$

$\vec{a}.\vec{b} = (3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}).(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}) = 3\times2+(-1)(1)+2\times(-1) = 6-1-2 = 3$

$\therefore\ \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = 9\vec{b}-3\vec{c}$ [(1) से]

$= 9(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})-3(\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$

$= 18\hat{i}+9\hat{j}-9\hat{k}-3\hat{i}+6\hat{j}-6\hat{k} = 15\hat{i}+15\hat{j}-15\hat{k}$

(ii) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = -[(\vec{c}.\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a})\vec{b}$ ...(1)

यहाँ $\vec{c}.\vec{b} = (\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}).(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}) = 1\times2+(-2)\times1+2\times(-1) = 2-2-2 = -2$

$\vec{c}.\vec{a} = (\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}).(3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}) = 1\times3+(-2)\times(-1)+2\times2 = 3+2+4 = 9$

अतः (1) से

$\therefore\ (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -[(\vec{c}.\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a})\vec{b}] = -[-2\vec{a}-9\vec{b}]$

$= 2\vec{a}+9\vec{b} = 2(3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})+9(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$

$= 6\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}+18\hat{i}+9\hat{j}-9\hat{k} = 24\hat{i}+7\hat{j}-5\hat{k}$ **उत्तर**

उदाहरण 2 : सिद्ध करें :

(i) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]**

(ii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, $\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})$ तथा $\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ समतलीय हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

हल : (i) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$

$=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}+(\vec{b}.\vec{a})\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}+(\vec{c}.\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a})\vec{b}$ [परिभाषा से]

$=(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}+(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}+(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$

$=0$ सिद्ध हुआ।

(ii) माना $\vec{\alpha}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$; $\vec{\beta}=\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})$; $\vec{\gamma}=\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$

अब $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=0$ [उदाहरण 2(i) देखें]

$\Rightarrow \vec{\alpha}=-\vec{\beta}-\vec{\gamma}=(-1)\vec{\beta}+(-1)\vec{\gamma}$ $\therefore$ $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ समतलीय हैं। सिद्धम्

उदाहरण 3 : सिद्ध करें $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d})-(\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{a}.\vec{c} & \vec{a}.\vec{d}\\ \vec{b}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{d}\end{vmatrix}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2009, 15]

हल : माना $\vec{c}\times\vec{d}=\vec{r}$

तो $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{r}=\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{r})$ [$\because$ dot तथा cross परस्पर बदलने पर]

$=\vec{a}.[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]$ [$\because \vec{r}=\vec{c}\times\vec{d}$]

$=\vec{a}.[(\vec{b}.\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{d}]$

$=(\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d})-(\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})=\begin{vmatrix}\vec{a}.\vec{c} & \vec{a}.\vec{d}\\ \vec{b}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{d}\end{vmatrix}$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 4 : किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए सिद्ध करें :

$$\vec{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\vec{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\vec{k}(\vec{a}\times\hat{k})=2\vec{a}$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2003, 2006]

हल : $\vec{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\vec{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\vec{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})$

$=(\vec{i}.\hat{i})\vec{a}-(\vec{i}.\vec{a})\vec{i}+(\vec{j}.\hat{j})\vec{a}-(\vec{j}.\vec{a})\hat{j}+(\vec{k}.\hat{k})\vec{a}-(\vec{k}.\vec{a})\hat{k}$

$=1\times\vec{a}-(\hat{i}.\vec{a})\hat{i}+1\times\vec{a}-(\hat{j}.\vec{a})\hat{j}+1\times\vec{a}-(\hat{k}.\vec{a})\hat{k}$

$=3\vec{a}-[(\hat{i}.\vec{a})\hat{i}+(\hat{j}.\vec{a})\hat{j}+(\hat{k}.\vec{a})\hat{k}]$ [$\because \vec{i}.\hat{i}=\vec{j}.\hat{j}=\vec{k}.\hat{k}=1$]

माना $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ...(1)

तो $\hat{i}.\vec{a}=\hat{i}.(a_1\hat{i})+\hat{i}.(a_2\hat{j})+\hat{i}.(a_3\hat{k})=\hat{i}.\hat{i}\,a_1+0+0=a_1$ [$\because \hat{i}.\hat{j}=\hat{j}.\hat{k}=0, \hat{i}.\hat{i}=1$]

इसी तरह $\hat{j}.\vec{a}=a_2$; $\hat{k}.\vec{a}=a_3$

$\therefore$ (1) में यह मान रखने पर

$\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})=3\vec{a}-[a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}]$

$=3\vec{a}-\vec{a}=2\vec{a}$ सिद्धम्

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

उदाहरण 5 : सिद्ध करें कि $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}]\,\vec{c}-[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]\,\vec{d}$

हल : माना $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{r}$

तो $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{r}\times(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{r}\,.\,\vec{d})\,\vec{c}-(\vec{r}\,.\,\vec{c})\,\vec{d}$

$=[(\vec{a}\times\vec{b})\,.\,\vec{d}]\,\vec{c}-[(\vec{a}\times\vec{b})\,.\,\vec{c}]\,\vec{d}$ $\quad[\because \vec{r}=\vec{a}\times\vec{b}]$

$=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}]\,\vec{c}-[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]\,\vec{d}$ **यही सिद्ध करना था।**

उदाहरण 6 : किन्हीं तीन सदिशों $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ के लिए यदि $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ तो $\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})=0$

हल : $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \quad\Rightarrow\quad -\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

$\Rightarrow\quad -[(\vec{c}\,.\,\vec{b})\,\vec{a}-(\vec{c}\,.\,\vec{a})\,\vec{b}]=[(\vec{a}\,.\,\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{a}\,.\,\vec{b})\,\vec{c}]$

$\Rightarrow\quad (\vec{c}\,.\,\vec{a})\,\vec{b}-(\vec{c}\,.\,\vec{b})\,\vec{a}=(\vec{a}\,.\,\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{a}\,.\,\vec{b})\,\vec{c}$

$\Rightarrow\quad (\vec{a}\,.\,\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{b}\,.\,\vec{c})\,\vec{a}=(\vec{a}\,.\,\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{b}\,.\,\vec{a})\,\vec{c}$ $\quad[\because \vec{a}\,.\,\vec{b}=\vec{b}\,.\,\vec{a}$ आदि]

$\Rightarrow\quad (\vec{b}\,.\,\vec{a})\,\vec{c}-(\vec{b}\,.\,\vec{c})\,\vec{a}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})=0$ **यही सिद्ध करना था।**

उदाहरण 7 : (i) दिखायें कि $[\vec{a}\times\vec{b},\,\vec{b}\times\vec{c},\,\vec{c}\times\vec{a}]=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]^2$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2014]**

(ii) यदि $\vec{a}\,.\,\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समतलीय हैं, तो सिद्ध करें $\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c}$ तथा $\vec{c}\times\vec{a}$ समतलीय होंगे।

हल : (i) $[\vec{a}\times\vec{b}\ \vec{b}\times\vec{c}\ \vec{c}\times\vec{a}]=(\vec{a}\times\vec{b})\,.\,[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})]$

$=(\vec{a}\times\vec{b})\,.\,\{\vec{\lambda}\times(\vec{c}\times\vec{a})\}$ जहाँ $\vec{\lambda}=\vec{b}\times\vec{c}$

$=(\vec{a}\times\vec{b})\,.\,\{(\vec{\lambda}\,.\,\vec{a})\,\vec{c}-(\vec{\lambda}\,.\,\vec{c})\,\vec{a}\}$

$=(\vec{a}\times\vec{b})\,.\,[\{(\vec{b}\times\vec{c})\,.\,\vec{a}\}\,\vec{c}-\{(\vec{b}\times\vec{c})\,.\,\vec{c}\}\,\vec{a}]$ $\quad[\vec{\lambda}$ का मान रखने पर]

$=(\vec{a}\times\vec{b})\,.\,[[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}]\,\vec{c}-[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{c}]\,\vec{a}]$

$=(\vec{a}\times\vec{b})\,.\,[[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]\,\vec{c}-0]$ $\quad[\because [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}]=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ तथा $[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{c}]=0]$

$=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]\{(\vec{a}\times\vec{b})\,.\,\vec{c}\}=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}][\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]^2$

(ii) $\because\ \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ समतलीय हैं। $\quad\therefore\quad [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=0$ ...(1)

पुन : $[\vec{a}\times\vec{b}\ \vec{b}\times\vec{c}\ \vec{c}\times\vec{a}]=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]^2$ [उपरोक्त उदाहरण से] ...(2)

$\therefore$ (1) तथा (2) से $[\vec{a}\times\vec{b}\ \vec{b}\times\vec{c}\ \vec{c}\times\vec{a}]=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]^2=0$

अत: $\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c}$ तथा $\vec{c}\times\vec{a}$ समतलीय हैं।

उदाहरण 8 : यदि $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}=(\vec{b}\times\vec{a})\times\vec{a}$, जहाँ $\vec{a},\vec{b}$ कोई सदिश हैं, तो दिखायें $\vec{a}\times\vec{b}=0$

हल : दिया गया है : $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}=(\vec{b}\times\vec{a})\times\vec{a}$

$\Rightarrow\quad (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}=-(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a} \quad\Rightarrow\quad (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{b}+(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}=0$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \quad (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{a})=0 \qquad \Rightarrow \quad \vec{a}\times\vec{b}=0$ या $\vec{a}\times\vec{b}\,||\,\vec{b}+\vec{a}$

किन्तु $\vec{a}\times\vec{b}$ सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दोनों पर लंब है।

अत: $\vec{a}\times\vec{b}\,||\,\vec{b}+\vec{a}$ संभव नहीं है

$\therefore \quad \vec{a}\times\vec{b}=0$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 9 : यदि $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ क्रमश: सदिश $\vec{b}\times\vec{c}, \vec{c}\times\vec{a}$ तथा $\vec{a}\times\vec{b}$ को प्रदर्शित करते हों तो सिद्ध करें कि सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ क्रमश: $\vec{q}\times\vec{r}, \vec{r}\times\vec{p}$ तथा $\vec{p}\times\vec{q}$ के समानान्तर हैं।

हल : $\vec{a}\times(\vec{q}\times\vec{r}) = (\vec{a}\,.\,\vec{r})\vec{q} - (\vec{a}\,.\,\vec{q})\vec{r}$

$\{\vec{a}\,.(\vec{a}\times\vec{b})\}\vec{q} - \{\vec{a}\,.(\vec{c}\times\vec{a})\}\vec{r} \qquad [\because \vec{r}=\vec{a}\times\vec{b}, \vec{q}=\vec{c}\times\vec{a}]$

$=[\vec{a}\;\vec{a}\;\vec{b}]\,\vec{q} - [\vec{a}\;\vec{c}\;\vec{a}]\,\vec{r}$

$=0\times\vec{q} - 0\times\vec{r} = 0 \qquad [\because [\vec{a}\;\vec{a}\;\vec{b}]=[\vec{a}\;\vec{c}\;\vec{a}]=0]$

$\therefore \quad \vec{a}\,||\,\vec{q}\times\vec{r}$

इसी तरह $\quad \vec{b}\times(\vec{r}\times\vec{p})=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b}\,||\,\vec{r}\times\vec{p}$

$\vec{c}\times(\vec{p}\times\vec{q})=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{c}\,||\,\vec{p}\times\vec{q}$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 10 : यदि $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ तीन असमानांतर इकाई सदिश इस प्रकार हैं कि $\hat{a}\times(\hat{b}\times\hat{c}) = \frac{1}{2}\hat{b}$ हो तो वे कोण ज्ञात करें जो $\hat{a}$ सदिशों $\hat{b}$ ओर $\hat{c}$ के साथ बनाता है जबकि $\hat{b}$ तथा $\hat{c}$ समानांतर नहीं हैं।

हल : मान लिया $\hat{a}$ सदिशों $\hat{b}$ तथा $\hat{c}$ से क्रमश: θ एवं ϕ कोण बनाता है।

दिया गया है $\quad \hat{a}\times(\hat{b}\times\hat{c}) = \frac{1}{2}\hat{b}$

$\Rightarrow \quad (\hat{a}\,.\,\hat{c})\,\hat{b} - (\hat{a}\,.\,\hat{b})\,\hat{c} = \frac{1}{2}\hat{b} \qquad \Rightarrow \quad \left(\hat{a}\,.\,\hat{c} - \frac{1}{2}\right)\hat{b} - (\hat{a}\,.\,\hat{b})\,\hat{c} = 0$

$\Rightarrow \quad x\hat{b} - y\hat{c} = 0$ जहाँ $\hat{a}\,.\,\hat{c} - \frac{1}{2} = x$, तथा $\hat{a}\,.\,\hat{b} = y$

यह $\hat{b}$ तथा $\hat{c}$ में एक संबंध है। किन्तु $\hat{b}$ और $\hat{c}$ समानांतर नहीं हैं

$\therefore \quad x=0, \; y=0$

अब $x=0 \quad \Rightarrow \quad \hat{a}\,.\,\hat{c} - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{a}\,.\,\hat{c} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad |\hat{a}||\hat{c}|\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1\times1\times\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}$

तथा $\quad y=0 \quad \Rightarrow \quad \hat{a}\,.\,\hat{b} = 0 \quad \Rightarrow \quad |\hat{a}||\hat{b}|\cos\phi = 0$

$\Rightarrow \quad 1\times1\times\cos\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\phi = 0 = \cos\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad \hat{a}$ सदिशों $\hat{b}$ तथा $\hat{c}$ के साथ क्रमश: $\frac{\pi}{3}$ तथा $\frac{\pi}{2}$ कोण बनाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

महत्वपूर्ण सूत्र

1. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ कोई तीन सदिश हों, तो $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ सदिश को त्रिगुणनफल कहते हैं।

2. $$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$
$$\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{b}.\vec{a})\vec{c}-(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}$$
$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{c}.\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a})\vec{b}$$

तथा $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = -[(\vec{c}.\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}.\vec{a})\vec{b}] = [(\vec{c}.\vec{a})\vec{b}-(\vec{c}.\vec{b})\vec{a}]$

इसी प्रकार $(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a} = [(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}-(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}]$; $(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b} = [(\vec{b}.\vec{c})\vec{a}-(\vec{b}.\vec{a})\vec{c}]$

3. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ कोई चार सदिश हों तो $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}]\,\vec{c} - [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]\,\vec{d}$

प्रश्नावली 9.1

1. यदि $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{c}=\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ तो $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ का मान बतायें।

2. यदि $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{c}=\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ तो $|(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}|$ का मान बतायें।

3. यदि $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}+2\hat{j}+5\hat{k}$ तो जाँचें
$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$$

4. सिद्ध करें $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, $\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})$ तथा $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ समतलीय हैं।

[**संकेत** : दिखायें $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=0$ जहाँ $\vec{\alpha}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$; $\vec{\beta}=\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})$; $\vec{\gamma}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$

5. (i) $[\vec{a}\times\vec{b}\ \ \vec{b}\times\vec{c}\ \ \vec{c}\times\vec{a}] = [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]^2$

(ii) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समतलीय सदिश हैं तो $\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}$ तथा $\vec{c}\times\vec{a}$ भी समतलीय हैं।

[**संकेत** : $[(\vec{a}\times\vec{b})\ \ (\vec{b}\times\vec{c})\ \ (\vec{c}\times\vec{a})] = [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]^2$;

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ समतलीय हैं $\Rightarrow [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=0 \Rightarrow [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]^2=0$]

6. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ असमतलीय हैं, तो $\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}\times\vec{c}$ तथा $\vec{c}\times\vec{a}$ असमतलीय होंगे।

[**संकेत** : दिखायें $[\vec{a}\times\vec{b}\ \ \vec{b}\times\vec{c}\ \ \vec{c}\times\vec{a}]\neq 0$

7. दिखायें $(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{a}\times\vec{b})$ सदिश $\vec{a}$ के समानांतर हैं।

8. सिद्ध करें :

(i) $\vec{i}\times(\vec{j}\times\vec{k})=0$

(ii) $\vec{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\vec{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\vec{k}(\vec{a}\times\hat{k})=2\vec{a}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2003, 2006]**

(iii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}$

(iv) $\vec{a}\times[\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})]=(\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}\times\vec{a})$

(v) $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d})-(\vec{a}.\vec{d})(\vec{b}.\vec{c})$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2015]**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(vi) सिद्ध करें $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}.\vec{c} & \vec{a}.\vec{d} \\ \vec{b}.\vec{c} & \vec{b}.\vec{d} \end{vmatrix}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]**

9. यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन इकाई सदिश इस प्रकार हैं कि $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})$, तो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच का कोण बतायें।

[संकेत : $(\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ $\Rightarrow$ $\vec{a}.\vec{b} = -\frac{1}{2}$ (गुणांकों की तुलना से)

$\Rightarrow$ $\cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120°$]

10. यदि असमतलीय इकाई सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ इस प्रकार हैं कि $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{b}+\vec{c})$, तो $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ से जो कोण बनाता है वह ज्ञात करें।

[संकेत : $(\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{b}+\vec{c})$ में दोनों ओर $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के गुणांकों की तुलना करें]

11. सिद्ध करें :

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]

उत्तरमाला

1. $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ **2.** $5\sqrt{14}$ **9.** $120°$ **10.** $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अध्याय 10

सम्मिश्र संख्यायें (Complex Numbers)

10.1 काल्पनिक अथवा अधिकल्पित संख्यायें (Imaginary Numbers)

वे संख्यायें जिनका वर्ग एक ऋणात्मक संख्या होती है, काल्पनिक या अधिकल्पित संख्यायें कहलाती हैं। जैसे— $\sqrt{-5}, \sqrt{-3}$ इत्यादि।

प्रसिद्ध गणितज्ञ आयलर (Euler) ने एक संख्या **'i' (Iota)** की कल्पना की, जिसका मान $\sqrt{-1}$ के बराबर है। इस तरह $i = \sqrt{-1}$ अर्थात् $i^2 = -1$

इसकी सहायता से ऋणात्मक संख्याओं का वर्गमूल आसानी से निकाला जा सकता है।

जैसे— $\sqrt{-5} = \sqrt{5 \times (-1)} = \sqrt{5i^2} = \pm\sqrt{5}\, i$

इसी तरह $\sqrt{-4} = \sqrt{4i^2} = \pm 2i$

e.g., $\sqrt{-5} = \sqrt{5 \times (-1)} = \sqrt{5} \times \sqrt{-1} = \sqrt{5}\, i$; $\sqrt{-7} = \sqrt{7 \times (-1)} = \sqrt{7} \times \sqrt{-1} = \sqrt{7}\, i$ आदि।

10.1.1 i के विभिन्न घातों का मान

Case I : जब घात धनात्मक है

$\therefore$ $i^2 = -1;\ i^3 = i^2 \times i = -1 \times i = -i;$

$i^4 = i^2 \times i^2 = -1 \times -1 = 1;\ i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$ आदि।

$i^{4n} = (i^4)^n = (1)^n = 1;\ i^{4n+1} = i^{4n} \times i = 1 \times i = i$ आदि।

Case II : जब घात ऋणात्मक है

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{-1}{-i} = \frac{i^2}{-i} = -i;\ i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1;\ i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{i^2 \times i} = \frac{1}{-i} = i;\ i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1 \text{ आदि।}$$

$$i^{-4n} = \frac{1}{i^{4n}} = \frac{1}{(i^4)^n} = \frac{1}{(1)^n} = 1;\ i^{-(4n+1)} = \frac{1}{i^{4n+1}} = \frac{1}{i^{4n} \times i} = \frac{1}{i} = -i \text{ आदि।}$$

इस तरह i के पूर्णांक घातों के लिए केवल चार मान $1, -1, i$ तथा $-i$ हैं।

10.2 सम्मिश्र संख्यायें (Complex Numbers)

यदि a तथा b कोई दो वास्तविक संख्यायें हों, तो $\boldsymbol{a + ib}$ को सम्मिश्र संख्या कहते हैं। सामान्यतः इसे z से व्यक्त करते हैं, अर्थात् $\boldsymbol{z = a + ib}$

$a + ib$ को **क्रमित युग्म (a, b)** से भी निरूपित करते हैं, जहाँ a तथा b का क्रम अपरिवर्तनीय होता है। $\boldsymbol{a}$ को इसका वास्तविक भाग (Real Part) तथा $\boldsymbol{b}$ को इसका काल्पनिक भाग (Imaginary part) कहते हैं। इसे क्रमशः **Re(z)** तथा **Im(z)** से व्यक्त किया जाता है।

जैसे : $-5 + 4i$, एक सम्मिश्र संख्या है, जहाँ वास्तविक भाग $= -5$, काल्पनिक भाग $= 4$

10.2.1 पूर्णतः वास्तविक तथा पूर्णतः काल्पनिक सम्मिश्र संख्यायें (Purely Real and Purely Imaginary Complex Number)

यदि z कोई सम्मिश्र संख्या हो, तो इसे

(i) पूर्णतः वास्तविक कहा जाता है यदि इनका काल्पनिक भाग शून्य हो अर्थात् $\text{Im}(z) = 0$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(ii) पूर्णतः काल्पनिक कहा जाता है, यदि इसका वास्तविक भाग शून्य हो अर्थात् $\text{Re}(z)=0$.
जैसे, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1, 2$ इत्यादि पूर्णतः वास्तविक तथा $3i, \sqrt{2}i, \frac{3}{4}i$ आदि पूर्णतः काल्पनिक हैं।

10.2.2 संयुग्मी सम्मिश्र संख्या (Conjugate Complex Number) :

यदि $z = a + ib$ कोई सम्मिश्र संख्या हो तो इसका संयुग्मी $a - ib$ से दिया जाता है तथा इसे $\bar{z} = a - ib$ से सूचित किया जाता है।

जैसे : $z = 7 + 4i$ का संयुग्मी, $\bar{z} = 7 - 4i$ है तथा $z = -8 - 3i$ का संयुग्मी $\bar{z} = -8 + 3i$ है।

इस तरह दो संयुग्मी सम्मिश्र संख्याओं के वास्तविक भाग समान तथा काल्पनिक भाग समान किंतु चिह्न में विपरीत होते हैं।

10.3 सम्मिश्र संख्याओं के गुण (Properties of Complex Numbers)

1. (i) सम्मिश्र संख्याओं का **योग, अंतर, गुणनफल** तथा **भागफल** एक **सम्मिश्र संख्या** होता है।
माना $z_1 = a_1 + i\,b_1$ तथा $z_2 = a_2 + i\,b_2$, तो
योगफल : $z_1 + z_2 = a_1 + i\,b_1 + a_2 + i\,b_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = x + i\,y$ (माना) [सम्मिश्र]

(ii) अंतर : $z_1 - z_2 = (a_1 + i\,b_1) - (a_2 + i\,b_2) = (a_1 - a_2) + i\,(b_1 - b_2) = P + i\,Q$ (माना) [सम्मिश्र]

(iii) गुणनफल : $(a_1 + i\,b_1)(a_2 + i\,b_2) = a_1a_2 + i(b_1a_2 + b_2a_1) + i^2 b_1b_2$
$= (a_1a_2 - b_1b_2) + i\,(b_1a_2 + b_2a_1) = R + iS$ (माना) [सम्मिश्र]

(iv) भागफल : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + i\,b_1}{a_2 + i\,b_2} = \frac{a_1 + i\,b_1}{a_2 + i\,b_2} \times \frac{a_2 - i\,b_2}{a_2 - i\,b_2}$ [हर का परिमेयीकरण करने पर]

$$= \frac{a_1a_2 + i\,(b_1a_2 - a_1b_2) - i^2 b_1b_2}{a_2^2 - (i\,b_2)^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i\,(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} = \alpha + i\,\beta \quad \text{(माना)} \quad [\text{सम्मिश्र}]$$

इस तरह सम्मिश्र संख्याओं का **योग, अंतर, गुणनफल** तथा **भागफल** एक **सम्मिश्र संख्या** होती है।

2. यदि कोई सम्मिश्र संख्या शून्य के बराबर हो तो उनके वास्तविक भाग तथा काल्पनिक भाग अलग-अलग शून्य के बराबर होते हैं अर्थात् यदि $a + i\,b = 0$ हो तो $a = 0, b = 0$

3. यदि दो काल्पनिक संख्यायें परस्पर बराबर हों, तो उनके वास्तविक तथा काल्पनिक भाग अलग-अलग एक-दूसरे के बराबर होंगे अर्थात् यदि $a + i\,b = c + i\,d$ तो $a = c, b = d$

4. यदि दो सम्मिश्र संख्यायें परस्पर बराबर हों, तो उनके संयुग्मी भी परस्पर बराबर होंगे
अर्थात् यदि $a + ib = c + id$ तो $a - ib = c - id$

5. सम्मिश्र संख्यायें योग तथा गुणन के लिए **क्रम विनिमेय नियम** (commutative law), **साहचर्य नियम** (Associative law) तथा **वितरण नियम** (Distributive Law) का पालन करती हैं।
अर्थात् z_1, z_2 तथा z_3 कोई तीन सम्मिश्र संख्यायें हों, तो

(i) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
$z_1z_2 = z_2z_1$ (क्रम विनिमेय नियम)

(ii) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (साहचर्य नियम)
$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1z_2)\,z_3$ (साहचर्य नियम)

(iii) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ (वितरण नियम)

6. (i) **योज्य तत्समक** (Additive Identity) : किसी सम्मिश्र संख्या z के लिए $z + 0 = 0 + z = z$
अतः 0 (शून्य) को योग का योज्य तत्समक कहा जाता है।

(ii) **गुणन तत्समक** (Multiplicative Identity) : प्रत्येक सम्मिश्र संख्या z के लिए $z \times 1 = 1 \times z = z$
अतः 1 को सम्मिश्र संख्या का गुणन तत्समक कहा जाता है।

7. (i) **योज्य प्रतिलोम** (Additive Inverse) : प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ के लिए $z + (-z) = (-z) + z = 0$

AKS TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अतः $-z$ को z का योज्य प्रतिलोम कहा जाता है।

(ii) **गुणन प्रतिलोम** (Multiplicative Inverse) : प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $z = a + ib$ के लिए, $z \times z^{-1} = 1$, जहाँ

$$z^{-1} = \frac{1}{a+ib} \qquad \text{अर्थात्} \quad (a+ib) \times \frac{1}{(a+ib)} = 1$$

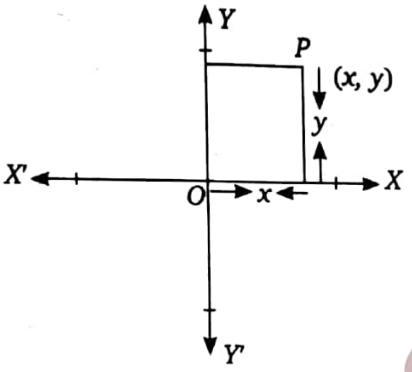
अतः z^{-1} को z का गुणन प्रतिलोम कहा जाता है।

नोट :

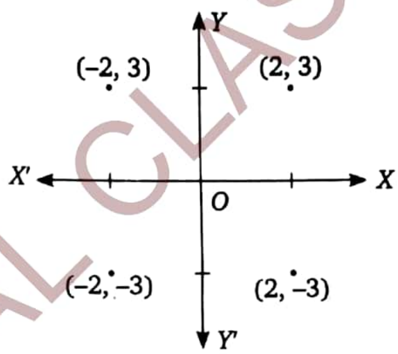
- $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \times \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

10.4 सम्मिश्र संख्याओं का ज्यामितीय निरूपण (Representation of Complex Numbers)

माना $X'OX$ तथा YOY' दो परस्पर लंब रेखायें हैं जो एक-दूसरे को O बिंदु पर काटती हैं। माना $X'OX$ तथा YOY' क्रमशः x-अक्ष तथा y-अक्ष हैं।



चित्र (i)



चित्र (ii)

किसी सम्मिश्र संख्या $x + iy$ को क्रमित युग्म (x, y) के रूप में लिखा जाता है तथा इसे xy-तल में बिंदु $P(x, y)$ [चित्र (i)] के रूप में दिखाया जा सकता है। xy-तल **सम्मिश्र तल** (Complex plane) या **आर्गेण्ड तल** (Argand Plane) के रूप में जाना जाता है। x-अक्ष को वास्तविक अक्ष (Real Axis) तथा y-अक्ष को काल्पनिक अक्ष कहते हैं। स्पष्टतः x-अक्ष पर ली गई सभी संख्यायें वास्तविक तथा y-अक्ष पर ली गई सभी संख्यायें काल्पनिक होंगी।

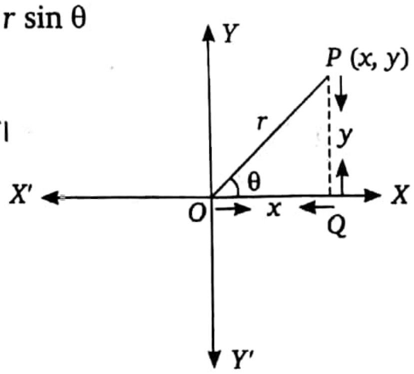
बिंदु (2, 3), (–2, 3), (–2, –3) तथा (2, –3) को आर्गेण्ड तल में ऊपर चित्र (ii) में दिखाया गया है।

10.5 सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय रूप (Polar Form of a complex Number)

माना $x + iy$ एक सम्मिश्र संख्या है जो किसी सम्मिश्र तल में $P(x, y)$ से दी जाती है।

माना $\angle XOP = \theta$ तथा $|OP| = r$ तथा $z = x + iy$ तो $P(r, \theta)$ को P का **ध्रुवीय नियामक** कहते हैं तथा मूल बिंदु को **ध्रुव (Pole)** कहते हैं।

चित्र से स्पष्ट है $\cos\theta = \frac{x}{r}$ या $x = r\cos\theta$ तथा $\sin\theta = \frac{y}{r}$ या $y = r\sin\theta$



अतः $\boldsymbol{z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

यह z का ध्रुवीय रूप (Polar Form) या कोणांक-मापांक रूप कहलाता है।

10.5.1 मापांक (Modulus)

यदि $z = x + iy$ कोई सम्मिश्र संख्या हो, तो $|z|$ को इसका मापांक कहते हैं तथा

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

इसका मान हमेशा धनात्मक होता है।

जैसे : यदि $z = 3 + 4i$ तो $|z| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

10.5.2 कोणांक (Amplitude or Argument)

यदि $z = x + iy$ जहाँ $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ तो θ को सम्मिश्र संख्या z का **कोणांक (Argument)** कहा जाता है तथा इसे **arg z** या **amp z** से सूचित किया जाता है तथा इसका मान $\theta = \tan^{-1}(y/x)$

कोणांक का मान अद्वितीय नहीं होता। यदि कोणांक का एक मान θ है, तो $2n\pi + \theta$, जहाँ $n = 0, 1, 2 \ldots$ इसके व्यापक मान को बताता है।

जैसे : यदि $z = 3 + 4i$ तो कोणांक $\theta = \tan^{-1} 4/3$

10.5.3 कोणांक का मुख्य मान (Principal value of Argument)

θ का वह मान जो $-\pi < \theta \le \pi$ को संतुष्ट करता है, कोणांक का मुख्य मान कहलाता है। कोणांक निकालने में θ का मुख्य मान लेते हैं।

10.6 किसी सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ को ध्रुवीय रूप में व्यक्त करना (To Express complex Number $z = x + iy$ in Polar Form)

किसी सम्मिश्र संख्या को ध्रुवीय रूप में व्यक्त करने के लिए हमें सर्वप्रथम उसका मापांक r तथा कोणांक θ का मान ज्ञात करना पड़ता है।

माना $z = x + iy$ तथा $x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ...(1)

तो तुलना से $x = r\cos\theta$ तथा $y = r\sin\theta$

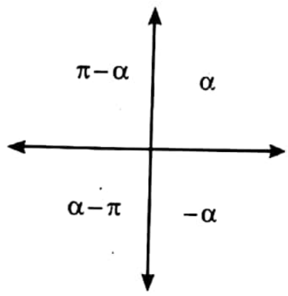
दोनों ओर वर्ग कर जोड़ने पर, $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$\therefore$ मापांक $= \boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{x^2 + y^2}}$ जो हमेशा धनात्मक होता है।

अब कोणांक θ के मान के निर्धारण के लिए

स्थिति I (Case I) : यदि z पूर्णतः वास्तविक है, तो यह x-अक्ष पर होगा तथा

(i) यदि $x > 0$ तो $\theta = 0$ (ii) $x < 0$ तो $\theta = \pi$



स्थिति II (Case II) : यदि z पूर्णतः काल्पनिक हो, तो यह y-अक्ष पर होगा तथा

(i) यदि $y > 0$, तो $\theta = \pi/2$ (ii) यदि $y < 0$, तो $\theta = -\pi/2$

स्थिति III (Case III) : माना $\tan\alpha = |\tan\theta|$, जहाँ $0 < \alpha < \pi/2$ तथा

(i) z प्रथम पाद में है अर्थात् $x > 0, y > 0$, तो $\theta = \alpha$

(ii) z द्वितीय पाद में है अर्थात् $x < 0, y > 0$, तो $\theta = \pi - \alpha$

(iii) z तृतीय पाद में है अर्थात् $x < 0, y < 0$, तो $\theta = \alpha - \pi$

(iv) z चतुर्थ पाद में है अर्थात् $x > 0, y < 0$, तो $\theta = -\alpha$

(v) तत्पश्चात् समी० (1) में r तथा θ का मान रखने से अभीष्ट ध्रुवीय रूप प्राप्त होता है।

[देखे प्रश्न 7]

टिप्पणी : प्रश्न हल करते समय सम्मिश्र संख्या को ध्रुवीय रूप में बदलने के लिए निम्नलिखित महत्त्वपूर्ण रूपों को याद रखें :

(i) $\mathbf{1 = \cos 0 + i\sin 0}$ **(ii)** $\mathbf{-1 = \cos\pi + i\sin\pi}$

(iii) $\mathbf{i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)}$ **(iv)** $\mathbf{-i = \cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)}$

10.7 मापांकों के गुण (Properties of Modulus)

प्रमेय 1. दो सम्मिश्र संख्याओं के योगफल का मापांक उनके मापांकों के योग से कभी अधिक नहीं हो सकता

अर्थात् $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$, जहाँ z_1 तथा z_2 सम्मिश्र संख्यायें हैं

प्रमेय II : दो सम्मिश्र संख्याओं के अंतर का मापांक उनके मापांकों के अंतर से कभी कम नहीं हो सकता

अर्थात् $|z_1 - z_2| \ge |z_1| - |z_2|$

प्रमेय III : दो सम्मिश्र संख्याओं के गुणनफल का मापांक उनके मापांकों के गुणनफल के बराबर होता है

अर्थात्
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

प्रमेय IV : दो सम्मिश्र संख्याओं के भागफल के मापांक उनके अलग-अलग मापांकों के भागफल के बराबर होता है

अर्थात्
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

14.8 कोणांक के गुण (Properties of Argument of a Complex Number)

(i) सम्मिश्र संख्याओं के गुणनफल का कोणांक उन संख्याओं के अलग-अलग कोणांकों के योग के बराबर होता है।

अत: यदि माना $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n$ अशून्य सम्मिश्र संख्यायें हैं जिनके कोणांक $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_n$ हैं, तो
$$\arg(z_1 z_2 \ldots z_n) = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n = \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots + \arg z_n$$

(ii) दो सम्मिश्र संख्याओं के अनुपात का कोणांक उनके अलग-अलग कोणांकों के अंतर के बराबर होता है।

अर्थात्
$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

टिप्पणी : $\arg z^n = \arg(z.z.z.z\ldots n$ बार$) = \arg z + \arg z + \arg z + \ldots n$ पदों तक $= n \arg z$

अर्थात्
$$\arg z^n = n \arg z$$

10.9 परिमेयीकरण (Rationalisation)

सामान्यत: अनुपात के रूप में दी गई सम्मिश्र संख्याओं को हल करते वक्त हरों के परिमेयीकरण की जरूरत पड़ती है। इसके लिए हर की सम्मिश्र संख्या के संयुग्मी से अंश तथा हर को गुणा कर दिया जाता है, जिससे हर वास्तविक संख्या में परिवर्तित हो जाती है।

जैसे : $\dfrac{3-4i}{5+4i} = \dfrac{3-4i}{5+4i} \times \dfrac{5-4i}{5-4i} = \dfrac{15-12i-20i-16i^2}{25-16i^2} = \dfrac{15+16-32i}{25+16} = \dfrac{31-32i}{41} = \dfrac{31}{41} - \dfrac{32}{41}i$

10.10 सम्मिश्र संख्या $a+ib$ का वर्गमूल (Square Root of $a+ib$ real of Complex Number)

क्रिया विधि : (i) $\sqrt{a+ib} = x+iy$ के रूप में लिखें।

(ii) दोनों पक्षों का वर्ग करें एवं वास्तविक एवं काल्पनिक भाग को बराबर करें। यह $x^2 - y^2$ तथा xy का मान होगा।

(iii) अब $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2$ का प्रयोग कर x^2+y^2 का मान प्राप्त करें।

(iv) (ii) तथा (iii) से प्राप्त समीकरण को हल कर x तथा y का मान प्राप्त करें।

(v) x तथा y का मान रखकर $x+iy$ का मान प्राप्त करें। यह अभीष्ट वर्गमूल होगा।

(vi) निम्न सूत्र के प्रयोग सभी $z = a+ib$ का वर्गमूल निकाला जा सकता है—
$$\sqrt{z} = \pm\left[\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} \pm \sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right], \text{ जहाँ } z = a \pm ib$$

ब्रैकेट के भीतर +ve चिन्ह का प्रयोग किया जाता है, यदि b, +ve है तथा −ve चिन्ह का प्रयोग किया जाता है। यदि b, −ve है। [देखे उदाहरण 9]

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. मान ज्ञात करें :

(i) $\sqrt{-49}$ (ii) i^{105} (iii) i^{-104} (iv) $i + \dfrac{1}{i}$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

हल : (i) $\sqrt{-49} = \sqrt{49 \times (-1)} = \sqrt{49 i^2}$ $[\because i^2 = -1]$

$= \pm 7i$ **उत्तर**

(ii) $i^{105} = i^{104} \times i = (i^2)^{52} \times i = (-1)^{52} \times i = 1 \times i = i$ **उत्तर**

(iii) $i^{-104} = \frac{1}{i^{104}} = \frac{1}{(i^2)^{52}} = \frac{1}{(-1)^{52}} = \frac{1}{1} = 1$

(iv) $i + \frac{1}{i} = \frac{i^2+1}{i} = \frac{-1+1}{i} = \frac{0}{i} = 0$ **उत्तर**

उदाहरण 2. $5i^{11} + 6i^7 - 9i^9$ को सरल करें।

हल : यहाँ $5i^{11} + 6i^7 - 9i^9 = 5i^{10} \times i + 6i^6 \times i - 9i^8 \times i$

$= 5(i^2)^5 \times i + 6(i^2)^3 \times i - 9 \times (i^2)^4 \times i$

$= 5 \times (-1)^5 \times i + 6 \times (-1)^3 \times i - 9 \times (-1)^4 \times i$ $[\because i^2 = -1]$

$= 5 \times (-1) \times i + 6 \times (-1) \times i - 9 \times 1 \times i = -5i - 6i - 9i = -20i$ **उत्तर**

उदाहरण 3. $4-5i$ का उसके संयुग्मी से योगफल एवं गुणनफल निकालें।

हल : दी गई संख्या $= 4-5i$ $\therefore$ संयुग्मी संख्या $= 4+5i$

अतः योगफल $= 4-5i+4+5i = 8$ **उत्तर**

तथा गुणनफल $= (4-5i)(4+5i) = (4)^2 - (5i)^2 = 16 - 25i^2$

$= 16 - 25 \times (-1) = 16 + 25 = 41$ **उत्तर**

उदाहरण 4. सिद्ध करें $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

हल : $\because \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i \Rightarrow \sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ **साबित हुआ।**

उदाहरण 5. सम्मिश्र संख्या $\frac{1+i}{1-i}$ को $a+ib$ के रूप में व्यक्त करें तथा उसका मापांक ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1994, 2005]

हल : यहाँ $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}$ [∵ हर के संयुग्मी से ऊपर-नीचे गुणा करने पर]

$= \frac{(1+i)^2}{(1)^2-(i)^2} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{1+2i-1}{1+1}$ $[\because i^2 = -1]$

$= \frac{2i}{2} = i = 0 + i \times 1 = a + ib$ जहाँ $a = 0, b = 1$

$\therefore$ मापांक $= |a+ib| = |0+i \times 1| = \sqrt{0+1^2}$ $[\because |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}]$

$= \sqrt{1} = 1$

उदाहरण 6. $\frac{7+5i}{3-2i}$ को $A+iB$ के रूप में लिखें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2011, 08, 18(S)]

हल : यहाँ $\frac{7+5i}{3-2i} = \frac{7+5i}{3-2i} \times \frac{3+2i}{3+2i}$ [अंश तथा हर में $3+2i$ से गुणा करने पर]

$= \frac{21+14i+15i+10i^2}{(3)^2-(2i)^2} = \frac{21-10+29i}{9-4i^2}$ $[\because i^2 = -1]$

$= \frac{11+29i}{9-4 \times (-1)}$ $[\because i^2 = -1]$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$= \frac{11 + 29i}{13} = \frac{11}{13} + \frac{29}{13}i$$ **उत्तर**

उदाहरण 7. निम्नलिखित को ध्रुवीय रूप में लिखिए :

(i) $1 + i$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004, 15]** (ii) $\frac{1+i}{1-i}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2009, 1994]**

हल : (i) यहाँ $z = 1 + i = r(\cos\theta + i\sin\theta) = x + iy$

$\therefore$ $x = 1, y = 1$ $\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ तथा $\tan\theta = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = 1$ $\therefore \theta = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

अत: $1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$ [$\because$ $x = 1, y = 1$; अत: z प्रथम पद में है]

(ii) $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)\times(1+i)}{(1-i)(1+i)}$ [परिमेयीकरण करने पर]

$$= \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

माना $i = 0 + 1 \times i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

वर्ग करके जोड़ने पर $r^2 = 1$ $\therefore$ $r = 1$ $\therefore$ $\cos\theta = 0$ तथा $\sin\theta = 1$ $\Rightarrow$ $\tan\theta = \infty = \tan\frac{\pi}{2}$

अत: $\theta = \frac{\pi}{2}$ [$\because$ z प्रथम पाद में है] $\therefore \frac{1+i}{1-i} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ **उत्तर**

उदाहरण 8. निम्न सम्मिश्र संख्याओं को ध्रुवीय रूप में व्यक्त करें।

(i) $\sqrt{3} + i$ (ii) $-1 + i\sqrt{3}$ (iii) $1 - i$

हल : माना $z = \sqrt{3} + i$ तथा $\sqrt{3} + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ तो $\sqrt{3} = r\cos\theta$ तथा $1 = r\sin\theta$

दोनों को वर्ग करके जोड़ने पर, $r^2 = 4$ $\therefore$ $r = 2$ $\therefore$ $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $\sin\theta = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$

अब $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{6}$ [$\because$ z प्रथम पाद में है]

अत: $\sqrt{3} + i = 2[\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)]$

(ii) माना $z = -1 + i\sqrt{3}$ तथा $-1 + i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\therefore$ $r\cos\theta = -1$ तथा $r\sin\theta = \sqrt{3}$

वर्ग करके जोड़ने पर, $r^2 = 4$ $\therefore$ $r = 2$

अत: $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ $\therefore$ $\tan\theta = -\sqrt{3}$

अत: $\tan\alpha = |\tan\theta| = |-\sqrt{3}| = \sqrt{3} = \tan(\pi/6)$ $\therefore$ $\alpha = \pi/6$

अत: $\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ [$\because$ z द्वितीय पाद में है]

$$\therefore \quad -1 + i\sqrt{3} = 2\left\{\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right\}$$

(iii) माना $1 - i = z$ तथा $1 - i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

अत: $r\cos\theta = 1$ तथा $r\sin\theta = -1$

वर्ग करके जोड़ने पर $r^2 = 2$ $\therefore$ $r = \sqrt{2}$

अत: $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ तथा $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore$ $\tan\theta = -1$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

माना $\tan\alpha = |\tan\theta| = |-1| = 1 = \tan(\pi/4)$ $\quad\therefore\quad \alpha = \pi/4$

अतः $$\theta = -\alpha = -\frac{\pi}{4}$$ [∵ z चतुर्थ पाद में है]

$$\therefore \quad 1 - i = \sqrt{2}\{\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)\}$$

उदाहरण 9. (i) $3 + 4i$ का वर्गमूल ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]**

(ii) सिद्ध करें $\sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2007]**

हल : (i) माना $x + iy = \sqrt{3+4i}$ ...(1)

$\Rightarrow \quad (x+iy)^2 = 3 + 4i \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 + 2ixy = 3 + 4i$

अब दोनों ओर वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को बराबर करने पर

$$x^2 - y^2 = 3 \qquad ...(2)$$

तथा $$2xy = 4 \qquad ...(3)$$

पुनः $(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = (3)^2 + 16 = 25$ [(2) तथा (3) से]

$\therefore \quad x^2 + y^2 = 5$ ...(4)

(2) तथा (4) को हल करने पर $x = \pm 2,\ y = \pm 1 \quad \therefore \quad \sqrt{3+4i} = \pm 2 + (\pm 1)i = \pm(2+i)$ **उत्तर**

द्वितीय विधि : यहाँ $z = 3 + 4i \Rightarrow a = 3, b = 4$ [$a + ib$ से तुलना करने पर]

अतः सूत्र $\sqrt{z} = \pm\left[\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right]$ से; $\sqrt{3+4i} = \pm\left[\sqrt{\frac{5+3}{2}} + i\sqrt{\frac{5-3}{2}}\right]$ [∵ $b > 0$]

$$= \pm(2+i)$$

(ii) यहाँ $i = \frac{1}{2}\times 2i \Rightarrow i = \frac{1}{2}(1 + 2i - 1) \Rightarrow i = \frac{1}{2}(1 + 2i + i^2) \Rightarrow i = \frac{1}{2}(1+i)^2$

$\therefore \quad \sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ **उत्तर**

टिप्पणी : इस प्रश्न को (i) की भाँति भी किया जा सकता है।

उदाहरण 10. यदि $a + ib = \sqrt{\frac{1+i}{1-i}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $a^2 + b^2 = 1$.

हल : $a + ib = \sqrt{\frac{1+i}{1-i}} \Rightarrow a + ib = \sqrt{\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}} = \sqrt{\frac{(1+i)^2}{1-i^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ ...(1)

$\Rightarrow \quad \overline{a+ib} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{1+i}) \Rightarrow a - ib = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ ...(2)

$$\therefore \quad (a+ib)(a-ib) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(1^2 - i^2) \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(1+1) = \frac{1}{2}\times 2 = 1$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 11. यदि $x + 4iy = ix + y + 3$ तो x तथा y का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]**

हल : यहाँ $x + 4iy = ix + y + 3 \Rightarrow x = y + 3$ तथा $4y = x$

(वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को बराबर करने पर)

$\Rightarrow \quad x - y = 3$ ...(1)

$x - 4y = 0$ ...(2)

$\Rightarrow \quad x = 4,\ y = 1$ [(1) व (2) को हल करने पर] **उत्तर**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 12. m का न्यूनतम मान ज्ञात करें जिसके लिए $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$ है।

हल : यहाँ $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{1+2i+i^2}{1+1} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i$

$\therefore \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1 \qquad \Rightarrow \quad i^m = 1$

अत: m का न्यूनतम मान जिसके लिए यह संबंध सत्य है

$m = 4 \qquad [\because \; i^4 = 1]$

उदाहरण 13. यदि $\frac{a+ib}{c+id} = p + iq$ तो $p^2 + q^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

हल : $p^2 + q^2 = (p+iq)(p-iq) = \frac{a+ib}{c+id} \times \frac{a-ib}{c-id} \qquad \left[\because \; p - iq = \overline{p+iq} = \frac{a-ib}{c-id}\right]$

$= \frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}$

उदाहरण 14. यदि z कोई सम्मिश्र संख्या है तथा $|z| + z = 2 + i$, तो z का मान बतायें।

हल : माना $z = x + iy$, तो $\quad |z| + z = 2 + i$

$\Rightarrow \quad |x+iy| + x + iy = 2 + i \qquad \Rightarrow \quad \{\sqrt{x^2+y^2} + x\} = -iy + 2 + i$

$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} + x - i(1-y) = 2 \qquad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} + x = 2 \qquad$ ...(1)

तथा $\quad y = 1 \qquad$ ...(2)

[वास्तविक एवं काल्पनिक भागों को बराबर करने पर]

$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} = 2 - x \qquad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = (2-x)^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 4 + x^2 - 4x \qquad \Rightarrow \quad x^2 + 1 = 4 + x^2 - 4x \qquad [y = 1$ रखने पर]

$\Rightarrow \quad 4 - 4x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{4}$ अत: $x = \frac{3}{4}, y = 1 \quad \therefore \quad z = x + iy = \frac{3}{4} + i$ **उत्तर**

उदाहरण 15. यदि $x = -2 - i\sqrt{3}$ तो $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 37$ का मान ज्ञात करें।

हल : दिया गया है $2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 37$

तथा $x = -2 - i\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x + 2 = -i\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2 = (-i\sqrt{3})^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = 3i^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = -3 \qquad \Rightarrow \quad x^2 + 4x + 7 = 0 \qquad$ ...(1)

अब $\quad 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 - x + 37 = (x^2 + 4x + 7)(2x^2 - 3x + 5) + 2$

$= 0 \times (2x^2 - 3x + 5) + 2 \qquad$ [(1) से]

$= 0 + 2 = 2$ **उत्तर**

उदाहरण 16. सिद्ध करें कि

(i) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \qquad$ (ii) $z + \bar{z}$ वास्तविक है

(iii) $z - \bar{z}$ शून्य है या काल्पनिक है, जहाँ z, z_1, z_2 सम्मिश्र संख्यायें हैं।

हल : माना $z_1 = a_1 + ib_1$ तो $\bar{z}_1 = a_1 - ib_1$

तथा $\quad z_2 = a_2 + ib_2$ तो $\bar{z}_2 = a_2 - ib_2$

अब $\quad \overline{z_1 - z_2} = \overline{(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2)} = \overline{(a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)}$

$= (a_1 - a_2) - i(b_1 - b_2) \qquad [\because \overline{x + iy} = x - iy]$

$= (a_1 - ib_1) - (a_2 - ib_2) = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

(ii) माना $z = a + ib$ तो $\bar{z} = a - ib$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अतः (ii) $z+\bar{z}=(a+ib)+(a-ib)=2a$ जो वास्तविक है

(iii) $z-\bar{z}=(a+ib)-(a-ib)=2ib$

अतः यदि $b=0$, तो $z-\bar{z}=0$ तथा $b\neq 0$ तो $z-\bar{z}$ पूर्णतः काल्पनिक होगा।

अतः $z-\bar{z}$ या तो शून्य है या पूर्णतः काल्पनिक है।

उदाहरण 17. हेत्वाभास बतायें :

$$-1=i\times i=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)\times(-1)}$$
$$=\sqrt{1}=1$$

हल : हम जानते हैं किसी वास्तविक संख्या a तथा b के लिए $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ तभी सत्य है जब a तथा b में से एक या तो 0 हो या धनात्मक हो

$\therefore$ $$\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\neq\sqrt{(-1)\times(-1)}$$

उदाहरण 18. यदि z_1 और z_2 सम्मिश्र संख्यायें हों तो सिद्ध करें कि

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2012]**

हल : माना $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2$ तो $|z_1|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}, |z_2|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

तथा $z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)$ $\Rightarrow$ $z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

तथा $z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)$ $\Rightarrow$ $z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$

अब $|z_1+z_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$ $\Rightarrow$ $|z_1+z_2|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2$ ...(1)

तथा $|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ $\Rightarrow$ $|z_1-z_2|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ ...(2)

[(1) + (2) से]

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$
$$=\{(x_1+x_2)^2+(x_1-x_2)^2\}+\{(y_1+y_2)^2+(y_1-y_2)^2\}$$
$$=2\{(x_1^2+x_2^2)+(y_1^2+y_2^2)\}=2\{(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)\}$$
$$=2\{|z_1|^2+|z_2|^2\}=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 19. यदि $(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih)=A+iB$, तो दिखायें

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2)=A^2+B^2$$

हल : (i) दी गई शर्तों से $(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih)=A+iB$

$\Rightarrow$ $|(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih)|=|A+iB|$

$\Rightarrow$ $|a+ib||c+id||e+if||g+ih|=|A+iB|$

$\Rightarrow$ $|a+ib|^2|c+id|^2|e+if|^2|g+ih|^2=|A+iB|^2$ (दोनों ओर वर्ग करने पर)

$\Rightarrow$ $(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2)=A^2+B^2$ $[\because |x+iy|^2=x^2+y^2]$ सिद्ध हुआ।

महत्वपूर्ण सूत्र एवं तथ्य

1. (i) काल्पनिक संख्या : $i=\sqrt{-1}$ को काल्पनिक संख्या कहा जाता है।

(ii) काल्पनिक संख्या के मान : $i^2=-1, i^3=i^2\times i=-i; i^4=(i^2)^2=1, i^5=i^4\times i=i\ldots i^{4n}=1$

$$i^{-1}=\frac{1}{i}=-i, i^2=\frac{1}{i^2}=-1\ldots i^{-4n}=\frac{1}{i^{4n}}=1$$

2. सम्मिश्र संख्या (i) यदि $z=a+ib$ जहाँ $a, b\in R$ तो z को सम्मिश्र संख्या कहते हैं

तथा $a=$ वास्तविक भाग $=\text{Re}(z)$; $b=$ काल्पनिक भाग $=\text{Im}(z)$

(ii) मापांक $|z|=|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$

(iii) कोणाक $\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}$, जहाँ $-\pi<\theta\leq\pi$ से θ का यह मान मुख्य कोणांक कहलाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$\pi-\alpha$	α
$\alpha-\pi$	$-\alpha$

(iv) **विभिन्न चतुर्थांशों में कोणांक :**

(a) यदि z पूर्णतः वास्तविक है तथा (i) $a>0$ तो $\theta=0$ (ii) $a<0$ तो $\theta=\pi$

(b) यदि z पूर्णतः काल्पनिक है, तो (i) $b>0$ तो $\theta=\pi/2$ (ii) $b<0$ तो $\theta=-\pi/2$

(c) यदि $\tan\alpha=|\tan\theta|$ जहाँ $0<\theta<\pi/2$ तो

(i) z प्रथम पाद में है $\Rightarrow \theta=\alpha$ (ii) z द्वितीय पाद में है $\Rightarrow \theta=\pi-\alpha$

(iii) z तृतीय पाद में है $\Rightarrow \theta=\alpha-\pi$ (iv) z चतुर्थ पाद में है $\Rightarrow \theta=-\alpha$

3. $z=a+ib$ का ध्रुवीय रूप, $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, जहाँ $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\theta=\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$,

जहाँ θ का मान मुख्य कोणांक के बाराबर लिया जाता है।

4. यदि $z=a+ib$, तब

(i) संयुग्मी $z=\bar{z}=a-ib$ (ii) योज्य प्रतिलोम $=-z=-(a+ib)$

(iii) गुणन प्रतिलोम $=z^{-1}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}=\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$

5. $z=a\pm ib$ तो, $\sqrt{a\pm ib}=\pm\left[\sqrt{\dfrac{|z|+a}{2}}\pm i\sqrt{\dfrac{|z|-a}{2}}\right]$, यदि b (+ve) है तो ब्रैकेट के भीतर (+) तथा यदि b (–ve) हो तो ब्रैकेट के भीतर (–) लें।

6. सम्मिश्र संख्याओं के मापांकों (modulus) से सम्बन्धित गुण :

(i) $|z^n|=|z|^n$ (iii) $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$ (iii) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

7. सम्मिश्र संख्याओं के कोणांकों (Arguments) से सम्बन्धित गुण :

(i) $(z_1\times z_2)$ का कोणांक $=z_1$ का कोणांक $+\,z_2$ का कोणांक

(ii) $(z_1\div z_2)$ का कोणांक $=z_1$ का कोणांक $-\,z_2$ का कोणांक

(iii) z^n का कोणांक $=n\times z$ का कोणांक

प्रश्नावली 10.1

1. निम्न के मान ज्ञात करें :

(i) i^{65} (ii) i^{-105} (iii) $\sqrt{-81}$ (iv) $i-1/i$ (v) $(-i)^{4n+2}$

2. (i) $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}$ (ii) $i^{104}+i^{109}+i^{114}+i^{119}$

(iii) $i^{74}+3i^{172}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]**

3. (i) $4+3i$ का संयुग्मी तथा मापांक बतायें। (ii) $4-3i$ का इसके संयुग्मी से गुणनफल निकालें।

(iii) $5+2i$ का योज्य प्रतिलोम बतायें। (iv) $6-2i$ का गुणन प्रतिलोम बतायें।

(v) $3+2i$ तथा इसके संयुग्मी का योगफल बतायें।

4. सरल करें :

(i) $(2+3i)(5-4i)$ (ii) $(2+\sqrt{-3})(2-\sqrt{3}\,i)$ (iii) $(1-i)(1+i)$ (iv) $\dfrac{(a+i)^3-(a-i)^3}{(a+i)^2-(a-i)^2}$

(v) $\dfrac{(2-7i)(3+2i)}{1-5i}$ (vi) $(2+i)(3+2i)(1-3i)$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]**

(vii) $\dfrac{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}$ (viii) $\dfrac{3-6i}{4-2i}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(SB)]**

(ix) $\dfrac{3-6i}{2+4i}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2016]**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(x) $\frac{2+3i}{3-4i}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]**

5. निम्न को $a+ib$ के रूप में व्यक्त करें तथा मापांक बतायें :

(i) $\frac{1+i}{1-i}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994, 2005]** (ii) $\frac{1}{1-2i}+\frac{3}{1+4i}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1993]**

(iii) $\frac{(1+i)^2}{1-i}$ (iv) $\frac{1}{3+4i}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2010]**

(v) $\frac{7+5i}{3-2i}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2008, 11, 18(S)]** (vi) $\frac{4+i}{4-i}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994, 2009]**

6. निम्नलिखित को ध्रुवीय रूप में लिखें :

(i) -1 (ii) 1 (iii) i (iv) $-i$

(v) $3+3\sqrt{-1}$ (vi) $\frac{1+2i}{1-(1-i)^2}$ (vii) $1+i$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004, 15]**

(viii) $\frac{1+i}{1-i}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2009, 1994]**

7. निम्नांकित सम्मिश्र संख्याओं को ध्रुवीय रूप में लिखें :

(i) $-1+\sqrt{3}i$ (ii) $-1-i$ (iii) $-1-\sqrt{3}i$

8. निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं का वर्गमूल निकालें :

(i) $-5+12i$ (ii) $-4-3i$ (iii) i (iv) $-i$

(v) $-8i$ (vi) $5+12i$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2001, 2007]**

9. यदि $a^2+b^2=1$ तो सिद्ध करें $\frac{1+b+ia}{1+b-ia}=b+ia$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2008, 15, 17(S)]**

10. $\frac{z-1}{z+1}$ पूर्णतया काल्पनिक है तो सिद्ध करें कि $|z|=1$. **[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]**

11. A और B का मान बतायें यदि $\frac{2+3i}{1+i}=A+iB$

12. सिद्ध कीजिए $\sqrt{-i}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

13. x तथा y के वास्तविक मान ज्ञात करें यदि $\frac{x+y}{i}+x-y+4=0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1995]**

14. यदि $x+4iy=ix+y+3$ तो x और y का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]**

15. यदि $\frac{(x-2)+(y-3)i}{1+i}=1-3i$ तो x और y के वास्तविक मान बतायें।

16. $(1-i)x+(1+i)y=1-3i$ तो x तथा y के वास्तविक मान ज्ञात करें।

17. (i) यदि $x=2+\sqrt{-3}$ तो $4x^2+8x+35$ का मान बतायें।

(ii) यदि $x=2-\sqrt{-2}$ तो $x^3-3x^2+2x+10$ का मान बतायें।

18. (i) $\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}$ का कोणांक ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2010]**

(ii) $(2+3i)^2$ का मापांक तथा कोणांक ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2013]**

(iii) $\sqrt{\frac{1+i}{1-i}}$ का मापांक तथा कोणांक ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]**

19. निम्न सम्मिश्र संख्यायों को $a+ib$ के रूप में व्यक्त करें :

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(i) $(3+4i)^2$ (ii) $(1+2i)^3$

20. सम्मिश्र संख्याओं के लिए सिद्ध करें :

(a) (i) $(\bar{\bar{z}}) = z$ (ii) $z\bar{z} = |z|^2$ (iii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (iv) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

(v) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ (vi) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

(b) यदि z_1 और z_2 सम्मिश्र संख्यायें हों तो सिद्ध करें कि

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2012]

उत्तरमाला

1. (i) i (ii) $-i$ (iii) $\pm 9i$ (iv) $2i$ (v) -1 **2.** (i) 0 (ii) 0 (iii) -4

3. (i) सं० $4-3i$, मापांक 5 (ii) 25 (iii) $-(5+2i)$ (iv) $\dfrac{1}{6-2i}$ (iv) 6

4. (i) $22+7i$ (ii) 7 (iii) 2 (iv) $\dfrac{3a^2-1}{2a}$ (v) $\dfrac{105}{26}+\dfrac{83}{26}i$ (vi) $25-5i$ (vii) $\dfrac{2}{3}i$

(viii) $\dfrac{6}{5}-\dfrac{3}{10}i$ (ix) $-\left(\dfrac{9}{10}+\dfrac{6}{5}i\right)$ (ix) $-\dfrac{6}{25}+\dfrac{17}{25}i$

5. (i) $(0+i)$; 1 (ii) $\left(\dfrac{32}{85}-\dfrac{26}{85}i\right)$; $\dfrac{\sqrt{1700}}{85}$ (iii) $-1+i, \sqrt{2}$ (iv) $\dfrac{3}{25}-\dfrac{4}{25}i, \dfrac{1}{5}$

(v) $\dfrac{11}{13}+\dfrac{29}{13}i, \dfrac{\sqrt{962}}{13}$, (vi) $\dfrac{15}{17}+\dfrac{8}{17}i$, 1

6. (i) $\cos\pi + i\sin\pi$ (ii) $\cos 0 + i\sin 0$ (iii) $\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$ (iv) $\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2)$

(v) $3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ (vi) $\cos 0 + i\sin 0$

(vii) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ (viii) $\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}$

7. (i) $2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$ (ii) $\sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{-3\pi}{4}\right)\right]$ (iii) $2\left[\cos\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)\right]$

8. (i) $\pm(2+3i)$ (ii) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-3i)$ (iii) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ (iv) $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ (v) $\pm\{2(1-i)\}$

(vi) $\pm(3+2i)$

11. $A=\dfrac{5}{2}, B=\dfrac{1}{2}$ **13.** $x=-2, y=2$ **14.** $x=4, y=1$

15. $x=6, y=1$ **16.** $x=2, y=-1$ **17.** (i) 7 (ii) 4

18. (i) $\dfrac{\pi}{6}$ (ii) मापांक $=13$; कोणांक $=\tan^{-1}\left(-\dfrac{12}{5}\right)$ (iii) $1, \dfrac{\pi}{4}$

19. (i) $-7+24i$ (ii) $-11-2i$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अध्याय 11

डिमॉयवर प्रमेय (De Moivre's Theorem)

11.1 डिमॉयवर प्रमेय (De Moivre's Theorem)

फ्रांसीसी गणितज्ञ अब्राहम डिमॉयवर ने $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ का मान निकालने के लिए निम्नांकित प्रमेय दिया जो डिमॉयवर प्रमेय के नाम से जाना जाता है :

डिमॉयवर प्रमेय :

(i) यदि n कोई धनात्मक या ऋणात्मक पूर्णांक हो, तो

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin\theta$$

(ii) यदि n कोई धनात्मक या ऋणात्मक भिन्न हो, तो $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ के अनेक मानों में एक मान $\cos n\theta + i\sin n\theta$ है।

जैसे : (i) $(\cos\theta + i\sin\theta)^6 = \cos 6\theta + i\sin 6\theta$

(ii) $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-6} = \cos(-6)\theta + i\sin(-6)\theta = \cos 6\theta - i\sin 6\theta$

(iii) $(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{-1/2} = \cos\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2\theta\right] + i\sin\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2\theta\right]$

$$= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

11.2 उपसाध्य (Corollary)

यदि n कोई धनात्मक संख्या हो, तो

(i) $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos(-n)\theta + i\sin(-n)\theta = \cos n\theta - i\sin n\theta$

(ii) $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^n = [\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)]$

$$= \cos n\theta - i\sin n\theta$$

(iii) $(\cos\theta - i\sin\theta)^{-n} = [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^{-n} = \cos n\theta + i\sin n\theta$

(iv) $\dfrac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^n} = (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$

टिप्पणी : (i) डिमॉयवर प्रमेय के उपयोग के लिए दिए गए त्रिकोणमितीय व्यंजक को मानक रूप में $\cos\theta + i\sin\theta$ के रूप में होना चाहिए। यदि ऐसा नहीं है तो उसे पहले उपरोक्त रूप में लाना होगा। जैसे :

$$(\sin\theta + i\cos\theta)^n \neq \sin n\theta + i\sin n\theta$$

किन्तु

$$\sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$\therefore \quad (\sin\theta + i\cos\theta)^n = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^n = \cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

विकल्प : $(\sin\theta + i\cos\theta)^n = \{i(\cos\theta - i\sin\theta)\}^n = i^n(\cos n\theta - i\sin n\theta)$

(ii) इस सूत्र के प्रयोग के लिए sin तथा cos के साथ लगे हुए कोण का मान समान होना चाहिए। जैसे $(\cos\alpha + i\sin\beta)^n$ का मान इस सूत्र से निकालना संभव नहीं है, यदि $\alpha \neq \beta$.

(iii) नीचे दिए गए सूत्र प्रश्नों के हल की दृष्टि से काफी महत्त्वपूर्ण हैं :

(i) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$

(ii) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta) = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)$

(iii) $(\cos\alpha - i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha-\beta) - i\sin(\alpha-\beta)$

(iv) $(\cos\alpha - i\sin\alpha)(\cos\beta - i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) - i\sin(\alpha+\beta)$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. निम्नांकित के मान बतायें :

(i) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)$

(ii) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos 5\alpha - i\sin 5\alpha)$

(iii) $(\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha)(\cos 3\alpha - i\sin 3\alpha)$

हल : (i) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha)(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)$

$= \cos(\alpha + 2\alpha + 3\alpha) + i\sin(\alpha + 2\alpha + 3\alpha)$

$[\because (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

$= \cos 6\alpha + i\sin 6\alpha$

(ii) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos 5\alpha - i\sin 5\alpha)$

$= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\{\cos(-5\alpha) + i\sin(-5\alpha)\}$ $\quad [\because \cos(-\theta) = \cos\theta, \sin(-\theta) = -\sin\theta]$

$= \cos(\alpha - 5\alpha) + i\sin(\alpha - 5\alpha) = \cos(-4\alpha) + i\sin(-4\alpha) = \cos 4\alpha - i\sin 4\alpha$

(iii) $(\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha)(\cos 3\alpha - i\sin 3\alpha) = \{\cos(-2\alpha) + i\sin(-2\alpha)\}\{\cos(-3\alpha) + i\sin(-3\alpha)\}$

$= \cos(-2\alpha - 3\alpha) + i\sin(-2\alpha - 3\alpha) = \cos(-5\alpha) + i\sin(-5\alpha) = \cos 5\alpha - i\sin 5\alpha$

उदाहरण 2. सिद्ध कीजिये :

$$(\sin\theta + i\cos\theta)^n = \cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

हल : बायाँ पक्ष $= (\sin\theta + i\cos\theta)^n = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}^n$

$= \cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) + i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\quad$ [De Moiver Th. से]

उदाहरण 3. $\left(\frac{1+\cos\phi + i\sin\phi}{1+\cos\phi - i\sin\phi}\right)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

हल : $\left(\frac{1+\cos\phi+i\sin\phi}{1+\cos\phi-i\sin\phi}\right)^n = \left(\frac{2\cos^2(\phi/2)+2i\sin(\phi/2)\cos(\phi/2)}{2\cos^2(\phi/2)-2i\sin(\phi/2)\cos(\phi/2)}\right)^n$

$$= \frac{(2\cos\phi/2)^n\ (\cos\phi/2+i\sin\phi/2)^n}{(2\cos\phi/2)^n\ (\cos\phi/2-i\sin\phi/2)^n}$$

$$= (\cos n\,\phi/2+i\sin n\,\phi/2)\,(\cos\phi/2-i\sin\phi/2)^{-n}$$

$$= (\cos n\,\phi/2+i\sin n\,\phi/2)\,(\cos n\,\phi/2+i\sin n\,\phi/2)$$

$$= (\cos n\,\phi/2+i\sin n\,\phi/2)^2$$

$$= \cos 2n\,\phi/2+i\sin 2n\,\phi/2$$

$$= \cos n\phi+i\sin n\phi$$

उदाहरण 4. $\frac{(\cos\theta-i\sin\theta)^{10}}{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{12}}$ को सरल कीजिए।

हल : $\frac{(\cos\theta-i\sin\theta)^{10}}{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{12}} = (\cos\theta-i\sin\theta)^{10}\ (\cos\alpha+i\sin\alpha)^{-12}$

$= (\cos 10\,\theta-i\sin 10\,\theta)\,(\cos 12\alpha-i\sin 12\alpha)$ $[\because \cos(-\theta)=\cos\theta,\ \sin(-\theta)=-\sin\theta]$

$$= \cos(10\,\theta+12\,\alpha)-i\sin(10\,\theta+12\,\alpha)$$

$$= \cos 2(5\,\theta+6\alpha)-i\sin 2(5\,\theta+6\alpha)$$

$= [\cos(5\theta+6\alpha)-i\sin(5\theta+6\alpha)]^2$ $[\because (\cos\theta-i\sin\theta)^n = \cos n\theta-i\sin n\theta]$

उदाहरण 5. यदि $x_r = \cos\frac{\pi}{2^r}+i\sin\frac{\pi}{2^r}$ तो सिद्ध करें :

$$x_1\,.\,x_2\,.\,x_3\ \ldots\infty = \cos\pi = -1$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2007, 11, 17(O), 18(SB)]

हल : $x_r = \cos\frac{\pi}{2^r}+i\sin\frac{\pi}{2^r}$ में $r = 1, 2, 3, \ldots$ रखने पर

$x_1 = \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; $x_2 = \cos\frac{\pi}{2^2}+i\sin\frac{\pi}{2^2}$; $x_3 = \cos\frac{\pi}{2^3}+i\sin\frac{\pi}{2^3}$; ....

∴ बायाँ पक्ष (L.H.S.) $= x_1\,.\,x_2\,.\,x_3\ \ldots\infty$

$$= \left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2^2}+i\sin\frac{\pi}{2^2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{2^3}+i\sin\frac{\pi}{2^3}\right)\ldots\infty$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2^2}+\frac{\pi}{2^3}+\ldots\infty\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2^2}+\frac{\pi}{2^3}+\ldots\infty\right)$$

$= \cos\left[\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right]+i\sin\left[\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right]$ $[\because S_\infty = \frac{a}{1-r}$ यहाँ $a = \frac{\pi}{2}, r = \frac{1}{2}]$

$= \cos\left[\frac{\pi/2}{1/2}\right]+i\sin\left[\frac{\pi}{2}\Big/\frac{1}{2}\right] = \cos\pi+i\sin\pi = -1+i\times 0$ $\left[\begin{array}{l}\sin\pi=0\\ \cos\pi=-1\end{array}\right]$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$= -1 =$ दायाँ पक्ष (R.H.S.)

उदाहरण 6. सिद्ध करें : $(1+i)^n + (1-i)^n = (2)^{\frac{n}{2}+1} \cos\frac{n\pi}{4}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2002]

हल : $\because \quad 1+i = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right] = 2^{1/2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

इसी प्रकार $1-i = 2^{1/2}\left[\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$$\therefore \quad (1+i)^n + (1-i)^n = \left[2^{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n + \left[2^{1/2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$

$$= 2^{n/2}\left[\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right] + 2^{n/2}\left[\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right]$$

$$= 2^{n/2}\left[\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right]$$

$$= 2^{n/2} \times 2\cos\frac{n\pi}{4} = 2^{(n/2)+1}\cos\frac{n\pi}{4}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

उदाहरण 7. यदि α, β समीकरण $x^2 - 2x + 4 = 0$ के मूल हैं, तो सिद्ध करें $a^n + \beta^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$.

हल : $x^2 - 2x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + 3 = 0 \Rightarrow \quad (x-1)^2 = -3 = (\sqrt{3}i)^2$

$\Rightarrow \quad x - 1 = \pm\sqrt{3}i \qquad \Rightarrow \quad x = 1 \pm \sqrt{3}i$

माना $\alpha = 1 + \sqrt{3}i$ तथा $\beta = 1 - \sqrt{3}i$

तो $\alpha = 2\left[\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]$ तथा $\beta = 2\left[\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right]$

$$\therefore \quad \alpha^n + \beta^n = 2^n[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)]^n + 2^n[\cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3)]^n$$

$$= 2^n\left[\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right) + \left(\cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2^n \times \left[2\cos\frac{n\pi}{3}\right] = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$$

इति सिद्धम्

उदाहरण 8. यदि $2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$ तथा $2\cos\phi = y + \frac{1}{y}$ तो सिद्ध करें :

$$2\cos(\theta + \phi) = xy + \frac{1}{xy}$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2012]

हल : $\because \quad 2\cos\theta = x + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = 2\cos\theta \Rightarrow x^2 + 1 = 2x\cos\theta \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x\cos\theta + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2x\cos\theta + \cos^2\theta - \cos^2\theta + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - \cos\theta)^2 = -(1 - \cos^2\theta) = -\sin^2\theta$

$\Rightarrow \quad x - \cos\theta = \pm i\sin\theta \quad \Rightarrow \quad x = \cos\theta \pm i\sin\theta$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

इसी तरह, $y+\frac{1}{y}=2\cos\phi$, तो $y=\cos\phi\pm i\sin\phi$

अब $x=\cos\theta+i\sin\theta$ तथा $y=\cos\phi+i\sin\phi$ लेने पर

$$xy+\frac{1}{xy}=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\phi+i\sin\phi)+\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\phi+i\sin\phi)}$$

$$=[\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)]+\frac{1}{\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)}$$

$$=[\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)]+[\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)]^{-1}$$

$$=[\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)]+[\cos(\theta+\phi)-i\sin(\theta+\phi)]=2\cos(\theta+\phi)$$ **इति सिद्धम्**

उदाहरण 9. यदि $x=\cos\alpha+i\sin\alpha;\ y=\cos\beta+i\sin\beta;\ z=\cos\gamma+i\sin\gamma$

तथा $x+y+z=0$ तो साबित करें $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]

हल : दी गई शर्तों से $x+y+z=0$

$\Rightarrow$ $\cos\alpha+i\sin\alpha+\cos\beta+i\sin\beta+\cos\gamma+i\sin\gamma=0$

$\Rightarrow$ $(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)+i(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=0$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0\\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0\end{array}\right\}$ ...(1)

$[\because x+iy=0 \Rightarrow x=0\ y=0]$

बायाँ पक्ष $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}$

$$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{-1}+(\cos\beta+i\sin\beta)^{-1}+(\cos\gamma+i\sin\gamma)^{-1}$$

$$=(\cos\alpha-i\sin\alpha)+(\cos\beta-i\sin\beta)+(\cos\gamma-i\sin\gamma)=0$$

$$(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)-i(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=0-i\times 0$$ [(1) से]

$=0=$ दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

महत्वपूर्ण सूत्र एवं तथ्य

De Movire's Theorem :

(a) $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$, जहाँ n धनात्मक अथवा ऋणात्मक पूर्णांक अथवा भिन्न है।

(b) यदि n धनात्मक हों, तो

(i) $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\cos n\theta-i\sin n\theta$

(ii) $(\cos\theta-i\sin\theta)^{n}=\cos n\theta-i\sin n\theta$

(iii) $(\cos\theta-i\sin\theta)^{-n}=\cos n\theta+i\sin n\theta$

(c) (i) $(\cos\alpha_1+i\sin\alpha_1)(\cos\alpha_2+i\sin\alpha_2)\ldots(\cos\alpha_n+i\sin\alpha_n)$

$$=\cos(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)+i\sin(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)$$

(ii) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta-i\sin\beta)=\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$

(iii) $(\cos\alpha-i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha-\beta)-i\sin(\alpha-\beta)$

(iv) $(\cos\alpha-i\sin\alpha)(\cos\beta-i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)-i\sin(\alpha+\beta)$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

प्रश्नावली 11.1

निम्नलिखित के मान बतायें :

1. $\left(\cos\frac{\pi}{10} - i\sin\frac{\pi}{10}\right)^{-10}$

2. $\frac{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^4}{(\cos 4\theta - i\sin 4\theta)^3}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1990]**

3. $\left(\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\sin\theta + i\cos\theta}\right)^4$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2016]**

4. $(\cos\theta + i\sin\theta)^6 (\cos\theta - i\sin\theta)^{-3}$

5. (i) $(\cos 3\theta - i\sin 3\theta)^{5/3} (\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^{3/4}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1990]**

(ii) $(\cos\theta + i\sin\theta)^4 (\cos\theta - i\sin\theta)^3$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]**

6. $\frac{(\cos\theta - i\sin\theta)^{10}}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{12}}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]**

7. $\frac{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^4 (\cos 4\theta - i\sin 4\theta)^5}{(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)^3 (\cos 5\theta + i\sin 5\theta)^{-4}}$

8. $\frac{(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)}{(\cos\gamma + i\sin\gamma)(\cos\delta + i\sin\delta)}$

9. सिद्ध कीजिए $(\sin\theta + i\cos\theta)^{2n} = (-1)^n (\cos 2n\theta - i\sin 2n\theta)$

10. सिद्ध करें $(1 + \cos\theta + i\sin\theta)^n + (1 + \cos\theta - i\sin\theta)^n = 2^{n+1} \cos^n \theta/2 . \cos\frac{n\theta}{2}$

11. $\left(\frac{1 + \sin\phi + i\cos\phi}{1 + \sin\phi - i\cos\phi}\right)^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2} - n\phi\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{2} - n\phi\right)$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2014]**

12. (i) यदि $\alpha + \beta = \pi/2$ तो सिद्ध करें $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = i$

(ii) यदि $\alpha + \beta = \pi$ तो $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = -1$

13. यदि $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$ तो $x^2 + \frac{1}{x^2}$ तथा $x^2 - \frac{1}{x^2}$ का मान बतायें।

14. यदि $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 0$ तो सिद्ध करें :

(i) $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 3\cos(\alpha + \beta + \gamma)$

(ii) $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 3\sin(\alpha + \beta + \gamma)$

[**संकेत :** $a + b + c = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos\beta + i\sin\beta) + (\cos\gamma + i\sin\gamma) = 0$

$\therefore \quad a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ अब D. Th. का प्रयोग करें]

15. यदि $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$ तो

(a) (i) $x^m + \frac{1}{x^m}$ का मान बतायें। (ii) $x^m - \frac{1}{x^m}$ का मान बतायें।

(iii) दिखायें $x^6 + \frac{1}{x^6} = 2\cos 6\theta$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(b) यदि $2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$ तथा $2\cos\phi = y + \frac{1}{y}$ तो सिद्ध करें :

(i) $2\cos(\theta+\phi) = xy + \frac{1}{xy}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2012, 15]**

(ii) $2\cos(\theta-\phi) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2008, 2000]**

16. यदि n धनात्मक पूर्णांक है, तो दिखायें

(i) $(\sqrt{3}+i)^n + (\sqrt{3}-i)^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{6}$ **[संकेत :** ध्रुवीय रूप में बदलकर हल करें]

(ii) **सिद्ध करें :** $(1+i)^n + (1-i)^n = (2)^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2002]**

17. यदि $x_r = \cos\frac{\pi}{2^r} + i\sin\frac{\pi}{2^r}$ तो सिद्ध करें :

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots \infty = \cos\pi = -1$$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2007, 11]**

उत्तरमाला

1. -1

2. $\cos 24\theta + i\sin 24\theta$

3. $\cos 8\theta + i\sin 8\theta$

4. $\cos 9\theta + i\sin 9\theta$

5. (i) $\cos 2\theta - i\sin 2\theta$ (ii) $\cos\theta + i\sin\theta$

6. $[\cos(5\theta+6\alpha) - i\sin(5\theta+6\alpha)]^2$

7. 1

8. $\cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta) + i\sin(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$

13. $2\cos 2\alpha, 2i\sin 2\alpha$

15. (a) (i) $2\cos m\theta$ (ii) $2i\sin m\theta$

11.3 डिमॉयवर प्रमेय की सहायता से $(a+ib)^{1/n}$ का मूल ज्ञात करना (Finding roots of $(a+ib)^{1/n}$ with the help of De Moivre's Theorem)

डिमॉयवर प्रमेय की सहायता से $(a+ib)^{1/n}$ का मूल ज्ञात करने के लिए निम्न कार्य विधि अपनाई जाती हैं।

कार्यविधि :

(i) दी हुई संख्या (सम्मिश्र अथवा वास्तविक) को ध्रुवीय रूप $[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{1/n}$ के रूप में लिखें।

(ii) θ की जगह $2r\pi + \theta$ रखें।

(iii) इसके बाद डिमॉयवर प्रमेय का प्रयोग करें।

(iv) प्राप्त मान में $r = 0, 1, 2, \ldots n-1$ रखकर अभीष्ट मूल प्राप्त करें।

नोट :

- यदि $r = n, n+1, n+i \ldots$ लिया जाए, तो मूल के मानों की पुनरावृत्ति होती है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. डिमॉयवर प्रमेय के प्रयोग से निम्न के समस्त मान ज्ञात करें :

(i) $(1)^{1/3}$ (ii) $(-i)^{1/4}$

हल : (i) $1 = 1 + i \times 0 = \cos 0° + i \sin 0°$ $\Rightarrow$ $(1)^{1/3} = (\cos 0° + i \sin 0°)^{1/3}$

$$\Rightarrow (1)^{1/3} = [\cos(2r\pi + 0) + i \sin(2r\pi + 0)]^{1/3} = [\cos 2r\pi + i \sin 2r\pi]^{1/3}$$

$$= \cos \frac{2}{3} r\pi + i \sin \frac{2}{3} r\pi$$

$r = 0, 1, 2$ रखने पर $(1)^{1/3}$ के मान

$\cos 0 + i \sin 0, \cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi$ तथा $\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi$ हैं अर्थात् $(1)^{1/3}$ के मान

$1, \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ तथा $\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ है [कोणों (angles) के मान रखने पर]

(ii) $(-i)^{1/4} = (0 - i \times 1)^{1/4} = (\cos \pi/2 - i \sin \pi/2)^{1/4}$

$$= [\cos(2r\pi + \pi/2) - i \sin(2r\pi + \pi/2)]^{1/4} = \cos \frac{1}{4}\left(2r + \frac{1}{2}\right)\pi - i \sin \frac{1}{4}\left(2r + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$= \cos \frac{1}{8}(4r + 1)\pi - i \sin \frac{1}{8}(4r + 1)\pi$$

$r = 0, 1, 2, 3$ रखने पर अभीष्ट मान

$\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8}, \cos \frac{5\pi}{8} - i \sin \frac{5\pi}{8}, \cos \frac{9\pi}{8} - i \sin \frac{9\pi}{8}$ तथा $\cos \frac{13}{8}\pi - \sin \frac{13\pi}{8}$ है।

उदाहरण 2. डिमॉयवर प्रमेय (Th) की सहायता से दिए गए समीकरणों को हल करें :

(i) $x^4 + 1 = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2009, 06, 2013]**

(ii) $z^6 + z^4 - z^2 - 1 = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]**

(iii) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]**

हल : (i) $x^4 + 1 = 0$

$$\Rightarrow x^4 = -1 = -1 + i \times 0 = \cos \pi + i \sin \pi = \cos(2r\pi + \pi) + i \sin(2r\pi + \pi)$$

$$\therefore x = [\cos(2r\pi + \pi) + i \sin(2r\pi + \pi)]^{1/4}$$

$$= \left[\cos \frac{1}{4}(2r\pi + \pi) + i \sin \frac{1}{4}(2r\pi + \pi)\right] = \left[\cos\left(\frac{\pi r}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi r}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$r = 0, 1, 2, 3$ रखने पर x के अभीष्ट मान क्रमशः

$$\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

$$\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + i)$$

$$\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \text{ हैं।}$$

नोट :

- $\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ आदि।

(ii) $z^6+z^4-z^2-1=0 \Rightarrow z^4(z^2+1)-1(z^2+1)=0 \Rightarrow (z^4-1)(z^2+1)=0$

$\therefore$ $z^4-1=0$ या $z^2+1=0$

जब $z^4-1=0$ तो $z^4=1$

या $z=(1)^{1/4}=(\cos 0+i\sin 0)^{1/4}=(\cos 2r\pi+i\sin 2r\pi)^{1/4}$, जहाँ r धनात्मक पूर्णांक है,

$$=\cos\frac{\pi r}{2}+i\sin\frac{\pi r}{2}$$

अब $r=0, 1, 2, 3$ रखने पर z के अभीष्ट मान

$$\cos 0+i\sin 0=1+i\times 0=1;\ \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=0+i\times 1=i$$

$$\cos\pi+i\sin\pi=-1+i\times 0=-1;\ \cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi=0+i\times -1=-i \text{ हैं}$$

तथा जब $z^2+1=0$ तो $z^2=-1=\cos\pi+i\sin\pi$

$\therefore$ $z=(\cos\pi+i\sin\pi)^{1/2}=[\cos(2r\pi+\pi)+i\sin(2r\pi+\pi)]^{1/2}$, जहाँ r धनात्मक पूर्णांक है,

$$=\left[\cos\frac{1}{2}(2r\pi+\pi)+i\sin\frac{1}{2}(2r\pi+\pi)\right]$$

$r=0$ तथा 1 रखने पर z के अभीष्ट मान $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$

$$\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=0-i\times 1=-i$$

(iii) $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]**

दोनों तरफ $(x-1)$ से गुणा करने पर

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0\times(x-1)$$

i.e., $x^5+x^4+x^3+x^2+x-x^4-x^3-x^2-x-1=0$

i.e., $x^5-1=0$ या $x^5=1$

या $x=(1)^{1/5}=(\cos 0+i\sin 0)^{1/5}=\{\cos(2r\pi+0)+i\sin(2r\pi+0)\}$, जहाँ r धनात्मक पूर्णांक है,

$$=[\cos(2r\pi)+i\sin(2r\pi)]^{1/5}=\cos\frac{1}{5}2r\pi+i\sin\frac{1}{5}2r\pi$$

$r=0, 1, 2, 3, 4$ रखने पर x के अभीष्ट मान प्राप्त होंगे।

$r=0$ रखने पर $\cos 0+i\sin 0=1$ किन्तु यह $x-1=0$ का मूल है।

अत: अभीष्ट मूल $r=1, 2, 3, 4$ रखने से प्राप्त होगा, जो

$$\cos\frac{2\pi}{5}\pm i\sin\frac{2\pi}{5};\ \cos\frac{4\pi}{5}\pm i\sin\frac{4\pi}{5}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5} \text{ तथा } \cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5} \text{ हैं।}$$

किन्तु $\cos\frac{6}{5}\pi+i\sin\frac{6}{5}\pi=\cos\left(2\pi-\frac{4}{5}\pi\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{4\pi}{5}\right)=\cos\frac{4\pi}{5}-\sin\frac{4\pi}{5}$

तथा $\cos\frac{8}{5}\pi+i\sin\frac{8}{5}\pi=\cos\left(2\pi-\frac{2}{5}\pi\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{2}{5}\pi\right)=\cos\frac{2}{5}\pi-i\sin\frac{2}{5}\pi$

अतः अभीष्ट मान $\cos\frac{2\pi}{5}\pm i\sin\frac{2\pi}{5}$ तथा $\cos\frac{4\pi}{5}\pm i\sin\frac{4\pi}{5}$ हैं।

उदाहरण 3. डिमॉयवर प्रमेय (Theorem) का प्रयोग करते हुए $(1+i)^{1/3}$ को पूर्णतः हल करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2010]

हल : माना $\quad 1+i=r(\cos\theta+i\sin\theta) \Rightarrow r\cos\theta=1, r\sin\theta=1 \quad \ldots(1)$

[वास्तविक (real) तथा काल्पनिक (Imaginary) भाग की तुलना से]

$\Rightarrow \quad r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=1^2+1^2$

$\Rightarrow \quad r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=1+1 \quad \Rightarrow \quad r^2=2 \quad \Rightarrow \quad r=\sqrt{2}$

तथा $\quad \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\frac{1}{1} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta=1 \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{4}$

(1) में दोनों मान रखने पर

$$1+i=\sqrt{2}(\cos\pi/4+i\sin\pi/4)=\sqrt{2}[\cos(2r\pi+\pi/4)+i\sin(2r\pi+\pi/4)]$$

जहाँ r धनात्मक पूर्णांक है,

$$\therefore \quad (1+i)^{1/3}=(2^{1/2})^{1/3}[\cos(2r\pi+\pi/4)+i\sin(2r\pi+\pi/4)]^{1/3}$$

$$=2^{1/6}\left[\cos\frac{1}{3}\left(\frac{8r\pi+\pi}{4}\right)+i\sin\frac{1}{3}\left(\frac{8r\pi+\pi}{4}\right)\right]$$

$$=2^{1/6}\left[\cos\frac{1}{12}(8r+1)\pi+i\sin\frac{1}{12}(8r+1)\pi\right]$$

$r=0, 1, 2$ रखने पर अभीष्ट मान क्रमशः

$2^{1/6}\left[\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right]$, $2^{1/6}\left[\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3}{4}\pi\right]$ तथा $2^{1/6}\left[\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right]$ हैं।

प्रश्नावली 11.2

निम्नलिखित के संपूर्ण मान प्राप्त करें :

1. (i) $(1)^{1/6}$ (ii) $(i)^{1/4}$

2. $(1+\sqrt{3}i)^{1/3}$

3. (i) $(1+i)^{1/3}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2010]**

(ii) $(1+i)^{2/3}$ $\left[\textbf{संकेत :} \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{2/3}=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{1/3}\right]$

4. $(1+i)^{1/7}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

5. निम्न समीकरणों को हल करें :

(i) $x^3+1=0$ (ii) $x^5+1=0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2014 (O), 15, 17(S)]**

(iii) $x^5-1=0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]**

(iv) $x^4-1=0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]**

(v) $x^7+x^4+x^3+1=0$

(vi) $x^4-x^3+x^2-x+1=0$ **[संकेत :** $(1+x)(1-x+x^2-x^3+x^4)=1+x^5$**]**

(vii) $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]**

(viii) $x^4+1=0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2006, 09, 13]**

उत्तरमाला

1. (i) $1, -1, \frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}; \cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8};\ \cos\frac{9\pi}{8};+i\cos\frac{9\pi}{8}; \cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}$

2. $2^{1/3}\left[\cos\frac{r\pi}{9}+i\sin\frac{r\pi}{9}\right]$ जहाँ $r=1, 7, 13$

3. (i) $2^{1/6}\left[\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right], 2^{1/6}\left[\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right] 2^{1/6}\left[\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right]$

(ii) $2^{1/3}\left[\cos\frac{4r\pi+\pi}{6}+i\sin\frac{4r\pi+\pi}{6}\right], r=0, 1, 2$

4. $2^{1/14}\left[\cos\frac{8r\pi+\pi}{28}+i\sin\frac{8r\pi+\pi}{28}\right], r=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

5. (i) $-1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ (ii) $\cos\frac{(2r+1)\pi}{5}+i\sin\frac{(2r+1)\pi}{5}, r=0, 1, 2, 3, 4$

(iii) $\cos\frac{2r\pi}{5}+i\sin\frac{2r\pi}{5}, r=0, 1, 2, 3, 4$ (iv) $1, i, -1, -i$

(v) $\cos(2r+1)\frac{\pi}{4}+i\sin(2r+1)\frac{\pi}{4}, r=0, 1, 2, 3$

तथा $\cos(2n+1)\frac{\pi}{3}+i\sin(2n+1)\frac{\pi}{3}, n=0, 1, 2$

(vi) $\left(\cos\frac{\pi}{5}\pm i\sin\frac{\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{5}\pm i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$ (vii) $\cos\frac{2\pi}{5}\pm i\sin\frac{2\pi}{5}; \cos\frac{4\pi}{5}\pm i\sin\frac{4\pi}{5}$

(viii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \pm(-1+i)$

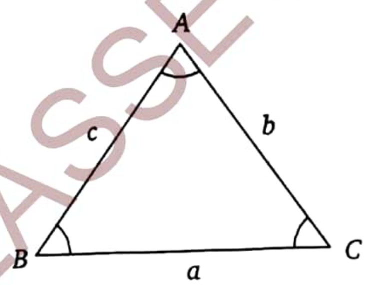
AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अध्याय 12

त्रिभुज की भुजाओं और कोणों में सम्बन्ध (Relations between Sides and Angles of a Triangle)



हम जानते हैं कि किसी त्रिभुज के छः अंग होते हैं, तीन कोण तथा तीन भुजायें।

त्रिभुज ABC के कोणों $\angle BAC, \angle ABC$ तथा $\angle ACB$ को क्रमशः कैपिटल लेटर (Capital Letters) A, B तथा C से व्यक्त किया जाता है तथा उनके सामने की भुजाओं BC, CA तथा AB को क्रमशः स्मॉल लेटर (Small Letters) a, b तथा c से सूचित किया जाता है। सामान्यतः त्रिभुज के क्षेत्रफल को Δ द्वारा सूचित किया जाता है। इन छः अंगों के बीच परस्पर संबध होते हैं। जैसे—ज्यामिति (Geometry) से किसी त्रिभुज के लिए हम निम्नलिखित संबधों को जानते हैं :

1. $A + B + C = \pi$
2. $a + b > c, b + c > a, c + a > b$

इस अध्याय में हम त्रिभुज के कोणों तथा भुजाओं के त्रिकोणमितीय संबधों के बारे में पढ़ेंगे।

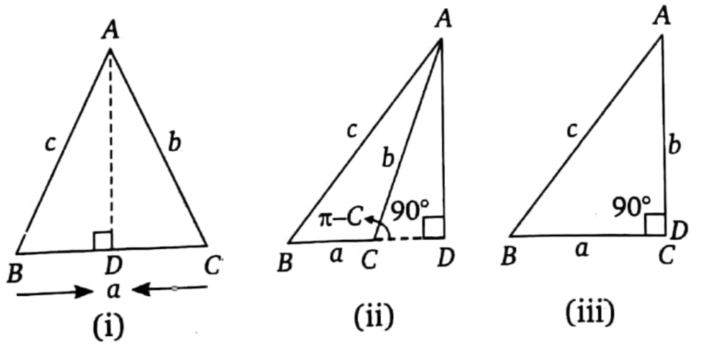
12.1 ज्या नियम (Sine Rule)

किसी ΔABC में

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

किसी त्रिभुज की भुजायें सम्मुख कोणों की ज्याओं के (sines) समानुपाती होती हैं।

प्रमाण :



माना ABC एक त्रिभुज है तथा C इसका न्यूनकोण (Acute Angle), (चित्र-i), अधिक कोण (Abtuse Angle) (चित्र-ii) अथवा समकोण (Right Angle) (चित्र-iii) है। अब A से BC पर एक लंब AD खींचिये जो BC से D पर मिलता है। अधिककोण त्रिभुज जिसे चित्र (ii) में दिखाया गया है, में यह BC के बढ़े भाग पर खींचा गया है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

ΔABD से, [चित्र (i)]

$$\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{c} \quad \therefore \quad AD = c \sin B$$

फिर ΔACD से

$\Rightarrow$ $$\sin C = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{b} \quad \therefore \quad AD = b \sin C$$

पुन: ΔADC से [चित्र (ii)]

$$\sin ACD = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD = AC \sin ACD = b \sin(\pi - C) = b \sin C$$

$[\because \sin(\pi - C) = \sin C]$

अतः दोनों चित्रों से $$AD = c \sin B = b \sin C$$

अर्थात् $$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

पुनः जब C समकोण है [चित्र-iii]

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \quad \text{या} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{1} = \frac{c}{\sin 90^\circ} = \frac{c}{\sin C} \qquad [\because \angle C = 90^\circ]$$

इस तरह हम देखते हैं कि तीनों ही दशा में

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

इसी प्रकार C से AB पर लंब डालकर सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$\therefore$ $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$ प्रमाणित हुआ।

नोट : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = K$ (माना)

तो $a = K \sin A,\ b = K \sin B,\ c = K \sin C$ तथा $\sin A = \frac{a}{K},\ \sin B = \frac{b}{K},\ \sin C = \frac{c}{K}$

12.2 कोज्या सूत्र (Cosine formula)

किसी ΔABC में एक कोण तथा तीनों भुजाओं के बीच के सम्बन्ध को निम्न सूत्रों से व्यक्त किया जाता है :

(i) $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$ **या** $\mathbf{\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1982]**

(ii) $\mathbf{b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B}$ **या** $\mathbf{\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1972]**

(iii) $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$ **या** $\mathbf{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1977]**

प्रमाण : $$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

स्थिति (Case) I : जब कोण C न्यूनकोण है तो [चित्र (i) धारा 12.1]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

ज्यामिति से ΔABC में

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD \quad \text{या} \quad c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C \quad \left[\because \cos C = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{b}\right]$$

$$\therefore \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

स्थिति (Case) II : जब $\angle C$ अधिक कोण (Obtuse Angle) है। [चित्र (ii) धारा 12.1]

ΔABC में ज्यामिति से,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC \cdot CD \quad \text{या} \quad c^2 = b^2 + a^2 + 2a(-b\cos C) \quad \left[\because \cos(\pi - C) = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{b}\right]$$

$$\therefore \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

स्थिति (Case) III : जब $\angle C = 90°$ [चित्र (iii) धारा 12.1]

तथा $AB^2 = AC^2 + BC^2$ [$\because$ समकोण ΔABC में कर्ण^2 = आधार^2 + लम्ब^2]

$$c^2 = b^2 + a^2 = b^2 + a^2 - 2ab \times 0 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad [\because \cos C = \cos 90° = 0]$$

$$\therefore \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

इस तरह तीनों ही स्थितियों में

$$\boxed{\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}} \quad i.e., \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

नोट :

- इसी तरह साबित किया जा सकता है कि

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \quad i.e., \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$$

तथा

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad i.e., \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

12.3 प्रक्षेप सूत्र (Projection Formula)

किसी ΔABC की तीन भुजाओं तथा दो कोणों के बीच संबंध निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है :

$$\mathbf{a = b\cos C + c\cos B, \quad b = c\cos A + a\cos C, \quad c = a\cos B + b\cos A}$$

(1) सिद्ध करें : $a = b\cos C + c\cos B$

प्रमाण : स्थिति (Case) I : जब $\angle C$ एक न्यूनकोण है। [चित्र (i) धारा 12.1]

समकोण ΔADC से, $\cos C = \frac{DC}{AC} = \frac{DC}{b}$ $\therefore$ $DC = b\cos C$ ...(1)

पुनः ΔADB से, $\cos B = \frac{BD}{AB}$ $\therefore$ $BD = AB\cos B = c\cos B$ ...(2)

अब $BC = BD + DC$ अर्थात् $a = c\cos B + b\cos C$ [(1) तथा (2) से]

स्थिति (Case) II : जब $\angle C$ एक अधिक कोण है। [चित्र (ii) धारा 12.1]

अब समकोण ΔADB से, $\cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{c}$ $\therefore$ $BD = c\cos B$ ...(3)

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

पुनः समकोण ΔADC से, $\cos(\pi - C) = \dfrac{CD}{AC}$ $\quad\therefore\quad CD = -AC\cos C = -b\cos C$ ...(4)

अब $\quad BC = BD - CD \Rightarrow a = c\cos B - (-b\cos C)$ [(3) तथा (4) से]

या $\quad a = c\cos B + b\cos C$

स्थिति (Case) III : $\angle C$ एक समकोण है। [चित्र (iii) धारा 12.1]

समकोण ΔACB से, $\quad \cos B = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{BC}{c}$

$\therefore \quad BC = c\cos B = c\cos B + b\cos 90°$ [cos 90° = 0]

अर्थात् $\quad BC = a = c\cos B + b\cos C = b\cos C + c\cos B$

इस तरह तीनों ही स्थितियों में $\quad a = b\cos C + c\cos B$

नोट :

- इसी तरह साबित किया जा सकता है कि

$$b = c\cos A + a\cos C; \quad c = a\cos B + b\cos A$$

12.4 प्रक्षेप सूत्र (Projection formula) की सहायता से कोज्या सूत्र (cosine rule) की स्थापना

$\because$

$$a = b\cos C + c\cos B \quad ...(1)$$
$$b = c\cos A + a\cos C \quad ...(2)$$
$$c = a\cos B + b\cos A \quad ...(3)$$

(1) में a से तथा (2) में b से गुणा कर जोड़ने पर

$$a^2 + b^2 = ab\cos C + ac\cos B + bc\cos A + ab\cos C$$
$$= 2ab\cos C + c(a\cos B + b\cos A)$$
$$= 2ab\cos C + c.c \quad [(3) \text{ से}]$$

या $\quad 2ab\cos C = a^2 + b^2 - c^2 \quad \therefore \quad \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

इसी तरह $\cos A$ तथा $\cos B$ का मान निकाला जा सकता है।

12.5 कोज्या नियम (cosine rule) से प्रक्षेप सूत्र (Projection formula) की स्थापना

$\because$

$$\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} \quad ...(1)$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \quad ...(2)$$

समीकरण (1) में b से तथा (2) में a से गुणा कर जोड़ने पर

$$b\cos A + a\cos B = b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{1}{2c}[b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2] = \frac{2c^2}{2c} = c$$

$\therefore \quad c = b\cos A + a\cos B$

इसी तरह a तथा b का मान निकाला जा सकता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

12.6 अन्य महत्वपूर्ण सूत्र (Other Important Formulae)

(A) टैन्जेन्ट सूत्र या नेपियर एनालोजी (Tangent Formula or Napier Analogy)

किसी ΔABC में साबित करें :

(i) $\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1992, 98, 2007]

(ii) $\tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$ **(iii)** $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$

प्रमाण : (1) ΔABC में sine Rule (ज्या नियम) से

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=K \text{ (माना)}$$ तो $a=K\sin A; b=K\sin B; c=K\sin C$

अब $$\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\frac{K\sin B-K\sin C}{K\sin B+K\sin C}\times\cot\frac{A}{2}=\frac{K(\sin B-\sin C)}{K(\sin B+\sin C)}\times\cot\frac{A}{2}$$

$$=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}.\cos\frac{B-C}{2}}\times\cot\frac{A}{2}=\cot\frac{B+C}{2}\tan\frac{B-C}{2}.\cot\frac{A}{2}$$

$$=\cot\left[\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right]\tan\frac{B-C}{2}.\cot\frac{A}{2}=\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B-C}{2}.\cot\frac{A}{2}$$

$$=\tan\frac{A}{2}.\cot\frac{A}{2}.\tan\frac{B-C}{2}=1\times\tan\frac{B-C}{2}=\tan\frac{B-C}{2}$$ $[\because \tan\theta.\cot\theta=1]$

नोट :

- इसी तरह परिणाम (ii) तथा (iii) को साबित किया जा सकता है।

(B) किसी ΔABC में साबित करें :

(i) $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ **(ii)** $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ac}}$

(iii) $\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$; जहाँ $s=$ अर्द्ध-परिमाप $=\frac{a+b+c}{2}$

प्रमाण : $\because$ $$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$ $\left[\because \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]$

$$=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{2bc}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b+c-c-c)(a+b+c-b-b)}{2bc}$$

$$=\frac{(2s-2c)(2s-2b)}{2bc}$$ $\left[\because s=\frac{a+b+c}{2} \text{ या } 2s=a+b+c\right]$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$= \frac{2 \times 2(s-c)(s-b)}{2bc} = \frac{2(s-c)(s-b)}{bc}$$

अर्थात् $$2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2(s-b)(s-c)}{bc} \Rightarrow \sin^2\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

$\therefore$ $$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

किन्तु A, ΔABC का एक कोण है।

$\therefore$ $A < 180° \Rightarrow \frac{A}{2} < 90° \Rightarrow \sin\frac{A}{2}$ धनात्मक होगा।

$\therefore$ $$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$ सिद्धम्

नोट : इसी तरह परिणाम (ii) तथा (iii) को प्रमाणित किया जा सकता है।

(C) (i) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1980]**

(ii) $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$ **(iii)** $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$; **जहाँ** $s = \frac{a+b+c}{2}$

प्रमाण : $\because$ $$2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2s(b+c+a-a-a)}{2bc} = \frac{2s(2s-2a)}{2}$$

$[\because 2s = a+b+c]$

अर्थात् $$2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2s(s-a)}{bc} \Rightarrow \cos^2\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}$$

$\therefore$ $$\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

चूँकि A, ΔABC का कोण है $\therefore A < 180° \Rightarrow \frac{A}{2} < 90° \therefore \cos\frac{A}{2}$ धनात्मक होगा

अतः $$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

इसी तरह परिणाम (ii) तथा (iii) को साबित किया जा सकता है।

नोट :

- $\tan\frac{A}{2} = \frac{\sin(A/2)}{\cos(A/2)} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)/bc}{s(s-a)/bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$; **[उ० प्र० डिप्लोमा 1971]**
- $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$ **(iii)** $\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$
- $\cot\frac{A}{2} = \frac{1}{\tan\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$; $\cot\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}$; $\cot\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(D) कोणों के sine को भुजा के पदों में तथा क्षेत्रफल के रूप में व्यक्त करना (Value of sine in terms of Sides and Area)

$$\because \quad \sin A = 2\sin\frac{A}{2}.\cos\frac{A}{2} = 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \times \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

अर्थात् $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \Rightarrow \sin A = \frac{2\Delta}{bc}$ $[\because \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}]$

$$\Rightarrow \quad \Delta = \frac{1}{2} bc \sin A$$

इसी तरह $\sin B = \frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2\Delta}{ac} \Rightarrow \Delta = \frac{1}{2} ac \sin B$

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2\Delta}{ab} \Rightarrow \Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$$

नोट :

- $\tan\frac{A}{2}, \cot\frac{A}{2}$ इत्यादि के लिए त्रिभुज के क्षेत्रफल के रूप में व्यंजक प्राप्त किया जा सकता है (Expressions in other forms for $\tan\frac{A}{2}, \cot\frac{A}{2}$ etc.) जो निम्न सूत्रों से दिया जाता है।

(i) $\tan\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}$ (ii) $\tan\frac{B}{2} = \frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$ (iii) $\tan\frac{C}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$

(iv) $\cot\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{\Delta}$ (v) $\cot\frac{B}{2} = \frac{s(s-b)}{\Delta}$ (vi) $\cot\frac{C}{2} = \frac{s(s-c)}{\Delta}$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1 : किसी ΔABC में $a = 2, b = \sqrt{6}, c = \sqrt{3} - 1$ तो $\angle A$ का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]**

हल : ΔABC में

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

यहाँ $a = 2, b = \sqrt{6}$ तथा $c = \sqrt{3} - 1$

$$\therefore \quad \cos A = \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{6} \times (\sqrt{3}-1)} = \frac{6 + 3 + 1 - 2\sqrt{3} - 4}{2 \times \sqrt{6} \times (\sqrt{3}-1)}$$

$$= \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2 \times \sqrt{6} \times (\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times (\sqrt{3}-1)} \quad [\because 6 = 2 \times 3 = 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} \quad \therefore A = \frac{\pi}{4}$$ उत्तर

उदाहरण 2 : एक ΔABC में $\angle A = 30°, \angle C = 45°$ तो $a : c$ का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2010]**

हल : ΔABC में sine Rule से,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{a}{\sin 30°} = \frac{c}{\sin 45°} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{\sin 30°}{\sin 45°} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

i.e., $a : c = 1 : \sqrt{2}$ उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

उदाहरण 3 : किसी ΔABC में $a=1, b=2$ और $\angle A=30°$ तो $\angle B$ का मान बतायें।

हल : ΔABC में sine Rule से, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$

अर्थात् $\frac{1}{\sin 30°}=\frac{2}{\sin B} \Rightarrow \sin B=2\sin 30°=2\times\frac{1}{2}$

$\therefore$ $\sin B=1=\sin 90° \quad \therefore \quad B=90°$ **उत्तर**

उदाहरण 4 : किसी ΔABC में सिद्ध करें :

$$\sin\frac{B-C}{2}=\frac{(b-c)}{a}\cos\frac{A}{2}$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1994, 2002, 16(S)]

हल : R.H.S. $=\frac{(b-c)}{a}\cos\frac{A}{2}=\frac{K\sin B-K\sin C}{K\sin A}\cos\frac{A}{2}=\frac{K[\sin B-\sin C]}{K\sin A}\cos\frac{A}{2}$

$$=\frac{\sin B-\sin C}{\sin A}\cos\frac{A}{2}=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2}}{\sin A}\cos\frac{A}{2}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cos\frac{A}{2}=\sin\frac{B-C}{2}=\text{L.H.S.}$$

साबित हुआ

उदाहरण 5 : साबित करें :

$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004, 2010, 18(SB)]**

हल : बायाँ पक्ष (L.H.S.) $=a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)$

$=K\sin A\sin(B-C)+K\sin B\sin(C-A)+K\sin C\sin(A-B)$

$=K.[\sin A\sin(B-C)+\sin B\sin(C-A)+\sin C\sin(A-B)]$

$=K[\sin(B+C)\sin(B-C)+\sin(C+A)\sin(C-A)+\sin(A+B)\sin(A-B)]$

$[\because A+B+C=\pi]$

$=K[\sin^2 B-\sin^2 C+\sin^2 C-\sin^2 A+\sin^2 A-\sin^2 B]$

$[\because \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta]$

$=K\times 0=0=$ दायाँ पक्ष (R.H.S.)

इति सिद्धम्

उदाहरण 6 : साबित करें : $\sin(B-C)=\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin A$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2000, 2009, 16(S)]

हल : दायाँ पक्ष $=\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin A=\frac{K^2\sin^2 B-K^2\sin^2 C}{K^2\sin^2 A}\sin A=\frac{K^2[\sin^2 B-\sin^2 C]}{K^2\sin A}$

$=\frac{\sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin A}=\frac{\sin\{\pi-A\}.\sin(B-C)}{\sin A}=\frac{\sin A.\sin(B-C)}{\sin A}$

$=\sin(B-C)=$ बायाँ पक्ष (L.H.S.)

इति सिद्धम्

उदाहरण 7 : सिद्ध करें :

$a^3\sin(B-C)+b^3\sin(C-A)+c^3\sin(A-B)=0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]**

हल : अब $a^3\sin(B-C)=a^2.a\sin(B-C)=a^2.K\sin A.\sin(B-C)$

$\left[\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=K\right]$

$=a^2.K\sin\{\pi-(B+C)\}\sin(B-C)$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$= a^2 . K \sin(B+C)\sin(B-C) \qquad [\because A+B+C=\pi]$$

$$= K a^2 [\sin^2 B - \sin^2 C] = K a^2 \left(\frac{b^2}{K^2} - \frac{c^2}{K^2}\right) \qquad \left[\because \sin B = \frac{b}{K} \text{ तथा } \sin C = \frac{c}{K}\right]$$

$$= \frac{1}{K}(a^2b^2 - a^2c^2)$$

इसी तरह, $b^3 \sin(C-A) = \frac{1}{K}[b^2c^2 - b^2a^2]$ तथा $c^3 \sin(A-B) = \frac{1}{K}[c^2a^2 - c^2b^2]$

अत: $a^3 \sin(B-C) + b^3 \sin(C-A) + c^3 (A-B)$

$$= \frac{1}{K}(a^2b^2 - a^2c^2) + \frac{1}{K}(b^2c^2 - b^2a^2) + \frac{1}{K}(c^2a^2 - c^2b^2)$$

$$= \frac{1}{K}[a^2b^2 - a^2c^2 + b^2c^2 - a^2b^2 + c^2a^2 - b^2c^2] = \frac{1}{K} \times 0 = 0$$

$\therefore$ दायाँ पक्ष = बायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

उदाहरण 8 : सिद्ध करें :

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]

हल : बायाँ पक्ष $= \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{1}{a}\cos A + \frac{1}{b}\cos B + \frac{1}{c}\cos C$

$$= \frac{1}{a}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{1}{b}\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} + \frac{1}{c}\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$= \frac{1}{2abc}[b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2]$$

$$= \frac{1}{2abc}[a^2+b^2+c^2] = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc} = \text{दायाँ पक्ष}$$

इति सिद्धम्

उदाहरण 9 : किसी ΔABC में सिद्ध करें :

$$a(b\cos C - c\cos B) = b^2 - c^2$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]

हल : बायाँ पक्ष $= a(b\cos C - c\cos B) = ab\cos C - ac\cos B$

$$= ab \times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} - ac \times \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2} - \frac{c^2+a^2-b^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}[a^2+b^2-c^2-c^2-a^2+b^2] = \frac{1}{2}[2b^2-2c^2]$$

$$= \frac{1}{2} \times 2[b^2-c^2] = b^2 - c^2 = \text{दायाँ पक्ष}$$

इति सिद्धम्

उदाहरण 10 : किसी ΔABC में सिद्ध करें :

$$2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C) = a^2+b^2+c^2$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2007, 17(S)]

हल : बायाँ पक्ष $= 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C)$

$$= 2\left[bc \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + ca \times \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} + ab \times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right]$$

$$= \frac{2}{2}[b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2]$$

$$= a^2+b^2+c^2 = \text{दायाँ पक्ष}$$

सिद्धम्

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 11 : किसी ΔABC में यदि $\cos B = \frac{\sin A}{2\sin C}$ तो सिद्ध करें त्रिभुज समद्विबाहु (isosceles) है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]

हल : प्रश्न से, $\cos B = \frac{\sin A}{2\sin C}$ या $\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = \frac{\frac{a}{K}}{\frac{2c}{K}}$

$\Rightarrow \quad \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = \frac{a}{2c} \quad \Rightarrow \quad \frac{c^2+a^2-b^2}{a} = a$

या $\quad c^2+a^2-b^2 = a^2 \quad$ या $\quad c^2-b^2=0$

या $\quad b^2 = c^2 \quad \therefore \quad b = c$

अर्थात् त्रिभुज की दो भुजायें बराबर हैं। $\therefore$ दिया गया Δ समद्विबाहु है। **इति सिद्धम्**

उदाहरण 12 : किसी ΔABC में साबित करें :

$$(b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} + (a-b)\cot\frac{C}{2} = 0$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]

हल : अब $(b-c)\cot\frac{A}{2} = (K\sin B - K\sin C).\cot\frac{A}{2} \qquad \left[\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = K\right]$

$$= K(\sin B - \sin C)\cot\frac{A}{2} = K \times 2\cos\frac{B+C}{2}.\sin\frac{B-C}{2}.\cot\frac{A}{2}$$

$$= 2K \times \cos\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right\}.\sin\frac{B-C}{2}.\cot\frac{A}{2} \qquad [\because A+B+C=\pi]$$

$$= 2K \times \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B-C}{2}.\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}} = 2K\sin\frac{B-C}{2}.\cos\frac{A}{2}$$

$$= 2K\sin\frac{B-C}{2}.\cos\left\{\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2}\right\} \qquad [\because A+B+C=\pi]$$

$$= k \times 2\sin\frac{B-C}{2}.\sin\frac{B+C}{2} = K[\cos C - \cos B]$$

अत: $\quad (b-c)\cot\frac{A}{2} = K[\cos C - \cos B]$

इसी तरह, $\quad (c-a)\cot\frac{B}{2} = K[\cos A - \cos C]$ तथा $(a-b)\cot\frac{C}{2} = K[\cos B - \cos A]$

अत: $\quad (b-c)\cot\frac{A}{2} + (c-a)\cot\frac{B}{2} + (a-b)\cot\frac{C}{2}$

$$= K[\cos C - \cos B] + K[\cos A - \cos C] + K[\cos B - \cos A]$$

$$= K[\cos C - \cos B + \cos A - \cos C + \cos B - \cos A]$$

$$= K \times 0 = 0$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

इति सिद्धम्

उदाहरण 13 : किसी ΔABC में साबित करें : $(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1996, 2004, 17(SB)]

हल : बायाँ पक्ष (L.H.S.) $= (b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C$

$$= b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B + a\cos C + b\cos C$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$= (b\cos A + a\cos B) + (c\cos A + a\cos C) + (c\cos B + b\cos C)$$

[$\because b\cos A + a\cos B = c$ आदि]

$$= c + b + a = a + b + c = \text{दायाँ पक्ष}$$

इति सिद्धम्

उदाहरण 14 : किसी ΔABC में साबित करें : $a^3\cos(B-C) + b^3\cos(C-A) + c^3\cos(A-B) = 3abc$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2001, 16(S), 17(SB)]

हल : $a^3\cos(B-C) = a^2\, a\cos(B-C) = a^2 K\sin A\cos(B-C)$ $\left[\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = K\right]$

$$= Ka^2\sin\{\pi - \overline{B+C}\}.\cos(B-C) = \frac{1}{2}Ka^2 \times 2\sin(B+C)\cos(B-C)$$

$$= \frac{1}{2}Ka^2[\sin 2B + \sin 2C] = \frac{1}{2}Ka^2[2\sin B.\cos B + 2\sin C.\cos C]$$

$$= \frac{1}{2}Ka^2 \times 2[\sin B.\cos B + \sin C\cos C]$$

$$= a^2[K\sin B.\cos B + K\sin C\cos C]$$

अर्थात् $a^3\cos(B-C) = a^2[b\cos B + c\cos C]$ $\left[\because \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = K\right]$

इसी तरह, $b^3\cos(C-A) = b^2[c\cos C + a\cos A]$ तथा $c^3\cos(A-B) = c^2[a\cos A + b\cos B]$

अत: $a^3\cos(B-C) + b^3\cos(C-A) + c^3\cos(A-B)$

$$= a^2(b\cos B + c\cos C) + b^2(c\cos C + a\cos A) + c^2(a\cos A + b\cos B)$$

$$= a^2 b\cos B + a^2 c\cos C + b^2 c\cos C + b^2 a\cos A + c^2 a\cos A + c^2 b\cos B$$

$$= a^2 b\cos B + b^2 a\cos A + a^2 c\cos C + c^2 a\cos A + b^2 c\cos C + c^2 b\cos B$$

$$= ab(a\cos B + b\cos A) + ac(a\cos C + c\cos A) + bc(b\cos C + c\cos B)$$

$$= ab \times c + ac \times b + bc \times a = 3abc$$ [$\because c = a\cos B + b\cos A$ इत्यादि]

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

इति सिद्धम्

उदाहरण 15 : किसी ΔABC में सिद्ध करें :

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A + \frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B + \frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C = 0$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1995, 2016]

हल : अब $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A = \frac{b^2-c^2}{a^2} \times 2\sin A.\cos A$

$$= \frac{b^2-c^2}{a^2} \times \frac{2a}{K}.\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{K\,abc}$$

$\left[\because \frac{a}{K} = \sin A; \frac{b}{K} = \sin B; \frac{c}{K} = \sin C\right]$

$$= \frac{1}{K\,abc}\{(b^2-c^2)(b^2+c^2) - a^2(b^2-c^2)\}$$

$$= \frac{1}{K\,abc}\{(b^4-c^4) - a^2(b^2-c^2)\} \quad \ldots(1)$$

इसी तरह $\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B = \frac{1}{K\,abc}\{(c^4-a^4) - b^2(c^2-a^2)\}$ ...(2)

तथा $\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C = \frac{1}{K\,abc}\{(a^4-b^4) - c^2(a^2-b^2)\}$ ...(3)

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(1), (2) तथा (3) को जोड़ने पर

$$\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C$$

$$=\frac{1}{K\,abc}\{(b^4-c^4)-a^2(b^2-c^2)\}+\frac{1}{K\,abc}\{(c^4-a^4)-b^2(c^2-a^2)\}$$

$$+\frac{1}{K\,abc}\{(a^4-b^4)-c^2(a^2-b^2)\}$$

$$=\frac{1}{K\,abc}\{b^4-c^4-a^2b^2+a^2c^2+c^4-a^4-b^2c^2+b^2a^2+a^4-b^4-c^2a^2+c^2b^2\}$$

$$=\frac{1}{K\,abc}\times 0=0$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष **इति सिद्धम्**

उदाहरण 16 : किसी ΔABC में यदि $\sin 2A+\sin 2B=\sin 2C$ हो तो सिद्ध करें कि

$$A=90^\circ \text{ अथवा } B=90^\circ$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]

हल : $\sin 2A+\sin 2B=\sin 2C \Rightarrow 2\sin\frac{2A+2B}{2}\cdot\cos\frac{2A-2B}{2}=2\sin C\cos C$

$$\left[\because \sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cdot\cos\frac{C-D}{2},\ \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\right]$$

$\Rightarrow \quad \sin(A+B)\cdot\cos(A-B)=\sin C\cos C$

$\Rightarrow \quad \sin(\pi-C)\cdot\cos(A-B)=\sin C\cos\{\pi-(A+B)\}$ $\quad [\because A+B+C=\pi]$

$\Rightarrow \quad \sin C\cos(A-B)=-\sin C\cos(A+B)$ $[\because \sin(\pi-\theta)=\sin\theta,\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta]$

$\Rightarrow \quad \sin C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]=0 \Rightarrow \sin C[2\cos A\cdot\cos B]=0$

$\therefore \quad \sin C=0$ या $2\cos A\cdot\cos B=0$

किन्तु $\sin C=0 \Rightarrow C=0$, जो त्रिभुज के लिए अंसभव है

$\therefore \quad 2\cos A\cdot\cos B=0 \quad \Rightarrow \quad \cos A=0$ या $\cos B=0$

किन्तु $\cos A=0 \Rightarrow A=\frac{\pi}{2}=90^\circ$ तथा $\cos B=0 \Rightarrow B=\frac{\pi}{2}=90^\circ$ $\quad [\because \cos 90^\circ=0]$

$\therefore \quad A=90^\circ$ या $B=90^\circ$

इति सिद्धम्

उदाहरण 17 : यदि a, b, c समान्तर श्रेढ़ी (A.P.) में हैं, तो सिद्ध करें कि

$$2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{B}{2}$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999, 2017(SB)]

हल : माना $2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{B}{2}$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$$

$$\Rightarrow \quad 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)(s-a)(s-b)}{bc\times ab}}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$$

$$\Rightarrow \quad 2\frac{s-b}{b}\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \Rightarrow 2\times\frac{s-b}{b}=1$$

$\Rightarrow \quad 2s-2b=b \quad \Rightarrow \quad a+b+c-2b=b$ $\quad [\because 2s=\text{परिमाप}=a+b+c]$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \qquad a+c-b=b \Rightarrow \quad 2b=a+c \qquad \therefore \qquad b=\dfrac{a+c}{2}$

अर्थात् a, b, c स० श्रेढ़ी (A. P.) में हैं, जो दिया गया है

$\therefore \qquad 2\sin\dfrac{A}{2}.\sin\dfrac{C}{2}=\sin\dfrac{B}{2}$ सत्य है।

उदाहरण 18 : किसी ΔABC में यदि $\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{3}{a+b+c}$ तो सिद्ध करें कि $\angle C=60°$

हल : दिया गया है $\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{3}{a+b+c}$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{b+c+a+c}{(a+c)(b+c)}=\dfrac{3}{a+b+c} \Rightarrow \quad (a+b+2c)(a+b+c)=3(a+c)(b+c)$

$\Rightarrow \qquad (a+b)(a+b)+(a+b)c+2c(a+b)+2c^2=3(ab+ac+bc+c^2)$

$\Rightarrow \qquad a^2+b^2+2c^2+2ab+3ac+3bc=3ab+3ac+3bc+3c^2$

$\Rightarrow \qquad a^2+b^2-c^2=ab \qquad \Rightarrow \quad \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \qquad \cos C=\dfrac{1}{2}=\cos 60° \qquad \Rightarrow \quad C=60°$

उपयोगी सूत्र

1. ज्या सूत्र (sine formula)

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

2. प्रक्षेप सूत्र (Projection Formula)

$$a=b\cos C+c\cos B$$

$$b=c\cos A+a\cos C;\; c=a\cos B+b\cos A$$

3. कोज्या सूत्र (Cosine Formula)

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac};\; \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

4. स्पर्श ज्या सूत्र (tangent Formula)

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2};\; \tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$$

$$\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

5. $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}};\; \sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ac}};\; \sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

6. $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}};\; \cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ac}};\; \cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$

7. $\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\dfrac{(s-b)(s-c)}{\Delta};\; \tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}=\dfrac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = \frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$$

8. त्रिभुज का क्षेत्रफल $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

9. $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2\Delta}{bc}$ तथा $\Delta = \frac{1}{2}bc\sin A$

$\sin B = \frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2\Delta}{ac}$ तथा $\Delta = \frac{1}{2}ac\sin B$

$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2\Delta}{ab}$ तथा $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C$

जहाँ $2s = a+b+c =$ परिमाप, $\Delta =$ त्रिभुज का क्षेत्रफल

प्रश्नावली 12.1

1. (i) यदि ΔABC में $a=4, b=12, \angle B = 30°$ तो $\sin A$ ज्ञात करें।

(ii) यदि ΔABC में $a=\sqrt{3}, \angle B = 60°, \angle A = 45°$ तो b ज्ञात करें।

(ii) ΔABC में $a=4, b=8$ और $\angle C = 60°$ भुजा c ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2015]**

(iv) यदि किसी ΔABC में कोणों A, B तथा C की सम्मुख भुजायें a, b तथा c हों, तो सिद्ध करें

$$\frac{\sin B}{\sin(B+C)} = \frac{b}{a}$$

(v) यदि ΔABC में $a=1, b=2, \angle A = 30°$, तो ΔABC का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2007]**

(vi) सिद्ध कीजिये कि $\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{a+b}{a-b}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2013]**

2. (i) किसी ΔABC में $a=15, b=7, c=13$ तो सिद्ध करें $\angle C = 60°$

(ii) यदि ΔABC में $a=2,\ b=\sqrt{6}$ तथा $c=\sqrt{3}+1$ तो $\angle A$ का मान ज्ञात करें।

(iii) ΔABC में $a=9,\ b=8$ तथा $c=4$ हो तो $\cos B - 2\cos C$ का मान बतायें।

(iv) किसी ΔABC में $a=2, b=\sqrt{6}, c=\sqrt{3}-1$ तो $\angle A$ का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]**

(v) किसी त्रिभुज की भुजायें क्रमश: $a=9,\ b=8$ तथा $c=4$ हों, तो साबित करें कि

$$6\cos C = 4 + 3\cos B$$

3. किसी ΔABC में

(i) $a=10,\ b=14$ तथा $c=18$ तो $\cos\frac{A}{2}$ का मान बतायें।

(ii) $a=9,\ b=11$ तथा $c=12$ तो $\sin\frac{B}{2}$ का मान बतायें।

(iii) $a=5,\ b=6,\ c=7$ तो $\tan\frac{C}{2}$ का मान बतायें।

4. किसी ΔABC में सिद्ध करें कि

$$\frac{\cos A}{c\cos B + b\cos C} + \frac{\cos B}{a\cos C + c\cos A} + \frac{\cos C}{a\cos B + b\cos A} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2012]

5. किसी ΔABC में सिद्ध करें

$$(b^2-c^2)\cot A + (c^2-a^2)\cot B + (a^2-b^2)\cot C = 0$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

6. किसी ΔABC में सिद्ध करें

$$(b-c)^2 \cos^2 \frac{A}{2} + (b+c)^2 \sin^2 \frac{A}{2} = a^2$$

7. किसी ΔABC में सिद्ध करें

$$b \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{B}{2} = s$$

8. किसी ΔABC में साबित करें :

$$(b-c) \cot \frac{A}{2} + (c-a) \cot \frac{B}{2} + (a-b) \cot \frac{C}{2} = 0$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]

9. किसी ΔABC में सिद्ध करें

$$a(b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]

10. किसी ΔABC में सिद्ध करें :

$$2(bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C) = a^2 + b^2 + c^2$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2007]

11. किसी ΔABC में

$$\frac{a^2 \sin(B-C)}{\sin A} + \frac{b^2 \sin(C-A)}{\sin B} + \frac{c^2 \sin(A-B)}{\sin C} = 0$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2013]

12. (i) साबित करें :

$$a \sin(B-C) + b \sin(C-A) + c \sin(A-B) = 0$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2004, 2010, 18(B)]

(ii) ΔABC में साबित करें

$$a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

13. किसी ΔABC में

$$\frac{\cos 2A}{a^2} - \frac{\cos 2B}{b^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$$

किसी ΔABC में साबित करें [14 से 23 तक]

14. $a^2 (\cos^2 B - \cos^2 C) + b^2 (\cos^2 C - \cos^2 A) + c^2 (\cos^2 A - \cos^2 B) = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]**

15. $a^3 \cos(B-C) + b^3 \cos(C-A) + c^3 \cos(A-B) = 3abc$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]**

16. $(b-c) \cos \frac{A}{2} = a \sin \frac{B-C}{2}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2002, 16(S)]

17. $a \sin\left(\frac{A}{2} + B\right) = (b+c) \sin \frac{A}{2}$

18. $\sin(B-C) = \frac{b^2 - c^2}{a^2} \sin A$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2000, 2009, 16(S)]

19. $(b^2 + c^2 - a^2) \tan A = (a^2 + c^2 - b^2) \tan B = (a^2 + b^2 - c^2) \tan C$

20. $(a+b+c)\left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}\right) = 2c \cot \frac{C}{2}$

21. $(b+c-a) \tan \frac{A}{2} = (c+a-b) \tan \frac{B}{2} = (a+b-c) \tan \frac{C}{2}$

AK TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

22. $\dfrac{\cos^2 \frac{A}{2}}{a} + \dfrac{\cos^2 \frac{B}{2}}{b} + \dfrac{\cos^2 \frac{C}{2}}{c} = \dfrac{s^2}{abc}$

23. यदि $b + c = 3a$ तो दिखायें $\cot \frac{B}{2} . \cot \frac{C}{2} = 2$

24. यदि ΔABC में $\sin 2A + \sin 2B = \sin 2C$ तो सिद्ध करो $\angle A = 90°$ या $\angle B = 90°$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]**

25. यदि ΔABC में a^2, b^2, c^2 समान्तर श्रेढ़ी (A.P.) में हों, तो दिखायें—

(i) $\tan A$, $\tan B$ तथा $\tan C$ हरात्मक श्रेढ़ी (H.P.) में हैं।

(ii) $\cot A$, $\cot B$ तथा $\cot C$ समान्तर श्रेढ़ी (A.P.) में हैं।

26. यदि किसी ΔABC में $a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3b}{2}$ तो सिद्ध करें कि त्रिभुज की भुजायें $a, b,$ तथा c समान्तर श्रेढ़ी (A.P.) में हैं।

27. (i) किसी ΔABC में भुजायें a, b, c समान्तर श्रेढ़ी (A.P.) में हैं, तो सिद्ध करें

$\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}$ तथा $\cot \frac{C}{2}$ स० श्रे० में होंगे।

(ii) यदि ΔABC के कोण समानांतर श्रेणी में हैं तो सिद्ध करें $b^2 = a^2 + c^2 - ac$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2014(O), 17(O)]

28. किसी ΔABC में सिद्ध करें—

(a) (i) $a = b \cos C + c \cos B$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2014]**

(ii) $b = c \cos A + a \cos C$ (iii) $c = a \cos B + b \cos A$

(b) (i) $\tan \frac{B - C}{2} = \frac{b - c}{b + c} \cot \frac{A}{2}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2014 (O)]**

(ii) $\tan \frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cot \frac{C}{2}$

(c) (i) $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}}$ (ii) $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s - a)}{bc}}$

उत्तरमाला

1. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{\pi}{2}$

2. (ii) $\frac{\pi}{4}$ (iii) $-\frac{4}{3}$ (iv) $\frac{\pi}{4}$ (v) $1 : \sqrt{3} : 2$

3. (i) $\sqrt{\frac{11}{12}}$ (ii) $\sqrt{\frac{7}{27}}$ (iii) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

अध्याय

13

प्रतिलोम वृत्तीय फलन

(Inverse Circular Functions)

13.1 परिभाषायें (Definitions)

यदि $\sin\theta = x$ हो, जहाँ θ वह कोण है, जिसके sine का मान x है, तो θ को x के पदों में निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है :

$$\theta = \sin^{-1} x$$

तथा $\sin^{-1} x$ को हम साइन प्रतिलोम x या sine Inverse x (साइन इनवर्स x) या 'arc $\sin x$' पढ़ते हैं। अत: संकेत $\sin^{-1} x$ उस कोण को बताता है जिसका sine x के बराबर है।

इसी तरह $\cos^{-1} x$ का अर्थ है वह कोण जिसका cosine x के बराबर है। इसी प्रकार $\tan^{-1} x$, $\cot^{-1} x$, $\sec^{-1} x$ तथा $\text{cosec}^{-1} x$ को भी परिभाषित किया जा सकता है।

$\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x, \cot^{-1} x$, $\text{cosec}^{-1} x$ तथा $\sec^{-1} x$ प्रतीप वृत्तीय फलन (Inverse Circular Functions) कहलाते हैं।

परिभाषा के रूप में हम क़ह सकते हैं :

प्रतिलोम वृत्तीय फलन (Inverse Circular Function) वह त्रिकोणमितीय व्यंजक है, जो किसी कोण को उसके मान के रूप में व्यक्त करता है।

13.2 प्रतिलोम वृत्तीय फलनों का प्रभाव क्षेत्र (Domain of Inverse Circular Functions)

चूँकि $\sin\theta$ तथा $\cos\theta$ का मान हमेशा -1 तथा $+1$ के बीच होता है अत: $\mathbf{\sin^{-1} x}$ तथा $\mathbf{\cos^{-1} x}$, x के उन्हीं मानों के लिए परिभाषित है, जो प्रतिबंध $-1 \le x \le 1$ को संतुष्ट करता है। इसी तरह $\mathbf{\tan^{-1} x}$ तथा $\cot^{-1} x$, x के **सभी मानों के लिए परिभषित है। $\mathbf{\sec^{-1} x}$ तथा $\mathbf{cosec^{-1} x}$**, x के उन मानों के लिए परिभाषित है जिसके लिए **$x \le -1$ या $x \ge 1$ अर्थात् $|x| \ge 1$**

13.3 प्रतिलोम वृत्तीय फलन के मुख्य मान (Principal Values of Inverse Function)

यदि $\theta = \sin^{-1}\frac{1}{2}$ हो, तो $30°, 150°, 390°$ आदि ऐसे अनेक कोण हैं, जिनका sine, $\frac{1}{2}$ के बराबर है। वस्तुत: वे कोण जिसका sine, $\frac{1}{2}$ है, $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ से दिया जाता है। इस तरह x के प्रत्येक मान के संगत हमें $\sin^{-1} x$ के बहुत से मान मिलेंगे। इसी तरह अन्य प्रतीप वृत्तीय फलनों $\cos^{-1} x, \tan^{-1} x, \cot^{-1} x$ इत्यादि के लिए भी अनेकानेक मान होंगे अर्थात् प्रतीप वृत्तीय फलन बहुमानी (many valued) हैं।

प्रतीय वृत्तीय फलन के सबसे छोटे **संख्यात्मक मान** को इसका **मुख्य मान** कहते हैं।

इस तरह $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ का मुख्य मान $30°$ है। इसी तरह $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ का मुख्यमान $\frac{\pi}{4}$ तथा $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ का मुख्य मान $\frac{-\pi}{6}$ होगा।

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

यदि एक ही प्रतीप वृत्तीय फलन के दो मान हों जो संख्यात्मक रूप में बराबर किन्तु चिह्न में विपरीत हों तो धनात्मक मान को मुख्य मान कहा जाता है।

जैसे : $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ तथा $\cos(-45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore$ $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 45°$ तथा $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = -45°$

अत: $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$ का मुख्य मान 45° (धनात्मक मान) होगा।

नीचे दी गई सूची में विभिन्न प्रतीप वृत्तीय फलनों के प्रभाव क्षेत्र (Domain) तथा मुख्य मान के परास (Range) को दिखाया गया है।

सूची I

θ	प्रभाव क्षेत्र (Domain)	मुख्य मान के लिए परास (Range)
$\sin^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
$\text{cosec}^{-1} x$	$x \le -1$ या $x \ge 1$	$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \theta \ne 0$
$\cos^{-1} x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le \theta \le \pi$
$\sec^{-1} x$	$x \le -1$ या $x \ge 1$	$0 \le \theta \le \pi, \ \theta \ne \frac{\pi}{2}$
$\tan^{-1} x$	$-\infty < x < +\infty$	$\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$
$\cot^{-1} x$	$-\infty < x < +\infty$	$0 < \theta < \pi$

नोट :

- यहाँ $\sin^{-1} x$ तथा $(\sin x)^{-1}$ का अन्तर समझना आवश्यक है। $\sin^{-1} x$ में प्रयुक्त (−1) घातांक नहीं है। अत: $\sin^{-1} x \ne (\sin x)^{-1}$ वस्तुत: $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$
- यदि स्पष्ट रूप से लिखा न हो तो $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ इत्यादि के लिए इनका मुख्य मान ही लिया जाता है।

13.4 प्रमुख परिणाम एवं उनकी उपपत्ति (Important Results and their Proofs)

1. स्वत: समंजक गुण (Self-adjusting properties)

(i) $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$ **तथा** $\sin(\sin^{-1} x) = x$

(ii) $\cos^{-1}(\cos\theta) = \theta$ **तथा** $\cos(\cos^{-1} x) = x$

(iii) $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$ **तथा** $\tan(\tan^{-1} x) = x$

(iv) $\cot^{-1}(\cot\theta) = \theta$ **तथा** $\cot(\cot^{-1} x) = x$

(v) $\sec(\sec^{-1}\theta) = \theta$ **तथा** $\sec(\sec^{-1} x) = x$

(vi) $\text{cosec}(\text{cosec}^{-1}\theta) = \theta$ **तथा** $\text{cosec}(\text{cosec}^{-1} x) = x$

उपपत्ति (Proof) :

(i) माना $\sin\theta = x$ तो $\theta = \sin^{-1} x \Rightarrow \theta = \sin^{-1}(\sin\theta)$ (x का मान पुन: रखने पर)

पुन: $\theta = \sin^{-1} x \Rightarrow \sin(\sin^{-1} x) = \sin\theta = x$

इसी प्रकार अन्य परिणामों को प्रमाणित किया जा सकता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

2. **व्युत्क्रम गुण (Reciprocal Property)**

(i) (a) $\sin^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ **(b)** $\operatorname{cosec}^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, ($x \geq 1$ या $x \leq -1$)

(ii) (a) $\cos^{-1} x = \sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ **(b)** $\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, ($x \geq 1$ या $x \leq -1$)

(iii) (a) $\tan^{-1} x = \cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ $x > 0$ **(b)** $\cot^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, ($x > 0$)

$= -\pi + \cot^{-1} x, x < 0$

उपपत्ति (Proof) : (i) (a) परिभाषा से

यदि $x = \sin\theta$, तो $\theta = \sin^{-1} x$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\sin\theta} \Rightarrow \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{x} \Rightarrow \theta = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

अतः $\sin^{-1} x = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

(b) यदि $\theta = \operatorname{cosec}^{-1} x$, तो $x = \operatorname{cosec}\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1}{x} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{x} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \therefore \operatorname{cosec}^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

इसी तरह (ii) तथा (iii) को प्रमाणित किया जा सकता है।

3. **(i)** $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$ **(ii)** $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}, x \in R$

(iii) $\sec^{-1} x + \operatorname{cosec}^{-1} x = \frac{\pi}{2}, x \in R - [-1, 1]$

उपपत्ति (Proof) :

(i) माना $\sin^{-1} x = \theta$ या $\sin\theta = x$ ...(A)

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta = \cos^{-1} x \Rightarrow \cos^{-1} x + \theta = \frac{\pi}{2}$

अर्थात् $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ ((A) से)

(ii) माना $\tan^{-1} x = \theta$ या $\tan\theta = x$ ...(B)

$\Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x \Rightarrow \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \cot^{-1} x + \theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \cot^{-1} x + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ [(B) से]

(iii) माना $\sec^{-1} x = \theta$ ...(C)

या $\sec\theta = x \Rightarrow \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \operatorname{cosec}^{-1} x + \theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ [(C) के प्रयोग से]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

4. **(i)** $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy}, \quad xy < 1$

(ii) $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x-y}{1+xy}, \quad xy > -1$

(iii) $\cot^{-1} x + \cot^{-1} y = \cot^{-1} \dfrac{xy-1}{x+y}$

(iv) $\cot^{-1} x - \cot^{-1} y = \cot^{-1} \dfrac{xy+1}{y-x}$

(v) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \tan^{-1} \dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]**

उपपत्ति (Proof) :

(i) माना $\tan^{-1} x = \alpha$ तथा $\tan^{-1} y = \beta$ तो $\tan\alpha = x$ तथा $\tan\beta = y$

तथा $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \alpha + \beta$

अब $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \, . \tan\beta} = \dfrac{x+y}{1-xy}$

$\therefore \quad \alpha + \beta = \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy}$ अर्थात् $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy}$

(ii) इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है।

(iii) माना $\cot^{-1} x = \alpha$ तथा $\cot^{-1} y = \beta$ तो $x = \cot\alpha$ तथा $y = \cot\beta$

तथा $\cot^{-1} x + \cot^{-1} y = \alpha + \beta$

सूत्र से, $\cot(\alpha+\beta) = \dfrac{\cot\alpha \cot\beta - 1}{\cot\alpha + \cot\beta} = \dfrac{xy-1}{x+y}$

$\therefore \quad \alpha + \beta = \cot^{-1} \dfrac{xy-1}{x+y}$ अर्थात् $\cot^{-1} x + \cot^{-1} y = \cot^{-1} \dfrac{xy-1}{x+y}$

(iv) इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है।

नोट :

- $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy}$ में $xy < 0$ माना गया है लेकिन यदि $xy > 1$ हो जिससे $\dfrac{x+y}{1-xy} < 0$ हो तो सूत्र बदल जाता है। तब $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \pi + \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy}$ लिया जाता है।

(v) माना $\tan^{-1} x = \alpha;\ \tan^{-1} y = \beta;\ \tan^{-1} z = \gamma$ तो $x = \tan\alpha;\ y = \tan\beta;\ z = \tan\gamma$

$\therefore \quad \tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \alpha + \beta + \gamma$

अब $\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma - \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma}{1 - \tan\alpha \tan\beta - \tan\beta \tan\gamma - \tan\alpha \tan\gamma} = \dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$

$\therefore \quad \alpha + \beta + \gamma = \tan^{-1} \dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$

अर्थात् $\tan^{-1} x + \tan^{1} y + \tan^{-1} z = \tan^{-1} \dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$

टिप्पणी : उपरोक्त परिणामों को निम्न विधियों से भी आसानी से साबित किया जा सकता है।

$$\tan(\tan^{-1} x \pm \tan^{-1} y) = \frac{\tan(\tan^{-1} x) \pm \tan(\tan^{-1} y)}{1 \mp \tan(\tan^{-1} x) . \tan(\tan^{-1} y)} = \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$\therefore \quad \tan^{-1} x \pm \tan^{-1} y = \tan^{-1} \dfrac{x \pm y}{1 \mp xy}$

$$\cot(\cot^{-1} x \pm \cot^{-1} y) = \frac{\cot(\cot^{-1} x).\cot(\cot^{-1} y) \mp 1}{\cot(\cot^{-1} y) \pm \cot(\cot^{-1} x)} = \frac{xy \mp 1}{y \pm x}$$

$\therefore \quad \cot^{-1} x \pm \cot^{-1} y = \cot^{-1} \dfrac{xy \mp 1}{y \pm x}$

(v) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y + \tan^{-1} z = \tan^{-1} \dfrac{x+y}{1-xy} + \tan^{-1} z$

$$= \tan^{-1} \frac{\frac{x+y}{1-xy} + z}{1 - \frac{x+y}{1-xy} \times z} = \tan^{-1} \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$$

5. (a) $2\tan^{-1} x = \tan^{-1} \dfrac{2x}{1-x^2}, |x| \le 1$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2012]

(b) $2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \dfrac{2x}{1+x^2}, -1 < x < 1$ **(c) $2\tan^{-1} x = \cos^{-1} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}, x \ge 0$**

उपपत्ति (Proof) :

(a) माना $\tan^{-1} x = \alpha$ तो $x = \tan\alpha$ ...(A)

सूत्र से, $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2x}{1-x^2}$

$\therefore \quad 2\alpha = \tan^{-1} \dfrac{2x}{1-x^2}$ अर्थात् $2\tan^{-1} x = \tan^{-1} \dfrac{2x}{1-x^2}$

(b) सूत्र से, $\sin 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{2x}{1+x^2}$ [(A) के प्रयोग से]

$\therefore \quad 2\alpha = \sin^{-1} \dfrac{2x}{1+x^2} \Rightarrow 2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \dfrac{2x}{1+x^2}$

(c) सूत्र से, $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

$\therefore \quad 2\alpha = \cos^{-1} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow 2\tan^{-1} x = \cos^{-1} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

6. (a) $2\sin^{-1} x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2016]**

(b) $2\cos^{-1} x = \cos^{-1}(2x^2 - 1)$

उपपत्ति (Proof) :

(a) माना $\sin^{-1} x = \alpha$ तो $x = \sin\alpha$ तथा $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$

सूत्र से, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2x\sqrt{1-x^2}$

$\therefore \quad 2\alpha = \sin^{-1}[2x\sqrt{1-x^2}] \Rightarrow 2\sin^{-1} x = \sin^{-1}[2x\sqrt{1-x^2}]$

(b) माना $\cos^{-1} x = \alpha$ तो $x = \cos\alpha$

सूत्र से, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2x^2 - 1$

$\therefore \quad 2\alpha = \cos^{-1}[2x^2 - 1] \Rightarrow 2\cos^{-1} x = \cos^{-1}[2x^2 - 1]$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

7. (a) $\sin^{-1} x \pm \sin^{-1} y = \sin^{-1} [x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}]$

(b) $\cos^{-1} x \pm \cos^{-1} y = \cos^{-1} [xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}]$

उपपत्ति (Proof) :

(a) माना $\sin^{-1} x = \alpha,\ \sin^{-1} y = \beta$ तो $x = \sin\alpha,\ y = \sin\beta$

तथा $\sin^{-1} x \pm \sin^{-1} y = \alpha \pm \beta$

सूत्र से, $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta = \sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\beta} \pm \sqrt{1-\sin^2\alpha}\,\sin\beta$

$$= x\sqrt{1-y^2} \pm \sqrt{1-x^2} \times y$$

$\therefore\quad \alpha \pm \beta = \sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}]$

$\Rightarrow\quad \sin^{-1} x \pm \sin^{-1} y = \sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}]$

(b) इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है।

नोट :

- उपरोक्त सूत्रों में सभी प्रतीप वृत्तीय फलनों का θ के मुख्य मान के परास तथा x के आवश्यक प्रभाव क्षेत्र (सूची I धारा 13.3) के लिए परिभाषित होना आवश्यक है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. इनके मुख्य मान बतायें :

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ तथा $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ तथा $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(iii) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ तथा $\tan^{-1} 1$

हल : (i) $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$, जहाँ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ तथा $-1 \le x \le 1$

$\therefore\quad \sin^{-1}\frac{1}{2}$ = एक कोण जो $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ में है तथा जिसका मान $\frac{1}{2}$ है $\Rightarrow \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

इसी तरह $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ = एक कोण जो $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ में है तथा जिसका sine, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ है

$\Rightarrow\quad \sin^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$

(ii) $\because\quad \cos^{-1} x = \theta$, जहाँ $0 \le \theta \le \pi$ तथा $-1 \le x \le 1$

$\therefore\quad \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ = एक कोण जो $[0, \pi]$ में है तथा जिसका cosine, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ है

$\Rightarrow\quad \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

इसी तरह $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ = एक कोण जो $[0, \pi]$ में हो तथा जिसका cosine, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ है

$\Rightarrow\quad \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(iii) $\because$ $\tan^{-1} x = \theta$, जहाँ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ जिसका tangent $(-\sqrt{3})$ है

$\therefore$ $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ = एक कोण जो $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ में है तथा जिसका tangent $-\sqrt{3}$ है

$\Rightarrow$ $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$

इसी तरह $\tan^{-1}(1)$ = एक कोण जो $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ में है तथा जिसका tangent 1 है

$\therefore$ $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$

उदाहरण 2. मान निकाले :

(i) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$ (iii) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)$

(iv) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ (v) $\cos^{-1}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

हल : (i) $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$, यदि $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

अतः $\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ $\left[\because -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{2}\right]$

(ii) $\cos^{-1}(\cos\theta) = \theta$ यदि $0 \le \theta \le \pi$

$\therefore$ $\cos^{-1}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$ $\left[\because 0 \le \frac{2\pi}{3} \le \pi\right]$

(iii) $\because$ $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$, यदि $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $\tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$ $\left[\because -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}\right]$

(iv) $\because$ $\frac{2\pi}{3} \notin -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ $\therefore$ $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) \ne \frac{2\pi}{3}$

अब $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sin^{-1}\left\{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right\}$ $\Rightarrow$ $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow$ $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

(v) $\because$ $\frac{7\pi}{6} \notin [0, \pi]$ $\therefore$ $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right) \ne \frac{7\pi}{6}$

अब $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right) = \cos^{-1}\left\{\cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{6}\right)\right\}$ $[\because \cos(2\pi - \theta) = \cos\theta]$

$\Rightarrow$ $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right) = \cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{6}\right)$ $\Rightarrow$ $\cos^{-1}\cos\frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ **उत्तर**

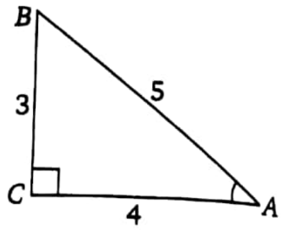
उदाहरण 3. यदि $\tan^{-1}\frac{3}{4} = A$, तो $\sin A$ का मान बताइयें जब $0 < A < 90°$।

हल : दिया गया है $\tan^{-1}\frac{3}{4} = A$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$\therefore \quad \tan A = \frac{3}{4} = \frac{\text{लंब}}{\text{आधार}} \qquad \therefore \quad \text{लंब} = 3,\ \text{आधार} = 4$



$\therefore \quad \text{कर्ण} = \sqrt{\text{लंब}^2 + \text{आधार}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore \quad \sin A = \text{लंब/कर्ण} = 3/5 \qquad \Rightarrow \quad A = \sin^{-1}(3/5)$

उदाहरण 4. सिद्ध करें :

(i) $2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]

(ii) $\tan^{-1}1 + \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]

हल : (i) L.H.S. $= 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}\right) + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}} = \tan^{-1}\frac{\frac{21+4}{28}}{\frac{28-3}{28}} = \tan^{-1}\frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}$$

इति सिद्धम्

(ii) $\tan^{-1}1 + \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$

L.H.S. $= \tan^{-1}1 + \tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}1 + \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}$

$$= \tan^{-1}1 + \tan^{-1}\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = \tan^{-1}1 + \tan^{-1}1 = 2\tan^{-1}1 = 2\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

इति सिद्धम्

उदाहरण 5. सिद्ध करें :

(a) $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{8}{17} = \sin^{-1}\frac{77}{85}$ (b) $\cos^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \sin^{-1}\frac{63}{65}$

(c) $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2014, 16]

हल : (a) मान लिया $\sin^{-1}\frac{3}{5} = \alpha$ तथा $\sin^{-1}\frac{8}{17} = \beta$ तो $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ तथा $\sin\beta = \frac{8}{17}$

अब $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\beta} + \sqrt{1-\sin^2\alpha}\,\sin\beta$

$$= \frac{3}{5}\times\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\times\frac{8}{17}$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$$= \frac{3}{5} \times \sqrt{\frac{289-64}{289}} + \sqrt{\frac{25-9}{25}} \times \frac{8}{17}$$

$$= \frac{3}{5} \times \sqrt{\frac{225}{289}} + \sqrt{\frac{16}{25}} \times \frac{8}{17} = \frac{3}{5} \times \frac{15}{17} + \frac{4}{5} \times \frac{8}{17}$$

$$= \frac{45}{85} + \frac{32}{85} = \frac{77}{85}$$

अर्थात् $\sin(\alpha+\beta) = \frac{77}{85} \Rightarrow \alpha+\beta = \sin^{-1}\frac{77}{85}$ अर्थात् $\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{8}{17} = \sin^{-1}\frac{77}{85}$

(b) मान लिया $\cos^{-1}\frac{3}{5} = \alpha$ तथा $\cos^{-1}\frac{12}{13} = \beta$ तो $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ तथा $\cos\beta = \frac{12}{13}$

अब $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \, . \cos\beta - \sin\alpha \, . \sin\beta = \cos\alpha\cos\beta - \sqrt{1-\cos^2\alpha} \times \sqrt{1-\cos^2\beta}$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} - \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} \times \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}$$

$$= \frac{36}{65} - \sqrt{1-\frac{9}{25}}\sqrt{1-\frac{144}{169}}$$

$$= \frac{36}{65} - \sqrt{\frac{16}{25}} \times \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{36}{65} - \frac{4}{5} \times \frac{5}{13}$$

$$= \frac{36}{65} - \frac{4}{13} = \frac{36-20}{65} = \frac{16}{65}$$

अर्थात् $\cos(\alpha+\beta) = \frac{16}{65}$ $\therefore \alpha+\beta = \cos^{-1}\frac{16}{65}$

$\therefore \cos^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{16}{65} = \sin^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{16}{65}\right)^2} = \sin^{-1}\frac{63}{65}$ **इति सिद्धम्**

(c) मान लो $\sin^{-1}\frac{4}{5} = \alpha,\ \sin^{-1}\frac{5}{13} = \beta$ तथा $\sin^{-1}\frac{16}{65} = \gamma$

तो $\sin\alpha = \frac{4}{5},\ \sin\beta = \frac{5}{13}$ तथा $\sin\gamma = \frac{16}{65}$

$\therefore$ $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{25-16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{169-25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$

तथा $\cos\gamma = \sqrt{1-\sin^2\gamma} = \sqrt{1-\left(\frac{16}{65}\right)^2} = \sqrt{\frac{4225-256}{4225}} = \sqrt{\frac{3969}{4225}} = \frac{63}{65}$

तथा $\alpha+\beta+\gamma = \sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\frac{16}{65}$ ...(1)

अब $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin(\alpha+\beta) \, . \cos\gamma + \cos(\alpha+\beta)\sin\gamma$

$$= \{(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\cos\gamma + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\sin\gamma\}$$

$$= \left\{\left(\frac{4}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{13}\right) \times \frac{63}{65} + \left(\frac{3}{5} \times \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \times \frac{5}{13}\right) \times \frac{16}{65}\right\}$$ [मान रखने पर]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$$=\left(\frac{48}{65}+\frac{15}{65}\right)\times\frac{63}{65}+\left(\frac{36}{65}-\frac{20}{65}\right)\times\frac{16}{65}=\frac{63}{65}\times\frac{63}{65}+\frac{16}{65}\times\frac{16}{65}$$

$$=\frac{3969+256}{4225}=\frac{4225}{4225}=1$$

अर्थात् $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=1 \quad\Rightarrow\quad \alpha+\beta+\gamma=\sin^{-1}1=\frac{\pi}{2}$ ...(2)

$\therefore \quad \sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$ [(1) तथा (2) से] इति सिद्धम्

उदाहरण 6 : (i) यदि $r^2=x^2+y^2+z^2$ तो सिद्ध करें

$$\tan^{-1}\frac{yz}{xr}+\tan^{-1}\frac{zx}{yr}+\tan^{-1}\frac{xy}{zr}=\frac{\pi}{2}$$

(ii) यदि $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ तो सिद्ध करें

$$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$$

(iii) यदि $\tan^{-1}\alpha+\tan^{-1}\beta+\tan^{-1}\gamma=\pi$, तो सिद्ध करें

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha\beta\gamma$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]

हल : (i) मान लिया $\tan^{-1}\frac{yz}{xr}=\alpha,\ \tan^{-1}\frac{zx}{yr}=\beta$ तथा $\tan^{-1}\frac{xy}{zr}=\gamma$

तो $\tan\alpha=\frac{yz}{xr},\ \tan\beta=\frac{zx}{yr}$ तथा $\tan\gamma=\frac{xy}{zr}$

अब $\tan^{-1}\frac{yz}{xr}+\tan^{-1}\frac{zx}{yr}+\tan^{-1}\frac{xy}{zr}=\alpha+\beta+\gamma$ ...(1)

तथा $1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\alpha\tan\gamma$

$$=1-\frac{yz}{xr}\times\frac{zx}{yr}-\frac{zx}{yr}\times\frac{xy}{zr}-\frac{yz}{xr}\times\frac{xy}{zr}=1-\frac{z^2}{r^2}-\frac{x^2}{r^2}-\frac{y^2}{r^2}$$

$$=1-\frac{1}{r^2}(x^2+y^2+z^2)=1-\frac{r^2}{r^2} \qquad [\because x^2+y^2+z^2=r^2]$$

$$=1-1=0$$ ...(2)

$$\therefore \quad \tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{0}$$ [(2) से]

$$=\infty$$

अर्थात् $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\infty \quad\Rightarrow\quad \alpha+\beta+\gamma=\tan^{-1}\infty=\pi/2$

अर्थात् $\tan^{-1}\frac{yz}{xr}+\tan^{-1}\frac{zx}{yr}+\tan^{-1}\frac{xy}{zr}=\frac{\pi}{2}$ [(1) से $\alpha+\beta+\gamma$ का मान रखने पर]

इति सिद्धम्

(ii) दिया गया है $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$

या $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\pi-\cos^{-1}z$

या $\cos^{-1}[xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}]=\pi-\cos^{-1}z$

या $xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}=\cos(\pi-\cos^{-1}z)=-\cos(\cos^{-1}z)=-z$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

या $xy + z = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$

दोनों तरफ वर्ग करने पर

$$(xy+z)^2 = (1-x^2)(1-y^2)$$

या $x^2y^2 + z^2 + 2xyz = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2$ या $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ इति सिद्धम्

(iii) दिया गया है

$$\tan^{-1}\alpha + \tan^{-1}\beta + \tan^{-1}\gamma = \pi \quad \text{या} \quad \tan^{-1}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta} + \tan^{-1}\gamma = \pi$$

$$\left[\because \tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \tan^{-1}\frac{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}+\gamma}{1-\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}\cdot\gamma} = \pi \Rightarrow \frac{\frac{\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma}{1-\alpha\beta}}{\frac{1-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma}{1-\alpha\beta}} = \tan\pi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma}{1-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma} = 0 \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma = 0\times(1-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma) = 0$$

$$\therefore \quad \alpha+\beta+\gamma = \alpha\beta\gamma$$ इति सिद्धम्

उदाहरण 7 : यदि $\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \alpha$ हो, तो सिद्ध करें कि

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{2xy}{ab}\cos\alpha + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha$$

हल : माना $\sin^{-1}\frac{x}{a} = \theta$ तथा $\sin^{-1}\frac{y}{b} = \phi$ तो $\frac{x}{a} = \sin\theta, \frac{y}{b} = \sin\phi$

अतः प्रश्न से $\theta + \phi = \alpha$

$\therefore \quad \cos\alpha = \cos(\theta+\phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$

$$= \sqrt{1-\sin^2\theta}\sqrt{1-\sin^2\phi} - \sin\theta\sin\phi = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \times \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} - \frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha + \frac{x}{a}\frac{y}{b} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \quad \Rightarrow \left(\cos\alpha + \frac{xy}{ab}\right)^2 = \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2\alpha + \frac{2xy}{ab}\cos\alpha + \frac{x^2y^2}{a^2b^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2y^2}{a^2b^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{2xy}{ab}\cos\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$ इति सिद्धम्

उदाहरण 8 : हल करें : $\cot^{-1}x + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{4}$

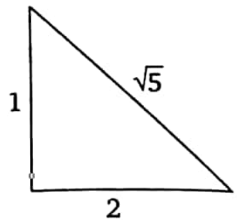
हल : दिया गया है $\cot^{-1}x + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\pi}{4}$ ...(1)

अब $\cot^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1}{x}$ ...(2)

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner



माना $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}=\alpha$ तो $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{p}{h}$, जहाँ p = लंब, h = कर्ण

$\therefore$ $$p=1, h=\sqrt{5}$$

$$\text{आधार } =b=\sqrt{h^2-p^2}=\sqrt{5-1}=\sqrt{4}=2$$

$\therefore$ $$\tan\alpha=\frac{p}{b}=\frac{1}{2} \quad \therefore \quad \alpha=\tan^{-1}\frac{1}{2}=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad ...(3)$$

(1) में (2) तथा (3) से मान रखने पर

$$\tan^{-1}\frac{1}{x}+\tan^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4} \quad \text{या} \quad \tan^{-1}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{4} \quad \text{या} \quad \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2x}}=\tan\frac{\pi}{4}$$

या $$\frac{\frac{2+x}{2x}}{\frac{2x-1}{2x}}=1 \quad \text{या} \quad \frac{2+x}{2x-1}=1$$

या $$2+x=2x-1 \quad \text{या} \quad 2x-x=2+1 \quad \therefore \quad x=3$$ **उत्तर**

उदाहरण 9 : हल करें : $$\cos^{-1}\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}+\cos^{-1}\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}=2\tan^{-1}x$$

हल : दिया गया है $$\cos^{-1}\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}+\cos^{-1}\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}=2\tan^{-1}x \qquad ...(1)$$

या $$2\tan^{-1}\alpha+2\tan^{-1}\beta=2\tan^{-1}x \quad \text{या} \quad \tan^{-1}\alpha+\tan^{-1}\beta=\tan^{-1}x$$

या $$\tan^{-1}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}=\tan^{-1}x \quad \therefore \quad x=\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$$ **उत्तर**

उदाहरण 10 : हल करें : $$\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x$$

हल : दिया गया है $$\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x$$

या $$\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}3x-\tan^{-1}x$$

या $$\tan^{-1}\frac{(x-1)+(x+1)}{1-(x-1)(x+1)}=\tan^{-1}\frac{3x-x}{1+3x.x}$$

या $$\tan^{-1}\frac{2x}{1-(x^2-1)}=\tan^{-1}\frac{2x}{1+3x^2}$$

या $$\tan^{-1}\frac{2x}{2-x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1+3x^2} \quad \therefore \quad \frac{2x}{2-x^2}=\frac{2x}{1+3x^2}$$

या $$x(2-x^2)=x(1+3x^2) \quad \text{या} \quad 2x-x^3=x+3x^3$$

या $$2x-x-x^3-3x^3=0 \quad \text{या} \quad x-4x^3=0 \quad \text{या} \quad x(1-4x^2)=0$$

$\therefore$ $$x=0 \quad \text{या} \quad 1-4x^2=0$$

$\Rightarrow$ $$1-4x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{2} \quad \therefore \quad x=0,\pm\frac{1}{2}$$ **उत्तर**

उदाहरण 11 : हल करें : $$4\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi$$

हल : $$4\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi \Rightarrow 3\sin^{-1}x+\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \quad 3\sin^{-1}x + \frac{\pi}{2} = \pi \qquad [\because \sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow \quad 3\sin^{-1}x = \pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow 3\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin^{-1}x = \frac{\pi}{6} \quad \therefore \quad x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ उत्तर

स्मरणीय उपयोगी सूत्र

1. यदि $\sin\theta = x$ तो $\theta = \sin^{-1}x$

2. यदि $\sin^{-1}x = \theta$ तो $\sin\theta = x$

3. $\sin^{-1}x = \text{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$; $\cos^{-1}x = \sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$; $\tan^{-1}x = \cot^{-1}\frac{1}{x}$; $\cot^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$;

   $\sec^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1}{x}$; $\text{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

4. $\theta = \sin^{-1}(\sin\theta) = \cos^{-1}(\cos\theta) = \tan^{-1}(\tan\theta) = \cot^{-1}(\cot\theta)$ आदि

5. $x = \sin(\sin^{-1}x) = \cos(\cos^{-1}x) = \tan(\tan^{-1}x) = \cot(\cot^{-1}x)$ आदि

6. $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$; $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

   $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$; $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}x$

   $\text{cosec}^{-1}(-x) = -\text{cosec}^{-1}x$; $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1}x$

7. $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$, यदि $xy < 1$

   $= \pi + \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$ यदि $xy > 1$

   $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}, \quad xy > -1$

   $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}$

8. $\sin^{-1}x \pm \sin^{-1}y = \sin^{-1}[x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}]$

   $\cos^{-1}x \pm \cos^{-1}y = \cos^{-1}[xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}]$

9. $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

   $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}[2x\sqrt{1-x^2}]$; $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}[2x^2-1]$

10. $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$; $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$; $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3-3x)$

11. $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \pi/2$; $\sec^{-1}x + \text{cosec}^{-1}x = \pi/2$; $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \pi/2$

प्रश्नावली 13.1

1. (a) इनके मुख्य मान बताइये :

   (i) $\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\sec^{-1}1$ (iii) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$ (iv) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(v) $\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}+\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(b) (i) यदि $\tan^{-1}x = A$ तो $\sec A$ का मान ज्ञात करें। [उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]

(ii) यदि $\sin A = \frac{1}{4}$ तो $\text{cosec}^{-1}\, 4$ का मान बतायें। [उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

(iii) यदि $\cos\theta = \frac{a}{b}$ तो $\tan\theta$ का मान बतायें। [उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]

2. निम्नलिखित के मान लिखें :

(i) $\sin(\sin^{-1} 1)$ (ii) $\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (iii) $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(iv) $\cot(\tan^{-1}x+\cot^{-1}x)$ (v) $\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y)$

3. निम्नलिखित को प्रमाणित करें :

(i) $\sin^{-1}x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(iii) $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2016]

(iv) $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$ (v) $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$

(vi) $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

4. सिद्ध कीजिए :

(i) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$ (ii) $2\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{3}{4}$

(iii) $\tan^{-1}2-\tan^{-1}1=\tan^{-1}\frac{1}{3}$ (iv) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}(1+x)=\tan^{-1}(1+x+x^2)$

(v) $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3=\pi$ (vi) $\tan^{-1}5-\tan^{-1}3+\tan^{-1}\frac{7}{9}=\frac{\pi}{4}$

(vii) $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2012]

(viii) $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}=\tan^{-1}a-\tan^{-1}c$

(ix) $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca}=0$

(x) $\cot^{-1}\frac{xy+1}{y-x}+\cot^{-1}\frac{yz+1}{z-y}+\cot^{-1}z=\tan^{-1}\frac{1}{x}$

(xi) सिद्ध कीजिये कि $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{2}{5}=\tan^{-1}\frac{23}{14}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2013]

[**संकेत** : $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{2}{5}=\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{5}$]

(xii) सिद्ध कीजिए $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{33}{65}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2015]

5. सिद्ध करें :

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(i) $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}=\tan^{-1}\frac{63}{16}$

(ii) $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2014]

(iii) $\cos^{-1}\frac{3}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}+\cos^{-1}\frac{63}{65}=\frac{\pi}{2}$

(iv) $\cot^{-1}7+\cot^{-1}8+\cot^{-1}18=\cot^{-1}3$

(v) $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\tan^{-1}\frac{4}{7}$

(vi) $\tan^{-1}1+\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]

(viii) $\tan^{-1}\frac{16}{13}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{5}{12}=\frac{\pi}{4}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2016]

6. सिद्ध करें :

(i) $\sec^2(\tan^{-1}2)+\text{cosec}^2(\cot^{-1}3)=15$

[**संकेत :** $\sec^2(\tan^{-1}2)=1+\tan^2(\tan^{-1}2)=1+\{\tan(\tan^{-1}2)\}^2$

$\text{cosec}^2(\cot^{-1}3)=1+\cot^2(\cot^{-1}3)=1+\{\cot(\cot^{-1}3)\}^2$]

(ii) $\tan^{-1}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$

(iii) $2\tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{a}}=\cos^{-1}\frac{a-b}{a+b}$

(iv) $\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-a^2}{1+a^2}\right]=\frac{2a}{1-a^2}$

7. (i) यदि $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{\pi}{2}$, तो सिद्ध करें $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$

(ii) यदि $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\frac{1}{2}\pi$, तो सिद्ध करें $yz+zx+xy=1$

(iii) यदि $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$ तो सिद्ध करें $x+y+z=xyz$

(iv) यदि $\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\alpha$, तो सिद्ध करें $\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\alpha$

8. निम्न समीकरणों को हल करें :

(i) $\tan^{-1}\frac{1}{2}-\tan^{-1}\frac{1}{7}=\cot^{-1}x$

(ii) $\sin^{-1}\frac{5}{x}+\sin^{-1}\frac{12}{x}=\frac{\pi}{2}$

(iii) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}(1-x)=\cot^{-1}\frac{7}{9}$

(iv) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}(1-x)=\cos^{-1}x$

(v) $\tan^{-1}(x+1)-\tan^{-1}(x-1)=\cot^{-1}2$

(vi) $\cot^{-1}\frac{1}{x+1}+\cot^{-1}\frac{1}{x-1}=\tan^{-1}3x-\tan^{-1}x$

(vii) $\cot^{-1}(a-1)=\cot^{-1}(a^2-x+1)+\cot^{-1}x$

(viii) $\tan^{-1}\frac{1}{a-1}=\tan^{-1}\frac{1}{x}+\tan^{-1}\frac{1}{a^2-x+1}$

(ix) $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}+\sin^{-1}\frac{2b}{1+b^2}=2\tan^{-1}x$

(x) $\sin^{-1}\frac{2a}{1+a^2}-\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(xi) $\tan^{-1} 2x + \tan^{-1} 3x = \frac{\pi}{4}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2017(O)]

9. यदि $\tan^{-1}(1+x) + \tan^{-1}(1-x) = \frac{\pi}{6}$ हो, तो सिद्ध करें

$$x^2 = 2\sqrt{3}$$

10. यदि $\sin^{-1} x + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ हो, तो सिद्ध करें

$$2x^2 + 1 = \sqrt{5}$$

उत्तरमाला

1.(a) (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) 0 (iii) $\frac{\pi}{6}$ (iv) $\frac{2\pi}{3}$ (v) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) (i) $\sqrt{1+x^2}$ (ii) A (iii) $\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}$

2.(i) 1 (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) 1 (iv) 0 (v) $\frac{x+y}{1-xy}$

8.(i) 3 (ii) ± 13 (iii) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ (iv) $0, \frac{1}{2}$ (v) ± 2 (vi) $\pm\frac{1}{2}$ (vii) $a, a^2 - a + 1$

(viii) $a, a^2 - a + 1$ (ix) $\frac{a+b}{1-ab}$ (x) $\frac{a-b}{1+ab}$ (xi) $x = \frac{1}{6}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अध्याय 14

फलन (Functions)

गणितीय गणना में कई बार हमें उन स्थितियों पर विचार करना पड़ता है जिसमें एक राशि के मान में होने वाला परिवर्तन दूसरी राशि के मान को प्रभावित करता है। जैसे : अचर वेग से चलती हुई गाड़ी द्वारा चली गई दूरी समय पर निर्भर करती है; किसी स्थान का वायुमंडलीय दाब उस स्थान की ऊँचाई पर निर्भर करता है; किसी गोले का आयतन उसकी त्रिज्या पर निर्भर करता है आदि।

अवकलन गणित में हम उन समस्याओं के बारे में अध्ययन करते हैं जिसमें एक राशि के मान में परिवर्तन दूसरी राशि के मान को प्रभावित करता है। यह परिवर्तन किस प्रकार होता है; परिवर्तन की दर क्या है; आदि इसके अध्ययन के विषय हैं। इनके बारे में जानने से पहले हम विभिन्न प्रकार के फलनों से सबंधित तथ्यों का अध्ययन करेंगे।

14.1 परिभाषायें (Definitions)

14.1.1 राशियाँ (Quantities)

जो कुछ भी मापा जा सकता है, वे राशियाँ कहलाती हैं। जैसे : मात्रा, आयतन, भार आदि।

राशियाँ दो प्रकार की होती हैं :

(a) अचर राशि (b) चर राशि।

(a) अचर राशि (Constants) : यदि किसी राशि का मान सम्पूर्ण गणितीय गणना में स्थिर रहता है, तो वे अचर राशि कहलाती हैं। ये दो प्रकार की होती हैं :

(i) निरपेक्ष अचर (Absolute Constants) : ऐसी राशियाँ जिनका मान गणित की सभी गणनाओं में निश्चित रहता है, निरपेक्ष अचर कहलाती हैं। जैसे $2, \sqrt{3}, -5$ आदि

(ii) स्वेच्छ अचर (Arbitrary Constants) : ऐसी राशियाँ जिनका मान किसी खास गणितीय गणना में तो स्थिर रहता है किन्तु भिन्न-भिन्न गणितीय गणनाओं में इनका मान परिवर्तित होता रहता है **स्वेच्छ अचर राशियाँ** कहलाती हैं। इनको सामान्यत: अंग्रेजी वर्णमाला के प्रारंभिक अक्षरों a, b, c, d इत्यादि से सूचित किया जाता है।

(b) चर राशियाँ (Variables) : वे राशियाँ जिन्हें कोई भी मान दिया जा सकता है अर्थात् जिनका मान परिवर्तनशील है, चर राशियाँ कहलाती हैं। इन्हें सामान्यत: अंग्रेजी वर्णमाला के अंतिम अक्षरों $x, y, z, u, v, w, \ldots$ आदि से सूचित किया जाता है।

ये राशियाँ दो प्रकार की होती हैं :

(i) स्वतंत्र चर राशि (Independent Variables) : वे चर राशियाँ जो स्वतंत्रतापूर्वक कोई भी मान ग्रहण कर सकती हैं, स्वतंत्र चर राशि कहलाती हैं।

जैसे : $y^2 = 4ax$ में x को कोई भी मान दिया जा सकता है। अत: x एक स्वतंत्र चर है।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

(ii) परतंत्र चर राशि (Dependent Variables) : चर राशि जिसका मान स्वतंत्र चर राशि के मान पर निर्भर करता है, परतंत्र चर राशि कहलाती है। जैसे उपरोक्त उदारहण $y^2 = 4ax$ में y परतंत्र चर है क्योंकि इसका मान स्वतंत्र चर x पर निर्भर है। इसी तरह $V = \frac{4}{3}\pi r^3$। इसमें V का मान r पर निर्भर करता है अत: V परतंत्र चर तथा r स्वतंत्र चर है।

14.2 फलन (Functions)

यदि दो चर राशियाँ x और y इस प्रकार संबंधित हों कि x के प्रत्येक मान के संगत y का एक निश्चित मान प्राप्त होता है, तो y को x का फलन कहा जाता है तथा इसे सामान्यत: $y = f(x)$ से सूचित किया जाता है। इसे $\phi(x), \psi(x), \ldots$ इत्यादि से भी प्रकट किया जा सकता है।

14.2.1 फलन का मान (Value of a Function)

यदि $y = f(x)$ कोई फलन है, तो $x = a$ पर फलन का मान x की जगह a रखने से प्राप्त होता है तथा इसे $f(a)$ से सूचित किया जाता है।

जैसे $f(x) = 4x^2 + 2$ तो $x = 2$ पर $f(2) = 4 \times 2^2 + 2 = 16 + 2 = 18$

14.2.2 फलनों की संक्रियायें

यदि f तथा g कोई दो वास्तविक तथा एक मानों फलन हों, तो

(i) फलनों का योग/अंतर $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ (ii) फलनों का गुणनफल $(fg)(x) = f(x)\,g(x)$

(iii) फलनों का भागफल $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (iv) $f\,f\,f(x) = f[f\{f(x)\}]$

14.3 फलन के प्रकार (Kinds of Functions)

(1) एकचरीय फलन (Functions of Single Variable)

यदि चर राशि y, **केवल एक चर राशि** x पर आश्रित है, तब $y = f(x)$ **एकचरीय फलन** कहलाता है।

$y = f(\theta), s = f(t), y = f(r)$ इत्यादि एकचरीय फलन हैं।

(2) बहुचरीय फलन (Functions of Many Variables)

यदि चर राशि z, **दो चर राशियों** x और y पर आश्रित हैं, तब $z = f(x, y)$ **बहुचरीय फलन** कहलाता है। यह दो से अधिक चर राशियों पर भी आश्रित हो सकता है।

(3) स्पष्ट फलन (Explicit Function)

फलन $y = f(x)$ एक स्पष्ट फलन कहलाता है यदि y को x के स्वतन्त्र पदों के रूप में लिखना सम्भव हो।

जैसे : $y = x^4 + 2x + 7$, $y = \cos x$, $y = \frac{x}{1+x^2}$, $y = \sin^{-1} x$ आदि।

(4) अस्पष्ट फलन (Implicit Function)

फलन $y = f(x)$ एक **अस्पष्ट फलन** कहलाता है यदि y को x के स्वतन्त्र पदों के रूप में लिखना सम्भव न हो।

जैसे : $y = x \sin(x + y)$, $x^2 y^3 = (x + y)^2$ आदि।

(5) सम फलन (Even Function)

यदि $y = f(x)$ चर x का कोई फलन है तथा $f(-x) = f(x)$ हो, तो $f(x)$ सम फलन कहलाता है।

अर्थात् यदि $f(x)$ में x के स्थान पर $-x$ रखने पर फलन का चिह्न न बदले तो वह सम फलन है।

जैसे : $f(x) = \cos x = \cos(-x) = f(-x)$; अत: $\cos x$ सम फलन है। इसी तरह $y = x^2$ एक सम फलन हैं।

AKTECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(6) विषम फलन (Odd Function)

यदि $y = f(x)$ चर x का कोई फलन है और $f(-x) = -f(x)$, तो $f(x)$ विषम फलन कहलाता है। अर्थात् यदि $f(x)$ में x के स्थान पर $-x$ रखने पर फलन का चिह्न बदल जाये तो वह विषम फलन है। जैसे : $f(x) = x^3$ तथा $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$ अत: x^3 विषम फलन है। इसी तरह $y = \sin x$ विषम फलन है, क्योंकि $\sin(-x) = -\sin x$

(7) बीजीय फलन (Algebraic Function)

चर राशि की विभिन्न संख्यात्मक घातों वाला ऐसा फलन जिनमें पदों की संख्या निश्चित हो, **बीजीय फलन** कहलाता है।
जैसे : $f(x) = x^2 + 2x + 7$; $f(x) = x^m + y^n$ बीजीय फलन हैं।

(8) परिमेय फलन (Rational Function)

एक भिन्न के रूप में व्यक्त किया गया ऐसा फलन जिसके अंश और हर दोनों ही पूर्णांक घातों वाले बीजीय व्यंजक हों, **परिमेय फलन** कहलाता है। जैसे $f(x) = \dfrac{2x^3 + x + 3}{x^3 + 5x^2 + x + 8}$

(9) अबीजीय फलन (Transcendental Functions)

जो फलन बीजीय नहीं हैं, वे अबीजीय फलन कहलाते हैं। कुछ प्रमुख अबीजीय फलन निम्न हैं :

(i) **त्रिकाणमितीय फलन** (Trigonometrical Functions) : जैसे : $\sin x, \cos x, \sec x, \sin 2x + \sec^2 x$ इत्यादि।

(ii) **प्रतिलोम वृत्तीय फलन** (Inverse Circular Functions) : जैसे : $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x, \sec^{-1} x$ इत्यादि।

(iii) **लघुगणकीय फलन** (Logarithmic Functions) : जैसे : $\log_e x, \log_a x, \log_e (x^2 + 4x + 3)$ इत्यादि।

(iv) **चरघातांकी फलन** (Exponential Functions) : जैसे : $e^x, a^x, x^{\sin x}, (\sin x)^{\cos x}$ इत्यादि।

(10) आवर्ती फलन (Periodic Function)

फलन $y = f(x)$ **आवर्ती फलन** कहलाता है यदि x के प्रत्येक मान के लिए

$$f(x + k) = f(x),$$

जहाँ k कोई वास्तविक संख्या है जो 0 के बराबर नहीं है, अर्थात् $k \neq 0$, संख्या k को फलन का **आवर्त** (Period) कहते हैं।

(11) फलन का फलन (Function of the Function)

माना $f(x)$ तथा $g(x)$ चर x के कोई दो फलन हैं, तब $f[g(x)]$ **फलन का फलन** कहलाता है जो $f(x)$ में x के स्थान पर $g(x)$ रखने पर प्राप्त होता है।
इसी प्रकार, $g[f(x)]$ भी फलन का फलन है जो $g(x)$ में x के स्थान पर $f(x)$ रखने पर प्राप्त होता है।

14.3.1 महत्वपूर्ण फलन एवं उनके लेखाचित्र (Important Functions and their Graphs)

1. **मापांक फलन : $y = |x|$** को मापांक फलन कहते है तथा इसे निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है :
यहाँ पर $y = x$, यदि $x \geq 0$ और $y = -x$, यदि $x < 0$.

$y = |x|$ के लिए सारणी

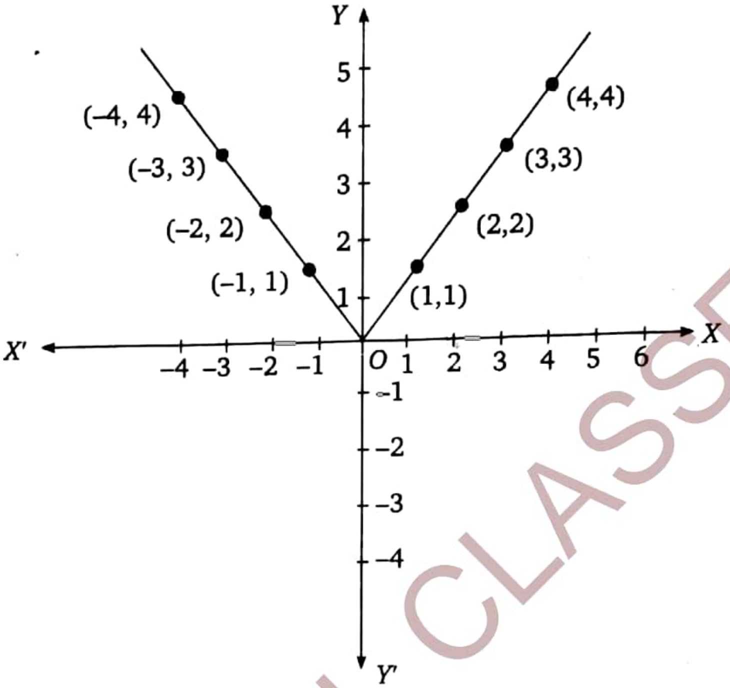
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	4	3	2	1	0	1	2	3	4

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

लेखाचित्र :



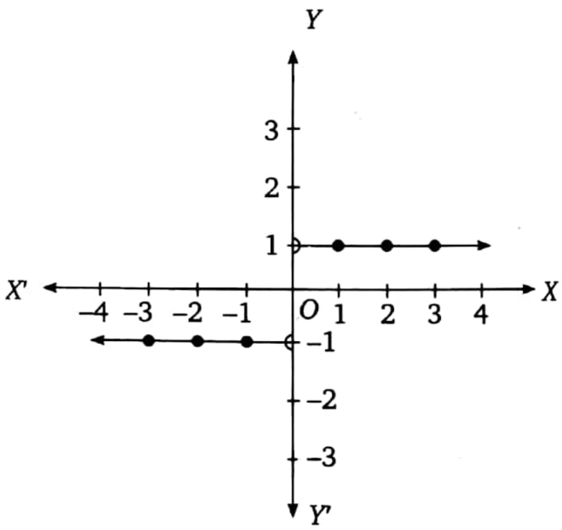
2. फलन $y = \frac{|x|}{x}$ यदि $x \neq 0$

इस फलन को सिग्नम (Signum) फलन कहते हैं। इसे निम्न प्रकार से परिभाषित कर सकते हैं—

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{यदि } x > 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \\ -1, & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

फलन $y = \frac{|x|}{x}$ की सारणी

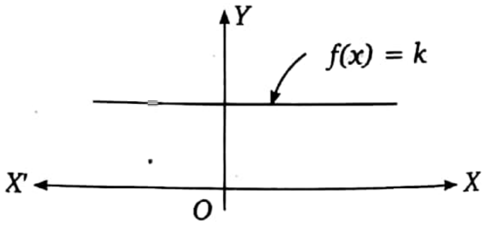
x	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4
y	–1	–1	–1	–1	1	1	1	1



इस सारणी का लेखाचित्र पार्श्व चित्र द्वारा प्रदर्शित है।

3. स्थिर फलन (Constant Function)

$f(x) = k$ जहाँ k एक अचर राशि है, स्थिर फलन है। इसका प्रभाव क्षेत्र **R** तथा परास {**k**} है।



4. तत्समक फलन (Identity Function)

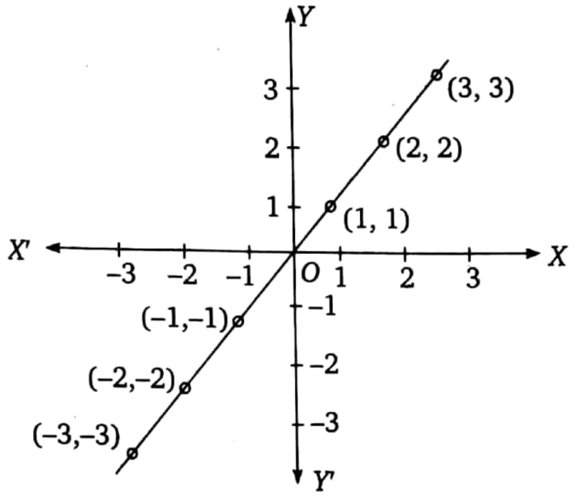
$f(x) = x, x \in \boldsymbol{R}$ तत्समक फलन कहलाता है।

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$f(x)$	–3	–2	–1	0	1	2	3

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

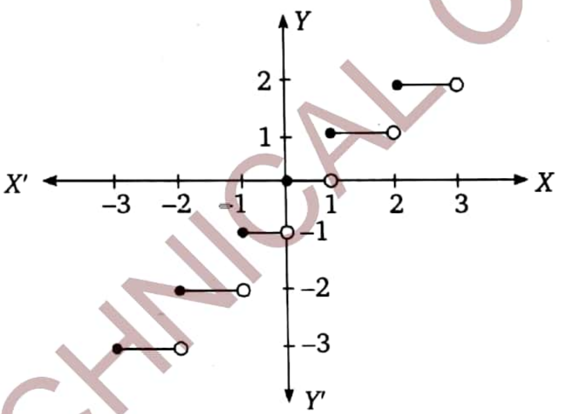
लेखाचित्र :



5. महत्तम पूर्णांक फलन (Greatest Integer Functions) [x]

यदि x वास्तविक संख्या हो, तो महत्तम पूर्णांक फलन $[x]$ वह महत्तम पूर्णांक है, जिसका मान x से बड़ा नहीं है जैसे : $[3.4] = 3$; $[2.7] = 2$; $[5.1] = 5$; $[4] = 4$; $[0.23] = 0$; $[-2] = -2$; $[-2.4] = -3$

***f* (*x*) = [*x*] का लेखाचित्र :**



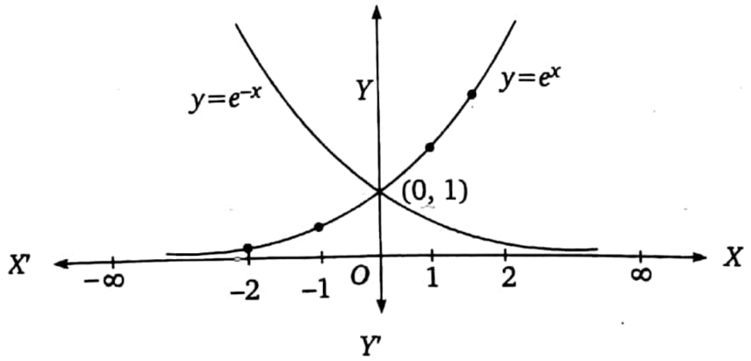
6. चर घातांकी फलन (Exponential Functions)

यदि $f : R \to R$ कोई फलन हो जो $f(x) = a^x$, जहाँ $a > 0$ तथा $a \neq 1$ से दिया जाता है तो $f(x)$ चर घातांकी फलन कहलाता है। उदाहरण : $f(x) = e^x, a^x, 2^x, \ldots$ आदि चर घातांकी फलन हैं। इनका प्रभाव क्षेत्र (Domain) $= \mathbf{R}$ तथा परास (Range) $= \mathbf{R}^+$ अर्थात् $(0, \infty)$ है।

$y = e^x$ के ग्राफ के लिए तालिका

x	0	1	−1	2	−2	∞	−∞
y	1	2.7	0.37	7.38	0.14	∞	0

लेखाचित्र :



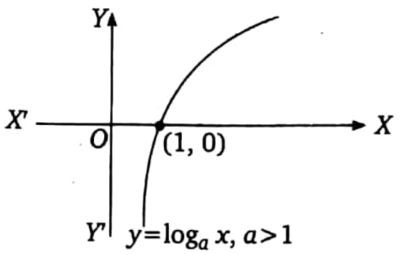
AKC TECHNICAL CLASSES

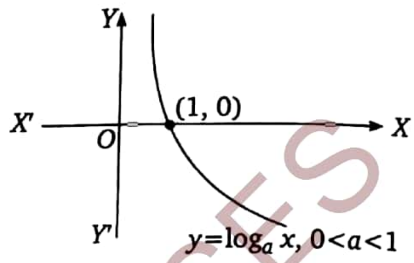
Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

6. लघुगणकीय फलन (Logarithmic Functions)

यदि $a>0$ तथा $a \neq 1$ तो $y=\log_a x, x>0$ को लघुगणकीय फलन करते हैं। इसका प्रभाव क्षेत्र $R^+ -\{0\}$ तथा परास R होता है,





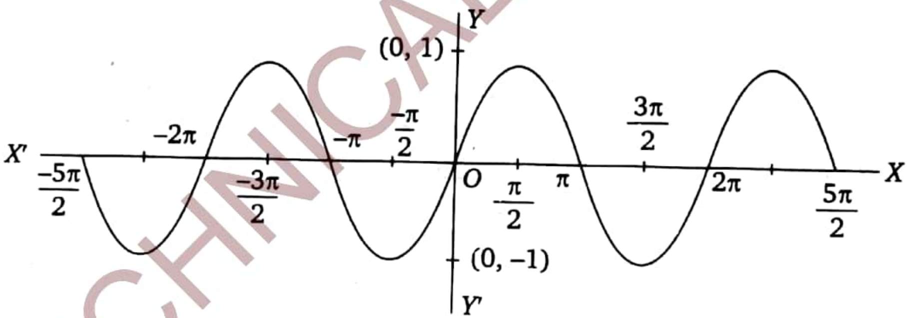
$a>1$ के लिए $y, 0<x<1$ में ऋणात्मक, $x=1$ पर शून्य तथा $x>1$ के लिए धनात्मक तथा वर्द्धमान एवं $0<a<1, a<x<1$ धनात्मक, $x=1$ पर शून्य तथा $x>1$ के लिए ऋणात्मक है तथा ह्रासमान (Decreasing) होता है।

14.3.2 त्रिकोणमितीय फलनों के लेखाचित्र (Graphs of Important Trigonometric Functions)

(i) फलन $y = \sin x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	.5	.71	.87	1	.87	.5	0	–.5	–.71	–.87	–1	– .87	– .5	0

लेखाचित्र :



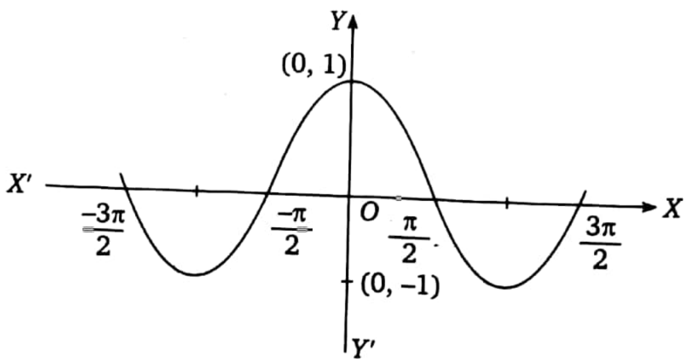
(ii) फलन $y = \cos x$

x को भिन्न-भिन्न मान देकर y के मान ज्ञात करने पर निम्न तालिका प्राप्त होती है—

x	0	$\pm \pi/2$	$\pm 3\pi/2$	$\pm 5\pi/2$	$\pm 7\pi/2$	......
y	1	0	0	0	0	......

उक्त तालिका से प्रकट होता है कि वक्र y-अक्ष $(0, 1)$ में तथा x-अक्ष से क्रमश: $(\pm \pi/2, 0)$, $(\pm 3\pi/2, 0)$ $(\pm 5\pi/2, 0), \ldots$ बिन्दुओं से मिलता है।

अत: फलन $y = \cos x$ का ग्राफ निम्न होगा—



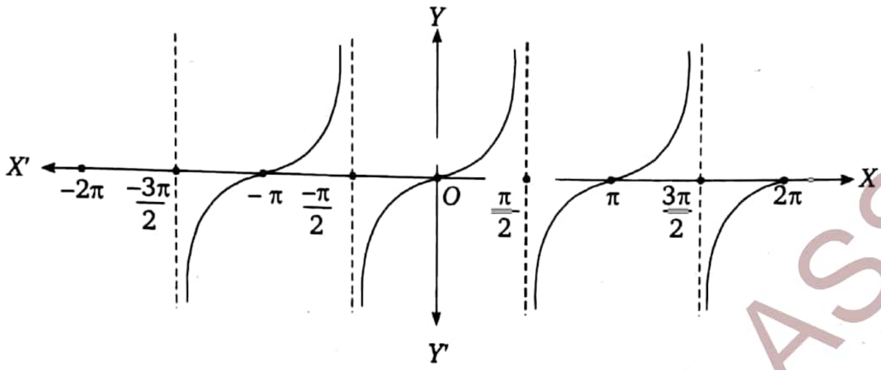
AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(iii) फलन $y = \tan x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\tan x$	0	0.57	1	1.73	∞	–1.73	–1	–0.57	0	0.57	1	1.73	$-\infty$	–1.73	–0.57	0



14.3.3 त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometrical Functions) तथा त्रिकोणमितीय वृत्तीय प्रतिलोम फलन (Inverse Circular Functions)

$\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \operatorname{cosec} x$ छः त्रिकोणमितीय वृत्तीय फलन तथा $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$, $\cot^{-1} x$, $\sec^{-1} x$, $\operatorname{cosec}^{-1} x$ छः त्रिकोणमितीय वृत्तीय प्रतिलोम फलन हैं। इनके प्रभाव क्षेत्र (Domain) तथा परास (Range) को नीचे तालिकाबद्ध किया गया है।

फलन	प्रभाव क्षेत्र	परास
$\sin x$	**R**	$[-1, 1]$
$\cos x$	**R**	$[-1, 1]$
$\tan x$	$\mathbf{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $n \in I$	**R**
$\cot x$	$\mathbf{R} - \{n\pi\}$, $n \in I$	**R**
$\sec x$	$\mathbf{R} - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $n \in I$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\operatorname{cosec} x$	$\mathbf{R} - \{n\pi\}$, $n \in I$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

फलन	प्रभाव क्षेत्र	परास
$\sin^{-1} x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1} x$	**R**	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{-1} x$	**R**	$(0, \pi)$
$\sec^{-1} x$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$\operatorname{cosec}^{-1} x$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. (i) यदि $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ तो $f(2)$ का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]**

(ii) यदि $f(x) = 5x^2 - 4x + 7$ तो $f(-1)$ का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2010]**

हल : (i) $\because \quad f(x) = -x^2 + 3x + 4$

$\therefore \quad f(2) = -(2)^2 + 3 \times 2 + 4 = -4 + 6 + 4 = 6$

(ii) $\because \quad f(x) = 5x^2 - 4x + 7 \qquad \therefore \quad f(-1) = 5 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) + 7 = 5 + 4 + 7 = 16$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

उदाहरण 2. यदि $f(x)=x^2$ तथा $g(x)=2x+1$

तो $(f+g)(x), (f-g)(x), (fg)(x)$ तथा $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ का मान बतायें।

हल : $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+2x+1$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^2-(2x+1)=x^2-2x-1$

$(fg)(x)=f(x)g(x)=x^2(2x+1)=2x^3+x^2$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2}{2x+1}$

उदाहरण 3. (i) यदि $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ तो सिद्ध करें $f(\cos\theta)=\tan^2\frac{\theta}{2}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]

(ii) यदि $f(x)=2x\sqrt{1-x^2}$ तो सिद्ध करें कि $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\sin x$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]

हल : (i) $\because$ $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ $\Rightarrow$ $f(\cos\theta)=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\tan^2\frac{\theta}{2}$ सिद्ध हुआ।

(ii) $\because$ $f(x)=2x\sqrt{1-x^2}$

$\therefore$ $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=2\sin\frac{x}{2}\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{2}}=2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\sin x$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 4. यदि $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ तो सिद्ध करें कि $f\,f(\cos\theta)=\cos\theta$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1993]

हल : $\Rightarrow$ $f\,f(\cos\theta)=f\{f(\cos\theta)\}=f\left\{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right\}=f\left\{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\right\}$

$=f\left(\tan^2\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\cos\theta$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 5. (i) यदि $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ तो $\left\{f\left(\frac{a}{b}\right)-f\left(\frac{b}{a}\right)\right\}$ का मान ज्ञात करें।

(ii) यदि $y=f(x)=\frac{2x+3}{3x-2}$, तो $f(y)$ का मान बतायें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2015]

हल : (i) $f\left(\frac{a}{b}\right)-f\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{\frac{a}{b}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}-\frac{\frac{b}{a}}{\left(\frac{b}{a}\right)^2+1}=\frac{ab}{a^2+b^2}-\frac{ab}{a^2+b^2}=0$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(ii) $f(x)=\dfrac{2x+3}{3x-2} \Rightarrow f(y)=\dfrac{2y+3}{3y-1}=\dfrac{2\times\dfrac{2x+3}{3x-2}+3}{3\times\dfrac{2x+3}{3x-2}-2}=\dfrac{4x+6+9x-6}{6x+9-6x+4}=\dfrac{13x}{13}=x$

उदाहरण 6. यदि $f(x)=\log_e \sin x,\ g(x)=\log_e \cos x$, तो $e^{2f(x)}+e^{2g(x)}$ का मान बतायें।

हल : $e^{2f(x)}+e^{2g(x)}=e^{2\log_e \sin x}+e^{2\log_e \cos x}$

$$=e^{\log_e \sin^2 x}+e^{\log_e \cos^2 x}=\sin^2 x+\cos^2 x=1 \quad [\because e^{\log\{f(x)\}}=f(x)]$$

उदाहरण 7. यदि $f(x)=\log_e \dfrac{1-x}{1+x}$ तो सिद्ध करें $f(a)+f(b)=f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right)$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1975]**

हल : $f(a)+f(b)=\log_e \dfrac{1-a}{1+a}+\log_e \dfrac{1-b}{1+b}=\log_e\left\{\dfrac{1-a}{1+a}\times\dfrac{1-b}{1+b}\right\}$ $[\because \log m+\log n=\log(mn)]$

$$=\log_e\left\{\frac{1-b-a+ab}{1+b+a+ab}\right\}=\log_e\left\{\frac{(1+ab)-(a+b)}{(1+ab)+(a+b)}\right\}$$

$$=\log_e\left\{\frac{1-\dfrac{a+b}{1+ab}}{1+\dfrac{a+b}{1+ab}}\right\}$$ [हर तथा अंश में $(1+ab)$ से भाग देने पर]

$$=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 8. यदि $f(x)=\begin{cases}3x-1 & \text{यदि } x>3\\ x^2-2 & \text{यदि } -2\le x\le 3\\ 2x+3 & \text{यदि } x<-2\end{cases}$ तो (i) $f(1)$ (ii) $f(5)$ तथा (iii) $f(-3)$ का मान बतायें।

हल : (i) 1 अंतराल $[-2, 3]$ में है। $\therefore$ $f(x)=x^2-2$ अत: $f(1)=1^2-2=-1$

(ii) 5, $x>3$ के अनुरूप है। अत: $f(x)=3x-1$ $\therefore$ $f(5)=3\times 5-1=14$

(iii) -3, $x<-2$ के अनुरूप है अत: $f(x)=2x+3$ $\therefore$ $f(-3)=2\times(-3)+3=-6+3=-3$

प्रश्नावली 14.1

1. (i) यदि $f(x)=x^2-3x+2$ तो $f(0), f(1)$ तथा $f(-1)$ के मान बतायें।
   (ii) यदि $f(x)=x^3+5x+6$ तो $f(3), f(0)$ तथा $f(-1)$ का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(S)]**
   (iii) यदि $f(x)=6x^2-3x+4$ तो $f(2)$ का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]**
2. यदि $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ तो $f(-1)$ तथा $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ मान ज्ञात करें।
3. यदि $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ तो $f(\sec\theta)$ का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004, 05]**
4. यदि $f(\theta)=\dfrac{1-2\tan\theta}{1+2\tan\theta}$ तो $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2002]**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

5. यदि $f(x) = \log\frac{1+x}{1-x}$ तो सिद्ध करें कि $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2f(x)$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1968, 2014]

6. यदि $f(x) = \frac{x}{x-1}$ तो $\frac{f\left(\frac{a}{b}\right)}{f\left(\frac{b}{a}\right)}$ का मान ज्ञात करें।

7. यदि $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ तो $\left\{f\left(\frac{a}{b}\right) - f\left(\frac{b}{a}\right)\right\}$ का मान ज्ञात करें।

8. (i) यदि $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ तो सिद्ध करें कि $f(\tan\theta) = \cos 2\theta$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1969]

(ii) यदि $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ तो सिद्ध करें कि $f\,f(\cos\theta) = \cos\theta$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1993]

9. (i) यदि $f(x) = x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ तो दिखायें कि $f(\cot\theta) = \text{cosec}^2\theta$

(ii) यदि $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ तो सिद्ध करें $f(\cos\theta) = \tan^2\frac{\theta}{2}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2008]

10. यदि $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ तो सिद्ध करें कि $\frac{f(a)-f(b)}{1-f(a)f(b)} = \frac{a-b}{a+b}$

11. (i) यदि $y = f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ तो सिद्ध करें कि $x = f(y)$

(ii) यदि $y = f(x) = \frac{2x+3}{3x-2}$ जब $f(y)$ का मान ज्ञात करें। [उ० प्र० डिप्लोमा 2015]

12. यदि $f(x) = \frac{2x-3}{2x+3}$ तो सिद्ध करें कि $f(x)f(-x) = 1$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB), 17,(O)]

13. यदि $f(x) = \tan x$ तो दिखायें $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)}$ का मान बतायें। [उ० प्र० डिप्लोमा 1970]

14. यदि $f(x) = 6x^2 - 3x + 4$ तो $f(-2), f(4), f(x+1)$ तथा $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ का मान ज्ञात करें।

15. यदि $f(x) = e^x$ तो सिद्ध करें कि $f(x+y+z) = f(x)f(y)f(z)$

16. यदि $\phi(x) = \log_e x$ तो सिद्ध करें कि $\phi(x \times y \times z) = \phi(x) + \phi(y) + \phi(z)$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2018]

17. यदि $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}, a > 0$ तो सिद्ध करें कि $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$

18. (i) $f(x) = \sin x + \cos 2x$ तो $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ तथा $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ का मान बतायें।

(ii) $f(x) = \sin x$ तो $f(30°)$ का मान बतायें। [उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

19. यदि $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{जब } x \geq 2 \\ -x & \text{जब } x < 2 \end{cases}$ तो $f(1), f(0)$ तथा $f(3)$ का मान बतायें।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उत्तरमाला

1. (a) (i) 2 (ii) 0 (iii) 6 (b) (i) 48 (ii) 6 (iii) 0

2. $2, \frac{1}{x^2}+x^2$ **3.** $\text{cosec}^2\,\theta$

4. $-\frac{1}{3}$ **6.** $-\frac{a}{b}$ **7.** 0 **11.** (ii) x

14. $f(-2)=34, f(4)=88, f(x+1)=6x^2+9x+7, \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=12x+6h-3$

18. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}, 1$ (ii) $\frac{1}{2}$ **19.** (i) -1 (ii) 0 (iii) 8

समुच्चय सिद्धान्त से फलन की परिभाषा

14.4 फलन (Functions)

यदि A तथा B दो अरिक्त (Non-empty) समुच्चय हैं, तथा f एक ऐसा संबंध हो, जिससे A के प्रत्येक अवयव के संगत B में एक और केवल एक (Unique) अवयव प्राप्त हो, तो f को फलन कहा जाता है तथा इसे $f: A \to B$ से सूचित करते हैं।

स्पष्टत: फलन एक नियम है, जो A के प्रत्येक अवयव को B के अद्वितीय अवयव से संगुणित (Associate) करता है।

यदि $(a, b) \in f$ तो $f(a)=b$ यहाँ b को a का f-प्रतिबिंब कहा जाता है।

उदाहरण : यदि $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 4, 9, 16, 25\}$

तथा $$f=\{(x, y): x \in A, y \in B \text{ तथा } y=x^2\}$$

तो $f: A \to B$ एक फलन है क्योंकि

$$f(1)=1^2=1 \in B;\ f(2)=2^2=4 \in B;\ f(3)=3^2=9 \in B;\ f(4)=4^2=16 \in B$$

अत: A के प्रत्येक अवयव के संगत B में एक और केवल एक प्रतिबिंब प्राप्त होता है। अत: $f: A \to B$ परिभाषित है।

14.5 प्रभाव क्षेत्र (Domain) तथा सह-प्रभाव क्षेत्र (Co-domain)

यदि $f: A \to B$ परिभाषित हो तो A को f का प्रभाव क्षेत्र (Domain) कहा जाता है तथा B को उसका सह-प्रभाव क्षेत्र (co-domain) कहा जाता है।

14.6 परास (Range)

यदि $f: A \to B$ परिभाषित हो, तो प्रभाव क्षेत्र A के अवयवों के प्रतिबिंबों से बना समुच्चय उसका परास (Range) कहलाता है तथा परास $f \subseteq B$

AYC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

14.7 अंतरालों के लिए संकेत (Notations for Interval)

संख्याओं के अंतरालों को व्यक्त करने के लिए निम्न संकेतों का प्रयोग होता है।

	नाम	संकेत
(i)	खुला अंतराल (Open Interval)	(a, b) या $]a, b[$
(ii)	बंद अंतराल (Closed Interval)	$[a, b]$
(iii)	खुला बन्द अंतराल [Open closed Interval]	$]a, b]$ या $(a, b]$
(iv)	बंद खुला अंतराल (Closed open1 Interval)	$[a, b[$ या $[a, b)$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. यदि $A = \{-2, -3, 1, 2, 3\}$ तथा $B = \{4, 9, 1\}$ तथा $f = \{(x, y) : x \in A, y \in B$ तथा $y = x^2\}$ तो, दिखायें f, A से B पर फलन है। इसका प्रभाव क्षेत्र (Domain) तथा परास (Range) ज्ञात करें।

हल : दिया गया संबंध $y = x^2$ तथा $A = \{-2, -3, 1, 2, 3\}$

अत: जब $x = -2$, $y = (-2)^2 = 4$; $x = -3$, $y = (-3)^2 = 9$

$x = 1$, $y = (1)^2 = 1$; $x = 2$, $y = (2)^2 = 4$

$x = 3$, $y = (3)^2 = 9$

अत: A के प्रत्येक अवयव के संगत B में अद्वितीय प्रतिबिंब है। अत: $f : A \to B$ फलन है।

तथा $$f = \{(-2, 4), (-3, 9), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$$

dom f = प्रभाव क्षेत्र $= \{-2, -3, 1, 2, 3\} = A$

range f = परास $= \{4, 9, 1\} = B$

उदाहरण 2. (i) क्या $f = \{2, 3), (3, 4), (2, 4), (4, 5)\}$ एक फलन है ?

(ii) $\phi = \{(3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$ एक फलन है ?

यदि हाँ तो प्रभाव क्षेत्र तथा परास ज्ञात करें।

हल : (i) $f = \{2, 3), (3, 4), (2, 4), (4, 5)\}$

स्पष्टत: 2 के प्रतिबिंब 3 तथा 4 हैं। अत: परिभाषा से f फलन नहीं है,

(ii) ϕ में किसी भी क्रमित युग्म का प्रथम नियामक समान नहीं है अत: प्रत्येक अवयव के संगत अद्वितीय प्रतिबिंब प्राप्त होता है। अत: ϕ फलन है। इसका प्रभाव क्षेत्र = dom $(\phi) = \{3, 4, 5, 6\}$; परास = range $(\phi) = \{2\}$

उदाहरण 3. वास्तविक फलन $f(x) = x^2$ का प्रभाव क्षेत्र तथा परास ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है $f(x) = x^2$

अत: $f(x)$, प्रत्येक $x \in R$ के लिए परिभाषित है। अत: dom (f) = प्रभाव क्षेत्र $= R$

पुन: $y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

अत: यदि y ऋणात्मक हो तो x वास्तविक नहीं होगा।

$\therefore$ range (f) = परास = सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय $= [0, \infty[$

अत: प्रभाव क्षेत्र $= R$, परास $= [0, \infty[$

उदाहरण 4. वास्तविक फलन $f(x) = x^2 + 3$ का प्रभाव क्षेत्र तथा परास ज्ञात करें।

हल : दिया गया है $f(x) = x^2 + 3$

अत: $f(x)$ प्रत्येक $x \in R$ के लिए परिभाषित है। $\therefore$ प्रभाव क्षेत्र $= R$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

पुन: $y = x^2 + 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-3}$

अत: यदि $y - 3 < 0$ अर्थात् $y < 3$ तो x काल्पनिक होगा।

$\therefore$ परास $= \{y \in R : y \geq 3\} = [3, \infty[$

उदाहरण 5. वास्तविक फलन $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ का प्रभाव क्षेत्र तथा परास ज्ञात करें।

हल : दिया गया है $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

अत: $f(x), 16 - x^2 < 0$ के लिए परिभाषित नहीं है। अर्थात् $16 - x^2 \geq 0$ के लिए परिभाषित है।

अब $16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-4) \leq 0 \Rightarrow x \leq 4$ या $x \geq -4$

$\Rightarrow -4 \leq x \leq 4 \Rightarrow x \in [-4, 4]$

अत: प्रभाव क्षेत्र $= [-4, 4]$

पुन : $x \in [-4, 4], f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ का अन्तराल $[0, 4]$ में एक मान प्राप्त होगा।

अत: परास $= [0, 4]$

उदाहरण 6. वास्तविक फलन $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$ का प्रभाव क्षेत्र (Domain) तथा परास (Range) ज्ञात करें।

हल : दिया गया है $f(x) = \dfrac{1}{x-4}$

अत: $f(x)$, $x - 4 = 0$ अर्थात् $x = 4$ के लिए परिभाषित नहीं है।

$\therefore$ प्रभाव क्षेत्र $= \text{dom}(f) = R - \{4\}$

पुन: $y = \dfrac{1}{x-4} \Rightarrow x - 4 = \dfrac{1}{y} \Rightarrow x = \dfrac{1}{y} + 4 \Rightarrow x = \dfrac{1+4y}{y}$

अत: यदि $y = 0$ तो x परिभाषित नहीं है। $\therefore$ परास $= R - \{0\}$

अत: प्रभाव क्षेत्र $= R - \{4\}$; परास $= R - \{0\}$ **उत्तर**

उदाहरण 7. वास्तविक फलन $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ का प्रभाव क्षेत्र तथा परास ज्ञात करें।

हल : दिया गया है $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

अत: यदि $1 - x^2 = 0$ तो $x = \pm 1$ पर f परिभाषित नहीं है।

$\therefore$ प्रभाव क्षेत्र $= R - \{-1, 1\}$

पुन: $y = \dfrac{1}{1-x^2} \Rightarrow 1 - x^2 = \dfrac{1}{y} \Rightarrow x = \pm\sqrt{1 - \dfrac{1}{y}}$

यदि $1 - \dfrac{1}{y} < 0$ तो x परिभाषित नहीं है, अर्थात् $y < 1$ के लिए x परिभाषित नहीं है।

$\therefore$ परास $(f) = \{y \in R : y \geq 1\} = [1, \infty[$ **उत्तर**

उदाहरण 8. यदि $f(x) = -|x|$ तो इसका प्रभाव क्षेत्र तथा परास बतायें।

हल : दिया गया है $f(x) = -|x|$ यह x के प्रत्येक मान के लिए परिभाषित है।

$\therefore$ प्रभाव क्षेत्र $(f) = R$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

पुनः $-|x|$ शून्य अथवा –ve वास्तविक संख्या है।

∴ परास (f) = ऋणात्मक संख्याओं का समुच्चय $=]\infty, 0]$

∴ प्रभाव क्षेत्र $= R$, परास $=]\infty, 0]$ **उत्तर**

उदाहरण 9. फलन $\sqrt{(x-2)(4-x)}$ का प्रभाव क्षेत्र बतायें।

हल : माना $f(x) = \sqrt{x-2)(4-x)}$ अत: यदि $x > 4$ तो $f(x) = \sqrt{-ve}$ = काल्पनिक राशि तथा यदि $x < 2$ तो $f(x) = \sqrt{-ve}$ = काल्पनिक राशि

अत: $2 \le x \le 4$ के लिए ही वास्तविक है। ∴ प्रभाव क्षेत्र $= [2, 4]$

उदाहरण 10. यदि $f : x \to x + 4$ और प्रभाव क्षेत्र $= \{x : -3 \le x \le 3, x$ पूर्णांक है$\}$, तो फलन f तथा उसका परास ज्ञात करें।

हल : फलन $f : x \to x + 4$

तथा प्रभाव क्षेत्र $= \{x : -3 \le x \le 3, x$ एक पूर्णांक है$\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

अत: $f(-3) = -3 + 4 = 1$

इसी तरह $f(-2) = 2; f(-1) = 4$; $f(1) = 6, f(3) = 7$

अत: परास $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ तथा फलन $f = \{(-3, 1), (-2, 2), (-1, 3), (0, 4), (1, 5), (2, 6), (3, 7)\}$

उदाहरण 11. यदि $x \in R$ तो फलन $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ का प्रभाव क्षेत्र बतायें।

हल: यहाँ $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9} = \dfrac{1}{(x+3)(x-3)}$

अत: दिया गया फलन $x + 3 = 0$ अर्थात् $x = -3$ तथा $x - 3 = 0$ अर्थात् $x = 3$ के लिए परिभाषित नहीं है तथा शेष वास्तविक मानों के लिए परिभाषित है, प्रभाव क्षेत्र $= R - \{-3, 3\}$

प्रश्नावली 14.2

1. यदि $f : x \to x^2$ प्रभाव क्षेत्र $\{1, 2, 3, 4\}$ हो तो फलन और इसका परास ज्ञात करें।
2. यदि $f : x \to x + 3$ और प्रभाव क्षेत्र $= \{x : -2 \le x \le 2, x$ एक पूर्णांक है$\}$ तो फलन का प्रभाव क्षेत्र, परास तथा f का मान ज्ञात करें।
3. यदि $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{4, 9, 16, 25\}$ तो निम्नलिखित समुच्चयों के लिए X से Y पर फलन होने का परीक्षण करें।
   (i) $\{(a, 4), (b, 9), (c, 16\}$ (ii) $\{(a, 9), (b, 4), (c, 16)\}$
   (iii) $\{(a, 25), (b, 9), (c, 16), (a, 4)\}$
4. यदि $f = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\ (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$ तो क्या f एक फलन है? कारण दें।
5. वास्तविक फलन $f(x) = x^2 + 5$ का प्रभाव क्षेत्र तथा परास ज्ञात करें।
6. वास्तविक फलन $\dfrac{1}{1 - x^2}$ के लिए प्रभाव क्षेत्र तथा परास ज्ञात करें।
7. वास्तविक फलन $\dfrac{1}{x - 3}$ के लिए प्रभाव क्षेत्र तथा परास ज्ञात करें।
8. वास्तविक फलन $\sqrt{x - 1}$ का प्रभाव क्षेत्र तथा परास ज्ञात करें।
9. वास्तविक फलन $\sqrt{9 - x^2}$ का प्रभाव क्षेत्र तथा परास ज्ञात करें।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

10. वास्तविक फलन $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-5x+6}$ के लिए प्रभाव क्षेत्र बतायें।

11. यदि $f(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 3 \\ 3x, & 3\le x\le 10 \end{cases}$; $g(x)=\begin{cases} x^2, & 0\le x\le 2 \\ 3x, & 2\le x\le 10 \end{cases}$

दिखायें $f(x)$ फलन है किंतु $g(x)$ फलन नहीं है।

उत्तरमाला

1. फलन $f=\{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)\}$; परास $=\{1,4,9,16\}$

2. (i) प्रभाव क्षेत्र $=\{-2,-1,0,1,2\}$ (ii) परास $=\{1,2,3,4,5\}$

(iii) $f=\{(-2,1),(-1,2),(0,3),(1,4),(2,5)\}$

3. (i) फलन (ii) फलन (iii) फलन नहीं है

4. नहीं, क्योंकि 2 तथा 3 के कई प्रतिबिंब हैं

5. प्रभाव क्षेत्र $=R$, परास $=[5,\infty[$

6. प्रभाव क्षेत्र $=R-\{-1,1\}$, परास $=[1,\infty[$

7. प्रभाव क्षेत्र $=R-\{3\}$, परास $=R-\{0\}$

8. प्रभाव क्षेत्र $=[1,\infty[$, परास $=R$

9. प्रभाव क्षेत्र $=[-3,3]$, परास $=[0,3]$

10. $R-\{2,3\}$

❐❐❐

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

अध्याय 15

सीमा (Limit)

15.1 सीमा की अवधारणा (Concept of Limit)

सीमा की अवधारणा के लिए निम्न फलन पर विचार करें : $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

अब $x=1$ पर $f(1)=\dfrac{0}{0}$ जो अनिधार्य (Indeterminate) है। अब

$$f(.9)=\frac{(.9)^2-1}{.9-1}=1.9;\ f(.99)=\frac{(.99)^2-1}{.99-1}=1.99$$

$$f(.999)=\frac{(.999)^2-1}{.999-1}=1.999;\ f(.9999)=\frac{(.9999)^2-1}{.9999-1}=1.9999 \text{ इत्यादि।}$$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि जैसे-जैसे x का मान बढ़ते हुए 1 के करीब पहुँचता है, $f(x)$ का मान 2 की ओर पहुँचता है। इसे हम इस रूप में लिखते हैं : जब $x\to 1, f(x)\to 2$ इसी तरह x का मान 1 से थोड़ा अधिक लेकर हम देखते हैं :

$$f(1.1)=2.1,\ f(1.01)=2.01,\ f(1.001)=2.001,\ f(1.0001)=2.0001 \text{ इत्यादि।}$$

स्पष्टत: इस स्थिति में भी $f(x)$ का मान 2 के करीब पहुँच रहा है, जैसे-जैसे x का मान घटते हुए 1 की ओर पहुँच रहा है, अर्थात् इस स्थिति में भी जब $x\to 1,\ f(x)\to 2$

इस तथ्य को हम गणितीय रूप में इस प्रकार व्यक्त करते हैं : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

अर्थात् फलन $f(x)$ का $x=1$ पर सीमान्त मान (Limiting Value) 2 है।

15.2 परिभाषा (Definition)

यदि $x\to a$ अर्थात् जब चर राशि x अचर राशि a की ओर अग्रसर हो तो $f(x)\to l$, जहाँ l कोई परिमित राशि है, तो l को बिन्दु $x=a$ पर $f(x)$ की सीमा कहा जाता है तथा इसे $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ से सूचित किया जाता है।

अत: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l \Rightarrow |f(x)-l|\to 0$, जब $|x-a|\to 0$

15.3 दक्षिण और वाम पक्ष सीमा (Right Hand and Left Hand Limit)

15.3.1 दक्षिण पक्ष सीमा (Right Hand Limit)

जब फलन की सीमा स्वतंत्र चर के मान के दाहिनी ओर $(x>a)$ से अर्थात् a के निकटस्थ थोड़ा अधिक मान लेकर प्राप्त की जाती है तो उसे फलन की दायाँ पक्ष सीमा (R.H.L.) या दक्षिण पक्ष सीमा के नाम से जाना जाता है। इसे सांकेतिक रूप में निम्न रूप में व्यक्त करते हैं :

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

दक्षिण पक्ष सीमा (R.H.L.) $= f(a+0)$ या $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ या $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$

15.3.2 वाम पक्ष सीमा (Left Hand Limit)

जब फलन की सीमां स्वतंत्र चर के मान के बायीं ओर $(x<a)$ से अर्थात् a के निकटस्थ थोड़ा कम मान लेकर प्राप्त की जाती है तो इसे फलन का वाम पक्ष सीमा (L.H.L.) के नाम से जाना जाता है तथा इसे सांकेतिक रूप में निम्न रूप में लिखा जाता है :

वाम पक्ष सीमा $= f(a-0)$ या $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ या $\lim\limits_{h \to a} f(a-h)$

15.4 दक्षिण पक्ष एवं वाम पक्ष सीमा ज्ञात करने की विधि (Working Rule for R.H.L. and L.H.L.)

(i) $x=a$ पर दक्षिण पक्ष सीमा ज्ञात करने के लिए $f(x)$ में x के स्थान पर $a+h$ तथा वाम पक्ष की सीमा के लिए x की जगह $a-h$ रखें।

(ii) अब $h \to 0$ पर फलन की सीमा ज्ञात करें।

15.5 सीमा का अस्तित्व (Existence of Limit)

यदि किसी बिन्दु $x=a$ पर किसी फलन $f(x)$ के लिए दक्षिण पक्ष सीमा और वाम पक्ष सीमा परिभाषित हों तथा समान एवं परिमित हो तो फलन $f(x)$ का $x=a$ पर सीमा का अस्तित्व (existence) होता है।

अत: यदि $\lim\limits_{h \to 0} f(a-h) = l = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$ तो $x=a$ पर $f(x)$ के लिए सीमा का अस्तित्व है तथा इसका मान l है।

नोट :

- (i) यदि $\lim\limits_{h \to 0} f(a-h) \neq \lim\limits_{h \to 0} f(a+h)$ तो $x=a$ पर $f(x)$ की सीमा का अस्तित्व नहीं होगा।
- (ii) यदि L.H.L. या R.H.L. में कोई भी अपरिमित है तो फलन के सीमा मान का अस्तित्व उस बिंदु पर नहीं होगा।
- (iii) चर के किसी मान के लिए फलन $f(x)$ के मान तथ उस बिंदु पर सीमान्त मान (Limiting Value) समान या असमान हो सकते हैं।

15.6 सीमा मान पर मौलिक प्रमेय (Fundamental Theorem on Limit)

1. (i) $\lim\limits_{x \to a} \{f(x) \pm g(x)\} = \left\{\lim\limits_{x \to a} f(x)\right\} \pm \left\{\lim\limits_{x \to a} g(x)\right\}$

(ii) $\lim\limits_{x \to a} \{K f(x)\} = K\left\{\lim\limits_{x \to a} f(x)\right\}$, जहाँ K अचर है।

(iii) $\lim\limits_{x \to a} \{f(x) . g(x)\} = \left\{\lim\limits_{x \to a} f(x)\right\} . \left\{\lim\limits_{x \to a} g(x)\right\}$

(iv) $\lim\limits_{x \to a} \left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\} = \left\{\lim\limits_{x \to a} f(x)\right\} \Big/ \left\{\lim\limits_{x \to a} g(x)\right\}$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

(v) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$ यदि $f(x) \leq g(x)$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(vi) $\lim_{x \to a} \{f(x)\}^{m/n} = \left\{\underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x)\right\}^{m/n}$

(vii) $\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x)}$

(viii) $\lim_{x \to a} \log\{f(x)\} = \log\left\{\lim_{x \to a} f(x)\right\}$

(ix) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \{f(x)\}^{g(x)} = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^{\lim_{x \to a} g(x)}$

15.6.1 फलन का अनिर्धार्य रूप (Indeterminate form of functions)

यदि फलन $f(x)$ में $x = a$ रखने पर $f(x)$ का मान $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$ आदि के रूप में प्राप्त होता है, तो फलन को $x = a$ पर अनिर्धार्य (indeterminate) कहा जाता है।

जैसे—$y = \frac{\sin x}{x}$ का मान $x = 0$ पर $\frac{0}{0}$ तथा $y = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 2}$ का मान $x = \infty$ पर $\frac{\infty}{\infty}$ रूप का है।

15.6.2 सीमा सम्बन्धी महत्वपूर्ण प्रमेय (Some Important Theorems on Limit)

प्रमेय 1. $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$, **जहाँ** $a > 0$

प्रमाण : यहाँ $\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \ldots + a^{n-1})(x - a)}{x - a}$

$$= x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}$$

$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \underset{x \to a}{\text{Lt}} (x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \ldots + a^{n-1})$

$= [a^{n-1} + a \cdot a^{n-2} + a^2 \cdot a^{n-3} + \ldots + a^{n-1}]$ [$x = a$ रखने पर]

$= [a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots n$ बार]

$= na^{n-1}$

प्रमेय II : $\lim_{h \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]

प्रमाण : $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) - 1}{x}$ [e^x के विस्तार से]

$= \lim_{x \to 0} \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x\left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\right)}{x} = \lim_{x \to 0}\left[1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \ldots\right]$

$= 1 + 0 + 0 + \ldots$ [$x = 0$ रखने पर]

$= 1$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

प्रमेय III : $\lim \dfrac{a^x - 1}{x} = \log_e a$

प्रमाण : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left[\left\{1 + x \log_e a + \dfrac{x^2}{2!}(\log_e a)^2 \; \ldots + \ldots\right\} - 1\right]}{x}$ [a^x के विस्तार से]

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\left\{\log_e a + \dfrac{x}{2!}(b \log_e a)^2 + \ldots\right\}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left\{\log_e a + \dfrac{x}{2!}(log_e\, a)^2 + \ldots\right\}$

$= \log_e a$ [$x = 0$ रखने पर]

प्रमेय IV : $\mathop{\text{Lt}}\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$

प्रमाण : $\mathop{\text{Lt}}\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = \mathop{\text{Lt}}\limits_{x \to 0} \left\{1 + \dfrac{1}{x} x + \dfrac{\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)}{2!} x^2 + \dfrac{\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)\left(\dfrac{1}{x} - 2\right)}{3!} x^3 + \ldots\right\}$

[द्विपद प्रमेय से]

$= \mathop{\text{Lt}}\limits_{x \to 0} \left\{1 + 1 + \dfrac{1 - x}{2!} \dfrac{x^2}{x^2} + \dfrac{(1 - x)(1 - 2x)}{3!} \dfrac{x^3}{x^3} + \ldots\right\} = \left\{1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \ldots\right\}$

[$x = 0$ रखने पर]

$= e$

प्रमेय V : $\mathop{\text{Lt}}\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$

प्रमाण : $\dfrac{1}{x} = y$ रखने पर, जिससे $x \to \infty, y \to 0$ तथा $x = \dfrac{1}{y}$

$\therefore \quad \mathop{\text{Lt}}\limits_{y \to 0} (1 + y)^{1/y} = e$ [प्रमेय IV से]

प्रमेय VI : $\mathop{\text{Lt}}\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1 + x)}{x} = 1$

प्रमाण : $\mathop{\text{Lt}}\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1 + x)}{x} = \mathop{\text{Lt}}\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} \ldots\right)}{x}$ [$\log(1 + x)$ के विस्तार से]

$= \mathop{\text{Lt}}\limits_{x \to 0} \dfrac{x\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} \ldots\right)}{x} = \mathop{\text{Lt}}\limits_{x \to 0} \left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} \ldots\right)$

$= 1$ [$x = 0$ रखने पर]

15.6.3 त्रिकोणमितीय सीमायें (Trigonometric Limits)

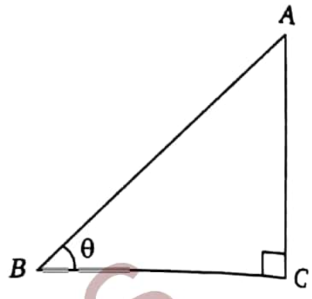
प्रमेय 1. (i) $\mathop{\text{Lt}}\limits_{\theta \to 0} \sin \theta = 0$ **(ii)** $\mathop{\text{Lt}}\limits_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$

प्रमाण : माना ABC कोई दिया गया त्रिभुज है जिसमें $\angle C = 90°$

$\angle ABC = \theta$ रेडियन

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner



तो $$\sin\theta = \frac{CA}{BA} \text{ तथा } \cos\theta = \frac{BC}{BA}$$

यदि BC को नियत रखते हुए θ का मान लगातार घटाया जाए तो A, C के निकट आता जाता है।

अत: जब $\theta = 0$ तो $A \to C$ $\quad\quad \therefore \; \theta \to 0$ तो $CA \to 0,\; BA \to BC$

$\Rightarrow \; \frac{CA}{BA} \to 0$ तथा $\frac{BC}{BA} \to 1$ $\quad\quad \Rightarrow \; \sin\theta \to 0,\; \cos\theta \to 1$

$\therefore \; \underset{\theta \to 0}{\text{Lt}} \sin\theta = 0$ तथा $\underset{\theta \to 0}{\text{Lt}} \cos\theta = 1$

प्रमेय II : $\underset{x \to 0}{\textbf{Lt}} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

प्रमाण : दी गई सीमा $$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin x}{x} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)}{x} \quad \left[\because \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \infty\right]$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots\right)}{x} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left\{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots\right\}$$

$= 1$ $\quad\quad$ [$x = 0$ रखने पर]

नोट :

- $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ क्योंकि $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{x}{\sin x} = \dfrac{1}{\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin x}{x}} = \dfrac{1}{1} = 1$

प्रमेय III : $\underset{x \to 0}{\textbf{Lt}} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

प्रमाण : $$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\tan x}{x} = \left[\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left\{\frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{1}{x}\right\}\right] = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \cos x} = 1 \times 1 = 1$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

Type I : यदि फलन भिन्न रूप में है तथा सीमांत मान रखने पर मान 0/0 रूप होता है तो हर तथा अंश का गुणनखंड निकालकर उभयनिष्ठ गुणनखंड हटा दिए जाते हैं। तत्पश्चात् सीमा का मान रखा जाता है। $\left[\frac{0}{0} \text{ रूप}\right]$

उदाहरण 1. मान निकालें :

$$\underset{x \to 2}{\text{Lt}} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]

हल : $$\underset{x \to 2}{\text{Lt}} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \underset{x \to 2}{\text{Lt}} \frac{x^2 + 3x - 2x - 6}{(x+2)(x-2)} = \underset{x \to 2}{\text{Lt}} \frac{(x+3) - 2(x+3)}{(x+2)(x-2)}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$$= \underset{x \to 2}{\text{Lt}} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \underset{x \to 2}{\text{Lt}} \frac{x+3}{x+2} = \frac{2+3}{2+2}$$ [$x = 2$ रखने पर]

$$= \frac{5}{4}$$ **उत्तर**

Type II : ऐसे फलन जो 0/0 रूप के हैं किन्तु जिनके अंश तथा हर का गुणनखण्ड संभव नहीं है तथा जो $\underset{x \to 2}{\text{Lt}} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ के रूप में हैं।

उदाहरण 2. (i) $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$ (ii) $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{x^{12} - 1}{x^5 - 1}$

हल : (i) $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} \Big/ \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{x^n - a^m}{x - a} = \frac{m\,a^{m-1}}{n\,a^{n-1}}$ [सूत्र से]

$$= \frac{m}{n} a^{m-1-n+1} = \frac{m}{n} a^{m-n}$$ **उत्तर**

(ii) $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{x^{12} - 1}{x^5 - 1} = \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{x^{12} - (1)^{12}}{x^5 - (1)^5} = \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{x^{12} - 1^{12}}{x - 1} \Big/ \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{x^5 - 1^5}{x - 1} = \frac{12 \times 1^{12-1}}{5 \times 1^{5-1}} = \frac{12}{5}$

उदाहरण 3. $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{(x+2)^{5/3} - (a+2)^{5/3}}{x - a}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005, 06]**

हल : $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{(x+2)^{5/3} - (a+2)^{5/3}}{x - a} = \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{(x+2)^{5/3} - (a+2)^{5/3}}{x + 2 - 2 - a}$

$$= \underset{x+2 \to a+2}{\text{Lt}} \frac{(x+2)^{5/3} - (a+2)^{5/3}}{(x+2) - (a+2)}$$

$$= \frac{5}{3}(a+2)^{(5/3)-1} = \frac{5}{3}(a+2)^{2/3}$$ $\left[\text{सूत्र } \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}\right]$ **उत्तर**

Type III : परिमेयीकरण पर आधारित

विधि : आवश्यकतानुसार हर या अंश का परिमेयीकरण x सीमा का मान डालें।

उदाहरण 4. मान निकालें :

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1996]**

हल : $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left\{ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right\}$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{1+1}$$ [$x = 0$ रखने पर]

$$= \frac{2}{2} = 1$$ **उत्तर**

उदाहरण 5. $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{(2x-3)(\sqrt{x} - 1)}{2x^2 + x - 3}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1977, 88]**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

हल : $\underset{x\to 1}{\text{Lt}} \frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3} = \underset{x\to 1}{\text{Lt}} \frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+3x-2x-3} = \underset{x\to 1}{\text{Lt}} \frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{x(2x+3)-1(2x+3)}$

$$= \underset{x\to 1}{\text{Lt}} \frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{(2x+3)(x-1)} = \underset{x\to 1}{\text{Lt}} \left\{\frac{2x-3}{2x+3} \times \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right\}$$

$$= \underset{x\to 1}{\text{Lt}} \left\{\frac{2x-3}{(2x+3)} \times \frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)(x-1)}\right\} = \underset{x\to 1}{\text{Lt}} \left\{\frac{2x-3}{(2x+3)(\sqrt{x}+1)}\right\}$$

$$= \frac{2\times 1-3}{(2\times 1+3)(\sqrt{1}+1)} = \frac{-1}{5\times 2} = -\frac{1}{10}$$

उत्तर

Type IV : ऐसे फलन जिसमें x का सीमा मान रखने पर $\frac{\infty}{\infty}$ रूप का हो जाता है अर्थात् सीमा $x\to\infty$ है।

विधि : अंश तथा हर के उच्चतम घात वाली चर राशि से अंश तथा हर में भाग देकर, उसमें x का मान रखें जिससे $x\to\infty, \frac{1}{x^n}\to 0$ रखें।

उदाहरण 6. $\underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \frac{9x^2-2x-7}{6x^2+5x+1}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1994, 2005, 2013]

हल : अंश तथा हर में चर राशि x के उच्चतम घात x^2 से भाग देने पर

$$\underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \frac{9x^2-2x-7}{6x^2+5x+1} = \underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \frac{9-\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}}{6+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}} = \frac{9-0-0}{6+0+0} \qquad \left[\because x\to\infty, \frac{1}{x^n}\to 0\right]$$

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

उत्तर

उदाहरण 7. साबित करें कि $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2002, 12]

हल : बायाँ पक्ष $= \underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3} = \underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6\times n^3}$

$$= \underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}+0+0 = \frac{1}{3} = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 8. $\underset{n\to\infty}{\text{Lt}} \frac{\sin x}{x}$

हल : माना $x = \frac{1}{y}$, जब $x\to\infty, y\to 0$

$$\therefore \underset{x\to\infty}{\text{Lt}} \frac{\sin x}{x} = \underset{y\to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}} = \underset{y\to 0}{\text{Lt}}\, y\sin\frac{1}{y} = \underset{y\to 0}{\text{Lt}}\, y \cdot \underset{y\to 0}{\text{Lt}} \sin\frac{1}{y}$$

$= 0\times$[-1 तथा 1 के बीच का राशि] $= 0$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Type V : फलनों के विस्तार पर आधारित प्रश्न

विधि : उचित सूत्र का प्रयोग कर फलन का विस्तार करें तथा मानक रूप में लाकर सीमा निकालें।

उदाहरण 9. $\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \dfrac{\log(1+x)}{x}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2001, 08]

हल : $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\log(1+x)}{x} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots}{x} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{x\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \ldots\right)}{x}$

$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \ldots\right) = 1 - 0 + 0 - 0 + \ldots = 1$ **उत्तर**

उदाहरण 10. $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \dfrac{\log x}{1-x}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1998, 2007]

हल : $x = 1 + h$ रखने पर, जिससे $x \to 1, h \to 0$

$\therefore \quad \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \dfrac{\log x}{1-x} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\log(1+h)}{1-(1+h)} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\log(1+h)}{-h} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{h - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3} - \dfrac{h^4}{4} + \ldots}{-h}$

$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{h\left(1 - \dfrac{h}{2} + \dfrac{h^2}{3} - \dfrac{h^3}{4} + \ldots\right)}{-h} = -\underset{h \to 0}{\text{Lt}} \left(1 - \dfrac{h}{2} + \dfrac{h^2}{3} - \dfrac{h^3}{4} + \ldots\right)$

$= -(1 - 0 + 0 - 0 + \ldots) = -1$ **उत्तर**

उदाहरण 11. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$ का मान ज्ञात करें।

हल : $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{1}{x}\left\{\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots\right) - \left(1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots\right)\right\}$

$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{1}{x}\left\{2\left(x + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots\right)\right\} = 2\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left\{1 + \dfrac{x^2}{3!} + \ldots\right\} = 2 \times \{1 + 0 + \ldots\} = 2$

उदाहरण 12. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ का मान ज्ञात करें।

हल : $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{a^x - b^x}{x} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^{x \log_e a} - e^{x \log_e b}}{x}$ [a^x तथा b^x का मान रखने पर]

$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\left[1 + x\log_e a + \dfrac{(x\log_e a)^2}{2!} + \ldots\right] - \left[1 + x\log_e b + \dfrac{(x\log_e b)^2}{2!} + \ldots\right]}{x}$ [विस्तार से]

$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left[\log_e a - \log_e b + x\dfrac{(\log_e a)^2 - (\log_e b)^2}{2!} + \ldots\right] = \log_e a - \log_e b$ [$x = 0$ रखने पर]

$= \log_e\left(\dfrac{a}{b}\right)$ **उत्तर**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

Type VI : त्रिकोणमितीय फलनों की सीमा पर प्रश्न :

उदाहरण 13. $= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2000, 2011]**

हल : $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left\{\dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2} \times 2}\right\}^2 = 2 \times \dfrac{1}{4}\left\{\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right\}^2$

$= \dfrac{1}{2} \times (1)^2$ $\left[\because \underset{\theta \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1 \text{ तथा } \theta \to 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\theta \to 0\right]$

$= \dfrac{1}{2}$

उदाहरण 14. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$

हल : $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{ax \dfrac{\sin ax}{ax}}{bx \dfrac{\sin bx}{bx}} = \dfrac{a}{b} \dfrac{\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin ax}{ax}}{\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin bx}{bx}} = \dfrac{1}{b} \times \dfrac{1}{1} = \dfrac{a}{b}$ उत्तर

उदाहरण 15. $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} (1-x) \tan \dfrac{\pi x}{2}$ का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]**

हल : $x = 1-h$ रखने पर जिससे $x \to 1, h \to 0$

$\underset{x \to 1}{\text{Lt}} (1-x) \tan \dfrac{\pi x}{2} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \left[\{1-(1-h)\} \tan \dfrac{\pi}{2}(1-h)\right]$

$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \left\{h \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}h\right)\right\} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}}\ h \cot \dfrac{\pi}{2} h$

$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \left\{\dfrac{\frac{\pi h}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}h\right)} \times \cos\left(\dfrac{\pi}{2}h\right) \times \dfrac{2}{\pi}\right\}$

$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\frac{\pi h}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}h\right)} \times \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}h\right) \times \dfrac{2}{\pi}$

$= \dfrac{2}{\pi} \times 1 \times 1$ $\left[\because \text{Lt} \dfrac{\theta}{\sin\theta} = 1, \underset{\theta \to 0}{\text{Lt}} \cos\theta = 1\right]$

$= \dfrac{2}{\pi}$ उत्तर

उदाहरण 16. $\underset{\theta \to \frac{\pi}{4}}{\text{Lt}} \dfrac{1-\cos 4\theta}{\sin 2\theta}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994, 2003]**

हल : $\underset{\theta \to \frac{\pi}{4}}{\text{Lt}} \dfrac{1-\cos 4\theta}{\sin 2\theta} = \underset{\theta \to \frac{\pi}{4}}{\text{Lt}} \dfrac{1-(1-2\sin^2 2\theta)}{\sin 2\theta} = \underset{\theta \to \frac{\pi}{4}}{\text{Lt}} \dfrac{2\sin^2 2\theta}{\sin 2\theta} = 2 \underset{\theta \to \frac{\pi}{4}}{\text{Lt}} \sin 2\theta$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$= 2 \times \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2 \times 1 = 2$$ [θ = π/4 रखने पर]

उदाहरण 17. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

हल : $$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left\{ \frac{\sin x \times 2 \sin^2 \dfrac{x}{2}}{x^3 \cos x} \right\} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left\{ \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sin^2 \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x^2}{2^2}} \times \frac{2}{\cos x} \times \frac{1}{2^2} \right\}$$

$$= \left[\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin x}{x} \times \left\{ \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}} \right\}^2 \times \frac{2}{\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \cos x} \times \frac{1}{2^2} \right]$$

$$= \left[1 \times (1)^2 \times \frac{2}{1} \times \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{2}$$ उत्तर

उदाहरण 18. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{1 - \cos 6x}{x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1997, 2006]**

हल : $$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{1 - \cos 6x}{x} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{2 \sin^2 3x}{x} = 2 \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left\{ \frac{\sin 3x}{3x} \times 3 \sin 3x \right\}$$

$$= 2 \times 3 \left\{ \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin 3x}{3x} \times \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \sin 3x \right\} = 6 \{1 \times 0\} = 6 \times 0 = 0$$ उत्तर

उदाहरण 19. $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} \dfrac{2x - \pi}{\cos x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]**

हल : $x = \dfrac{\pi}{2} + h$ रखने पर, जहाँ $x \to \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow h \to 0$

$$\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} \frac{2x - \pi}{\cos x} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{2\left(\dfrac{\pi}{2} + h\right) - \pi}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + h\right)} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{\pi + 2h - \pi}{-\sin h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{2h}{-\sin h} \quad \frac{-2}{\underset{h \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin h}{h}} = -\frac{2}{1} = -2$$ उत्तर

उदाहरण 20. $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{3^{2x} - 2^{3x}}{x}$

हल : $$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{3^{2x} - 2^{3x}}{x} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{(3^{2x} - 1) - (2^{3x} - 1)}{x} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{3^{2x} - 1}{x} - \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{2^{3x} - 1}{x}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{3^{2x}-1}{2x}\right)\times 2-\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{2^{3x}-1}{3x}\right)\times 3$$

$$=2\underset{2x\to 0}{\text{Lt}}\frac{3^{2x}-1}{2x}-3\underset{3x\to 0}{\text{Lt}}\frac{2^{3x}-1}{3x}$$

$$=2\log 3-3\log 2 \qquad \left[\because \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{a^x-1}{x}=\log_e a\right]$$

$$=\log (3)^2-\log (2)^3=\log 9-\log 8=\log\frac{9}{8}$$

उदाहरण 21. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{e^{3x}-1}{x}$ का मान निकालें :

हल : $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{e^{3x}-1}{x}=\underset{3x\to 0}{\text{Lt}}\left\{\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)\times 3\right\}=3\times\underset{y\to 0}{\text{Lt}}\frac{e^y-1}{y}$, जहाँ $y=3x$

$$=3\times 1=3\left[\because \underset{y\to 0}{\text{Lt}}\frac{e^y-1}{y}=\log_e e=1\right]$$

अन्य प्रश्न

उदाहरण 22. यदि $f(x)=|x|$, तो $x=0$ पर इसका अस्तित्व (Existence) परीक्षण करें।

हल : दिया गया फलन $f(x)=|x| \Rightarrow f(x)=x,\ x\geq 0$

$$=-x \quad x<0$$

अत: R.H.L. $=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}f(0+h)=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}|0+h|=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\{0+h\}=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}h=0$

L.H.L. $=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}f(0-h)=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}|0-h|=\underset{h\to 0}{Lt}\{-(0-h)\}=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}(h)=0$

$\therefore$ L.H.L = 0 = R.H.L.

अत: $|x|=0$ पर सीमा का अस्तित्व है।

उदाहरण 23. यदि फलन $f(x)$ निम्न रूप में परिभाषित है :

$$f(x)=\begin{cases} x & ,0\leq x<1/2\\ 0 & ,x=1/2\\ 1-x & ,1/2<x\leq 1\end{cases}$$

तो $\underset{x\to 1/2}{\text{Lt}}f(x)$ का मान ज्ञात करें।

हल : R.H.L. $=f\left(\frac{1}{2}+0\right)=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}f\left(\frac{1}{2}+h\right)=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\left\{1-\left(\frac{1}{2}+h\right)\right\}=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\left\{\frac{1}{2}-h\right\}=\frac{1}{2}$

L.H.L. $=f\left(\frac{1}{2}-0\right)=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}f\left(\frac{1}{2}-h\right)=\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\left\{\frac{1}{2}-h\right\}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ R.H.L. $=\frac{1}{2}=$ R.H.L.

$$\therefore \underset{h\to 1/2}{\text{Lt}}f(x)=\frac{1}{2}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

महत्वपूर्ण सूत्र

1. वाम पक्ष सीमा (L.H.L.) = $\underset{h \to 0}{\text{Lt}} f(a-h)$, दक्षिण पक्ष सीमा (R.H.L.) = $\underset{h \to 0}{\text{Lt}} f(a+h)$

2. $\underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x)$ के अस्तित्व के लिए L.H.L. = R.H.L

3. **अनिर्धार्य रूप :** $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty$ आदि।

4. **महत्वपूर्ण सूत्र :**

A. (a) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \{f(x) \pm g(x)\} = \underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x) \pm \underset{x \to a}{\text{Lt}} g(x)$

(b) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \{f(x) \times g(x)\} = \underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x) \times \underset{x \to a}{\text{Lt}} g(x)$

(c) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \{K f(x)\} = K \underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x)$

(d) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x)}{\underset{x \to a}{\text{Lt}} g(x)}$

B. (a) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$

(b) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a, a > 0$

(c) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{\log_e (1+x)}{x} = 1$

(d) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

(e) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} (1+x)^{1/x} = e$

(f) $\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

(g) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{a^x - b^x}{x} = \log_e \left(\frac{a}{b}\right)$

C. (a) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin x}{x} = 1$

(b) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\tan x}{x} = 1$

(c) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \sin x = 0$

(d) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \cos x = 1$

D. **त्रिकोणमितीय विस्तार**

सीमा का मान निकालने में निम्नांकित बीजीय एवं त्रिकोणमितीय श्रेणियों के विस्तार की जरूरत होती है, जिनका स्मरण रहना आवश्यक है :

1. $(x+a)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1} a + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 + \ldots + {}^nC_r x^{n-r} a^r + \ldots + a^n$
2. $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \ldots + x^n$
3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$
4. $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots$
5. $a^x = 1 + x(\log_e a) + \frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2 + \ldots$
6. $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$
7. $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \ldots$
8. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$
9. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$
10. $\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \ldots$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

11. (i) $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\,.\cos\frac{C-D}{2}$

(ii) $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\,.\sin\frac{C-D}{2}$

(iii) $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\,.\cos\frac{C-D}{2}$

(iv) $\cos C - \cos D = -2\sin\frac{C+D}{2}\,\sin\frac{C-D}{2}$

प्रश्नावली 15.1

मान निकालें :

1. $\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\,(5x^3 - 4x^2 + 7)$

2. (i) $\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\,\frac{x^3-1}{x-1}$ (ii) $\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\,\frac{x^2-3x+2}{x-2}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1997]

(iii) $\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\,\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2004]

(iv) $\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\,\frac{3x^2-4x+1}{x^2-4x+3}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2014 (O)]

3. (i) $\underset{x\to 4}{\text{Lt}}\,\frac{x^3-64}{x^2-16}$ (ii) $\underset{x\to 3}{\text{Lt}}\,\frac{x^4-81}{x^3-27}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2016]

4. (i) $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\,\frac{x^{3/2}-a^{3/2}}{x-a}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1992]

(ii) $\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\,\frac{x^n-2^n}{x-2}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1995, 2009]

(iii) $\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\,\frac{x^2-4}{x-2}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

5. (i) $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\,\frac{(x+2)^{5/3}-(a+2)^{5/3}}{x-a}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2005, 06]

(ii) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\,\frac{(1+x)^{1/n}-1}{x}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2016]

6. $\underset{x\to a}{\text{Lt}}\,\frac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}$

7. $\underset{x\to 1}{\text{Lt}}\,\frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1977, 88]

8. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\,\frac{2x}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$

9. $\underset{x\to 2}{\text{Lt}}\,\frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}$

10. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\,\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1+x}-1}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

11. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}}{x}$

12. $\lim_{n \to \infty} \left\{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right\}$

13. $\lim_{n \to \infty} \frac{(n-1)(2n+1)(3n+1)(4n-1)}{n^4}$

14. $\lim_{x \to \infty} \frac{1+2+3+\ldots+x}{x^2}$

15. $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2+3x+1}{3x^2+2x+4}$

16. $\lim_{x \to \infty} \frac{9x^2-2x-7}{6x^2+5x+1}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1994, 2005, 13]

17. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x}-1}{x}$

18. (i) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2+x}-e^2}{x}$ (ii) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$

19. $\lim_{x \to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$

20. $\lim_{x \to 0} \frac{2^x-1}{x}$

21. $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{x}$

22. $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{\sin x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2001, 08]**

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\log x}{x-1}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1998, 2007, 16(S)]

24. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x}$ **25.** $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 7x}{\tan 5x}$ **26.** $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]

27. $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos mx}{1-\cos nx}$ **28.** $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos 6x}{x}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1997, 2006]

29. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}}$ [**संकेत :** $x-\frac{\pi}{4}=y$]

30. (i) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$ (ii) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]

(iii) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec x-\tan x)$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2014]**

31. $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 \cot x}{1-\cos x}$

[**संकेत :** $(1+\cos x)$ से गुणा तथा भाग देने पर $\frac{x^3 \cot x}{1-\cos x}=\frac{x^3 \cos x(1+\cos x)}{\sin^3 x}$]

32. यदि $f(x)=|x|$ तो दिखायें कि $\lim_{x \to 0} f(x)=0$

33. यदि $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x<1 \\ 2, & x=0 \\ 2-x & x \ge 1 \end{cases}$ तो दिखाइए कि $\lim_{x \to 1} f(x)=1$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

34. यदि $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\\ 0 & \text{जब } x=0\end{cases}$ तो दिखायें कि $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

उत्तरमाला

1. 8. **2.** (i) 3 (ii) 1 (iii) $\frac{5}{4}$ (iv) −1 **3.** (i) 6 (ii) 4

4. (i) $\frac{3}{2}a^{1/2}$ (ii) $n2^{n-1}$ (iii) 4 **5.** (i) $\frac{5}{3}(a+2)^{2/3}$ (ii) $\frac{1}{n}$

6. $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ **7.** $-\frac{1}{10}$ **8.** $2\sqrt{a}$ **9.** −8 **10.** −1 **11.** 3 **12.** $\frac{1}{2}$

13. 24 **14.** $\frac{1}{2}$ **15.** $\frac{5}{3}$ **16.** $\frac{3}{2}$ **17.** 4 **18.** (i) e^2 (ii) 1

19. $\log a - \log b$ **20.** log 2 **21.** 1 **22.** 1 **23.** −1 **24.** 3 **25.** 7/5

26. $\frac{1}{2}$ **27.** $\frac{m^2}{n^2}$ **28.** 0 **29.** $\sqrt{2}$ **30.** (i) 1 (ii) −2 (iii) 0 **31.** 2

❑❑❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अध्याय

16 सततता एवं अवकलनीयता

(Continuity and Differentiability)

16.1 परिभाषा (Definition)

16.1.1 किसी बिन्दु पर सततता (Continuity at a Point)

कोई फलन $f(x)$, $x=a$ पर सतत कहा जाता है यदि उस बिंदु पर $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व हो और उसका मान $x=a$ पर फलन के मान के बराबर हो।

अत: यदि फलन $x=a$ पर सतत है तो $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

अर्थात् बायीं सीमा $\underset{h \to 0}{\text{Lt}} f(a-h) =$ दायीं सीमा $\underset{h \to 0}{\text{Lt}} f(a+h) = f(a)$

16.1.2 अंतराल में सततता (Continuity in an Interval)

दिया गया फलन किसी अंतराल $a \le x \le b$ में सतत होगा यदि वह अंतराल के प्रत्येक बिन्दु पर सतत हो।

यदि फलन किसी बिन्दु पर सतत नहीं है, तो उस बिन्दु पर असतत होगा।

16.2 दक्षिण पक्ष अवकलज (Right Hand Derivative (RHD))

यदि $f(x)$ कोई फलन हो तो $x=a$ पर इसका दक्षिण पक्ष अवकलज (R.H.D.) निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है :

R.H.D. या R $f'(a)$ या $f'(a^+) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

16.3 वाम पक्ष अवकलज (Left Hand Derivative)

फलन $f(x)$ के $x=a$ पर वाम पक्ष अवकलज को L.H.D. या L $f'(a)$ या $f'(a^-)$ से सूचित किया जाता है तथा निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है :

$$\text{L.H.D. या } Lf'(a) \text{ या } f'(a^-) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$

16.4 अवकलनीयता (Differentiability)

कोई फलन $f(x)$ बिन्दु $x=a$ पर अवकलनीय कहा जाता है यदि और केवल यदि

$$Lf'(a) = R\,f'(a)$$

अर्थात्
$$\underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(a-h)-f(a)}{-h} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

इसे $f'(a)$ से सूचित किया जाता है तथा $x = a$ पर $f(x)$ के **अवकल गुणांक** (derivative) के रूप में जाना जाता है।

नोट :

- (i) यदि $Lf'(a) \neq Rf'(a)$, तो फलन $x = a$ पर अवकलनीय नहीं होगा।
- (ii) प्रत्येक अवकलनीय फलन सतत होता है। किन्तु एक सतत फलन अवकलनीय हो भी सकता है और नहीं भी। जैसे : $|x|$, $x = 0$ पर सतत है किंतु अवकलनीय नहीं है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. दिखायें कि $f(x) = x^2 - 7x + 3$ बिन्दु $x = 1$ पर सतत है।

हल : दक्षिण पक्ष सीमा (RHL) $= \lim_{h \to 0} f(1+h)$

$$= \lim_{h \to 0} [(1+h)^2 - 7(1+h) + 3] = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} [1 + 2h + h^2 - 7 - 7h + 3]$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} (h^2 - 5h - 3) = -3$$

वाम पक्ष सीमा (LHL) $= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} f(1-h) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} [(1-h)^2 - 7(1-h) + 3]$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} [1 - 2h + h^2 - 7 + 7h + 3] = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} [h^2 + 5h - 3] = -3$$

तथा $\quad f(1) = 1^2 - 7 \times 1 + 3 = 1 - 7 + 3 = -3$

अत: R.H.L = L.H.L. = $f(1)$ अत: $x = 1$ पर फलन सतत है।

उदाहरण 2. फलन $f(x)$ का बिन्दु 0 पर सातत्य परीक्षण करें।

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

हल : L.H.L. $= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} f(0-h) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{|0-h|}{0-h} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{h}{-h} = -1$

R.H.L. $= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} f(0+h) = \dfrac{|0+h|}{0+h} = \dfrac{h}{h} = 1$

$\therefore$ L.H.L. $\neq$ R.H.L.

अत: $x = 0$ पर फलन असतत है।

उदाहरण 3. यदि $f(x) = \begin{cases} 1 + 2x & \text{यदि } x < 0 \\ 1 & \text{यदि } 0 \le x < 1 \\ 2x - 1 & \text{यदि } x \ge 1 \end{cases}$ तो $x = 1$ तथा $x = 0$ पर सांतत्य परीक्षण करें।

हल : (i) $x = 1$ पर सातत्य L.H.L. $= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} f(1-h) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} (1) = 1$

R.H.L. $= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} f(1+h) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \{2(1+h) - 1\} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \{2 + 2h - 1\}$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \{2h + 1\} = 2 \times 0 + 1 = 1$$

तथा $\quad f(1) = 2 \times 1 - 1 = 1$

अत: L.H.L. = R.H.L. $= f(1)$ अत: फलन $x = 1$ पर संतत है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(ii) $x=0$ पर सातत्य

$$\text{L.H.L.} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} f(0-h) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} (1+2h) = 1$$

$$\text{R.H.L.} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} f(0+h) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} (1) = 1$$

तथा $f(0)=1$ $\quad\therefore$ L.H.L. = R.H.L. = $f(0)$ अत: फलन $x=0$ पर सतत है।

उदाहरण 4. K के किस मान के लिए फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4}, & x\neq 4\\ K, & x=4\end{cases}$

$x=4$ पर सतत है ?

हल : $\text{L.H.L.} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} f(4-h) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{(4-h)^2-16}{4-h-4} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{16-8h+h^2-16}{-h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{h^2-8h}{-h}$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \{-h+8\} = 0+8=8$$

$\text{R.H.L.} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} f(4+h) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{(4+h)^2-16}{4+h-4} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{16+8h+h^2-16}{h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \left[\dfrac{h+8h}{h}\right]$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} [h+8] = 0+8=8$$

तथा $f(4)=K$ $\because$ $f(x), x=4$ पर सतत है। अत: L.H.L. = R.H.L. = $f(4)=8$, अत: $K=8$ **उत्तर**

उदाहरण 5. सिद्ध करें कि $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 \quad, & x=0\end{cases}$ बिंदु $x=0$ पर सतत है।

हल : $\text{L.H.L.} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} f(0-h) = (0-h)\sin\dfrac{1}{0-h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \left\{h\sin\dfrac{1}{h}\right\} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\, h \times \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \sin\dfrac{1}{h}$

$= 0\times$ (−1 तथा 1 के बीच परिमित राशि) $= 0$

$\text{R.H.L.} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} f(0+h) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \left\{(0+h)\sin\dfrac{1}{0+h}\right\} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \left\{h\sin\dfrac{1}{h}\right\} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}}\, h \times \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \sin\dfrac{1}{h}$

$= 0\times$ {−1 तथा 1 के बीच परिमित राशि} $= 0$

तथा $f(0)=0$ $\quad\therefore$ L.H.L = R.H.L. = $f(0)$

अत: फलन $x=0$ पर सतत है।

उदाहरण 6. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x\neq 0\\ 1 \quad, & x=0\end{cases}$ तो $x=0$ पर फलन की सततता की जाँच करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1997]

हल : $\text{R.H.L.} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} f(0+h) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin 2(0+h)}{0+h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin 2h}{2h\times\frac{1}{2}} = 2\underset{h\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin 2h}{2h} = 2\times 1 = 2$

$\text{L.H.L.} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} f(0-h) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin 2(0-h)}{0-h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin 2(-h)}{-h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin 2h}{2h\times\frac{1}{2}}$

$$= 2\underset{h\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin 2h}{2h} = 2 \qquad \left[\because \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1\right]$$

तथा $f(0)=1$

अत: L.H.L. = R.H.L. $\neq f(0)$ $\qquad$ अत: फलन असतत है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

उदाहरण 7. यदि $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}, & \text{जब } x\neq 0\\ 0\quad , & \text{जब } x=0\end{cases}$ तो $x=0$ पर फलन $f(x)$ पर की सततता की जाँच करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]

हल : दिया गया है $f(0)=0$ ...(1)

$$\text{L.H.L.} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} f(0-h) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^{\frac{1}{0-h}}-1}{e^{\frac{1}{0-h}}+1} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{e^{-\frac{1}{h}}-1}{e^{-\frac{1}{h}}+1} = \frac{\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\frac{1}{e^{1/h}}-1}{\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\frac{1}{e^{1/h}}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1 \quad ...(2)$$

$$\left[\because \underset{h\to 0}{\text{Lt}} e^{\frac{1}{h}} = 0\right]$$

(1) तथा (2) से, L.H.L. $\neq f(0)$ अतः $f(x)$, $x=0$ पर असतत है।

उदाहरण 8. दिखायें $f(x)=|x|$, $x=0$ पर सतत है किन्तु यह इस बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

हल : दिया गया बिन्दु $x=0$

$$\text{L.H.L.} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} f(0-h) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} |0-h| = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} |-h| = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} h = 0$$

$$\text{R.H.L.} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} f(0+h) = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} |0+h| = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} |h| = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} h = 0$$

तथा $f(0)=|0|=0$

अतः L.H.L. = R.H.L. $= f(0)$ $\quad\therefore$ $x=0$ पर $|x|$ सतत है।

● अवकलनीयता

दिया गया बिन्दु

$$\text{R.H.D.} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{|h|-|0|}{h} = \underset{h\to 0}{Lt} \frac{|h|}{h}-0 = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{h}{h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} (1) = 1$$

$$\text{L.H.D.} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(0-h)-f(0)}{-h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(-h)-f(0)}{-h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{|-h|-|0|}{-h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{h}{-h} = -1$$

$\therefore$ R.H.D $\neq$ L.H.D. अतः $x=0$ पर $|x|$ अवकलनीय नहीं है।

उदाहरण 9. $x=0$ पर $f(x)=x|x|$ की अवकलनीयता की जाँच करें।

हल : दिया गया फलन $f(x)=x|x|=\begin{cases}x^2 & , x\geq 0\\ -x^2 & , x<0\end{cases}$ [परिभाषा से]

अब दिया गया बिन्दु $x=0$

$$\text{L.H.D.} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{(0-h)-f(0)}{-h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{-h^2-0}{-h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} h = 0$$

$$\text{R.H.D.} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{h^2-0}{h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} h = 0$$

तथा $f(0)=0$ $\qquad\therefore$ L.H.D. = R.H.D.

अतः $f(x)$, $x=0$ पर अवकलनीय है।

उदाहरण 10. दिखायें $f(x)=x^2$ बिन्दु $x=1$ पर अवकलनीय है। $f'(1)$ का मान बतायें।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

हल : $x=1$ पर L.H.D. $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1-h)^2-1}{-h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-2h+h^2-1}{-h} = \lim_{h \to 0} (2-h) = (2-0) = 2$$

$x=1$ पर R.H.D. $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^2-1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1+2h+h^2-1)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} (2+h) = 2+0 = 2$$

अतः R.H.D. = L.H.D. = 2

अतः $f(x), x=1$ पर अवकलनीय है, तथा $f'(1)=2$

उदाहरण 11. दिखायें फलन $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{जब } x \neq 0 \\ 0, & \text{जब } x = 0 \end{cases}$, $x=0$ पर अवकलनीय नहीं है।

हल : दिया गया बिंदु $x=0$ तथा $f(0)=0$

अब R.H.D. $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \sin \dfrac{1}{h}$

= एक संख्या जिसका मान -1 तथा 1 के बीच है

अतः $x=0$ पर R.H.D. अस्तित्वहीन है।

इसी तरह दिखाया जा सकता है कि $x=0$ पर L.H.D. अस्तित्वहीन है।

अतः $x=0$ पर फलन अवकलनीय नहीं है।

प्रमुख सूत्र एवं तथ्य

1. किसी बिन्दु $x=a$ पर फलन $f(x)$ सतत होगा यदि $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

   अर्थात् वाम सीमा (L.H.L.) = दायीं सीमा (R.H.L.) $= f(a)$

   अर्थात् $\lim\limits_{h \to 0} f(a-h) = \lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

2. (i) वाम अवकलज (Left Hand Derivative or L.H.D.)

   किसी बिन्दु $x=a$ पर वाम अवकलज L.H.L. $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}$

   (ii) दक्षिण अवकलज (Right Hand Derivative or R.H.D.)

   $x=a$ पर दक्षिण अवकलज R.H.D. $= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

3. **अवकलनीयता :** किसी बिन्दु $x=a$ पर कोई फलन अवकलनीय होगा अर्थात् $f'(x)$ का अस्तित्व होगा यदि R.H.D. = L.H.D.

4. यदि कोई फलन $y=f(x)$ अपने प्रभाव क्षेत्र (Domain) के प्रत्येक बिन्दु पर अवकलनीय है, तो

   $$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{या} \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$

5. प्रत्येक अवकलनीय फलन सतत होता है किंतु, प्रत्येक सतत फलन का अवकलनीय होना आवश्यक नहीं है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

प्रश्नावली 16.1

1. यदि $f(x) = 2x^2 + 12x - 1$ हो तो $x = 2$ पर इसकी सततता का परीक्षण करें।

2. दिखायें कि $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{यदि } x \neq 1 \\ 2, & \text{यदि } x = 1 \end{cases}$

बिन्दु $x = 1$ पर असतत है।

3. (i) यदि $f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{जबकि } x \geq 5 \\ 5x - 24 & \text{जबकि } x < 5 \end{cases}$ तो दिखायें $x = 5$ पर $f(x)$ सतत है।

(ii) सिद्ध कीजिये कि फलन $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, $x = 1$ पर सतत है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2013]**

(iii) फलन $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2+4}$ का $x = 1$ सततता की जाँच करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(B)]**

4. K के किस मान के लिए $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ K, & x = 3 \end{cases}$

$x = 3$ पर सतत है।

5. यदि $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$, जहाँ x एक वास्तविक संख्या है तो सिद्ध करें कि फलन $f(x)$ बिन्दु $x = 1$ पर सतत है।

6. दिखायें कि $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर असतत है।

7. यदि $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{जबकि } x \neq 0 \\ 1, & \text{जबकि } x = 0 \end{cases}$ तो दिखायें कि $x = 0$ पर $f(x)$ असतत है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]

8. यदि $f(x) = x \cos \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ और $f(0) = 0$ तो दिखाइये कि $x = 0$ पर फलन सतत है।

9. दिखायें कि निम्न फलन $x = \dfrac{\pi}{2}$ पर असतत है :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin x & \text{जब } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\pi}{2} \sin(\pi + x) & \text{जब } \dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

10. दिखायें कि फलन $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - e^{-1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ बिन्दु $x = 0$ पर असतत है।

11. दिखायें निम्न फलन $x = 0$ पर सतत है :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + e^{-1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

12. K के किस मान के लिए निम्न फलन $x = 2$ पर सतत है :

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ K \quad , & x = 0 \end{cases}$$

क्या यह फलन $x = 0$ पर अवकलनीय है?

13. दिखायें $f(x) = |x - 2|$, $x = 2$ पर अवकलनीय नहीं है।

14. दिखायें निम्न फलन $x = 2$ पर अवकलनीय नहीं है।

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & 0 < x \leq 1 \\ 2x^2 - x, & 1 < x \leq 2 \\ 5x - 4, & x > 2 \end{cases}$$

15. दिखाइए कि फलन $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 \quad , & x = 0 \end{cases}$ बिन्दु $x = 0$ पर सतत एवं अवकलनीय है।

उत्तरमाला

1. सतत **3.** (iii) सतत **4.** $K = 6$

12. (i) $K = 0$ **(ii)** अवकलनीय नहीं है।

❑❑❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अध्याय

17

प्रारंभिक अवकलन (Elementary Differentiation)

17.1 वृद्धि (Increment)

यदि किसी चर राशि x का संख्यात्मक मान x_1 से x_2 $(x_2 > x_1)$ हो जाता है, तो अंतर $x_2 - x_1$ इसके मान में वृद्धि (Increment) कहलाती है।

सामान्यत: फलन $y = f(x)$ के लिए स्वतंत्र चर x में वृद्धि को δx से तथा y में संगत वृद्धि को δy से सूचित किया जाता है।

17.2 अवकल गुणांक (Differential Coefficient)

माना

$$y = f(x) \quad \ldots(1)$$

कोई दिया गया फलन है तथा x के मान में परिवर्तन δx तथा y के मान में संगत परिवर्तन δy है, तो

$$y + \delta y = f(x + \delta x) \quad \ldots(2)$$

(2) में से (1) को घटाने पर $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$

$$\therefore \quad \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

अत:

$$\underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\delta y}{\delta x} = \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

तो यह सीमा, यदि इस सीमा का अस्तित्व है तथा मान परिमित है, फलन y का अवकलज (Derivative) या $y = f(x)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक (Differential Coefficient) कहलाती है तथा इसे $\frac{dy}{dx}$ या $\frac{d}{d}\{f(x)\}$ या $f'(x)$ से सूचित किया जाता है।

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}}$$

अवकलज प्राप्त करने की क्रिया अवकलन कहलाती है।

टिप्पणी : (i) $\frac{dy}{dx} \neq dy \div dx$ अर्थात् $\frac{dy}{dx}$ अनुपात नहीं है, किंतु $\frac{\delta y}{\delta x}$ वृद्धि का अनुपात (Increment Ratio) है।

(ii) $\delta x \neq \delta \times x$ तथा $\delta y \neq \delta \times y$

वस्तुत: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{\delta y}{\delta x}$ का सीमान्त मान है तथा $\frac{d}{dx}$ अवकलन क्रिया का विशेष प्रतीक है।

17.3 प्रथम सिद्धान्त से अवकलन (Differentiation from First Principle)

किसी दिए गए फलन का उपरोक्त परिभाषा से अर्थात् $\frac{dy}{dx} = \underset{\delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$ से अवकलज प्राप्त करना प्रथम सिद्धान्त से अवकलन कहलाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

यदि $y = f(x)$ कोई फलन है, तो

प्रथम सिद्धान्त से अवकलन में निम्न क्रियायें की जाती हैं :

I. फलन को $y = f(x)$ लिखें।

II. x के स्थान पर $x + h$ रखकर $f(x + h)$ का मान निकालें।

III. $\underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ का मान निकालें।

नोट :

- यहाँ सुविधा के लिए δx की जगह h का प्रयोग किया गया है।

17.4 प्रथम सिद्धान्त से महत्वपूर्ण मानक फलनों के अवकल गुणांक (Differential Coefficients of Some Important Functions)

1. अचर राशि का अवकल गुणांक (d.c. of constant)

अचर राशि का अवकल गुणांक शून्य होता है अर्थात् यदि c कोई अचर राशि हो, तो

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

माना $f(x) = c$ तो $f(x + h) = c$ [∵ अचर के मान में कोई परिवर्तन नहीं होगा।]

अत: प्रथम सिद्धान्त से $\frac{d}{dx}(c) = f'(x) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{c - c}{h} = 0$

2. अचर राशि और फलन के गुणनफल का अवकल गुणांक (Differential Coefficient of Product of Constant and a Function)

$$\frac{d}{dx}\{c\, f(x)\} = c \frac{d}{dx} f(x), \text{ जहाँ } c \text{ कोई अचर है।}$$

प्रमाण : माना $y = c\, f(x)$

तो $\frac{dy}{dx} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{c\, f(x+h) - cf(x)}{h} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{c\{f(x+h) - f(x)\}}{h}$

$= c \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \frac{dy}{dx} = c \frac{d}{dx} f(x)$ **सिद्ध हुआ।**

3. फलनों के योग व अंतर का अवकलन : यदि $f_1(x)$ तथा $f_2(x)$ दो फलन हैं, तो

$$\frac{d}{dx}\{f_1(x) \pm f_2(2)\} = \frac{d}{dx} f_1(x) \pm \frac{d}{dx} f_2(x)$$

प्रमाण : माना $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$ तो $f(x+h) = f_1(x+h) \pm f_2(x+h)$

$\therefore \frac{d}{dx} f(x) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{\{f_1(x+h) \pm f_2(x+h)\} - \{f_1(x) + f_2(x)\}}{h}$

$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{\{f_1(x+h) - f_1(x)\} \pm \{f_2(x+h) - f_2(x)\}}{h}$

$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} \pm \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} = \frac{d}{dx} f_1(x) \pm \frac{d}{dx} f_2(x)$

नोट :

- यदि $f(x) = f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \ldots$ तो $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} f_1(x) \pm \frac{d}{dx} f_2(x) \pm \frac{d}{dx} f_3(x) \pm \ldots$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

4. फलन x^n का x के सापेक्ष अवकल गुणांक, जहाँ n कोई अचर है [उ० प्र० डिप्लोमा 1989]

माना $f(x)=x^n$ तो $f(x+h)=(x+h)^n$

अतः x^n का x के सापेक्ष अवकल गुणांक

$$\frac{d}{dx}x^n = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h)-x} = \underset{x+h\to x}{\text{Lt}} \frac{(x+h)^n - x^n}{(x+h)-x} \quad [\because h\to 0 \Rightarrow x+h\to x]$$

$$= n\,x^{n-1} \qquad \left[\because \underset{x\to a}{\text{Lt}} \frac{x^n - a^n}{x-a} = na^{n-1}\right]$$

अतः $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

5. फलन e^x का x के सापेक्ष अवकल गुणांक, जबकि e (Exponential) चर घातीय है। [उ० प्र० डिप्लोमा 2014 (0)]

माना $f(x)=e^x$ तो $f(x+h)=e^{x+h}$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(1+\frac{h}{1!}+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\ldots-1\right)}{h} = \lim_{h\to 0} e^x h\frac{\left(\frac{1}{1!}+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\ldots\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} e^x\left\{1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\ldots\right\} = e^x\left\{\frac{1}{1!}+0+0+\ldots\right\} \quad [h=0 \text{ रखने पर}]$$

$$= e^x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

6. e^{ax} का प्रथम सिद्धान्त से अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। [उ० प्र० डिप्लोमा 2010]

हल : x की जगह ax रखकर ऊपर की भाँति हल करें। $\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$

7. फलन a^x का x के सापेक्ष प्रथम सिद्धान्त अवकल गुणांक, जबकि a एक अचर है।

माना $f(x)=a^x$ तो $f(x+h)=a^{x+h}$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}a^x = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^x\left[1+\frac{h\log_e a}{1!}+\frac{h^2(\log_e a)^2}{2!}+\ldots-1\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^x\left[\frac{h\log_e a}{1!}+\frac{h^2(\log_e a)^2}{2!}+\ldots\right]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x\cdot h\left[\frac{\log_e a}{1!}+\frac{h(\log_e a)^2}{2!}+\ldots\right]}{h}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \left[\frac{\log_e a}{1!} + \frac{h}{2!}(\log_e a)^2 + \frac{h^2}{3!}(\log_e a)^3 + \ldots \right] = a^x \left[\frac{\log_e a}{1!} + 0 + 0 + \ldots \right]$$

[$h = 0$ रखने पर]

$$= a^x \log_e a$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} a^x = a^x \log_e a$$

8. फलन $\log_e x$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक, जबकि आधार चर घातीय है। [उ० प्र० डिप्लोमा 1988]

माना $f(x) = \log_e x$ तो $f(x+h) = \log_e (x+h)$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} \log_e x = \lim_{h \to 0} \frac{\log_e (x+h) - \log_e x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_e x(1 + h/x) - \log_e x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_e x + \log_e (1 + h/x) - \log_e x}{h}$$ [सूत्र : $\log_e (mn) = \log_e m + \log_e n$]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log_e (1 + h/x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \ldots}{h}$$

[सूत्र : $\log_e (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$]

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left[\frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} - \frac{h^3}{4x^4} + \ldots\right]}{h} = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} - \frac{h^3}{4x^4} + \ldots \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{x} - 0 + 0 - \ldots \right\} = \frac{1}{x}$$ [$h = 0$ रखने पर]

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$$

9. फलन $\log ax$ का x के सापेक्ष प्रथम सिद्धान्त से अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। [उ० प्र० डिप्लोमा 1995, 2002]

हल : x की जगह ax रखकर ऊपर की भाँति हल करें। $\frac{d}{dx} \log ax = \frac{1}{x}$

10. फलन $\log_a x$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक, जबकि लघुगणक का आधार कोई अचर है।

यहाँ $f(x) = \log_a x = (\log_e x) \log_a e$ [सूत्र से]

$$= \log_a e \,.\, \log_e x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{d}{dx} \{\log_a e \,.\, \log_e x\} = \log_a e \frac{d}{dx} \log_e x = \log_a e \,.\, \frac{1}{x}$$ $\left[\because \frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}\right]$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$$

11. त्रिकोणमितीय फलनों (Trigonometrical Functions) का अवकल गुणांक [उ० प्र० डिप्लोमा 1991, 2004]

(i) फलन $\sin x$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक :

माना $f(x) = \sin x$ तो $f(x+h) = \sin (x+h)$

AYC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$\therefore \frac{d}{dx}\sin x = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{(x+h+x)}{2}\sin\frac{(x+h-x)}{2}}{h}$$

$$\left[\because \sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}.\sin\frac{C-D}{2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{2.\frac{h}{2}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(h/2)}{h/2}\right)\times\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 1.\cos x \qquad \left[\because \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1\right]$$

$$= \cos x$$

अतः $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

(ii) sin 2x का मूल नियमों से x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999, 2001]

हल : x की जगह $2x$ रखकर ऊपर की भाँति हल करें। $\frac{d}{dx}\sin 2x = 2\cos 2x$

(iii) फलन cos x का x के सापेक्ष अवकल गुणांक

मान लीजिये $f(x) = \cos x$ तो $f(x+h) = \cos(x+h)$

$$\therefore \frac{d}{dx}\cos x = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left\{\frac{x+h+x}{2}\right\}\sin\left\{\frac{x-(x+h)}{2}\right\}}{h}$$

$$\left[\because \cos C - \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\left(\frac{-h}{2}\right)}{2.\frac{h}{2}} = -\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\times\lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{1}{2}h\right)$$

$$= -1.\sin x \qquad \left[\because \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1\right]$$

$$= -\sin x$$

अतः $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

(iv) फलन tan x का x के सापेक्ष अवकल गुणांक

[उ० प्र० डिप्लोमा 1987, 2016(S)]

मान लीजिये $f(x) = \tan x$ तो $f(x+h) = \tan(x+h)$

$$\therefore \frac{d}{dx}\tan x = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}}{h}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h)\cos x - \sin x \cos(x+h)}{h \cdot \cos(x+h) \cdot \cos x} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h-x)}{h \cdot \cos(x+h) \cdot \cos x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \times \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos(x+h)\cos x} = \frac{1 \times 1}{\cos x \cdot \cos x} = \sec^2 x$$

अतः $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$

(v) फलन sec *x* का *x* के सापेक्ष अवकल गुणांक

मान लीजिये $f(x) = \sec x$ तो $f(x+h) = \sec(x+h)$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} \sec x = \lim_{h \to 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x - \cos(x+h)}{h \cos(x+h)\cos x} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin\left(\frac{x+x+h}{2}\right) \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h \cos(x+h) \cos x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \sin\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{2\left(\frac{h}{2}\right) \cos(x+h) \cos x} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \times \lim_{h \to 0} \frac{\sin\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{\cos(x+h) \cdot \cos x}$$

$$= 1 \cdot \frac{\sin x}{\cos x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \cdot \sec x.$$

अतः $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$

(vi) फलन cosec *x* का *x* के सापेक्ष अवकल गुणांक

मान लीजिये $f(x) = \operatorname{cosec} x$ तो $f(x+h) = \operatorname{cosec}(x+h)$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{cosec}(x+h) - \operatorname{cosec} x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x - \sin(x+h)}{h \sin(x+h) \sin x} = \lim_{h \to 0} \frac{2 \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) \sin\left(\frac{x-x-h}{2}\right)}{h \sin(x+h) \sin x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{1}{2}h\right) \sin\left(\frac{-h}{2}\right)}{2 \frac{h}{2} \sin(x+h) \sin x} = -\lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(x + \frac{1}{2}h\right) \sin\left(\frac{1}{2}h\right)}{\left(\frac{1}{2}h\right) \sin(x+h) \sin x}$$

$$= -\lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} \times \lim_{h \to 0} \frac{\cos\left(x + \frac{1}{2}h\right)}{\sin(x+h) \sin x} = -1 \cdot \frac{\cos x}{\sin x \sin x}$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = -\cot x \cdot \operatorname{cosec} x$$

$\therefore \quad \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. अवकल गुणांक ज्ञात करें :

(i) ax^n (ii) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

हल : (i) माना $y = ax^n$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(ax^n) \quad = a\times nx^{n-1} = nax^{n-1}$ उत्तर

(ii) माना $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ तो $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\sqrt{x})+\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$$=\frac{d}{dx}(x^{1/2})+\frac{d}{dx}(x^{-1/2})=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-1/2}-\frac{1}{2}x^{-3/2}$$

$$=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left[1+\frac{1}{x}\right]$$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि $y=\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x}}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान निकालें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]**

हल : $y=\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x}}=\frac{ax^2}{\sqrt{x}}+\frac{bx}{\sqrt{x}}+\frac{c}{\sqrt{x}}=a\,x^{2-\frac{1}{2}}+bx^{1-\frac{1}{2}}+cx^{-\frac{1}{2}}$

अत: $y=ax^{3/2}+bx^{1/2}+cx^{-1/2}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=a\frac{d}{dx}x^{3/2}+b\frac{d}{dx}x^{1/2}+c\frac{d}{dx}x^{-1/2}=a\times\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}+b\times\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}+c\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1}$$

$$=\frac{3}{2}a\,x^{1/2}+\frac{1}{2}b\,x^{-1/2}-cx^{-3/2}=\frac{3}{2}a\sqrt{x}+\frac{b}{2\sqrt{x}}-\frac{c}{2\sqrt{x^3}}$$ उत्तर

उदाहरण 3. यदि $y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान बतायें।

हल : $\frac{d}{dx}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)=\frac{d}{dx}e^x=e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$ उत्तर

उदाहरण 4. यदि $y=4\sin x+2\tan x-3\cos x+5e^x+10^x+7\log_e x-8$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान बतायें।

हल : $y=4\sin x+2\tan x-3\cos x+5e^x+10^x+7\log_e x-8$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=4\frac{d}{dx}\sin x+2\frac{d}{dx}\tan x-3\frac{d}{dx}\cos x+5\frac{d}{dx}e^x+\frac{d}{dx}10^x+7\frac{d}{dx}\log_e x-\frac{d}{dx}(8)$$

$$=4\cos x+2\sec^2 x-3(-\sin x)+5e^x+10^x\log_e 10+7\times\frac{1}{x}-0$$

$$=4\cos x+2\sec^2 x+3\sin x+5e^x+10^x\log_e 10+\frac{7}{x}$$ उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

महत्वपूर्ण सूत्र

प्रमुख फलनों के अवकलज Derivatives of Important Functions.

1. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ **2.** $\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}$ **3.** $\frac{d}{dx}c = 0$

4. $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_a e$ **5.** $\frac{d}{dx}a^x = a^x \log_e a$ **6.** $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

7. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ **8.** $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ **9.** $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

10. $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$ **11.** $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

12. $\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$ **13.** $\frac{d}{dx}cf(x) = c\frac{d}{dx}f(x)$

14. $\frac{d}{dx}\{f_1(x) \pm f_2(x)\} = \frac{d}{dx}f_1(x) \pm \frac{d}{dx}f_2(x)$

प्रश्नावली 17.1

निम्न का अवकल गुणांक ज्ञात करें : [प्रश्न 1 से 5 तक]

1. (i) x^5 (ii) x^{-6} (iii) $x^{4/5}$ (iv) $\sqrt{x}$

(v) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (vi) $1/x^2$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]**

2. (i) $6x^{-4}$ (ii) $\frac{1}{3x}$ (iii) $2\sqrt[3]{x}$ (iv) $\frac{1}{2\sqrt[5]{x}}$

3. (i) $2x^4 + 3x^2 + 7x + 5$ (ii) $5x^{-1/2} - 7x^2 + \frac{7}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - \frac{5}{x}$

(iii) $ax^3 + bx^2 + cx + d$, जहाँ a, b, c, d अचर हैं।

(iv) $\frac{lx^2 + mx + n}{\sqrt{x}}$, जहाँ l, m, n अचर हैं। (iv) $\frac{ax^2 + bx + c}{\sqrt{x}}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]**

4. (i) $(x^2 - 5x + 6)(x - 3)$ (ii) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

5. (i) $4\tan x - \frac{1}{2}\sec x + 2\sin x - \frac{3}{\sin x} + \frac{6\sec x}{\operatorname{cosec} x} + 5e^x$

(ii) $\sin x \cdot \operatorname{cosec} x + \sec x \cdot \cot x$ (iii) $4\sec x \cdot \sin x + \operatorname{cosec} x \cdot \cos x - 5\tan x \cdot \cot x$

(iv) $-e^x + \log_e x + 5\sec x + 2^x$ (v) $x^a + a^x + a^a$

6. (i) यदि $y = \sin x + \tan x$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान $x = \frac{\pi}{4}$ पर निकालें।

(ii) यदि $y = x^4 + 6x^2 + 7x - 8$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान $x = 2$ पर निकालें।

7. (i) यदि $y = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान बतायें।

(ii) यदि $y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1997]**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(iii) यदि $y = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान बतायें। [उ० प्र० डिप्लोमा 1998]

8. यदि $y = \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{a}{x}}$ तो सिद्ध करें $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{x-a}{x\sqrt{ax}}\right]$

9. यदि $y = \sqrt{\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}$ तो सिद्ध करें $\frac{dy}{dx} + \sec^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$

10. यदि $y = \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\cot x}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान निकालें।

11. यदि $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान निकालें। [उ० प्र० डिप्लोमा 1977]

[**संकेत :** $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{1+\tan x}{\tan x - 1} = -\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$]

12. यदि $y = \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान बतायें। [उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]

13. $\frac{\tan x + \cot x}{\tan x - \cot x}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2017(O)]

उत्तरमाला

1. (i) $5x^4$ (ii) $-6x^{-7}$ (iii) $\frac{4}{5}x^{-1/5}$ (iv) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (v) $-\frac{1}{2x^{3/2}}$

2. (i) $-24x^{-5}$ (ii) $-\frac{1}{3x^2}$ (iii) $\frac{2}{3}x^{-2/3}$ (iv) $-\frac{1}{10}x^{-6/5}$

3. (i) $8x^3 + 6x + 7$ (ii) $-\frac{5}{2}x^{-3/2} - 14x - \frac{7}{2}x^{-3/2} + \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{5}{x^2}$

(iii) $3ax^2 + 2bx + c$ (iv) $\frac{3}{2}lx^{1/2} + \frac{1}{2}mx^{-1/2} - \frac{1}{2}nx^{-3/2}$

4. (i) $3x^2 - 16x + 21$ (ii) $1 - \frac{1}{x^2}$

5. (i) $4\sec^2 x - \frac{1}{2}\sec x . \tan x + 2\cos x + 3\,\text{cosec}\, x . \cot x + 6\sec^2 x + 5e^x$

(ii) $-\text{cosec}\, x . \cot x$ (iii) $4\sec^2 x - \text{cosec}^2 x$

(iv) $-e^x + \frac{1}{x} + 5\sec x . \tan x + 2^x \log_e 2$ (v) $ax^{a-1} + a^x \log_e a$

6. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}} + 2$ (ii) 63

7. (i) $\sec^2 x$ (ii) $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$ (iii) $\sec x(\sec x + \tan x)$

10. $-\text{cosec}^2 x - \sec^2 x$

11. $-\sec^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

12. $\sec^2(\pi/4 + x)$

13. $-2\sec 2x . \tan 2x$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

17.5 प्रथम सिद्धान्त (मूल नियम) से अवकलन पर आधारित प्रश्न (Problems based on Differentiation from First Principle)

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. $\sqrt{x}$ को प्रथम सिद्धान्त से अवकलित करें।

हल : माना $f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$ तो $f(x+h)=(x+h)^{1/2}$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}x^{1/2} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{(x+h)^{1/2}-x^{1/2}}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{Lt}} \frac{(x+h)^{1/2}-x^{1/2}}{x+h-x} = \underset{x+h\to x}{\text{Lt}} \frac{(x+h)^{1/2}-x^{1/2}}{(x+h)-x} \quad [\because h\to 0 \Rightarrow x+h\to x]$$

$$= \frac{1}{2}x^{(1/2)-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

उत्तर

उदाहरण 2. $\tan x^2$ का प्रथम सिद्धान्त द्वारा x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]**

हल : माना $f(x)=\tan x^2$ तब $f(x+h)=\tan(x+h)^2$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\tan x^2 = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)^2-\tan x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{\sin(x+h)^2}{\cos(x+h)^2}-\dfrac{\sin x^2}{\cos x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)^2\cos x^2-\cos(x+h)^2\sin x^2}{h\cos(x+h)^2\cos x^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin[(x+h)^2-x^2]}{h\cos(x+h)^2\cos x^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin[h^2+2xh]}{h\cos(x+h)^2\cos x^2} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin h(h+2x)}{h(h+2x)}\cdot\frac{(h+2x)}{\cos(x+h)^2\cos x^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h(h+2x)}{h(h+2x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{h+2x}{\cos(x+h)^2\cdot\cos x^2} = 1\cdot\frac{2x}{\cos x^2\cdot\cos x^2} = \frac{2x}{\cos^2 x^2}$$

$$= 2x\sec^2 x^2$$

उत्तर

उदाहरण 3. मूल नियमों से $\sqrt{\sin x}$ का अवकल-गुणांक ज्ञात कीजिए। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1998]**

हल : माना $f(x)=\sqrt{\sin x}$ तो $f(x+h)=\sqrt{\sin(x+h)}$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{\sin x} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\sin(x+h)}-\sqrt{\sin x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\sin(x+h)}-\sqrt{\sin x}}{h}\times\frac{\sqrt{\sin(x+h)}+\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin(x+h)}+\sqrt{\sin x}} \quad \text{(अंश के परिमेयीकरण से)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h[\sqrt{\sin(x+h)}+\sqrt{\sin x}]} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)\sin\frac{1}{2}h}{h[\sqrt{\sin(x+h)}+\sqrt{\sin x}]}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{1}{2}h\right)}{\sqrt{\sin(x+h)}+\sqrt{\sin x}}\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h} = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\sin x}}\times 1 = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

उदाहरण 4. फलन $\cos^2 x$ का x के सापेक्ष प्रथम सिद्धान्त से अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना $f(x) = \cos^2 x$ तो $\cos^2 (x+h) = f(x+h)$

$$\frac{d}{dx}\cos^2 x = \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2 (x+h) - \cos^2 x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\sin (x+h+x) \cdot \sin (x+h-x)}{h}$$

$$[\because \cos^2 C - \cos^2 D = -\sin (C+D) \sin (C-D)]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin (2x+h) \cdot \sin h}{h}$$

$$= [\lim_{h \to 0} \sin (2x+h)] \times \left[\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}\right] = -\sin 2x \times 1, \qquad \left[\because \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1\right]$$

$$= -\sin 2x$$

उत्तर

उदाहरण 5. $e^x \cos x$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक प्रथम सिद्धान्त से ज्ञात कीजिए। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]**

हल : माना $f(x) = e^x \cos x$ तो $f(x+h) = e^{x+h} \cos (x+h)$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x \cos x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} \cos (x+h) - e^x \cos x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x \cdot e^h \cos (x+h) - e^x \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x [e^h \cos (x+h) - \cos x]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x \left[\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \ldots\right) \cos (x+h) - \cos x\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^x \left[\cos (x+h) + h \cos (x+h) + \left(\frac{h^2}{2!} + \ldots\right) \cos (x+h) - \cos x\right]}{h}$$

$$= e^x \left[\lim_{h \to 0} \frac{\cos (x+h) - \cos x}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{h \cos (x+h)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{h\left(\frac{h}{2!} + \ldots\right) \cos (x+h)}{h}\right]$$

$$= e^x [-\sin x + \cos + 0] \qquad \left[\because \lim_{h \to 0} \frac{\cos (x+h) - \cos x}{h} = -\sin x\right]$$

$$\frac{d}{dx}(e^x \cos x) = e^x [-\sin x + \cos x].$$

उत्तर

उदाहरण 6. फलन $x \sin x$ का x के सापेक्ष प्रथम सिद्धान्त से अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $f(x) = x \sin x$ तो $f(x+h) = (x+h) \sin (x+h)$

$$\therefore \frac{d}{dx} x \sin x = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) \sin (x+h) - x \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x[\sin (x+h) - \sin x] + h \sin (x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x[\sin (x+h) - \sin x]}{h} + \lim_{h \to 0} \sin (x+h) = x \cos x + \sin x$$

$$\left[\because \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin (x+h) - \sin x}{h}\right) = \cos x\right]$$

उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

महत्वपूर्ण सूत्र

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

प्रश्नावली 17.2

निम्नलिखित फलनों का प्रथम सिद्धान्त से अवकलन करें :

1. x^{-2} **[उ० प्र० डिप्लोमा 1995]** **2.** $1 - \sqrt{x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1986]**

3. e^{3x} **4.** 5^x **5.** $\sin 3x$ **6.** $\cos 2x$

7. $\sec ax$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1985]** **8.** $\sin^2 x$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1965]**

9. $\cos x^2$ **10.** $\sqrt{\sin x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1998]**

11. $\sqrt{\cos x}$ **12.** (i) $\sqrt{\tan x}$ (ii) $\tan x$

13. (i) $\sqrt{\cot x}$ (ii) $\cot x$ **14.** $e^{\sin x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1996]**

15. $\log ax$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1995, 2002]** **16.** $\log_e \sqrt{x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1990]**

17. $\sin x^\circ$ **[संकेत :** $x^\circ = \frac{\pi x}{180}$**]** **18.** xe^x **19.** $e^x \sin x$

20. $x \cos x$ **21.** $\frac{3x+2}{2x-1}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2016]** **22.** $\frac{2x+3}{3x-2}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]**

उत्तरमाला

1. $-2x^{-3}$ **2.** $-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ **3.** $3e^{3x}$ **4.** $5^x \log_e 5$

5. $3\cos 3x$ **6.** $-2\sin 2x$ **7.** $a \sec ax . \tan ax$ **8.** $\sin 2x$

9. $-2x \sin x^2$ **10.** $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ **11.** $-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

12. (i) $\frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$ (ii) $\sec^2 x$ **13.** (i) $\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{2\sqrt{\cot x}}$ (ii) $-\operatorname{cosec}^2 x$

14. $\cos x . e^{\sin x}$ **15.** $\frac{1}{x}$ **16.** $\frac{1}{2x}$ **17.** $\frac{\pi}{180} \cos x^\circ$ **18.** $e^x (1+x)$

19. $e^x (\sin x + \cos x)$ **20.** $-x \sin x + \cos x$ **21.** $\frac{-7}{(2x-1)^2}$ **22.** $\frac{-5}{(3x-2)^2}$

17.6 फलनों के गुणनफल का अवकलन (Differentiation of the Product of Functions)

(i) यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ दो अवकलनीय फलन हैं, तो

$$\frac{d}{dx}[f(x) \times g(x)] = f(x) \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \frac{d}{dx} f(x)$$

इस परिणाम को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx},$$ जहाँ u तथा v, 'x' के फलन हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अर्थात् दो फलनों के गुणनफल का अवकल गुणांक

= प्रथम फलन × द्वितीय फलन का अवकल गुणांक + द्वितीय फलन × प्रथम फलन का अवकल गुणांक

(ii) दो फलनों के भागफल का अवकल गुणांक (Derivative of the Quotient of Two Functions)

यदि $f(x)$ तथा $g(x)$ दो अवकलनीय फलन हों तथा $g(x) \neq 0$, तो

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{\{g(x)\}^2}$$

उपरोक्त परिणाम को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2},$$ जहाँ u तथा v, 'x' के फलन हैं।

अर्थात् दो फलनों के भागफल का अवकल गुणांक

$$= \frac{\text{हर} \times \text{अंश का अवकल गुणांक} - \text{अंश} \times \text{हर का अवकल गुणांक}}{(\text{हर})^2}$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. $e^x \sin x + x^n \cos x$ को x के सापेक्ष अवकलित करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]**

हल : माना $y = e^x \sin x + x^n \cos x$ तो $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x \sin x) + \frac{d}{dx}(x^n \cos x)$

$$= \left(e^x \frac{d}{dx}\sin x + \sin x \frac{d}{dx}e^x\right) + \left(x^n \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}x^n\right)$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x + x^n(-\sin x) + n\,x^{n-1} \times \cos x$$

$$= e^x(\cos x + \sin x) + x^{n-1}(n\cos x - x\sin x)$$ उत्तर

उदाहरण 2. $x \sec x$ को x के सापेक्ष अवकलित करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]**

हल : माना $y = x \sec x$

तो $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} x \sec x = x\frac{d}{dx}\sec x + \sec x \frac{d}{dx}x = x \sec x \,.\, \tan x + \sec x = \sec x\,(x \tan x + 1)$ उत्तर

उदाहरण 3. $\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ को x के सापेक्ष अवकलित करें।

[उ प्र० डिप्लोमा 2004]

माना $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x+1)\frac{d}{dx}(e^x-1) - (e^x-1)\frac{d}{dx}(e^x+1)}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)(e^x-0) - (e^x-1)(e^x+0)}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$ उत्तर

उदाहरण 4. $\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$ को x के सापेक्ष अवकलित करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]

हल : माना $y = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\tan x)\frac{d}{dx}(1-\tan x) - (1-\tan x)\frac{d}{dx}(1+\tan x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1+\tan x)\{0-\sec^2 x\} - (1-\tan x)(0+\sec^2 x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{-\sec^2 x(1+\tan x) - \sec^2 x(1-\tan x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{-\sec^2 x - \sec^2 x.\tan x - \sec^2 x + \sec^2 x \tan x}{(1+\tan x)^2} = \frac{-2\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$ उत्तर

नोट :

- $y = \frac{1-\tan x}{1+\tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = -\sec^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

उदाहरण 5. $\cot x$ को x के सापेक्ष अवकलित करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2012, 17(S)]**

माना $y = \cot x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\cos x}{\sin x}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{\sin x \frac{d}{dx}\cos x - \cos x \frac{d}{dx}\sin x}{(\sin x)^2} = \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\mathrm{cosec}^2 x$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\cot x = -\mathrm{cosec}^2 x$$ उत्तर

उदाहरण 6. यदि $\sin y = x \sin(a+y)$ तो सिद्ध करें $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$. **[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]**

हल : दिया गया फलन $\sin y = x\sin(a+y)$ या $x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)}$

दोनों तरफ x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{dx}{dx} = \frac{\sin(a+y)\frac{d}{dx}\sin y - \sin y \frac{d}{dx}\sin(a+y)}{\{\sin(a+y)\}^2}$$

या $$1 = \frac{\sin(a+y)\cos y \frac{dy}{dx} - \sin y \cos(a+y)\frac{dy}{dx}}{\sin^2(a+y)}$$

या $$\sin^2(a+y) = \frac{dy}{dx}\{\sin(a+y)\cos y - \sin y\cos(a+y)\}$$

या $$\sin^2(a+y) = \frac{dy}{dx}\{\sin(a+y-y)\}$$ या $$\sin^2(a+y) = \frac{dy}{dx}\sin a$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$ सिद्ध हुआ।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

प्रमुख सूत्र

(i) $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ (ii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$, जहाँ u तथा v x के फलन हैं।

प्रश्नावली 17.3

निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात करें :

1. $e^x \sin x$

2. $e^{ax} \cos(bx + c)$

3. $e^x \cos x + \cos x \log x$

4. $e^x \sin x + x^2 \cos x$

5. $x e^x \sin x$

6. $x^3 \log_e x$

7. $\frac{\tan x + \cot x}{\log_e x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2000]**

8. $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1998]**

9. $\frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1992, 17(S)]**

10. $\frac{\sec x - \operatorname{cosec} x}{\sec x + \operatorname{cosec} x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1985]**

11. $\frac{\cot x}{x + e^x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1985]**

12. $\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1984]**

13. $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1983]**

14. $\frac{2 + 5^x}{2 - 5^x}$

15. (i) $\frac{2x + 3}{x^2 - 5}$ (ii) $\frac{x^3 + 2}{x + 1}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1983, 17(SB)]**

(iii) $\frac{3x^2 + 2}{5x - 7}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]**

16. $\frac{x^2 + 5x - 6}{4x^2 - x + 3}$

17. $\cot x$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2012, 17(S)]**

18. $\sec x$ **19.** $\tan x$ **20.** $\operatorname{cosec} x$

21. $x \tan x$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]**

उत्तरमाला

1. $e^x(\sin x + \cos x)$ **2.** $e^{ax}\{(a\cos(bx + c) - b\sin(bx + c)\}$

3. $e^x(\cos x - \sin x) + \frac{1}{x}\cos x - \sin x \log x$

4. $e^x(\sin x + \cos x) + 2x\cos x - x^2 \sin x$

5. $e^x \sin x(1 + x) + xe^x \cos x$

6. $x^2 + 3x^2 \log_e x$

7. $\frac{x\log x(\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x) - (\tan x + \cot x)}{x(\log_e x)^2}$

8. $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$

9. $\frac{2\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x - \tan x}$

10. $\frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

11. $-\dfrac{(x+e^x)\operatorname{cosec}^2 x+\cot x(1+e^x)}{(x+e^x)^2}$ **12.** $\dfrac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$ **13.** $\dfrac{2}{1+\sin 2x}$

14. $\dfrac{4.5^x \log_e 5}{(2-5^x)^2}$ **15.** (i) $-2\dfrac{(x^2+3x+5)}{(x^2-5)^2}$ (ii) $\dfrac{2x+3x^2-2}{(x+1)^2}$ (iii) $\dfrac{15x^2-42x-10}{(5x-7)^2}$

16. $\dfrac{9+54x-21x^2}{(4x^2-x+3)^2}$ **17.** $-\operatorname{cosec}^2 x$ **18.** $\sec x.\tan x$ **19.** $\sec^2 x$

20. $-\operatorname{cosec} x.\cot x$ **21.** $\tan x+x\cos^2 x$

विभिन्न प्रकार के फलनों के अवकल गुणांक
(Differentiation of Different Types of Functions)

17.7 फलनों के फलन का अवकल गुणांक (D.C. of Function of a Function)

ऐसे फलन जो सीधे चर पर निर्भर होने की बजाय दूसरे फलन पर निर्भर हों, फलनों के फलन कहलाते हैं। जैसे : $e^{(5x+6)}$ पर विचार करें। यहाँ $5x+6$ सर्वप्रथम x का फलन है। यदि $u=5x+6$ तो $y=e^u$ अत: y, u का फलन है, इस प्रकार y, u का फलन है तथा u, x का फलन है। इस स्थिति में हम y को फलनों का फलन कहते हैं।

17.7.1 श्रृंखला नियम (Chain Rule)

यदि y, u का फलन है तथा u, x का फलन है, तो $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$

यह अवकलन का श्रृंखला नियम (chain rule) कहलाता है।

इसी तरह यदि $y=f_1(u), u=f_2(v), v=f_3(w), w=f_4(x)$

तो $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dv}\times\frac{dv}{dw}\times\frac{dw}{dx}$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. यदि $y=e^{(5x+6)}$ तो $\dfrac{dy}{dx}$ का मान बतायें।

हल : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}e^{(5x+6)}$

$$=\frac{d\{e^{(5x+6)}\}}{d\{(5x+6)\}}\times\frac{d}{dx}(5x+6)=e^{(5x+6)}\times 5$$

$\therefore$ $\dfrac{dy}{dx}=5e^{(5x+6)}$

विकल्प : माना $5x+6=u$ $\therefore$ $y=e^u$ अब $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}=e^u\dfrac{d}{dx}(5x+6)=e^u\times 5=5e^{5x+6}$

उदाहरण 2. यदि $y=\sin(x^2e^x)$ तो $\dfrac{dy}{dx}$ का मान बतायें **[उ० प्र० डिप्लोमा 1995]**

हल : माना $u=x^2e^x$ तथा $y=\sin u$ $\therefore$ $\dfrac{dy}{du}=\cos u=\cos(x^2e^x)$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\cos(x^2e^x)\times\frac{d}{dx}(x^2e^x)$$

$$=\cos(x^2e^x)\times\left[x^2\frac{d}{dx}e^x+e^x\frac{d}{dx}x^2\right]=\cos(x^2e^x)[e^x x^2+e^x\times 2x]$$

अर्थात् $\frac{dy}{dx}=xe^x\cos(x^2e^x)(x+2)$ **उत्तर**

उदाहरण 3. यदि $y=\log(x+\sqrt{x^2-a^2}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2000, 02]**

हल : यहाँ $u=x+\sqrt{x^a-a^2}$ तथा $y=\log u$ $\therefore$ $\frac{dy}{du}=\frac{1}{u}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\times\frac{d}{dx}(x+\sqrt{x^2-a^2})$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\left[\frac{d}{dx}x+\frac{d}{dx}(x^2-a^2)^{1/2}\right]$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\left[1+\frac{1}{2}(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}-1}\times 2x\right]=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\left[1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\times\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$ **उत्तर**

उदाहरण 4. यदि $y=\log_{10}x+\log_x 10+\log_{10}10+\log_x x$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान बतायें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]

हल : यदि $y=\log_{10}x+\log_x 10+\log_{10}10+\log_x x$

$\Rightarrow$ $y=\log_e x\times\log_{10}e+\log_e 10\times\log_x e+1+1$

[$\because$ $\log_{10}x=\log_e x\times\log_{10}e$ तथा $\log_x 10=\log_e 10\times\log_x e$]

$\Rightarrow$ $y=\log_{10}e\log_e x+\frac{\log_e 10}{\log_e x}+2$ [$\because$ $\log_e x\times\log_x e=1$]

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\log_{10}e\times\frac{1}{x}+\log_e 10\frac{d}{dx}(\log_e x)^{-1}+\frac{d}{dx}(2)$$

$$=\frac{\log_{10}e}{x}+\log_e 10\times(-1)(\log x)^{-1-1}\times\frac{1}{x}+0$$

$$=\frac{1}{x\log_e 10}-\frac{\log_e 10}{x(\log x)^2}$$ $\left[\because \log_{10}e=\frac{1}{\log_e 10}\right]$ **उत्तर**

प्रश्नावली 17.4

निम्नलिखित (प्रश्न 1 से 23) अवकल गुणांक प्राप्त करें।

1. $(2x+3)^5$ **2.** e^{3x+4} **3.** $\sin x^2$ **4.** $\tan x^3$

5. $\cos^3 x$ **6.** $\sec^2 x$ **7.** $\sin x^n$ **8.** $\sin(x^2e^x)$

9. $(2x+a)^2\sin 5x$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1995]**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

10. $e^{-3x}\sin^2 3x$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1997]**

11. $\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ **12.** $\sin x^\circ$ **13.** $\sec x^\circ$ **14.** $e^{ax}\cos(bx+c)$

15. $e^{ax}\sin(bx+c)$ **16.** $\log\sec(ax+b)^3$ **17.** $\log x^x$ **18.** $\log\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

19. $\sqrt{\sin(\log x)}$ **20.** $4\sin x^2+\log(5\sin x+6)$ **21.** $\tan^2\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$

22. $\log(\sin x)^{\cos x}$ **23.** $\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{e^{2x}-e^{-2x}}$

24. यदि $y=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ तो दिखायें $(1-x^2)\frac{dy}{dx}+y=0$

25. यदि $y=\sqrt{\frac{\sec x-\tan x}{\sec x+\tan x}}$ तो दिखायें कि $\frac{dy}{dx}=\sec x(\tan x+\sec x)$.

26. यदि $u=b\sin v,\ v=\frac{1}{a}\sin w,\ w=\frac{x^2}{a}$ तो $\frac{du}{dx}$ का मान बतायें।

[संकेत : $\frac{du}{dx}=\frac{du}{dv}\times\frac{dv}{dw}\times\frac{dw}{dx}$]

उत्तरमाला

1. $10(2x+3)^4$ **2.** $3e^{3x+4}$ **3.** $2x\cos x^2$ **4.** $3x^2\sec^2 x^3$

5. $-3\sin x\cos^2 x$ **6.** $2\sec^2 x.\tan x$ **7.** $n x^{n-1}\cos x^n$

8. $xe^x(x+2)\cos(x^2e^x)$ **9.** $(2x+a)\{5(2x+a)\cos 5x+4\sin 5x\}$

10. $3e^{-3x}\sin 3x(2\cos 3x-\sin 3x)$ **11.** $\sec x$ **12.** $\frac{\pi}{180}\cos x^\circ$

13. $\frac{\pi}{180}\sec x^\circ\tan x^\circ$ **14.** $e^{ax}\{(a\cos(bx+c)-b\sin(bx+c)\}$

15. $e^{ax}\{a\sin(bx+c)+b\cos(bx+c)\}$ **16.** $3a(ax+b)^2\tan(ax+b)^3$

17. $1+\log x$ **18.** $\sec x$

19. $\frac{\cos(\log x)}{2x\sqrt{\sin(\log x)}}$ **20.** $8x\cos x^2+\frac{5\cos x}{5\sin x+6}$

21. $2\pi x\tan\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)\sec^2\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$ **22.** $-\sin x\log\sin x+\cos x.\cot x$

23. $\frac{-8}{(e^{2x}-e^{-2x})^2}$ **26.** $\frac{2bx}{a^2}\cos\left(\frac{1}{a}\sin\frac{x^2}{a}\right)\cos\frac{x^2}{a}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

लघुगणकीय अवकलन (Logarithmic Differentiation)

17.8 लघुगणकीय अवकलन (Logarithmic Differentiation)

यदि ऐसे फलन का अवकल गुणांक ज्ञात करना हो, जिसका घातांक एक चर राशि हो अथवा फलन दो या दो से अधिक फलनों के गुणनफल या भागफल के रूप में लिखा गया हो, तो फलन का लघुगणक लेकर अवकलन करने से अवकलन की प्रक्रिया सरल हो जाती है।

कार्य विधि : इसके लिए निम्न प्रक्रिया अपनाई जाती है :

I. x में दिए गए फलन को y मान लें।

II. दोनों तरफ, वाम एवं दक्षिण पक्ष, का लघुगणक लेकर सरल रूप में लिखें।

III. (II) से प्राप्त राशि के दोनों पक्षों का अवकलन करें, इससे वाम पक्ष में $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$ मिलेगा।

IV. y को दक्षिण पक्ष में ले जाकर गुणा करें। इससे $\frac{dy}{dx}$ अर्थात् फलन का अवकल गुणांक प्राप्त हो जाएगा।

17.8.1 लघुगणक से सम्बन्धित महत्वपूर्ण सूत्र

(i) $\log(m^n) = n \log m$

(ii) (a) $\log(m \times n) = \log m + \log n$ (b) $\log(m \times n \times r \times \ldots) = \log m + \log n + \log r + \ldots$

(iii) $\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$ (iv) $\log_a b \times \log_b a = 1$

(v) $\log_e e = 1$ (iv) $\log_x x = 1$ (vii) $\log(m+n) \neq \log m + \log n$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. यदि $y = x^y$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2000, 2004]**

हल : दिया गया है $y = x^y$

$\therefore \quad \log_e y = \log_e x^y \quad \Rightarrow \quad \log_e y = y \log_e x$

अवकलित करने पर, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = y \times \frac{1}{x} + \log_e x \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{y} - \log_e x\right]\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1 - y\log_e x}{y}\right]\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(1 - y\log_e x)}$ **उत्तर**

उदाहरण 2. यदि $y = x^{x^{x^{\cdots\infty}}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y\log x}$. **[उ० प्र० डिप्लोमा 2002]**

हल : प्रश्न से $y = x^{x^{x^{\cdots\infty}}} = x^y$ अब ऊपर की भाँति हल करें।

उदाहरण 3. $e^{x\sec x}$ को x के सापेक्ष अवकलित करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2002]**

हल : माना $y = e^{x\sec x}$

दोनों तरफ log लेने पर $\log_e y = x\sec x \log_e e = x \sec x$ $[\because \log_e e = 1]$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

दोनों तरफ x के सापेक्ष अवकल करने पर, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\sec x \,.\, \tan x + \sec x$ उत्तर

या $\frac{dy}{dx} = y\sec x\,(x\tan x + 1) = e^{x\sec x}\,.\,\sec x\,(x\tan x + 1)$ उत्तर

उदाहरण 4. फलन $e^x.\log_e x.\tan x$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिये। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1998]**

हल : माना $y = e^x\,.\log_e x\,.\tan x$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर, $\log_e y = x\log_e e + \log_e(\log_e x) + \log_e \tan x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{\log_e x}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{\tan x}(\sec^2 x)$

$$= 1 + \frac{1}{x\log_e x} + \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{1}{x\log_e x} + \frac{1}{\sin x\cos x}$$

$$= 1 + \frac{1}{x\log_e x} + 2\operatorname{cosec} 2x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = y\left[1 + \frac{1}{x\log_e x} + 2\operatorname{cosec} 2x\right] = e^x\log_e x\tan x\left[1 + \frac{1}{x\log x} + 2\operatorname{cosec} 2x\right]$$ उत्तर

उदाहरण 5. फलन $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

हल : माना $y = \frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$

$$\Rightarrow \quad \log y = \log\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)} = \log 1 - \log_e(x+a) - \log_e(x+b) - \log_e(x+c)$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} - \frac{1}{x+c}$

या $\frac{dy}{dx} = -y\left[\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c}\right] = -\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}\left[\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c}\right]$ उत्तर

उदाहरण 6. फलन $(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2007]**

हल : यदि $u = (\sin x)^{\cos x}$ तो $\log u = \cos x\,.\,\log\sin x$

$\therefore \quad \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \cos x\,.\,\frac{1}{\sin x}\,.\,\cos x + (\log\sin x)(-\sin x)$ [दोनों तरफ अवकलन से]

या $\frac{du}{dx} = u\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\log\sin x\right] = (\sin x)^{\cos x}\left[\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\log\sin x\right]$

पुन: यदि $v = (\cos x)^{\sin x}$ तो $\log v = \sin x\log\cos x$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \sin x\,.\,\frac{1}{\cos x}(-\sin x) + (\log\cos x)\,.\,\cos x$$

या $\frac{dv}{dx} = v\left[-\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x\log\cos x\right] = (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\log\cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$

$\therefore$ अभीष्ट अवकल गुणांक $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$= (\sin x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \log \sin x\right) + (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x \log \cos x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$$ उत्तर

प्रश्नावली 17.5

निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात करें।

1. x^x [उ० प्र० डिप्लोमा 1992, 2001, 2002]

2. $x^{\cos x}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1999, 2017(S)]

3. 10^{10^x}

4. $(1+\cos x)^x$

5. $(\sin x)^{\cos x}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1987, 95, 2017(O)]

6. $(\cos x)^{\log x}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1995]

7. $(\sin x)^{\log x}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1985]

8. $(x-3)(x-4)(x-5)$

9. $\sin x \cdot \sin 2x \sin 3x$

10. $\text{cosec}\, x \cdot \text{cosec}\, 3x\, \text{cosec}\, 5x$

11. $(\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2007]

12. (i) $(\sin x)^x + x^{\log x}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1999]

(ii) $(x \sin x)^x$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2016(S)]

13. (i) $\dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+2)^3 e^x}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1990, 2016]

(ii) $\dfrac{3^x (x+1)^3 \tan x}{(x-3)^2 e^{2x}}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]

(iii) $\dfrac{(x+3)^{1/3}(x+5)^{2/3}}{(x+4)^{1/2}(x-3)^{1/4}}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]

14. $x^x + a^x + x^a + a^a$

15. यदि $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, तो सिद्ध करें कि $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} + y = 0.$

16. यदि $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ हो, तो $\dfrac{dy}{dx}$ तो दिखाइये कि $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\log \sin y + y\tan x}{\log \cos x - x\cot y}$

17. यदि $(\sin y)^x = a$, तो $\dfrac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए। [उ० प्र० डिप्लोमा 2002]

उत्तरमाला

1. $x^x(1+\log x)$

2. $x^{\cos x}\left\{\dfrac{1}{x}\cos x - \sin x \log x\right\}$

3. $10^x\, 10^{10^x}(\log_e 10)^2$

4. $(1+\cos x)^x\left\{\log(1+\cos x) - \dfrac{x \sin x}{1+\cos x}\right\}$

5. $(\sin x)^{\cos x - 1}(\cos^2 x - \sin^2 x \log \sin x)$

6. $(\cos x)^{\log x}\left\{\dfrac{\log \cos x}{x} - \tan x \log x\right\}$

7. $(\sin x)^{\log x}\left\{\dfrac{\log \sin x}{x} + \log x \cot x\right\}$

8. $(x-3)(x-4)(x-5)\left\{\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x-4} + \dfrac{1}{x-5}\right\}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

9. $\sin x \sin 2x \sin x\, 3x \{\cot x + 2\cot 2x + 3\cot 3x\}$

10. $-\operatorname{cosec} x \operatorname{cosec} 3x \operatorname{cosec} 5x \{\cot x + 3\cot 3x + 5\cot 5x\}$

11. $(\sin x)^{\cos x} \{\cos x . \cot x - \sin x \log \sin x\} + (\cos x)^{\sin x} \{\cos x \log \cos x - \sin x . \tan x\}$

12. (i) $(\sin x)^x (x \cot x + \log \sin x) + x^{\log x}\left(\dfrac{2\log x}{x}\right)$

(ii) $(x \sin x)^x [1 + \log x + x\cot x + \log \sin x]$

13. (i) $\dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+2)^3 e^x}\left[\dfrac{2}{x+1} + \dfrac{1}{2(x-1)} - \dfrac{3}{x+2} - 1\right]$

(ii) $\dfrac{3^x (x+1)^3 \tan x}{(x-3)^2 e^{2x}}\left[\log 3 + \dfrac{3}{x+1} + \dfrac{2}{\sin 2x} - \dfrac{2}{x-3} - 1\right]$

(iii) $(x+3)^{1/3}(x+5)^{2/3}\left[\dfrac{1}{3(x+3)} + \dfrac{2}{3(x+5)} - \dfrac{1}{2(x+4)} - \dfrac{1}{4(x-3)}\right]$

14. $x^x(1+\log x) + a^x \log_e a + a x^{a-1}$ **17.** $\dfrac{-\log \sin y}{x \cot y}$

17.9 अस्पष्ट फलन (Implicit Function)

ऐसे फलन, जिनमें y तथा x (चर राशि) के बीच ऐसा संबंध हो कि y को x के पदों में सरलता से व्यक्त करना संभव न हो, अस्पष्ट फलन कहलाते हैं।

जैसे : $x^m y^n = (x+y)^{m+n}$

कार्य विधि : (i) प्रत्येक पद को x के सापेक्ष अवकलित करें।

(ii) $\dfrac{dy}{dx}$ वाले पद को बायीं ओर तथा शेष पद दायीं ओर रखें तथा $\dfrac{dy}{dx}$ का मान निकालें।

(iii) यदि आवश्यक हो, तो चर घातांक या कई फलनों के गुणनफल या भागफल वाले प्रश्नों में पहले दोनों पक्षों का लघुगणक निकालकर अवकलन की क्रिया करें।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. यदि $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, तो $\dfrac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया फलन $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

दोनों ओर x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$a\frac{d}{dx}(x^2) + 2h.\frac{d}{dx}(xy) + b.\frac{d}{dx}(y^2) + 2g.\frac{d}{dx}(x) + 2f.\frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(c) = 0$$

या $$a(2x) + 2h\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + b\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + 2g.1 + 2f.\frac{dy}{dx} + 0 = 0$$

या $$2(hx + by + f)\frac{dy}{dx} = -2(ax + hy + g)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(ax + hy + g)}{(hx + by + f)}$$ उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 2. यदि $x^y = e^{x-y}$, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$.

[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]

हल : यहाँ $x^y = e^{x-y}$, दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$y \log_e x = (x-y)\log_e e \text{ या } y\log_e x = x - y \quad \text{या} \quad y(1+\log x) = x \quad \text{या} \quad y = \frac{x}{1+\log x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x).1 - x(1/x)}{(1+\log x)^2} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

उदाहरण 3. यदि $x^m y^n = (x+y)^{m+n}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करो।

हल : दिया गया फलन $x^m y^n = (x+y)^{m+n}$ $\quad \therefore \quad \log x^m y^n = \log (x+y)^{m+n}$

या $\quad m\log x + n\log y = (m+n)\log(x+y)$

x के सापेक्ष दोनों ओर अवकलित करने पर, $m \times \frac{1}{x} + n \times \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = (m+n) \times \frac{1}{x+y} \times \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$

या $\quad \left(\frac{n}{y} - \frac{m+n}{x+y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{m+n}{x+y} - \frac{m}{x}$ $\quad$ या $\quad \left(\frac{nx+ny-my-ny}{y(x+y)}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{mx+nx-mx-my}{x(x+y)}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(nx-my)}{x(nx-my)} = \frac{y}{x}$$

उत्तर

उदाहरण 4. यदि $x^y = y^x$ तो सिद्ध करो कि $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x\log y - y)}{x(y\log x - x)}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]

हल : दिया गया फलन $x^y = y^x$ $\quad \therefore \quad y\log x = x\log y$ $\quad$ [दोनों तरफ log लेने पर]

x के सापेक्ष दोनों ओर अवकलित करने पर, $y \times \frac{1}{x} + \log x \times \frac{dy}{dx} = x \times \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} + \log y \times 1$

या $\quad \left(\log x - \frac{x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \log y - \frac{y}{x}$ $\quad$ या $\quad \left(\frac{y\log x - x}{y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{x\log y - y}{x}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y(x\log y - y)}{x(y\log x - x)}$$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 5. यदि $x^y + y^x = a^b$, तो सिद्ध करो कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{yx^{y-1} + y^x \log y}{x^y \log x + xy^{x-1}}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1984, 88, 94]

हल : माना कि $x^y = u$ तथा $y^x = v$, तब $u + v = a^b$ $\quad \therefore \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0$ $\quad$ ...(1)

$\because \quad u = x^y \quad \therefore \quad \log u = y\log x$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{u} \times \frac{du}{dx} = y \times \frac{1}{x} + \log x \times \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = u\left[\frac{y}{x} + \log x\frac{dy}{dx}\right]$ $\quad$ ...(2)

पुनः $v = y^x \quad \Rightarrow \quad \log v = x\log y \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = x \times \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \log y \times 1$

$\Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = v\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right]$ $\quad$ ...(3)

(1) से, $\quad u\left[\frac{y}{x} + \log x\frac{dy}{dx}\right] + v\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right] = 0$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \quad x^y\left[\frac{y}{x}+\log x\frac{dy}{dx}\right]+y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\log y\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad yx^{y-1}+x^y\log x\frac{dy}{dx}+xy^{x-1}\frac{dy}{dx}+y^x\log y=0$$

$$\Rightarrow \quad (x^y\log x+xy^{x-1})\frac{dy}{dx}=-[yx^{y-1}+y^x\log y]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{yx^{y-1}+y^x\log y}{x^y\log x+xy^{x-1}}$$ सिद्ध हुआ।

● अनन्त श्रेणियों पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 6. यदि $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\ldots\infty}}}$, सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{2y-1}$.

[उ० प्र० डिप्लोमा 1998]

हल : दिया है, $y=\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\sqrt{\sin x+\ldots\infty}}}$

$\Rightarrow \quad y=\sqrt{\sin x+y} \quad \Rightarrow \quad y^2=\sin x+y$ [वर्ग करने पर]

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2y\frac{dy}{dx}=\cos x+\frac{dy}{dx} \Rightarrow (2y-1)\frac{dy}{dx}=\cos x \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\cos x}{2y-1}$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 7. यदि $y=a^{x^{a^{x\ldots\infty}}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2\log y}{x(1-y\log x\,.\log y)}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1985]**

हल : यहाँ $y=a^{x^{a^{x\ldots\infty}}} \Rightarrow y=a^{x^y} \Rightarrow \log y=x^y\log a$ [दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर]

$\Rightarrow \quad \log(\log y)=y\log x+\log(\log a)$ [पुन: दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर]

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\log y}\cdot\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=y\cdot\frac{1}{x}+\frac{dy}{dx}(\log x)+0 \Rightarrow \left(\frac{1}{y\log y}-\log x\right)\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1-y\log x\,.\log y}{y\log y}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2\log y}{x(1-y\log x\,.\log y)}$$ इति सिद्धम्।

उदाहरण 8. यदि $y=(\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)^{\ldots\infty}}}$ का अवकल गुणांक ज्ञात करो। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1997]**

हल : दिया गया फलन $y=(\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)^{\ldots\infty}}} \Rightarrow y=(\cos x)^y \Rightarrow \log y=y\log\cos x$

x सापेक्ष अवकलित करने पर, $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=y\times\frac{1}{\cos x}\times(-\sin x)+\log\cos x\times\frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{y}-\log\cos x\right)\frac{dy}{dx}=\frac{-y\sin x}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-y^2\tan x}{(1-y\log\cos x)}$$ उत्तर

17.10 प्राचलिक समीकरण (Parametric Equation)

जब दो चर राशियाँ x तथा y किसी तीसरी स्वतंत्र चर राशि t के पदों में व्यक्त की गई हो अर्थात् $x=f_1(t)$ तथा $y=f_2(t)$ तो ऐसे समीकरण प्राचलिक समीकरण कहलाते हैं। t समीकरण का प्राचल (Parameter) कहलाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

जैसे : $x = at^2, y = 2at$ परवलय का प्राचलिक समीकरण है। यहाँ प्राचल t है। इसी तरह $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ दीर्घवृत्त का प्राचलिक समीकरण है। यहाँ प्राचल θ है।

17.11 प्राचलिक समीकरण का अवकल गुणांक (Differential Coefficient of a Parametric Equation)

यदि $x = f_1(t), y = f_2(t)$, जहाँ t स्वतंत्र चर है तथा x एवं y परतंत्र चर राशियाँ हैं, प्राचल समीकरण हो तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}$$

अर्थात् x के सापेक्ष y का अवकल गुणांक प्राचल के सापेक्ष y तथा x के अवकल गुणांकों के भागफल से प्राप्त होता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. $x = at^2, y = 2at$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करें।

हल : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2at)\Big/\frac{d}{dt}(at^2) = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$ **उत्तर**

उदाहरण 2. यदि $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 - \cos\theta)$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करो।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1987]

हल : $\because x = a(\theta - \sin\theta) \;\therefore \frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta) \;\because y = a(1 - \cos\theta) \;\therefore \frac{dy}{d\theta} = a(0 + \sin\theta) = a\sin\theta$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \frac{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}{2\sin^2(\theta/2)} = \cot\frac{\theta}{2}$$ **उत्तर**

उदाहरण 3. (i) $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करें जबकि $x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right), y = a\sin t$

तथा (ii) दिखायें $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\sec^3 t\tan t$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]

हल : यहाँ $y = a\sin t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = a\cos t$ तथा $x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = a\left(-\sin t + \frac{1}{\tan(t/2)} \times \sec^2\frac{t}{2} \times \frac{1}{2}\right) = a\left(-\sin t + \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)} \times \frac{1}{\cos^2(t/2)} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= a\left(-\sin t + \frac{1}{2\sin(t/2)\cos\frac{t}{2}}\right) = a\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) = a\left(\frac{-\sin^2 t + 1}{\sin t}\right) = a\left(\frac{\cos^2 t}{\sin t}\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{a\cos t}{a\frac{\cos^2 t}{\sin t}} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t$$ **उत्तर**

(ii) पुन: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\tan t = \sec^2 t\,\frac{dt}{dx} = \sec^2 t \times \frac{\sin t}{a\cos^2 t}$ $\left[\because \frac{dx}{dt} = \frac{1}{dx/dt}\right]$

$$= \frac{1}{a}\sec^3 t\tan t$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

प्रश्नावली 17.6

निम्नलिखित प्रश्नों (1 से 7 तक) के लिए $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करें।

1. $3x^2 + 5y^2 = 6$
2. $x^2 + y^2 + 6xy + 5x - 6y + 7 = 0$
3. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
4. $x^n + y^n = a^n$
5. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$
6. $x^2 = 4ay$
7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

8. यदि $y^x = x^y$ तो सिद्ध करें $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x\log y - y)}{x(y\log x - x)}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1984]

9. यदि $(\sin x)^y = (\cos y)^x$ तो सिद्ध कीजिये $\frac{dy}{dx} = \frac{\log\cos y - y\cot x}{\log\sin x + x\tan y}$

10. यदि $y = x^{x^{x\ldots\infty}}$ तो सिद्ध करें कि $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y\log x}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2002]

11. (i) यदि $y\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-y^2} = 1$ तो सिद्ध करें $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$

(ii) यदि $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$ तो सिद्ध करें $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2007]

12. यदि $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ तो सिद्ध करें कि $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2007]

13. यदि $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots\infty}}}$ तो सिद्ध करें कि $(2y-1)\frac{dy}{dx} = 1$

14. यदि $y = (\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)\ldots\infty}}$ तो सिद्ध करें कि $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2\cot x}{1 - y\log\sin x}$.

15. (i) यदि $y = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \ldots\infty}}}$ तो सिद्ध करें कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{1-2y}$.

(ii) यदि $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \ldots\infty}}}$ तो $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$. [उ० प्र० डिप्लोमा 1998]

16. यदि $y = (\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x\ldots\infty)}}$ तो सिद्ध करें $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2\tan x}{1 - y\log\cos x}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1997]

निम्न प्राचल समीकरण में $\frac{dy}{dx}$ का मान बताइये :

17. यदि $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1986, 88]

18. यदि $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$

19. $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t - \frac{1}{t}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1989]

20. $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

21. $x = a\left(\cos t + \log_e \tan \frac{t}{2}\right), y = a \sin t$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1985, 2007, 09]

22. $x = \log t + \sin t, y = e^t + \cos t$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1983]

23. $x = at^2, y = 2at$

24. $x = a \sin 2\theta (1 + \cos 2\theta)$ तथा $y = b \cos 2\theta (1 - \cos 2\theta)$

25. यदि $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, तो $t = \frac{1}{2}$ पर $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करें।

उत्तरमाला

1. $-\frac{3}{5}\frac{x}{y}$ **2** $-\frac{(2x+6y+5)}{2(3x+y-3)}$ **3.** $-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$ **4.** $-\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$

5. $-\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$ **6.** $\frac{1}{2a}x$ **7.** $-\frac{b^2 x}{a^2 y}$ **17.** $\tan \frac{t}{2}$

18. $\tan \frac{3t}{2}$ **19.** $\frac{t^2+1}{t^2-1}$ **20.** $-\tan \theta$ **21.** $\tan t$

22. $t\frac{(e^t - \sin t)}{(1+t\cos t)}$ **23.** $\frac{1}{t}$ **24.** $\frac{b}{a}\tan\theta$ **25.** $\frac{5}{4}$

17.12 प्रतिलोम फलनों का अवकल गुणांक (Differential Coefficient of Inverse Functions)

1. $\sin^{-1} x$ का अवकल गुणांक ज्ञात करना (To Find Differential Coefficient of $\sin^{-1} x$) :

माना कि $y = \sin^{-1} x$ तो $x = \sin y$

y के सापेक्ष अवकलित करने पर, $\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\sin y) = \cos y$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \therefore \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. $\cos^{-1} x$ का अवकल गुणांक ज्ञात करना (To find Differential Coefficient of $\cos^{-1} x$) :

माना कि $y = \cos^{-1} x$ तो $x = \cos y$

y के सापेक्ष अवकलित करने पर, $\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\cos y) = -\sin y$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \therefore \frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. $\tan^{-1} x$ का अवकल गुणांक ज्ञात करना (To Find Differential Coefficient of $\tan^{-1} x$) :

माना कि $y = \tan^{-1} x$ तो $x = \tan y$

y के सापेक्ष अवकलित करने पर, $\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\tan y) = \sec^2 y$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \qquad \therefore \frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

4. $\cot^{-1} x$ का अवकल गुणांक ज्ञात करना (To Find Differential Coefficient of $\cot^{-1} x$) :

माना कि $y = \cot^{-1} x$ तो $x = \cot y$

y के सापेक्ष अवकलित करने पर, $\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\cot y) = -\operatorname{cosec}^2 y$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = \frac{-1}{1+x^2} \quad \therefore \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

5. $\sec^{-1} x$ का अवकल गुणांक ज्ञात करना (To Find Differential Coefficient of $\sec^{-1} x$) :

माना कि $y = \sec^{-1} x$ तो $x = \sec y$

y के सापेक्ष अवकलित करने पर, $\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}(\sec y) = \sec y \tan y$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y} = \frac{1}{\sec y\sqrt{\sec^2 y - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

6. $\operatorname{cosec}^{-1} x$ का अवकल गुणांक ज्ञात करना (To Find Differential Coefficient of $\operatorname{cosec}^{-1} x$):

माना कि $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$ तो $x = \operatorname{cosec} y$

y के सापेक्ष अवकलित करने पर, $\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} y) = -\operatorname{cosec} y \cot y$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\operatorname{cosec} y \cot y} = \frac{-1}{\operatorname{cosec} y\sqrt{\operatorname{cosec}^2 y - 1}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. $\frac{dy}{dx}$ का मान निकालें :

(i) $y = e^{\tan^{-1} x}$ (ii) $\cot^{-1}(\tan x)$

हल : (i) दिया गया फलन $y = e^{\tan^{-1} x}$

x के सापेक्ष अवकलन से

$$\frac{dy}{dx} = e^{\tan^{-1} x} \frac{d}{dx} \tan^{-1} x = e^{\tan^{-1} x} \times \frac{1}{1+x^2} = \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2}$$

(ii) दिया गया फलन $\cot^{-1}(\tan x)$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+\tan^2 x} \times \frac{d}{dx}\tan x = -\frac{1}{\sec^2 x} \times \sec^2 x = -1$$

Aliter : $y = \cot^{-1}(\tan x) = \cot^{-1}\left\{\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\} = \frac{\pi}{2} - x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 - 1 = -1$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

उदाहरण 2. x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात करें।

(i) $x \cos^{-1} x$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]**

(ii) $x \log (\tan^{-1} x)$

हल : (i) माना $y = x \cos^{-1} x$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{d}{dx} \cos^{-1} x + \cos^{-1} x \frac{d}{dx} x = x \times \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \cos^{-1} x \times 1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \cos^{-1} x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(ii) माना $y = x \log (\tan^{-1} x)$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x \frac{d}{dx} \log \tan^{-1} x + \log \tan^{-1} x \frac{d}{dx} x$$

$$= x \times \frac{1}{\tan^{-1} x} \times \frac{1}{1+x^2} + \log \tan^{-1} x \times 1$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1+x^2) \tan^{-1} x} + \log \tan^{-1} x$$

उदाहरण 3. यदि $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ तो सिद्ध करें $(1-x^2) \frac{dy}{dx} = xy + 1$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1991, 2002]

हल : दिया गया फलन $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{1-x^2}\, y = \sin^{-1} x \quad \Rightarrow \quad (1-x^2) y^2 = (\sin^{-1} x)^2$ [दोनों तरफ वर्ग करने पर] ...(1)

(1) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$(1-x^2)\, 2y \frac{dy}{dx} + y^2 (0-2x) = 2 \sin^{-1} x \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow \quad 2y (1-x^2) \frac{dy}{dx} - y^2\, 2x = 2y$ [(1) से]

$\Rightarrow \quad (1-x^2) \frac{dy}{dx} - xy = 1 \quad \Rightarrow \quad (1-x^2) \frac{dy}{dx} = xy + 1$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 4. यदि $y = \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान बतायें।

हल : यहाँ $y = \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}} = \tan^{-1} \left(\tan \frac{x}{2}\right) \quad \therefore \quad y = \frac{x}{2}$

अतः x के सापेक्ष अवकलन से, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} x = 1$ उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

उदाहरण 5. फलन $\sec^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$ का अवकल गुणांक ज्ञात करें।

हल : माना $y=\sec^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$

$$y=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right) \quad \left[\because \sec^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1}{x}\right]$$

या $y=\frac{\pi}{2}$ $\left[\because \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ **उत्तर**

रूपान्तरण द्वारा अवकलन : कई बार त्रिकोणमितीय या बीजीय प्रतिस्थापन एवं सूत्रों के प्रयोग से फलन का रूप सरल हो जाता है तथा इससे अवकलन की प्रक्रिया सहज हो जाती है। यह विधि **रूपान्तरण विधि** कहलाती है।

Type II : रूपान्तरण पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 6. यदि $y=\tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान बतायें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]

हल : यहाँ $y=\tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}$ में $x=\tan\theta$ रखने पर, जिससे $\theta=\tan^{-1}x$

$$y=\tan^{-1}\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\tan^{-1}\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}=\tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right\} \text{ अर्थात् } y=\frac{\pi}{4}+\theta$$

$[\because \tan^{-1}(\tan x)=x]$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{d\theta}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0+\frac{d}{dx}\tan^{-1}x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}$$ **उत्तर**

उदाहरण 7. यदि $y=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिये।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]

हल : माना $x=\sin\theta$, तब $y=\sin^{-1}(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta})=\sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta)$

$$=\sin^{-1}(\sin 2\theta)=2\theta=2\sin^{-1}x$$

अतः $$\frac{dy}{dx}=2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$ **उत्तर**

उदाहरण 8. $\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1992]

हल : $y=\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right]=\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}\right]$ [$x=\tan\theta$ रखने पर]

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{\left(2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\right\} = \tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2}$$

अत: $y = \frac{1}{2}\tan^{-1} x$ $\quad [\because x = \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1} x]$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$ उत्तर

उदाहरण 9. यदि $y = \tan^{-1}\frac{\cos x}{1+\sin x}$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1983, 87, 90]**

हल : यहाँ $y = \tan^{-1}\dfrac{\sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)}{1+\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)} = \tan^{-1}\dfrac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$

$$= \tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right\} = \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{2}\right) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$ उत्तर

उदाहरण 10. $\sin^{-1}(x\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x^2})$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना $f(x) = \sin^{-1}(x\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x^2})$

यहाँ $x = \sin A$ और $\sqrt{x} = \sin B$ रखने पर

$$f(x) = \sin^{-1}(\sin A\sqrt{1-\sin^2 B} - \sin B\sqrt{1-\sin^2 A})$$
$$= \sin^{-1}(\sin A\cos B - \sin B\cos A)$$
$$= \sin^{-1}\{\sin(A-B)\} = A - B$$
$$= \sin^{-1} x - \sin^{-1}\sqrt{x}$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$ उत्तर

Type III : किसी फलन का दूसरे फलन के सापेक्ष अवकलन

मान लिया $\quad u = f_1(x); \quad v = f_2(x)$ तो $\frac{du}{dx} = f_1'(x); \quad \frac{dv}{dx} = f_2'(x)$

$\therefore$ u का v के सापेक्ष अवकलन गुणांक

$$\frac{du}{dv} = \frac{du}{dx}\Big/\frac{dv}{dx} = \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \frac{u \text{ का } x \text{ के सापेक्ष अवकल गुणांक}}{v \text{ का } x \text{ के सापेक्ष अवकल गुणांक}}$$

उदाहरण 11. x^7 को x^3 के सापेक्ष अवकलित करें।

हल : माना $u = x^7$ तथा $v = x^3$ तो $\frac{du}{dx} = 7x^6$ तथा $\frac{dv}{dx} = 3x^2$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$\therefore \quad \frac{du}{dv} = \frac{7x^6}{3x^2} = \frac{7}{3}x^4$$ उत्तर

उदाहरण 12. $\tan^{-1} x$ का अवकल गुणांक $\sin^{-1} x$ के सापेक्ष $x = \frac{1}{2}$ पर ज्ञात कीजिए।

हल : $$\frac{d(\tan^{-1} x)}{d(\sin^{-1} x)} = \frac{\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)}{\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)} = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$$

$x = \frac{1}{2}$ पर $$\frac{d(\tan^{-1} x)}{d(\sin^{-1} x)} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$ उत्तर

उदाहरण 13. $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ का $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999, 2007]

हल : माना $v_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ तथा $v_2 = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

$x = \tan\theta$ रखने पर, $v_1 = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right) = \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1} x$

तब $$\frac{dv_1}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \quad ...(1)$$

तथा $v_2 = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta = 2\tan^{-1} x$

तब $$\frac{dv_2}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \quad ...(2)$$

$$\therefore \quad \frac{dv_1}{dv_2} = \frac{d[\tan^{-1}\{2x/(1-x^2)\}]}{d[\sin^{-1}\{2x/(1+x^2)\}]} = \frac{\frac{d}{dx}[\tan^{-1}\{2x/(1-x^2)\}]}{\frac{d}{dx}\sin^{-1}\{2x/(1+x^2)\}}$$

$$= \frac{2}{1+x^2} \times \frac{1+x^2}{2} = 1$$ [(1) तथा (2) से] उत्तर

महत्वपूर्ण सूत्र

1. प्रतिलोम फलनों के अवकल गुणांक :

1. $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1$ 2. $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1,$

3. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$ 4. $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < \infty$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

5. $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x|>1$

6. $\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x|>1$

2. एक फलन का दूसरे फलन के सापेक्ष अवकलन :

यदि $u = f_1(x)$ तथा $v = f_2(x)$ तो $\frac{du}{dv} = \frac{d\{f_1(x)\}}{dx} \Big/ \frac{d\{f_2(x)\}}{dx}$

प्रश्नावली 17.7

निम्न फलनों का x के सापेक्ष अवकल गुणांक ज्ञात करें :

1. $\sin^{-1}(\cos x)$

2. $\cos^{-1}(\sin x)$

3. $\tan^{-1}(\log x)$

4. $\sin(e^{\tan^{-1} x})$

5. $\sin(m \sin^{-1} x)$

6. $e^{\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}}$

7. $x \cos^{-1} x$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]**

8. $e^{ax} \sin^{-1} bx$

9. यदि $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान बतायें।

10. (i) यदि $y = \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1995]**

$\left[\textbf{संकेत} : \tan^{-1}\frac{1+x}{1-x} = \tan^{-1} 1 + \tan^{-1} x\right]$

(ii) यदि $\tan^{-1}\frac{4x}{1+5x^2} + \tan^{-1}\frac{2+3x}{3-2x}$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(B)]**

11. (i) यदि $y = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$ तो सिद्ध करें कि $\frac{dy}{dx} = \sin^{-1} x$

(ii) यदि $y = x\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2013]**

▸ रूपान्तरण पर आधारित प्रश्न

निम्नलिखित फलनों के लिए $\frac{dy}{dx}$ का मान निकालें, यदि

12. $y = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$

13. $y = \sin^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]**

14. $y = \sin^{-1}[2x\sqrt{1-x^2}]$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]**

15. $y = \sin^{-1}[3x - 4x^3]$

16. $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x}\right)$ **[संकेत : हर तथा अंश में $\cos x$ से भाग दें]**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

17. $y = \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}$ [संकेत : $x^2 = \cos 2\theta$ रखें]

18. $y = \sin\left\{2 \tan^{-1} \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right\}$ [संकेत : $x = \cos 2\theta$ रखें]

19. $y = \cos^{-1}\left(\dfrac{x - x^{-1}}{x + x^{-1}}\right)$ [संकेत : $x = \cot \theta$ रखें]

20. $y = \sec^{-1}\left(\dfrac{x + x^{-1}}{x - x^{-1}}\right)$ $\left[\text{सकेत : } \sec^{-1} x = \cos^{-1} \dfrac{1}{x}\right]$

21. यदि $y = \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$ तो $\dfrac{dy}{dx}$ का मान बतायें। [उ० प्र० डिप्लोमा 1992]

22. यदि $y = \cot^{-1} \dfrac{\sqrt{1+x^2} + 1}{x}$ तो $\dfrac{dy}{dx}$ का मान बतायें।

23. (i) यदि $y = \sin^{-1} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$ तो सिद्ध करें

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2(1+x^2)}$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1993]

(ii) यदि $y = \dfrac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ तो सिद्ध करें $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} = xy + 1$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1991, 2002]

एक फलन का दूसरे के सापेक्ष अवकलन

24. x^6 को x^2 के सापेक्ष अवकलित करें।

25. $\sin x$ को $\cos x$ के सापेक्ष अवकलित करें।

26. $\sin^{-1} \dfrac{2x}{1+x^2}$ को $\tan^{-1} x$ के सापेक्ष अवकलित करें।

27. $\tan^{-1} \dfrac{2x}{1-x^2}$ को $\sin^{-1} \dfrac{2x}{1+x^2}$ के सापेक्ष अवकलित करें।

28. $\cos^{-1} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ को $\sin^{-1} \dfrac{2x}{1+x^2}$ के सापेक्ष अवकलित करें।

29. $\tan^{-1} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$ को $\tan^{-1} x$ के सापेक्ष अवकलित करें।

30. $\tan^{-1} x$ का अवकल गुणांक $\sin^{-1} x$ के सापेक्ष $x = \dfrac{1}{2}$ पर ज्ञात करें।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

उत्तरमाला

1. -1

2. -1

3. $\dfrac{1}{x[1+(\log x)^2]}$

4. $\dfrac{e^{\tan^{-1} x} \cos(e^{\tan^{-1} x})}{1+x^2}$

5. $\dfrac{m}{\sqrt{1-x^2}} \cos(m \sin^{-1} x)$

6. $\dfrac{e^{\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}$

7. $\cos^{-1} x - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $\dfrac{be^{ax}}{\sqrt{1-b^2x^2}} + ae^{ax} \sin^{-1} bx$

9. $\dfrac{1}{2}$

10. (i) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (ii) $\dfrac{5}{1+25x^2}$

11. (ii) $\dfrac{y}{x}$

12. $\dfrac{2}{1+x^2}$

13. $\dfrac{-2}{1+x^2}$

14. $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

16. 1

17. $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^4}}$

18. $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

19. $\dfrac{-2}{1+x^2}$

20. $\dfrac{-2}{1+x^2}$

21. $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$

22. $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$

24. $3x^4$

25. $-\cot x$

26. 2

27. 1

28. 1

29. $\dfrac{1}{2}$

30. $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

□□□

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अध्याय 18

उत्तरोत्तर अवकलन (Successive Differentiation)

18.1 परिभाषा (Definition)

यदि $y = f(x)$ कोई फलन हो तो सामान्यत: इसका अवकल गुणांक $\frac{dy}{dx}$ स्वयं x का फलन अथवा अचर होता है, जिसे पुन: अवकलित किया जा सकता है। $\frac{dy}{dx}$ को प्रथम घात का अवकल गुणांक कहा जाता है। पुन: $\frac{dy}{dx}$ के x के सापेक्ष अवकल गुणांक अर्थात् $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ को द्वितीय घात का अवकल गुणांक कहा जाता है तथा इसे $\frac{d^2y}{dx^2}$ से सूचित किया जाता है। इसी तरह $\frac{d^2y}{dx^2}$ के अवकल गुणांक को तृतीय घात का अवकल गुणांक कहा जाता है तथा इसे $\frac{d^3y}{dx^3}$ से सूचित किया जाता है। इस प्रकार $\frac{d^ny}{dx^n}$ फलन के nवें घात के अवकल गुणांक को सूचित करता है।

यदि $y = f(x)$ हो तो $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$

को व्यक्त करने के लिये निम्न प्रतीकों का भी प्रयोग होता है :

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n;$$

या

$$Dy, D^2y, D^3y, \ldots, D^ny$$

या

$$f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots, f^n(x)$$

तथा $x = a$ पर nवें अवकल गुणांक के मान को सूचित करने के लिए $y_n(a), D^n(a), f^n(a)$ या $\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right)_{x=a}$ का प्रयोग किया जाता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. यदि $y = ax^2 + bx + c$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान बतायें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]

हल : यहाँ $y = ax^2 + bx + c$

x के सापेक्ष अवकलन से $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$

पुन: x के सापेक्ष अवकलन से $\frac{d^2y}{dx^2} = 2a \times 1 + 0 \quad \therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 2a$ **उत्तर**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 2. यदि $y = A\cos nx + B\sin nx$ तो दिखायें कि $\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$

हल : x के सापेक्ष अवकलन करने पर, $\frac{dy}{dx} = -An\sin nx + Bn\cos nx$

पुनः x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -An^2\cos nx - Bn^2\sin nx = -n^2(A\cos nx + B\sin nx) = -n^2y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$$

उदाहरण 3. यदि $y = \tan^{-1}x$ तो सिद्ध करें कि $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]**

हल : x सापेक्ष अवकलन करने पर $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)\frac{dy}{dx} = 1$

$$\Rightarrow \quad (1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}(0+2x) = 0 \quad \text{या} \quad (1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0$$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 4. $y = e^x\cos x$ तो सिद्ध करें कि $\frac{d^4y}{dx^4} + 4y = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1993]**

हल : $y = e^x\cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x\cos x - e^x\sin x = e^x(\cos x - \sin x)$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x(\cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x)$$ [x के सापेक्ष अवकलन से]

$$= e^x\{\cos x - \sin x - \sin x - \cos x\} = -2e^x\sin x$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन से $\frac{d^3y}{dx^3} = -2[e^x\cos x + e^x\sin x] = -2e^x(\cos x + \sin x)$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन से $\frac{d^4y}{dx^4} = -2[e^x(\cos x + \sin x) + e^x(-\sin x + \cos x)]$

$$= -2e^x[\cos x + \sin x - \sin x + \cos x]$$

$$= -2e^x \times 2\cos x = -4e^x\cos x = -4y$$

$$\therefore \quad \frac{d^4y}{dx^4} + 4y = 0$$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 6. यदि $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ तो दिखायें $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$. **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]**

हल : $\frac{dy}{dx} = -a\sin(\log x) \times \frac{1}{x} + b\cos(\log x) \times \frac{1}{x}$ [समीकरण के x के सापेक्ष अवकलन से]

$$\Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} = -a\sin(\log x) + b\cos(\log x)$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = -a\cos(\log x) \times \frac{1}{x} + b\{-\sin(\log x)\}\frac{1}{x}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \quad x\left[x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\right]=-[a\cos(\log x)+b\sin(\log x)]=-y$$

$$\Rightarrow \quad x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0$$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 7. यदि $y=e^{ax}\sin bx$ हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+(a^2+b^2)y=0.$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1992, 2014 (O)]

हल : समीकरण को x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$y=e^{ax}\sin bx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=e^{ax}\frac{d}{dx}(\sin bx)+\sin bx\cdot\frac{d}{dx}(e^{ax})$$

$$=be^{ax}\cos bx+ae^{ax}\sin bx$$

$$=be^{ax}\cos bx+ay \qquad \ldots(1)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}-ay=be^{ax}\cos bx \qquad \ldots(2)$$

x के सापेक्ष (1) का पुनः अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=b\left[e^{ax}\cdot\frac{d}{dx}(\cos bx)+\cos bx\cdot\frac{d}{dx}(e^{ax})\right]+a\frac{dy}{dx}$$

$$=b[-be^{ax}\sin bx+ae^{ax}\cos bx]+a\frac{dy}{dx}$$

$$=-b^2e^{ax}\sin bx+a(be^{ax}\cos bx)+a\frac{dy}{dx}$$

$$=-b^2y+a\left(\frac{dy}{dx}-ay\right)+a\frac{dy}{dx} \quad [\because y=e^{ax}\sin bx \text{ तथा (2) से}]$$

$$=2a\frac{dy}{dx}-(a^2+b^2)y$$

अतः
$$\frac{d^2y}{dx^2}-2a\frac{dy}{dx}+(a^2+b^2)y=0$$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 8. $p^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$ तो सिद्ध कीजिए कि $p+\dfrac{d^2p}{d\theta^2}=\dfrac{a^2b^2}{p^3}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1991]

हल : $\because p^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta \qquad \ldots(1)$

$$\therefore \quad 2p\frac{dp}{d\theta}=-2a^2\cos\theta\sin\theta+2b^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad p\frac{dp}{d\theta}=(b^2-a^2)\sin\theta\cos\theta \qquad \ldots(2)$$

पुनः अवकलन करने पर,

$$p\frac{d^2p}{d\theta^2}+\left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2=(b^2-a^2)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$=b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)-(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)$$

$$=(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)-p^2 \qquad [(1) \text{ से}]$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$$p\frac{d^2p}{d\theta^2}+p^2=(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)-\left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2$$

$$=(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)-\frac{(b^2-a^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{p^2}$$ [(2) से]

$$=\frac{1}{p^2}[p^2(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)-(b^2-a^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta]$$

$$=\frac{1}{p^2}[(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)(b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta)-(b^2-a^2)^2\sin^2\theta.\cos^2\theta)]$$ [(1) से]

$$=\frac{1}{p^2}[a^2b^2\cos^4\theta+a^2b^2\sin^4\theta+2a^2b^2\sin^2\theta.\cos^2\theta]$$

अर्थात् $$p\left(\frac{d^2p}{d\theta^2}+p\right)=\frac{a^2b^2}{p^2}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2=\frac{a^2b^2}{p^2}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2p}{d\theta^2}+p=\frac{a^2b^2}{p^3}$$

उदाहरण 9. यदि $y=\left\{x+\sqrt{x^2+1}\right\}^m$ तो दिखायें कि $(x^2+1)y_2+xy_1-m^2y=0$

हल : यहाँ $y=\left\{x+\sqrt{x^2+1}\right\}^m \Rightarrow \frac{dy}{dx}=m\left\{x+\sqrt{x^2+1}\right\}^{m-1}\times\frac{d}{dx}\left\{x+\sqrt{x^2+1}\right\}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=m\left\{x+\sqrt{x^2+1}\right\}^{m-1}\left\{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right\}$$

$$=m\left\{x+\sqrt{x^2+1}\right\}^{m-1}\left\{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=m\frac{\left\{x+\sqrt{x^2+1}\right\}^m}{\sqrt{x^2+1}} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{my}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+1}\,y_1=my \quad\Rightarrow\quad (x^2+1)y_1^2=m^2y^2$$

पुनः अवकलन से $$(x^2+1)\times 2y_1y_2+y_1^2\times 2x=m^2\times 2y\,y_1$$

$$\Rightarrow \quad (x^2+1)y_2+xy_1-m^2y=0$$

साबित हुआ।

उदाहरण 10. यदि $x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1991]**

हल : यहाँ $x=a\cos\theta,\quad y=b\sin\theta$

θ के सापेक्ष अवकलित करने पर $\frac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=b\cos\theta$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta}\Big/\frac{dx}{d\theta}=\frac{b\cos\theta}{-a\sin\theta}=-\frac{b}{a}\cot\theta$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

पुनः x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b}{a}(-\text{cosec}^2\theta)\frac{d\theta}{dx} = \frac{b\,\text{cosec}^2\theta}{a} \times \frac{1}{-a\sin\theta} \qquad \left[\because \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\frac{d\theta}{dx}} = \frac{1}{-a\sin\theta}\right]$$

$$= \frac{-b}{a^2}\text{cosec}^3\theta$$ उत्तर

उदाहरण 11. यदि $x = \frac{t^2}{2} + t,\ y = \frac{t^2}{2} - t$ तो $\frac{d^2x}{dy^2}$ और $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान बतायें।

हल : यहाँ $x = \frac{t^2}{2} + t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = t + 1$ तथा $y = \frac{t^2}{2} - t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = t - 1$ ...(1)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{t-1}{t+1} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(t+1)\frac{d}{dx}(t-1) - (t-1)\frac{d}{dx}(t+1)}{(t+1)^2}$$ [पुनः अवकलन से]

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(t+1)\frac{dt}{dx} - (t-1)\frac{dt}{dx}}{(t+1)^2} = \frac{\frac{dt}{dx}\{t+1-t+1\}}{(t+1)^2} = \frac{1}{t+1} \times \frac{2}{(t+1)^2} = \frac{2}{(t+1)^3}$$ [(1) से] उत्तर

$$\text{पुनः} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt}\Big/\frac{dy}{dt} = \frac{t+1}{t-1} \Rightarrow \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{(t-1)\frac{d}{dy}(t+1) - (t+1)\frac{d}{dy}(t-1)}{(t-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{(t-1)\frac{dt}{dy} - (t+1)\frac{dt}{dy}}{(t-1)^2} = \frac{\frac{dt}{dy}\{t-1-t-1\}}{(t-1)^2} = \frac{-2}{(t-1)(t-1)^2} = \frac{-2}{(t-1)^3}$$ [(1) से]

उदाहरण 12. $\sin(ax+b)$ का nवाँ अवकल गुणांक ज्ञात करें।

हल : माना $y = \sin(ax+b)$ तो $y_1 = a\cos(ax+b) = a\sin\left(\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$ $\left[\because \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta\right]$

या $y_2 = a^2\cos\left(\frac{\pi}{2} + ax + b\right) = a^2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + ax + b\right) = a^2\sin\left(2\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$

... ...

... ...

$$y_n = a^n\sin\left(n\frac{\pi}{2} + ax + b\right)$$

$\therefore$ यदि $y = \sin(ax+b)$, तो $y_n = a^n\sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax + b\right)$

उत्तर

18.2 लाइबनीज प्रमेय (Leibnitz Theorem)

यदि कोई फलन दो या दो से अधिक फलनों के गुणनफल के रूप में दिया गया हो और उसे n बार अवकलित करना हो तो उसके लिए लाइबनीज प्रमेय का प्रयोग किया जाता है।

कथन (Statement) : यदि u तथा v चर राशि x के दो फलन हों जिन्हें n बार अवकलित किया जा सकता है, तो

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$(uv)_n = {}^nC_0\, u_n\, v + {}^nC_1\, u_{n-1}\, v_1 + {}^nC_2\, u_{n-2}\, v_2 + \ldots + {}^nC_r\, u_{n-r}\, v_r + \ldots + {}^nC_n uv_n$$

जहाँ अनुलग्नक (Suffiix) x के सापेक्ष उत्तरोत्तर अवकलन को सूचित करते हैं तथा ${}^nC_0, {}^nC_1, \ldots, {}^nC_r, \ldots, {}^nC_n$ द्विपद गुणांक हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1995]**

प्रमाण : इस प्रमेय को हम गणितीय आगमन सिद्धान्त (Mathematical Induction Theorem) से साबित करेंगे।

माना $y = uv$, जहाँ u तथा v चर x के फलन हैं, तो वास्तविक अवकलन से

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = (uv)_1 = u_1 v + uv_1 = {}^1C_0\, u_1 v + {}^1C_1\, uv_1 \qquad \ldots(1)$$

(1) के सापेक्ष अवकलन से, $y_2 = (uv)_2 = u_2 v + u_1 v_1 + u_1 v_1 + uv_2 = u_2 v + 2u_1 v_1 + uv_2$

$$\Rightarrow \quad y_2 = {}^2C_0\, u_2 v + {}^2C_1\, u_1 v_1 + {}^2C_2 uv_2 \qquad \ldots(2)$$

(1) तथा (2) से स्पष्ट है कि प्रमेय $n = 1$ तथा $n = 2$ के लिए सत्य है।

माना प्रमेय $n = m$ के लिए सत्य है, तो

$$(uv)_m = {}^mC_0\, u_m\, v + {}^mC_1\, u_{m-1} v_1 + {}^mC_2\, u_{m-2}\, v_2 + \ldots + {}^mC_r\, u_{m-r}\, v_r + \ldots + {}^mC_m\, uv_m \qquad \ldots(3)$$

(3) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$(uv)_{m+1} = {}^mC_0\,(u_{m+1}\, v + u_m v_1) + {}^mC_1\,(u_m v_1 + u_{m-1}\, v_2) + {}^mC_2\,(u_{m-1}\, v_2 + u_{m-2}\, v_3) + \ldots + {}^mC_r\,(u_{m-r+1}\, v_r + u_{m-r}\, v_{r+1}) + \ldots + {}^mC_m\, uv_{m+1}$$

$$\Rightarrow \quad (uv)_{m+1} = {}^{m+1}C_0\, u_{m+1}\, v + ({}^mC_0 + {}^mC_1)\, u_m v_1 + ({}^mC_1 + {}^mC_2)\, u_{m-1}\, v_2 + \ldots + ({}^mC_{r-1} + {}^mC_r)\, u_{m-r+1}\, v_r + \ldots + {}^mC_m\, uv_{m+1}$$

$[\because \; {}^mC_0 = {}^{m+1}C_0 = 1]$

किन्तु ${}^mC_0 + {}^mC_1 = {}^{m+1}C_1;\; {}^mC_1 + {}^mC_2 = {}^{m+1}C_2;\; \ldots\ldots;\; {}^mC_{r-1} + {}^mC_r = {}^{m+1}C_r$

तथा ${}^mC_m = 1 = {}^{m+1}C_{m+1}$

$$\therefore \quad (uv)_{m+1} = {}^{m+1}C_{m+1}\, u_{m+1}\, v + {}^{m+1}C_1\, u_m v_1 + {}^{m+1}C_2\, u_{m-1}\, v_2 + \ldots + {}^{m+1}C_r\, u_{m-r} v_r + \ldots + {}^{m+1}C_{m+1}\, uv_{m+1}$$

अत: यदि प्रमेय $n = m$ के लिए सत्य है, तो $n = m + 1$ के लिए भी सत्य है। किन्तु यह $n = 1$ तथा $n = 2$ के लिए सत्य है। अत: $n = 2 + 1 = 3$ तथा $n = 3 + 1 = 4$ के लिए भी सत्य होगा।

इस तरह आगमन सिद्धान्त (Induction Theorem) से यह n के सभी धनात्मक पूर्णांक मानों के लिए भी सत्य होगा।

अत: $y_n = (uv)_n = {}^nC_0 u_n v + {}^nC_1 u_{n-1} v_1 + {}^nC_2\, u_{n-2}\, v_2 + \ldots + {}^nC_r u_{n-r}\, v_r + \ldots + {}^nC_n\, uv_n$

सिद्ध हुआ।

टिप्पणी : (i) लाइबनीज प्रमेय को निम्न रूप में भी लिख सकते हैं :

$$\boldsymbol{D^n\,(uv) = (D^n u)\, v + {}^nC_1\,(D^{n-1}\, u)\,(Dv) + {}^nC_2\,(D^{n-2}\, u)\, D^2 v + \ldots + {}^nC_r\,(D^{n-r}\, u)\, D^r\, v + \ldots + {}^nC_n\, u\,(D^n v)}$$

(ii) यदि गुणनफल में एक गुणक के रूप में बीजीय फलन हो तो उसे v मानने से अवकलन में सुविधा होती है।

उदाहरण 13. $x^2 e^{ax}$ को n बार x के सापेक्ष अवकलित करें।

हल : $e^{ax} = u, \quad x^2 = v$ लेने पर

$$D^n\,(x^2\, e^{ax}) = D^n\,(e^{ax}).\, x^2 + {}^nC_1\, D^{n-1}\,(e^{ax})\, D\,(x^2) + {}^nC_2\, D^{n-2}\,(e^{ax})\, D^2\,(x^2)$$

[$\because$ शेष पदों का अवकलन शून्य है।]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$$= a^n e^{ax} x^2 + na^{n-1} e^{ax} (2x) + \frac{n(n-1)}{2} \times a^{n-2} e^{ax} \times 2 \qquad [\because D^n (e^{ax}) = a^n e^{ax}]$$

$$= e^{ax} a^{n-2} [a^2 x^2 + 2n\,ax + n(n-1)]$$

उत्तर

उदाहरण 14. $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + a^2 y = 0$ को n बार अवकलित करें।

हल : प्रश्न से $(1-x^2)y_2 - xy_1 + a^2 y = 0$

लाइबनीज प्रमेय से n बार अवकलित करने पर

$$y_{n+2}(1-x^2) + {}^nC_1\, y_{n+1}(-2x) + {}^nC_2\, y_n(-2) - [y_{n+1}x + {}^nC_1\, y_n (1)] + a^2 y_n = 0$$

या $\quad (1-x^2)y_{n+2} - 2nx\, y_{n+1} - \frac{n(n-1)}{2} \times 2y_n - y_{n+1}\, x - n\, y_n + a^2 y_n = 0$

या $\quad (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - \{n(n-1) - a^2 + n\} y_n = 0$

या $\quad (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2 - a^2) y_n = 0$

उत्तर

उदाहरण 15. (i) यदि $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n$ तो सिद्ध करें कि

(i) $\quad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1991, 2012, 13]

(ii) $\quad x^2 y_{n+2} + (2n+1)x\, y_{n+1} + 2n^2 y_n = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2012]**

हल : यहाँ $\quad \cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n = n[\log x - \log n] \quad \left[\because \log\left(\frac{m}{n}\right)^p = p(\log m - \log n)\right]$

दोनों तरफ x के सापेक्ष अवकलन से

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \times \frac{1}{b} y_1 = \frac{n}{x} \Rightarrow -\frac{b}{\sqrt{b^2-y^2}} \times \frac{1}{b} y_1 = \frac{n}{x} \Rightarrow -\frac{y_1}{\sqrt{b^2-y^2}} = \frac{n}{x}$$

$$\Rightarrow \quad -xy_1 = n\sqrt{b^2-y^2} \Rightarrow x^2 y_1^2 = n^2(b^2-y^2) \qquad \text{[वर्ग करने पर]}$$

एक बार पुनः अवकलित करने पर

$$x^2\, 2y_1 y_2 + 2xy_1^2 = -2n^2 y\, y_1 \Rightarrow x^2 y_2 + xy_1 + n^2 y = 0 \qquad \ldots(1)$$

या $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$$

सिद्ध हुआ।

पुनः (1) को लाइबनीज प्रमेय से n बार अवकलित करने पर

$$x^2 y_{n+2} + {}^nC_1\, y_{n+1}(2x) + {}^nC_2\, y_n(2) + y_{n+1}\, x + {}^nC_1 y_n (1) + n^2 y_n = 0$$

या $\quad x^2 y_{n+2} + n\, y_{n+1}(2x) + \frac{n(n-1)}{2} y_n \times 2 + y_{n+1}\, x + n\, y_n + n^2 y_n = 0$

या $\quad x^2 y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + 2n^2 y_n = 0$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 16. यदि $y = (\sin^{-1} x)^2$ तो सिद्ध करें

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2 y_n = 0$$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]**

...(1)

हल : दिया गया है $\qquad y = (\sin^{-1} x)^2$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$y_1=\frac{dy}{dx}=2\sin^{-1}x\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\,y_1=2\sin^{-1}x$$ [x के सापेक्ष अवकलन से]

$\Rightarrow$ $$(1-x^2)y_1^2=4(\sin^{-1}x)^2 \Rightarrow (1-x^2)y_1^2-4y=0$$ ...(2)

[(1) से]

$\Rightarrow$ $$2(1-x^2)y_1y_2-2y_1^2x-4y_1=0$$ [(2) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर]

$\Rightarrow$ $$(1-x^2)y_2-y_1x-2=0$$ ...(3)

लाइबनीज प्रमेय से

$$(1-x^2)y_{n+2}+{}^nC_1\,y_{n+1}(-2x)+{}^nC_2\,y_n(-2)-[xy_{n+1}+{}^nC_1\,y_n(1)]-0=0$$

या $$(1-x^2)y_{n+2}-2n\,xy_{n+1}-2\times\frac{n(n-1)}{1\times 2}y_n-xy_{n+1}-n\,y_n=0$$

या $$(1-x^2)y_{n+2}-(2n+1)\,xy_{n+1}-n(n-1)y_n-ny_n=0$$

या $$(1-x^2)y_{n+2}-(2n+1)\,xy_{n+1}-n^2y_n=0$$

सिद्ध हुआ।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. उत्तरोत्तर अवकलन के लिए संकेतन :

मूल फलन $y=f(x)$	सामान्य संकेत	अन्य संकेत
प्रथम अवकल गुणांक	$\frac{dy}{dx}$	$y_1, Dy, f'(x), y'$
द्वितीय अवकल गुणांक	$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dx^2}$	$y_2, D^2y, f''(x), y''$
तृतीय अवकल गुणांक	$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d^3y}{dx^3}$	$y_3, D^3y, f'''(x), y'''$
nवाँ अवकल गुणांक	$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\frac{d^ny}{dx^n}$	$y_n, D^ny, f^n(x)$

2. (i) यदि $x=f_1(t), y=f_2(t)$, तो $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}$ तथा $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{dt/dy}$

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान निकालने के लिए पहले इस सूत्र से $\frac{dy}{dx}$ का मान प्राप्त करें, पुनः प्राप्त परिणाम को x के सापेक्ष अवकलित करें।

किन्तु ध्यान रखें $\frac{d^2y}{dx^2}\neq\frac{d^2y}{dt^2}\Big/\frac{d^2x}{dt^2}$; इसी प्रकार $\frac{d^ny}{dx^n}\neq\frac{d^ny}{dt^n}\Big/\frac{d^nx}{dt^n}$

3. लाइबनीज प्रमेय : यदि $y=uv$, जहाँ u तथा v चर x के फलन हैं तो

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv)=(uv)_n={}^nC_0u_nv+{}^nC_1u_{n-1}v_1+{}^nC_2\,u_{n-2}\,v_2+\ldots+{}^nC_r\,u_{n-r}\,v_r+\ldots+{}^nC_nuv_n$$

जहाँ अनुलग्नक (Suffix) x के सापेक्ष अवकलन को दर्शाते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

प्रश्नावली 18.1

$\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात करें यदि y के मान निम्नलिखित हैं : [प्रश्न 1 से 8 तक]

1. $x^4 + \cos x$ **2.** $\sin(\log x)$ **3.** $\log(\log x)$ **4.** $\log(\sin x)$

5. $\tan^{-1} x$ **6.** $x^3 \log x$ **7.** $x \cos x$ **8.** $e^x \sin 5x$

9. यदि $y = \tan x + \sec x$ तो सिद्ध करें $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$

10. यदि $y = x^x$ तो सिद्ध करें $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{y}{x} = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]**

11. यदि $y = \sin^{-1} x$ तो दिखायें $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1985, 88]**

12. यदि $y = e^{ax} \sin bx$ तो सिद्ध करें $y_2 - 2ay_1 + (a^2+b^2)y = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1992, 2014]**

13. (a) यदि $y = e^{\tan^{-1} x}$ तो सिद्ध करें

(i) $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + (2x-1)\frac{dy}{dx} = 0$

(ii) $(1+x^2)y_{n+2} + [2(n+1)x - 1]y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$

(b) यदि $y = e^{m \tan^{-1} x}$ तो सिद्ध करें $(1+x^2)y_2 + (2x-m)y_1 = 0$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2014, 15, 17(SB)]

14. यदि $y = A e^{-kt} \cos(nt+b)$ तो सिद्ध करें

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2k\frac{dy}{dt} + (k^2+n^2)y = 0$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1982, 90, 2016(S)]

15. यदि $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ तो दिखायें

(i) $(1-x^2)\frac{dy}{dx} = 1 + xy$ (ii) $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} - y = 0$

16. यदि $y = e^{Kx}(a \cos nx + b \sin nx)$ तो सिद्ध करें

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2K\frac{dy}{dx} + (n^2+K^2)y = 0$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1995]

17. यदि $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1991]**

18. यदि $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान बतायें।

19. $x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)$ तथा $y = a\sin t$ तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात करें।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

20. यदि $x = a(1-\cos\theta)]$, $y = a(\theta + \sin\theta)$, तो दिखायें $\theta = \frac{\pi}{2}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{a}$

21. यदि $x = \text{cosec}\,\theta - \cot\theta$, $y = \text{cosec}\,\theta + \cot\theta$, तो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1989]**

[संकेत : $xy = 1$]

22. $\cos(ax+b)$ का nवाँ अवकल गुणांक ज्ञात करें।

23. $e^{(ax+b)}$ का nवाँ अवकल गुणांक ज्ञात करें।

24. $y = \log(ax+b)$ का nवाँ अवकल गुणांक ज्ञात करें।

25. समीकरण $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$ को n बार अवकलित करें।

26. यदि $\cos^{-1}\frac{y}{b} = n\log\frac{x}{n}$ तो सिद्ध करें

(i) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1991, 2012, 13 II]**

(ii) $x^2 y_{n+2} + (2n+1)\,x\,y_{n+1} + 2n^2 y_n = 0$

27. यदि $y = \sin(m\sin^{-1} x)$ तो दिखायें

(i) $(1-x^2)\,y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$

(ii) $(1-x^2)\,y_{n+2} - (2n+1)\,xy_{n+1} - (n^2 - m^2)\,y_n = 0$

28. (a) यदि $y = \{x + \sqrt{x^2+1}\}^m$ तो दिखायें

(i) $(x^2+1)\,y_2 + xy_1 - m^2 y = 0$

(ii) $(x^2+1)\,y_{n+2} + (2n+1)\,x\,y_{n+1} + (n^2 - m^2)\,y_n = 0$

(b) यदि $y = A[x + \sqrt{x^2-1}]^n + B[x + \sqrt{x^2+1}]^n$ तो सिद्ध करें

$$(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = n^2 y$$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(O)]

29. यदि $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ तो सिद्ध करें—

(i) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]**

(ii) $x^2 y_{n+2} + (2n+1)\,xy_{n+1} + (n^2+1)\,y_n = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2001, 2004]**

30. यदि $y = (\sin^{-1} x)^2$ तो सिद्ध करें

(i) $(1-x)\,y_2 - xy_1 = 2$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2007, 17(S)]**

(ii) $(1-x^2)\,y_{n+2} - (2n+1)\,xy_{n+1} - n^2 y_n = 0$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]**

31. $(ax+b)^n$ को x के सापेक्ष n बार अवकलित करें।

32. यदि $y = ax^3 + 3x^2 + 7$ तो $\frac{d^3y}{dx^3}$ का मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

उत्तरमाला

1. $12x^2 - \cos x$
2. $-\dfrac{[\sin(\log x) + \cos(\log x)]}{x^2}$
3. $-\dfrac{(1 + \log x)}{(x \log x)^2}$
4. $-\text{cosec}^2 x$
5. $\dfrac{-2x}{(1 + x^2)^2}$
6. $x(5 + 6 \log x)$
7. $-x \cos x - 2 \sin x$
8. $2e^x (5 \cos 5x - 12 \sin 5x)$
17. $-\dfrac{b}{a^2} \text{cosec}^3 \theta$
18. $\dfrac{1}{3a} \sec^4 \theta \,\text{cosec}\, \theta$
19. $\dfrac{1}{a} \sec^3 t \tan t$
21. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{2y}{x^2}$
22. $a^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{2} + ax + b\right)$
23. $a^n e^{ax + b}$
24. $\dfrac{(-1)^{n-1} (n-1)!\, a^n}{(ax + b)^n}$
25. $x^2 y_{n+2} + (2n + 1) y_{n+1} + (n^2 + 1) y_n = 0$
31. $n!\, a^n$
32. $6a$

❑❑❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अध्याय

19

अवकलन के सरल उपयोग (Simple Applications of Differentiation)

19.1 अवकल गुणांक दर मापी के रूप में (Differential coefficient as Rate Measurer)

मान लिया y, x का कोई फलन है और x के मान में अत्यल्प वृद्धि δx के सापेक्ष, y के मान में संगत वृद्धि δy है तो

परिवर्तन का अनुपात $= \dfrac{\delta y}{\delta x}$; तथा $\lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{dy}{dx}$ तथा यह x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को बताता है।

टिप्पणी :

(i) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}$ बिन्दु $x = x_0$ पर x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को बताता है।

(ii) यदि $x = f(t)$, $y = g(t)$ से दी जाती है

तो $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \bigg/ \dfrac{dx}{dt}$, यदि $\dfrac{dx}{dt} \neq 0$

अत: x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर $= \dfrac{t \text{ के सापेक्ष } y \text{ के परिवर्तन की दर}}{t \text{ के सापेक्ष } x \text{ के परिवर्तन की दर}}$

(iii) यदि $\dfrac{dy}{dx} = +\text{ve}$, तो x में वृद्धि के साथ y में वृद्धि होती है, और यदि $\dfrac{dy}{dx} = -\text{ve}$, तो x में वृद्धि के साथ y में कमी होती है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. त्रिज्या के सापेक्ष किसी वृत्त की परिधि तथा क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर बतायें जब त्रिज्या 3 सेमी॰ है

हल : माना लिया वृत्त की त्रिज्या $= r = 3$ सेमी॰

यदि वृत्त की परिधि P तथा क्षेत्रफल A हो, तो $P = 2\pi r$ तथा $A = \pi r^2$

अब (i) त्रिज्या के सापेक्ष परिधि की परिवर्तन दर $\dfrac{dP}{dr} = \dfrac{d}{dr}(2\pi r)$ [(1) से P का मान रखने पर]

$\Rightarrow \quad \dfrac{dP}{dr} = 2\pi \qquad \therefore$ परिधि की परिवर्तन दर $= 2\pi$ सेमी। **उत्तर**

(ii) क्षेत्रफल की परिवर्तन दर $\dfrac{dA}{dr} = \dfrac{d}{dr}(\pi r^2)$ [(2) से A का मान रखने पर]

या $\dfrac{dA}{dr} = 2r\pi$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अतः जब $r = 3$ सेमी, $\left(\dfrac{dA}{dr}\right)_{r=3} = 2 \times 3\pi = 6\pi$ $\quad\therefore$ क्षेत्रफल की परिवर्तन दर $= 6\pi$ वर्ग सेमी। **उत्तर**

उदाहरण 2. एक गोले का अर्द्धव्यास 1 सेमी प्रति सेकेण्ड की दर से बढ़ता है तो उसके आयतन तथा वक्रपृष्ठ के बढ़ने की दर का अनुपात निकालिए जबकि गोले का अर्द्धव्यास 3 सेमी है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]**

हल : माना गोले का अर्द्धव्यास $= r$, आयतन $= V$ तथा वक्रपृष्ठ $= S$

तो प्रश्न से $r = 3$ सेमी तथा अर्द्धव्यास r की परिवर्तन दर $= \dfrac{dr}{dt} = 1$ सेमी/सेकेण्ड

$\because$ गोले का आयतन $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{4}{3}\pi \times 3r^2 \dfrac{dr}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \times 3 \times (3)^2 \times 1 = 36\pi \text{ सेमी}^3 \quad \ldots(1)$$

पुनः गोले का वक्रपृष्ठ $S = 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dS}{dt} = 8\pi r \dfrac{dr}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = 8\pi \times 3 \times 1 \text{ सेमी}^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dt} = 24\pi \text{ सेमी}^2 \quad \ldots(2)$$

$\therefore$ आयतन की वृद्धि दर : वक्र पृष्ठ की वृद्धि दर $= \dfrac{dV}{dt} : \dfrac{dS}{dt} = 36\pi : 24\pi$ $\quad$ [(1) तथा (2) से]

$= 3 : 2$ **उत्तर**

उदाहरण 3. एक गुब्बारा वायु द्वारा इस प्रकार फुलाया जाता है कि वह सदा गोलाकार रहता है। यदि इसका आयतन 100 घन सेमी प्रति मिनट की दर से बढ़ता है तो उसकी त्रिज्या किस दर से बढ़ेगी, जब त्रिज्या 20 सेमी है ?

हल : माना गुब्बारे की त्रिज्या $= r$ तथा आयतन $= V$

प्रश्न से $r = 20$ सेमी $\quad$ तथा आयतन की वृद्धि दर $\dfrac{dV}{dt} = 100$ सेमी^{3}/मिनट $\quad \ldots(1)$

अब गोले का आयतन $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{4}{3}\pi \times 3r^2 \dfrac{dr}{dt}$ $\quad$ [समय t के सापेक्ष अवकलन से]

$\Rightarrow \quad \dfrac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \dfrac{dr}{dt} \quad \Rightarrow \quad 100 = 4\pi \times 400 \times \dfrac{dr}{dt}$ $\quad$ $\left[\because r = 20, \dfrac{dV}{dt} = 100\right]$

$$\Rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \frac{100}{4\pi \times 400} = \frac{100 \times 7}{4 \times 22 \times 400} = \frac{7}{352}$$

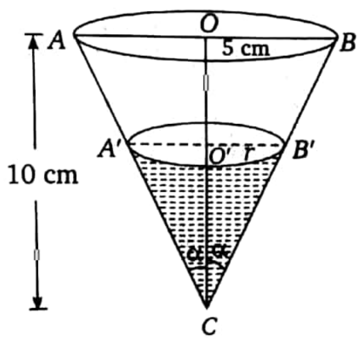
$\therefore$ अतः त्रिज्या की वृद्धि दर $= \dfrac{7}{352}$ सेमी/मिनट

उदाहरण 4. एक प्रतिलोमित शंकु की गहराई 10 सेमी तथा आधार का व्यास 5 सेमी है। यदि शंकु में 3/2 सेमी^{3} प्रति मिनट की दर से पानी डाला जाए तो पानी के तल के ऊपर उठने की दर ज्ञात करें जब पानी की गहराई 4 सेमी है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1984, 89]**

हल : माना शंकु CAB का अर्द्ध-शीर्ष कोण $= \alpha$;

ऊँचाई $= CO = 10$ सेमी; त्रिज्या $= OB = 5$ सेमी

तो $\tan\alpha = \dfrac{OB}{CO} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$



यदि शंकु के भीतर पानी का आयतन t समय बाद V हो, तो

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3}{2} \text{ सेमी}^3\text{/मिनट} \quad \ldots(1)$$

चित्र में $CA'B'$ t समय बाद पानी की स्थिति है।

माना पानी के तल की ऊँचाई $CO' = h$ तथा $O'B' = r$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

अब $\Delta CO'B'$ से $\tan\alpha = \frac{O'B'}{CO'} = \frac{r}{h}$ $\therefore$ $r = h\tan\alpha$

अब पानी का आयतन $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $\Rightarrow$ $V = \frac{1}{3}\pi(h\tan\alpha)^2 h$

$\Rightarrow$ $V = \frac{1}{3}\pi h^3 \tan^2\alpha$ $\Rightarrow$ $V = \frac{1}{3}\pi h^3 \times \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ $V = \frac{1}{12}\pi h^3$

$\therefore$ $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{12}\pi \times 3h^2 \frac{dh}{dt}$ $\Rightarrow$ $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi \times h^2 \frac{dh}{dt}$ $\Rightarrow$ $\frac{3}{2} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$

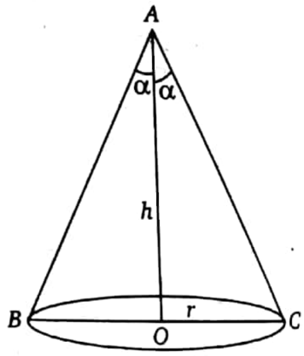
$\Rightarrow$ $\frac{dh}{dt} = \frac{3\times 4}{2\times \pi h^2}$ $\Rightarrow$ $\frac{dh}{dt} = \frac{6}{\pi h^2}$

अतः जब $h = 4\,\text{cm}$ (गहराई), $\frac{dh}{dt} = \frac{6}{\pi\times 4^2} = \frac{3}{8\pi}$ सेमी/मिनट **उत्तर**

उदाहरण 5. एक पाइप से रेत 3 घन मीटर प्रति मिनट की दर से गिर रही है और पृथ्वी पर शंकु के आकार के ढेर बनाती है जिसका शीर्षकोण 90° है। 3 मिनट बाद किस दर से ऊँचाई बढ़ रही है? **[उ० प्र० डिप्लोमा 1985]**

हल : माना r, h, α तथा V बने हुए शंकु की क्रमशः त्रिज्या, ऊँचाई, अर्द्ध-शीर्षकोण तथा आयतन हों, तो दी गई शर्तों से

आयतन बढ़ने की दर $\frac{dV}{dt} = 3$ घन मीटर/मिनट; अर्द्ध-शीर्षकोण $\alpha = 45°$ तथा $t = 3$ मिनट



अब $r = h\tan\alpha = h\tan 45° = h$ अतः $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ से

$\Rightarrow$ $V = \frac{1}{3}\pi(h\tan\alpha)^2 h$ $\Rightarrow$ $V = \frac{1}{3}\pi h^2 \times 1\times h$

$\Rightarrow$ $V = \frac{1}{3}\pi h^3$ ...(1)

$\therefore$ $\frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}3\pi h^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow 3 = \pi h^2 \frac{dh}{dt}$ ...(2)

[$\because \frac{dV}{dt} = 3$ घन मीटर/मिनट]

तथा तीन मिनट बाद शंकु का आयतन $V = 9$ घन मीटर

या $9 = \frac{1}{3}\pi h^3$ या $h^3 = \frac{27}{\pi}$ या $h = \frac{3}{(\pi)^{1/3}}$ मीटर

अतः (2) से, $3 = \pi\times\left\{\frac{3}{(\pi)^{1/3}}\right\}^2 \times \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{3\times\pi^{2/3}}{9\times\pi} = \frac{1}{3\pi^{1/3}}$

अतः 3 मिनट बाद ऊँचाई बढ़ने की दर $= \frac{1}{3\pi^{1/3}}$ मीटर/मिनट

उदाहरण 6. एक सीढ़ी 5 मीटर लम्बी है। उसका ऊपरी सिरा खड़ी दीवार से टिका है और नीचे का सिरा दीवार से 4 मीटर की दूरी पर है। सीढ़ी का निचला सिरा दीवार से दूर बाहर की ओर 2 मीटर/सेकण्ड की दर से फिसलना प्रारम्भ करता है तो इस क्षण सीढ़ी का ऊपरी हिस्सा किस वेग से नीचे की ओर दीवार के साथ फिसल रहा है?

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]

हल : माना किसी समय t पर सीढ़ी AB की स्थिति है, जहाँ $OA = x$ तथा $OB = y$

दिया गया है : $AB = 5$ मीटर, $\frac{dx}{dt} = 2$ मीटर/सेकण्ड, तो

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

ΔOAB से, $OA^2 + OB^2 = AB^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 5^2$ ...(1)

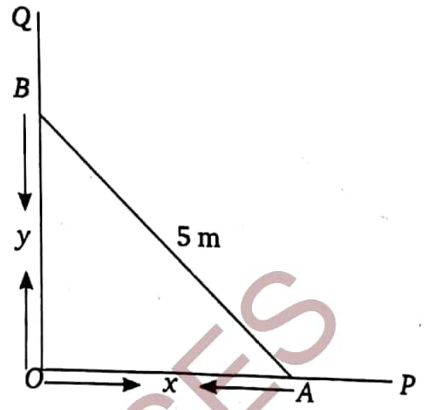
[$\because AB =$ सीढ़ी की लम्बाई $= 5$ मीटर]

$\Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 2x \times 2 + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \left[\because \frac{dx}{dt} = 2\right]$

$\Rightarrow 2x + y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{2x}{y}$ ...(2)

अब (1) से, जब $x = 4, y = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$

अत: (2) में $x = 4, y = 3$ रखने से $\frac{dy}{dx} = -\frac{8}{3}$ मीटर/सेकण्ड **उत्तर**



नोट :

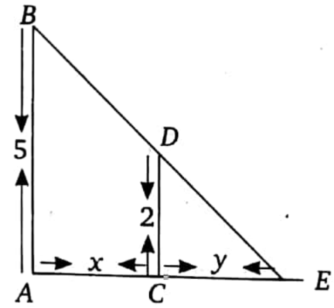
- $\frac{dy}{dt} = -$ ve बताता है कि t का मान बढ़ने से y का मान घटता है और ऊपरी सिरा B नीचे उतर रहा है।

उदाहरण 7. दो मीटर ऊँचा आदमी एक लैंप पोस्ट से जिसकी ऊँचाई 5 मीटर है, 6 मीटर/मिनट की दर से दूर जा रहा है। उसके छाया के बढ़ने की दर ज्ञात करें।

हल : माना लिया AB लैंप पोस्ट है तथा किसी समय t पर आदमी CD लैंप पोस्ट से x दूरी पर है। माना उसकी छाया CE की लम्बाई y है,

तो प्रश्न से $\frac{dx}{dt} = 6$ मीटर/मिनट, $AB = 5$ मीटर, $CD = 2$ मीटर

हमें $\frac{dy}{dt}$ का मान ज्ञात करना है।



स्पष्टत: ΔABE तथा ΔCDE समरूप हैं

अत: $\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CE} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AC + CE}{CE}$

$\Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{x+y}{y} \Rightarrow 5y = 2x + 2y$

$\Rightarrow 3y = 2x \Rightarrow y = \frac{2}{3}x$

$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3} \times 6 = 4$

$\therefore$ छाया बढ़ने की दर $= 4$ मीटर/मिनट

प्रश्नावली 19.1

1. एक वृत्त इस प्रकार बढ़ रहा है कि उसके अर्द्धव्यास के बढ़ने की दर 1 सेमी प्रति सेकण्ड है। इसका क्षेत्रफल कितनी तेजी से बढ़ रहा है, यदि उसका अर्द्धव्यास 3 सेमी० हो? **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]**
2. किसी बैलून, जो फुलाये जाने पर सदा गोलाकार रहता है, उसकी त्रिज्या 10 cm/sec की गति से बढ़ रही है। यदि उसकी त्रिज्या 15 cm है तो वक्रपृष्ठ (Surface Area) किस गति से बढ़ेगा?
3. किसी वर्ग की भुजा में 0.2 cm/sec की वृद्धि हो रही है तो उसके परिमाप में वृद्धि की दर बतायें।
4. किसी घन का आयतन 7 cm^3/sec की दर से बढ़ रहा है, यदि उसका एक किनारा 12 cm हो, तो उसके वक्रपृष्ठ (Surface Area) में वृद्धि की दर बतायें।
5. बीज के अंकुरित होने के t दिन पश्चात् पौधे की ऊँचाई $t - 0.002t^2$ से दी जाती है। बताइए अंकुरित होने के सात दिन बाद पौधा किस दर से बढ़ रहा है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1985]**

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

6. (i) किसी शंक्वाकार फनेल की पेंदी के छोटे छेद से पानी 4 cm^3/sec की रफ्तार से निकल रहा है। यदि फनेल में पानी से बने शंकु की तिर्यक ऊँचाई (Slant Height) 3 cm तथा शीर्षकोण 120° है, तो पानी से बने शंकु की तिर्यक ऊँचाई में कमी की दर बतायें।

(ii) एक प्रतिलोमित शंकु की गहराई 12 cm तथा वृत्तीय आधार की त्रिज्या 4 cm है। यदि इसमें 2 cm^3/मिनट की दर प्रतिमिनट की दर से पानी डाला जा रहा है तो पानी का तल किस दर से ऊपर उठेगा। जबकि पानी की गहराई 6 cm है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(SB)]**

(ब) एक प्रतिलोमित शंकु की गहराई 20 सेमी तथा अर्धव्यास 4 सेमी है। उसके अन्दर 3 घन सेमी प्रति मिनट की दर से पानी डाला जाता है पानी के ऊपर उठने की दर ज्ञात कीजिये जबकि पानी की गहराई 5 सेमी है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]**

7. दो मीटर लंबा एक आदमी 6 मीटर ऊँचे लैंप पोस्ट से 6 km/h की गति से दूर जा रहा है। उसकी छाया में वृद्धि की दर बतायें।

8. एक सीढ़ी 5 मीटर लम्बी है। इसका ऊपरी सिरा एक दीवार से टिका है तथा नीचे का सिरा दीवार से 4 मी० की दूरी पर क्षैतिज फर्श पर रखा है। जब सीढ़ी का निचला सिरा बाहर की ओर 0.3 मीटर/सेकण्ड दर से फिसलना प्रारम्भ करता है तब सीढ़ी का ऊपरी सिरा किस वेग से नीचे की ओर फिसलेगा? जब निचले और ऊपरी सिरे एक ही दर से चल रहे हों तब निचला सिरा दीवार से कितनीं दूरी पर है ? **[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]**

9. यदि नमन आघूर्ण (Bending Moment) $M = \frac{Wx}{3}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$ है, जहाँ W तथा l स्थिर हैं तो $\frac{dM}{dx}$ का मान ज्ञात करें, जब $x = 2$ है।

10. यदि $E = 0.02T^2 - 4T + 16$ तो T के सापेक्ष E के परिवर्तन की दर ज्ञात करें, जब $T = 200$

11. किसी समबाहु त्रिभुज की भुजा के बढ़ने की दर $3\sqrt{3}$ सेमी/सेकण्ड है तो त्रिभुज के क्षेत्रफल के बढ़ने की दर बतायें जब भुजा 8 सेमी है।

12. V घन सेमी आयतन के बर्तन में गैस की कोई मात्रा P किग्रा प्रति वर्ग सेमी के दाब पर रखी गई है जबकि $PV = 1000$ है। यदि आयतन 50 घन सेमी प्रति मिनट की दर से बढ़ रहा हो तो दाब परिवर्तन की दर ज्ञात करें जब आयतन 25 घन सेमी है।

उत्तरमाला

1. 6π सेमी^{2}/सेकण्ड **2.** 1200π सेमी^{2}/[redacted]8 सेमी/सेकण्ड **4.** $\frac{7}{3}$ सेमी^{2}/सेकण्ड

5. 0.97 सेमी/दिन **6.** (i) $\frac{32}{27\pi}$ cm/[redacted] cm/minute (iii) $\frac{3}{\pi}$ cm/minute

7. $\frac{5}{2}$ km/h **8.** 0.4 मी/से० नीचे की ओर; $\frac{5}{\sqrt{2}}$ मीटर की दूरी पर

9. $\frac{W}{2}\left(1 - \frac{12}{l^2}\right)$ **10.** 4 **11.** 36 सेमी/सेकण्ड^2 **12.** 80 किग्रा/सेमी^{2}

वेग और त्वरण
(Velocity and Acceleration)

19.2 परिभाषायें (Definitions)

वेग (Velocity) : विस्थापन परिवर्तन की दर को वेग कहते हैं। अतः यदि समय t में किसी स्थिर बिन्दु से विस्थापन S हो, तो

$$\text{वेग } V = \frac{dS}{dt}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

त्वरण (Acceleration) : वेग परिवर्तन की दर त्वरण कहलाती है।

अत: त्वरण $f = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right) = \frac{d^2S}{dt^2}$

अर्थात् **त्वरण** $\boldsymbol{f = \frac{d^2S}{dt^2}}$

पुन: त्वरण $f = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dS} \times \frac{dS}{dt}$

अर्थात् $\boldsymbol{f = V\frac{dV}{dS}}$

टिप्पणी : यदि समीकरण प्राचलिक रूप (Parametric term) में दिया गया हो, तो

वेग $\boldsymbol{V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}$

तथा **त्वरण** $\boldsymbol{f = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}}$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. एक कण द्वारा t सेकण्ड में चलित दूरी $S = 180t - 16t^2$ है। कण का वेग तथा त्वरण ज्ञात कीजिए। किस समय वेग शून्य हो जायेगा?

हल : यहाँ $S = 180t - 16t^2$

अब वेग $= \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(180t - 16t^2) = 180 - 32t$

तथा त्वरण $= \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(180 - 32t) = 0 - 32 = -32$

$\therefore$ त्वरण $= -32$ मात्रक **उत्तर**

पुन: वेग शून्य होगा यदि $\frac{dS}{dt} = 0 \Rightarrow 180 - 32t = 0$

$\Rightarrow 32t = 180 \quad \therefore \quad t = \frac{180}{32} = \frac{45}{8} \quad \therefore$ समय $= t = \frac{45}{8}$ मात्रक **उत्तर**

उदाहरण 2. किसी कण द्वारा 1 सेकण्ड में तय की गई दूरी सम्बन्ध $S = (2t^2 + t + 1)^{1/2}$ से ज्ञात होती है। एक सेकण्ड के बाद उसका वेग ज्ञात करो।

हल : यहाँ $S = (2t^2 + t + 1)^{1/2}$

$\therefore$ वेग $V = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}(2t^2 + t + 1)^{\frac{1}{2}-1} \times (4t + 1) = \frac{1}{2}(2t^2 + t + 1)^{-1/2}(4t + 1)$

अत: $t = 1$ सेकण्ड पर

वेग $V = \frac{1}{2}(2 \times 1^2 + 1 + 1)^{-1/2}(4 + 1)$

$= \frac{1}{2}(4)^{-1/2} \times 5 = \frac{1}{2 \times \sqrt{4}} \times 5 = \frac{5}{2 \times 2} = \frac{5}{4} = 1.25$

$\therefore$ वेग $= 1.25$ मात्रक/सेकण्ड **उत्तर**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

उदाहरण 3. समय t पर दो बिन्दुओं की स्थितियाँ $S_1 = t^3 - t$ तथा $S_2 = 6t^2 - t^3$ समीकरणों द्वारा दी जाती हैं। दोनों बिन्दुओं पर उनके वेग ज्ञात करें जब उनके त्वरण बराबर हों।

हल : यहाँ $S_1 = t^3 - t, \quad S_2 = 6t^2 - t^3$

$\therefore \quad \frac{dS_1}{dt} = 3t^2 - 1 =$ पहले बिन्दु पर वेग ...(1)

$\frac{dS_2}{dt} = 12t - 3t^2$ दूसरे बिन्दु पर वेग ...(2)

$\therefore$ पहले बिन्दु पर त्वरण $= \frac{d^2S_1}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS_1}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(3t^2 - 1) = 6t$

दूसरे बिन्दु पर त्वरण $\frac{d^2S_2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS_2}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(12t - 3t^2) = 12 - 6t$

प्रश्न से, दोनों त्वरण बराबर हैं $\therefore 6t = 12 - 6t \Rightarrow 12t = 12 \Rightarrow t = 1$ सेकण्ड

अत: (1) तथा (2) में $t = 1$ रखने पर

पहले बिन्दु पर वेग $= 3 \times 1^2 - 1 = 2$ मात्रक/सेकण्ड

दूसरे बिन्दु पर वेग $= 12 \times 1 - 3 \times 1^2 = 9$ मात्रक/सेकण्ड **उत्तर**

उदाहरण 4. यदि किसी गतिमान बिन्दु का बिन्दुपथ $x = at, y = b \sin at$ हो तो सिद्ध करें (i) वेग का x घटक अचर है। (ii) किसी क्षण गतिमान बिन्दु का त्वरण x-अक्ष की दूरी के अनुरूप परिवर्तित होता है।

हल : दिया गया समीकरण $x = at, \; y = b \sin at$

t के सापेक्ष अवकलन से, $\therefore \frac{dx}{dt} = a = x$ की दिशा में वेग

अत: वेग का x घटक अचर है। **सिद्ध हुआ।**

पुन: $\frac{dy}{dt} = ab \cos at$ [t के सापेक्ष अवकलन से]

अब x की दिशा में त्वरण, $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(a) = 0$

y की दिशा में त्वरण, $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = ab\frac{d}{dt}(\cos at) = -a^2b \sin at$

$\therefore$ गतिमान बिन्दु का त्वरण $= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{0 + (-a^2b \sin at)^2}$

$= a^2b \sin at = a^2y$ [$\because y = \sin at$]

$\therefore$ त्वरण $\propto y$ [$\because a$ अचर है] **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 5. सिद्ध करें कि यदि एक कण इस प्रकार गतिशील है कि इसके द्वारा तय की गई दूरी $S \propto \sin \mu t$, जहाँ μ अचर है, तो इसके वेग के बढ़ने की दर एक स्थिर बिन्दु से उसके पथ के अनुदिश मापी गई इसकी दूरी के समानुपाती होगी।

हल : प्रश्न से, $S \propto \sin \mu t$ या $S = k \sin \mu t$ जहाँ k अचर है

$\therefore \quad \frac{dS}{dt} = k \cos \mu t \times \mu \Rightarrow \frac{dS}{dt} = k\mu \cos \mu t \Rightarrow \frac{d^2S}{dt^2} = -k\mu^2 \sin \mu t$

$\Rightarrow \quad \frac{d^2S}{dt^2} = -\mu^2 (k \sin \mu t) \Rightarrow \frac{d^2S}{dt^2} = -\mu^2 S$ [$\because S = k \sin \mu t$]

$\Rightarrow \quad \frac{d^2S}{dt^2} \propto S$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अत: वेग वृद्धि की दर (त्वरण) स्थिर बिन्दु से नापी गई दूरी S के समानुपाती है। सिद्ध हुआ।

प्रमुख सूत्र

1. यदि $S = f(t)$ तो

(i) वेग $V = \dfrac{dS}{dt}$ (ii) (a) त्वरण $f = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dS}{dt}\right) = \dfrac{d^2S}{dt^2}$ (b) $f = \dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dS} \times \dfrac{dS}{dt} = V\dfrac{dV}{dS}$

2. यदि समीकरण प्राचलिक रूप में दिया गया हो अर्थात् $x = f_1(t), y = f_2(t)$

तो (i) वेग $V = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$ (ii) त्वरण $f = \sqrt{\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$.

प्रश्नावली 19.2

1. कोई कण इस प्रकार गतिशील है कि t सेकण्ड में उसके द्वारा चलित दूरी $S = 2t^3 - 5t^2 + 6t + 5$ से दी जाती है। यदि दूरी मीटर में तथा समय सेकण्ड में नापी गई हो, तो 3 सेकण्ड बाद कण द्वारा चलित दूरी, वेग तथा त्वरण की गणना करें।

2. एक कण सरल रेखा में $S = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 9t + 17$ नियम के अनुसार गतिमान है। ज्ञात करें इसका वेग एवं त्वरण कब शून्य होगा? **[उ० प्र० 1991]**

3. एक क्रिकेट की गेंद को ऊर्ध्वाधरत: उपरीमुख फेंका जाता है और t सेकण्डों में प्राप्त ऊँचाई सूत्र $h = 64t - 16t^2$ से दी जाती है। इसका वेग व त्वरण (i) किसी भी समय पर (ii) 4 सेकण्ड के बाद ज्ञात करें।

4. एक वायुयान t घण्टों में S किमी० की दूरी तय करता है, जहाँ $S = 125t + 10t^2$ तो 5 घण्टे पश्चात् वायुयान का वेग एवं त्वरण ज्ञात करें। **[उ० प्र० 1990]**

5. एक सरल रेखा पर गतिमान किसी कण का वेग और त्वरण ज्ञात कीजिए जबकि समय t पर किसी स्थिर बिन्दु से इसकी दूरी x निम्न संबन्धों से ज्ञात होता है :

$$x = t^2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

6. एक कण सीधी रेखा में चल रहा है और समय t पर रेखा के स्थिर बिन्दु O से इसकी सेमी० में दूरी $S = t(t-8)(t-15)$ से प्राप्त होती है।
प्रत्येक उस स्थिति में इसकी गति और त्वरण की गणना करें जबकि वह O से जाए।
[**संकेत** : O पर $\dfrac{dS}{dt} = 0$]

7. एक कण सरल रैखिक पथ पर चलता है और t सेकण्ड में चली गई दूरी S सूत्र $S = \sqrt{t}$ से दी जाती है। सिद्ध करें कि त्वरण ऋण और वेग के घन (Cube) के समानुपाती है।

8. यदि एक बिन्दु किसी सीधी रेखा पर विचरण करे और इसकी सीधी रेखा के स्थिर बिन्दु से दूरी S, समय t का द्विघात फलन हो, तो सिद्ध करो कि इसका त्वरण अचर है।
[**संकेत** : $S = at^2 + bt + c$ लें]

9. एक कण इस प्रकार गति करता है कि उसके द्वारा तय की गई दूरी संबन्ध $S = a\sin\mu t$ से दी जाती है, जहाँ μ अचर है, तो सिद्ध करें कि उसकी वेग-वृद्धि की दर एक स्थिर बिन्दु से उसके पथ के अनुदिश नापी गई उसकी दूरी के समानुपाती होगी।

10. एक कण एक सरल रेखा में गति करता है और t समय में इसके द्वारा तय की गई दूरी $S = \sqrt{at^2 + bt + c}$ से दी जाती है, तो सिद्ध करें त्वरण, दूरी के घन के विलोमानुपाती है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उत्तरमाला

1. दूरी $=32$ मीटर, वेग $=30$ मीटर/सेकण्ड, त्वरण $=26$ मीटर/सेकण्ड^2
2. वेग $t=1$ सेकण्ड तथा 9 सेकण्ड तथा त्वरण $t=5$ सेकण्ड में
3. (i) वेग $64-32t$; त्वरण $=-32$ इकाई/से^{2} (ii) वेग 64 इकाई/से; त्वरण $=-32$ इकाई/से^{2}
4. वेग : 225 किमी/घण्टा; त्वरण : 20 किमी/घण्टा^{2}
5. वेग : $2t\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{\pi t^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$; त्वरण : $2\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)-2\pi t\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)-\frac{\pi^2t^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$
6. $t=0$ पर वेग $=120$ सेमी/सेकण्ड; त्वरण $=-46$ सेमी/सेकण्ड^2
   $t=8$ पर वेग $=-56$ सेमी/सेकण्ड; त्वरण $=2$ सेमी/से^{2}
   $t=15$ पर वेग $=105$ सेमी/सेकण्ड; त्वरण $=44$ सेमी/से^{2}

सन्निकट मान एवं लघु त्रुटियाँ (Approximations and Small Errors)

19.3 सन्निकट मान (Approximations)

मान लिया y, x का फलन है तथा x में अत्यल्प परिवर्तन (Small increment) δx के सापेक्ष y में संगत परिवर्तन δy है, तो

$$\underset{\delta x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{dy}{dx}$$

किन्तु सीमा की परिभाषा से यदि δx का मान अत्यल्प हो, तो $\frac{\delta y}{\delta x}$ तथा $\frac{dy}{dx}$ का अंतर भी काफी छोटा होता है, जिसे किसी भी सीमा तक घटाया जा सकता है।

अतः δx के लघु मान के लिए $\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{dy}{dx}$ (लगभग)

$$\therefore \qquad \boldsymbol{\delta y=\frac{dy}{dx}\times \delta x}$$

19.4 लघु त्रुटियाँ (Small Errors)

(i) मान लिया फलन $y=f(x)$ है तो यदि स्वतंत्र चर x के मान में त्रुटि होगी तो y, जो x पर निर्भर है, के मान में भी त्रुटि आएगी।

अतः यदि x के मान में त्रुटि δx तथा y के मान में संगत त्रुटि δy हो, तो

$$\delta y = y \text{ के मान में त्रुटि} = \frac{dy}{dx}\times\delta x$$

$\therefore$ **y के मान में लघु त्रुटि $=\frac{dy}{dx}\times\delta x=\frac{dy}{dx}$ तथा x में त्रुटि का गुणनफल**

(ii) **प्रतिशत त्रुटि (Percentage Error)**

$$\because \quad \delta y=\frac{dy}{dx}\times\delta x \qquad \Rightarrow \quad \frac{\delta y}{y}=\frac{dy}{dx}\times\frac{1}{y}\times\delta x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta y}{y}\times 100=\frac{dy}{dx}\times\frac{x}{y}\times\frac{\delta x}{x}\times 100 \qquad \Rightarrow \quad \frac{\delta y}{y}\times 100=\frac{dy}{dx}\times\frac{x}{y}\times\left(\frac{\delta x}{x}\times 100\right)$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$\Rightarrow$ **y के मान में प्रतिशत त्रुटि $= \frac{dy}{dx} \times \frac{x}{y} \times x$ के मान में प्रतिशत त्रुटि**

19.5 अन्य महत्त्वूपर्ण पद (Other Important Terms)

1. (i) x में निरपेक्ष त्रुटि (Absolute Errors in x) $= \delta x$

(ii) x में सापेक्ष त्रुटि (Relative Errors in x) $= \frac{\delta x}{x}$

(iii) x में प्रतिशत त्रुटि (Percentage error) $= \frac{\delta x}{x} \times 100$

(iv) y के मान में प्रतिशत त्रुटि $= \frac{\delta y}{y} \times 100$

टिप्पणी : 1. $dx \cong \delta x$, $dy \cong \delta y$, जहाँ δx तथा δy, x तथा y में अत्यल्प परिवर्तन को बताते हैं।

2. प्रतिशत त्रुटि निकालने में दिए गए फलन का लघुगणक (log) लेकर अवकलन करने से प्रश्न हल करने में सुविधा होती है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

लघु त्रुटियाँ तथा सन्निकटन

उदाहरण 1. यदि $y = x^3 - 10$ तथा x का मान 2 से 1.99 हो जाता है, तो y के मान में लगभग परिवर्तन निकालें। y का परिवर्तित मान भी ज्ञात करें।

हल : मान लिया $x = 2$, $x + \delta x = 1.99$ तो $\delta x = 1.99 - 2 = -0.01$

अब $y = x^3 - 10 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 \therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = 3 \times 2^2 = 12$

सूत्र से, $\delta y = \frac{dy}{dx} \delta x \Rightarrow \delta y = 12 \times (-0.01) \Rightarrow \delta y = -0.12$

अत: y के मान में लगभग परिवर्तन $= -0.12$

अब $x = 2$ पर, $y = 2^3 - 10 = -2$

अत: y का परिवर्तित मान $= (-2) + (-0.12) = -2.12$ **उत्तर**

उदाहरण 2. यदि एक आयत की लम्बाई और चौड़ाई के मापन में $+1\%$ की त्रुटि हुई है तो उसके क्षेत्रफल में हुई प्रतिशत त्रुटि की गणना करें।

हल : माना लंबाई l के मापन में त्रुटि δl, चौड़ाई b के मापन में त्रुटि δb तथा क्षेत्रफल A के मापन में त्रुटि δA है। तो दी गई शर्तों से

$$\frac{\delta l}{l} \times 100 = +1; \quad \frac{\delta b}{b} \times 100 = +1$$

अब $A = l \times b \Rightarrow \log A = \log l + \log b \therefore \frac{dA}{A} = \frac{dl}{l} + \frac{db}{b} \Rightarrow \frac{\delta A}{A} = \frac{\delta l}{l} + \frac{\delta b}{b}$ $[\because dx \cong \delta x]$

$\Rightarrow \frac{\delta A}{A} \times 100 = \frac{\delta l}{l} \times 100 + \frac{\delta b}{b} \times 100 \Rightarrow \frac{\delta A}{A} \times 100 = (+1) + (+1) \Rightarrow \frac{\delta A}{A} \times 100 = 2$

अत: क्षेत्रफल में प्रतिशत त्रुटि $= 2\%$ **उत्तर**

उदाहरण 3. यदि किसी घन की भुजा x में 2% की वृद्धि कर दी जाए तो उसके आयतन में वृद्धि की गणना करें।

हल : माना भुजा x के मान में वृद्धि δx तथा आयतन V के मान में संगत वृद्धि δV है, तो प्रश्न से

$$\frac{\delta x}{x} \times 100 = 2 \qquad \ldots(1)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अब घन का आयतन $V = x^3 \Rightarrow \log V = 3\log x \therefore \dfrac{dV}{V} = 3\dfrac{dx}{x} \Rightarrow \dfrac{\delta V}{V} = 3\dfrac{\delta x}{x}$ $[\because dx \cong \delta x]$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\delta V}{V}\times 100 = 3\dfrac{\delta x}{x}\times 100 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\delta V}{V}\times 100 = 3\times 2 = 6$ [(1) से]

$\Rightarrow \quad \delta V = \dfrac{6V}{100} \quad \Rightarrow \quad \delta V = 0.06x^3$ $[\because V = x^3]$

अतः आयतन में लगभग परिवर्तन $= 0.06x^3$

उदाहरण 4. यदि एक गोले की त्रिज्या 9 सेमी मापी गई तथा इसे मापने 0·03 सेमी की त्रुटि हुई। इसके आयतन में हुई लगभग त्रुटि तथा प्रतिशत त्रुटि गणना करें।

हल : माना r गोले की त्रिज्या है तथा δr इसके मापन में त्रुटि है, तो $r = 9$ cm, $\delta r = 0.03$

मान लिया गोले का आयतन V है, तो $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \log V = \log\left(\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)$

$\Rightarrow \quad \log V = \log\dfrac{4}{3} + \log\pi + 3\log r \Rightarrow \dfrac{dV}{V} = 0 + 0 + 3\dfrac{dr}{r} \Rightarrow \dfrac{\delta V}{V} = 3\dfrac{\delta r}{r}$ $[\because dx \cong \delta x]$ ...(2)

$\Rightarrow \quad \delta V = 3\dfrac{\delta r}{r}\times V = 3\dfrac{\delta r}{r}\times\dfrac{4}{3}\pi r^3 = 4r^2\delta r\,\pi$ $\left[\because V = \dfrac{4}{3}\pi r^3\right]$

$\Rightarrow \quad \delta V = 4\times 9^2\times(0.03)\times\pi = 324\pi\times 0.03 = 9.72$

$\therefore$ आयतन के मान में लगभग त्रुटि $= 9.72$ सेमी^{3}

पुनः (2) से, $\dfrac{\delta V}{V}\times 100 = 3\times\dfrac{\delta r}{r}\times 100 = 3\times\dfrac{0.03}{9}\times 100 = \dfrac{3\times 3}{9} = 1$

$\therefore$ आयतन के मान में प्रतिशत त्रुटि $= 1\%$ **उत्तर**

विकल्प : $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \dfrac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \therefore \delta V = \left(\dfrac{dV}{dr}\right)\delta r = 4\pi(9)^2\,(0.03)$

उदाहरण 5. एक सरल लोलक का दोलनकाल सूत्र $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ से ज्ञात किया जाता है, जहाँ g स्थिर राशि है। यदि l के मापन में सन्निकट त्रुटि 0.5% हो तो T में सन्निकट प्रतिशत त्रुटि ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994, 2012]**

हल : माना l के मापन में त्रुटि δl तथा T के मान में संगत त्रुटि δT है, तो प्रश्न से

$$\frac{\delta l}{l}\times 100 = 0.5 \quad ...(1)$$

अब
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$\Rightarrow \quad \log T = \log\left\{2\pi\left(\dfrac{l}{g}\right)^{1/2}\right\} \quad \Rightarrow \quad \log T = \log(2\pi) + \dfrac{1}{2}(\log l - \log g)$

$\therefore \quad \dfrac{dT}{T} = 0 + \dfrac{1}{2}\dfrac{dl}{l} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\delta T}{T} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta l}{l}$ $[\because dx \cong \delta x]$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\delta T}{T}\times 100 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\delta l}{l}\times 100 = \dfrac{1}{2}\times 0.5 = 0.25$ [(1) से]

$\therefore$ T के मापन में प्रतिशत त्रुटि $= 0.25\%$ **उत्तर**

उदाहरण 6. किसी नॉच के बहते हुए पानी की मात्रा $Q = CH^{5/2}$ से ज्ञात होती है, जहाँ H, पानी का शीर्ष (Head) है तथा C अचर है। यदि H के मापन में त्रुटि 1.5 प्रतिशत हो तो Q में प्रतिशत त्रुटि ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]**

हल : माना H के मापन में त्रुटि δH तथा Q के मापन में संगत त्रुटि δQ है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$(26)^{1/3}$ का सन्निकट मान

$(255)^{1/4}$ का सन्निकट मान ज्ञात करो

तो प्रश्न से, $$\frac{\delta H}{H}\times 100 = 1.5 \quad ...(1)$$

अब $Q = CH^{5/2} \Rightarrow \log Q = \log C + \frac{5}{2}\log H \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = 0 + \frac{5}{2}\frac{dH}{H}$

$$\Rightarrow \frac{\delta Q}{Q} = \frac{5}{2}\frac{\delta H}{H} \Rightarrow \frac{\delta Q}{Q}\times 100 = \frac{5}{2}\frac{\delta H}{H}\times 100 = \frac{5}{2}\times 1.5 = 3.75 \quad [(1) \text{ से}]$$

$\therefore$ Q के मापन में प्रतिशत त्रुटि $= 3.75\%$ **उत्तर**

उदाहरण 7. यदि एक स्टीमर को आगे चलाने में जिस H.P. की आवश्यकता है, वह वेग के घन तथा लम्बाई के वर्ग से परिवर्तित होता है, तो सिद्ध करें 3% की वृद्धि वेग में तथा 4% की वृद्धि लम्बाई में होने के कारण H.P. में 17% की वृद्धि होगी।

हल : माना वेग $= V$; लम्बाई $= l$; H.P. $= H$

तो प्रश्न से, $H \propto V^3 l^2$ या $H = KV^3 l^2$; $\frac{\delta l}{l}\times 100 = 4$ तथा $\frac{\delta V}{V}\times 100 = 3$

अब $H = KV^3 l^2 \Rightarrow \log H = \log K + 3\log V + 2\log l$

$$\Rightarrow \frac{dH}{H} = 0 + 3\frac{dV}{V} + 2\frac{dl}{l} \quad [\text{अवकलन से}]$$

$$\Rightarrow \frac{\delta H}{H} = 3\frac{\delta V}{V} + 2\frac{\delta l}{l} \Rightarrow \frac{\delta H}{H}\times 100 = 3\frac{\delta V}{V}\times 100 + 2\frac{\delta l}{l}\times 100$$

$$\Rightarrow \frac{\delta H}{H}\times 100 = 3\times 3 + 2\times 4 \Rightarrow \frac{\delta H}{H}\times 100 = 17$$

$\therefore$ H.P. में प्रतिशत वृद्धि $= 17\%$ **उत्तर**

उदाहरण 8. दीर्घवृत्त के क्षेत्रफल में प्रतिशत त्रुटि ज्ञात करो यदि उसके दीर्घ तथा लघु अक्षों के मापन में 1% की त्रुटि हुई है।
[उ० प्र० डिप्लोमा 1993, 2014 (O)]

हल : माना दीर्घवृत्त का अर्द्ध-दीर्घ अक्ष $= a$; अर्द्ध-लघु अक्ष $= b$ तथा क्षेत्रफल $= A$

यदि a में त्रुटि δa, b में त्रुटि δb तथा क्षेत्रफल में संगत त्रुटि δA हो, तो

प्रश्न से, $\frac{\delta a}{a}\times 100 = 1$ तथा $\frac{\delta b}{b}\times 100 = 1$

दीर्घवृत्त का क्षेत्रफल $A = \pi ab \Rightarrow \log A = \log \pi + \log a + \log b$

$$\Rightarrow \frac{dA}{A} = 0 + \frac{da}{a} + \frac{db}{b} \Rightarrow \frac{\delta A}{A} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta A}{A}\times 100 = \frac{\delta a}{a}\times 100 + \frac{\delta b}{b}\times 100 \Rightarrow \frac{\delta A}{A}\times 100 = 1 + 1 = 2$$

अतः क्षेत्रफल में प्रतिशत त्रुटि $= 2\%$ **उत्तर**

उदाहरण 9. $\sqrt{26}$ का लगभग मान ज्ञात करें।

हल : माना $y = \sqrt{x}$ तो $y + \delta y = \sqrt{x + \delta x}$

यदि $x = 25$ तो $x + \delta x = 25 + 1 = 26$ तथा $\delta x = 26 - 25 = 1$

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=25} = \frac{1}{2\times 5} = \frac{1}{10} \quad [\because \sqrt{x} = \sqrt{25}]$$

$$\therefore \delta y = \frac{dy}{dx}\delta x = \frac{1}{10}\times 1 = \frac{1}{10} = 0.1 \quad \therefore \sqrt{26} = y + \delta y = 5 + 0.1 = 5.1$$ **उत्तर**

उदाहरण 10. $\sqrt{0.037}$ का लगभग मान ज्ञात करें।

हल : माना $y = \sqrt{x}$, $x = 0.040$ तथा $x + \delta x = 0.037$ तो $\delta x = 0.037 - 0.040 = -0.003$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$y=\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\Rightarrow$ $$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0.040}=\frac{1}{2\sqrt{0.040}}=\frac{1}{2\times 0.2}=\frac{1}{0.4} \qquad [\because \sqrt{x}=\sqrt{0.04}=0.2]$$

अब $$\delta y=\frac{dy}{dx}\delta x=\frac{1}{0.4}\times(-0.003)=-\frac{3}{400}$$

$\therefore$ $$\sqrt{0.037}=y+\delta y=0.2-\frac{3}{400}=0.2-0.0075=0.1925$$ उत्तर

उदाहरण 11. $\cos 31°$ तथा $\cos 29°$ का सन्निकट मान ज्ञात करें जब $1°=0.0175$ रेडियन।

हल : माना $x=30°$ और $x+\delta x=30°+1°=31°$ तथा $x-\delta x=30°-1°=29°$

तथा $$y=\cos x \Rightarrow y=\cos 30°=\frac{1}{2} \quad \text{तथा} \quad \delta x=1°$$

अब $$y=\cos x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\sin x \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=30°}=-\sin 30°=-\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ $$\delta y=\frac{dy}{dx}\delta x=-\frac{1}{2}\times 1°=-\frac{1}{2}\times 0.0175=-0.00875$$

अतः $$\cos 31°=y+\delta y=\cos 30°+(-0.00875)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-0.00875=\frac{1.73205}{2}-0.00875=0.86603-0.00875=0.85728 \text{ लगभग}$$

तथा $$\cos 29°=y-\delta y=\cos 30°-(-0.00875)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+0.00875=0.86603+0.00875=0.87478$$ उत्तर

उदाहरण 12. $\log_e(4.02)$ का लगभग मान ज्ञात करें जबकि
$$\log_e 4=1.3863$$

हल : माना $y=f(x)=\log_e x$, $x=4$, $x+\delta x=4.02$ तो $\delta x=0.02$

अब $x=4$ के लिये $$y=f(4)=\log_e 4=1.3863$$

अब $$y=\log_e x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x} \quad \therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=4}=\frac{1}{4}$$

अतः $$\delta y=\frac{dy}{dx}\delta x=\frac{1}{4}\times 0.02=0.005$$

$\therefore$ $$\log(4.02)=y+\delta y=1.3863+0.005=0.3913$$ उत्तर

उदाहरण 13. $f(2.01)$ का लगभग मान प्राप्त करें यदि $f(x)=4x^2+5x+2$

हल : माना $x=2$, $x+\delta x=2.01$ तो $\delta x=0.01$

अब $$y=f(x)=4x^2+5x+2$$

अतः $x=2$ पर $$y=f(2)=4\times 2^2+5\times 2+2=16+10+2=28$$

तथा $$\frac{dy}{dx}=8x+5$$

अब $$\delta y=\frac{dy}{dx}\delta x$$

$\Rightarrow$ $$\delta y=(8x+5)\delta x=(8\times 2+5)\ 0.01=21\times 0.01=0.21$$

$\therefore$ $$f(2.01)=f(x+\delta x)=y+\delta y=28+0.21=28.21$$ उत्तर

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

प्रमुख सूत्र

1. यदि $y = f(x)$ तथा x के मापन में त्रुटि δx, y के मापन में त्रुटि δy हो, तो $\delta y = \frac{dy}{dx} \times \delta x$

2. x के मापन में प्रतिशत त्रुटि $= \frac{\delta x}{x} \times 100$

3. y के मापन में प्रतिशत त्रुटि $= \frac{\delta y}{y} \times 100$

प्रश्नावली 19.3

1. यदि $y = 4x^3$ तो y में सन्निकट वृद्धि ज्ञात करें जब x में 0.01% की वृद्धि हुई हो। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1989]**
2. यदि $y = x^4 - 10$ तथा x का मान 2 से 1.99 में परिवर्तित हो जाता है, तो y में लगभग परिवर्तन का मान तथा y का परिवर्तित मान निकालें।
3. एक वर्ग की भुजा 10 सेमी है। उसके मापन में 0.2 सेमी की त्रुटि हो गई हो तो क्षेत्रफल में हुई प्रतिशत त्रुटि की गणना करें।
4. किसी वृत्तीय प्लेट की त्रिज्या 10 सेमी है। इसे गर्म करने पर इसकी त्रिज्या में 2% की वृद्धि होती है, तो प्लेट के क्षेत्रफल में कितनी वृद्धि होगी?
5. किसी गोले की त्रिज्या सिकुड़ कर 10 सेमी से 9.8 सेमी हो जाती है। गोले के आयतन में हुई कमी की गणना करें।
6. यदि किसी गोले की त्रिज्या नापने में 0.1% की त्रुटि हुई है तो गोले के आयतन में हुई प्रतिशत त्रुटि की गणना करें।
7. किसी घन के आयतन में हुए लगभग परिवर्तन की गणना करें यदि उसकी भुजा x में 1% की वृद्धि की जाती है।
8. किसी गैस का आयतन V तथा दाब P का सम्बन्ध $PV^{1/4}$ = अचर, से दिया जाता है। यदि आयतन में 0.5% की कमी पाई गई हो तो दाब में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करें।
9. किसी नॉच से बहते हुये पानी की मात्रा $R = \frac{8}{15} \times 0.64 \times \sqrt{2g} \, . \, H^{5/2}$ से ज्ञात होती है, जहाँ H पानी का शीर्ष है। यदि H को 0.2 के स्थान पर 0.198 मापा जाता है तो R के मापन में प्रतिशत त्रुटि ज्ञात कीजिये। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2014, 16(O)]**
10. $\sqrt{25.02}$ का लगभग मान ज्ञात करें।
11. $(127)^{1/3}$ का लगभग मान ज्ञात करें।
12. $\sqrt{37}$ का लगभग मान ज्ञात करें।
13. $\tan 46°$ का लगभग मान ज्ञात करें यदि $1° = 0.01745$ रेडियन।
14. $\cos 61°$ का लगभग मान ज्ञात करें जब $\sin 60° = 0.86603$ तथा $1° = 0.01745$ रेडियन।
15. यदि $\log_e 4 = 1.3863$ तो $\log_e (3.99)$ का मान ज्ञात करें।
16. यदि $\log_e 10 = 2.3026$ तो $\log_e 10.02$ का मान ज्ञात करें।
17. यदि $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$ तो $f(3.02)$ का लगभग मान ज्ञात करें।

उत्तरमाला

1. 0.03% **2.** -0.32, 5.68 **3.** 4% **4.** 4π
5. 80π सेमी^{3} **6.** 0.3% **7.** $0.03\,x^3$ **8.** 0.125%
9. 2.25 % **10.** 5.002 **11.** 5.026 **12.** 6.083
13. 1.03490 **14.** 0.4849 **15.** 1.3838 **16.** 2.3046
17. 45.46

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अध्याय 20 स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब (Tangent and Normal)

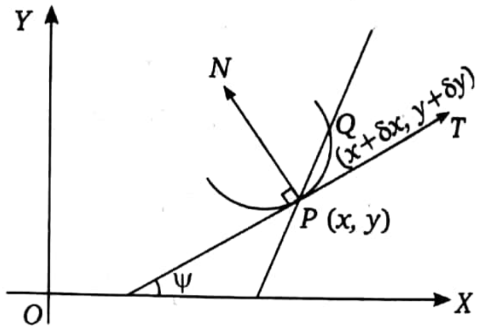
20.1 परिभाषायें (Definitions)

20.1.1. स्पर्श रेखा

यदि किसी वक्र को दो बिंदुओं पर काटने वाली सरल रेखा को किसी एक प्रतिच्छेद बिंदु पर इस प्रकार घुमाया जाए कि दूसरा प्रतिच्छेद बिंदु पहले की ओर तब तक अग्रसर होता जाए जब तक कि दोनों बिंदु संपाती न हो जायें, तो यह सरल रेखा सीमांत स्थिति में वक्र के उस बिंदु पर स्पर्श रेखा कहलाती है।

माना सरल रेखा PQ वक्र को बिंदु $P(x, y)$ तथा $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ पर प्रतिच्छेद करती है, जहाँ बिंदु Q बिंदु P के अत्यंत निकट है, तो सीमांत स्थिति में, जब $Q \to P$ सरल रेखा PQ, PT में परिवर्तित हो जाती है तथा यह बिंदु P पर स्पर्श रेखा कहलाती है।

अर्थात् $\underset{Q \to P}{\text{Lt}}\ PQ = PT$ तो PT स्पर्श रेखा होगी।



20.1.2 अभिलम्ब

किसी वक्र के किसी बिंदु पर अभिलम्ब वह सरल रेखा है, जो उस बिंदु से होकर गुजरती है तथा उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।

चित्र में PN वक्र के P बिंदु पर अभिलम्ब है।

20.1.3 वक्र की प्रवणता (Slope) या ढाल :

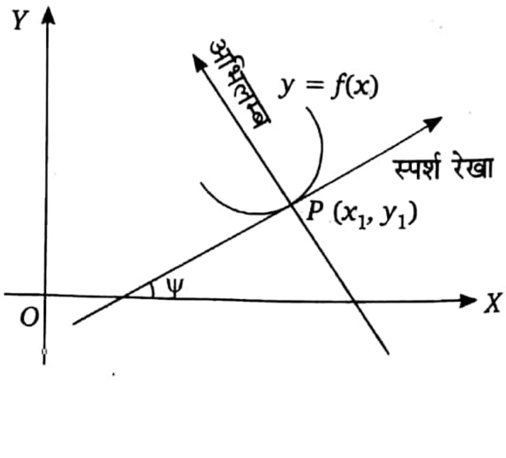
यह वक्र के उस बिंदु पर अवकल गुणांक का मान वक्र के किसी बिंदु पर ढाल स्पर्श रेखा की ढाल होती है।

20.2 अवकल गुणांक का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical Meaning of Differential Coefficient)

यदि $y = f(x)$ कोई सतत वक्र है तथा इसके बिंदु $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा खींची गई है, जो x-अक्ष की धनात्मक दिशा से ψ कोण बनाती है, तो उस बिंदु पर अवकल गुणांक $\dfrac{dy}{dx}$ का मान $\tan\psi$ के बराबर होता है

अर्थात् $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = \tan\psi =$ **बिंदु $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता**

अतः **बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता** (slope)
$$= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$$



AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

20.3 अभिलम्ब की प्रवणता (Slope of the Normal)

किसी बिंदु $P(x_1, y_1)$ पर अभिलम्ब उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।

∴ **$P(x_1, y_1)$ पर अभिलम्ब की प्रवणता**

$$= -\frac{1}{\text{बिंदु } P \text{ पर स्पर्श रेखा की प्रवणता}} = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}} = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1, y_1)}$$

20.3.1 स्पर्श रेखा का समीकरण (Equation of tangent)

हम जानते हैं कि बिंदु (x_1, y_1) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$y - y_1 = m(x - x_1)$, जहाँ m रेखा की प्रवणता है।

(x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$

अत: (1) से (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1) = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}(x - x_1)}$

20.3.2 अभिलम्ब का समीकरण :

बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्शी की प्रवणता $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = m$

वक्र के किसी बिंदु पर अभिलम्ब उस बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है

अत: अभिलम्ब की प्रवणता $= -\frac{1}{m} = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}} = m_1$ (माना)

अत: बिंदु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब का समीकरण :

$$\boldsymbol{y - y_1 = m_1(x - x_1) = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}}(x - x_1) = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1, y_1)}(x - x_1)}$$

टिप्पणी : (i) यदि **स्पर्श रेखा x-अक्ष के समानांतर** हो, तो $\psi = 0$

अत: $\frac{dy}{dx} = \tan\psi = \tan 0 = 0$

(ii) यदि **स्पर्श रेखा y-अक्ष के समानांतर** हो तो वह x-अक्ष पर लम्ब होगी अर्थात् $\psi = 90°$

अत: $\tan\psi = \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \infty = \frac{1}{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = 0$

अत: $\frac{dy}{dx} = \infty$ या $\frac{dx}{dy} = 0 \Leftrightarrow$ स्पर्श रेखा y-अक्ष के समानांतर होगी।

20.3.3 किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात करने की विधि :

I. दिए गए फलन का $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करें।

II. दिए गए बिंदु (x_1, y_1) पर $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करें।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

III. यदि $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$ अशून्य परिमित संख्या है, तो स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के लिए क्रमश:

$$y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} (x - x_1) \text{ तथा } y - y_1 = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}} (x - x_1)$$

सूत्र का प्रयोग करें।

IV. (a) यदि $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = 0$, तो

(i) स्पर्श रेखा का समीकरण $y - y_1 = 0$ (ii) अभिलम्ब का समीकरण $x - x_1 = 0$

(b) यदि $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = \pm\infty$, तो

(i) स्पर्श रेखा का समीकरण $x - x_1 = 0$ (ii) अभिलम्ब का समीकरण $= y - y_1 = 0$.

20.4 वक्रों का प्रतिच्छेदन कोण (Angle of Intersection of Two Curves)

दो वक्रों का प्रतिच्छेदन कोण वह कोण है जो उन वक्रों के प्रतिच्छेद बिंदु पर खींची गई दोनों वक्रों की स्पर्श रेखाओं के बीच बनता है।

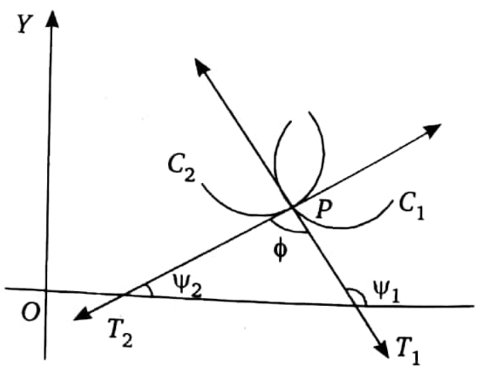
माना C_1 तथा C_2 दो वक्र हैं जिनके समीकरण क्रमशः $f_1(x)$ तथा $f_2(x)$ हैं। माना दोनों वक्र बिंदु P पर प्रतिच्छेद करते हैं। माना बिंदु P पर C_1 तथा C_2 पर खींची गई स्पर्श रेखायें क्रमश: PT_1 तथा PT_2 हैं।

अत: परिभाषा से PT_1 तथा PT_2 के बीच का कोण $\phi = C_1$ तथा C_2 के बीच का प्रतिच्छेदन कोण

माना रेखायें PT_1 तथा PT_2 x-अक्ष की धनात्मक दिशा से क्रमश: ψ_1 तथा ψ_2 कोण बनाते हैं।

तो $m_1 = \tan\psi_1$ तथा $m_2 = \tan\psi_2$

अब $m_1 = \tan\psi_1 \Rightarrow m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1}$



तथा $m_2 = \tan\psi_2 \Rightarrow m_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2}$

चित्र से $\phi = \psi_1 - \psi_2 \Rightarrow \tan\phi = \tan(\psi_1 - \psi_2)$

$$\Rightarrow \tan\phi = \pm\frac{\tan\psi_1 - \tan\psi_2}{1 + \tan\psi_1 \tan\psi_2} \Rightarrow \tan\phi = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

टिप्पणी : (i) इन स्पर्श रेखाओं के बीच दूसरा कोण $= 180° - \phi$ है। न्यूनकोण को सामान्यत: प्रतिच्छेदन कोण के रूप में लिया जाता है।

(ii) यदि ϕ न्यूनकोण है, तो $\tan\phi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$

20.5 लम्ब वक्र तथा स्पर्शी वक्र (Orthogonal Curve and Tangent Curve)

(i) यदि दो वक्रों के बीच का प्रतिच्छेदन कोण 90° हो तो वक्र लम्ब वक्र कहलाते हैं।

अत: लम्ब वक्रों के लिए $\phi = \frac{\pi}{2}$ $\therefore m_1 \times m_2 = -1 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1} \times \left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2} = -1$

(ii) दो वक्र स्पर्शी वक्र कहलाते हैं यदि $m_1 = m_2 \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. वक्र $x^2+5y^2=14$ के बिंदु (3, 1) पर स्पर्शी एवं अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]

हल : $x^2+5y^2=14 \Rightarrow 2x+5\times 2y\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{10y}=-\frac{1}{5}\frac{x}{y}$

अत: बिंदु (3, 1) पर स्पर्शी की प्रवणता $=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(3,1)}=-\frac{1}{5}\times\frac{3}{1}=-\frac{3}{5}$ ...(1)

तथा अभिलम्ब की प्रवणता $=-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{3,1)}}=-\frac{1}{\left(\frac{-3}{5}\right)}=\frac{5}{3}$ ...(2)

बिंदु (3, 1) पर स्पर्शी का समीकरण $y-1=-\frac{3}{5}(x-3)$

$\Rightarrow \quad 5(y-1)=-3(x-3)$ $\qquad \Rightarrow \quad 5y-5=-3x+9$

$\Rightarrow \quad 3x+5y-14=0$ यह अभीष्ट स्पर्शी है।

(ii) अभिलम्ब का समीकरण

अत: बिंदु (3, 1) पर अभिलम्ब का समीकरण, $y-1=\frac{5}{3}(x-3)$

$\Rightarrow \quad 3(y-1)=5(x-3)$ $\qquad \Rightarrow \quad 3y-3=5x-15$

$\Rightarrow \quad 5x-3y-15+3=0$ $\qquad \Rightarrow \quad 5x-3y-12=0$ यह अभीष्ट अभिलंब है।

उदाहरण 2. दीर्घवृत्त $4x^2+3y^2=24$ के बिंदु $(\sqrt{3}, 2)$ पर स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2010, 12]

हल : दिया गया वक्र $4x^2+3y^2=24$

x के सापेक्ष अवकलन से $8x+6y\frac{dy}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{8x}{6y}$

$\therefore \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(\sqrt{3},2)}=-\frac{8}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{2}{\sqrt{3}}=$ स्पर्शी की प्रवणता $=m$ (माना) ...(1)

$\therefore$ अभिलम्ब की प्रवणता $=-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(\sqrt{3},2)}}=\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{m}$ ...(2)

अत: (i) बिन्दु $(\sqrt{3}, 2)$ पर स्पर्शी का समीकरण, $y-2=\frac{-2}{\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})$

[$\because$ स्पर्शी का समीकरण $y-y_1=m(x-x_1)$]

$\Rightarrow \quad \sqrt{3}y-2\sqrt{3}=-2x+2\sqrt{3}$ $\qquad \Rightarrow \quad 2x+\sqrt{3}y=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad 2x+\sqrt{3}y=4\sqrt{3}$

(ii) बिन्दु $(\sqrt{3}, 2)$ पर अभिलम्ब का समीकरण, $y-2=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\sqrt{3})$

[$\because$ अभिलंब का समीकरण $y-y_1=-\frac{1}{m}(x-x_1)$]

$\Rightarrow \quad 2y-4=\sqrt{3}x-3$ $\qquad \Rightarrow \quad \sqrt{3}x-2y-3+4=0$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \quad \sqrt{3}x - 2y + 1 = 0$ यह लम्ब का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 3. वक्र $y = x^3$ पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जिस पर खींची गई स्पर्श रेखा x-अक्ष को $60°$ के कोण पर काटती है।

हल : दिया गया वक्र $y = x^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2$ ...(1)

प्रश्न से, अभीष्ट बिंदु के लिए $\frac{dy}{dx} = 3x^2 = \tan 60° = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad x^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3^{1/2}} = 3^{-1/2} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 3^{-1/4}$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर $y = (\pm 3^{-1/4})^3 = \pm 3^{-3/4}$

$\therefore$ अभीष्ट बिंदु $(3^{-1/4}, 3^{-3/4})$ और $(-3^{-1/4}, -3^{-3/4})$ हैं। **उत्तर**

उदाहरण 4. $y = 3x^2 - 2x - 4$ पर वह बिंदु ज्ञात करें जहाँ स्पर्श रेखा सरल रेखा $10x - y + 7 = 0$ के समांतर है।

हल : दिया गया वक्र $y = 3x^2 - 2x - 4$ ...(1)

$\therefore$ वक्र की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 6x - 2$ ...(2)

दी गई सरल रेखा $10x - y + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 10x + 7$

$\therefore$ दी गई रेखा की प्रवणता $= \frac{dy}{dx} = 10$ ...(3)

यदि वक्र पर स्पर्श रेखा दी गई रेखा के समानांतर है, तो दोनों की प्रवणता बराबर होंगी।

$\therefore$ (2) तथा (3) से $6x - 2 = 10 \quad \Rightarrow \quad 6x = 12 \quad \therefore \quad x = 2$

(1) में यह मान रखने पर, $y = 3 \times 4 - 2 \times 2 - 4 = 12 - 8 = 4$

$\therefore$ अभीष्ट बिंदु $(x, y) = (2, 4)$ **उत्तर**

उदाहरण 5. वक्र $y = x^2 + 3x + 4$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिये जिन पर खींची गई स्पर्श रेखा मूलबिंदु से होकर जाती हैं।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1975, 76, 96]

हल : मान लो अभीष्ट बिन्दु (x_1, y_1) है।

दिया गया वक्र $y = x^2 + 3x + 4$ ...(1)

$\because$ बिन्दु (x_1, y_1) वक्र पर स्थित है, $\quad \therefore \quad y_1 = x_1^2 + 3x_1 + 4$ ...(2)

समीकरण (1) से, $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$

$\therefore$ बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श-रेखा की प्रवणता $(m) = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)} = 2x_1 + 3$

अतः बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श-रेखा $y - y_1 = (2x_1 + 3)(x - x_1)$ [सूत्र $y - y_1 = m(x - x_1)$ से]

यदि उक्त स्पर्श-रेखा मूल बिन्दु (0, 0) से होकर जाती है, तब

$0 - y_1 = (2x_1 + 3)(0 - x_1) \quad$ या $\quad y_1 = (2x_1 + 3)x_1$ ...(3)

समीकरण (2) और (3) को हल करने पर, $x_1 = 2, y_1 = 14$ तथा $x_1 = -2, y_1 = 2$

अतः अभीष्ट बिन्दु (2, 14) तथा (–2, 2) हैं। **उत्तर**

उदाहरण 6. वक्र $9x^2 + 16y^2 = 144$ के उन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखा ज्ञात कीजिए जिन पर वे (i) x-अक्ष के समान्तर हैं, (ii) y-अक्ष के समान्तर हैं।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2002]

हल : दिया गया वक्र $9x^2 + 16y^2 = 144 \quad \Rightarrow \quad 9(2x) + 16(2y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-9x}{16y}$

(i) चूँकि स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है तो $\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{9x}{16y} = 0$ या $x = 0$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

दिये समीकरण में $x=0$ प्रतिस्थापित करने पर $16y^2=144$ या $y^2=9$ $\therefore$ $y=\pm 3$
अत: वे बिन्दु जिन पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समान्तर है, (0, 3) और (0, −3) हैं।
इन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखा के समीकरण हैं

$y-3=0(x-0)$ या $y=3$ और $y+3=0(x-0)$ या $y=-3$ अर्थात् $y=\pm 3$ **उत्तर**

(ii) चूँकि स्पर्श रेखा y-अक्ष के समान्तर है अत:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{16y}=\infty=\frac{1}{0} \Rightarrow -\frac{16y}{9x}=0 \Rightarrow y=0$$

दिये हुए समीकरण में $y=0$ प्रतिस्थापित करने पर $9x^2=144$ या $x^2=16$ या $x=\pm 4$
अत: अभीष्ट बिन्दु (4, 0), (−4, 0) हैं।
इन पर स्पर्श रेखायें हैं $x=\pm 4$ **उत्तर**

उदाहरण 7. बिन्दु 't' पर वक्र $x=a\cos^3 t, y=b\sin^3 t$ की स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ $x=a\cos^3 t \Rightarrow \frac{dx}{dt}=a.3\cos^2 t.(-\sin t)=-3a\sin t\cos^2 t$

तथा $y=b\sin^3 t \Rightarrow \frac{dy}{dt}=b.3\sin^2 t.\cos t=3b\sin^2 t.\cos t$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3b\sin^2 t\cos t}{-3a\sin t\cos^2 t}=-\frac{b\sin t}{a\cos t}$$

$\therefore$ बिन्दु 't' पर स्पर्श रेखा का समीकरण यह है :

$$y-b\sin^3 t=-\frac{b\sin t}{a\cos t}(x-a\cos^3 t)$$

अर्थात् $bx\sin t+ay\cos t=ab\sin t\cos t(\sin^2 t+\cos^2 t)=ab\sin t\cos t$

अर्थात् $\frac{x}{a\cos t}+\frac{y}{b\sin t}=1$ **उत्तर**

उदाहरण 8. सिद्ध कीजिए कि सरल रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, बिन्दु (a, b) पर वक्र $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$ को स्पर्श करती है चाहे n का मान कुछ भी हो। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1981]**

हल : वक्र का समीकरण $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2 \Rightarrow \frac{nx^{n-1}}{a^n}+\frac{ny^{n-1}}{b^n}\frac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow \frac{y^{n-1}}{b^n}\frac{dy}{dx}=-\frac{x^{n-1}}{a^n}$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-b^n}{a^n}\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}$

बिदु (a, b) पर, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}=\frac{-b^n}{a^n}\times\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}=-\frac{b}{a}$

अत: बिंदु (a, b) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y-b=-\frac{b}{a}(x-a)$

या $\frac{y}{b}-1=-\frac{1}{a}(x-a)$ या $\frac{y}{b}-1=-\frac{x}{a}+1$ $\therefore$ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$

जो n के मान से स्वतंत्र है।
अत: दी हुई रेखा वक्र को दिए हुए बिन्दु (a, b) पर स्पर्श करेगी चाहे n का मान कुछ भी हो।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

उदाहरण 9. सिद्ध कीजिए कि रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ वक्र $y=be^{-x/a}$ को उस बिन्दु पर स्पर्श करती है जहाँ वक्र y-अक्ष को काटता है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1992, 93]**

हल : वक्र का समीकरण $y=be^{-x/a}$ ...(1)

यह y-अक्ष को $x=0$ पर काटेगा ;

अत: $y=be^0=b$ $\quad\therefore$ वक्र y-अक्ष को बिन्दु $(0, b)$ पर काटता है।

समीकरण (1) के अवकलन से,

अब $y=be^{-x/a}$ $\quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=be^{-x/a}\times\frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{a}\right)=be^{-x/a}\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{b}{a}e^{-x/a}$

अत: बिन्दु $(0, b)$ पर, $\frac{dy}{dx}=-\frac{b}{a}e^0=-\frac{b}{a}$

$\therefore$ वक्र $y=be^{-x/a}$ के बिन्दु $(0, b)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y-b=-b/a\,(x-0)\quad\Rightarrow\quad y/b-1=-x/a,\qquad [b \text{ से भाग देने पर}]$$

$\Rightarrow\quad x/a+y/b=1$ यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 10. यदि वक्र $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ का अभिलम्ब x-अक्ष से ϕ कोण बनाये तो दिखाइए इसका समीकरण $y\cos\phi-x\sin\phi=a\cos 2\phi$ है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1990, 2001]**

हल : वक्र का समीकरण $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ ...(1)

$$\Rightarrow\quad \frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx}=0\;\Rightarrow\;\frac{dy}{dx}=-\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}}=-\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$$

$\therefore$ अभिलम्ब की प्रवणता $=\frac{x^{1/3}}{y^{1/3}}=\tan\phi\quad\Rightarrow\quad x^{1/3}=y^{1/3}\tan\phi\Rightarrow x=y\tan^3\phi$

दिये हुए समीकरण (1) में x का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$y^{2/3}\tan^2\phi+y^{2/3}=a^{2/3}\quad\Rightarrow\quad y^{2/3}(1+\tan^2\phi)=a^{2/3}$$

$$\Rightarrow\quad y^{2/3}\sec^2\phi=a^{2/3}\quad\Rightarrow\quad y^{1/3}\sec\phi=a^{1/3}\quad\Rightarrow\quad y=a\cos^3\phi$$

$$\therefore\quad x=y\tan^3\phi=a\cos^3\phi\tan^3\phi=a\sin^3\phi$$

$\therefore$ बिन्दु $(a\sin^3\phi, a\cos^3\phi)$ पर अभिलम्ब

$$y-a\cos^3\phi=\tan\phi\,(x-a\sin^3\phi)$$

या $$y\cos\phi-a\cos^4\phi=x\sin\phi-a\sin^4\phi$$

या $$y\cos\phi-x\sin\phi=a(\cos^4\phi-\sin^4\phi)$$
$$=a(\cos^2\phi-\sin^2\phi)(\cos^2\phi+\sin^2\phi)$$
$$=a(\cos^2\phi-\sin^2\phi)=a\cos 2\phi$$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 11. यदि सरल रेखा $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ वक्र $x^m y^n=a^{m+n}$ को स्पर्श करें, तो आवश्यक प्रतिबंध $p^{m+n}m^m n^n=(m+n)^{m+n}a^{m+n}\cos^m\alpha\sin^n\alpha$ है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]**

हल : माना रेखा $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ ...(1)

वक्र $x^m y^n=a^{m+n}$ ...(2)

को बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श करती है।

(2) के दोनों ओर log लेने पर $m\log x+n\log y=(m+n)\log a$

दोनों तरफ अवकलन करने पर, $\quad\frac{m}{x}+\frac{n}{y}\frac{dy}{dx}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}=-\frac{my}{nx}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अतः (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y - y_1 = -\dfrac{my_1}{nx_1}(x - x_1)$ $\left[\because \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = -\dfrac{m}{n}\dfrac{y_1}{x_1}\right]$

या $nx_1 y - nx_1 y_1 = -my_1 x + my_1 x_1$ या $(my_1)x + (nx_1)y = (m+n)x_1 y_1$ ...(3)

अब (1) तथा (3) दोनों बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा को निरूपित करते हैं

अतः $\dfrac{my_1}{\cos\alpha} = \dfrac{nx_1}{\sin\alpha} = \dfrac{(m+n)x_1 y_1}{p} \Rightarrow x_1 = \dfrac{mp}{(m+n)\cos\alpha}, y_1 = \dfrac{np}{(m+n)\sin\alpha}$

पुनः (x_1, y_1) वक्र (2) पर है।

अतः $x_1^m y_1^n = a^{m+n} \Rightarrow \dfrac{m^m p^m}{(m+n)^m \cos^m\alpha} \times \dfrac{n^n p^n}{(m+n)^n \sin^n\alpha} = a^{m+n}$

[x_1 तथा y_1 का मान रखने पर]

या $p^{m+n} m^m n^n = (m+n)^{m+n} a^{m+n} \cos^m\alpha \,.\, \sin^n\alpha$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 12. वक्र $y = \sin x$ पर मूल बिन्दु से स्पर्शियाँ खींची जाती हैं। सिद्ध कीजिए कि उनके स्पर्श बिन्दु वक्र $x^2 y^2 = x^2 - y^2$ पर स्थित हैं।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1996]

हल : मान लो स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक (h, k) हैं, तो बिन्दु (h, k) वक्र $y = \sin x$ पर स्थित है।

अतः

$$k = \sin h \quad ...(1)$$

$y = \sin x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \cos x \quad \therefore \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{(h,k)} = \cos h$

$\because$ बिन्दु (h, k) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y - k = \cos h(x - h)$ [सूत्र $y - y_1 = m(x - x_1)$ से]

$\because$ यह स्पर्श रेखा मूल बिन्दु (0, 0) से होकर जाती है।

$\therefore$ $0 - k = \cos h\,(0 - h) \Rightarrow k = h\cos h \Rightarrow \dfrac{k}{h} = \cos h$ ...(2)

$\sin^2 h + \cos^2 h = k^2 + \dfrac{k^2}{h^2} \Rightarrow 1 = k^2 + \dfrac{k^2}{h^2} \Rightarrow h^2 - k^2 = h^2 k^2$

अतः स्पर्श बिन्दु का बिन्दुपथ $x^2 - y^2 = x^2 y^2$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 13. यदि वक्र $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा OX तथा OY अक्षों को क्रमशः P और Q बिंदुओं पर काटे तो सिद्ध कीजिए $OP + OQ = a$

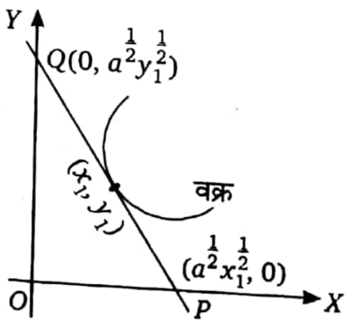
[उं० प्र० डिप्लोमा 2008]

हल : मान लीजिये अभीष्ट बिन्दु (x_1, y_1) है, तो $x_1^{1/2} + y_1^{1/2} = a^{1/2}$ ...(1)

[$\because$ बिन्दु वक्र पर है]

$\dfrac{1}{2}x^{-1/2} + \dfrac{1}{2}y^{-1/2}\dfrac{dy}{dx} = 0$ [(1) के अवकलन से]

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\left(\dfrac{y}{x}\right)^{1/2} \Rightarrow \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = -\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right)^{1/2}$



वक्र के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = -\left(\dfrac{y_1}{x_1}\right)^{1/2}(x - x_1)$$

$\Rightarrow \dfrac{y}{y_1^{1/2}} - y_1^{1/2} = -\dfrac{x}{x_1^{1/2}} + x_1^{1/2} \Rightarrow \dfrac{x}{x_1^{1/2}} + \dfrac{y}{y_1^{1/2}} = x_1^{1/2} + y_1^{1/2} = a^{1/2}$ [समी० (1) से]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{a^{1/2}x_1^{1/2}} + \frac{y}{a^{1/2}y_1^{1/2}} = 1 \qquad ...(2)$$

$\because$ स्पर्श रेखा OX तथा OY को क्रमशः P और Q पर काटती है।

$\therefore$ $OP = a^{1/2}x_1^{1/2}$ और $OQ = a^{1/2}y_1^{1/2}$ [समीकरण (2) में क्रमशः $x = 0$ तथा $y = 0$ प्रतिस्थापित करने पर]

$\therefore$ $OP + OQ = a^{1/2}\, x_1^{1/2} + a^{1/2}y_1^{1/2} = a^{1/2}(x_1^{1/2} + y_1^{1/2}) = a^{1/2}a^{1/2}$, समीकरण (1) से

$= a$ अचर संख्या।

उदाहरण 14. सिद्ध कीजिए कि वक्र $y = x^2$ और $xy = k$ एक-दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं, यदि $8k^2 = 1$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]

हल : दिये गए समीकरण $y = x^2$ तथा $xy = k$ के हल करने पर प्रतिच्छेद बिन्दु $= (k^{1/3}, k^{2/3})$

प्रथम समीकरण $\quad y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x$

$\therefore$ इस वक्र का स्पर्श रेखा की प्रवणता $\quad m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(k^{1/3},\, k^{2/3})} = 2k^{1/3} \qquad ...(i)$

द्वितीय वक्र का समीकरण $xy = k$ या $y = x^{-1}k \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}k$

इस वक्र का स्पर्श रेखा की प्रवणता $m_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(k^{1/3},\, k^{2/3})} = -\frac{1}{k^{2/3}}k = -k^{1/3}$

ये लम्ब होंगे यदि $m_1 . m_2 = -1$

या $\quad 2k^{1/3}.(-k^{1/3}) = -1 \Rightarrow \quad 2k^{2/3} = 1 \quad \Rightarrow \quad (2k^{2/3})^3 = (1)^3 \quad \Rightarrow \quad 8k^2 = 1$

उदाहरण 15. सिद्ध कीजिए कि $a_1x^2 + b_1y^2 = 1$ तथा $a_2x^2 + b_2y^2 = 1$ एक दूसरे को समकोण पर काटेंगे यदि $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{b_2}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2006, 2007]

हल : दिये हुए वक्रों के समीकरण $\quad a_1x^2 + b_1y^2 = 1 \qquad ...(1)$

तथा $\quad a_2x^2 + b_2y^2 = 1$ हैं। $\qquad ...(2)$

समीकरण (1) का अवकलन करने पर, $\quad 2a_1x + 2b_1y\frac{dy}{dx} = 0$ या $\frac{dy}{dx} = -\frac{a_1x}{b_1y}$

इसी प्रकार समीकरण (2) का अवकलन करने पर, $\quad 2a_2x + 2b_2y\frac{dy}{dx} = 0$ या $\frac{dy}{dx} = -\frac{a_2x}{b_2y}$

ये वक्र एक दूसरे को समकोण पर काटेंगे यदि प्रतिच्छेद बिन्दुओं पर दोनों वक्रों की स्पर्श रेखाओं की प्रवणताओं का गुणनफल $= -1$

$$\Rightarrow \left(\frac{-a_1x}{b_1y}\right).\left(\frac{-a_2x}{b_2y}\right) = -1 \qquad \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = -\frac{b_1b_2}{a_1a_2} \qquad ...(3)$$

पुनः (1) तथा (2) से, $\quad (a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)y^2 = 0 \qquad$ (घटाने पर)

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{-(b_1 - b_2)}{a_1 - a_2} \qquad ...(4)$$

$$\frac{-b_1b_2}{a_1a_2} = -\left(\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}\right) \qquad [(3) \text{ और } (4) \text{ से}]$$

$$\frac{a_1 - a_2}{a_1a_2} = \frac{b_1 - b_2}{b_1b_2} \Rightarrow \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} \Rightarrow \frac{1}{a_1} - \frac{1}{b_1} = \frac{1}{a_2} - \frac{1}{b_2}$$

सिद्धम्

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

उदाहरण 16. यदि समकोणीय अतिपरवलय $xy = c^2$ के बिन्दु t पर खींचा गया अभिलम्ब अतिपरवलय से बिन्दु t' पर मिलता है तो सिद्ध कीजिए कि $t^3 t' = -1$.

हल : दिए गए समीकरण $xy = c^2$ या $y = \frac{c^2}{x} \Rightarrow y = c^2 x^{-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -c^2 x^{-2} = -\frac{c^2}{x^2}$

[x के सापेक्ष अवकलन से]

बिन्दु t अर्थात् $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ पर $\frac{dy}{dx} = -\frac{c^2}{c^2 t^2} = -\frac{1}{t^2}$

't' पर अभिलम्ब का समीकरण $y - \frac{c}{t} = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{t^2}\right)}(x - ct) \Rightarrow y - \frac{c}{t} = t^2 (x - ct)$

यह पुन: बिन्दु t' अर्थात् $\left(ct', \frac{c}{t'}\right)$ से होकर जाता है, तब $\frac{c}{t'} - \frac{c}{t} = t^2 (ct' - ct)$

$$c\left(\frac{t - t'}{tt'}\right) = ct^2 (t' - t) = -ct^2 (t - t')$$

या $\frac{c}{tt'} = -ct^2$ या $-1 = t^3 t'$ या $t^3 t' = -1$ **सिद्धम्**

महत्वपूर्ण सूत्र

1. किसी वक्र के बिंदु (x_1, y_1) पर

(A) (i) स्पर्श रेखा की प्रवणता (या ढाल) $= \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = \tan \psi$, जहाँ ψ स्पर्श रेखा का x-अक्ष से झुकाव है

(ii) अभिलम्ब की प्रवणता $= -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}} = -\cot \psi$

(iii) स्पर्श रेखा $y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} (x - x_1)$

(iv) अभिलम्ब $y - y_1 = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}} (x - x_1)$

(B) (i) यदि $\frac{dy}{dx} = 0$, तो स्पर्श रेखा x-अक्ष के समानांतर होगी

(ii) $\frac{dy}{dx} = \infty$, तो स्पर्श रेखा x-अक्ष पर लम्ब होगी

(iii) $\frac{dy}{dx} = \pm 1$, तो स्पर्श रेखा अक्षों से बराबर कोण बनायेगी

(C) (i) स्पर्श रेखा किसी अन्य दी हुई रेखा के समानांतर है, तो स्पर्श रेखा का $\frac{dy}{dx}$ = दी गई रेखा का $\frac{dy}{dx}$

(ii) यदि वक्र C_1 के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा अन्य दी हुई रेखा पर लम्ब है, तो

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1} \times \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{रेखा}} = -1$$

2. स्पर्श रेखा द्वारा

(i) x-अक्ष पर कटे अंत:खंड की लम्बाई प्राप्त करने के लिए स्पर्शी के समीकरण में $y=0$ रखें।

(ii) y-अक्ष पर कटे अंत:खंड की लम्बाई प्राप्त करने के लिए स्पर्शी के समीकरण में $x=0$ रखें।

3. दो वक्रों C_1 तथा C_2 के बीच का न्यूनकोण $\tan\phi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1} - \left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2}}\right|$

4. (i) यदि $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1} \times \left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2} = -1$ तो C_1 तथा C_2 लम्ब वक्र हैं।

(ii) यदि $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_1} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_2}$ तो C_1 तथा C_2 स्पर्शी वक्र हैं।

प्रश्नावली 20.1

1. (i) दीर्घवृत्त $2x^2 + 3y^2 = 14$ के बिंदु (1, 2) पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात करें।

(ii) अति परवलय $x^2 - 2y^2 = 8$ के बिन्दु (4, 2) पर स्पर्शी और अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिये।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2014]

(iii) वक्र $y = 2x^3 + 3x^2 - 4$ के बिन्दु (1, 1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

2. वक्र $6y = 9 - 3x^2$ के बिंदु (1, 1) पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]

3. वृत्त $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ के बिंदु (2, 3) पर स्पर्शी का समीकरण ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]

4. (i) अतिपरवलय $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ के बिन्दु (6, 4) पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2007]

(ii) परवलय $y^2 = 4x$ के उन अभिलंबों का समीकरण ज्ञात करें जो बिन्दु (3, 0) से गुजरता है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1993, 01]

(iii) $4x^2 + 9y^2 = 36$ के बिन्दु (3, – 2) पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात करो।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(S)]

(iv) $4x^2 + 9y^2 = 72$ के बिन्दु (3, – 2) पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात करो।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(O)]

5. वक्र $x = at^2, y = 2at$ के बिंदु t पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात करें।

6. (i) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिंदु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करें।

(ii) सिद्ध कीजिए कि रेखा $y = mx + \frac{a}{m}$ परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ पर स्पर्शी हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

7. $x^2+y^2=4$ की उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो x-अक्ष से $60°$ का कोण बनाती है।
[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]

8. वृत्त $x^2+y^2=9$ की उस स्पर्शी का समीकरण ज्ञात करें जो x-अक्ष से $45°$ का कोण बनाती है।

9. $y=2\sqrt{x-1}$ के उस बिंदु पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करें जहाँ $x=10$.

10. परवलय $y^2=4x+5$ की उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो सरल रेखा $y=2x+7$ के समानांतर है।
[**संकेत :** स्पर्शी की ढाल = दी गई सरल रेखा की ढाल]

11. वक्र $x^2+y^2-2x-3=0$ पर वे बिंदु ज्ञात करें जिन पर खींची गई स्पर्श रेखायें x-अक्ष के समानांतर हैं।
[उ० प्र० डिप्लोमा 1995]

12. वक्र $x^2+y^2+8x-6y+2=0$ पर वे बिंदु ज्ञात करो जहाँ स्पर्शियाँ (i) x-अक्ष के समानांतर हैं (ii) y-अक्ष के समांतर हैं।

13. वक्र $y=x^2+3x+4$ की जो स्पर्श रेखायें मूल बिंदु से होकर जाती हैं, उनके स्पर्श बिंदु ज्ञात करें।
[उ० प्र० डिप्लोमा 1975, 76, 96]

14. वक्र $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$ के बिन्दु θ पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात करें।

15. वक्र $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ के बिंदु t पर स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात करें।

16. वक्र $y(x^2+a^2)=ax^2$ के उन बिंदुओं पर जिनके लिए $y=\dfrac{a}{4}$ है, अभिलम्बों के समीकरण ज्ञात करें।
[उ० प्र० डिप्लोमा 1971]

17. $y=b\sin\dfrac{\pi x}{a}$ के लिए बिंदु $x=\dfrac{a}{4}$ पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात करें।
[उ० प्र० डिप्लोमा 1982]

18. वक्र $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ के वे बिन्दु ज्ञात करें जिन पर स्पर्श रेखा और अभिलम्ब x–अक्ष के समानांतर हैं।

19. यदि वक्र $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ के किसी बिन्दु पर खींचा गया अभिलम्ब x-अक्ष से ϕ कोण बनाता है, तो सिद्ध करें
$$y\cos\phi-x\sin\phi=a\cos 2\phi.$$
[उ० प्र० डिप्लोमा 1990, 2001]

20. दिखाइये कि परवलय $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ की स्पर्श रेखा द्वारा x तथा y अक्षों पर काटे अंत:खंडों का योग a के बराबर होता है।
[उ० प्र० डिप्लोमा 1986, 2008]

21. यदि वक्र $\left(\dfrac{x}{a}\right)^n+\left(\dfrac{y}{b}\right)^n=2$ को सरल रेखा $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2$, x के प्रत्येक मान के लिए स्पर्श करती है, तो स्पर्श बिन्दु ज्ञात करें।
[उ० प्र० डिप्लोमा 1990, 2007]
[**संकेत :** वक्र की स्पर्श रेखा का समीकरण प्राप्त करें]

22. दिखायें कि दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ के बिन्दु $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ पर अभिलम्ब का समीकरण
$$\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2 \text{ है।}$$

23. निम्नलिखित वक्रों के प्रतिच्छेद कोण ज्ञात करें :
(i) $y=x^2$ और $y=x^3$ (ii) $y^2=x, x^2=y$ (iii) $y^2=ax, x^2=ay$
(iv) सिद्ध करें वक्र $x^2+4y^2=8$ और $x^2-2y^2=4$ परस्पर समकोण पर काटते हैं।
[उ० प्र० डिप्लोमा 2014]

24. (i) सिद्ध कीजिए वक्र $y=x^2, xy=k$ एक दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेद करते हैं, यदि $8k^2=1$
[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]
(ii) सिद्ध कीजिए कि वक्र $x^2-y^2=16$ और $xy=15$ एक–दूसरे को समकोण पर काटते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

(iii) सिद्ध कीजिए कि वक्र $x^2 - y^2 = 16$ और $xy = 15$ एक-दूसरे को समकोण पर काटते हैं।

25. दिखायें कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ तथा वृत्त $x^2 + y^2 = 6$ का प्रतिच्छेदन कोण $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ है।

26. वक्र $y = 4x^2$ और $y = 8x^3$ के प्रतिच्छेद बिंदुओं के निर्देशांक ज्ञात करें। इन बिंदुओं पर स्पर्श रेखा का समीकरण तथा उनके बीच का कोण ज्ञात करें।

उत्तरमाला

1. (i) स्पर्श रेखा $x + 3y = 7$, अभिलम्ब $3x - y = 1$ (ii) स्पर्श रेखा $x - y - 2 = 0$, अभिलम्ब $x + y - 6 = 0$
(iii) $12x - y = 11$

2. स्पर्श रेखा $y + x = 2$, अभिलम्ब $y = x$

3. $x + y - 5 = 0$

4. (i) $3x + 8y - 50 = 0$
(ii) $y = 0; x + y = 3; y - x + 3 = 0$
(iii) $3x + 2y - 5 = 0$
(iv) $3x + 2y - 5 = 0$

5. स्पर्श रेखा $x - ty + at^2 = 0$, अभिलम्ब $tx + y = 2at + at^3$

6. $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

7. $\sqrt{3}x - y + 4 = 0, \sqrt{3x} - y = 4$

8. $x - y = \pm 3\sqrt{2}$

9. $x - 3y + 8 = 0$

10. $y = 2x + 3$

11. $(1, 2), (1, -2)$

12. (i) $-4, 3 \pm \sqrt{23}$,
(ii) $-4 \pm \sqrt{23}, 3$

13. $(2, 14), (-2, 2)$

14. स्पर्श रेखा $bx \cos\theta + ay \sin\theta = ab$, अभिलम्ब $ax \sec\theta - by \operatorname{cosec}\theta = a^2 - b^2$

15. स्पर्श रेखा $x \sin t + y \cos t = a \sin t \cos t$, अभिलम्ब $x \cos t - y \sin t = a \cos 2t$

16. $32\sqrt{3}x + 36y - 41a = 0, 32\sqrt{3}x - 36y + 41a = 0$

17. $4ax + 2\sqrt{2}\,\pi by = 2\pi b^2 + a^2$

18. $(a, 0), (0, a)$

21. (a, b)

23. (i) $\tan^{-1}(1/7), 0°$; (ii) $\tan^{-1}(3/4), 90°$ (iii) $\tan^{-1}(3/4), 90°$

26. स्पर्श बिन्दु $(0, 0), \left(\frac{1}{2}, 1\right)$; स्पर्श रेखायें $y = 0; y = 4x - 1; y = 6x - 2$; कोण $\tan^{-1}\frac{2}{25}$

❒❒❒

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अध्याय 21 वर्द्धमान एवं ह्रासमान फलन (Increasing and Decreasing Functions)

AKC TECHNICAL CLASSES

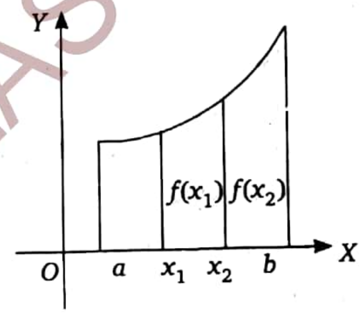
21.1 वर्द्धमान फलन (Increasing Function)

कोई फलन $f(x)$ दिए गए अंतराल (a, b) में वर्द्धमान फलन कहा जाता है, यदि

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2), \text{ जहाँ } x_1, x_2 \in (a, b)$$

अत: यदि x का मान बढ़ने से फलन का मान उस अंतराल में **बढ़ता** है, तो फलन उस अंतराल में **वर्द्धमान फलन** कहलाता है।

दिए गए लेखाचित्र में हम देखते हैं कि जैसे-जैसे x का मान बढ़ता है (बायीं से दायीं ओर जाने में) वैसे-वैसे $f(x)$ का मान बढ़ता है। अत: $f(x)$ एक वर्द्धमान फलन है।



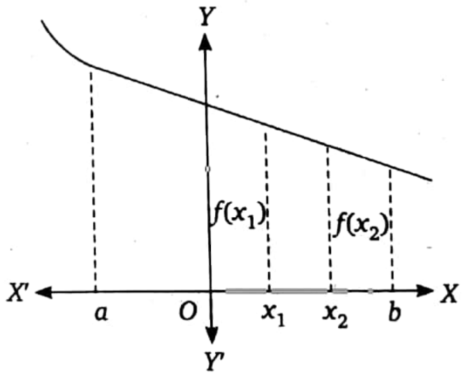
21.2 ह्रासमान फलन (Decreasing Function)

एक फलन $f(x)$ किसी दिए गए अंतराल (a, b) में ह्रासमान फलन कहलाता है, यदि

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2), \text{ जहाँ } x_1, x_2 \in (a, b)$$

अत: यदि x का मान **बढ़ने** से $f(x)$ का मान उस अंतराल में **घटता** है तो फलन दिए गए अंतराल में **ह्रासमान फलन** कहलाता है।

साथ में दिए गए लेखाचित्र में स्पष्ट है कि ज्यों-ज्यों x का मान बढ़ता जाता है, $f(x)$ का मान घटता जाता है। अत: यह ह्रासमान फलन को दर्शाता है।



टिप्पणी : (i) पूर्णतः वर्द्धमान एवं पूर्णतः ह्रासमान (Strictly increasing and Strictly decreasing)

यदि किसी अंतराल (a, b) में फलन $f(x)$ के लिए $x_1 < x_2$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, तो फलन को पूर्णत: वर्द्धमान फलन

तथा $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, तो फलन को पूर्णत: ह्रासमान फलन कहते है।

(ii) कोई फलन दिए गए अंतराल में वर्द्धमान (ह्रासमान) है, तो आवश्यक नहीं कि वह पूर्णत: वर्द्धमान (ह्रासमान) हो।

21.2.1 किसी बिंदु तथा अंतराल में वर्द्धमान तथा ह्रासमान फलन की जाँच :

(a) बिंदु : कोई फलन किसी बिंदु (x_1, y_1) पर वर्द्धमान होगा, यदि $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} > 0$

तथा ह्रासमान होगा, यदि $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} < 0$

Scanned with CamScanner

(b) अंतराल : (i) फलन किसी दिए गए अंतराल में **वर्द्धमान होगा** यदि उस अंतराल (a, b) में $\frac{dy}{dx} > 0$ $\forall\, x_1, x_2 \in (a, b)$ तथा ह्रासमान होगा यदि $\frac{dy}{dx} < 0 \;\forall\, x_1, x_2 \in (a, b)$.

21.2.2 वर्द्धमान या ह्रासमान फलनों के लिए अंतराल का निर्धारण

दिया गया फलन जिस अंतराल में वर्द्धमान या ह्रासमान है, इसके निर्धारण के लिए निम्न क्रिया विधि अपनाई जाती है—

I. दिए गए फलन को $y = f(x)$ के रुप में लिखें

II. $f'(x)$ का मान ज्ञात करें

III. अब वर्द्धमान के लिए $f'(x) > 0$ रखकर असमिका को हल करें तथा अंतराल प्राप्त करें; ह्रासमान के लिए $f'(x) < 0$ रखकर असमिका को हल करें तथा अंतराल प्राप्त करें।

21.2.3 असमिका (Inequation) हल के लिए महत्वपूर्ण परिणाम

यदि a, b वास्तविक संख्यायें हो, तो

(i) $a > 0 \Rightarrow -a < 0$ तथा $a < 0 \Rightarrow -a > 0$

(ii) $ab > 0 \Rightarrow a < 0, b < 0$ अथवा $a > 0, b > 0$

(iii) $ab < 0 \Rightarrow a > 0, b < 0$ या $a < 0, b > 0$

(iv) $ab > 0, a > 0 \Rightarrow b > 0$

(v) $ab < 0$ तथा $a < 0 \Rightarrow b > 0$

(vi) $a^2 > 0 \;\forall\; a \in R$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. फलन $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 20$

(i) $x = 2$ पर वर्द्धमान फलन है (ii) $x = -1.1$ पर ह्रासमान है।

हल : दिया गया फलन $y = f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 20$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 18x + 12 = 6(x^2 + 3x + 2)$$

(i) $x = 2$ के लिए

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2} = 6(2^2 + 3 \times 2 + 2) = 6(4 + 6 + 2) = 72 > 0$$

अत: $f(x)$, $x = 2$ पर वर्द्धमान है।

(ii) $x = -1.1$ के लिए

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-1.1} = 6\{(-1.1)^2 + 3 \times (-1.1) + 2\} = 6\{1.21 - 3.3 + 2\}$$

$$= 6\{3.21 - 3.3\} = 6 \times -(0.09) = -0.54 < 0$$

अत: $x = -1.1$ पर $f(x)$ ह्रासमान है।

उदाहरण 2. यदि $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 15$ तो वह अंतराल ज्ञात करें जिसमें $f(x)$ (i) वर्द्धमान है (ii) ह्रासमान है।

हल : दिया गया फलन $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 15$

$$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$$

(i) यदि $f'(x)$ वर्द्धमान है, तो $f'(x) > 0$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \; 6(x^2 - 3x + 2) > 0$ $\qquad \Rightarrow \; x^2 - 3x + 2 > 0 \qquad [\because 6 > 0]$

$\Rightarrow \; (x-2)(x-1) > 0$

$\Rightarrow \; x < 1$ या $x > 2$ $\qquad [\because ab > 0 \Rightarrow a < 0, b < 0$ या $a > 0, b > 0]$

$\Rightarrow \; x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

(ii) यदि $f'(x)$ ह्रासमान है, तो $f'(x) < 0$

$\Rightarrow \; 6(x^2 - 3x + 2) < 0$ $\qquad \Rightarrow \; x^2 - 3x + 2 < 0 \qquad [\because 6 > 0]$

$\Rightarrow \; (x-1)(x-2) < 0$ $\qquad \Rightarrow \; 1 < x < 2 \; \Rightarrow \; x \in (1, 2)$

अत: दिया गया फलन (1, 2) में ह्रासमान है।

उदाहरण 3. यदि $f(x) = \sin x + \cos x, \; 0 \le x \le 2\pi$ तो $f(x)$ के वर्द्धमान तथा ह्रासमान होने के लिए अंतराल का निर्धारण करें।

हल : यहाँ $f(x) = \sin x + \cos x$

$\Rightarrow \; f'(x) = \cos x - \sin x$ $\qquad \Rightarrow \; f'(x) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)$

$\Rightarrow \; f'(x) = \sqrt{2}\left\{\sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x\right\}$ $\qquad \Rightarrow \; f'(x) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

अब $f(x)$ वर्द्धमान होगा यदि $f'(x) > 0$

$\Rightarrow \; \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0$ $\qquad \Rightarrow \; -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

$\Rightarrow \; \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$ $\qquad \Rightarrow \; \pi < x - \frac{\pi}{4} < 2\pi$

$\Rightarrow \; \pi + \frac{\pi}{4} < x < 2\pi + \frac{\pi}{4}$ $\qquad \Rightarrow \; \frac{5\pi}{4} < x < \frac{9\pi}{4}$

$\Rightarrow \; \frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$ या $2\pi < x < \frac{9\pi}{4}$ $\qquad \Rightarrow \; \frac{5\pi}{4} < x < 2\pi$ या $0 < x < \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \; x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$

अत: $f(x)$ अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ तथा $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$ में वर्द्धमान है।

पुन: यदि $f(x)$ ह्रासमान है, तो $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) < 0$

$\Rightarrow \; -\sqrt{2}\sin(x - \pi/4) < 0$ $\qquad \Rightarrow \; \sin(x - \pi/4) > 0$

$\Rightarrow \; 0 < x - \pi/4 < \pi \; \Rightarrow \; \pi/4 < x < 5\pi/4$ $\qquad \Rightarrow \; x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

$\therefore \; f(x)$ अंतराल $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ में ह्रासमान है।

उदाहरण 4. सिद्ध करें कि $f(\theta) = \frac{4\sin\theta}{2 + \cos\theta} - \theta$ अंतराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में वर्द्धमान है।

हल : यहाँ $f(\theta) = \frac{4\sin\theta}{2 + \cos\theta} - \theta$ $\qquad \Rightarrow \; f'(\theta) = \frac{(2 + \cos\theta)\,4\cos\theta - 4\sin\theta\,(0 - \sin\theta)}{(2 + \cos\theta)^2} - 1$

$$\Rightarrow \; f'(\theta) = \frac{8\cos\theta + 4\cos^2\theta + 4\sin^2\theta}{(2 + \cos\theta)^2} - 1$$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \quad f'(\theta) = \dfrac{8\cos\theta + 4}{(2+\cos\theta)^2} - 1 \qquad \Rightarrow \quad f'(\theta) = \dfrac{8\cos\theta + 4 - (2+\cos\theta)^2}{(2+\cos\theta)^2}$

$\Rightarrow \quad f'(\theta) = \dfrac{4\cos\theta - \cos^2\theta}{(2+\cos\theta)^2} \qquad \Rightarrow \quad f'(\theta) = \dfrac{4\cos\theta(1-\cos\theta)}{(2+\cos\theta)^2} > 0$, जहाँ $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

अत: $f(x)$ अंतराल $[0, \pi/2]$ में वर्द्धमान है।

उदाहरण 5. दिखायें कि $f(x) = x^2 - x + 1$ अंतराल $(-1, 1)$ में न तो वर्द्धमान है, न ही ह्रासमान

हल : यहाँ $f(x) = x^2 - x + 1$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 1 \qquad \Rightarrow \quad f'(x) = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$

अब $-1 < x < \dfrac{1}{2} \Rightarrow x - \dfrac{1}{2} < 0 \Rightarrow 2(x - 1/2) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

तथा $1/2 < x < 1 \Rightarrow x - 1/2 > 0 \Rightarrow 2(x - 1/2) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

अत: $f'(x)$ का मान सम्पूर्ण अंतराल $(-1, 1)$ में समान नहीं है।

अत: $f(x)$ अंतराल $(-1, 1)$ मे न तो वर्द्धमान है और न ही ह्रासमान।

उदाहरण 6. सिद्ध करें $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ प्रत्येक वास्तविक मान के लिए वर्द्धमान है।

हल : दिया गया फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$

$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$

अब $\quad x \in R, (x-1)^2 \geq 0$ [$\because$ यह वास्तविक संख्या का वर्ग है]

$\Rightarrow \quad f'(x) \geq 0$

$\therefore \quad f'(x), x$ के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए धनात्मक है।

अत: $f(x), x$ के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए वर्द्धमान है।

उदाहरण 7. दिखायें $f(x) = e^x, \forall x \in R$ पूर्णत: वर्द्धमान फलन है।

हल : माना $x_1, x_2 \in R$ तथा $x_1 > x_2$ तो $e^{x_1} > e^{x_2}$ [$\because e > 1$]

$\Rightarrow \quad f(x)_1 > f(x_2)$

इस तरह $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), x_1, x_2 \in R$

अत: $f(x) = e^x$ पूर्णत: वर्द्धमान फलन है।

महत्वपूर्ण तथ्य

1. यदि फलन $f(x)$ का मान किसी अंतराल में x का मान बढ़ने से बढ़ता है तथा घटने से घटता है तो फलन वर्द्धमान (Increasing) कहलाता है।
2. वर्द्धमान फलन के लिए $\dfrac{dy}{dx} > 0$ तथा ह्रासमान फलन के लिए $\dfrac{dy}{dx} < 0$

प्रश्नावली 21.1

1. दिखाइये कि $f(x) = -x^2 - 2x + 15$,
   (i) $x = -2$ पर वर्द्धमान है। (ii) $x = 2$ पर ह्रासमान है।
2. दिखायें कि $y = \log x - \dfrac{2x}{2+x}$, $x = 2$ पर वर्द्धमान फलन है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

3. फलन $f(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 20$ के लिए वे अंतराल प्राप्त करें, जिनमें
(i) $f(x)$ वर्द्धमान है (ii) $f(x)$ ह्रासमान है।

4. फलन $f(x) = 10 - 6x - 2x^2$ के लिए अंतराल का निर्धारण करें जिसमें (i) $f(x)$ वर्द्धमान है (ii) $f(x)$ ह्रासमान है।

5. दिखाइये कि फलन $y = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} - \theta$ अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान है।

6. दिखायें कि फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$, x के सभी मानों के लिए पूर्णतः वर्द्धमान है।

7. दिखायें कि फलन $f(x) = \cos x$ अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में ह्रासमान है।

8. दिखायें कि $f(x) = 3x^5 + 40x^3 + 240x$ वास्तविक मानों के लिए वर्द्धमान है।

9. अंतराल प्राप्त करें जिसमें $f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$ (i) वर्द्धमान है, (ii) ह्रासमान है।

10. यदि $a > 1$ तथा $a \in R$ तो दिखायें $f(x) = a^x, x \in R$ एक पूर्णतः वर्द्धमान फलन है।

11. दिखायें $f(x) = e^{-x}, x \in R$ पूर्णतः ह्रासमान फलन है।

उत्तरमाला

3. (i) वर्द्धमान $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$ (ii) ह्रासमान $(-2, -1)$

4. (i) वर्द्धमान $(-\infty, -3/2)$ (ii) ह्रासमान $(-3/2, \infty)$

9. (i) वर्द्धमान $[0, \infty[$ (ii) ह्रासमान $]-\infty, 0]$

❏❏❏

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अध्याय 22

उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ (Maxima and Minima)

इंजीनियरिंग समस्याओं के समाधान के क्रम में हमें अक्सर किसी भौतिक राशि के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान की आवश्यकता होती है। जैसे—किसी खिड़की के निर्माण के समय हमें उसकी लंबाई और चौड़ाई (विमायें) इस प्रकार लेनी होती है, जिससे घर में अधिकतम धूप या हवा आ सके।

ऐसी समस्याओं का समाधान अवकलन गणित की सहायता से आसानी से निकाला जा सकता है।

22.1 परिभाषायें (Definitions)

(i) उच्चिष्ठ (Maxima) : कोई फलन $y = f(x)$ बिन्दु $x = a$ पर उच्चिष्ठ (Maximum) या स्थानीय उच्चिठ (local maximum) कहलाता है, यदि इस बिंदु पर $f(a)$ का मान उन सभी मानों से बड़ा हो, जो $x = a$ के लघु सामीप्य (small neighbourhood) में $f(x)$, x के प्रत्येक मान के लिए ग्रहण कर सकता है।

अर्थात् यदि $f(x) < f(a) \ \forall \ x \in (a-h, a+h), x \neq a$

(ii) निम्निष्ठ (Minima) : कोई फलन $f(x), x = a$ पर निम्निष्ठ (Minimum) या स्थानीय निम्निष्ठ (local minimum) कहलाता है यदि $f(a)$ का मान उन सभी मानों से छोटा हो, जो $x = a$ के लघु सामीप्य (small neighbourhood) में $f(x)$, x के प्रत्येक मान के लिए ग्रहण कर सकता है।

अर्थात् यदि $f(x) > f(a) \ \forall \ x \in (a-h, a+h), x \neq a$

वे बिन्दु जिन पर फलन उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ होता है, **चरम बिन्दु (Extreme points)** तथा मान **चरम मान (Extreme values)** कहलाते हैं।

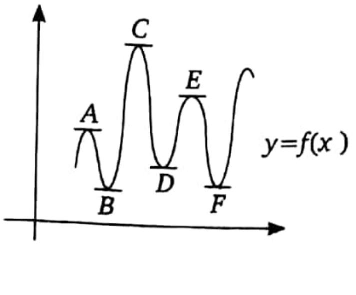
(iii) किसी दिए हुए अंतराल में फलन का उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान (Maximum and Minimum value of a function in a given closed interval) : यदि कोई फलन $f(x)$ अंतराल $[a, b]$ में परिभाषित हो तथा M एवं m क्रमशः फलन के किसी बिन्दु पर उसके स्थानीय उच्चिष्ठ या स्थानीय निम्निष्ठ मान हों तो फलन का निम्नतम मान $m, f(a)$ तथा $f(b)$ में सबसे छोटा मान होगा अर्थात् निम्नतम मान $= \min[m, f(x), f(b)]$

इसी प्रकार इस अंतराल में अधिकतम मान $M, f(a)$ तथा $f(b)$ में सबसे बड़ा मान होगा।

अर्थात् **अधिकतम मान = Max $[M, f(a), f(b)]$.**

22.2 ग्राफीय निरूपण (Graphical Representation)

मान लिया $y = f(x)$ कोई सतत वक्र है जिसे चित्र में प्रदर्शित किया गया है। वक्र के बिन्दु A, B, C, D, E तथा F पर विचार करें। इन बिन्दुओं पर खींची गई स्पर्श रेखायें x-अक्ष के समानांतर हैं।



A के बायीं ओर के बिन्दुओं पर x (भुज) का मान जैसे-जैसे बढ़ता है, y (कोटि) का मान बढ़ता जाता है तथा A पर इसका मान महत्तम होता है। हम जैसे-जैसे A के दायीं ओर बढ़ते हैं, y का मान घटना शुरू हो जाता है तथा B पर इसका मान न्यूनतम होता है। इसी प्रकार C तथा E पर भी कोटि का मान महत्तम होता है तथा D एवं F पर न्यूनतम होता है। इस तरह हम देखते हैं कि बिन्दु A, C तथा E पर y (कोटि) का मान उनके दोनों ओर के पास बिन्दुओं के कोटियों के मान में

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

सर्वाधिक होता है। अतः A, C तथा E **स्थानीय उच्चिष्ठ मान** वाले बिन्दु कहलाते हैं। इसी तरह B, D, F पर कोटि का मान पास के बिन्दुओं से सबसे कम होती है। अतः B, D तथा F **स्थानीय निम्निष्ठ** मान वाले बिन्दु कहलाते हैं।

नोट :

- (i) फलन के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान का अर्थ यह नहीं कि वह उसका सबसे बड़ा या सबसे छोटा मान है, एक ही फलन के कई स्थानीय उच्चिष्ठ तथा कई स्थानीय निम्निष्ठ ऐसे मान हो सकते हैं जो एक दूसरे से बड़े या छोटे हों। चित्र में विभिन्न उच्चिष्ठ बिन्दु A, C, E एवं निम्निष्ठ बिंदु B, D, F दिखायें गए हैं।
- (ii) किसी अंतराल में फलन के किसी बिंदु पर स्थानीय निम्निष्ठ मान उसके स्थानीय उच्चिष्ठ से बड़ा हो सकता है।

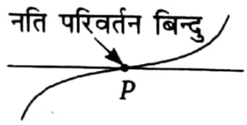
22.3 उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ के गुण (Properties of Maximum and Minimum)

1. किसी प्रान्त (Domain) में सतत फलन $f(x)$ के लिए उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मान एकांतर क्रम में आते हैं।
2. फलन $f(x)$ के दो समान मानों के बीच कम-से-कम एक उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान होता है, यदि $f(x)$ अचर फलन नहीं है।
3. उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ बिन्दुओं से होकर गुजरने पर फलन $y = f(x)$ के लिए dy / dx का चिह्न बदलता है। उच्चिष्ठ बिन्दु से होकर जाने पर यह धन से ऋण तथा निम्निष्ठ बिन्दु से होकर जाने पर ऋण से धन में परिवर्तित होता है।
4. उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ बिन्दु पर स्पर्श रेखायें x-अक्ष के समानांतर होती हैं।
5. (a) उच्चिष्ठ बिन्दु के लिए (i) $\frac{dy}{dx} = 0$ तथा (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\text{ve}$

   (b) निम्निष्ठ बिन्दु के लिए (i) $\frac{dy}{dx} = 0$ तथा (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} = +\text{ve}$

22.4 नति परिवर्तन बिंदु (Point of Inflexion)

यदि किसी बिंदु $x = a$ पर फलन न तो उच्चिष्ठ हो और न ही निम्निष्ठ, तो वह बिंदु नति परिवर्तन बिंदु कहलाता है। स्पष्ट है इस बिंदु के पहले या बाद में फलन के मान में कोई चिह्न परिवर्तन नहीं होता।



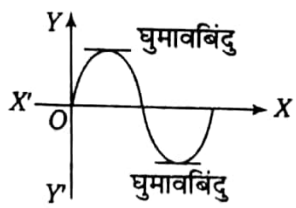
चित्र में बिंदु P से पहले तथा बाद में फलन वर्द्धमान है। P पर फलन के चिह्न में कोई परिवर्तन नहीं हुआ है। अतः P नति परिवर्तन बिंदु है।

किसी फलन $y = f(x)$ के नति परिवर्तन बिन्दु पर

(i) $\frac{dy}{dx} = 0$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (iii) $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$

22.5 घुमाव बिन्दु या स्थिर बिन्दु (Turning point or Stationary Point)

वह बिंदु जिस पर फलन $y = f(x)$ की प्रवृत्ति बदल जाती है अर्थात् वर्द्धमान फलन ह्रासमान में तथा ह्रासमान फलन वर्द्धमान में परिवर्तित हो जाता है, फलन का घुमाव बिंदु या स्थिर बिंदु कहलाता है। घुमाव बिंदु पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समानांतर होती है तथा यहाँ $\frac{dy}{dx} = 0$.



नोट :

- (i) वे बिन्दु जहाँ $\frac{dy}{dx} = 0$ या $f(x)$ अवकलनीय नहीं है, **क्रांतिक बिन्दु** (Critical points) कहलाते हैं। अतः स्थिर बिन्दु $\subseteq$ क्रांतिक बिन्दु

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

• (ii) वे बिन्दु जहाँ निम्निष्ठ या उच्चिष्ठ प्राप्त होता है, क्रांतिक बिन्दु होते है। किंतु फलन प्रत्येक क्रांतिक बिंदु पर उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ है, आवश्यक नहीं है।

22.6 फलन $y = f(x)$ के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ निकालने की कार्य विधि (Working Method for Finding Maxima amd Minima)

I. फलन को $y = f(x)$ के रूप में रखें।

II. $\frac{dy}{dx}$ का मान निकालें।

III. $\frac{dy}{dx} = 0$ लें तथा हल करके x के विभिन्न मान प्राप्त करें। मान ये मान $x = x_1, x_2 \ldots x_n$ हैं।

इन मानों में वास्तविक (Real) मान वाले बिन्दुओं पर फलन उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ होगा।

IV. प्राप्त बिन्दुओं के लिए अलग-अलग $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots$ का मान तब तक प्राप्त करें जब तक यह अशून्य (non-zero) न हो जाए।

यदि किसी बिन्दु के लिए

(a) विषम क्रम का अवकल गुणांक अशून्य है, तो उस बिन्दु पर फलन न तो उच्चिष्ठ होगा, न ही निम्निष्ठ।

(b) यदि किसी बिंदु पर सम क्रम का अवकल गुणांक अशून्य हो तो फलन उस बिन्दु पर

(i) उच्चिष्ठ होगा यदि यह –ve है,

(ii) निम्निष्ठ होगा यदि यह +ve है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. फलन $y = x^3 + x^2 - 8x + 1$ के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठि मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1991]**

हल : दिया गया फलन $y = x^3 + x^2 - 8x + 1$ ...(1)

$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x - 8$ ...(2)

अब, उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के लिए $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x+2)(3x-4) = 0$

अतः $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ $3x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4/3$

अतः फलन –2 तथा 4/3 पर उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ हो सकता है।

(2) को पुनः अवकलित करने पर $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 2$

अतः $x = -2$ पर $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{(x=-2)} = 6 \times (-2) + 2 = -12 + 2 = -10 < 0$

अतः $x = -2$ पर फलन उच्चिष्ठ होगा।

पुनः $x = 4/3$ पर $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=4/3} = 6 \times \frac{4}{3} + 2 = 8 + 2 = 10 > 0$

अतः $x = 4/3$ पर फलन निम्निष्ठ है।

उच्चिष्ठ मान : (1) में $x = -2$ रखने पर, $y = (-2)^3 + (-2)^2 - 8(-2) + 1 = -8 + 4 + 16 + 1 = 13$

निम्निष्ठ मान : $x = 4/3$ रखने पर

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

$$y=\left(\frac{4}{3}\right)^3+\left(\frac{4}{3}\right)^2-8\times\frac{4}{3}+1=\frac{64}{27}+\frac{16}{9}-\frac{32}{3}+1=\frac{64+48-288+27}{27}=\frac{149}{27}$$

उदाहरण 2. सिद्ध कीजिए $f(x)=x^3-3x^2+5x+11$, x के किसी भी मान के लिए उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ नहीं हैं।
[उ० प्र० डिप्लोमा 1987, 95]

हल : दिया गया फलन $y=f(x)=x^3-3x^2+5x+11$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=3x^2-6x+5$

उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ के लिए $\frac{dy}{dx}=0$ या $3x^2-6x+5=0$

$\therefore \quad x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(6)^2-4\times3\times5}}{2\times3}=\frac{6\pm\sqrt{36-60}}{6}=\frac{6\pm\sqrt{-24}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{-6}}{3}$, जो काल्पनिक है।

अत: फलन x के किसी भी वास्तविक मान के लिए उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ नहीं है।

उदाहरण 3. सिद्ध कीजिए $x=\frac{\pi}{3}$ पर $y=\sin x(1+\cos x)$ का मान उच्चिष्ठ है। मान की गणना करें।
[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]

हल : दिया गया फलन $y=\sin x(1+\cos x)$ ...(i)

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\cos x(1+\cos x)+\sin x(0-\sin x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\cos x+\cos 2x$ ...(ii)

$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x-2\sin 2x$ ...(iii)

(ii) से $x=\frac{\pi}{3}$ पर $\frac{dy}{dx}=\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

(iii) से $x=\frac{\pi}{3}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}=-\sin\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{2}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}<0$

अत: y का उच्चतम मान $x=\frac{\pi}{3}$ पर है।

$\therefore$ उच्चिष्ठ मान $=\sin\frac{\pi}{3}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ **उत्तर**

उदाहरण 4. सिद्ध कीजिए $x=\cos x$, $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ के लिए $\frac{x}{1+x\tan x}$ का मान उच्चतम है।
[उ० प्र० डिप्लोमा 1992, 17(SB)]

हल : फलन $\frac{x}{1+x\tan x}$ दिए गए बिन्दु पर उच्चिष्ठ होगा यदि $\frac{1+x\tan x}{x}$ दिए गए बिन्दु पर निम्निष्ठ होगा।

माना $y=\frac{1+x\tan x}{x} \Rightarrow y=\frac{1}{x}+\tan x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}+\sec^2 x$ ...(1)

उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ के लिए $\frac{dy}{dx}=0$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \quad -\frac{1}{x^2}+\sec^2 x=0 \quad \Rightarrow \quad \sec^2 x=\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \cos^2 x=x^2 \quad \Rightarrow \quad x=\cos x$

अब (1) को पुनः अवकलित करने पर $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{x^3}+2\sec^2 x.\tan x$

$x=\cos x$ पर, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2}{\cos^3 x}+2\sec^2 x.\tan x=2\sec^3 x+2\sec^2 x.\tan x$

$=2\sec^2 x(\sec x+\tan x)$, जो धन है। $[\because 0\le x\le \pi/2]$

अतः $x=\cos x$ पर $\frac{1+x\tan x}{x}$ निम्निष्ठ है।

$\therefore \quad \frac{x}{1+x\tan x}$, बिन्दु $x=\cos x$ पर उच्चिष्ठ है।

उदाहरण 5. अंतराल $0\le x\le 2\pi$ में $x+\sin 2x$ के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मान ज्ञात करें।

हल : माना $f(x)=y=x+\sin 2x$ ...(1)

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=1+2\cos 2x$ ...(2)

अब उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ के लिए $\frac{dy}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad 1+2\cos 2x=0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2x=-\frac{1}{2}$, जहाँ $x\in[0, 2\pi]$

$\Rightarrow \quad 2x=\frac{2\pi}{3}$ या $\frac{4\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x=\frac{\pi}{3}$ या $x=\frac{2\pi}{3}$

अब $f(0)=0;\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ तथा $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

तथा $f(2\pi)=2\pi+\sin 4\pi=2\pi+0=2\pi$

$\therefore$ इन मानों में महत्तम मान $=2\pi$ तथा निम्निष्ठ मान $=0$

अतः $f(x)$ का उच्चिष्ठ मान $=2\pi$ जो $x=2\pi$ पर है तथा निम्निष्ठ मान $=0$ जो $x=0$ पर है।

उदाहरण 6. सिद्ध कीजिए $x^{1/x}$ का उच्चतम मान $e^{1/e}$ है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2012]**

हल : माना $y=x^{1/x}$ ...(1)

$\Rightarrow \quad \log_e y=\frac{1}{x}\log_e x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}+\log x\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\left\{\frac{1-\log_e x}{x^2}\right\}$ ...(2)

अब y का मान उच्चतम या निम्नतम होने के लिए $\frac{dy}{dx}=0$ किन्तु $y=x^{1/x}>0$ $[\because x>0]$

अतः $\{1-\log_e x\}=0 \quad \Rightarrow \quad \log_e x=1=\log_e e \quad \therefore \quad x=e$

(2) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}=\left\{\frac{x^2\times\left(-\frac{1}{x}\right)-(1-\log_e x)\,2x}{x^4}\right\}=\frac{-3x+2x\log x}{x^4}=\frac{-3+2\log x}{x^3} \quad ...(3)$$

किन्तु $x=e$ पर $\frac{dy}{dx}=0$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

अतः (3) से $x=e$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}=\left[y\left(\frac{-3+2\log x}{x^3}\right)\right]_{x=e}$

$$=\frac{e^{1/e}\{-3+2\log_e e\}}{e^3}=\frac{e^{1/e}(-3+2)}{e^3}=\frac{-e^{1/e}}{e^3}<0 \qquad [\because 2<e<3]$$

अतः $x=e$ पर फलन उच्चतम है।

समीकरण (1) $x=e$ रखने पर

उच्चतम मान $y=e^{1/e}$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 7. सिद्ध करें कि $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ का महत्तम मान $e^{1/e}$ है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1989, 2004]

हल : माना $y=\left(\frac{1}{x}\right)^x$ ...(1)

$\Rightarrow \quad \log_e y=-x\log_e x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=-\left[x\times\frac{1}{x}+\log x\right]$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-y[1+\log_e x] \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-y\,[\log_e e+\log_e x]=-y\log_e(ex)]$ ...(2)

अब उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ के लिए $\frac{dy}{dx}=0$ अर्थात् $-y\log_e(ex)=0$ किन्तु $y\neq 0$

$\Rightarrow \quad \log_e(ex)=0=\log_e 1$

$\Rightarrow \quad ex=1 \qquad \Rightarrow \quad x=1/e$

पुनः $\frac{dy}{dx}=-y\,[1+\log x]=-\left(\frac{1}{x}\right)^x[1+\log x]$ ...(3)

$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\left[\left(\frac{1}{x}\right)^x.\frac{1}{x}+(1+\log x)\left\{-\left(\frac{1}{x}\right)^x(1+\log x)\right\}\right]$ [(3) से $\frac{dy}{dx}$ का मान रखने पर] ...(4)

अब $x=\frac{1}{e}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}=-e^{1/e}.e<0$ $\left[\because x=\frac{1}{e} \text{ पर } 1+\log x=0\right]$

अतः $x=\frac{1}{e}$ पर फलन उच्चिष्ठ है।

अतः उच्चिष्ठ मान $y=\left(\frac{1}{1/e}\right)^{1/e}=e^{1/e}$ [(1) से]

उदाहरण 8. $\frac{\log_e x}{x}$ का उच्चिष्ठ मान ज्ञात करों, जब $0<x<\infty$.

[उ० प्र० डिप्लोमा 1991]

हल : यहाँ $y=\frac{\log_e x}{x}$ ...(1)

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{x}+\log x\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2}[1-\log_e x]$ ...(2)

उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ के लिए $\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{1}{x^2}[1-\log_e x]=0 \qquad \Rightarrow 1-\log_e x=0$

$\Rightarrow \quad \log_e x=1=\log_e e \qquad \therefore \quad x=e$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(2) को पुनः अवकलित करने पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2 \times \left(-\frac{1}{x}\right) - (1-\log_e x) \times 2x}{x^4}$

$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x-2x+2x\log_e x}{x^4} \qquad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\log_e x - 3}{x^3}$

अतः $x = e$ पर $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\log_e e - 3}{e^3} = \frac{2-3}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0$

$\therefore$ अतः $x = e$ फलन उच्चिष्ठ है।

अतः उच्चिष्ठ मान $y = \frac{\log_e e}{e} = \frac{1}{e}$ **उत्तर**

उदाहरण 9. $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 27$ का महत्तम झुकाव ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]**

हल : दिया गया फलन $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 27$ ...(1)

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -3x^2 + 6x + 2$ यह किसी बिन्दु पर फलन का झुकाव है।

माना $\quad f(x) = \frac{dy}{dx} = -3x^2 + 6x + 2$ ...(2)

$\therefore \quad f'(x) = -6x + 6$ ...(3)

महत्तम या न्यूनतम के लिए $\quad -6x + 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

अब (1) को पुनः अवकलित करने पर, $f''(x) = -6 < 0$

अतः फलन x के सभी मानों के लिए महत्तम है। इसलिए $x = 1$ पर $f(x)$ अर्थात् y का झुकाव महत्तम होगा।

(2) में $x = 1$ रखने पर

$$f(1) = -3 \times 1^2 + 6 \times 1 + 2 = -3 + 6 + 2 = 5$$

अतः फलन का महत्तम झुकाव $= 5$

उदाहरण 10. एक पनडुब्बी के टेलीग्राफ संकेतों की गति $x^2 \log \frac{1}{x}$ के समानुपाती है, जहाँ x कोड तथा खोल (case) की त्रिज्याओं का अनुपात है। दिखाओ कि अधिकतम गति के लिए यह अनुपात $1 : \sqrt{e}$ होना चाहिए।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1983]

हल : माना संकेतों की गति v है, तो $v \propto x^2 \log_e \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \quad v = kx^2 \log_e \frac{1}{x}$, जहाँ k समानुपाती नियतांक है

$\Rightarrow \quad v = kx^2 \{\log 1 - \log_e x\} = -kx^2 \log_e x \qquad [\because \log 1 = 0]$

$\therefore \quad \frac{dv}{dx} = -k\left[x^2 \times \frac{1}{x} + 2x\log_e x\right] = -kx[1 + 2\log_e x]$ ...(1)

$\frac{dv}{dx} = 0$ रखने पर, $\quad -kx[1 + 2\log_e x] = 0 \Rightarrow 1 + 2\log_e x = 0$

[$\because k \neq 0, x \neq 0$ क्योंकि यह एक अनुपात है]

$\Rightarrow \quad \log_e x = -\frac{1}{2}$

(1) को पुनः x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -k\left\{1(1 + 2\log_e x) + x \times \left(0 + 2 \times \frac{1}{x}\right)\right\} = -k\{3 + 2\log_e x\}$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

अतः $\log_e x = -\frac{1}{2}$ रखने पर $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -k\left[3 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -k[3-1] = -2k < 0$

अतः $\log_e x = -1/2$ के लिए गति अधिकतम है।

$\Rightarrow \qquad x = e^{-1/2} = \frac{1}{e^{1/2}} = 1 : \sqrt{e}$ पर गति अधिकतम है।

22.7 व्यावहारिक प्रश्न

उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ के व्यावहारिक प्रश्नों को हल करने में निम्न सूत्र काफी उपयोगी है :

1. x भुजा वाले वर्ग का क्षेत्रफल $= x^2$, परिमाप $= 4x$
2. x तथा y भुजा वाले आयत का क्षेत्रफल $= xy$, परिमाप $= 2(x + y)$
3. r त्रिज्या वाले वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$, परिधि $= 2\pi r$
4. r त्रिज्या के गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$, वक्र पृष्ठ $= 4\pi r^2$
5. लंब वृत्तीय बेलन का
   आयतन $= \pi r^2 h$, सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2\pi rh + 2\pi r^2$, वक्रपृष्ठ $= 2\pi rh$.
   जहाँ $r =$ आधार की त्रिज्या, $h =$ ऊँचाई
6. शंकु जिसकी ऊँचाई h, तिर्यक ऊँचाई l तथा आधार की त्रिज्या r हो, आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$, वक्रपृष्ठ $= \pi rl$,
   सम्पूर्ण पृष्ठ $= \pi r^2 + \pi rl$
7. घन के लिए जिसकी भुजा की लंबाई x है,
   आयतन $= x^3$, पृष्ठ $= 6x^2$
8. घनाभ जिसकी लंबाई x, चौड़ाई y तथा ऊँचाई z हो
   आयतन $= xyz$, पृष्ठ $= 2(xy + yz + zx)$
9. त्रिभुज का क्षेत्रफल $\Delta = \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई
10. समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)^2

व्यावहारिक समस्याओं पर आधारित प्रश्नों को हल करने के लिए निम्नांकित क्रिया विधि अपनाते हैं :

I. दिए गए प्रतिबंध की सहायता से वह फलन ज्ञात किया जाता है जिसका उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ ज्ञात करना है।

II. यदि फलन में एक से अधिक चर हो, तो विलुप्तीकरण का प्रयोग कर फलन को एक चर में व्यक्त किया जाता है।

III. प्राप्त फलन का अवकल गुणांक $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ज्ञात करके उसे शून्य के बराबर रखकर वे बिन्दु प्राप्त किए जाते हैं, जिन पर उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ की गणना करनी है।

IV. प्राप्त बिन्दुओं पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान निकाला जाता है। यदि $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ तो फलन उच्चिष्ठ तथा $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ हो तो फलन निम्निष्ठ है। अन्यथा की स्थिति में पूर्व में बताई गई विधि का प्रयोग करें।

उदाहरण 11. दो धनात्मक संख्यायें ज्ञात करें जिनका योग 14 है और जिनके वर्गों का योग न्यूनतम है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]

हल : माना संख्यायें x तथा y है, तो $x + y = 14 \qquad$ ...(1)

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

माना उनके वर्गों का योग S है, तो $S = x^2 + y^2 \Rightarrow S = x^2 + (14 - x)^2$ [(1) से]

$\Rightarrow \quad S = x^2 + 196 - 28x + x^2 \quad \Rightarrow \quad S = 2x^2 - 28x + 196 \Rightarrow \frac{dS}{dx} = 4x - 28$ ...(2)

अब $\frac{dS}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x - 28 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 7$

अत: $x = 7$ पर फलन उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ है।

(2) के पुन: अवकलन से, $\frac{d^2y}{dx^2} = 4 > 0$, यह x के सभी मानों के लिए धनात्मक है।

अत: फलन $x = 7$ पर निम्निष्ठ है।

(1) में x का मान रखने पर, $7 + y = 14 \quad \Rightarrow \quad y = 14 - 7 = 7$

$\therefore$ अभीष्ट संख्याये 7 तथा 7 होंगी।

उदाहरण 12. परवलय $y = x^2$ से बिन्दु $A(3, 0)$ की न्यूनतम दूरी ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1990]**

हल : दिया गया वक्र $y = x^2$ ...(1)

माना $P(x, y)$ बिन्दु $A(3, 0)$ के निकट है।

तो $A(3, 0)$ तथा $P(x, y)$ के बीच की दूरी $AP = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow AP^2 = (x-3)^2 + y^2$

माना $f(x) = (x-3)^2 + y^2 = (x-3)^2 + x^4$ [(1) से]

तो $f'(x) = 2(x-3) \times 1 + 4x^3 = 4x^3 + 2x - 6 = 2(2x^3 + x - 3)$ ...(2)

अत न्यूनतम दूरी के लिए, $f'(x) = 0 \Rightarrow 2(2x^3 + x - 3) = 0 \Rightarrow (x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 0$

$\Rightarrow \quad x = 1$ [$\because$ x के शेष मान काल्पनिक रहेंगे]

(2) के अवकलन से $f''(x) = 12x^2 + 2 - 0 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 12x^2 + 2$

अत: $x = 1$ पर $f''(1) = 12 \times 1^2 + 2 = 14 > 0$

अत: $x = 1$ पर $f(x)$ का मान न्यूनतम है।

(1) में $x = 1$ से $y = 1^2 = 1$, अत: $P(x, y) = (1, 1)$

$\therefore$ $A(3, 0)$ से बिन्दु $P(1, 1)$ न्यूनतम दूरी पर है तथा न्यूनतम दूरी $AP = \sqrt{(1-3)^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

उदाहरण 13. सिद्ध कीजिए कि दिए हुए पृष्ठ और उच्चतम आयतन के लंबवृत्तीय बेलन की ऊँचाई उसके आधार के व्यास के बराबर होती है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2010]**

हल : माना बेलन के आधार की त्रिज्या r, ऊँचाई h, आयतन V तथा पृष्ठ S है।

$$V = \pi r^2 h \quad \text{...(1)}$$

तथा $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ या $h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} \quad \therefore \quad V = \pi r^2 \left(\frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}\right) = \frac{1}{2}(rS - 2\pi r^3)$

$$\therefore \quad \frac{dV}{dr} = \frac{1}{2}(S - 6\pi r^2) \quad \text{...(2)}$$

उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ के लिए, $\frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(S - 6\pi r^2) = 0 \Rightarrow S - 6\pi r^2 = 0 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$

पुन: (2) के अवकलन से, $\frac{d^2V}{dr^2} = -6\pi r < 0$, अत: आयतन उच्चतम होगा।

अत: (1) से, $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ अर्थात् $S = 6\pi r^2$ पर $h = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{6\pi r^2 - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{4\pi r^2}{2\pi r} = 2r =$ व्यास

$\therefore$ ऊँचाई आधार के व्यास के बराबर है।

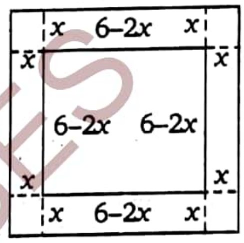
AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

उदाहरण 14. एक कार्ड बोर्ड का टुकड़ा 6″ × 6″ का है। उसके कोनों से बराबर वर्ग काटे गए हैं और भुजाओं को मोड़कर एक ऊपर से खुला हुआ संदूक बनाया गया है। संदूक की ऊँचाई ज्ञात करें जब उसका आयतन अधिकतम है।
[उ० प्र० डिप्लोमा 1998]

हल : माना कोर्ड बोर्ड जो 6″ × 6″ का है, में चित्रानुसार कोनों से भुजा x का वर्ग काटकर उसे संदूक की शक्ल दी गई है। स्पष्टत:



संदूक की ऊँचाई $= x$ तथा आधार की प्रत्येक भुजा $= 6 - 2x$

$\therefore$ संदूक का आयतन $= V = (6-2x)^2 x$

x के सापेक्ष अवकलन से, $\dfrac{dV}{dx} = (6-2x)^2 + 2(6-2x) \times (-2) \times x$

$\Rightarrow \dfrac{dV}{dx} = 4(3-x)^2 - 8(3-x)x \Rightarrow 4(3-x)\{(3-x-2x)\} \Rightarrow \dfrac{dV}{dx} = 12(3-x)(1-x)$ ...(1)

अधिकतम या न्यूनतम मान के लिए $\dfrac{dV}{dx} = 0 \quad \Rightarrow 12(3-x)(1-x) = 0 \Rightarrow (3-x)(1-x) = 0$

$\Rightarrow \quad x = 3$ या $x = 1$

(1) को पुन: अवकलित करने पर $\dfrac{d^2V}{dx^2} = 12[(3-x)(-1) + (1-x)(-1)] = 12(2x-4)$

अत: $\left(\dfrac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=3} = 12(2 \times 3 - 4) = 12 \times 2 = 24 > 0$

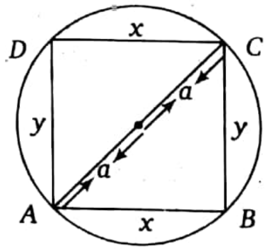
तथा $\left(\dfrac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=1} = 12(2 \times 1 - 4) = 12 \times (-2) = -24 < 0$

अत: $x = 1$ पर V अधिकतम है।

$\therefore$ अधिकतम आयतन के लिए संदूक की ऊँचाई $= 1''$ **उत्तर**

उदाहरण 15. सिद्ध कीजिए कि वृत्त के अन्तर्गत महत्तम क्षेत्रफल वाला आयत एक वर्ग है।

हल : मान लीजिए कि वृत्त के अंतर्गत आयत की भुजायें x तथा y हैं। A उसका क्षेत्रफल है और वृत्त की त्रिज्या a है। अत: $AC = 2a$



चित्र से $\qquad x^2 + y^2 = 4a^2$ ...(i)

तथा $\qquad A = xy$ ...(ii)

समी० (i) और (ii) से, $\qquad A = x\sqrt{4a^2 - x^2}$

$\therefore \quad \dfrac{dA}{dx} = \sqrt{(4a^2 - x^2)}\,.1 + x.\dfrac{1}{2}(4a^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \dfrac{4a^2 - 2x^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}}$ ...(iii)

A महत्तम होगा जब $\dfrac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{4a^2 - 2x^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow 2x^2 = 4a^2 \Rightarrow x^2 = 2a^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}\,a$

और $\dfrac{d^2A}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dA}{dx}\right) = \dfrac{\sqrt{4a^2 - x^2}\,(-4x) - (4a^2 - 2x^2)\,.\,\frac{1}{2}(4a^2 - x^2)^{-1/2}(-2x)}{(\sqrt{4a^2 - x^2})^2}$

[(iii) के अवकलन से]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$= \frac{-4x\sqrt{a^2-x^2} + \dfrac{x(a^2-2x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}}{a^2-x^2} = \frac{-4x(4a^2-x^2)+x(4a^2-2x^2)}{(a^2-x^2)^{3/2}} \quad ...(iv)$$

$$\therefore \quad \left(\frac{d^2A}{dx^2}\right)_{x=\sqrt{2}a} = -\frac{-4\sqrt{2}a(4a^2-2a^2)+\sqrt{2}a(4a^2-4a^2)}{(4a^2-2a^2)^{3/2}} = \frac{-4\sqrt{2a}\times 2a^2}{2\sqrt{2}a^3} < 0$$

अतः क्षेत्रफल A इस बिन्दु पर अधिकतम होगा।

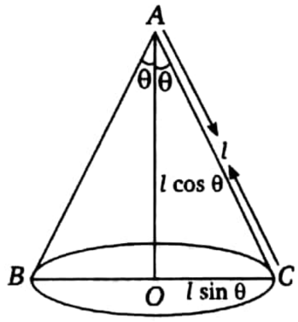
अब $x=\sqrt{2}a$ पर $y=\sqrt{4a^2-x^2}=\sqrt{4a^2-2a^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}a$

अतः $x=\sqrt{2}a, y=\sqrt{2}a$ i.e., $x=y$

अतः क्षेत्रफल महत्तम होगा यदि $x=y$ अर्थात् आयत एक वर्ग होगा।

उदाहरण 16. सिद्ध कीजिए कि दी हुई तिर्यक ऊँचाई के उच्चिष्ठ आयतन वाले शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ है।

हल : माना लो, दी हुई तिर्यक ऊँचाई $=l$ और शंकु का अर्धशीर्ष कोण $=\theta$, तो ऊँचाई $=l\cos\theta$ और आधार की त्रिज्या $=l\sin\theta$



$\therefore$ आयतन $V=\frac{1}{3}\pi$ (आधार की त्रिज्या)^2 × ऊँचाई $=\frac{\pi}{3}l^2\sin^2\theta\times l\cos\theta$

$$\therefore \quad \frac{dV}{d\theta}=\frac{\pi l^3}{3}[2\sin\theta\cos^2\theta+\sin^2\theta.(-\sin\theta)] \quad ...(1)$$

उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ V के लिए $\frac{dV}{d\theta}=0$

(1) से $2\sin\theta.\cos^2\theta-\sin^3\theta=0$ या $\sin\theta(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)=0$

$\therefore$ $\sin\theta=0$ या $2\cos^2\theta-\sin^2\theta=0;$

$\therefore$ $\theta=0°$ या $\tan^{-1}\sqrt{2}$

अब $\frac{d^2V}{d\theta^2}=\frac{\pi l^3}{3}[2\cos^3\theta+2\sin\theta.2\cos\theta.(-\sin\theta)-3\sin^2\theta.\cos\theta]$ [(1) से अवकलन से]

$$=\frac{\pi l^3}{3}[2\cos^3\theta-7\sin^2\theta.\cos\theta]=\frac{\pi l^3}{3}\cos^3\theta[2-7\tan^2\theta]$$

$$=\frac{\pi l^3}{3(1+\tan^2\theta)^{3/2}}(2-7\tan^2\theta) \quad \left[\because \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^{1/2}}=\cos\theta\right] \quad \textbf{(Note)}$$

जब $\theta=\tan^{-1}\sqrt{2}, \frac{d^2V}{d\theta^2}=\frac{\pi l^3}{3(1+2)^{3/2}}(2-7\times 2)=\frac{-4\pi l^3}{3^{3/2}}<0$

$\therefore$ V उच्चिष्ठ होगा जब $\theta=\tan^{-1}\sqrt{2}$ [$\theta=0°$ होने पर शंकु लुप्त हो जाता है।]

$\therefore$ अभीष्ट उच्चिष्ठ आयतन वाले शंकु का अर्द्ध-शीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होगा।

उदाहरण 17. सिद्ध करो कि किसी दिए हुए गोले के अन्तर्गत उच्चतम आयतन के शंकु की ऊँचाई का गोले के व्यास से अनुपात 2 : 3 है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]

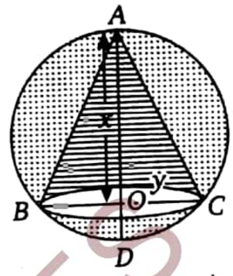
हल : मान लो कि गोले की त्रिज्या r, तथा इसके अन्तर्गत शंकु की ऊँचाई x तथा आधार की त्रिज्या y है।

$\therefore$ शंकु का आयतन $V=\frac{1}{3}\pi y^2 x$ ...(1)

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

मान लो शंकु का अक्ष OA नीचे बढ़ाने पर गोले को D पर मिलता है। अब चूँकि जीवाएँ BC तथा AD एक-दूसरे को लम्ब रूप से O पर काटती हैं, इसलिए



$$AO.OD = BO.OC = BO^2 \qquad [\because BO = OC]$$

या $$x(2r - x) = y^2 \qquad \text{...(2)}$$

यदि शंकु का आयतन V है तो $V = \frac{1}{3}\pi[x(2r-x)]x = \frac{1}{3}\pi x^2 (2r - x)$

$$= \frac{1}{3}\pi(2rx^2 - x^3) \qquad [(1) \text{ तथा } (2) \text{ से}]$$

स्पष्टतः शंकु का आयतन V चर राशि x का फलन है।

अतः $$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{3}\pi(4rx - 3x^2), \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{3}\pi(4r - 6x) \qquad \text{...(3)}$$

V के अधिकतम होने के लिए $\frac{dV}{dx} = 0$

या $\frac{1}{3}\pi(4rx - 3x^2) = 0$ या $x(4r - 3x) = 0$

अब चूँकि $x \neq 0$ इसलिए $4r - 3x = 0$ या $x = \frac{4r}{3}$

साथ ही जब $x = \frac{4r}{3}$ तो $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{3}\pi\left(4r - 6.\frac{4r}{3}\right) = -\frac{4}{3}\pi r < 0$ [(3) से]

अतः ऊँचाई $x = \frac{4r}{3}$ के लिए शंकु का आयतन उच्चतम अधिकतम है।

पुनः जब $x = \frac{4r}{3}$ तो $\frac{\text{शंकु की ऊँचाई}}{\text{गोले का व्यास}} = \frac{\frac{4r}{3}}{2r} = \frac{2}{3}$ या शंकु की ऊँचाई : गोले का व्यास $= 2:3$

अतः जब शंकु की ऊँचाई और गोले के व्यास का अनुपात $2:3$ है तो शंकु का आयतन उच्चतम होगा।

उदाहरण 18. एक नदी के सीधे किनारे से लगे हुए दिए हुए क्षेत्रफल वाले एक आयताकार खेत के चारों ओर तार लगानी है। नदी के किनारे की तरफ कोई तार लगाने की आवश्यकता नहीं है। सिद्ध कीजिए बाकी तीन तरफ से तार लगाने के लिए कम-से-कम तार की आवश्यकता होगी जब खेत की लंबाई चौड़ाई की दूनी हो। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1977]**

हल : माना खेत की लंबाई $= x$, चौड़ाई $= y$, क्षेत्रफल $= A$

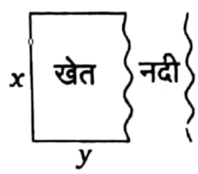
$$\therefore \quad A = xy \quad \text{या} \quad x = \frac{A}{y} \qquad \text{...(1)}$$

पुनः तीन ओर से तार लगाने पर प्रयुक्त तार की लंबाई $l = x + y + y \Rightarrow l = \frac{A}{y} + 2y$ [(1) से]

$\therefore$ y के सपेक्ष आवकलन से, $$\frac{dl}{dy} = -\frac{A}{y^2} + 2 \qquad \text{...(2)}$$

अब निम्निष्ठ मान के लिए $\frac{dl}{dy} = 0 \Rightarrow -\frac{A}{y^2} + 2 = 0 \Rightarrow -A + 2y^2 = 0$

$\Rightarrow A = 2y^2$ $\qquad \therefore y = \sqrt{\frac{A}{2}}$



पुनः (2) के अवकलन से, $\frac{d^2l}{dy^2} = -\left(-\frac{2A}{y^3}\right) + 0 = \frac{2A}{y^3} > 0$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

अत: $y=\sqrt{A/2}$ पर l का मान न्यूनतम है,

$$\therefore \quad y=\sqrt{\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{xy}{2}} \Rightarrow y^2=\frac{xy}{2} \Rightarrow 2y^2=xy \quad \therefore \quad x=2y$$

अत: कम-से-कम तार लगाने के लिए खेत की लंबाई $=2\times$ खेत की चौड़ाई **सिद्ध हुआ।**

प्रश्नावली 22.1

1. निम्न फलनों के लिए स्थिर बिन्दु (Stationary point) का मान ज्ञात करें :

(i) $x^4-8x^3+22x^2-24x$ (ii) $2x^3-9x^2+12x-3$

2. निम्नलिखित फलनों के उच्चिष्ठ मान ज्ञात करें :

(i) $ax+\frac{b}{x}$ (ii) x^3-6x^2+9x+2 (iii) $(x+1)(x-2)^2$

3. निम्न फलनों के लिए एक उच्चिष्ठ एवं एक निम्निष्ठ मान ज्ञात करें :

(i) $\sin x+\cos x$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1988]**

(ii) $\sin x(1+\cos x)$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1984, 94]**

4. $y=x^2+6x+12$ का निम्निष्ठ मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1997]**

5. सिद्ध कीजिए x^3-3x^2+3x+7 का $x=1$ पर न तो उच्चिष्ठ है और न ही निम्निष्ठ।

6. दिखायें $x=\cos x$ के लिए $\frac{x}{1+x\tan x}$ उच्चिष्ठ है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1992]**

7. निम्नलिखित फलनों के उच्चिष्ठ मान ज्ञात करें :

(i) $x^{1/x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2012]**

(ii) $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1989, 2004]**

(iii) $\frac{\log_e x}{x}$

(iv) यदि $y=x^5-5x^4+5x^3-10$ तो $x=1$ पर फलन का महत्तम मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]**

8. यदि $y=x^2\log\frac{1}{x}$ तो सिद्ध कीजिए y का मान अधिकतम होगा जब $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1990]**

9. सिद्ध कीजिए $\frac{x}{\log_e x}$ का न्यूनतम मान e है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]**

10. दिखायें $x=\frac{\pi}{3}$ पर $x(1+\cos x)$ का मान उच्चिष्ठ है किन्तु $x=\pi$ पर यह न तो उच्चतम है, न निम्नतम।

11. सिद्ध कीजिए कि x^3-3x^2+6x+7 का कोई उच्चतम या निम्नतम मान नहीं है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1996]**

12. $y=-x^3+3x^2+2x-27$ का महत्तम झुकाव ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]**

13. $a\sin\theta+b\cos\theta$ का उच्चतम मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1986]**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

14. दिखायें कि $\sin x\,(1+\cos x)$ का मान अधिकतक है जबकि $x = \pi/3$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]**

15. $y = x^2$ के ग्राफ पर स्थित बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करें जो बिन्दु $A(3, 0)$ के निकटतम हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1980]**

16. (i) यदि दो धनात्मक संख्याओं x तथा y का योग 60 है तो संख्यायें ज्ञात करें यदि xy^3 महत्तम है।
(ii) यदि $x + y = a$ तो xy^2 का उच्चिष्ठ मान बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(S)]**

17. दो संख्याओं का योग a है। उनके वर्गों के योग का निम्नतम मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]**

18. सिद्ध करें कि किसी समकोण त्रिभुज जिसका कर्ण ज्ञात है, का क्षेत्रफल महत्तम होगा यदि त्रिभुज समद्विबाहु हो। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]**

19. यदि किसी समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कर्ण का योगफल दिया हुआ हो तो दिखाओ कि त्रिभुज का क्षेत्रफल उच्चतम तब होगा जबकि इन भुजाओं के मध्य का कोण $\pi/3$ है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1998]**

20. एक आयताकार खिड़की जिसका ऊपरी भाग अर्द्धवृत्ताकार है। यदि खिड़की की परिमाप 10 मीटर है तो उसकी लंबाई व चौड़ाई ज्ञात कीजिए, जबकि खिड़की से ज्यादा से ज्यादा ऊपर रोशनी आ सके।

21. दिखायें कि दिए हुए वक्रपृष्ठ और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण $\sin^{-1}(1/\sqrt{3})$ है।

22. सिद्ध कीजिए कि दी हुई तिर्यक ऊँचाई के उच्चिष्ठ आयतन वाले शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ है।

23. सिद्ध करो दिए हुए पृष्ठ एवं महत्तम आयतन वाले बेलन की ऊँचाई, आधार के व्यास के बराबर होती है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1993, 2010]**

24. सिद्ध कीजिए एक गोले के अन्तर्गत जिसकी त्रिज्या a है, उच्चतम आयतन से बने बेलन की ऊँचाई $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ है।

25. सिद्ध कीजिए किसी वृत में अधिकतम क्षेत्रफल वाला अंत: त्रिभुज समबाहु होता है।

26. t समय में किसी कण की सरल रेखीय गति का समीकरण $S = \frac{1}{4}t^4 - 2t^3 + 4t^2 - 7$ है। बताइए कब इसका वेग महत्तम होगा तथा कब इसका त्वरण निम्निष्ठ होगा।

27. एक खुले बेलनाकार बर्तन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल 100 वर्ग सेमी है। उसका अधिकतम आयतन ज्ञात करें।
[**संकेत** : $100 = \pi r^2 + 2\pi rh$ तथा $V = \pi r^2 \dfrac{(100 - \pi r^2)}{2\pi r}$]

28. 40 वर्ग मीटर की धातु की चादर से वर्गाकार आधार पर एक खुला बक्सा बनाया गया है। इसकी विमायें ज्ञात कीजिए जबकि इसका आयतन महत्तम है।
[**संकेत** : यदि भुजा x मीटर तथा ऊँचई h मीटर है तो $x^2 + 4hx = 40,\ V = x^2h$]

29. एक दण्ड की सामर्थ्य (Strength) उसकी चौड़ाई और गहराई के वर्ग के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती (reciprocal) है। उस उच्चतम सामर्थ्य के दण्ड की चौड़ाई तथा गहराई ज्ञात करें जो d व्यास के गोल लट्ठे से काटी जाती है।
[**संकेत** : यदि चौड़ाई x, गहराई $= y$, सामर्थ्य S हो, तो $S = Kxy^2 = Kx(d^2 - x^2)$]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

उत्तरमाला

1. (i) 1, 2, 3 (ii) $x=1,\ x=2$

2. (i) उच्चिष्ठ $-2\sqrt{ab}$ (ii) $x=1$ पर उच्चिष्ठ $=6$

(iii) $x=0$ पर उच्चिष्ठ $=4$

3. (i) $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ (ii) $3\sqrt{3}/4$ (उच्चिष्ठ) **4.** 3

7. (i) $e^{1/e}$ (ii) $e^{1/e}$ (iii) $1/e$ (iv) -9

12. 5

13. $\sqrt{a^2+b^2}$ **15.** 1, 1

16. (i) $x=15, y=45$ (ii) $\dfrac{4a^3}{27}$ **17.** $\dfrac{a^2}{2}$

20. लंबाई $=\dfrac{20}{4+\pi}$, चौड़ाई $=\dfrac{10}{4+\pi}$

26. $t=2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ पर त्वरण न्यूनतम; $t=2$ पर वेग महत्तम

27. $\dfrac{1000}{3\sqrt{3}\,\pi}$ घन सेमी **28.** भुजा 10 मीटर, ऊँचाई 10 मीटर

29. चौ० $\dfrac{d}{\sqrt{3}}$, गहराई $=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,d$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

EXAMINATION PAPER, DECEMBER-2017 U.P. (ODD SEMESTER)

Code : 1901

PAPER

2017 अनुप्रयुक्त गणित-I(A)

Time : $2\frac{1}{2}$ Hrs. **Max. Marks : 50**

नोट : सभी प्रश्न हल कीजिये।

1. निम्नलिखित में किन्हीं दस भागों का उत्तर दीजिये। **[$10 \times 1 = 10$]**

(अ) श्रेणी $2+4+6+8\ldots$ का 10वाँ पद है—

(i) 20 (ii) 26

(iii) 16 (iv) कोई नहीं

(ब) यदि सदिश $\bar{a} = 3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ और $\bar{b} = \hat{i} - 5\hat{j} + 3\hat{k}$ सदिश $\bar{a} + \bar{b}$ का मान है—

(i) $4\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ (ii) $4\hat{i} - 6\hat{j} + 8\hat{k}$

(iii) $4\hat{i} + 6\hat{j} + 8\hat{k}$ (iv) कोई नहीं

(स) यदि $\tan\theta = 1$, $\angle\theta$ का मान है—

(i) 45° (ii) 60°

(iii) 30° (iv) कोई नहीं

(द) यदि $f(x) = \sin x$, $f(30°)$ का मान है—

(i) 4 (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(iii) $\frac{1}{2}$ (iv) कोई नहीं

(य) यदि $y = ax^3 + 3x^2 + 7$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ का मान है—

(i) $6a$ (ii) 6

(iii) $6ax$ (iv) कोई नहीं

(र) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिये।

(ल) सदिशों $\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ के मध्य बने कोण का मान बताइए।

(व) $(1+i)$ को ध्रुवीय रूप में व्यक्त कीजिये।

(त) यदि $\sin A = \frac{1}{4}$, $\text{cosec}^{-1} 4$ का मान ज्ञात कीजिये।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(थ) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ का मान बताइए।

(द) वृत्त $x^2 + y^2 = 20$ के बिन्दु (2, 4) पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये।

(ध) $x \tan x$ का उवकल गुणांक ज्ञात कीजिये।

2. निम्नलिखित में किन्हीं पाँच भागों को हल कीजिये : **[5 × 2 = 10]**

(अ) (i) श्रेणी $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots \infty$ का योगफल ज्ञात कीजिये।

(ii) श्रेणी $3 + 6 + 12 + \ldots \infty$ का 10वाँ पद ज्ञात कीजिये।

(ब) यदि $\bar{a} = 2\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ और $\bar{b} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$, $\bar{a} \times \bar{b}$ का मान ज्ञात कीजिये।

(स) $(2 + 3i)^2$ का मांपाक ज्ञात कीजिये।

(द) $\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिये।

(य) ΔABC में सिद्ध कीजिये—

$$2(bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C) = a^2 + b^2 + c^2$$

(र) यदि $y = x^{\cos x}$, $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिये।

(ल) यदि $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 10$ पर फलन का महत्तम ज्ञात कीजिये।

3. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिये : **[2 × 5 = 10]**

(अ) $\left(\frac{4x}{5a} + \frac{5a}{4x}\right)^{10}$ में मध्य पद ज्ञात कीजिये।

(ब) यदि सदिश $\bar{a} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}, \bar{b} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ तथा $\bar{c} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$, सिद्ध कीजिये कि सदिश $(\bar{a} \times \bar{b})$ सदिश $\bar{c}$ पद लम्ब है।

(स) डिमॉयवर प्रमेय की सहायता से $x^5 + 1 = 0$ को हल कीजिये।

4. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिये : **[2 × 5 = 10]**

(अ) समीकरण समुदाय का हल क्रैमर नियम से कीजिये।

(ब) $\cot x$ का अवकल गुणांक प्रथम सिद्धान्त से ज्ञात कीजिये।

(स) यदि $y = (\sin^{-1} x)^2$ सिद्ध कीजिये कि $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2$

5. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिये : **[2 × 5 = 10]**

(अ) ΔABC में सिद्ध कीजिये कि $(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0$

(ब) $\frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिये।

(स) वक्र $y = 2x^3 + 3x^2 - 4$ के बिन्दु (1, 1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये।

❑❑❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

EXAMINATION PAPER, Back Paper/Special Back Paper (May 2018)
Code : 1901

PAPER 2018

अनुप्रयुक्त गणित-I(A)

Time : $2\frac{1}{2}$ Hrs. Max. Marks : 50

नोट : सभी प्रश्न हल कीजिये।

1. निम्नलिखित में किन्हीं दस भाग को हल कीजिये। [10 × 1 = 10]

(अ) यदि $a+1, 3a, 4a+2$ समान्तर श्रेणी में है, a का मान है—

(i) 3 (ii) 4

(iii) 0 (iv) कोई नहीं

(ब) यदि $\cos\theta = \frac{a}{b}$, $\tan\theta$ का मान है—

(i) $\frac{a^2+b^2}{a}$ (ii) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{n}$

(iii) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ (iv) कोई नहीं

(स) यदि बिन्दुओं P और R के स्थित सदिश $3\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}$ और $4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ है, तो सदिश $\overrightarrow{PQ}$ का मान है—

(i) $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ (ii) $6\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$

(iii) $\hat{i}+6\hat{j}-5\hat{k}$ (iv) कोई नहीं

(द) यदि $f(x)=6x^2-3x+4$ तो $f(-2)$ का मान है—

(i) 34 (ii) -34

(iii) 22 (iv) कोई नहीं

(य) यदि $y=\frac{1}{x^2}$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान है—

(i) $\frac{1}{x}$ (ii) $\frac{-2}{x^3}$

(iii) $\frac{3}{x^4}$ (iv) कोई नहीं

(र) यदि सदिश $\bar{a}=4\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ और $\bar{b}=3\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$ तो $|\bar{a}\times\bar{b}|$ का मॅान ज्ञात कीजिये।

(ल) श्रेणी $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots$ का n वाँ पद ज्ञात कीजिये।

(व) $(x+2a)^5$ का प्रसार कीजिये।

(प) यदि सदिश $\lambda\hat{i}-2\lambda\hat{j}+3\hat{k}$ और $-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ लम्बवत् है λ का मान ज्ञात कीजिये।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(फ) $\frac{7+5i}{3-2i}$ को $A+iB$ रूप में निरूपित कीजिये।

(म) $i^{74}+3i^{172}$ का मान ज्ञात कीजिये।

(न) यदि $f(x)=\log_e x$, सिद्ध करो कि $f(x,y,z)=f(x)+f(y)+f(z)$

2. निम्नलिखित में कोई पाँच भाग हल कीजिये : **[5 × 2 = 10]**

(अ) (i) $\begin{vmatrix} 25 & 40 & -18 \\ 10 & -27 & 20 \\ 12 & 15 & -16 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिये।

(ii) $\frac{ax^2+bx+c}{\sqrt{x}}$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिये।

(ब) $\frac{2+3i}{3-4i}$ के हर का परिमेयकरण कीजिये।

(स) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ का मान ज्ञात कीजिये।

(द) यदि $y=\frac{3x^2+2}{5x-7}$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिये।

(य) सिद्ध करो $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$

(र) ΔABC में सिद्ध कीजिये कि $a(b\cos C--c\cos B)=b^2-c^2$

(ल) यदि $\bar{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\bar{b}=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ तथा $\bar{c}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$, $\bar{a}\times\bar{b}$ का मान ज्ञात कीजिये।

3. निम्नलिखित में कोई दो भाग हल कीजिये : **[2 × 5 = 10]**

(अ) ΔABC में सिद्ध कीजिये कि $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

(ब) यदि $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x_2+\ldots+C_nx^n$, तो सिद्ध कीजिये कि

$$C_0+\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}+\ldots+\frac{C_n}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

(स) यदि $x_r=\cos\frac{\pi}{2^r}+i\sin\frac{\pi}{2^r}$, तो सिद्ध कीजिये कि $x_1, x_2, x_3\ldots\infty=\cos\pi$

4. निम्नलिखित में कोई दो भाग हल कीजिये : **[2 × 5 = 10]**

(अ) फलन $\frac{2x+3}{3x+2}$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकल गुणांक ज्ञात कीजिये।

(ब) $\frac{(x+3)^{1/3}(x+5)^{2/3}}{(x+4)^{1/2}(x-3)^{1/4}}$ को x के सापेक्ष अवकलित कीजिये।

(स) यदि $y=\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिये।

5. निम्नलिखित में कोई दो भाग हल कीजिये : **[2 × 5 = 10]**

(अ) सिद्ध कीजिये कि $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\left(\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right)$

(ब) एक प्रतिलोमित शंकु की गहराई 20 सेमी तथा अर्धव्यास 4 सेमी है। उसके अन्दर 3 घन सेमी प्रति मिनट की दर से पानी डाला जाता है पानी के ऊपर उठने की दर ज्ञात कीजिये जबकि पानी की गहराई 5 सेमी है।

(स) सिद्ध करो $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})+\bar{b}\times(\bar{c}+\bar{a})+\bar{c}\times(\bar{a}+\bar{b})=\bar{0}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

SEMESTER EXAMINATION, (U.P.) 2018

अनुप्रयुक्त गणित-I

(Applied Mathematics–I)

Code : 2041(A)

1st Semester

Time : 2.30 Hours] **[Maximum Marks : 50**

Notes :

(i) Attempt all questions.

(ii) Students are advised to specially check the Numerical Data of question paper in both versions. If there is any difference in Hindi translation of any question, the students should answer the question according to the English version.

(iii) Use of Pager and Mobile Phone by the students is not allowed.

नोट—सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. किन्हीं दस भागों को हल करो। निम्नलिखित में भाग अ से य तक सही विकल्प चुनिये।
Answer any ten parts of the following from parts a to e select the correct choice in the following. **[10 × 1 = 10]**

(अ) श्रेणी $4 + 8 + 12 + \ldots$ के दस पदों का योग होगा।
The sum of 10 terms of the series $4 + 8 + 12 + \ldots$

(i) 110 (ii) 220 (iii) 330 (iv) कोई नहीं (None)

(ब) यदि $f(x) = \tan x$ तो $f(60°)$ का मान होगा।
If $f(x) = \tan x$ then the value of $f(60°)$ is

(i) $\sqrt{3}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) ∞ (iv) 1

(स) यदि $\bar{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ तब $|\bar{a}|$ होगा।
If $\bar{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ then $|\bar{a}|$ is

(i) $\sqrt{12}$ (ii) $\sqrt{14}$ (iii) $\sqrt{11}$ (iv) कोई नहीं (None)

(द) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ का मान होगा।
The value of $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ is

(i) 0 (ii) 1 (iii) −1 (iv) कोई नहीं (None)

(य) $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान होगा। The value of $\frac{d^2y}{dx^2}$ is

(i) $\frac{1}{x}$ (ii) $\frac{1}{x^2}$ (iii) $-\frac{1}{x^2}$ यदि $y = \log x$

(iv) कोई नहीं (None) यदि $y = \log x$

(र) हल करो $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Evaluate $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

(ल) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ का मान ज्ञात करो।

Evaluate $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

(व) $x \log x$ का अवकल गुणांक ज्ञात करो।

Find the differential coefficient of $x \log x$.

(त) $-1 + i$ को ध्रुवीय रूप में बदलो।

Change into Polar form $-1 + i$.

(थ) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ के बिन्दु (1, 2) पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करो।

Find the equation of tangent to ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ at point (1, 2).

(द) यदि $\bar{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ और $\bar{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ तो $\bar{a}.\bar{b}$ का मान ज्ञात करो।

If $\bar{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ and $\bar{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ then find the value of $\bar{a}.\bar{b}$.

(ध) यदि $y = x^3 + 3x^2 - 7x + 9$ तो $\frac{d^3y}{dx^3}$ का मान ज्ञात करो।

If $y = x^3 + 3x^2 - 7x + 9$ then find $\frac{d^3y}{dx^3}$.

2. किन्हीं पाँच भागों को हल कीजिए।

Answer any five parts of the following : **[5 × 2 = 10]**

(अ) श्रेणी $1, \sqrt{3}, 3, \ldots$ का कौन-सा पद 81 होगा?

Which term of series $1, \sqrt{3}, 3, \ldots$ is 81 ?

(ब) श्रेणी $101 + 99 + 97 + \ldots + 47$ का योगफल ज्ञात करो।

Find the sum of series $101 + 99 + 97 + \ldots + 47$.

(स) $\frac{(2 + 3i)^2}{5 - i}$ को $a + ib$ रूप में बदलो।

$\frac{(2 + 3i)^2}{5 - i}$ change into $a + ib$ form.

(द) अवकल गुणांक ज्ञात करो। $\cos(\tan x^2)$

Find the differential coefficient of $\cos(\tan x^2)$.

(य) ΔABC में सिद्ध करो। Prove that in ΔABC

$$a(b \cos C - c \cos B) = (b^2 - c^2)$$

(र) यदि $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \ldots \infty}}}$ तो सिद्ध करो $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y - 1}$.

If $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \ldots \infty}}}$ then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y - 1}$.

(ल) सिद्ध करो $(1 + i)^4 . \left(1 + \frac{1}{i}\right)^4 = 16$.

Prove that $(1 + i)^4 . \left(1 + \frac{1}{i}\right)^4 = 16$.

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

3. किन्हीं दो भागों को हल कीजिए।

Answer any two parts of the following : **[2 × 5 = 10]**

(अ) $\left(2x^4 - \frac{1}{3x^7}\right)^{11}$ के प्रसार में x से स्वतन्त्र पद ज्ञात करो।

Find the independent term from x in the expansion of $\left(2x^4 - \frac{1}{3x^7}\right)^{11}$.

(ब) डिमॉयवर प्रमेय से $x^3 - 1 = 0$ को हल करो।

Solve the equation $x^3 - 1 = 0$ using Demoivres theorem.

(स) यदि $\bar{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ और $\bar{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ तो सिद्ध करो उनके बीच का कोण है $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$.

Show that the angle between vectors $\bar{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ and $\bar{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ is $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)$.

4. किन्हीं दो भागों को हल कीजिए।

Answer any two parts of the following : **[2 × 5 = 10]**

(अ) क्रेमर नियम से निम्न समीकरण हल करो $6x + y - 3z = 5, x + 3y - 2z = 5$ तथा $2x + y + 4z = 8$

Solve the equations using Cramer's rule $6x + y - 3z = 5$, $x + 3y - 2z = 5$ and $2x + y + 4z = 8$.

(ब) प्रथम सिद्धान्त से $\sqrt{\tan x}$ का अवकल गुणांत ज्ञात करो।

Find the differential coefficient of $\sqrt{\tan x}$ from the first principle.

(स) यदि $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ तो सिद्ध करो $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$.

If $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ then prove that $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$.

5. निम्नलिखित में दो भाग हल करो।

Answer any two parts of the following : **[2 × 5 = 10]**

(अ) $\left(\frac{x + \cos x}{\tan x}\right)$ का अवकल गुणांक ज्ञात करो।

Find the differential coefficient $\left(\frac{x + \cos x}{\tan x}\right)$.

(ब) यदि $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ तीन सदिश इस प्रकार है $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$ सिद्ध करो कि $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{c} = \bar{c} \times \bar{a}$.

If vectors $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ are such that $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$ prove that $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{b} \times \bar{c} = \bar{c} \times \bar{a}$.

(स) वक्र $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात करो।

Find the equation of Normal to the curve $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ at (x_1, y_1).

O

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner