Scanned with CamScanner

Akshati Sarkar

प्राविधिक शिक्षा परिषद् उत्तर प्रदेश द्वारा स्वीकृत नवीनतम् 2019 के पाठ्यक्रमानुसार

सार्थक

स्ट्रक्चरल मैकेनिक्स

(प्रयोगात्मक भाग सहित)

(Structural Mechanics)

IN SI UNITS

For Second Year of Three years/3rd Semester Diploma Course in Civil Engg., Civil Engg. (Environmental Pollution and Control), Civil Engg. (Lateral Entry), Civil Engg. (EP and C), (Lateral Entry) and also for IInd year of Four Years Part Time Diploma Course in Civil Engg. & above

सी० एम० वर्मा
व्याख्याता, यांत्रिकी इंजीनियरिंग विभाग
के० एल० पॉलिटैक्निक
रुड़की

डा० आस्था वर्मा
पी० एच-डी०, आई० आई० टी० रुड़की
प्रो० सिविल इंजी० विभाग
जी० बी० पन्त यूनिवर्सिटी, फूलनगर

SHAHID COMPLEX POLY... CHAURAHA INDIRA NAGAR, LKO.
SAI RAM
BOOK CENTER
MOB.-9415089630
7007224258

प्रकाशक :

जय प्रकाश नाथ पब्लिकेशन्स

गाँधी आश्रम चौराहा
नौचन्दी रोड, मेरठ-250 002 (उ० प्र०)

Scanned with CamScanner

• प्रकाशक :
जयप्रकाश नाथ पब्लिकेशन्स
गांधी आश्रम चौराहा
मोदनगर रोड, मेरठ-250 002 (उ०प्र०)
Phones: (Off.) 2762403, 4056123
9837094445
Fax : 0121-2600606
email : jpnpmrt@hotmail.com
info@jpnpbooks.com
Web. : www.jpnpbooks.com

© **लेखक**
इस पुस्तक का कोई भी अंश लेखक एवं प्रकाशक की पूर्व लिखित अनुमति के बिना किसी भी रूप में उद्धृत, अनुवादित या प्रकाशित नहीं किया जा सकता।

• प्रथम संस्करण : 2019-20

• ISBN : 978-93-83694-19-8

• **मूल्य : ₹ 340.00**

• लेजर टाईपसैटिंग :
विजेता कम्प्यूटर्स, मेरठ।
फोन: +91-9897000980

• मुद्रक :
ए० एस० एंटरप्राइजेज,
मेरठ।

Scanned with CamScanner

प्रस्तावना

पुस्तक का प्रस्तुत संस्करण **"स्ट्रक्चरल यांत्रिकी (Structural Mechanics)"** विषय में प्राविधिक शिक्षा परिषद्, उत्तर प्रदेश के द्वारा स्वीकृत द्वितीय वर्ष डिप्लोमा सिविल इंजीनियरिंग के विद्यार्थियों के लिये 2019-20 से लागू नवीनतम् पाठ्यक्रमानुसार (as per New Syllabus) लिखी गई है। इसमें भाषा को अत्यन्त सरल एवं रुचिपूर्ण रखा गया है।

अंग्रेजी माध्यम (English Medium) के छात्र-छात्राओं की सुविधा का भी ध्यान रखते हुए आवश्यकता के अनुसार स्थानों पर तकनीकी शब्दों (Technical Words) को अंग्रेजी में कोष्ठकों (Brackets) में दिया गया है, ताकि विषय के तकनीकी पक्ष (Technical Terms) को सरलता से समझा जा सके।

पुस्तक के प्रत्येक अध्याय में अधिक से अधिक उदाहरण सरल चित्रों सहित दिये गये हैं, जिनमें उ० प्र० प्राविधिक शिक्षा परिषद (U.P.B.T.E.) की परीक्षा में पिछले 10 वर्षों से अब तक पूछे गये प्रश्नों को पूर्ण हल सहित (with full solutions) सम्मिलित किया गया है। प्रत्येक अध्याय के अन्त में अभ्यास के लिये दी गई प्रश्नावली (Exercise) में रिक्त स्थानों की पूर्ति (उत्तर सहित) को अध्याय के सारांश (Summary) रूप में दिया गया है ताकि छात्रों के Class Tests, परीक्षा से पूर्व Revision, Viva तथा साक्षातकार हेतु उपयोगी बनाया जा सके।

पुस्तक को त्रुटिरहित रखने का हर सम्भव प्रयास किया गया है। पुस्तक की उपयोगिता एवं गुणवत्ता को बढ़ाने के प्रयास में विभिन्न पॉलिटैक्निक्स में विषय के उन विद्वान शिक्षकों का हम हृदय से आभार प्रकट करते हैं, जिन्होंने अपना बहुमूल्य सहयोग दिया।

हमें पूर्ण विश्वास है कि यह पुस्तक सम्मानित अध्यापकों एवं प्यारे विद्यार्थियों को अवश्य पसन्द आयेगी और छात्र-छात्राओं को विषय का पूर्ण ज्ञानवर्धन करेगी।

अन्त में समस्त सम्मानित अध्यापकों एवं पाठकों से अनुरोध है कि इस पुस्तक को और अधिक उपयोगी बनाने हेतु अपने बहुमूल्य सुझाव भेजकर हमें अनुग्रहीत करें।

–सी०एम० वर्मा
एव
डा० आस्था वर्मा

Scanned with CamScanner

विषय-सूची

क्रम सं.	अध्याय	पृष्ठ संख्या
1(A)	पदार्थों के गुण (Properties of Materials)	 1-12
1(B)	साधरण प्रतिबल तथा विकृति (Simple Stress and Strain)	13-39(xxxxiv)
2.	कर्तन बल एवं नमन आघूर्ण (Shear Force and Bending Moment)	 40-130
3.	नमन प्रतिबल (Bending Stresses)	 131-191
4.	घरनों में कर्तन प्रतिबल (Shear Stresses in Beam)	 192-219
5.	संयुक्त सीधे नमन प्रतिबल (Combined Direct and Bending Stresses) (विद्यार्थी इस अध्याय का अध्ययन न करें, यह पाठ्यक्रम में नहीं है।)	 220-262
6.	ढलान एवं विक्षेप या विस्थापन (Slope and Deflection)	 263-304
7.	कॉलम तथा स्ट्रट (Columns and Struts)	 305-329
8.	जड़त्व आघूर्ण (Moment of Interia)	 330-360
9.	ट्रसों या कैंचियों का विश्लेषण (Analysis of Trusses or Frames)	361-401(xii)
10.	प्रयोगात्मक भाग (Experiments)	 402-436

Scanned with CamScanner

1A पदार्थों के गुण (PROPERTIES OF MATERIALS)

1.1 पदार्थों का वर्गीकरण (Classification of Materials)

इन्जीनियरी पदार्थों (Engineering Materials) का वर्गीकरण मुख्य रूप से निम्न प्रकार किया जाता है—

(A) सामान्य वर्गीकरण (General Classification)

(B) औद्योगिक वर्गीकरण (Industrial Classification)

(C) उपयोगिता के आधार पर वर्गीकरण (Classification based on utility)

(D) निर्माण विधि के आधार पर (Classification based on fabrication Methods)

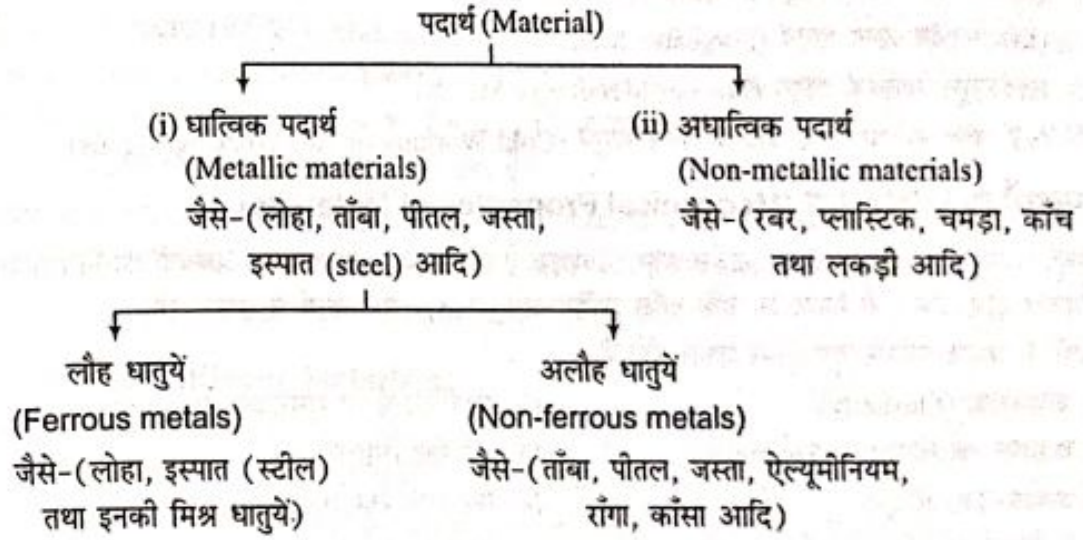
(A) सामान्य वर्गीकरण (General Classification)

जैसे— (1) धात्विक पदार्थ (Metallic Materials)

(2) अधात्विक पदार्थ (Non-metallic Materials)

- **धात्विक पदार्थ** (Metallic Materials), वे पदार्थ होते हैं जिनमें मुख्य रूप से धातु (Metals) का अंश होता है। जैसे—लोहा (Iron), ताँबा (Copper), पीतल (Brass), जस्ता (Zinc), इस्पात (Steel), आदि।
- **अधात्विक पदार्थ** (Non-metallic Materials), वे पदार्थ होते हैं जिनमें धातु का अंश नगण्य (Negligible) होता है। जैसे—रबर (Rubber), प्लास्टिक (Plastic), काँच (Glass), लकड़ी (Wood), चमड़ा (Leather) आदि।

सामान्य वर्गीकरण को निम्न द्वारा भी दर्शाया जा सकता है—



(B) औद्योगिक वर्गीकरण (Industrial Classification)—पदार्थों को औद्योगिक (अथवा व्यवसायिक) आधार पर निम्न प्रकार वर्गीकृत किया जा सकता है—

1. **हल्की धातुयें** (Light Metals)—जैसे—ऐल्यूमीनियम, मैग्नीशियम, टिटेनियम, बेरीलियम तथा इनकी मिश्र धातुएँ आदि।
2. **बेयरिंग एलॉय** (Bearing Alloys)—जैसे—ताँबा-सीसा (Copper-Lead) का ऐलॉय तथा श्वेत-धातु ऐलॉय (White Metal Alloys), ब्रांज ऐलॉय (Bronze Alloys) तथा इनकी मिश्रकारक धातुएँ जैसे—सीसा, जस्ता, टिन, कैडमियम आदि।

Scanned with CamScanner

3. **मिश्रकारक धातुएँ** (Alloying Metlas)—जैसे—निकिल, कोबाल्ट, क्रोमियम, मैगनीज, वेनेडियम आदि।
4. **ताँबा तथा उसकी मिश्र धातुएँ** (Copper & its Alloying Metals)—जैसे—ताँबा, पीतल (Brass), काँसा (Bronze) आदि।
5. **लोहा तथा इस्पात** (Iron and Steel)—इसके अन्तर्गत लोहे की विभिन्न जातियाँ तथा स्टील और उसकी मिश्र-धातुएँ आती है।
6. **ताप-सह पदार्थ** (Refractory Materials)—ये पदार्थ भट्टी, चूल्हे आदि की भीतरी सतहों पर अस्तर लगाने के काम आते है। इनमें प्रमुख पदार्थ है—सिलिका, एल्यूमीना (Alumina), अग्निसह-मृतिका (Fire-Clay), डोलोमाइट (Dolomite) तथा निस्तापित मैग्नेसाइट (Calcined Magnesite) आदि।

(C) उपयोगिता के आधार पर वर्गीकरण (Classification based on utility)

(i) निम्न और उच्च ताप धातुएँ (Low & High Temperature Metals)
(ii) उच्च सामर्थ्य वाली धातुएँ (High Strength Metals)
(iii) घिसाव रोधी धातुएँ (Wear Resistant Metals)
(iv) संक्षारण तथा ऑक्सीकरण-प्रतिरोधी धातुयें (Corrosion and Oxidation Resistant Metals)
(v) कमानी धातुयें (Spring Metals)
(vi) **विशिष्ट भौतिक गुणधर्मी धातुयें** (Metals of Special Physical Properties)—इसके अन्तर्गत नाभिक धातुये (Nuclear Metals), ऊष्मीय संचालक धातुयें, चुम्बकीय गुणकारी धातुयें, विद्युत सुचालक तथा कुचालक धातुये तथा कम्पनरोधी धातुयें आदि।

(D) निर्माण प्रक्रम के आधार पर वर्गीकरण (Classification based on Fabrication Methods)

(i) ढलाई योग्य धातुये (Casting Metals)
(ii) मशीनन योग्य धातुये (Machinable Metals)
(iii) फोर्जन योग्य धातुयें (Forgeable Metals)
(iv) चूर्ण धातुकर्म धातुयें (Powder Metallurgy Metals)
(v) शीत अथवा ऊष्मा प्रक्रिया योग्य धातुयें (Cold Working or Hot Working Metals)

§ 1.2. पदार्थों के यांत्रिक गुण (Mechanical Properties of Materials)

पदार्थों के प्रमुख यांत्रिक गुणों को जानना परम आवश्यक है ताकि मशीन या ढाँचे के अवयवों का निर्माण करने से पूर्व धातु का चुनाव ठीक प्रकार से किया जा सके ताकि निर्मित अंग (Part) अपने कार्य में सफल रहें।

पदार्थों के प्रमुख यांत्रिक गुण निम्न प्रकार होते हैं—

(1) प्रत्यास्थता (Elasticity)
(2) प्लास्टिकता या सुघट्यता (Plasticity),
(3) कड़ापन या चीमड़पन (Toughness)
(4) दुर्गम्यता (Stiffness)
(5) तन्यता (Ductility)
(6) कुट्टयता (Malleability)
(7) कठोरता (Hardness)
(8) भंगुरता (Brittleness)
(9) नम्यता (Flexibility)
(10) सामर्थ्य (Strength)
(11) मशीनन (Machinability)
(12) दृढ़ता या तन्यता (Tenacity)

कुछ विशेष यांत्रिक गुणों का वर्णन

(1) पदार्थों में प्रत्यास्थता (Elasticity)—"प्रत्यास्थता पदार्थों का वह गुण होता है जिसके कारण प्रत्येक पिण्ड अपने आकार में परिवर्तन (Deformation) का विरोध करता है। जैसे ही आकार में परिवर्तन करने वाले बलों को हटा लिया जाता है तो पिण्ड (पदार्थ) अपने प्रारम्भिक रूप व आकार में पुन: वापस आ जाता है।"

Scanned with CamScanner

(2) प्लास्टिकता (Plasticity)—यह पदार्थों का वह गुण है जिसके कारण पदार्थ पर बल लगाने से उसके आकार में बिना टूटे स्थायी परिवर्तन होता है, अर्थात् बल हटा लेने पर पदार्थ अपने प्रारम्भिक रूप व आकार में पुनः वापस नहीं लौट पाता। प्रायः तापमान बढ़ने पर इस गुण में वृद्धि होती है।

(3) (i) तन्यता (Ductility)—इस गुण के कारण पदार्थ के पतले तार खींचे जा सकते हैं; जैसे—ताँबा, सोना, चाँदी, लोहा, ऐल्युमिनियम आदि। टूटने से पहले प्रतिशत लम्बाई में वृद्धि (% elongation) द्वारा इसकी माप प्रकट की जाती है।

(ii) तन्यता (Tenacity)—किसी पदार्थ के तनाव में टूटने की स्थिति में जितनी अधिकतम प्रतिबल तीव्रता उत्पन्न की जा सकती है, उसे पदार्थ की तन्यता कहते हैं।

(4) भंगुरता (Brittleness)—इस गुण के कारण पदार्थ पर चोट लगाने से वह बिना किसी खराबी उत्पन्न हुए चूरा-चूरा अर्थात् टुकड़े-टुकड़े हो जाता है।

(5) कठोरता (Hardness)—कठोरता के गुण के कारण पदार्थ, कटने, घिसने या खुरचे जाने का विरोध करता है। इसे ब्रिनेल कठोरता परीक्षण (Brinell Hardness Test) द्वारा मापा जाता है, इस गुण के कारण पदार्थ टूटने से पहले झटकों या धक्कों का विरोध करता है। कड़ापन या चीमड़पन (Toughness) के गुण के कारण पदार्थ टूटने से पहले झटकों या धक्कों का विरोध करता है तथा इस गुण के कारण ही पदार्थ नमन एवं मरोड़े जाने (Bending and Twisting) का भी विरोध करता है।

(6) कड़ापन या चीमड़पन (Toughness)—

(7) सामर्थ्य (Strength)—बिना असफल हुए किसी पदार्थ के प्रतिबल सहने के गुण को उसकी सामर्थ्य कहते हैं। यह उसकी अन्तिम प्रतिबल तीव्रता (Ultimate Stress) के मान द्वारा आँकी जाती है।

(8) नम्यता (Flexibility)—इस गुण के कारण पदार्थ को बिना टूटे किसी चाप (Arc) में मोड़ा जा सकता है।

(9) कुट् यता या आघातवर्धनीयता (Malleability)—इस गुण के कारण पदार्थ को पीटकर बिना चटके (Without Cracking) इसे पतली चादर (Sheet) के रूप में बदला जा सकता है। जैसे पीतल, ताँबा, सोना, चाँदी, ऐल्यूमीनियम आदि को पीटकर अथवा सम्पीडन बलों द्वारा के Rollers के बीच से गुजारकर चादर (Sheets) का रूप दिया जाता है अथवा दाब लगाकर बिना चटके किसी भी आकार में बदला जा सकता है।

(10) मशीननता (Machinability)—इस गुण के कारण पदार्थों पर मशीन कार्य (Machining Work) आसानी से किया जा सकता है तथा कटाई औजारों (Cutting tools) द्वारा पदार्थ को विभिन्न आकारों (Shapes) में बदलने की सरलता प्रदान करता है।

1.2 (A) प्रत्यास्थ पदार्थ (Elastic Materials)

जिन पदार्थों में प्रत्यास्थता का गुण (Elastic Property) होता है, प्रत्यास्थ पदार्थ (Elastic Materials) कहलाते हैं और प्रत्यास्थता (Elasticity), पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण प्रत्येक वस्तु अपने आकार में परिवर्तन (Deformation) का विरोध करती है, परन्तु जैसे ही वस्तु के आकार में परिवर्तन करने वाले बलों को हटाया जाता है, वह वस्तु अपने पहले रूप व आकार में वापस आ जाती है। सभी निर्माण पदार्थ प्रत्यास्थ होते हैं।

(B) सुघट्य अथवा प्लास्टिक पदार्थ (Plastic Materials)

जिन पदार्थों में प्लास्टिकता अथवा सुघट्यता (Plasticity) का गुण होता है, प्लास्टिक पदार्थ कहलाते हैं और प्लास्टिकता (Plasticity), पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण पदार्थ पर बल लगाने से उसके आकार (Size) में बिना टूटे (Without Failure) स्थायी परिवर्तन (Permanent Change) हो जाता है अर्थात् बल हटा लेने पर पदार्थ अपनी प्रारम्भिक अवस्था में वापस नहीं आता। तापमान (Temperature) के बढ़ने के साथ-साथ इस गुण में वृद्धि होती है।

Scanned with CamScanner

(C) तन्य पदार्थ (Ductile Materials)

जिन पदार्थों मे तन्यता (Ductility) का गुण होता है, तन्य पदार्थ (Ductile Materials) कहलाते हैं और पदार्थ में तन्यता (Ductility) के गुण के कारण उसके पतले तार (Thin Wire) खींचे जा सकते है। इस गुण की माप (Measurement) बिना टूटे लम्बाई में प्रतिशत वृद्धि तथा अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल में प्रतिशत कमी द्वारा प्रदर्शित होती है। उदाहरण के तौर पर—सोना (Gold), चाँदी (Silver), ताँबा (Copper), एल्यूमीनियम (Al), लोहा (Iron), प्लेटीनम (Platinum) आदि तन्य पदार्थ (Ductile Materials) है।

(D) भंगुर पदार्थ (Brittle Materials)

जिन पदार्थों में भंगुरता (Brittleness) का गुण होता है, भंगुर पदार्थ (Brittle Materials) कहलाते हैं और भंगुरता (Brittleness) के गुण के कारण पदार्थ पर चोट लगाने (Hammering) से वह टुकड़े-टुकड़े हो जाता है। चॉक, काँच, पत्थर आदि भंगुर पदार्थ (Brittle Materials) हैं।

1.3 धातुओं का परीक्षण (Testing of Metals)

धातुओं का परीक्षण उनके यांत्रिक गुणों (जैसे—Hardness, Toughness, Stiffness, Ductility, Machineability) को ज्ञात करने एवं उपयोग में लाने हेतु सर्वोत्तम पदार्थ का चयन आदि के लिए किया जाता है। इससे डिजाइन कार्यों में धातुओं की विशिष्टियों (Specifications) के लिये आंकड़े (Datas) ज्ञात किये जाते हैं।

धातु परीक्षण प्राय: दो प्रकार से किया जाता है—

(i) **विनाशकारी परीक्षण** (Destructive Testing)

(ii) **अविनाशकारी परीक्षण** (Non destructive Testing)

विनाशकारी परीक्षणों के अन्तर्गत विभिन्न प्रकार के यांत्रिक परीक्षण आते हैं, जैसे—

(i) तनाव परीक्षण (Tensile Test)

(ii) सम्पीडन परीक्षण (Compressive Test)

(iii) कठोरता परीक्षण (Hardness Test)

(iv) संघट्ट परीक्षण (Impact Test)

(v) मरोड़ परीक्षण (torsion Test)

(vi) फटीग परीक्षण (Fatigue Test)

अविनाशकारी परीक्षणों के अन्तर्गत निम्न प्रकार के परीक्षण आते हैं—

(i) चुम्बकीय कण परीक्षण (Magnetic Particle Testing)

(ii) द्रव्यमान परीक्षण (Visual Examination)

(iii) रेडियो ग्राफिक परीक्षण (Radiographic Testing)

(iv) अल्ट्रासोनिक परीक्षण (Ultrasonic Testing)

नोट—हमारे पाठ्यक्रम (Syllabus) में केवल विनाशकारी परीक्षण ही हैं।

1.4 तनाव परीक्षण (Tensile Test)

यह परीक्षण "यूनिवर्सल टैस्टिंग मशीन" पर किया जाता है, जिसे संक्षेप में "U.T.M." कहते हैं। इस मशीन को चित्र 1.1 (a) में दिखाया गया है। यह मशीन निम्न परीक्षण (Testing) करने के काम आती हैं—

(1) तनाव सामर्थ्य परीक्षण (Tensile Strength Testing)

(2) सम्पीडन या अवभंजन सामर्थ्य परीक्षण (Compression strength Test or Crushing Strength Test)

(3) नमन सामर्थ्य परीक्षण (Bending Strength Test)

Scanned with CamScanner

ये सभी परीक्षण पदार्थ के विशेष रूप से बनाये गये नमूनों (Specimens) पर किये जाते हैं जो चित्र 1.1 (b) में दर्शाये गये हैं। यूनिवर्सल टैस्टिंग-मशीन (U.T.M.) की क्षमता (Capacity) उसके द्वारा लगाये जाने वाले अधिकतम बल (Maximum Load) द्वारा दर्शायी जाती है। ये मशीनें 200 kN, 400 kN तथा 1000 kN आदि क्षमताओं (Capacity) में बनी होती हैं। ये मशीनें द्रविक प्रणाली (Hydraulic system) पर कार्य करती हैं।

विवरण—यूनिवर्सल परीक्षण मशीन (U.T.M.) में निम्न दो मुख्य भाग होते हैं—

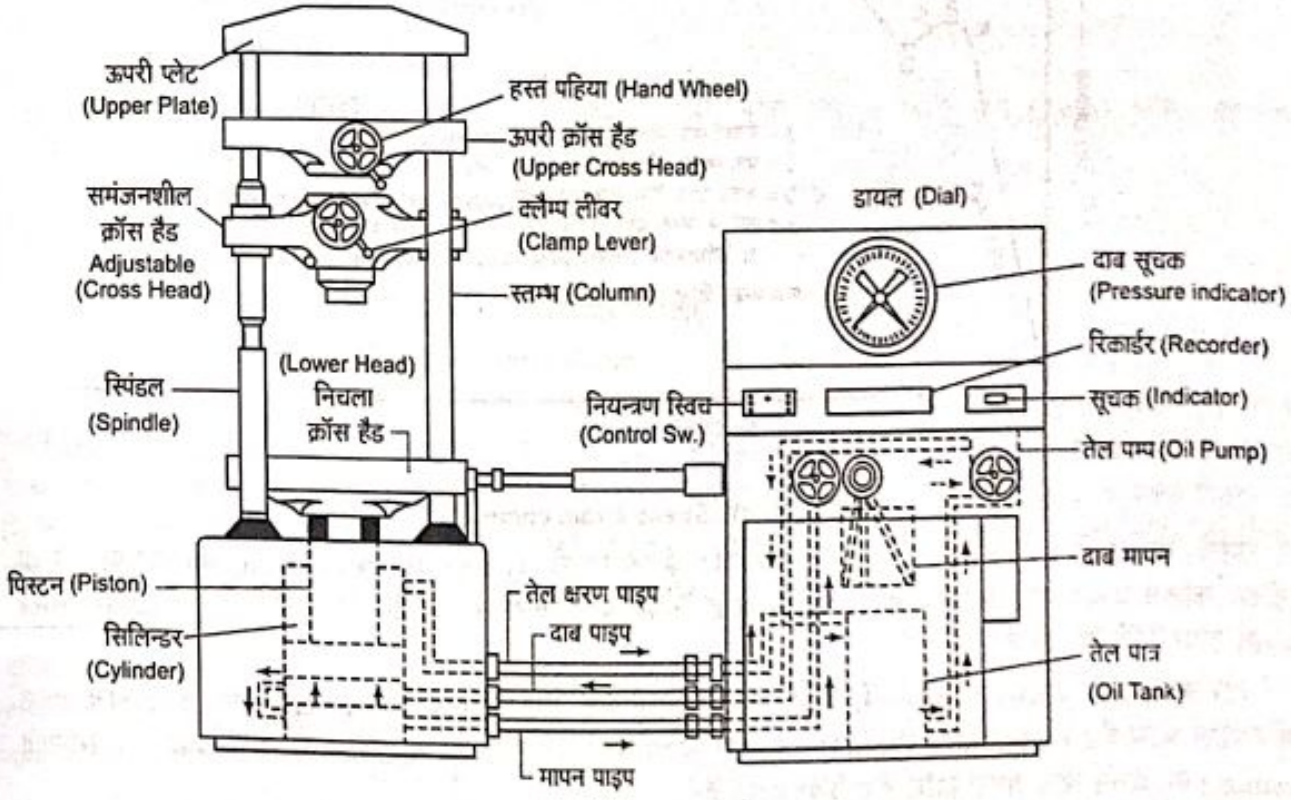
(1) पकड़ने, भार लगाने तथा परीक्षण करने वाला भाग।
(Gripping, Loading and Testing Part)

(2) नियन्त्रण भाग अथवा लगे भार को मापने वाला भाग।
(Control Panel Part or Applied Load Measuring Part)

ये दोनों भाग आपस में द्रविक क्रिया द्वारा दाब बल लगाने के लिये (to apply hydraulic pressure for experiment on specimen job) पाइपों (Pipes) तथा विद्युत केबिल (Electric Cable) द्वारा सम्बन्धित होते हैं।

(A) पकड़ने, भार लगाने तथा परीक्षण करने वाला भाग—इस भाग में निम्नलिखित युक्तियाँ (Devices) लगी होती हैं—

(1) आधार (Base)—इसमें मुख्य रूप से एक सिलिण्डर और एक पिस्टन होते हैं। पिस्टन का ऊपरी भाग एक निचले क्रॉस हैड (Lower Cross Head) से जुड़ा होता है जिसे सम्पीडन क्रॉस हैड (Compression Cross Head) भी कहते हैं। जब सिलिण्डर में दाब पर द्रव भेजा जाता है तब पिस्टन ऊपर उठता है और इससे जुड़ा हुआ Lower Cross Head (या Compression Cross Head) भी ऊपर उठता है।



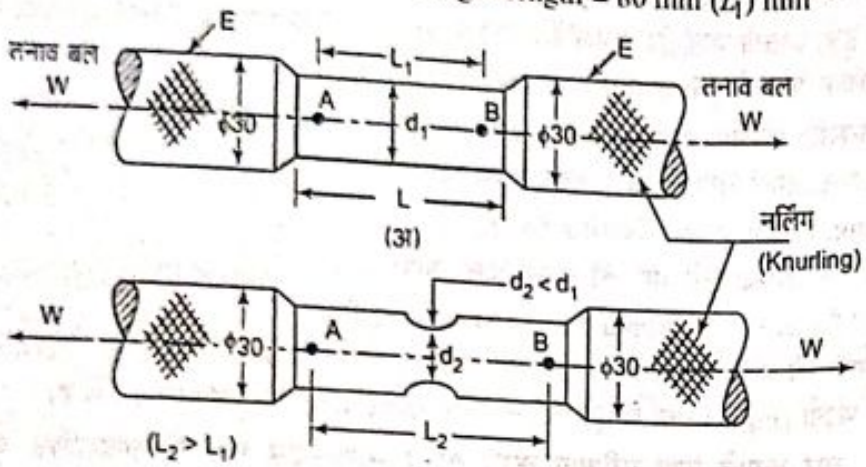
यूनिवर्सल परीक्षण मशीन

चित्र 1.1 (a) : यूनिवर्सल परीक्षण मशीन (U.T.M.)

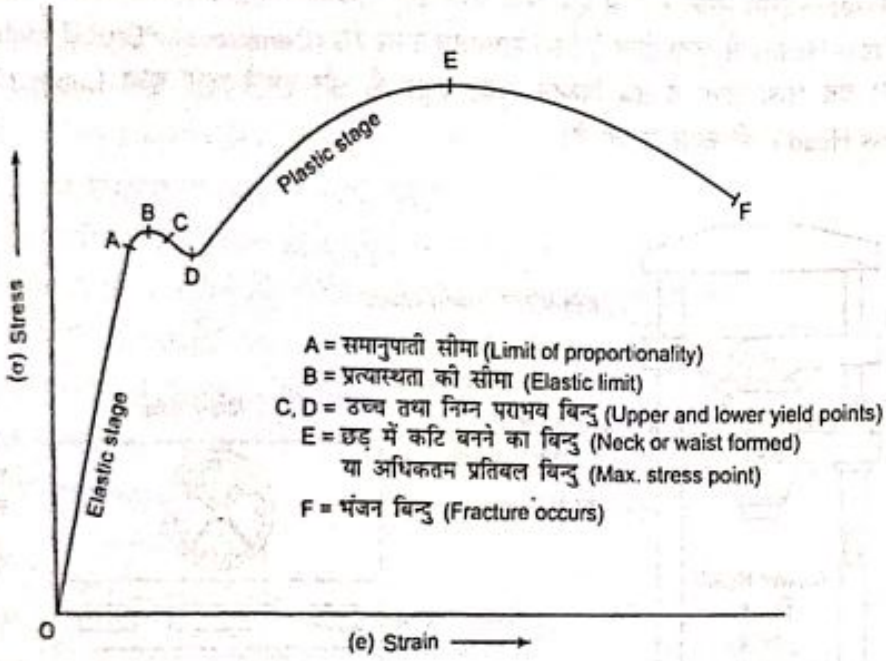
Scanned with CamScanner

चित्र मे व्यास (Dia) $d_1 = 15{\cdot}96$ mm है जिससे $A_1 = 200$ mm^2

AB = Gauge Length = 80 mm (L_1)



चित्र 1.1 (b)



चित्र 1.1 (c) : Stress-strain curve.

इसके आधार में एक इलेक्ट्रिक मोटर भी लगा होता है जो गियरों (Gears) तथा चेन (Chain) की सहायता से दो चूड़ीदार कॉलम प्रकार की स्पिण्डलों को घुमाया जाता है जिससे बीच वाला समंजनशील क्रॉस हैड (Adjustable Cross Head) ऊपर-नीचे चलता है।

(2) क्रॉस हैड (Cross Head)—U.T.M. में तीन क्रॉस हैड होते हैं। निचला (Lower) क्रॉस हैड, बीच वाला समंजनशील क्रॉस हैड (Adjustable Cross Head) और ऊपरी क्रॉस हैड (Uper Cross Head)। सभी प्रकार के परीक्षणों (testings) के दौरान बीच वाला क्रॉस हैड स्थिर रहता है।

सम्पीडन परीक्षण (Compression Testing) के लिये नमूने (Specimen) को निचले तथा बीच वाले क्रॉस हैड के बीच रखकर नीचे वाले क्रॉस हैड (या सम्पीडन क्रॉस हैड) को ऊपर उठाकर नमूने को सम्पीडित (compressed) किया जाता है। तनाव परीक्षण के लिए नमूने (Specimen) को ऊपर वाले क्रॉस हैड तथा बीच वाले क्रॉस हैड (Middle Cross Head) पर

Scanned with CamScanner

बाँधकर ऊपरी क्रॉस हैड (Upper Cross Head) को ऊपर चलाकर नमूने पर तनाव बल (Tensile Force) लगाया जाता है। ध्यान रहे कि U.T.M. में ऊपरी तथा निचला क्रॉस हैड (Upper and Lower Cross Head) आपस में दृढ़ता से जुड़े रहते हैं। इसीलिए ये दोनों साथ-साथ ऊपर उठते हैं अथवा नीचे आते हैं।

इनमें से बीच वाला क्रॉस हैड (Middle Cross Head) नमूने (Specimen) को ऊपरी (Upper) या निचला (Lower) क्रॉस हैड के साथ बाँधने के लिए साइज के अनुसार समंजित (Adjust) करने के काम आता है।

नीचे वाले सम्पीडन (Compression) क्रॉस हैड के ऊपरी तल पर एक सम्पीडन प्लेट लगी होती है जिस पर सम्पीडन परीक्षण के नमूने को रखा जाता है या नमन परीक्षण (Bending test) में bending attachment को लगाया जाता है।

ऊपरी क्रॉस हैड में तनाव नमूने को पकड़ने के लिये जबड़े (Jaws) लगे होते हैं जिन्हें एक हस्त-पहिये द्वारा आगे-पीछे करके Job/Specimen के सिरे को पकड़ाया जाता है। एक क्लैम्प लीवर की सहायता से जबड़ों को लॉक किया जाता है ताकि वे स्वत: न खुल सकें। नमूने को जबड़ों में फिसलने से रोकने के लिये जबड़ों पर दाँते बने होते हैं।

(3) ऊपरी प्लेट (Upper Plate)—यह मशीन के ऊपरी भाग पर लगी होती है तथा स्तम्भों और स्पिडलों (Columns & Spindles) को सहारा देती है तथा गाइड करती है।

नमूने की लम्बाई में हुए परिवर्तन को मापने के लिए U.T.M. के दायें स्तम्भ में स्तम्भ के साथ ऊर्ध्वाधर (Vertical) चलने वाला एक पैमाना (Scale) लगा होता है। इस पर पाठ्यांक के लिये एक सूचक (Pointer) बीच वाले क्रॉस हैड के दायीं ओर लगा हुआ होता है।

(B) नियन्त्रण भाग (Control Panel)—इसमें मुख्य रूप से तीन भाग होते हैं—

(1) द्रविक प्रणाली (Hydraulic System)

(2) डाइनेमोमीटर (Dynamometer)

(3) रिकार्डर (Recorder)

(1) द्रविक प्रणाली (Hydraulic System)—इसमें मुख्य रूप से निम्न भाग (Parts) अथवा अवयव (Elements) होते हैं—

(i) तेल का पात्र (Oil Container)

(ii) विद्युत मोटर (Electric Motor)

(iii) उच्च दाब पम्प (High Pressure Pump)

(iv) समंजन युक्ति (Adjusting Device)

द्रविक प्रणाली, कार्यकारी सिलिण्डर से तीन पाइपों द्वारा जुड़ी होती हैं—(1) दाब पाइप (Pressure Pipe), (ii) मापन पाइप (Measuring Pipe), (iii) तेल क्षरण पाइप (Oil Leakage Pipe)। उच्च दाब पम्प द्वारा, दाब पाइप की सहायता से भेजा गया तेल कार्यकारी सिलिण्डर में पहुँचता है जिसके कारण पिस्टन ऊपर उठता है। मशीन की क्रिया के समय पिस्टन व सिलिण्डर के बीच घर्षण कम करने के लिए तेल टपकता है जिसे सिलिण्डर के ऊपरी भाग में एक पम्प द्वारा चूषित कर लिया जाता है। फिर यह तेल क्षरण पाइप द्वारा तेल-पात्र (Oil container) में पहुँच जाता है।

(2) डाइनेमोमीटर (Dynamometer)—इस भाग में तीन छड़ डाइनेमोमीटर के साथ डायल गेज तथा भाग मापन युक्ति (Load Measuring device) का संवरक (slector) लगे होते हैं। उच्च दाब पर तेल, मापन पाइप के द्वारा डाइनेमोमीटर के संवरक पिस्टन पर पहुँचता है जिससे मापन पिस्टन (measuring piston) उठता है जिसके कारण डायल गेज की यंत्रावली कार्य करती है और डायल पर Pointer द्वारा भार (load) को सूचित (indicate) किया जाता है।

(3) रिकार्डर (Recorder)—इस युक्ति (device) के द्वारा परीक्षण (testing) के समय भार तथा विरूपण (Load and Deformation) में ग्राफ खींचा जाता है। रिकार्डर के कागज पर पैन (जो एक लीवर से जुड़ा होता है) द्वारा ग्राफ (या वक्र) खिंचता जाता है। पैन का लीवर डायल गेज के प्रेक्षण (Reading) को रिकार्डर पर पारेषित (transmit) करता है।

Scanned with CamScanner

तनाव परीक्षण विधि—सर्वप्रथम चित्र के अनुसार विशेष आकृति तथा मापों का नमूना खराद मशीन (Lathe Machine) पर तैयार कराकर उस नमूने (Specimen) को U.T.M. के ऊपरी तथा मध्य वाले (ऐडजस्टेबिल) क्रॉस-हैड के बीच जबड़ों में मजबूती के साथ पकड़ा जाता है। इसके बाद मशीन द्वारा धीरे-धीरे तनाव बल लगाया जाता है, जिसका मान U.T.M. के डायल-सूचक द्वारा पढ़ा जाता है। परीक्षण से प्राप्त नमूने की लम्बाई मे वृद्धि को दैर्ध्य-वृद्धिमापी (Extensometer) द्वारा ज्ञात किया जाता है अथवा पढ़ा जाता है और U.T.M. में लगी ग्राफ-युक्ति (graph device) द्वारा नमूने के टूटने तक ग्राफ प्राप्त करते हैं। नमूने पर तनाव बल धीरे-धीरे बढ़ाते जाते हैं। पहले तो नमूने की लम्बाई में वृद्धि होती जाती है, फिर अन्त में नमूना टूट जाता है। नमूने (टैस्ट पीस) के टूटने के बाद दोनों टुकड़ों को आपस मे मिलाकर रखा जाता है और दोनों गेज चिन्हों के बीच की दूरी L_2 मापते हैं तथा टूटे स्थान पर टैस्ट पीस का व्यास d_2 माप लेते हैं। फिर निम्न सूत्रों के द्वारा गणना करते हैं—

माना नमूने का प्रारम्भिक व्यास d_1 तथा गेज बिन्दुओं के बीच गेज लम्बाई L_1 है। नमूने की काट का क्षेत्रफल $A = \frac{\pi d_1^2}{4}$ होगा।

अन्य प्रेक्षण निम्न प्रकार लेते हैं—

(1) पराभव बिन्दु पर भार, W_1 = ... kN

(2) नमूना टूटने पर अन्तिम भार W_2 = ... kN

(3) नमूना टूटने के बाद नमूने की लम्बाई L_2 = ... mm

(4) नमूना टूटने के बाद नमूने का व्यास d_2 = ... mm

(5) टूटने के स्थान पर नमूने की काट का क्षेत्रफल, $A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$ = ... mm.

गणना (Claculation) निम्न प्रकार करते हैं—

(1) पराभव बिन्दु पर प्रतिबल $= \frac{\text{पराभव बिन्दु पर भार}}{\text{काट का क्षेत्रफल } (A_1)}$

$$= \frac{W_1}{A_1} = \ldots . \text{N/mm}^2 \text{ (या MPa)}$$

(2) अन्तिम तनाव प्रतिबल $= \frac{\text{अन्तिम भार (Ultimate Load)}}{\text{काट का क्षेत्रफल } (A_1)}$

$$= \frac{W_2}{A_1} = \ldots . \text{N/mm}^2 \text{ (या MPa)}$$

(3) प्रत्यास्थता गुणांक (Modulus of Elasticity) या यंग मापांक (Young's Modulus)

$$W = \frac{\text{प्रत्यास्थता की सीमा में प्रतिबल (Stress)}}{\text{विकृति (Strain)}}$$

(4) लम्बाई में प्रतिशत वृद्धि (% Elongation) $= \frac{L_2 - L_1}{L_1} \times 100\%$

(5) प्रतिशत सिकुड़न (% Contraction) $= \frac{A_1 - A_2}{A_1} \times 100\%$

1.5 U.T.M. पर सम्पीडन परीक्षण (Compressive Test)

इस परीक्षण के लिए सम्पीडन नमूने की लम्बाई ऐसी निश्चित की जाती है कि सम्पीडन भार आने पर नमूने में नमन का प्रभाव (Bending Effect) न उत्पन्न हो सके। नमूना केवल क्रशिंग (Crushing) द्वारा ही असफल (Fail) हो।

प्रयोग के पद (Steps)—

(1) परीक्षण पदार्थ का मानक मापों (Standard Dimensions) का नमूना लेते हैं।

(2) लगभग दो या तीन स्थानों पर नमूने की लम्बाई, चौड़ाई और गहराई अथवा वृत्ताकार काट का होने पर व्यास (diameter) मापते हैं जिसके द्वारा काट का औसत क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।

Scanned with CamScanner

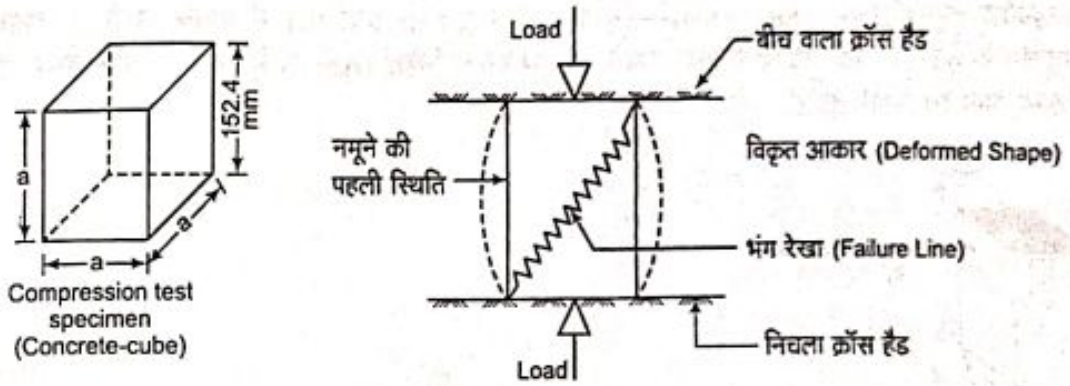
(3) नमूने को मशीन के निचले क्रॉस हैड तथा बीच वाले एडजस्टेबल क्रॉस हैड के बीचों-बीच रखकर धीरे-धीरे सम्पीडन भार (Compressive Load) लगाते हैं।

(4) नमूना (Specimen job) भंग (Crush) होते समय डायल पर भार का मान (Load Reading) नोट करते हैं, यही भंजक या दलन भार (Crushing Load) होता है।

(5) इस भार (Crushing Load) को प्रभावित क्षेत्रफल से भाग देकर सम्पीडन सामर्थ्य (Compressive strength) ज्ञात करते हैं।

(6) अब मशीन को डिस्चार्ज करके सूचक को आरम्भिक स्थिति पर ले आते हैं।

(7) नमूने को मशीन पर से हटा लेते हैं तथा उसके भंग (Fail) होने के प्रकार (Type) का अध्ययन करते हैं।

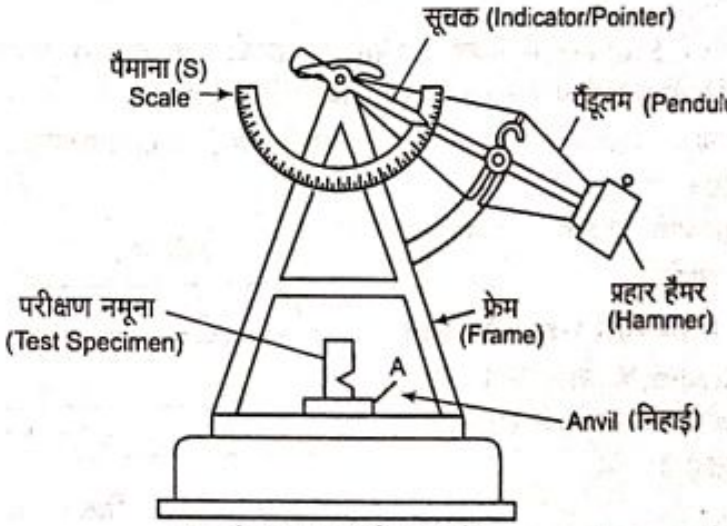


चित्र 1.2

1.6 संघट्टन अथवा समाघात-परीक्षण (Impact Test)

इस परीक्षण द्वारा आकस्मिक टकराव के बल (Suddenly Impact Load) द्वारा पदार्थों की धक्का सहन क्षमता ज्ञात करते हैं। यह परीक्षण "आइजोड इम्पैक्ट टैस्टिंग मशीन" (IZODE's Impact Testing Machine) द्वारा किया जाता है। इस मशीन को चित्र 1.3 (a) में प्रदर्शित किया गया है।

किसी पदार्थ की धक्का सहन क्षमता, उस पदार्थ के बने मानक मापों के नमूने को तोड़ने में खर्च हुई ऊर्जा (Energy) द्वारा प्रदर्शित होती है।



चित्र 1.3 (a)

आइजोड परीक्षण मशीन में A के आकार में दो फ्रेम होते हैं जिनके बीच में पैण्डुलम P दोलन कर सकता है।

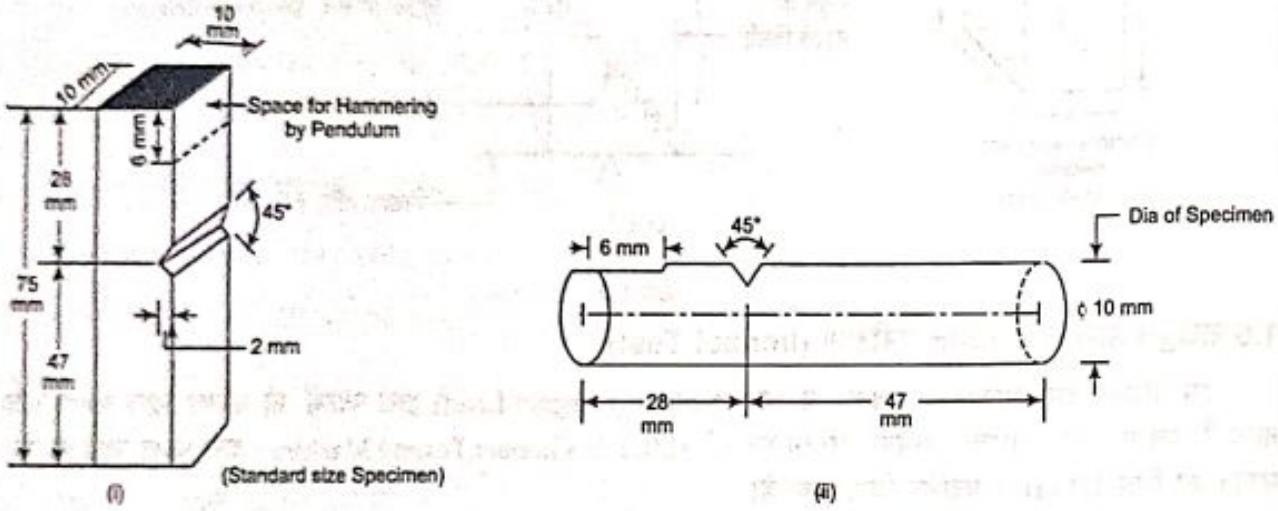
Scanned with CamScanner

इस पैण्डुलम के साथ एक सूचक (Indicator Pointer) भी वृत्तीय पैमाने (Scale) S पर चलता है, इस स्केल पर N-m में चिन्ह अंकित होते है। झूलते हुए पैण्डुलम को रोकने के लिए मशीन के साइड में एक लीवर हैण्ड ब्रेक भी होता है।

कार्यविधि—मशीन के आधार पर निहाई (Anvil) A में नमूने (टैस्ट पीस) को उपयुक्त ऊर्ध्वाधर स्थिति (Vertical Position) में पकड़कर पैण्डुलम के निचले सिरे पर लगे हैमर के प्रहार (चोट) द्वारा तोड़ा जाता है। तोड़ने के बाद हैमर झूलता हुआ आगे दूसरी ओर पहुँच जाता है। तोड़ने के बाद पैण्डुलम के हैमर में शेष ऊर्जा (Energy), पैमाने पर सूचक (Pointer) द्वारा स्केल पर प्रदर्शित होती है। अब नमूने को तोड़ने से पहले यानि खाली हैमर को गिराने में खर्च हुई ऊर्जा के मान में से बाद में नमूने को तोड़ने के बाद की ऊर्जा के मान को घटकार (अर्थात् दोनों ऊर्जाओं का अन्तर) नमूने को तोड़ने में खर्च हुई ऊर्जा को ज्ञात किया जाता है।

परीक्षण नमूने—संघट्टन अथवा धक्का परीक्षण के लिये दो प्रकार के नमूने प्रयोग करते हैं—

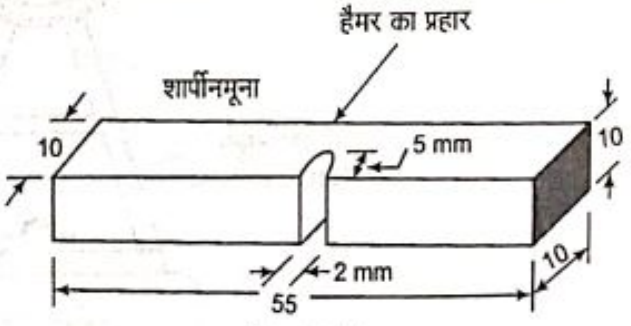
(i) आइजोड नमूना (Izode Specimen)—इसे चित्र 1.3 (b) (i) तथा (ii) में मानक मापों में दर्शाया गया है। नमूने को, पैंडुलम के आने की ओर खाँचा (नॉच) रखते हुए इस प्रकार निहाई (Anvil) में रखते हैं ताकि हैमर नॉच से ऊपर बने 6mm लम्बे भाग पर प्रहार करे।



चित्र 1.3 (b)

(ii) शार्पी नमूना (Charpy Specimen)—चित्र 1.3 (c) में इसको माप (Size) सहित दिखाया गया है। यह 55mm लम्बा तथा 10 mm भुजा के वर्ग की काट वाला होता है। लम्बाई के बीच में 45° के कोण (Angle) में 2mm गहराई की वी-नॉच बनी होती है। यदि नॉच यू (U) के रूप में बनानी हो तो इसकी गहराई 5mm तथा चौड़ाई 2mm रखी जाती है। इसे मशीन की निहाई सीट पर लिटाकर रखते हैं जबकि आईजोड वाले नमूने को निहाई पर खड़ा करके नॉच से ऊपर का भाग बाहर निकालते हुए निहाई में लगाते हैं।

शार्पी नमूने को निहाइयों में इस प्रकार रखते हैं कि खाँचा (Notch) बीच में रहे तथा Hammer का प्रहार खाँचे (नॉच) के तल के विपरीत सतह पर खाँचे की ही सीध में हो। निहाइयों के बीच दूरी 40 mm रखी जाती है।



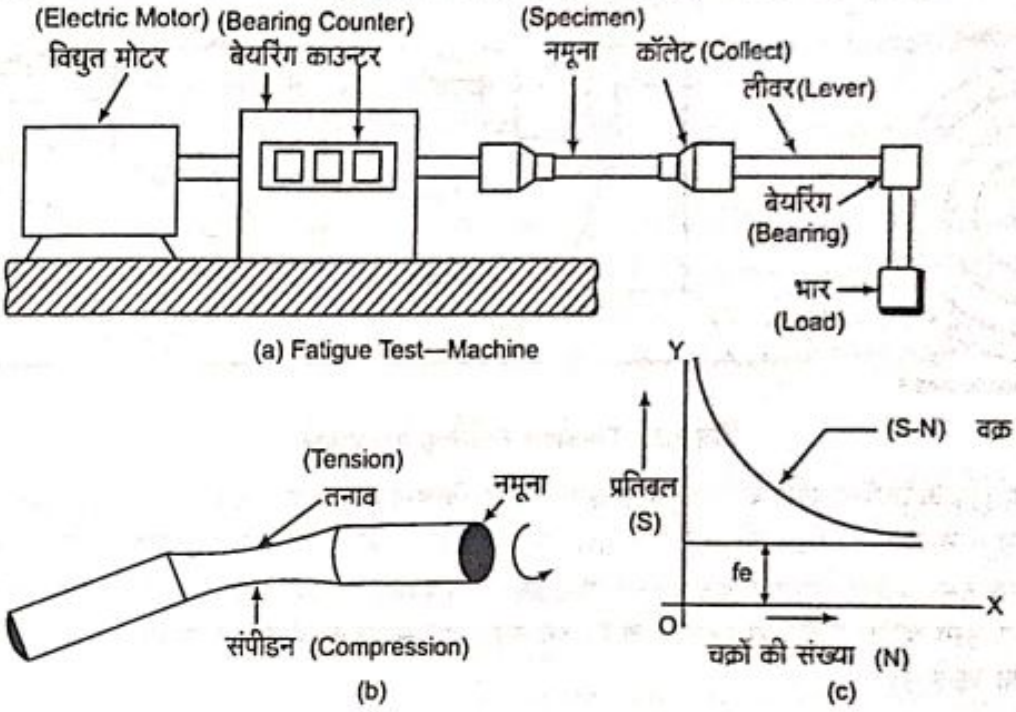
चित्र 1.3 (c)

1.7 थकान परीक्षण (Fatigue Test)

जब किसी पदार्थ पर बदलते मान के भार अथवा प्रतिबल कार्य करते हैं तो वह पदार्थ पराभव बिन्दु प्रतिबल (Yield Stress Point) से पहले ही असफल (Fail) हो जाता है। इस प्रकार की असफलता को ही फटीग अथवा थकान (Fatigue) कहते हैं।

Scanned with CamScanner

परीक्षण विधि—इस परीक्षण को प्राय: क्रैंक शाफ्ट तथा ओटोमोबाइल इण्डस्ट्रीज के उपयोग में लाया जाता है। चित्र 1.4 (a) के अनुसार फटीग टेस्टिंग मशीन में एक रोटेटिंग लीवर भुजा होती है, जिसके एक सिरे पर भार लगाते हैं। भार लगने से नमूने में नमन (Bending) का प्रभाव उत्पन्न होता है। इसमें नमूने का ऊपरी भाग हमेशा तनाव (Tension) में तथा निचला भाग हमेशा संपीडन (Compression) में होता है। जब यह नमूना जोकि चित्र (b) में प्रदर्शित है, घूमता है तो नमूने की सतह पर किसी भी स्थिति में प्रतिबल का मान अधिकतम संपीडन से अधिकतम तनाव तक लगातार बदलता रहता है। नमूने को तब तक घुमाते हैं जब तक वह असफल (Fail) न हो जाये या चक्रों की एक निश्चित संख्या न घूम ले। उदाहरण के लिए मृदु इस्पात का नमूना 50,00,000 चक्र तक बिना असफल हुए घूम सकता है। इसके पश्चात् परीक्षण रोक देते हैं।



चित्र 1.4

इसी प्रकार उसी धातु के अन्य नमूनों पर भी अलग-अलग प्रतिबलों के लिए यह टेस्ट किया जाता है तो परिणामों (Results) को चित्र 1.4 (c) के अनुसार ग्राफ पर अंकित करते हैं। प्राप्त ग्राफ को *S-N* वक्र कहते हैं जिससे किसी पदार्थ की "फटीग सीमा" (Fatigue Limit or Endurance Limit) निर्धारित करने में मदद मिलती है। इस परीक्षण के द्वारा हम यह बता सकते हैं कि इस मशीन के अंग पर कितना लोड आने पर कितने चक्रों के बाद यह अंग (Part) असफल हो जायेगा।

1.8 मरोड़ परीक्षण (Torsion Test)

मरोड़ परीक्षण प्राय: निम्नलिखित को ज्ञात करने के लिए किया जाता है—

(i) कर्तन मापांक C या दृढ़ता गुणांक (Modulus of Rigidity) G

(ii) समानुपातिक सीमा (Proportional Limit)

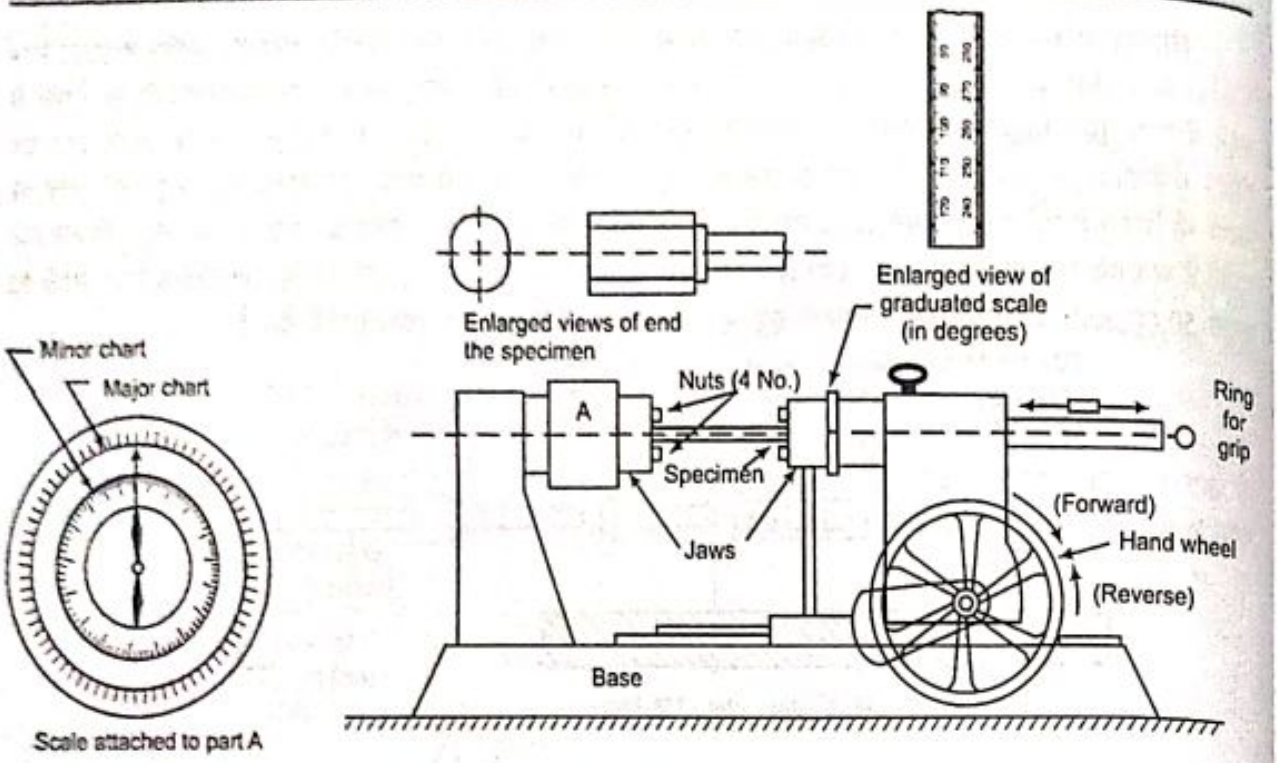
(iii) अधिकतम बलघूर्ण (Maximum Torque)

(iv) फटन मापांक (Modulus of Rupture)

(v) कुल मरोड़ या ऐंठन की संख्या (No. of twists)

परीक्षण विधि—मरोड़ परीक्षण को चित्र 1.5 (a) में प्रदर्शित एक मरोड़ परीक्षण मशीन पर करते हैं। टेस्ट नमूने के एक सिरे को बद्ध (Fixed) कर दिया जाता है तथा दूसरे सिरे पर मरोड़ अथवा ऐंठन क्रिया द्वारा सिरे को मरोड़ा जाता है। मशीन में लगी हुयी युक्ति (Device) द्वारा टेस्ट नमूने के बद्ध सिरे पर यह मरोड़ 'θ' माप लेते हैं। अब मरोड़ समीकरण $\frac{T}{J} = \frac{G\theta}{l}$ से भी θ ज्ञात कर सकते हैं।

Scanned with CamScanner



चित्र 1.5 : Torsion Testing machine

मरोड़ घूर्ण (T) के विभिन्न मानों के लिए मरोड़ कोण (θ) के विभिन्न मान प्राप्त होते हैं। यदि मरोड़ घूर्ण (Torque) 'T' तथा मरोड़ कोण θ में ग्राफ (x-axis पर θ तथा y-axis पर T लेकर) खींचा जाये तो एक सरल रेखा प्राप्त होती है।

यह परीक्षण हस्त चालित अथवा विद्युत चालित दोनों प्रकार की मशीनों पर किया जा सकता है। कम व्यास अथवा छोटे नमूनों का परीक्षण हस्त चालित मशीन पर किया जाता है। जब नमूना बड़े साइज का हो तो आवश्यक बलाघूर्ण एक विद्युत मोटर द्वारा प्रदान किया जाता है।

प्रश्नावली

1. इन्जीनियरी पदार्थों का वर्गीकरण कीजिये।
2. निम्न में अन्तर बताइये—
   (i) प्रत्यास्थ पदार्थ तथा प्लास्टिक पदार्थ में अन्तर
   (ii) तन्य पदार्थों तथा भँगुर पदार्थों में अन्तर।
3. तनाव परीक्षण से ज्ञात किये जाने वाले यान्त्रिक गुणों को परिभाषित कीजिये।
4. तनाव परीक्षण (Tensile Test) का संक्षिप्त वर्णन कीजिये।
5. विनाशकारी (Destructive) और अविनाशकारी (Non-destructive) परीक्षणों में अन्तर स्पष्ट करें।
6. संघट्टन परीक्षण (Impact Test) की विधि का संक्षेप में वर्णन कीजिये।
7. संघट्टन परीक्षण (Impact Test) के लिए आइजोड नमूने तथा शार्पी नमूने का चित्र बनाकर अन्तर स्पष्ट करें।
8. थकान परीक्षण (Fatigue Test) का सचित्र वर्णन करें।
9. मरोड़ परीक्षण (Torsion Test) किन उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए किया जाता है?
10. मरोड़ परीक्षण (Tensile Test) की विधि का संक्षिप्त वर्णन करें।
11. पदार्थों के प्रमुख यांत्रिक गुणों को समझाइये।
12. समझाइये—प्रत्यास्थ पिण्ड, प्लास्टिक पिण्ड, दृढ़ पिण्ड तथा विरूपण। ❑

Scanned with CamScanner

1B साधरण प्रतिबल तथा विकृति
(SIMPLE STRESS AND STRAIN)

§ 1.1. परिचय (Introduction)

हम जानते हैं कि इंजीनियरिंग दृष्टिकोण के अनुसार कोई भी पिण्ड पूर्ण दृढ़ (Perfectly Rigid) नहीं है क्योंकि पिण्ड पर बाह्य बल लगाने से उसके रूप एवं आकार में कुछ-न-कुछ परिवर्तन (या विरूपण-Deformation) अवश्य होता है और ऐसा, पदार्थ में प्रत्यास्थता (Elasticity) का गुण होने के कारण होता है।

किसी भी मशीन या ढाँचे (Structure) का निर्माण तथा उसके प्रयोग करने से पूर्व सुरक्षा की दृष्टि से यह जानना परम आवश्यक है कि उस वस्तु पर लगने वाले बल या प्रतिबल कितने मान के तथा किस प्रकृति (Nature) के होंगे ताकि उसके अनुकूल सामर्थ्य की वस्तु का निर्माण किया जा सके और वह अपने कार्य को सफलतापूर्वक पूर्ण कर सके।

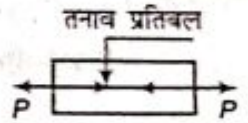
इस अध्याय में हम मशीन या ढाँचे (Structure) के पुर्जों या अवयवों (Parts or Elements) पर बलों के प्रभाव के बारे में जानकारी करेंगे। **"अवयवों पर लगने वाले विभिन्न प्रकार के बलों को ही उन पर बोझ (Load) कहते हैं।"** जैसे—कॉलम या दीवारों पर धरन (Beam) या ट्रस का भार तथा पुल पर चलती गाड़ी या बस का चल भार आदि।

§ 1.2. भार या बोझ के प्रकार (Types of Load)

(1) अचल तथा चल भार (Dead & Live Loads)—जो भार या बोझ, सदैव अपना मान बिना बदले किसी निश्चित स्थान पर क्रिया करते हैं, अचल भार या बोझ (Dead Load) कहलाते हैं। प्राय: अचल भार ऊर्ध्वाधर दिशा में कार्य करते हैं; जैसे—किसी एक स्थान पर रखी मशीन का भार, ट्रस का भार, टेकों पर टिकी हुई धरन (Beam) का भार, कॉलम पर छत का भार, खम्बे पर तार या केबिल के भार बल आदि।

यदि समय के साथ-साथ भूमि या धरन पर भार का क्रिया-बिन्दु भी बदलता है, तो उसे चल भार कहते हैं; जैसे—पुल पर चलती हुई रेलगाड़ी या बस-ट्रक के पहियों द्वारा भूमि पर लगा भार, क्रेन-मार्गों पर क्रेन का भार आदि। अत: चल भार, अस्थायी रूप से क्रिया करते हैं। इनका मान तथा क्रिया-बिन्दु भी स्थिर नहीं रहते।

(2) अक्षीय तथा अनुप्रस्थ भार (Axial & Transverse Loads)—जो भार किसी अवयव या धरन की लम्बाई की अक्ष पर तथा अक्ष के समान्तर दिशा में लगे होते हैं, **अक्षीय भार** कहलाते हैं तथा जो भार धरन की अक्ष के लम्ब रूप अर्थात् अनुप्रस्थ काट के ही तल में लगे होते हैं, **अनुप्रस्थ भार** कहलाते हैं। अक्षीय भारों को सीधे भार तथा अनुप्रस्थ भारों को **कर्तन भार** भी कहा जाता है।

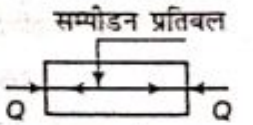


(वस्तु पर तनाव भार)

चित्र 1.1 (अ)

(3) तनाव तथा सम्पीडन भार (Tensile & Compressive Loads)—किसी वस्तु या अवयव को खींचने वाले बल को तनाव भार (Tensile Load) कहते हैं। जैसे चित्र 1.1 (अ) में बल P, वस्तु पर तनाव भार के रूप में कार्य कर रहा है।

किसी वस्तु या अवयव को दोनों ओर से दबाने वाले बल को सम्पीडन भार (Compressive Load) कहते हैं। जैसे चित्र 1.1 (ब) में बल Q, वस्तु पर सम्पीडन भार के रूप में कार्य कर रहा है।

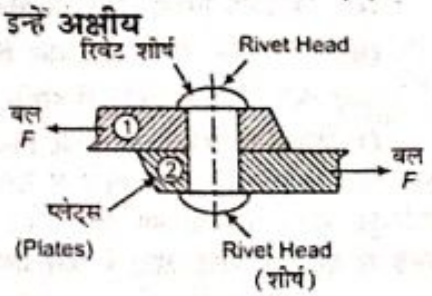


(वस्तु पर सम्पीडन भार)

चित्र 1.1 (ब)

तनाव तथा सम्पीडन के भार यदि छड़ की अक्ष के समान्तर कार्य करते हैं तो इन्हें **अक्षीय भार** या **सीधे भार** (Direct Load) भी कहते हैं।

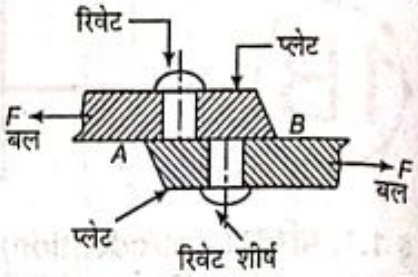
(4) कर्तन भार या कर्तन बल (Shear Load or Shear Force)—यदि किसी वस्तु पर बल या भार इस प्रकार कार्य करें कि उससे पदार्थ में कर्तन (Shearing) होता हो या कर्तन होने की सम्भावना होती हो तो लगे बलों को कर्तन भार का कर्तन बल कहते हैं। इसे निम्न उदाहरण से समझा जा सकता है—



चित्र 1.2 (अ)

Scanned with CamScanner

चित्र 1.2 (अ) में एक रिवेट जोड़ (Riveted Joint) दिखाया गया है। इसमें दोनों प्लेट पर खिचाव बल (तनाव बल) F विपरीत दिशाओं में लग रहे हैं। यदि ये बल रिवेट को तोड़ने के लिये पर्याप्त हैं तो रिवेट चित्र 1.2 (ब) के अनुसार टूट जायेगी। इस अवस्था में ऊपरी प्लेट मे रिवेट का आधा भाग बायीं ओर तथा नीचे वाली प्लेट मे रिवेट का आधा भाग दायीं ओर खिसक जाता है, अर्थात् दोनों प्लेटों के बीच रिवेट, समतल सतह AB पर काटकर फिसल जाता है। इस क्रिया को रिवेट का **कर्तन** (Shear) कहते हैं। यह क्रिया होने के कारण ही लगाये गये बल F को **कर्तन बल** (Shear Force) या **कर्तन भार** (Shear Load) कहते हैं।



चित्र 1.2 (ब)

§ 1.3. बाह्य बलों या भारों के प्रभाव में पदार्थों का व्यवहार (Behaviour of Materials subjected to External Loads)

(a) प्रतिबल तथा विकृति की संकल्पना (Concept of Stress & Strain)—जब किसी वस्तु पर बाहर से बल क्रिया करते हैं तो उसके आकार में कुछ परिवर्तन या विरूपण (Deformation) होता है। इस विरूपण का विरोध करने के लिये वस्तु के पदार्थ में प्रतिरोधी बल उपजते हैं। इन प्रतिरोधी बलों का मान विरूपण के साथ-साथ बढ़ता जाता है और अन्त में पिण्ड के स्थैतिक सन्तुलन में आ जाने पर विरूपण होना रुक जाता है।

अत: **वस्तु के आकार में परिवर्तन या विरूपण को विकृति** (Strain) **तथा वस्तु के पदार्थ में उपजे प्रतिरोध को प्रतिबल** (Stress) **कहते हैं।**

जब कोई वस्तु या पिण्ड बाह्य बलों का पूर्ण प्रतिरोध न कर सके तब उसका विरूपण अधिक होता है और अन्त में वह पिण्ड या वस्तु टूटकर असफल (Fail) हो जाती है।

(b) प्रतिबल-तीव्रता (Intensity of Stress)—किसी वस्तु पर बाहर से बल लगाने पर, साम्यावस्था में, **"वस्तु में अनुप्रस्थ काट के इकाई क्षेत्रफल पर कार्य करने वाले आन्तरिक प्रतिरोधी बल (Resisting Force) को प्रतिबल-तीव्रता या प्रतिबल (Stress) कहते हैं।** इसे p या f या σ से प्रदर्शित करते हैं।" यदि वस्तु पर लगाया गया बाह्य बल F तथा काट का क्षेत्रफल A हो, तो

$\therefore$ प्रतिबल-तीव्रता या प्रतिबल, $$\boxed{\sigma \text{ या } p = \frac{\text{बल } (F)}{\text{क्षेत्रफल } (A)}}$$ (सूत्र)

प्रतिबल की इकाई (Unit of Stress)—प्रतिबल की निम्न इकाइयाँ प्रयोग की जाती हैं—

किग्राबल/सेमी^{2} (kg_f/cm^2), न्यूटन/मिमी^{2} (N/mm^2)

कभी-कभी प्रतिबल की निम्न इकाइयाँ भी प्रयोग की जाती हैं—

किलोन्यूटन/मिमी^{2} (kN/mm^2) या मेगा पास्कल (MPa) या गेगा पास्कल (GPa) आदि।

(c) प्रत्यास्थ (Elastic), प्लास्टिक (Plastic) तथा दृढ़ (Rigid) पिण्ड—किसी वस्तु या पिण्ड पर बाह्य बलों के कारण, उत्पन्न होने वाले प्रतिरोधी बलों के आधार पर पिण्डों को निम्न तीन वर्गों में वर्गीकृत किया जा सकता है—

(i) प्रत्यास्थ पिण्ड (Elastic Body),
(ii) प्लास्टिक पिण्ड (Plastic Body),
(iii) दृढ़ पिण्ड (Rigid Body)।

(1) प्रत्यास्थ पिण्ड (Elastic Body)—जब किसी वस्तु पर कोई बाह्य बल लगाया जाता है तो उसके रूप व आकार (Shape and Size) अथवा दोनों में परिवर्तन (विरूपण) हो जाता है। यदि बाह्य बल को हटा लेने पर वस्तु पुन: अपना प्रारम्भिक मूल रूप व आकार धारण कर लेती है तो पदार्थ के इस गुण को **प्रत्यास्थता** (Elasticity) कहते हैं। जिस वस्तु या पिण्ड में यह गुण पाया जाता है उसे प्रत्यास्थ पिण्ड (Elastic Body) कहते हैं।

Scanned with CamScanner

(2) प्लास्टिक पिण्ड (Plastic Body)—जब किसी वस्तु पर बाह्य बल लगाने से उसके आकार में स्थायी परिवर्तन (विरूपण) आ जाता है और यदि बल हटा लेने पर वह वस्तु या पिण्ड अपने प्रारम्भिक रूप व आकार में वापस न आ सके अर्थात् स्थायी रूप से विरूपित (Permanently Deformed) हो जाती है, तो उसे प्लास्टिक पिण्ड या पूर्णत: **सुघट्य पिण्ड** (Perfectly Plastic Body) कहते हैं। पदार्थ के इस गुण को प्लास्टिकता या सुघट्यता का गुण कहते हैं।

(3) दृढ़ पिण्ड (Rigid Body)—जब पिण्ड पर बल लगाने से उसके आकार में नगण्य परिवर्तन होता है और शीघ्र ही प्रतिरोधी बल उपजते हैं तो उसे दृढ़ पिण्ड कहते हैं।

§ 1.4. प्रतिबलों के प्रकार (Types of Stresses)

बाह्य बलों अथवा भारों के कारण उत्पन्न प्रतिबल प्राय: तीन प्रकार के होते हैं—

(1) तनाव तथा सम्पीडन प्रतिबल (Tensile and Compressive Stresses),

(2) कर्तन या अपरूपण प्रतिबल (Shear Stresses),

(3) सीधे तथा नमन प्रतिबल (Direct and Bending Stresses)।

(1) तनाव तथा सम्पीडन प्रतिबल

(अ) तनाव प्रतिबल (Tensile Stress)—जब वस्तु पर भार या बल खिंचाव (या तनाव) में लगाया जाता है तो वस्तु में उत्पन्न हुए प्रतिबल को तनाव प्रतिबल कहते हैं [देखें चित्र 1.1 (अ)]।

(ब) सम्पीडन प्रतिबल (Compressive Stress)—जब वस्तु पर भार या बल सम्पीडन में लगाया जाता है अर्थात् बलों द्वारा वस्तु को दबाया जाता है, तब वस्तु में उत्पन्न प्रतिबल को सम्पीडन प्रतिबल कहते हैं [देखें चित्र 1.1 (ब)]।

(2) कर्तन प्रतिबल या अपरूपण प्रतिबल (Shear Stress)—यदि किसी अवयव पर कर्तन भार या कर्तन बल (Shear Force) कार्य करता है तो उसमें उत्पन्न हुए प्रतिबल को कर्तन प्रतिबल या अपरूपण प्रतिबल (Shear Stress) कहते हैं। इसे स्पर्शीय प्रतिबल के नाम से भी पुकारते हैं तथा इसे τ (टो) या q या f_s या Q से प्रदर्शित करते हैं।

∴ कर्तन प्रतिबल, $$\tau \text{ या } q = \frac{\text{कर्तन बल } (F)}{\text{कर्तन सतह का क्षेत्रफल } (A)}$$

सभी प्रतिबलों की इकाई अधिकतर kg_f/cm^2 तथा N/mm^2 अथवा kN/mm^2 प्रयोग की जाती है।

(3) सीधे तथा नमन प्रतिबल (Direct & Bending Stress)—चूँकि अक्षीय तनाव या अक्षीय सम्पीडन भार, सीधे भार (Direct Load) कहलाते हैं इसलिये इनके कारण उत्पन्न हुए प्रतिबलों को सीधे प्रतिबल (Direct Stress) कहते हैं। ये भार या बल लगने वाले तल (Plane) के लम्बवत् कार्य करते हैं। इन्हें f_d या σ_d से दर्शाते हैं।

जब किसी धरन (Beam) पर बाहर से अनुप्रस्थ भार (Transverse Load) अर्थात् अक्ष के लम्बवत् भार कार्य करता है तो धरन का झुकाव या नमन (Bending) होता है। इस दशा में नमन के रूप में हुए विरूपण के विरोध में पदार्थ के अन्दर उत्पन्न हुये आन्तरिक प्रतिरोधी बल (Resisting Force) को नमन प्रतिबल कहते हैं। इसे f_b से दर्शाते हैं।

जब किसी कॉलम या अवयव पर उत्केन्द्रित भार (Eccentric Load) क्रिया करते हैं तो उसका झुकाव होता है तो उसमें सीधे तथा नमन प्रतिबल दोनों एक साथ उत्पन्न होते हैं। अत: इन दोनों प्रतिबलों से पदार्थ में अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल भी ज्ञात किये जा सकते हैं; जैसे—

$$\begin{bmatrix} f_{max} = f_d + f_b \\ f_{min} = f_d - f_b \end{bmatrix} \text{ अथवा } \begin{bmatrix} \sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b \\ \sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b \end{bmatrix}$$

§ 1.5. विकृति (Strain)

यदि बाह्य बलों के प्रभाव में वस्तु के रूप व आकार (Shape and Size) में परिवर्तन (विरूपण) होता है, तो इस परिवर्तन की माप को ही विकृति कहते हैं। इसे निम्न प्रकार मापा जाता है—

विकृति, $$\boxed{e = \frac{\text{आकार में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक आकार}}} \quad \text{(सूत्र)}$$

क्योंकि विकृति एक ही प्रकार की दो राशियों का अनुपात होता है, अत: इसकी कोई इकाई नहीं होती।

Scanned with CamScanner

1.5-1. विकृति के प्रकार (Types of Strain)

विकृति मुख्य रूप से निम्न चार प्रकार की होती है–

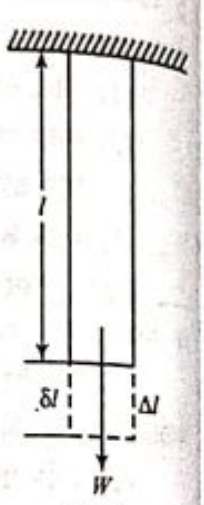
(i) अनुदैर्ध्य विकृति (Longitudinal Strain),

(ii) कर्तन विकृति (Shear Strain),

(iii) पार्श्व विकृति (Lateral Strain),

(iv) आयतन विकृति (Volume Strain)।

(i) **अनुदैर्ध्य विकृति या लम्बाई में विकृति (Longitudinal Strain)**–किसी छड़ या वस्तु पर अक्षीय भार या बल (Axial Load) लगाने से उसकी लम्बाई में हुए परिवर्तन (Δl) तथा प्रारम्भिक लम्बाई (l) के अनुपात को अनुदैर्ध्य विकृति कहते हैं।



चित्र 1.3

$\therefore$ अनुदैर्ध्य विकृति, $\qquad e_x = \dfrac{\Delta l}{l}$

चित्र 1.3 के अनुसार माना छड़ की लम्बाई l है और इस पर तनाव बल या भार W लगाने से लम्बाई बढ़कर $(l+\delta l)$ हो जाती है। इस प्रकार लम्बाई में तनाव विकृति,

$$e_t = \frac{\delta l}{l} \qquad \text{या} \qquad \frac{\Delta l}{l}$$

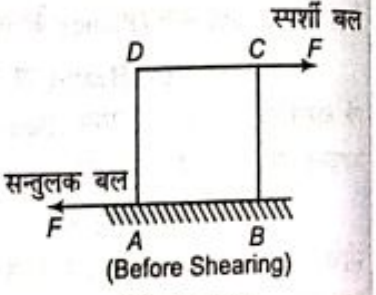
इसके विपरीत, यदि छड़ या वस्तु पर सम्पीडन बल लगाने से लम्बाई घटकर $(l-\delta l)$ हो जाती है।

तब लम्बाई में परिवर्तन, $\qquad \Delta l = l-(l-\delta l) = \delta l$

$\therefore$ लम्बाई में संपीडन विकृति, $\qquad e_c = \dfrac{\Delta l}{l} \qquad$ या $\qquad \dfrac{\delta l}{l}$

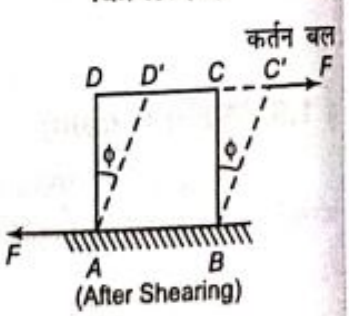
हम पढ़ चुके हैं कि तनाव या सम्पीडन के बलों को सीधे बल कहते हैं। इसीलिये इनके कारण हुई विकृति को **सीधी विकृति** (Direct Strain) कहते हैं।

(ii) **कर्तन विकृति (Shear Strain)**–किसी वस्तु पर लगे हुये कर्तन बलों (Shear Forces) के कारण उत्पन्न हुई विकृति को कर्तन विकृति कहते हैं तथा इसे ϕ या e_s से प्रदर्शित करते हैं।



चित्र 1.4 (अ)

चित्र 1.4 (अ) में एक घन के फलक का सम्मुख दृश्य (Front View) $ABCD$ दिखाया गया है जिसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई l है। इसके नीचे का तल AB बद्ध (Fixed) है और ऊपरी तल CD में एक स्पर्शी बल F कार्य करता है। हम जानते हैं कि सन्तुलन के लिये बद्ध तल AB पर भी एक स्पर्शी बल F, ऊपरी तल CD में लगे हुए बल के समान्तर व विपरीत कार्य करेगा। अब चित्र 1.4 (ब) के अनुसार, निचला तल AB, बद्ध होने के कारण स्थिर रहेगा परन्तु ऊपरी तल कोण ϕ से हटकर $C'D'$ स्थिति में आ जाता है अर्थात् घन का फलक (Face) $ABC'D'$ आकार में हो जायेगा। घन पर लगा यह कर्तन बल F, घन में कर्तन प्रतिबल q तथा कर्तन विकृति ϕ उत्पन्न करता है।



चित्र 1.4 (ब)

$\therefore$ कर्तन विकृति $\qquad e_s = \dfrac{CC'}{BC} = \dfrac{DD'}{AD}$

और $\qquad \tan\phi = \dfrac{CC'}{BC} = \dfrac{DD'}{AD}$

$\therefore$ कर्तन विकृति, $\qquad e_s = \tan\phi$

Scanned with CamScanner

प्राय: कोण ϕ का मान बहुत छोटा होता है, अत: $\tan \phi = \phi$ रेडियन

$\therefore$ कर्तन विकृति $e_s = \phi$

कर्तन विकृति को निम्न प्रकार भी परिभाषित किया जा सकता है :

यदि किसी वस्तु पर कर्तन बल (Shear Force) कार्य करता है तो इससे उत्पन्न कर्तन प्रतिबल q, तथा वस्तु के पदार्थ के कर्तन मापांक (Modulus of Rigidity) G, के अनुपात को कर्तन विकृति (Shear Strain) कहते हैं, इसे ϕ से प्रदर्शित करते हैं। अत:

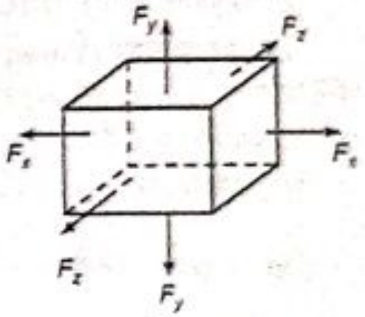
कर्तन विकृति, $$\boxed{\phi = \frac{q}{G}}$$ (सूत्र)

(iii) पार्श्व विकृति (Lateral Strain)—किसी वस्तु पर लगे बल की दिशा के लम्ब-रूप माप में उत्पन्न हुयी विकृति को पार्श्व विकृति कहते हैं। यदि d व्यास की छड़ (Rod) में बल लगाने से व्यास में परिवर्तन (Δd) होता है तब पार्श्व विकृति,

$$\boxed{e_d = \frac{\Delta d}{d}}$$ (सूत्र)

(iv) आयतन विकृति (Volume Strain)—किसी वस्तु पर लगे बलों के कारण उसके आयतन में हुये परिवर्तन (ΔV) तथा प्रारम्भिक आयतन (V) के अनुपात को आयतन विकृति कहते हैं।

आयतन में विकृति, $e_v = \frac{\Delta V}{V}$



चित्र 1.5

चित्र 1.5 के अनुसार, यदि किसी आयताकार ठोस वस्तु के सभी फलकों (Faces) पर बल लगाये जायें तो उसके आयतन में परिवर्तन होगा। यदि यह परिवर्तन δV या ΔV है तथा प्रारम्भिक आयतन V है, तब

आयतन विकृति,

$$e_v = \frac{\text{आयतन में परिवर्तन}}{\text{प्रारम्भिक आयतन}} = \frac{\delta V}{V} \text{ या } \frac{\Delta V}{V}$$ (सूत्र)

§ 1.6. प्रत्यास्थता की सीमा (Elastic Limit)

हम जानते हैं कि प्रत्यास्थता, पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण, वस्तु को विकृत (Deform) करने वाले बाह्य बलों को हटा लेने पर वस्तु अपने पहले रूप व आकार (Shape and Size) को पुन: धारण कर लेती है। परन्तु वस्तु पर बल या प्रतिबल धीरे-धीरे बढ़ाते जाने पर एक अवस्था ऐसी भी आती है जबकि वस्तु प्रत्यास्थ नहीं रहती, अर्थात् विरूपक बल को हटा लेने पर भी वस्तु अपने पूर्व आकार व अवस्था को पुन: धारण नहीं कर पाती। अत: हम कह सकते हैं—

वह अधिकतम बल या प्रतिबल तीव्रता, जिस पर कोई वस्तु पूर्ण प्रत्यास्थ रहती है अर्थात् बल को हटा लेने पर पुन: अपने वास्तविक रूप व आकार में वापस आ जाती है, पदार्थ की प्रत्यास्थता की सीमा (Elastic Limit) कहते हैं।

प्रत्येक पदार्थ के लिये प्रत्यास्थता-सीमा (Elastic Limit) का मान भिन्न होता है। सामान्यतया प्रत्यास्थता सीमा को, **समानुपाती सीमा** (Limit of Proportionality) कहते हैं और समानुपाती सीमा से अर्थ प्रतिबल तथा विकृति में समानुपाती की सीमा से है। अत: इस सीमा के पश्चात् प्रतिबल एवं विकृति का आपस में समानुपाती सम्बन्ध भी समाप्त हो जाता है।

§ 1.7. हुक का नियम (Hooke's Law)

इस नियम के अनुसार, प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर उत्पन्न हुए प्रतिबल (Stress), उससे सम्बन्धित विकृति (Strain) के सीधे समानुपाती (Directly Proportional) होते हैं।

Scanned with CamScanner

अर्थात् $\quad$ प्रतिबल $(p) \propto$ विकृति (e)

या $\quad$ प्रतिबल (p) = स्थिरांक × विकृति (e)

या $\quad \dfrac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}} = \text{स्थिरांक (Constant)} \Rightarrow E$

या $\quad \boxed{E = \dfrac{p}{e}}$ (सूत्र)

इस स्थिरांक को हुक स्थिरांक (Hooke's Constant) या प्रत्यास्थता गुणांक (Modulus of Elasticity) कहते हैं तथा इसे E या Y से प्रदर्शित करते हैं।

किसी पदार्थ के लिये प्रत्यास्थता गुणांक का मान प्रतिबल और उससे सम्बन्धित विकृति के प्रकार पर निर्भर करता है। अत: इस आधार पर विभिन्न मापांक या हुक स्थिरांक निम्न प्रकार के होते हैं–

(1) प्रत्यास्थता गुणांक या यंग मापांक (Modulus of Elasticity or Young's Modulus),

(2) दृढ़ता मापांक या कर्तन मापांक या अपरूपण मापांक (Modulus of Rigidity or Shear Modulus),

(3) आयतन मापांक (Bulk Modulus)।

(1) यंग मापांक (Young's Modulus)–प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर किसी वस्तु पर अक्षीय बल लगाने से उत्पन्न सीधे प्रतिबल (Direct Stress) तथा लम्बाई में विकृति के अनुपात को प्रत्यास्थता गुणांक या यंग मापांक कहते हैं तथा इसे 'E' से प्रदर्शित करते हैं।

∴ यंग मापांक, $\quad \boxed{E = \dfrac{\text{सीधा प्रतिबल या प्रतिबल तीव्रता } (p)}{\text{लम्बाई में विकृति } (e)}}$

या $\quad E = \dfrac{p}{e}$

विकृति (e) की कोई इकाई न होने के कारण, यंग मापांक E की इकाई वही होती है जो प्रतिबल p की होती है, अर्थात् किग्रा बल/(सेमी)^2, टन/(सेमी)^2, न्यूटन/(मिमी)^2, गेगा पास्कल (GPa), मेगा पास्कल (MPa), किलोन्यूटन/(मीटर)^2 आदि।

(2) कर्तन मापांक (Modulus of Rigidity or Shear Modulus)–प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर कर्तन प्रतिबल (Shear Stress) q और इसके द्वारा उत्पन्न कर्तन विकृति (Shear Strain) ϕ के अनुपात को कर्तन मापांक कहते हैं तथा इसे 'G' या 'C' से प्रदर्शित करते हैं।

अत: कर्तन मापांक $\quad \boxed{G = \dfrac{\text{कर्तन प्रतिबल } (q)}{\text{कर्तन विकृति } (\phi)}}$

(3) आयतन मापांक (Bulk Modulus)–यदि प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर किसी अवयव पर परस्पर लम्ब दिशाओं में समान मान तथा प्रकृति के तीन बल लगे हुए हों तो इनसे उत्पन्न सीधे प्रतिबल तथा उत्पन्न आयतन विकृति (Volume Strain) के अनुपात को आयतन मापांक कहते हैं। इसे K से प्रदर्शित करते हैं।

∴ आयतन मापांक, $\quad \boxed{K = \dfrac{\text{सीधा प्रतिबल (Direct Stress)}}{\text{आयतन विकृति (Volume Strain)}}}$

नोट–प्रतिबल की ऐसी स्थिति, पिण्ड को किसी द्रव के अन्दर डुबोकर प्राप्त की जा सकती है ताकि तीनों लम्ब दिशाओं से पिण्ड पर दाब बल समान रहे।

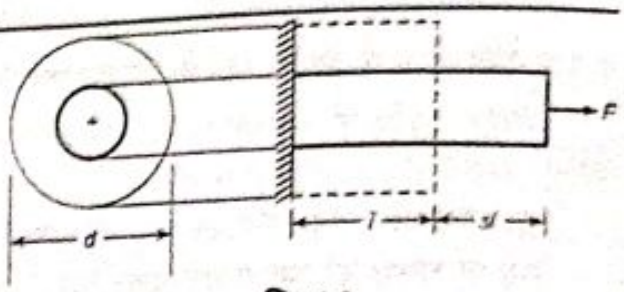
§ 1.8. पॉयजन अनुपात (Poisson's Ratio)

यदि किसी छड़ पर तनाव में, अक्षीय बल (Axial Force) लगाया जाये तो छड़ की लम्बाई में वृद्धि हो जाती है परन्तु साथ-ही-साथ इसके व्यास म कमी आ जाती है। यदि बल सम्पीडन में लगाया जाये तो लम्बाई में कमी तथा व्यास में वृद्धि हो जाती है। अत: बल की दिशा मे लम्ब दिशा में जो विकृति होती है, उसे **पार्श्व विकृति** (Lateral Strain) कहते हैं।

हालाँकि बल की लम्बवत् दिशा में कोई अन्य बल नहीं लगता, फिर भी माप में परिवर्तन हो जाता है।

Scanned with CamScanner

प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर पार्श्व विकृति (Lateral Strain) तथा अनुदैर्ध्य विकृति (Longitudinal Strain) का अनुपात सदैव स्थिर रहता है। इन अनुपात को पॉयजन अनुपात (Poisson's Ratio) कहते हैं तथा इसे $\frac{1}{m}$ या μ से प्रदर्शित करते हैं। इसका मान $\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{3}$ के बीच होता है। चित्र 1.6 में यदि किसी छड़ की लम्बाई l तथा व्यास d है और इस पर अक्षीय तनाव बल (F) लगाने से लम्बाई में वृद्धि Δl तथा व्यास में कमी Δd हो जाती है, तब

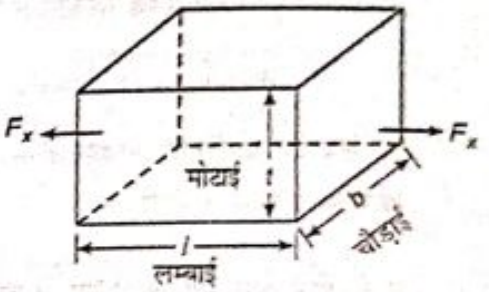


चित्र 1.6

$$\text{लम्बाई में विकृति (Longitudinal Strain)} = \frac{\Delta l}{l}$$

तथा
$$\text{पार्श्व विकृति (Lateral Strain)} = \frac{\Delta d}{d}$$

चित्र 1.7 (अ) में आयताकार ठोस (Cuboid) दिखाया गया है जिसकी लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई क्रमशः l, b तथा t हैं। इसकी x–अक्ष की दिशा में बल लगाने से लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई की मापों में परिवर्तन क्रमशः Δl, Δb तथा Δt होते हैं।

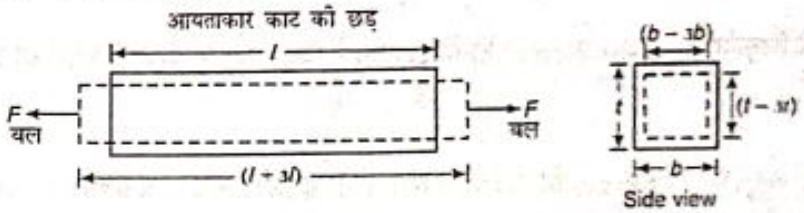


चित्र 1.7 (अ)

जहाँ Δl = (लम्बाई में वृद्धि), क्योंकि बल लम्बाई की दिशा में तनाव का है।

Δb = चौड़ाई में कमी। (मापों में परिवर्तन Δb तथा Δt बल की दिशा के लम्ब दिशा में हैं।)।

Δt = ऊँचाई या मोटाई में कमी होगी।



चित्र 1.7 (ब)

$\therefore$ लम्बाई में विकृति $= \frac{\Delta l}{l}$

पार्श्व विकृति $= \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta t}{t}$

चूँकि चौड़ाई तथा मोटाई की मापें, लम्बाई की माप के लम्ब दिशा में हैं इसीलिये इन मापों में विकृति, पार्श्व विकृति कहलायेगी।

पार्श्व विकृति तथा अनुदैर्ध्य विकृति में सम्बन्ध (Relation between Lateral Strain & Longitudinal Strain)

पार्श्व विकृति सदैव अनुदैर्ध्य विकृति के समानुपाती होती है।

अर्थात् $\quad$ पार्श्व विकृति $\propto$ अनुदैर्ध्य विकृति

या $\quad$ पार्श्व आकृति $= \frac{1}{m} \times$ अनुदैर्ध्य विकृति

या
$$\boxed{\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{m} \times e} \qquad \text{(सूत्र)}$$

यहाँ $\frac{1}{m}$ को पॉइजन अनुपात कहते हैं तथा m को **पॉइजन स्थिरांक** कहते हैं।

प्रत्येक पदार्थ के लिये इसका मान भिन्न होता है। अधिकतर धातुओं के लिये $\frac{1}{m}$ का मान $\frac{1}{4}$ तथा $\frac{1}{3}$ के बीच होता है।

Scanned with CamScanner

§ 1.9. एक दिशा में अक्षीय बल के कारण छड़ के आयतन में परिवर्तन तथा आयतन विकृति ज्ञात करना

पॉयजन अनुपात की सहायता से यहाँ हम किसी छड़ की मापों में परिवर्तन के साथ-साथ आयतन में परिवर्तन तथा आयतन-विकृति (Volume Strain) ज्ञात करेंगे–

(1) आयताकार छड़–यदि एक छड़ की लम्बाई, चौड़ाई तथा मोटाई क्रमशः l, b तथा t है। (देखिये चित्र 1.7) छड़ पर लम्बाई की अक्ष में एक तनाव बल F लगा है।

छड़ के पदार्थ में पॉइजन अनुपात $\frac{1}{m}$ है।

∵ छड़ की लम्बाई में विकृति $e = \frac{\Delta l}{l}$

तथा छड़ में पार्श्व विकृति $= \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta t}{t}$

∴ पार्श्व विकृति $= \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{m} \times$ अनुदैर्ध्य विकृति

$$= \frac{1}{m} \times e$$

∵ छड़ का प्रारम्भिक आयतन $V = l \times b \times t$ है।

आंशिक अवकलन करने पर,

$$\delta V = \delta l \times b \times t + \delta b \times l \times t + \delta t \times l \times b$$

V से दोनों ओर भाग करने पर, (जबकि $V = l \times b \times t$ है)

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta l}{l} + \frac{\delta b}{b} + \frac{\delta t}{t} = e_x + e_z + e_y \qquad \text{...(i)}$$

अर्थात् **"आयतन में विकृति (Volume Strain) तीनों दिशाओं में विकृतियों के बीजगणितीय योग के बराबर होती है।"**

परन्तु वास्तव में, $\frac{\delta b}{b} = \frac{\delta t}{t} = -\frac{e}{m}$

∵ पार्श्व विकृति, अनुदैर्ध्य विकृति (e) के सदैव विपरीत होती है अतः यदि e धनात्मक (+ve) है तो पार्श्व विकृति $\frac{e}{m}$ ऋणात्मक (–ve) होगी।

समीकरण (i) में $\frac{\delta b}{b}$ तथा $\frac{\delta t}{t}$ का मान रखने पर,

$$\frac{\delta V}{V} = e - \frac{e}{m} - \frac{e}{m} = e\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

∴ आयतन विकृति $\boxed{\frac{\delta V}{V} = e\left(1 - \frac{2}{m}\right)}$ (सूत्र) ...(ii)

(2) वृत्ताकार काट वाली छड़–माना वृत्ताकार छड़ की लम्बाई l तथा व्यास d है, तो छड़ का प्रारम्भिक आयतन,

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \times 1$$

आंशिक अवकलन करने पर,

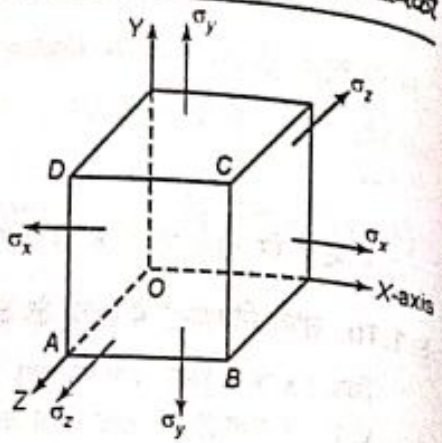
$$\delta V = \frac{\pi}{4}\left[\delta l \cdot d^2 + 2d \cdot \delta d \cdot l\right]$$

अब V से दोनों ओर भाग करने पर,

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta l}{l} + 2\frac{\delta d}{d} \qquad \left(\text{जबकि } V = \frac{\pi d^2}{4} \times l \text{ है}\right)$$

Scanned with CamScanner

ठोस के पदार्थ का यंग मापांक E, आयतन मापांक (K) तथा पॉइजन अनुपात (Poisson's Ratio) $= \frac{1}{m}$ या μ है। घन की प्रत्येक भुजा की लम्बाई (l) है और सभी फलक (faces) भी समान हैं।



चित्र 1.9

अतः $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$ (माना)

$\because$ $X-X$ अक्ष की दिशा में सीधा प्रतिबल (तनाव में) σ है

$\therefore$ इस दिशा (X–axis) में तनाव विकृति, $e_x = \frac{\sigma}{E}$

तथा शेष दो दिशाओं में सीधे प्रतिबलों के कारण ($X-X$) axis की दिशा में परिणामी विकृति (Total strain)

e_x = Strain in x-direction due to σ_x–Strain in x-direction due to σ_y – Strain in x-direction due to σ_z

$$= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{1}{m} \times \frac{\sigma_y}{E} - \frac{1}{m} \times \frac{\sigma_z}{E}$$

परन्तु $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$ है।

$$= \frac{\sigma}{E} - \frac{\sigma}{mE} - \frac{\sigma}{mE} = \left(\frac{\sigma}{E} - 2 \times \frac{\sigma}{mE}\right)$$

$$= \frac{\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right) \Rightarrow e\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

इसी प्रकार ($Y-Y$) axis की दिशा में परिणामी विकृति (Total Strain)

$$e_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{1}{m} \times \frac{\sigma_x}{E} - \frac{1}{m} \times \frac{\sigma_z}{E} = \frac{\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

तथा ($Z-Z$) axis की दिशा में परिणामी विकृति

$$e_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{1}{m} \times \frac{\sigma_x}{E} - \frac{1}{m} \times \frac{\sigma_y}{E} = \frac{\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

अब आयतन विकृति (Volumetric Strain)

$$e_v = (e_x + e_y + e_z) = \frac{3\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

$\therefore$ आयतन मापांक (Bulk Modulus) $K = \dfrac{\text{आयतन प्रतिबल अथवा (सीधा प्रतिबल)}}{\text{आयतन विकृति}}$

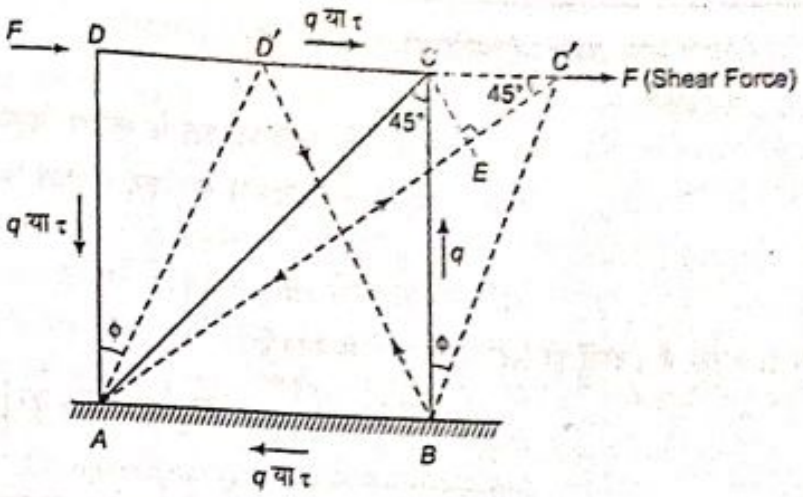
$$K = \frac{\sigma}{\frac{3\sigma}{E}\left(1 - \frac{2}{m}\right)} = \frac{E}{3 \times \left(1 - \frac{2}{m}\right)}$$

$$\boxed{E = 3K\left(1 - \frac{2}{m}\right)}$$

Proved.

2. यंग मापांक (E) तथा दृढ़ता मापांक (G) में सम्बन्ध—(E तथा K) में सम्बन्ध के घन (cube) के चित्र 1.10 में यहाँ सुविधा के लिये केवल घन के सामने वाले फलक (Front face) $ABCD$ को दर्शाया गया है। यह तली (Bottom) पर बद्ध (Fixed) है और ऊपरी सतह (Face) पर एक कर्तन बल (Shearing Force) F लगा है।

Scanned with CamScanner



चित्र 1.10

इस बल के कारण कर्तन प्रतिबल (Shear Force) q या τ पैदा होता है। कर्तन बल (F) के कारण $ABCD$ का नया आकार $ABC'D'$ हो जाता है। अर्थात् $ABCD$ में कर्तन विकृति (Shear Strain) ϕ उत्पन्न होती है जिससे विकर्ण (Diagonal) BD छोटा तथा विकर्ण AC बड़ा हो जाता है। अब C से AC' पर लम्ब CE डाला जिससे $AC = AE$ होगा।

∴ विकर्ण AC में अनुदैर्ध्य विकृति (Longitudinal Strain in AC)

$$= \frac{AC' - AC}{AC} = \frac{AC' - AE}{AC} = \frac{EC'}{AC} \quad \text{... (I)}$$

∵ CC' लम्बाई-वृद्धि (extension) बहुत कम हैं (CC' is very small)

∴ $\angle AC'B = \angle ACB \Rightarrow 45°$

$\Delta CC'E$ में,

$$EC' = CC' \cos 45° = \frac{CC'}{\sqrt{2}}$$

ΔACB में,

$$\cos 45° = \frac{BC}{AC} \quad \text{या} \quad AC = \frac{BC}{\cos 45°} = BC\sqrt{2}$$

∴ विकर्ण (Diagonal) AC में अनुदैर्ध्य विकृति (Longitudinal strain)

$$= \frac{EC'}{AC} = \frac{CC'}{\sqrt{2}.AC} = \frac{CC'}{\sqrt{2} \times BC\sqrt{2}} = \frac{CC'}{2BC}$$

परन्तु $\Delta BCC'$ में, $\tan\phi = \frac{CC'}{BC}$

कोण (ϕ) बहुत छोटा होने पर, $\tan\phi = \phi = \frac{CC'}{BC}$

∴ अब AC में अनुदैर्ध्य विकृति (Longitudinal strain)

$$= \frac{CC'}{2BC} = \frac{\phi}{2} = \frac{\text{कर्तन विकृति (Shear strain)}}{2}$$

या $e_{AC} = \frac{q}{2G}$ ... (II)

∵ दृढ़ता मापांक $G = \frac{\text{कर्तन प्रतिबल } (q)}{\text{कर्तन विकृति } (\phi)}$

∴ $\phi = \frac{q}{G}$ होगा।

Scanned with CamScanner

परन्तु AC मे विकृति निम्न प्रकार भी प्राप्त की जा सकती है,

अब पुनः AC मे विकृति

$= AC$ में तनाव प्रतिबल के कारण विकृति

$-BD$ मे सम्पीडन प्रतिबल के कारण विकृति

$$e_{AC} = \frac{q}{E} - \left(-\frac{q}{mE}\right) = \frac{q}{E}\left[1+\frac{1}{m}\right] \quad \text{... (III)}$$

∵ सम्बन्ध II = III है (दोनो ही AC मे विकृति के मान है)

$$\therefore \quad \frac{q}{2G} = \frac{q}{E}\left[1+\frac{1}{m}\right] \quad \text{या} \quad E = 2G\left[1+\frac{1}{m}\right]$$

अथवा $\boxed{E = 2C[1+\mu]}$ यहाँ $\frac{1}{m}$ को μ से तथा G को C से दर्शाया गया है।

Proved

3. E, G तथा K में सम्बन्ध (Relation between E, G and K)—

∵ हमने सिद्ध किया है कि

$$E = 2G\left[1+\frac{1}{m}\right] = 3K\left[1-\frac{2}{m}\right]$$

अब E तथा G के सम्बन्ध से,

∵ पॉइजन अनुपात (Poisson's Ratio) $\Rightarrow \frac{1}{m}$ or μ होता है

$\therefore \quad \frac{1}{m} = \left(\frac{E}{2G} - 1\right)$, यह मान E तथा K में सम्बन्ध में रखा

$$\therefore \quad E = 3K\left[1-2\left(\frac{E}{2G}-1\right)\right] = 3K\left[1-\left(\frac{E}{G}-2\right)\right]$$

$$= 3K\left[3-\frac{E}{G}\right] = 9K - \frac{3KE}{G}$$

या $$E + \frac{3KE}{G} = 9K \quad \text{या} \quad E\left[1+\frac{3K}{G}\right] = 9K$$

या $$E = \frac{9KG}{G+3K} \quad \text{(सूत्र)}$$

$\therefore$ $$\boxed{E = 2G\left(1+\frac{1}{m}\right) = 3K\left[1-\frac{2}{m}\right] = \frac{9KG}{G+3K}} \quad \text{(सूत्र)}$$

यही अभीष्ट सम्बन्ध है।

यदि G के स्थान पर C तथा $\frac{1}{m}$ के स्थान पर μ लिखा जाये तो

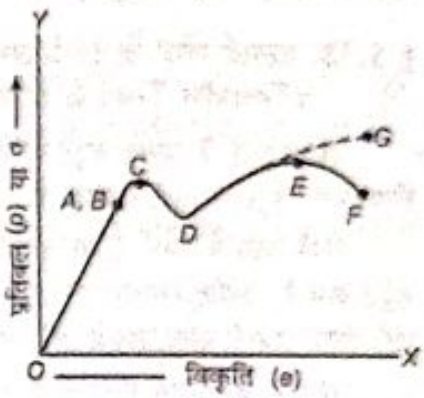
$$\boxed{E = 2C(1+\mu) = 3K[1-2\mu] = \frac{9KC}{C+3K}} \quad \text{(सूत्र)}$$

Scanned with CamScanner

§ 1.12. धातुओं का खिंचाव में व्यवहार (Behaviour of Metals in Tension)

इस अनुच्छेद में हम मृदु इस्पात (Mild Steel) तथा ढलवाँ लोहे (Cast Iron) पर तनाव बल लगाकर उसके व्यवहार का अध्ययन करेंगे।

मृदु इस्पात (Mild Steel) के लिये तनाव परीक्षण में प्राप्त प्रतिबल-विकृति वक्र (Stress-Strain Curve) को चित्र 1.11 में दर्शाया गया है।



मृदु इस्पात (M.S.) का प्रतिबल-विकृति वक्र

चित्र 1.11

इस वक्र में बिन्दु O पर छड़ में कोई प्रतिबल तथा विकृति नहीं है। जब छड़ पर धीरे-धीरे खिंचाव बल बढ़ाया जाता है तो पदार्थ के प्रतिबल p तथा विकृति e में वृद्धि होती है। बिन्दु O से A तक प्रतिबल p तथा विकृति e में समानुपात का सम्बन्ध रहता है और पदार्थ हुक के नियम का पालन करता है। **इसीलिये बिन्दु A को समानुपाती सीमा (Limit of Proportionality) कहते हैं।** प्रतिबल (p) तथा विकृति (e) में समानुपात के सम्बन्ध के कारण ही O से A तक आरेख में सरल रेखा प्राप्त होती है। बिन्दु A के पश्चात् p तथा e में समानुपाती का सम्बन्ध समाप्त हो जाता है।

A → समानुपाती सीमा (Proportional limit)

B → प्रत्यास्थता सीमा (Elastic limit)

C → उच्च पराभव बिन्दु (Higher Yield Point)

D → निम्न पराभव बिन्दु (Lower Yield Point)

$(C-D)$ → पराभव परास (Yield Range)

E → अधिकतम प्रतिबल बिन्दु (Max. Stress Point)

F → भंजक या अन्तिम प्रतिबल बिन्दु (Breaking or ultimate Stress Point)

लगभग A पर ही बिन्दु B प्राप्त होता है। A तथा B को अत्यन्त सावधानी एवं सूक्ष्ममापी यन्त्रों द्वारा ही अलग-अलग स्थानों पर प्राप्त किया जा सकता है। O से B तक पदार्थ में प्रत्यास्थता का गुण पूर्ण रूप से पाया जाता है। इस बीच किसी भी समय बल को हटा लेने पर छड़ पुन: अपने प्रारम्भिक आकार को धारण कर लेती है। **इसीलिए बिन्दु B को प्रत्यास्थता की सीमा कहते हैं।**

इसके पश्चात् छड़ पर बल और अधिक बढ़ाने से विकृति e भी बढ़ती है परन्तु अब प्रतिबल तथा विकृति में सरल रेखीय सम्बन्ध नहीं रहता, बल्कि एक वक्र प्राप्त होता है। यह वक्र B से C तक दर्शाया गया है। B तथा C के बीच में यदि छड़ पर से बल हटा लिया जाये तो छड़ में कुछ विकृति शेष रह जाती है, क्योंकि प्रत्यास्थता के गुण में कमी आ जाती है। **बिन्दु C को पराभव बिन्दु (Yield Point) कहते हैं।**

बिन्दु C पर पहुँचने पर पदार्थ बिना बल बढ़ाये ही बढ़ने लगता है जिसे **पराभव** (Yielding) कहते हैं। बिन्दु C से D तक पदार्थ की आन्तरिक रचना (Internal Structure) में परिवर्तन होता है और प्रतिरोधी शक्ति बदलती है। इस समय के प्रतिबल को **पराभव प्रतिबल** (Yield Stress) कहते हैं। पराभव क्रिया-बिन्दु C से D तक चलती है। C पर प्रतिबल को **उच्च पराभव** बिन्दु (Higher Yield Point) तथा D पर प्रतिबल को निम्न **पराभव बिन्दु** (Lower Yield Point) कहते हैं। प्रायोगिक दृष्टि से निम्न पराभव बिन्दु अधिक महत्त्वपूर्ण होता है।

पराभव के पश्चात् पदार्थ प्लास्टिक अवस्था (Plastic Stage) में आ जाता है। अब पुन: बल को बढ़ाने पर पदार्थ अधिक तेजी से विकृत होता है और पदार्थ में यह परिवर्तन स्थायी होता है। बिन्दु D से E तक पदार्थ में परिवर्तन स्थायी होता है। **बिन्दु E पर छड़ की काट किसी एक स्थान पर बहुत कम हो जाती है जिसे कटि (Waist) या गर्दन बनना (Neck Formation) कहते हैं।** इस कटि के बनने के कारण, थोड़े बल से ही छड़ की लम्बाई में वृद्धि होती रहती है। लम्बाई बढ़ते जाने से (कटि

Scanned with CamScanner

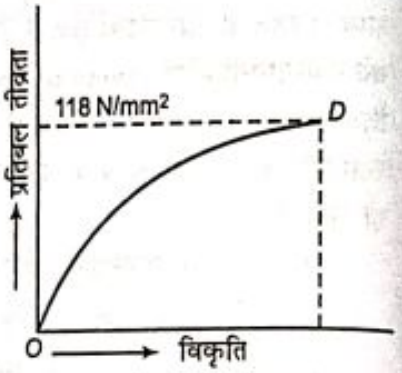
बनने के स्थान पर) छड़ की काट और भी कम होती जाती है और अन्त में छड़ इसी बिन्दु F पर टूट जाती है। कटि पर छड़ की काट कम होते जाने से लगाये गये आवश्यक बल को भी धीरे-धीरे कम करना पड़ता है। **बिन्दु F को भंजन बिन्दु (Breaking Point) कहते हैं। छड़ पर अधिकतम या चरम प्रतिबल बिन्दु E पर प्राप्त होता है।** F पर छड़ टूटने के कारण वहाँ पर प्रतिबल को **भंजक प्रतिबल** (Breaking Stress) या **अन्तिम प्रतिबल** कहते हैं।

§ 1.13. ढलवाँ लोहे के लिये तनाव परीक्षण तथा प्रतिबल-विकृति वक्र (Tensile Test & Stress-Strain Curve for Cast Iron)

ढलवाँ लोहे के मानक नमूने पर तनाव परीक्षण के लिये प्रतिबल-विकृति वक्र चित्र 1.12 की भाँति प्राप्त होता है। ढलवाँ लोहा एक भंगुर (Brittle) पदार्थ है, अत: कम तनाव प्रतिबल पर ही टूट जाता है।

इसके वक्र से स्पष्ट है कि इसकी समानुपाती सीमा तथा प्रत्यास्थता की सीमा बहुत कम है, अर्थात् लगभग शून्य (Zero) होती है। इसमें पराभव (Yielding) भी नहीं होता। इसकी कुल विकृति भी मृदु इस्पात की तुलना में बहुत कम होती है।

परीक्षण के दौरान पाया जाता है कि ढलवाँ लोहे का नमूना चरम प्रतिबल पहुँचने पर अचानक ही टूट जाता है और किसी प्रकार की कटि बनने की क्रिया इस पदार्थ में नहीं पायी जाती है। यह आरेख से भी स्पष्ट है, क्योंकि अन्तिम प्रतिबल D के पश्चात् आरेख नीचे नहीं आता बल्कि लगभग वहीं पर भंजन प्रतिबल भी प्राप्त होता है। ढलवाँ लोहे (C. I.) में अधिक प्रतिबल पर खिंचाव की दर भी अधिक होती है। खिंचाव में E का मान भी प्रतिबल तीव्रता के साथ बदलता है।



प्रतिबल-विकृति वक्र
(ढलवाँ लोहे के लिए)
चित्र 1.12

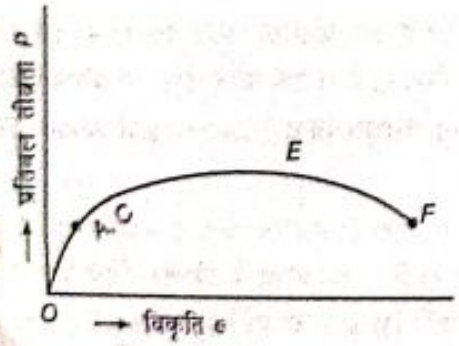
ढलवाँ लोहे का अन्तिम प्रतिबल (ultimate stress) तनाव में 70·2 से 210 N/mm^2 तक होता है इस समय विकृति लगभग $\frac{1}{400}$ होती है। अधिक प्रतिबल पर खिंचाव की दर भी अधिक होती है। खिंचाव में इसका प्रत्यास्थता गुणांक भी प्रतिबल तीव्रता के साथ बदलता है। इसका यंग मापांक 162 kN/mm^2 तक होता है।

§ 1.14. एल्युमीनियम के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र (Stress-Strain curve for Al)

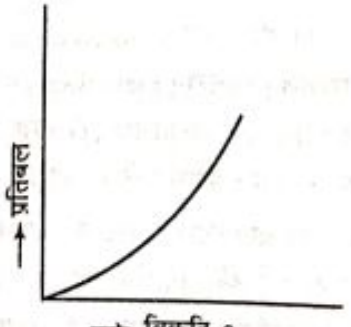
इसके लिये तनाव में प्रतिबल-विकृति वक्र चित्र 1.13 के अनुसार प्राप्त होता है। इसमें समानुपाती सीमा A तथा पराभव बिन्दु (yield point) C एक ही स्थान पर होते हैं। वक्र में F भंजन बिन्दु है।

इसका तनाव में अन्तिम प्रतिबल लगभग 127 N/mm^2 होता है।

ढले रूप में एल्युमीनियम की तनाव शक्ति 78·6 से 94 N/mm^2 तक होती है। परन्तु एल्युमीनियम के रोलिंग और खींचने से इसका मान बढ़ाया जा सकता है। एल्युमीनियम की प्रत्यास्थता सीमा कम होती है। इसका यंग मापांक लगभग 80 kN/mm^2 तक होता है।



एल्युमीनियम के लिये p-e वक्र
चित्र 1.13



चमड़ा तथा रबड़ के लिए p-e वक्र
चित्र 1.14

Scanned with CamScanner

§ 1.15. चमड़ा तथा रबड़ के लिए प्रतिबल-विकृति वक्र

● दोनों पदार्थों के लिए $p-e$ वक्र चित्र 1.14 के अनुसार प्राप्त होते हैं।

§ 1.16. अन्तिम प्रतिबल, कार्यकारी प्रतिबल तथा सुरक्षा गुणांक (Ultimate Stress, Working Stress & Factor of Safety)

(1) चरम प्रतिबल या अन्तिम प्रतिबल (Ultimate Stress)—जिस भार पर पदार्थ ठीक टूटने (Just Failure) की स्थिति में होता है, उसे अन्तिम भार कहते हैं तथा इस समय अवयव में उत्पन्न होने वाले प्रतिबल को अन्तिम प्रतिबल कहते हैं।

इसे निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है—

अन्तिम भार (Ultimate Load) (W_2) को नमूने (Specimen) के प्रारम्भिक अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल (A_1) से भाग देने पर चरम प्रतिबल या अन्तिम प्रतिबल प्राप्त होता है।

अत: $$\text{अन्तिम तनाव प्रतिबल} = \frac{\text{अन्तिम तनाव भार } (W_1)}{\text{काट का क्षेत्रफल } (A_1)} = \ldots MPa$$

(2) कार्यकारी प्रतिबल (Working Stress)—कार्य करते समय किसी पदार्थ या अवयव पर सुरक्षा की दृष्टि से जितना अधिकतम प्रतिबल मान्य होता है, उसे कार्यकारी प्रतिबल कहते हैं और इस समय पदार्थ या अवयव पर लगे भार को **सुरक्षात्मक भार** (Safe load) कहते हैं।

(3) सुरक्षा गुणांक (Factor of Safety)—अन्तिम प्रतिबल (Ultimate Stress) तथा कार्यकारी प्रतिबल (Working Stress) के अनुपात को सुरक्षा गुणांक कहते हैं। इसे प्राय: 'S' द्वारा प्रदर्शित करते हैं। इसकी कोई इकाई (Unit) नहीं होती।

सुरक्षा गुणांक, $$S = \frac{\text{अन्तिम प्रतिबल (Ultimate Stress)}}{\text{कार्यकारी प्रतिबल (Working Stress)}} = \frac{\text{अधिकतम बल (Maximum Load)}}{\text{सुरक्षात्मक बल (Safe Load)}}$$

§ 1.17. कुछ मुख्य परिभाषायें एवं विवरण

(1) पराभव बिन्दु (Yield Point) एवं पराभव बिन्दु पर प्रतिबल—जिस बिन्दु पर पदार्थ की प्रत्यास्थता (Elasticity) समाप्त हो जाती है, उसे पराभव बिन्दु (Yield Point) कहते हैं। इस बिन्दु पर लगे भार को पराभव भार (Yield Load) कहते हैं। पराभव बिन्दु पर पदार्थ प्रत्यास्थता से अर्द्ध-सुघट्यता (Semi-plastic) अवस्था में परिवर्तित हो जाता है।

पराभव बिन्दु पर प्रतिबल निम्न सूत्र से ज्ञात किया जाता है—

$$\text{पराभव बिन्दु पर प्रतिबल} = \frac{\text{पराभव बिन्दु पर भार (Load at Yield Point)}}{\text{काट का क्षेत्रफल (Area of Section)}}$$

(2) पराभव प्रतिबल (Yield Stress)—तनाव परीक्षण के समय प्रतिबल-विकृति वक्र में एक पराभव बिन्दु 'C' पर ऐसी स्थिति आती है कि पदार्थ बिना बल बढ़ाये ही बढ़ने लगता है, इसे पराभव क्रिया (Yielding Process) कहते हैं। इस समय पदार्थ की आन्तरिक संरचना (Internal Structure) में परिवर्तन होता है और पदार्थ की आन्तरिक संरचना (Resisting Power) में परिवर्तन होता है और पदार्थ की प्रतिरोधी शक्ति (Resisting Power) बदलती है। इस समय के प्रतिबल को पराभव प्रतिबल कहते हैं। पराभव क्रिया वक्र के बिन्दु C से D तक चलती है।

(3) प्रत्यास्थता सीमा तथा समानुपाती सीमा में अन्तर (Difference between Elastic Limit & Proportional Limit)—प्रतिबल-विकृति आरेख में जिस बिन्दु A तक प्रतिबल एवं विकृति में समानुपाती सम्बन्ध विद्यमान रहता है अर्थात् पदार्थ हुक के नियम का पालन करता है, उसे समानुपाती सीमा कहते हैं।

समानुपाती सीमा के बिन्दु A के बहुत पास में [लगभग सम्पाती (Coincidental) स्थिति में] बिन्दु B होता है। इस बिन्दु के बाद पदार्थ में प्रत्यास्थता (Elasticity) का गुण समाप्त हो जाता है। इस बिन्दु की स्थिति को प्रत्यास्थता की सीमा कहते हैं। अत: स्पष्ट है कि तनाव परीक्षण (Tensile Test) में जिस बिन्दु तक पदार्थ प्रत्यास्थता के गुण को पूर्ण रूप से बनाये रखता है, उस बिन्दु की स्थिति पर अधिकतम बल को प्रत्यास्थता की सीमा (Elastic Limit) कहते हैं।

Scanned with CamScanner

Note—[व्यावहारिक दृष्टि से A तथा B बिन्दु, दोनों एक ही बिन्दु माने जाते हैं, परन्तु परीक्षण के अन्तर्गत ... सहायता से बिन्दुओं A तथा B में अन्तर प्राप्त किया जा सकता है।]

(4) क्रीप (Creep)—तप्त तापमानों पर अधिक समय तक भारों अथवा प्रतिबलों के प्रभाव में पदार्थों में ... विरूपण (Deformation) होता है, जिसे क्रीप कहते हैं।

(5) फटीग (Fatigue)—किसी पदार्थ पर बार-बार भार लगाने के कारण पदार्थ की प्रतिरोधकता (Resistance) ... कमी को फटीग कहते हैं।

(6) प्रतिशत दैर्ध्य वृद्धि (% Elongation) ज्ञात करना—प्रतिशत अनुदैर्ध्य वृद्धि (% Elongation)

$$= \left[\frac{\text{नमूने की अन्तिम लम्बाई} - \text{प्रारम्भिक लम्बाई}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}} \times 100 \right]$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{प्रतिशत दैर्ध्य वृद्धि} = \frac{l_2 - l_1}{l_1} \times 100\%}$$

(7) प्रतिशत सिकुड़न (% Contraction) ज्ञात करना—प्रतिशत सिकुड़न (% contraction)

$$= \left[\frac{\text{नमूने की काट का प्रारम्भिक क्षेत्रफल} - \text{काट का अन्तिम क्षेत्रफल}}{\text{काट का प्रारम्भिक क्षेत्रफल}} \times 100\% \right]$$

$$\boxed{\text{प्रतिशत सिकुड़न} = \frac{A_1 - A_2}{A_1} \times 100\%}$$

§ 1.18. (A) समान काट की छड़ का लम्बाई में परिवर्तन (Change in Length of Uniform Rod)

∵ हम जानते हैं कि, यंग मापांक $E = \dfrac{\text{प्रतिबल}\,(p)}{\text{विकृति}\,(e)}$ या σ

या $$E = \frac{F/A}{\Delta l/l} = \frac{Fl}{A\Delta l}$$

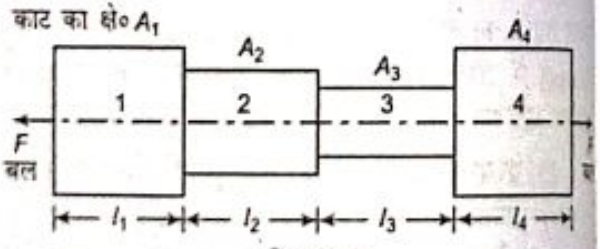
या लम्बाई में परिवर्तन $$\boxed{\Delta l = \frac{Fl}{AE}}$$

§ 1.18. (B) विभिन्न काट वाली छड़ (Bar of Varying Section)

चित्र 1.15 में एक शाफ्ट दिखायी गयी है जिसकी चार भिन्न काटें हैं। माना चारों भिन्न-भिन्न काटों के क्षेत्रफल क्रमशः A_1, A_2, A_3 तथा A_4 हैं और लम्बाइयाँ क्रमशः l_1, l_2, l_3 तथा l_4 हैं। इस शाफ्ट पर F मान का बल तनाव या सम्पीडन में ... करता है। (यहाँ माना बल F तनाव का है)।

अतः छड़ों की कुल लम्बाई में परिवर्तन, उनकी अलग-अलग लम्बाइयों में परिवर्तन के योग के बराबर होता है, चाहे बल तनाव में हो या सम्पीडन में।

माना छड़ के भागों की लम्बाइयों में परिवर्तन (वृद्धि या कमी) δl_1, δl_2, δl_3 तथा δl_4 होते हैं। तब छड़ की लम्बाई में यदि कुल परिवर्तन Δl या δl हो तो



चित्र 1.15

$$\Delta l \quad \text{या} \quad \delta l = \delta l_1 + \delta l_2 + \delta l_3 + \delta l_4 \quad \ldots(i)$$

माना छड़ के भागों के पदार्थ भिन्न-भिन्न हैं इसलिये माना यंग-मापांक के मान क्रमशः E_1, E_2, E_3 तथा E_4 हैं। हम जानते हैं कि छड़ के प्रत्येक भाग में लम्बाई में परिवर्तन निम्न होंगे—

Scanned with CamScanner

$$\delta l_1 = \frac{Fl_1}{A_1E_1}, \qquad \delta l_2 = \frac{Fl_2}{A_2E_2}$$

$$\delta l_3 = \frac{Fl_3}{A_3E_3}, \qquad \delta l_4 = \frac{Fl_4}{A_4E_4}$$

इन सभी मानों को समीकरण (i) में रखने पर,

कुल लम्बाई में परिवर्तन, $$\delta l = \frac{Fl_1}{A_1E_1} + \frac{Fl_2}{A_2E_2} + \frac{Fl_3}{A_3E_3} + \frac{Fl_4}{A_4E_4}$$

यदि छड़ एक ही पदार्थ की बनी हो तो

$$E = E_1 = E_2 = E_3 = E_4$$

$$\therefore \quad \boxed{\Delta l \text{ या } \delta l = \frac{F}{E}\left[\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{l_3}{A_3} + \frac{l_4}{A_4}\right]} \qquad \text{(सूत्र)}$$

§ 1.19. संयुक्त काट वाली छड़ें तथा स्तम्भ (Bars & Columns of Composite Section)

संयुक्त काट (Composite Bar)—दो या दो से अधिक पदार्थों की बनी होती है तथा दोनों सिरों पर आपस में दृढ़ता से जुड़ी होती हैं ताकि उन पर तनाव या सम्पीडन बल लगाने से लम्बाई में वृद्धि या कमी एक समान हो। इस प्रकार की छड़ों को **संयुक्त छड़ें** कहते हैं।

इस प्रकार की छड़ों में सन्तुलन के लिये निम्न दो प्रतिबन्ध होते हैं—

(1) संयुक्त छड़ की लम्बाई में वृद्धि या कमी एक समान होती है।

$$\Delta l_1 = \Delta l_2$$

(2) छड़ पर लगने वाला कुल बाह्य बल, उसके सभी पदार्थों द्वारा सहन किये गये बलों के योग के बराबर होता है।

$$F = F_1 + F_2$$

1.19-1. यदि ट्यूब में छड़ फँसाकर संयुक्त छड़ बनायी गयी हो

चित्र 1.16 में दिखायी गयी संयुक्त काट का ऊपरी सिरा बद्ध (Fixed) है तथा निचले सिरे पर भार F लटका है। यह छड़ दो भिन्न पदार्थों की बनी है। संयुक्त छड़ बनाने के लिये ट्यूब (1) में छड़ (2) घुसाकर दोनों को एक दूसरे के साथ दृढ़ता से जकड़ा गया है ताकि भार F दोनों द्वारा सहन किया जा सके। इस सयुक्त छड़ की लम्बाई l है।

माना ट्यूब (1) की काट का क्षेत्रफल A_1 तथा छड़ (2) की काट का क्षेत्रफल A_2 है और दोनों के पदार्थों के यंग-मापांक क्रमशः E_1 तथा E_2 हैं।

माना ट्यूब (1) द्वारा भार या बल F_1 तथा छड़ (2) द्वारा भार या बल F_2 सहन किया जाता है। अतः संयुक्त छड़ द्वारा सहन किया जाने वाला कुल भार

$$F = F_1 + F_2 \qquad \text{...(i)}$$

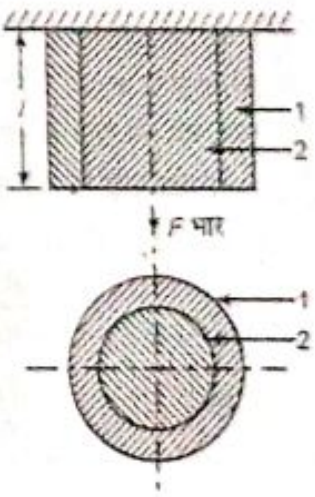
∵ ट्यूब (1) की लम्बाई में परिवर्तन

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 l}{A_1E_1}$$

तथा छड़ (2) की लम्बाई में परिवर्तन,

$$\Delta l_2 = \frac{F_2 l}{A_2E_2}$$

परन्तु संयुक्त छड़ के प्रतिबन्ध से, $\Delta l_1 = \Delta l_2$



चित्र 1.16

Scanned with CamScanner

$$\therefore \quad \frac{F_1 l}{A_1 E_1} = \frac{F_2 l}{A_2 E_2} \quad \text{या} \quad F_1 = F_2 \times \frac{A_1 E_1}{A_2 E_2}$$

अत: समीकरण (i) से,

$$F = F_1 + F_2 \qquad \ldots(ii)$$

$$= F_2 \times \frac{A_1 E_1}{A_2 E_2} + F_2 = F_2 \left[\frac{A_1 E_1}{A_2 E_2} + 1 \right]$$

या $$F = F_2 \left[\frac{A_1 E_1 + A_2 E_2}{A_2 E_2} \right]$$

या $$F_2 = F \times \frac{A_2 E_2}{(A_1 E_1 + A_2 E_2)}$$

इसी प्रकार, $$F_1 = F \times \frac{A_1 E_1}{(A_1 E_1 + A_2 E_2)} \qquad \ldots(iii)$$

परन्तु बल = प्रतिबल × क्षेत्रफल द्वारा ...(iv)

$$F_1 = p_1 A_1 \text{ या } F_1 = \sigma_1 \times A_1$$

तथा $$F_2 = p_2 A_2 \text{ या } F_2 = \sigma_2 \times A_2$$

∴ समीकरण (i) से, $\boxed{F = p_1 A_1 + p_2 A_2}$ या $\boxed{F = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2}$ (सूत्र)

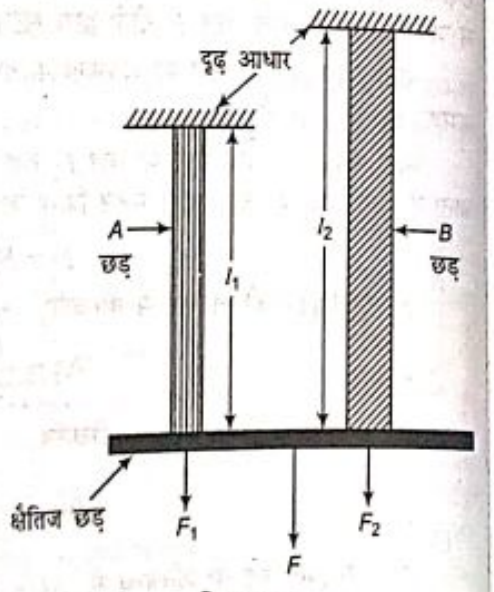
तथा $\Delta l_1 = \Delta l_2$ से, $$\frac{F_1 l}{A_1 E_1} = \frac{F_2 l}{A_2 E_2}$$

या $$\frac{p_1 l}{E_1} = \frac{p_2 l}{E_2} \text{ या } \frac{\sigma_1 l}{E_1} = \frac{\sigma_2 l}{E_2}$$

या $$\frac{p_1}{E_1} = \frac{p_2}{E_2} \text{ या } \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} \qquad \text{(सूत्र)}$$

1.19-2. यदि दो छड़ों को दृढ़ आधारों से लटकाकर संयुक्त छड़ बनायी गयी हो

माना चित्र 1.17 में छड़ों A तथा B की लम्बाइयाँ l_1 तथा l_2, काट के क्षेत्रफल A_1 तथा A_2, यंग-मापांक E_1 व E_2 हैं। दोनों छड़ें दृढ़ आधार से लटकी है तथा नीचे एक क्षैतिज छड़ या धरन (Horizontal Beam) से जुड़ी है। यह क्षैतिज छड़ सदैव क्षैतिज ही रहती है और इस प्रकार एक संयुक्त छड़ के रूप मे कार्य करती है। माना A तथा B द्वारा सहन किये गये खिचाव भार या बल क्रमश: F_1 तथा F_2 हैं।



चित्र 1.17

संयुक्त छड़ के प्रतिबन्ध (1) से,

$$\Delta l_1 = \Delta l_2$$

या $$\frac{F_1 l_1}{A_1 E_1} = \frac{F_2 l_2}{A_2 E_2}$$

या $$\frac{p_1 l_1}{E_1} = \frac{p_2 l_2}{E_2} \qquad \text{(सूत्र)}$$

Scanned with CamScanner

यदि दोनों छड़ों में प्रतिबल क्रमशः σ_1 या p_1 तथा σ_2 या p_2 हों तो $\left[\because \quad p_1 = \frac{F_1}{A_1} \text{ तथा } P_2 = \frac{F_2}{E_2}\right]$

यदि दोनों छड़ों की लम्बाइयाँ बराबर हों अर्थात् $l_1 = l_2$ हो तो निम्न सूत्र प्रयोग होता है।

$$\boxed{\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}} \quad \text{अथवा} \quad \boxed{\frac{p_1}{E_1} = \frac{p_2}{E_2}} \quad (\text{सूत्र}) \qquad ...(i)$$

अब संयुक्त छड़ के प्रतिबन्ध (2) से,

$$F = F_1 + F_2$$

$$\therefore \quad \boxed{F = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2} \quad \text{अथवा} \quad \boxed{F = p_1 A_1 + p_2 A_2} \qquad ...(ii)$$

दोनों सूत्रों (i) तथा (ii) की सहायता से धातुओं में प्रतिबल ज्ञात किये जाते हैं तथा दोनों छड़ों की लम्बाई में परिवर्तन समान होगा जिसे निम्न सूत्र से ज्ञात करते हैं—

$$\boxed{\Delta l = \frac{Fl}{AE} = \frac{pl}{E}} \quad \text{अथवा} \quad \boxed{\Delta l = \frac{\sigma l}{E}} \quad (\text{सूत्र})$$

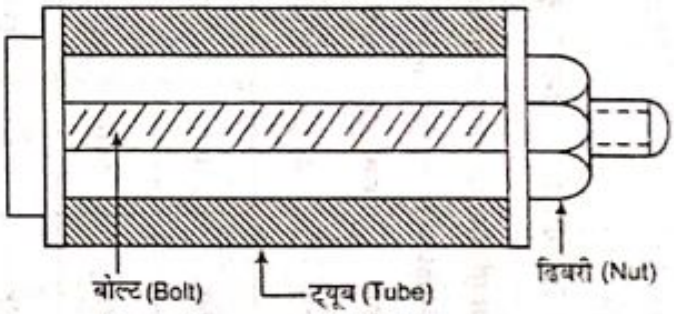
§ 1.20. बोल्ट पर अक्षीय बल के कारण उत्पन्न प्रतिबल तथा लम्बाई में परिवर्तन

चित्र 1.18 के अनुसार, यदि हम एक बोल्ट की रॉड (Shank) में नली पिरोकर एक ढिबरी (Nut) कसें तो बोल्ट पर अक्षीय तनाव बल F कार्य करता है, जिसके कारण ट्यूब पर इतने ही मान का सम्पीडन बल कार्य करता है। अतः बोल्ट पर तनाव बल के कारण लम्बाई में वृद्धि होती है, जबकि ट्यूब में सम्पीडन बल के कारण लम्बाई में कमी होती है और ट्यूब की लम्बाई में कमी तथा बोल्ट की लम्बाई में वृद्धि के योग के बराबर ही ढिबरी (Nut) कसी जाती है।

अतः नट-बोल्ट से सम्बन्धित प्रश्नों में निम्न दो प्रतिबन्ध प्रयोग किये जाते हैं—

(1) बोल्ट में तनाव बल = ट्यूब में सम्पीडन बल

(2) बोल्ट की अक्ष पर ढिबरी द्वारा चली दूरी
= बोल्ट की लम्बाई में वृद्धि
+ ट्यूब की लम्बाई में कमी



चित्र 1.18

§ 1.21-(i) मृदु इस्पात के यांत्रिक गुण (Mechanical Properties of Mild Steel)

1. यह इन्जीनियरिंग के क्षेत्र में सर्वाधिक उपयोगी लौह धातु है। इसका उपयोग नट-बोल्ट, कुँजी, रिवेट, कपलिंग्स, मशीनों की बॉडी, पुलों के ढाँचे, बॉयलर प्लेटें, पाइप, इस्पात काटें; जैसे—टा, एंगल, चैनल, चादरें तथा सरिये आदि बनाने में होता है।
2. इसमें कार्बन की मात्रा 0·15 से 0·25% तक होती है।
3. इसकी ब्रिनेल कठोरता संख्या लगभग 130 है।
4. इस पर आसानी से फोर्जन तथा वैल्ड किया जा सकता है।
5. इसे पायनीकृत (Tempered) तथा कठोरीकृत (Harden) नहीं किया जा सकता।
6. मृदु इस्पात में कठोरता तथा कड़ापन (Hardness and Toughness), प्रत्यास्थता (Elasticity), तन्यता (Ductility) तथा मशीनन (Machinability) के गुण विद्यमान होते हैं।
7. इसका रेखीय प्रसार गुणांक लगभग $11{\cdot}4 \times 10^{-6}$ प्रति °K होता है।

Scanned with CamScanner

1.21–(ii) तालिका 1.1–सामान्य इन्जीनियरी पदार्थों के सामान्य गुण

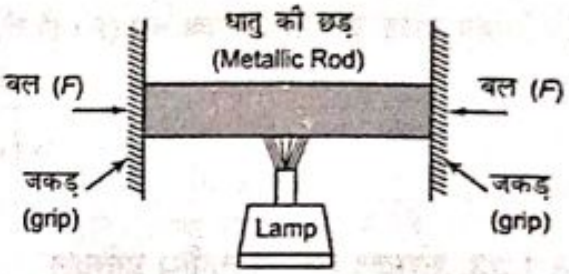
क्र० सं०	पदार्थ	अन्तिम प्रतिबल या अन्तिम सामर्थ्य (Ultimate Strength N/mm^2)			E यंग मापांक N/mm^2	G कर्तन मापांक N/mm^2	घनत्व kg/m^2	तापमान प्रसार गुणांक α प्रति °C	ब्रिनेल कठोरता संख्या H_B
		तनाव	सम्पीडन	कर्तन					
1.	मृदु-इस्पात (0·1% कार्बन) (Mild Steel)	439	455	350	$2·03\times10^5$	$0·90\times10^5$	$7·7\times10^3$	$11·4\times10^{-6}$	130
2.	पिटवाँ लोहा (Wrought Iron)	350	420	280	$1·90\times10^5$	$0·7\times10^5$	$7·7\times10^3$	12×10^{-6}	105
3.	भूरा ढलवाँ लोहा (Gray Cast Iron)	140	560	112	$1·05\times10^5$	$0·4\times10^5$	$7·2\times10^3$	$11·8\times10^{-6}$	180
4.	आघातवर्ध्य ढलवाँ लोहा (Malleable Cast Iron)	378	—	336	$1·75\times10^5$	$0·85\times10^5$	$7·2\times10^3$	$11·9\times10^{-6}$	230
5.	इस्पात (0·2% कार्बन) (ठण्डा रोलित)	560	—	420	$2·1\times10^5$	$0·84\times10^5$	$7·84\times10^3$	—	160
6.	इस्पात (0·2% कार्बन) (गर्म रोलित)	420	630	315	$2·1\times10^5$	$0·84\times10^5$	$7·84\times10^3$	$11·7\times10^{-6}$	125
7.	इस्पात (1% कार्बन) (गर्म रोलित)	840	—	735	$2·1\times10^5$	$0·84\times10^5$	$7·84\times10^3$	13×10^{-6}	290
8.	ऐल्यूमीनियम (ढलवाँ)	90	—	73·5	$0·7\times10^5$	$0·3\times10^5$	$2·6\times10^3$	23×10^{-6}	40
9.	ताँबा (ढलवाँ)	210	315	189	$0·9\times10^5$	$0·4\times10^5$	$8·9\times10^3$	$16·7\times10^{-6}$	—

Scanned with CamScanner

8. इस धातु के यंग-मापांक (E) तथा कर्तन मापांक (G) के मान लगभग $2{\cdot}03\times10^5$ N/mm^2 तथा $0{\cdot}9\times10^5$ N/mm^2 होते हैं।
9. मृदु इस्पात की अन्तिम तनाव सामर्थ्य, सम्पीडन सामर्थ्य तथा कर्तन सामर्थ्य लगभग 440, 455 तथा 350 N/mm^2 होती हैं।
10. इसका गलनांक लगभग 1400°C और घनत्व 7700 kg/m^3 होता है।

§ 1.22. तापीय प्रतिबल (Temperature Stresses or Thermal Stresses)

यदि किसी धातु की छड़ को दोनों सिरों पर मजबूती से जकड़ दिया जाये और तब इसके तापमान में परिवर्तन किया जाये तो छड़ की लम्बाई में परिवर्तन को रोकने के लिये जकड़ (grip) बल लगायेगी जिसके कारण छड़ में प्रतिबल उत्पन्न होते हैं, ये प्रतिबल ही तापीय प्रतिबल कहलाते हैं। इसे निम्न प्रकार भी परिभाषित किया जा सकता है—



चित्र 1.19

"किसी छड़ में तापान्तर के कारण उत्पन्न हुए प्रतिबल, तापीय प्रतिबल कहलाते हैं, जबकि छड़ दोनों सिरों पर मजबूती से जकड़ी गई हो।"

"When a Rod/Bar is gripped at the both ends, the stress developed in the bar due to the temperature difference, is called thermal stress or temperature stress."

∵ भौतिक विज्ञान (Physics) में ऊष्मा (Heat) के चैप्टर से हम जानते हैं कि छड़ की लम्बाई में परिवर्तन

$$\boxed{\Delta l = l\alpha t} \quad \text{(सूत्र)} \qquad \ldots \text{(i)}$$

जहाँ α = रेखीय प्रसार गुणांक (Coefficient of linear expansion) /°C में

t = तापान्तर (temperature difference)

l = छड़ की लम्बाई (length of bar)

अब तापीय विकृति (Temperature strain)

$$e = \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \frac{l\alpha t}{l} \Rightarrow \alpha t$$

$$\therefore \quad \boxed{e = \alpha t} \quad \text{(सूत्र)} \qquad \ldots \text{(ii)}$$

∴ तापीय प्रतिबल (Temperature Stress)

$$p = eE \qquad \left(\text{Young's Modulus } E = \frac{p}{e} \text{ से}\right)$$

$$\boxed{p = \alpha t E} \quad \text{(सूत्र)} \qquad \ldots \text{(iii)}$$

अब छड़ पर जकड़ द्वारा लगाया गया बल (F) हो तो

$$F = \text{प्रतिबल} \times \text{क्षेत्रफल}$$
$$= p \times A$$
$$\boxed{F = (\alpha\, t\, E)\, A \quad \text{(सूत्र)}} \qquad \ldots \text{(iv)}$$

विशेष—यदि जकड़ δ लम्बाई से ढीली (loose) हो जाये तो सूत्रों में निम्न परिवर्तन हो जाते हैं—

∴ लम्बाई में शुद्ध परिवर्तन, $\boxed{\Delta l = l\alpha t - \delta}$ ... (v)

Scanned with CamScanner

∴ तापीय विकृति, $e = \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \frac{l\alpha t - \delta}{l}$

$$\therefore \quad \boxed{e = \alpha t - \frac{\delta}{l}} \quad \text{(सूत्र)} \qquad \ldots \text{(vi)}$$

तथा तापीय प्रतिबल (Temperature Stress)

$$p = e.E$$

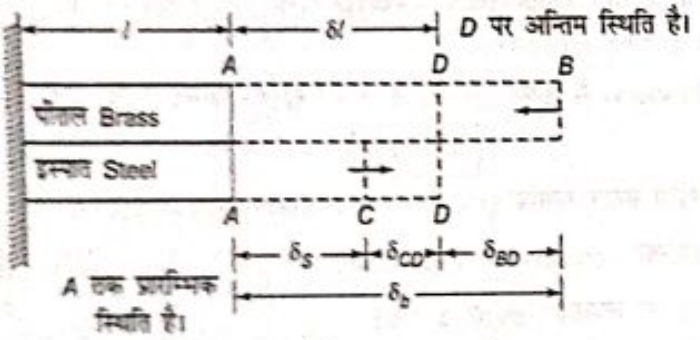
$$\boxed{p = \left(\alpha t - \frac{\delta}{l}\right) E} \quad \text{(सूत्र)} \qquad \ldots \text{(vii)}$$

अब जकड़ द्वारा लगाया गया बल (F) हो तो,

$$F = p \times A$$

$$\boxed{F = \left(\alpha t - \frac{\delta}{l}\right) E.A} \quad \text{(सूत्र)} \qquad \ldots \text{(viii)}$$

§ 1.23. संयुक्त छड़ों में तापीय प्रतिबल (Temperature or Thermal Stresses in Compound Bars)



चित्र 1.20

चित्र में इस्पात (Steel) तथा पीतल (Brass) की दो छड़ों को आपस में मजबूती से जकड़ (rigidly fastened to each other) कर संयुक्त छड़ (Composite Bar) बनाई गई है। माना कि

(1) दोनों छड़ों की आरम्भ में लम्बाई = l है।

(2) इस्पात (Steel) तथा पीतल (Brass) के रेखीय प्रसार गुणांक = α_s तथा α_b हैं।

(3) इस्पात तथा पीतल के प्रत्यास्थता गुणांक = E_s तथा E_b हैं।

(4) इस्पात तथा पीतल की काट के क्षेत्रफल = A_s तथा A_b हैं।

(5) संयुक्त छड़ के तापमान में परिवर्तन = $t°C$ बढ़ाया जाता है।

हम जानते हैं कि तापमान परिवर्तन से इस्पात की अपेक्षा पीतल अधिक बढ़ता है या घटता है। यदि पीतल A सिरे पर बढ़ने के लिये स्वतन्त्र (Free) होता है तो यह B तक बढ़ता है। इसी प्रकार यदि इस्पात A सिरे पर बढ़ने के लिये मुक्त (Free) होता है तो वह C तक बढ़ता है। क्योंकि इस्पात कम बढ़ता है और पीतल अधिक, इसलिये सिरे पर बद्ध होने के कारण वे स्वतन्त्रतापूर्वक नहीं बढ़ पाते।

Scanned with CamScanner

पीतल, इस्पात को खींचकर अपने जितना बढ़ाने का प्रयत्न करता है तथा इस्पात (Steel), पीतल (Brass) को दबाकर अपने जितना लम्बाई में रखने का प्रयत्न करता है। इन सब कारण वश पीतल, इस्पात (Steel) को खींचकर C से D तक ले जाता है और इस्पात (Steel), पीतल (Brass) को दबाकर B से D तक ले आता है और इस प्रकार अन्तिम स्थिति D पर प्राप्त हो जाती है।

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि इस्पात, पीतल पर सम्पीडन बल (Compressive Force) लगाता है तथा पीतल, इस्पात पर तनाव बल (Tensile Force) लगाता है। माना इस्पात स्वतन्त्र रूप से δ_s बढ़ता है जबकि पीतल स्वतन्त्र रूप से δ_b बढ़ता है।

$$\therefore \qquad \delta_s = l\alpha_s t \qquad \text{तथा} \qquad \delta_b = l\alpha_b t.$$

चित्र से ज्ञात होता है कि इस्पात में C से D तक खिचने के कारण तनाव विकृति (tensile strain) और पीतल B से D तक सिकुड़ने के कारण संपीडन विकृति (Compressive strain) उत्पन्न होती है। अत: लम्बाइयों में वृद्धि व कमी क्रमश: δ_{CD} तथा δ_{BD} होती है।

$$\therefore \qquad \delta_{CD} = \delta l - \delta_s \qquad \ldots (1)$$

$$\delta_{BD} = \delta_b - \delta l \qquad \ldots (2)$$

दोनों समीकरणों को जोड़ने पर,

$$\delta_{CD} + \delta_{BD} = \delta_b - \delta_s \qquad \ldots (3)$$

यदि इस्पात में विकृति e_s तथा प्रतिबल p_s होते हैं और पीतल में विकृति e_b तथा प्रतिबल p_b हैं तब

$$e_s = \frac{\delta_{CD}}{l} \qquad \text{और} \qquad E_s = \frac{p_s}{e_s} \qquad \text{या} \qquad e_s = \frac{p_s}{E_s}$$

$$\therefore \qquad \delta_{CD} = e_s \times l \Rightarrow \frac{p_s}{E_s} \times l \qquad \ldots (4)$$

इसी प्रकार,

$$\delta_{BD} = \frac{p_b}{E_b} \times l \qquad \ldots (5)$$

समी० (4) तथा (5) के मान, समी० (3) में रखने पर,

$$\frac{p_s}{E_s} \times l + \frac{p_b}{E_b} \times l = \delta_b - \delta_s$$

$$= l\alpha_b t - l\alpha_s t$$

या

$$\boxed{\frac{p_s}{E_s} + \frac{p_b}{E_b} = t\,(\alpha_b - \alpha_s)} \qquad \text{(सूत्र)} \qquad \ldots (6)$$

∵ छड़ के सन्तुलन के लिये

इस्पात पर पीतल द्वारा खिचाव बल = पीतल पर इस्पात द्वारा दबाव बल

या

$$\boxed{p_s \times A_s = p_b \times A_b} \qquad \text{(सूत्र)} \qquad \ldots (7)$$

संयुक्त छड़ की लम्बाई में कुल परिवर्तन,

$$\Delta l = l\alpha_s t + \frac{p_s l}{E_s} \qquad \text{(सूत्र)} \qquad \ldots (8)$$

तथा कुल विकृति

$$e = \alpha_s t + \frac{p_s}{E_s} \qquad \text{(सूत्र)} \qquad \ldots (9)$$

Scanned with CamScanner

§ 1.24. पहिये पर टायर की सिकुड़न (Shrinkage of a tyre on a Wheel)

क्योंकि धातु के बने टायर को गर्म करके गर्म अवस्था में ही गाड़ी के लकड़ी के दृढ़ पहिये की परिधि (circumference) पर चढ़ाया जाता है परन्तु जब टायर ठण्डा हो जाता है तो इसका व्यास (Dia) कम हो जाता है जिससे वह पहिये की परिधि पर जकड़ जाता है। माना पहिये का व्यास D तथा टायर का आन्तरिक व्यास d है तथा $D > d$ है।

अत: $$\pi D > \pi d$$

अब टायर को इतना गर्म करना होगा कि $\pi D = \pi d$ हो जाये। फिर इस दशा में टायर को दृढ़ पहिये पर हथौड़ों से ठोक कर चढ़ा दिया जाता है। टायर के ठण्डा होने पर यह पहिये की पूरी परिधि पर जकड़ जाता है और सम्पर्क की लकड़ी को झुलसाकर एक खाँचा (cavity) बना लेता है, जिससे बैलगाड़ी या ताँगा के पहिये चलने पर यह लोहे की पत्ती या टायर उतरता नहीं है।

चित्र 1.21

∴ टायर में परिधीय विकृति (Circumferential Strain)

$$e = \frac{\pi D - \pi d}{\pi d} = \frac{D - d}{d}$$

∴ $$e = \frac{D - d}{d}$$ (सूत्र)

अब टायर में परिधीय प्रतिबल (Hoop Stress or Circumferential Stress)

∵ $$p = eE \qquad \left[\because E = \frac{p}{e}\right]$$

∴ $$p = \left(\frac{D - d}{d}\right) E$$ (सूत्र)

∵ विकृतियों को समान रखने पर,

$$\alpha t = \frac{D - d}{d}$$

या $$t = \left(\frac{D - d}{d}\right)\frac{1}{\alpha}$$ (सूत्र)

इस सूत्र से ज्ञात होता है कि टायर को चढ़ाने के लिये तापमान में कितना परिवर्तन करना होगा।

महत्त्वपूर्ण उदाहरण (Imp. Examples)

**विशेष : प्रतिबल-विकृति तथा लम्बाई में परिवर्तन पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 1. एक 4 मीटर लम्बी लोहे की छड़ जिसका अनुक्षेप (Section) 3 cm × 2 cm है, पर 50 kN का अक्षीय तनाव बल लगाया गया है। प्रतिबल, विकृति एवं छड़ की लम्बाई में वृद्धि निकालिये, यदि $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 है।

हल— यहाँ $l = 4\text{ m} = 4000\text{ mm}$,

क्षेत्रफल $A = 3 \times 2 = 6\text{ cm}^2 = 600\text{ mm}^2$

बल $F = 50\text{ kN} = 50 \times 1000\text{ N}$

प्रतिबल $$p = \frac{F}{A} = \frac{50 \times 1000}{600} = 83{\cdot}33\text{ N/mm}^2$$ उत्तर

विकृति $$e = \frac{P}{E} = \frac{83{\cdot}33}{2 \times 10^5} = 4{\cdot}167 \times 10^{-4}$$ उत्तर

∴ लम्बाई में वृद्धि $$\Delta l = \frac{F \times l}{AE} = \frac{50 \times 1000 \times 4000}{600 \times 2 \times 10^5} = 1{\cdot}667\text{ mm}$$ उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 2. एक इस्पात के तार द्वारा 2·5 kN भार को उठाना है। तार का न्यूनतम व्यास कितना होना चाहिये जिससे उसमें प्रतिबल 100 kN/mm^2 से अधिक न हो, यदि तार की लम्बाई 5 मीटर हो तो तार की बढ़ोत्तरी को भी ज्ञात कीजिये। $E = 2\times10^5$ N/mm^2 मान लीजिये।

हल—तार पर भार बल $F = 2{\cdot}5\text{ kN} = 2500\text{ N}$

तार की लम्बाई $= 5\text{ m}$

तार में प्रतिबल $p = 100\text{ kN/mm}^2$

माना तार का न्यूनतम व्यास d है। अत: क्षेत्रफल $A = \dfrac{\pi d^2}{4}$ होगा।

अब प्रतिबल $$p = \frac{\text{बल}\,(F)}{\text{क्षेत्रफल}\,(A)}$$

या $$A = \frac{F}{p}$$

या $$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{2500}{100\times1000}$$

या $$d^2 = \frac{4\times2500}{\pi\times100\times1000} = 0{\cdot}0318$$

∴ तार का व्यास $$d = 0{\cdot}1784\text{ mm} = \mathbf{0{\cdot}18\text{ mm}}$$ **उत्तर**

अब तार की लम्बाई में बढ़ोत्तरी, $$\Delta l = \frac{Fl}{AE} = \frac{2500\times5000\times4}{\pi(\cdot18)^2\times2\times10^5}$$

$$= 2456{\cdot}09\text{ mm} = \mathbf{2456\text{ mm}}$$ **उत्तर**

उदाहरण 3. इस्पात की 2 सेमी व्यास की गोल छड़ पर 30 kN का तनन बल या भार लगा है। छड़ में तनन प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये। यदि छड़ की लम्बाई 30 सेमी हो तो छड़ की लम्बाई में हुयी वृद्धि की गणना कीजिए।

($E = 2\times10^5$ kN/mm^2)

हल— दिया है व्यास $d = 20$ mm, बल $F = 30$ kN, लम्बाई $l = 300$ mm

प्रतिबल $p = ?$ तथा लम्बाई में वृद्धि $\Delta l = ?$

प्रतिबल, $$p = \frac{\text{बल}\,(F)}{\text{क्षेत्रफल}\,(A)}$$

$$= \frac{30}{\pi\,(20)^2/4}$$

$$= \frac{30\times4}{3{\cdot}14\times400} = 0{\cdot}0955\text{ kN/mm}^2$$

$$= \mathbf{95{\cdot}5\text{N/mm}^2}$$ **उत्तर**

लम्बाई में परिवर्तन,

$$\Delta l = \frac{Fl}{AE} = \frac{30\times300}{\pi(20)^2/4\times2\times10^5}$$

$$= \mathbf{0{\cdot}0001432\text{ mm}}$$ **उत्तर**

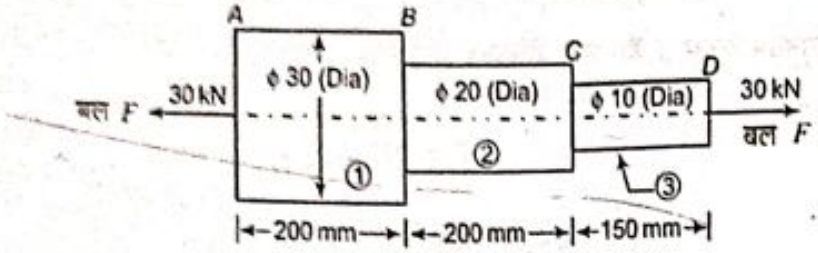
Scanned with CamScanner

उदाहरण 4. एक 550 mm लम्बी ताँबे की रॉड, जिसका 200 mm हिस्सा 30 mm व्यास का, 200 mm लम्बा 20 mm व्यास का तथा बाकी हिस्सा 10 mm व्यास का है। प्रत्येक हिस्से में प्रतिबल का मान बताइये तथा रॉड का सम्पूर्ण खिंचाव भी बताइए, यदि भार 30 kN का लगा है? मानिये $E = 100\ \text{kN/mm}^2$।

(ब) अधिकतम विकृति (Max. Strain) तथा न्यूनतम विकृति (Min. Strain) भी ज्ञात कीजिये।

(उ० प्र० 2012)

हल—चित्र 1.22 देखें।



चित्र 1.22

प्रथम भाग की काट का क्षेत्रफल, $A_1 = \dfrac{\pi(30)^2}{4} = 706{\cdot}5\ \text{mm}^2$

दूसरे भाग की काट का क्षेत्रफल, $A_2 = \dfrac{\pi(20)^2}{4} = 314\ \text{mm}^2$

तीसरे भाग की काट का क्षेत्रफल, $A_3 = \dfrac{\pi(10)^2}{4} = 78{\cdot}5\ \text{mm}^2$

∴ प्रथम हिस्से (AB) में प्रतिबल प्रतिबल $p_1 = \dfrac{F}{A_1} = \dfrac{30\times1000}{706{\cdot}5} = 42{\cdot}463\ \text{N/mm}^2$ (न्यूनतम प्रतिबल) उत्तर

दूसरे हिस्से (BC) में प्रतिबल $p_2 = \dfrac{F}{A_2} = \dfrac{30\times1000}{314} = 95{\cdot}54\ \text{N/mm}^2$ उत्तर

तीसरे हिस्से (CD) में प्रतिबल $p_3 = \dfrac{F}{A_3} = \dfrac{30\times1000}{78{\cdot}5} = 382{\cdot}165\ \text{N/mm}^2$ (अधिकतम प्रतिबल) उत्तर

∵ सम्पूर्ण खिंचाव (Total Δl) $= \dfrac{p_1 l_1}{E} + \dfrac{p_2 l_2}{E} + \dfrac{p_3 l_3}{E}$

∴ $$\Delta l = \frac{1}{1\times10^5}[42{\cdot}46\times200 + 95{\cdot}54\times200 + 382{\cdot}16\times150]$$

$$= 0{\cdot}8492\ \text{mm}$$ उत्तर

उदाहरण 4 (ब) का हल—

अधिकतम विकृति (Maximum Strain), $e_{max.} = \dfrac{\text{अधिकतम प्रतिबल}}{E}$

$$= \frac{382{\cdot}165}{1\times10^5} = 3{\cdot}82\times10^{-3}$$ उत्तर

न्यूनतम विकृति (Minimum Strain), $e_{min.} = \dfrac{\text{न्यूनतम प्रतिबल}}{E}$

$$= \frac{42{\cdot}463}{1\times10^5} = 4{\cdot}246\times10^{-4}$$ उत्तर

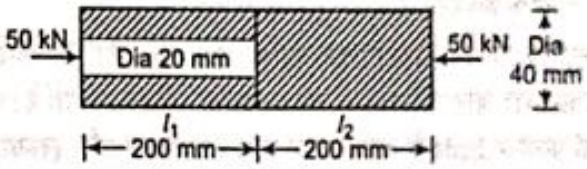
Scanned with CamScanner

उदाहरण 5. चित्र 1.23 में एक गोल छड़ दिखायी गयी है, जिसका व्यास 40 mm तथा लम्बाई 400 mm है। इसकी आधी लम्बाई तक यह छड़ खोखली है जिसके छिद्र का व्यास 20 mm है। यदि यंग मापांक $E = 100\ \text{kN/mm}^2$ ($1 \times 10^5\ \text{N/mm}^2$) है तो 50 kN के अक्षीय सम्पीडन के लिये निम्न ज्ञात कीजिये–

(i) अधिकतम प्रतिबल,

(ii) न्यूनतम प्रतिबल,

(iii) लम्बाई में सम्पूर्ण परिवर्तन (Δl)।



चित्र 1.23

हल–हम जानते हैं कि प्रतिबल $p = \dfrac{\text{बल } (F)}{\text{क्षेत्रफल}(A)}$

अत: क्षेत्रफल A का मान न्यूनतम होने पर, प्रतिबल p अधिकतम होगा तथा A का मान अधिकतम होने पर, प्रतिबल न्यूनतम होगा।

$\therefore$ न्यूनतम क्षेत्रफल = खोखली काट का क्षेत्रफल

$\therefore$ $$A_1 = \frac{\pi (d_0^2 - d_1^2)}{4}$$

$\therefore$ क्षेत्रफल $$A_{\min} = \frac{\pi (40^2 - 20^2)}{4} = 300\pi\ \text{mm}^2$$

तथा अधिकतम क्षेत्रफल = ठोस काट का क्षेत्रफल

$\therefore$ $$A_2 = \frac{\pi D^2}{4}$$

$\therefore$ क्षेत्रफल $$A_{\max} = \frac{\pi (40)^2}{4} = 400\pi\ \text{mm}^2$$

$\therefore$ **(i) अधिकतम प्रतिबल** $$P_{\max} = \frac{F}{A_{\min}} + \frac{50 \times 1000}{300\pi} = 53{\cdot}05\ \text{N/mm}^2$$ उत्तर

(ii) न्यूनतम प्रतिबल $$P_{\min} = \frac{F}{A_{\max}} = \frac{50 \times 1000}{400\pi} = 39{\cdot}788\ \text{N/mm}^2$$ उत्तर

(iii) लम्बाई में सम्पूर्ण परिवर्तन

$$\Delta l = \frac{F}{E}\left[\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2}\right] = \frac{50 \times 1000}{1 \times 10^5} \times \left[\frac{200}{300\pi} + \frac{200}{400\pi}\right]$$

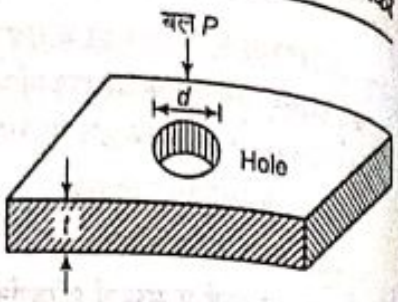
$$= \frac{50 \times 1000 \times 200}{1 \times 10^5 \times 100 \times \pi} \times \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] = 0{\cdot}1856\ \text{mm}$$ उत्तर

उदाहरण 6. 30 mm मोटी प्लेट में 25 mm व्यास का छिद्र किया जाता है। यदि प्लेट के पदार्थ का अधिकतम कर्तन प्रतिबल $300\ \text{N/mm}^2$ है तो प्लेट में छिद्र करने के लिये आवश्यक बल ज्ञात कीजिये।

हल–कर्तन सतह का क्षेत्रफल,

$A = \pi dt$ (सूत्र)

Scanned with CamScanner



चित्र 1.24

या $A = 3{\cdot}14 \times 25 \times 30$

$= 2356{\cdot}1945 \text{ mm}^2$

पंचिंग मशीन द्वारा छिद्र (Hole) करने में लगा बल,

$P =$ प्रतिबल $\times$ क्षेत्रफल

$= 300 \times 2356{\cdot}1945$

$= 706858{\cdot}35 \text{ N}$

$= 706{\cdot}86 \text{ kN}$ उत्तर

उदाहरण 7. किसी डीजल इन्जन के पिस्टन का व्यास 300 mm है। सिलिण्डर में गैसों का अधिकतम दाब 3·5N/mm² है। इस सिलिण्डिर को चार बोल्टों (Bolts) की सहायता से कसा जाता है। यदि प्रत्येक Bolt का व्यास = 25 mm तथा लम्बाई 700 mm है तो प्रत्येक Bolt में अधिकतम तनाव प्रतिबल और लम्बाई में वृद्धि ज्ञात कीजिये। दिया है $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$। (उ० प्र० 2003, 2008)

हल– सिलिण्डर में दाब द्वारा लगा बल,

$P =$ दाब $\times$ क्षेत्रफल

$$P = 3{\cdot}5 \times \frac{\pi (300)^2}{4} = 78750\pi \text{ N}$$

∵ यह बल 4-Bolts सहन करते हैं। अत: प्रत्येक Bolt द्वारा सहन किया गया बल

$$F = \frac{P}{4} = \frac{78750\pi}{4} = 19687{\cdot}5\pi \text{ N}$$

∴ प्रत्येक Bolt में तनाव प्रतिबल

$$P = \frac{F}{A_{\text{bolt}}} = \frac{19687{\cdot}5\pi}{\pi (25)^2 / 4}$$

या $$P_{\text{bolt}} = \frac{19687{\cdot}5 \times 4}{625}$$

$= 126 \text{ N/mm}^2$ उत्तर

तब Bolt की लम्बाई में वृद्धि $\Delta l = \frac{Fl}{AE}$ या $\left(\Delta l = \frac{pl}{E}\right)$

∴ $$\Delta l = \frac{19687{\cdot}5\pi \times 700}{\frac{\pi (25)^2}{4} \times 2 \times 10^5} = 0{\cdot}441 \text{ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 8. किसी भाप इन्जन (Steam Engine) में पिस्टन का व्यास 200 mm है। संयोजक दण्ड (Connecting Rod) की लम्बाई 1·5 मीटर तथा इसकी अनुप्रस्थ काट (Cross-section) का क्षेत्रफल 20 cm² (20 × 100 mm²) है। यदि सिलिण्डर में भाप का अधिकतम दाब 4 N/mm² हो तो संयोजक दण्ड की लम्बाई में कमी तथा प्रतिबल ज्ञात कीजिये। $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ है।

हल–∵ पिस्टन का व्यास, $D = 200 \text{ mm}$

∴ पिस्टन की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल,

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi (200)^2}{4}$$

$$= \frac{3{\cdot}14 \times 40000}{4} = 31400 \text{ mm}^2$$

Scanned with CamScanner

∵ सिलिण्डर में अधिकतम दाब, $p = 4\,N/mm^2$ (दिया है)

∴ पिस्टन द्वारा संयोजक दण्ड पर लगा दाब बल

F = दाब × क्षेत्रफल

$= 4 \times 31400 = 125600$ न्यूटन (N)

∴ **संयोजक दण्ड में प्रतिबल,** $f = \dfrac{\text{संयोजक दण्ड पर बल } (F)}{\text{संयोजक दण्ड की काट का क्षेत्रफल}}$

$= \dfrac{125600}{20 \times 100} = 62{\cdot}8\ N/mm^2$ उत्तर

संयोजक दण्ड की लम्बाई में कमी,

$$\Delta l = \frac{Fl}{AE}$$ (सूत्र : ध्यान दें)

∴ $\Delta l = \dfrac{125600 \times 1{\cdot}5 \times 1000}{20 \times 100 \times 2 \times 10^5} = 0{\cdot}471\ mm$ उत्तर

उदाहरण 9. एक पिस्टन तथा पिस्टन छड़ चित्र में दर्शायी गयी है। पिस्टन छड़ का व्यास ज्ञात कीजिये यदि प्रतिबल 120 N/mm^2 तक सीमित है। पिस्टन का व्यास 300 mm तथा सिलिण्डर में दाब 4 N/mm^2 है।

(उ० प्र० 2009, 10 पूरक परीक्षा)

हल– पिस्टन की काट का क्षेत्रफल (Cross-section Area),

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi\,(300)^2}{4}$$

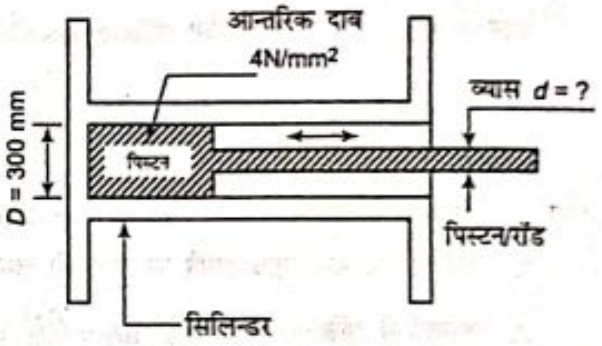
$= 22500\,\pi\ mm^2$

∴ पिस्टन द्वारा पिस्टन छड़ पर लगा बल,

F = दाब × क्षेत्रफल

$= 4 \times 22500\pi$ न्यूटन (N)

$= 90000\pi$ न्यूटन



चित्र 1.25

∵ पिस्टन छड़ में बल = प्रतिबल × छड़ का क्षेत्रफल

सभी मान रखने पर,

$$90000\pi = 120 \times \frac{\pi d^2}{4}$$

या $d^2 = \dfrac{90000\pi \times 4}{120 \times \pi} = 3000$

∴ छड़ का व्यास $d = \sqrt{(3000)} = 54{\cdot}772\,mm = 54{\cdot}8\ mm$ उत्तर

उदाहरण 10. पीतल तथा इस्पात की छड़ों की लम्बाई तथा अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल समान हैं। जब पीतल की छड़ पर कोई भार लगाया जाता है तो इसकी लम्बाई में 2 mm की विकृति हो जाती है। यदि यही भार इस्पात की छड़ पर लगाया जाये तो इसकी अक्षीय विकृति ज्ञात कीजिये। यदि $E_{Steel} = 2 \times 10^5\ N/mm^2$ तथा $E_{Brass} = 0{\cdot}8 \times 10^5 N/mm^2$ है।

हल–	पीतल की छड़	स्टील की छड़
माना	बल F	बल F
	लम्बाई l	लम्बाई l
	काट का क्षेत्रफल A	काट का क्षेत्रफल A

Scanned with CamScanner

लम्बाई में परिवर्तन Δl_b (2 mm) लम्बाई में परिवर्तन $\Delta l_s = ?$

$(E_b = 0{\cdot}8 \times 10^5 \text{ N/mm}^2)$ $(E_s = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2)$

$$\therefore \quad \Delta l_b = \frac{Fl}{AE_b} \qquad \text{...(i)}$$

तथा $$\Delta l_s = \frac{Fl}{AE_s} \qquad \text{...(ii)}$$

समीकरण (ii) को (i) से भाग देने पर,

$$\frac{\Delta l_s}{\Delta l_b} = \frac{E_b}{E_s}$$

या $$\Delta l_s = \Delta l_b \times \frac{E_b}{E_s}$$

$$\therefore \quad \Delta l_s = 2 \times \frac{0{\cdot}8 \times 10^5}{2 \times 10^5} = \mathbf{0{\cdot}8 \text{ mm}}$$ उत्तर

उदाहरण 11. एक इस्पात की छड़ पर, जिसका व्यास 30 mm तथा लम्बाई 300 mm है, एक प्रत्यावर्ती (Alternating) भार अधिकतम 20 kN सम्पीडन से अधिकतम 8 kN तनाव के मध्य लगाया जाता है। छड़ की अधिकतम तथा न्यूनतम लम्बाई में अन्तर को ज्ञात कीजिये। $E = 210 \text{ kN/mm}^2$ लें। **(U.P. 2004)**

हल—20 kN के सम्पीडन बल (Compressive Force) से छड़ की लम्बाई में कमी,

$$\Delta l_1 = \frac{F_1 l_1}{AE} = \frac{20 \times 1000 \times 300}{\frac{\pi (30)^2}{4} \times 210 \times 1000}$$

$\therefore$. लम्बाई में कमी $\Delta l_1 = 0{\cdot}04044 \text{ mm}$

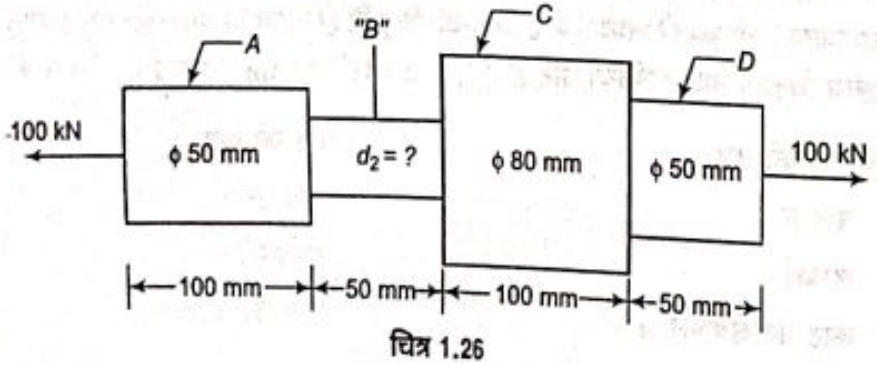
$\because$ अब 8 kN का तनाव लगने पर छड़ की लम्बाई में वृद्धि होगी।

$\therefore$ लम्बाई में वृद्धि $$\Delta l_2 = \frac{F_2 l}{AE} = \frac{8000 \times 300}{\frac{\pi (30)^2}{4} \times 210 \times 1000} = 0{\cdot}0162$$

$\therefore$ अत: लम्बाई में अन्तर (दबने तथा खिचने के बाद बीच का गैप)

$$= \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0{\cdot}04044 + 0{\cdot}0162 = \mathbf{0{\cdot}0566 \text{ mm}}$$ उत्तर

उदाहरण 12. चित्र 1.26 में दिखायी गई छड़ पर 100 kN का भार लगा है। छड़ के 'B' भाग का व्यास ज्ञात कीजिये यदि वहाँ उत्पन्न प्रतिबल का मान 100 MPa से ज्यादा न हो। छड़ की कुल लम्बाई में वृद्धि भी ज्ञात कीजिये। $E = 200 \text{ GPa}$ है। **(U.K. 2012)**



चित्र 1.26

Scanned with CamScanner

हल—माना भाग B का व्यास d_2 है। इस भाग में प्रतिबल $p_B = 100$ MPa है।

$\therefore$ प्रतिबल $\quad p_B = \dfrac{F}{\text{area}}$ या $\quad 100 = \dfrac{100 \times 1000}{\pi d_2^{\,2}/4}$

$\therefore$ B का व्यास $\quad d_2 = \sqrt{1273 \cdot 88} = 35 \cdot 69 \approx \mathbf{35 \cdot 7\ mm}$ उत्तर

$\therefore$ छड़ की लम्बाई में कुल वृद्धि $(\Delta l) = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4$

$\therefore$
$$\Delta l = \frac{F}{E}\left[\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} + \frac{l_3}{A_3} + \frac{l_4}{A_4}\right]$$

$$= \frac{100 \times 1000}{2 \times 10^5}\left[\frac{100}{\pi\,(50)^2/4} + \frac{50}{\pi\,(35 \cdot 69)^2/4} + \frac{100}{\pi\,(80)^2/4} + \frac{50}{\pi\,(50)^2/4}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{\pi}\left[\frac{100}{2500} + \frac{50}{1273 \cdot 77} + \frac{100}{6400} + \frac{1}{50}\right]$$

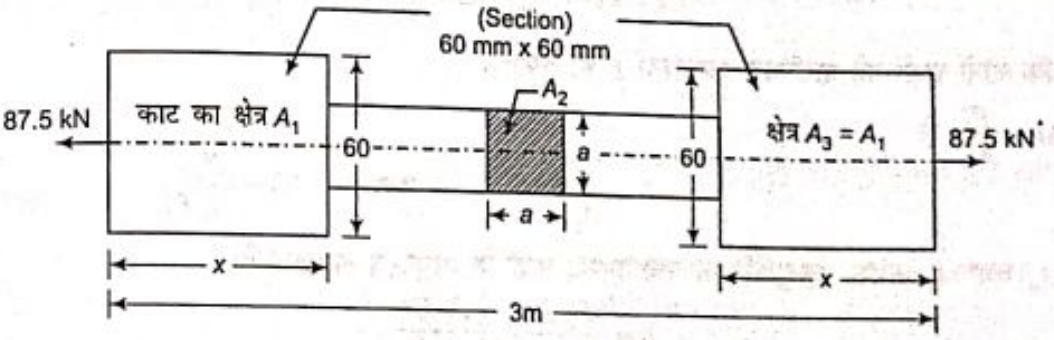
$$= \mathbf{0 \cdot 07317\,mm}$$ उत्तर

उदाहरण 13. चित्र 1.27 में एक तान छड़ दिखाई गई है जिसके दोनों सिरे वर्गाकार काट के हैं। यदि छड़ का मध्य भाग भी वर्गाकार काट (Sq. section) का हो तो मध्य भाग (middle part) की लम्बाई तथा मध्य भाग के काट की माप (Size of section of middle) ज्ञात कीजिये जबकि मध्य भाग में प्रतिबल 140 MN / m^2 तथा छड़ की लम्बाई में कुल वृद्धि 1·4 mm है। E = 200 GN/m^2 मानिये। [U.K. 2010, 2012 (W), 2013 (S), U.K. 2013 (W)]

हल—

$\because$ प्रतिबल, $\quad p = \dfrac{F}{A_2}$ या $\quad A_2 = \dfrac{87 \cdot 5 \times 1000}{140}$

$\therefore$ $\quad A_2 = a \times a = 625$ या $\quad \boxed{a = 25\ \text{mm}}$ उत्तर



चित्र 1.27

$\because$ लम्बाई में कुल परिवर्तन (Total change in length of Bar)

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 \qquad [\text{परन्तु } \Delta l_1 = \Delta l_3 \text{ होगा}]$$

$$= 2\Delta l_1 + \Delta l_2$$

$$= \frac{F}{E}\left[2 \times \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2}\right]$$

$$1 \cdot 4 = \frac{87 \cdot 5 \times 1000}{2 \times 10^5} \times \left[2 \times \frac{x}{60 \times 60} + \frac{3000 - 2x}{625}\right]$$

Scanned with CamScanner

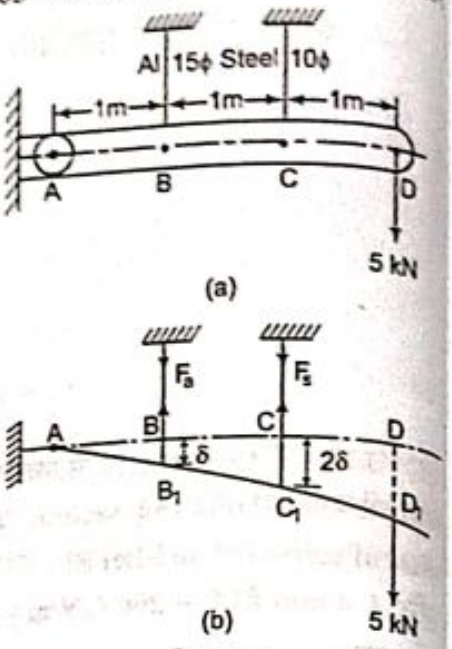
या $$3{\cdot}2 = \frac{x}{30\times60} + \frac{3000-2x}{625} = \frac{25x + 216000 - 144x}{45000}$$

या $$144000 = -119x + 216000 \text{ या } x = 605{\cdot}04 \text{ mm} = 0{\cdot}605 \text{ m}$$

$\therefore$ छड़ के बीच के भार की लम्बाई $= 3 - 2x = 3 - 2\times0{\cdot}605 = 1{\cdot}79$ metre

उदाहरण 14. एक दृढ़ (rigid) छड़ $ABCD$ सिरे A पर हिंज की गई है तथा बिन्दुओं B एवं C पर दो समान लम्बाई की छड़ों द्वारा आधारित है जैसा कि चित्र 1.28 (a) में दिखाया गया है। एल्युमीनियम की छड़ का व्यास 15 mm तथा इस्पात की छड़ का व्यास 10 mm है। जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, इनके सिरे D पर 5 kN का भार लगाया गया है। एल्युमीनियम तथा इस्पात की छड़ों में उत्पन्न प्रतिबल एवं विकृति का मान ज्ञात कीजिये। $E_s = 2\times10^5$ N/mm^2 तथा $E = 1{\cdot}25\times10^5$ N/mm^2 मान लीजिये।

(UP 2000)



चित्र 1.28

हल—$ABCD$ छड़ दृढ़ (rigid) होने के कारण मुड़ेगी नहीं, बल्कि चित्र 1.28 (b) की भाँति $AB_1C_1D_1$ स्थिति पर नत (inclined) हो जायेगी और एल्युमीनियम तथा इस्पात की छड़ें प्रत्यास्थ होने के कारण क्रमशः BB_1 तथा CC_1 से खिंच जायेंगी।

माना कि एल्युमीनियम तथा इस्पात छड़ों में खिंचाव बल क्रमशः F_a तथा F_s है।

अब समरूप त्रिभुजों ABB_1 तथा ACC_1 से,

$$\frac{CC_1}{AC} = \frac{BB_1}{AB}$$

यदि $BB_1 = \delta$ है, तब

$$CC_1 = \delta \times \frac{AC}{AB} = \delta \times \frac{2}{1} = 2\delta$$

माना कि दोनों छड़ों की प्रारम्भिक लम्बाइयाँ L हैं, तब

सूत्र $\Delta l = \frac{Fl}{AE}$ से,

$$\delta = \frac{F_a L}{A_a E_a} \qquad \text{तथा} \qquad 2\delta = \frac{F_s L}{A_s E_s}$$

जहाँ A_a तथा A_s क्रमशः एल्युमीनियम तथा इस्पात छड़ों के अनुप्रस्थ क्षेत्रफल हैं।

फिर, $$\delta = \frac{F_a L}{A_a E_a} = \frac{F_s L}{2 A_s E_s}$$

या $$\frac{F_a}{F_s} = \frac{A_a E_a}{2 A_s E_s}$$

$$= \frac{\pi}{4}\times15^2\times1{\cdot}25\times10^5\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{\pi}\times\frac{1}{10^2\times2\times10^5}$$

$\therefore$ $$F_a = 0{\cdot}703\, F_s \qquad \ldots (1)$$

अब दृढ़ छड़ के संतुलन के लिये इस पर सभी बलों का A पर आघूर्ण लेने से,

$$F_a \times 1 + F_s \times 2 = 5 \times 3$$

Scanned with CamScanner

या $0 \cdot 703 F_s + 2 F_s = 15$

$\therefore$ $F_s = 5 \cdot 549 \text{ kN} = 5549 \text{ N}$

तथा $F_a = 3 \cdot 901 \text{ kN} = 3901 \text{ N}$

अब, एल्युमीनियम में प्रतिबल, σ_a या $p_a = \dfrac{F_a}{A_a} = \dfrac{3901 \times 4}{\pi \times 15^2} = 22 \cdot 075 \text{ N/mm}^2$ उत्तर

फिर इस्पात में प्रतिबल, σ_s या $p_s = \dfrac{F_s}{A_s} = \dfrac{5549 \times 4}{\pi \times 10^2} = 70 \cdot 652 \text{ N/mm}^2$ उत्तर

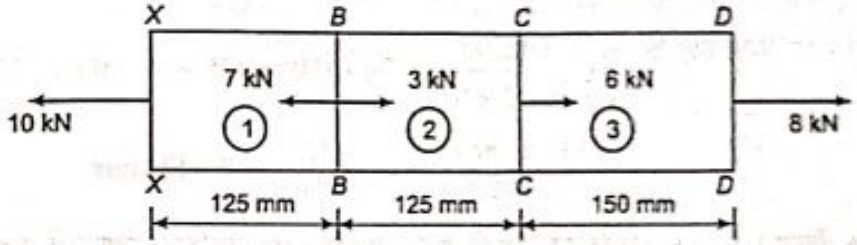
एल्युमीनियम में विकृति, $e_a = \dfrac{p_a}{E_a} = \dfrac{22 \cdot 075}{1 \cdot 25 \times 10^5} = 0 \cdot 1766 \times 10^{-3}$

उत्तर

तथा इस्पात में विकृति, $e_s = \dfrac{p_s}{E_s} = \dfrac{70 \cdot 652}{2 \times 10^5} = 0 \cdot 3532 \times 10^{-3}$

उत्तर

उदाहरण 15. 40 mm व्यास तथा 400 mm लम्बाई की एक छड़ पर चित्र 1.29 (अ) के अनुसार बल लग रहे हैं। $E = 2 \times 10^5 \text{N/mm}^2$ है तो छड़ की लम्बाई में कुल परिवर्तन ज्ञात कीजिये।



चित्र 1.29 (अ)

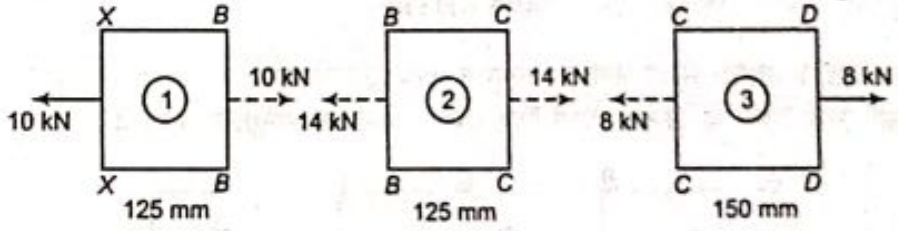
हल—छड़ की काट का क्षेत्रफल

$$A = \frac{\pi (40)^2}{4} = 400 \pi \text{ mm}^2$$

इस प्रकार के प्रश्नों में सर्वप्रथम छड़ के अलग-अलग भागों का सन्तुलन देखकर उन पर लगने वाले बल ज्ञात करते हैं।

छड़ के भाग X—B के लिये :

दिये गये चित्र 1.29 (ब) के अनुसार X—X पर 10 kN का तनाव बायीं ओर लगा रहा है। इसलिये इस भाग के सन्तुलन के लिए भाग B—B पर 10 kN का तनाव बल दायीं ओर लगाते हैं जिससे भाग X—B सन्तुलन में हो जाता है।



चित्र 1.29 (ब)

छड़ के भाग B—C के लिये :

B—B, भाग X—B तथा B—C दोनों में समान है और संयुक्त भाग B—B पर पहले से ही 3 kN का बल दायीं ओर लग रहा था। परन्तु हम 3 kN के बदले दायीं ओर 10 kN का बल भाग (1) के B—B पर लगा चुके हैं जिससे स्पष्ट है कि हम

Scanned with CamScanner

7 kN का बल दायीं ओर अधिक लगा चुके हैं। अत: इसे सन्तुलित करने के लिये भाग (2) के B—B पर बायीं ओर 7 kN का बल लगाना होगा परन्तु संयुक्त चित्र मे B—B पर बायी ओर 7 kN का बल पहले से ही लगा है। अत: भाग (2) के B— पर बायी ओर 7 + 7 = 14 kN का बल लगाते हैं। इसे सन्तुलित करने के लिए भाग (2) के C—C पर दायी ओर 14 kN का बल लगाते हैं। परन्तु संयुक्त चित्र मे C—C पर दायी ओर 6 kN का बल लगा है जिससे स्पष्ट है कि C—C पर दायीं ओर 14 −6 = 8 kN का बल अधिक लग चुका है। अब इसे सन्तुलित करने के लिये भाग C—D के बायें तथा दायें सिरों C—C तथा D—D पर भी 8 kN का तनाव बल लगाना पड़ेगा। इस प्रकार हम देखते हैं कि अब छड़ का प्रत्येक भाग सन्तुलन में है और सभी भागों को जोड़ने पर संयुक्त चित्र जैसी छड़ प्राप्त हो जाती है। प्रश्न के ठीक होने की जाँच करने के लिये सबसे पहले संयुक्त चित्र मे ही देख सकते हैं कि पूरी छड़ निम्न प्रकार सन्तुलन में है। **(अर्थात् दायीं ओर लगे बलों का योग = बायीं ओर लगे बलों का योग होना चाहिए।)**

अत: छड़ पर बायी ओर की दिशा मे लगने वाले बल $= 10 + 14 + 8 = 32$ kN

इसी प्रकार छड़ पर दायी ओर लगने वाले बल $= 10 + 14 + 8 = 32$ kN

अब कुल लम्बाई मे परिवर्तन,

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$$

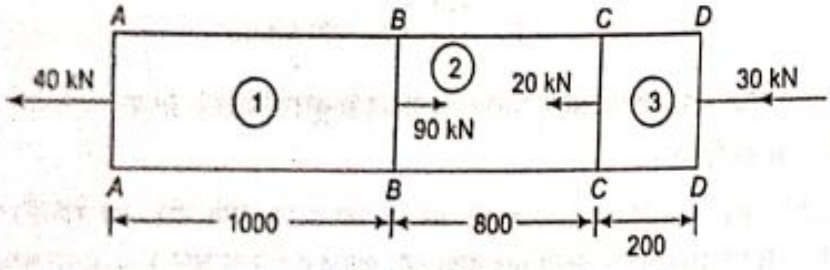
या
$$\Delta l = \frac{F_1 l_1}{AE} + \frac{F_2 l_2}{AE} + \frac{F_3 l_3}{AE}$$

$$= \frac{1}{AE}[F_1 l_1 + F_2 l_2 + F_3 l_3]$$

$$= \frac{1}{400\pi \times 2 \times 10^5} \times [10 \times 1000 \times 125 + 14 \times 1000 \times 125 + 8000 \times 150]$$

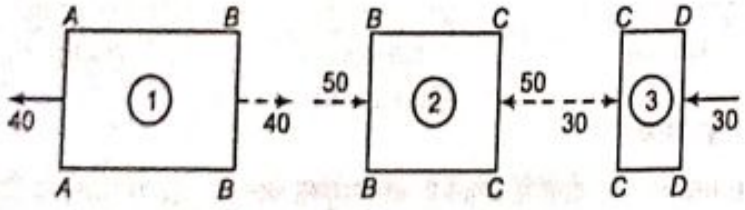
$$= \frac{1250 + 1750 + 120}{80000\pi} = \frac{3120}{80000\pi} = 0{\cdot}0124 \text{ mm}$$ उत्तर

****उदाहरण 16. चित्र 1.30 (अ) में दिखायी गयी इस्पात की एक छड़ पर भिन्न दिशाओं में बल लग रहे हैं। यदि छड़ का व्यास 30 mm हो और इस्पात के लिये $E = 2{\cdot}0 \times 10^5$ N/mm^2 तो छड़ की लम्बाई में परिवर्तन ज्ञात कीजिये तथा बताइये कि छड़ की कुल लम्बाई में वृद्धि होगी या कमी?** (U.K. 2010)



चित्र 1.30 (अ)

हल—सर्वप्रथम छड़ के अलग-अलग भागों का सन्तुलन करके उन पर लगने वाले बल ज्ञात करते हैं जिसके लिए चित्र 1.30 (ब) के अनुसार सभी भागों के अलग-अलग चित्र बनाकर बलों को सन्तुलित करते हैं।



चित्र 1.30 (ब)

Scanned with CamScanner

छड़ के भाग A—B के लिये,

काट ($A—A$) पर 40 kN का खिंचाव बल लग रहा है इसलिए इसके सन्तुलन के लिये ($B—B$) पर भी 40 kN का खिंचाव बल दायीं ओर लगना चाहिये जिससे $A—B$ सन्तुलन में हो जाता है।

छड़ के भाग B—C के लिये,

इसके बायीं ओर के सिरे $B—B$ पर दायीं ओर बल $(90 - 40) = 50$ kN लगना चाहिये। फिर इस भाग के सन्तुलन के लिये इस भाग के दूसरे सिरे ($C—C$) पर भी 50 kN का दबाव बल लगाना होगा।

छड़ के भाग C—D के लिये,

इस भाग $C—D$ के सिरे ($C—C$) पर बायीं ओर 20 kN का बल दिया था और 50 kN का बल उसी दिशा में हम प्रयोग कर चुके हैं। अत: हमने बायीं ओर $50 - 20 = 30$ kN बल अधिक प्रयोग किया जिसे सन्तुलित करने के लिये दायीं ओर 30 kN का बल $C—C$ पर लगाना होगा जिसके कारण $C—D$ भाग को सन्तुलित करने के लिये इसके दायें सिरे $D—D$ पर भी 30 kN का बल, $C—C$ पर लगे बल के विपरीत दिशा में सम्पीडन का लगाना होगा।

इस प्रकार हम देखते हैं कि छड़ का प्रत्येक भाग सन्तुलन में हो चुका है। सन्तुलन के परीक्षण के लिये हम चित्र में देख सकते हैं कि :

छड़ पर बायीं ओर की दिशा में लगे हुए बल $= 40 + 20 + 30 = 90$ kN

इसी प्रकार दायीं ओर लगने वाला बल $= 90$ kN है।

विशेष : छड़ के जिन भागों पर तनाव बल लगे हैं (जैसे भाग AB पर) उन्हें (+ve) तथा जिन पर सम्पीडन बल लगे हैं (जैसे BC तथा CD भाग) उन्हें (–ve) चिह्न का प्रयोग कर कुल लम्बाई में परिवर्तन को ज्ञात करते हैं।

∴ **कुल लम्बाई में परिवर्तन**

$$\Delta l = \Delta l_1 - \Delta l_2 - \Delta l_3 \qquad \left[\because \Delta l = \frac{Fl}{AE}\right]$$

$$= \frac{1}{AE}[F_1 l_1 - F_2 l_2 - F_3 l_3]$$

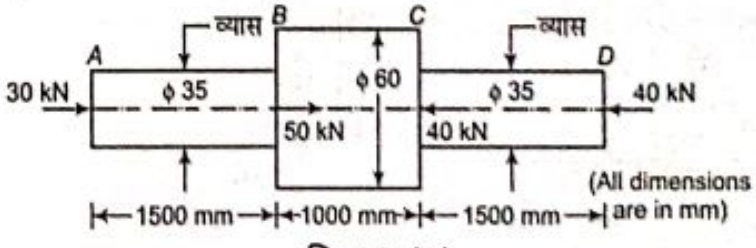
$$= \frac{1}{\frac{\pi (30)^2}{4} \times 2 \times 10^5} \times [40 \times 1000 \times 1000 - 50 \times 1000 \times 800 - 30 \times 1000 \times 200]$$

$$= \frac{4}{\pi \times 900 \times 2} \times [400 - 400 - 60]$$

$$= \frac{4 \times 60}{1800\,\pi} = -0{\cdot}0424 \text{ mm}$$ **उत्तर**

∵ छड़ की लम्बाई में वृद्धि को धन (+ve) तथा कमी को ऋण (–ve) माना जाता है। अत: प्राप्त उत्तर (–ve) होने के कारण छड़ की लम्बाई में **0·024 mm** की कमी होगी।

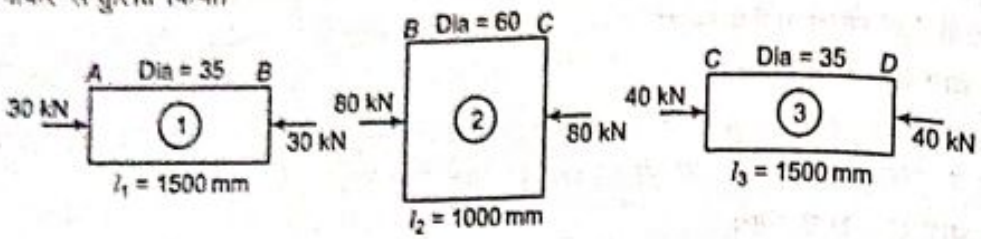
उदाहरण 17. एक स्टैण्ड छड़ पर चित्र 1.31 (अ) के अनुसार बल लगे हैं। छड़ की पूर्ण लम्बाई में परिवर्तन ज्ञात कीजिये। $E = 200$ GPa है। **(U.K. 2007, S)**



चित्र 1.31 (अ)

Scanned with CamScanner

हल— चित्र 1.31 (ब) में तीनों भागों *AB*, *BC* तथा *CD* को अलग-अलग बनाकर पिछले उदाहरण 15 व 16 की भाँति बल लगाकर सन्तुलित किया।



चित्र 1.31 (ब)

∴ कुल $\Delta l = -\Delta l_1 - \Delta l_2 - \Delta l_3$ [∵ तीनों पर सम्पीडन बल है, ∴ लम्बाई में कमी होगी।]

$$= -\left[\frac{30\times1000\times1500}{\frac{\pi(35)^2}{4}\times200\times10^3} + \frac{80\times1000\times1000}{\frac{\pi(60)^2}{4}\times2\times10^5} + \frac{40\times1000\times1500}{\frac{\pi(35)^2}{4}\times2\times10^5}\right]$$

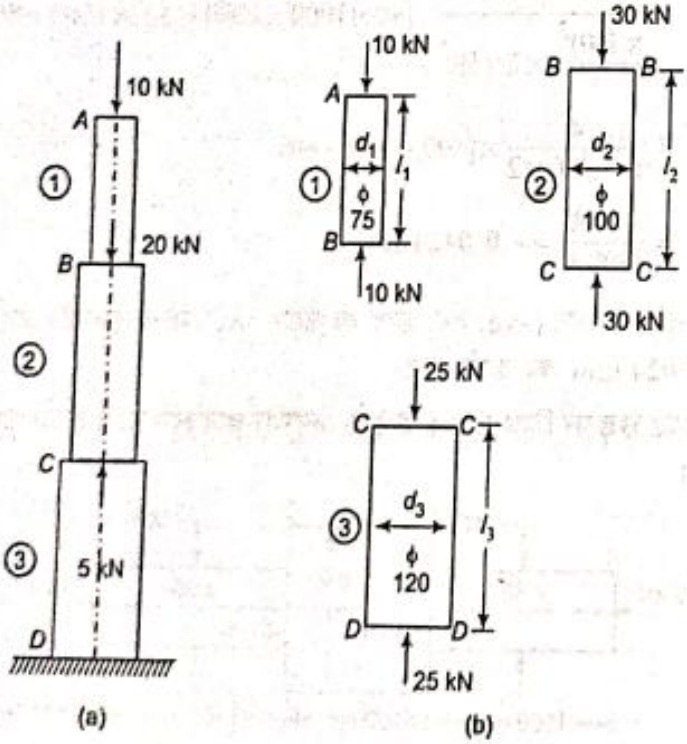
$$= -[0{\cdot}234 + 0{\cdot}1415 + 0{\cdot}312]$$

$$= -0{\cdot}6875 \text{ mm}$$

∴ दी गई छड़ पर बलों के प्रभाव में लम्बाई में **0·6875 mm** की कमी होगी।

उत्तर

उदाहरण 18. चित्र 1.32 (a) में एक छोटे सोपानी दंड (Stepped Rod) को दर्शाया गया है जिस पर अक्षीय भार लगाया गया है। *AB*, *BC* तथा *CD* खंडों के व्यास क्रमशः 75 mm, 100 mm तथा 150 mm जबकि उनकी लंबाइयाँ क्रमशः 100 mm, 150 mm तथा 200 mm हैं। इस दंड में अधिकतम प्रतिबल तथा कुल लम्बाई में कमी ज्ञात कीजिए। $E = 200 \times 10^3$ N/mm^2 मान लीजिए। **(UP 2012)**



चित्र 1.32

Scanned with CamScanner

हल—दिया है: AB लम्बाई $l_1 = 100$ mm में व्यास (dia) $d_1 = 75$ mm

BC लम्बाई $l_2 = 150$ mm में व्यास (dia) $d_2 = 100$ mm

CD लम्बाई $l_3 = 200$ mm में व्यास (dia) $d_3 = 150$ mm

चित्र 1.32 (a) के भागों (Parts) को चित्र 1.32 (b) के अनुसार अलग-अलग बनाकर बलों (Forces) को लगाकर सन्तुलित किया।

(1) पहले भाग AB में प्रतिबल (Stress) $$p_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{10 \times 1000}{\pi (75)^2 / 4}$$

$$\therefore \quad p_1^{AB} = 2{\cdot}265 \text{ N/mm}^2$$

(2) दूसरे भाग BC में प्रतिबल $$p_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{30 \times 1000}{\pi (100)^2 / 4}$$

$$\therefore \quad p_2^{BC} = 3{\cdot}822 \text{ N/mm}^2$$

(3) तीसरे भाग CD में प्रतिबल $$p_3 = \frac{F_3}{A_3} = \frac{25000\text{N}}{\pi (150)^2 / 4}$$

$$\therefore \quad p_3^{CD} = 1{\cdot}415 \text{ N/mm}^2$$

अत: छड़ के तीनों भागों में से बीच के भाग BC में प्रतिबल अधिकतम (max. stress) है जो कि $3{\cdot}822 \text{ N/mm}^2$ है।

(4) अब संयुक्त छड़ की लम्बाई में कुल कमी

$$\Delta l = \frac{1}{E}\left[\frac{F_1 l_1}{A_1} + \frac{F_2 l_2}{A_2} + \frac{F_3 l_3}{A_3}\right] \text{ सूत्र से}$$

$$= \frac{1}{2 \times 10^5}\left[\frac{100 \times 1000 \times 100}{\pi (75)^2 / 4} + \frac{30 \times 1000 \times 150}{\pi (100)^2 / 4} + \frac{25 \times 1000 \times 200}{\pi (15)^2 / 4}\right]$$

$$= \frac{10^5 \times 4}{\pi \times 2 \times 10^5}\left[\frac{10}{(75)^2} + \frac{45}{(100)^2} + \frac{50}{(15)^2}\right]$$

$$\Delta l = \frac{2}{\pi}[0{\cdot}2285] = 0{\cdot}1455 \text{ mm}$$

∴ छड़ की लम्बाई में कुल कमी = **0·1455 mm** उत्तर

विशेष : पार्श्व विकृति तथा पॉइजन अनुपात पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 19. (A) एक मृदु इस्पात की छड़ पर जिसका व्यास 1 सेमी है, 22 kN का भार लगाये जाने से उसके व्यास में 0·0004 सेमी का परिवर्तन हो जाता है। यदि $E = 200 \text{ GN/m}^2$ हो तो पॉइजन अनुपात ज्ञात करें।

हल—∵ व्यास $d = 1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$

भार या बल $F = 22 \text{ kN} = 22 \times 1000 \text{ N}$

व्यास में परिवर्तन Δd (या δd) $= 0{\cdot}0004 \text{ cm} = 0{\cdot}004 \text{ mm}$

Scanned with CamScanner

$$E = 200\ \text{GN/m}^2 = 200 \times 1000\ \text{N/mm}^2$$

विकृति, $$e = \frac{p}{E} = \frac{F}{AE} = \frac{22 \times 1000 \times 4}{\pi\,(10)^2 \times 2 \times 10^5} = 1{\cdot}4 \times 10^{-3}$$

अब सूत्र $\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{m} \times e$ द्वारा,

$$\frac{0{\cdot}004}{10} = \frac{1}{m} \times 1{\cdot}4 \times 10^{-3}$$

या $$\frac{1}{m} = \frac{0{\cdot}004}{10 \times 1{\cdot}4 \times 10^{-3}}$$

∴ पॉइजन अनुपात, $$\frac{1}{m} = 0{\cdot}2856$$ उत्तर

***उदाहरण 19. (B) 20 mm व्यास की एक वृत्ताकार अनुप्रस्थ काट तथा 3 मीटर लम्बाई की एक ऊर्ध्वाधर तांबे की छड़ पर 150 kN का तनाव बल लगा है। यदि पॉइजन अनुपात 0·25 तथा $E = 0{\cdot}9 \times 10^5$ N/mm² हो तो व्यास में कमी की गणना कीजिये।**

हल—काट का क्षेत्रफल $$A = \frac{\pi\,(20)^2}{4} = 314{\cdot}16\ \text{mm}^2$$

लम्बाई $$l = 3000\ \text{mm}$$

बल $$F = 150\ \text{kN} = 150 \times 1000\ \text{N}$$

पॉइजन अनुपात, $$\frac{1}{m} = 0{\cdot}25,\ E = 0{\cdot}9 \times 10^5\ \text{N/mm}^2$$

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{m} \times e$$ सूत्र द्वारा $\left(\text{जहाँ } e = \frac{p}{E} = \frac{F}{AE}\right)$

व्यास में कमी $$\Delta d = 20 \times 0{\cdot}25 \times \frac{150 \times 1000}{314{\cdot}16 \times 0{\cdot}9 \times 10^5}$$

$$= 0{\cdot}0265\ \text{mm}$$ उत्तर

उदाहरण 20. एक 20 mm व्यास की धातु की छड़ पर 5 kN का अक्षीय भार लगाया जाता है। इसके 50 mm लम्बाई में उत्पन्न दैर्ध्यवृद्धि 220 μm है। यदि छड़ के पद का पॉइजन अनुपात (Poisson's Ratio) 0·28 है, तब ज्ञात कीजिये :

(i) छड़ के व्यास में उत्पन्न कमी, तथा

(ii) छड़ के पदार्थ का दृढ़ता मापांक (G)। **(U.P. 2011)**

हल— दिया है, $\Delta l = 220\,\mu\text{m} = 220 \times 10^{-3}$ mm, $d = 20$ mm

पॉइजन अनुपात = 0·28, बल $F = 5$ kN = 5000 N और $l = 50$ mm

अनुदैर्ध्य विकृति $$(e) = \frac{\Delta l}{l} = \frac{220 \times 10^{-3}}{50} = 4{\cdot}4 \times 10^{-3}$$

पार्श्व विकृति (Lateral Strain) ⇒ $\frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{m} \times e$ सूत्र से

∴ व्यास में कमी $$\Delta d = d \times \frac{1}{m} \times e$$

$$= 20 \times 0{\cdot}28 \times 4{\cdot}4 \times 10^{-3}$$

Scanned with CamScanner

$= 0 \cdot 02464$ mm उत्तर

अब सूत्र $\Delta l = \frac{Fl}{AE}$ से $E = \frac{5000 \times 50}{220 \times 10^{-3} \times \pi (20)^{2/4}} = 3618 \cdot 99$

$\therefore$ $E = 0 \cdot 362 \times 10^4$ N/mm^2

अब सूत्र $E = 2G\left[1 + \frac{1}{m}\right]$ से,

$$0 \cdot 362 \times 10^4 = 2 \times G \times 1 \cdot 28$$

या $G = 1413 \cdot 6689$

या $G = 1 \cdot 41 \times 10^3$ N/mm^2 उत्तर

उदाहरण 21. इस्पात (Steel) की एक छड़ 5 m लम्बी, 20 cm चौड़ी तथा 10 cm मोटी है। 400 kN के बल से इसे लम्बाई में खींचा जाता है। यदि इस्पात के लिये पॉइजन अनुपात 0·28, E = 200 GPa हो तो छड़ की लम्बाई में वृद्धि, चौड़ाई एवं मोटाई में कमी तथा आयतन में परिवर्तन ज्ञात कीजिये तथा बताइये कि आयतन में वृद्धि होती है या कमी ?

(U.K. 2004)

हल—$E = 200$ GPa $= 200$ kN/mm^2 $= 2 \times 10^5$ N/mm^2

$l = 5$ m $= 5000$ mm

$b = 20$ cm $= 200$ mm, $t = 10$ cm $= 100$ mm

$A = 200 \times 100 = 2 \times 10^4$ mm^2

$F = 400$ kN $= 4 \times 10^5$ N

छड़ का आरम्भिक आयतन,

$$V = 5000 \times 200 \times 100 = 1 \times 10^8 \text{ mm}^3$$

छड़ में उत्पन्न प्रतिबल (Stress), $f = \frac{F}{A} = \frac{4 \times 10^5}{2 \times 10^4} = 20$ N/mm^2

क्योंकि $E = \frac{f}{e}$

$\therefore$ लम्बाई में विकृति, $e = \frac{f}{E} = \frac{20}{2 \times 10^5} = 1 \times 10^{-4}$

क्योंकि $e = \frac{\Delta l}{l}$

$\therefore$ $\Delta l = e.l$

$\therefore$ लम्बाई में वृद्धि, $\Delta l = 1 \times 10^{-4} \times 5000 = 0 \cdot 5$ mm

अब, पार्श्व विकृति $= \frac{e}{m} = 10^{-4} \times 0 \cdot 28 = 2 \cdot 8 \times 10^{-5}$

अत: पार्श्व विकृति $\frac{e}{m} = \frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta b}{b} = 2 \cdot 8 \times 10^{-5}$

$\therefore$ चौड़ाई में कमी $\Delta b = 2 \cdot 8 \times 10^{-5} \times b$

Scanned with CamScanner

$= 2{\cdot}8 \times 10^{-5} \times 200 = 5{\cdot}6 \times 10^{-3}$ mm

मोटाई में कमी, $\Delta t = 2{\cdot}8 \times 10^{-5} \times t$

$= 2{\cdot}8 \times 10^{-5} \times 100 = 2{\cdot}8 \times 10^{-3}$

हम जानते है कि आयतन विकृति,

$$e_v = \frac{\Delta V}{V} = e\left(1 - \frac{2}{m}\right)$$

$$= 10^{-4}\,(1 - 2 \times 0{\cdot}28)$$

$$= 10^{-4} \times 0{\cdot}44 = 4{\cdot}4 \times 10^{-5}$$

∴ आयतन में परिवर्तन, $\Delta V = 4{\cdot}4 \times 10^{-5} \times V$

$= 4{\cdot}4 \times 10^{-5} \times 10^{8}$

$= 4{\cdot}4 \times 10^{3}$ mm^3

क्योंकि यह मान धन (+ve) है इसलिये यह आयतन में वृद्धि है।

उदाहरण 22. धातु के एक बेलन की लम्बाई 600 mm तथा व्यास 300 mm है। इसे लम्बाई में 200 kN के बल द्वारा दबाया जाता है। यदि बेलन की लम्बाई में 0·03 mm की कमी और आयतन में 10^3 mm की कमी हुई हो तो धातु के लिये प्रतिबल, पॉइजन अनुपात तथा E के मान ज्ञात कीजिये। बेलन के व्यास में वृद्धि की भी गणना कीजिये।

हल—$l = 600$ mm, $d = 300$ mm, $F = 200$ kN $= 2 \times 10^5$ N, $\Delta l = 0{\cdot}03$ mm, $\Delta V = 10^3$ mm^3

बेलन की काट का क्षेत्रफल, $A = \frac{\pi}{4} \times d^2 = \frac{\pi}{4} \times 300^2 = 70650$ mm^2

अब बेलन की लम्बाई में विकृति, $e = \frac{\Delta l}{l}$

$$e = \frac{0{\cdot}03}{600} = 5 \times 10^{-5}$$

बेलन में प्रतिबल (Stress) $f = \frac{F}{A} = \frac{2 \times 10^5}{70650} = 2{\cdot}83$ N/mm^2

∴ यंग मापांक, $E = \frac{f}{e} = \frac{2{\cdot}83}{5 \times 10^{-5}} = 56600 = 0{\cdot}566 \times 10^5$ N/ mm^2

बेलन का आरम्भ में आयतन $V = \frac{\pi}{4} \times 300^2 \times 600$

$= 4{\cdot}2408 \times 10^7$ mm^3

बेलन में आयतन विकृति, $\frac{\delta V}{V} = e\left(1 - \frac{2}{m}\right)$ सूत्र से

∴ बेलन के आयतन में कमी, $\delta V = e \times V\left(1 - \frac{2}{m}\right)$

∴ मान रखने पर, $10^3 = 5 \times 10^{-5} \times 4{\cdot}2408 \times 10^7\left(1 - \frac{2}{m}\right)$

Scanned with CamScanner

$$\left(1-\frac{2}{m}\right)=0\cdot472$$

या $$\frac{2}{m}=0\cdot528$$

∴ पॉइजन अनुपात, $$\boxed{\frac{1}{m}=0\cdot264\approx0\cdot3}$$ उत्तर

अब $\boxed{\frac{\Delta d}{d}=\frac{1}{m}e}$ सूत्र से

व्यास में कमी, $$\Delta d=d\times\frac{1}{m}\times e$$

∴ $$\Delta d=300\times0\cdot264\times5\times10^{-5}=3\cdot96\times10^{-3}\text{ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 23. 40 mm × 30 mm की आयताकार काट की 0·5 मीटर लम्बी एक छड़ पर 12 T का अक्षीय सम्पीडन बल लगा है। छड़ की मापों में परिवर्तन की गणना कीजिए। मानिये $m = 4$ तथा $E = 2\times10^6$ kg/cm^2 है।

हल—छड़ की लम्बाई $l = 0\cdot5$ m $= 50$ cm

छड़ की काट की चौड़ाई $b = 40$ mm $= 4$ cm

छड़ की काट की मोटाई $t = 30$ mm $= 3$ cm

अक्षीय सम्पीडन बल $F = 12\,T = 12000\,kg_f$

∴ लम्बाई में परिवर्तन,

$$\Delta l=\frac{Fl}{AE}=\frac{12000\times50}{(4\times3)\times2\times10^6}=0\cdot025\text{ cm}$$

या $\Delta l = 0\cdot25$ mm (सम्पीडन बल के कारण कमी होगी) उत्तर

∵ पार्श्व विकृति, $\frac{\Delta b}{b}=\frac{\Delta t}{t}=\frac{1}{m}\times e$ (सूत्र)

∴ $$\Delta b=b\times\frac{1}{m}\times e$$

$$=4\times\frac{1}{4}\times\frac{0\cdot025}{50}=0\cdot0005\text{ cm}$$

अत: काट की चौड़ाई में वृद्धि $\Delta b = 0\cdot005$ mm उत्तर

काट की मोटाई में परिवर्तन, $$\Delta t=t\times\frac{1}{m}\times e$$

$$=3\times\frac{1}{4}\times\frac{0\cdot025}{50}$$

अत: मोटाई में वृद्धि $\Delta t = \cdot000375$ cm

$= 0\cdot00375$ mm उत्तर

**उदाहरण 24. एक 2 मीटर लम्बी छड़ जिसकी अनुप्रस्थ काट 60 mm × 50 mm है, 60 kN का अक्षीय तनाव भार वहन करती है। छड़ की परिवर्तित विमाओं की गणना कीजिए यदि $m = 3\cdot6$ तथा $E = 200$ GPa है।

हल—अक्षीय तनाव प्रतिबल $$f_x=\frac{F}{A}=\frac{60\times1000\text{ N}}{60\times50}=20\text{ N/mm}^2$$

अक्षीय (अनुदैर्ध्य) विकृति, $\boxed{e_x=\frac{\Delta l}{l}=\frac{f_x}{E}}$ (सूत्र)

Scanned with CamScanner

∴ लम्बाई में परिवर्तन $\Delta l = \frac{l \times f_x}{E} = \frac{2000 \times 20}{200 \times 10^3}$

या $\Delta l = 0{\cdot}2 \text{ mm}$

परिवर्तित होने के पश्चात् छड़ की लम्बाई

$$L = l + \Delta l = 2000 + 0{\cdot}2$$
$$= 2000{\cdot}2 \text{ mm} = 2{\cdot}0002 \text{ m}$$

चौड़ाई में परिवर्तन, $\Delta b = b \times \frac{1}{m} \times e$ सूत्र से, $\left[\because \text{पार्श्व विकृति} \left(\frac{\Delta b}{b} \text{ या } \frac{\Delta t}{t} \right) = \frac{1}{m} \times e \right]$

$$\Delta b = 60 \times \frac{1}{3{\cdot}6} \times 1 \times 10^{-4} = 0{\cdot}001666 \text{ mm}$$

∴ परिवर्तित होने के बाद छड़ की कुल चौड़ाई $= b - \Delta b = 60 - {\cdot}001666$

$$= 59{\cdot}9983$$

काट की मोटाई में परिवर्तन, $\Delta t = t \times \frac{1}{m} \times e$ सूत्र से,

∴ $\Delta t = 50 \times \frac{1}{3{\cdot}6} \times 1 \times 10^{-4} = 0{\cdot}0013888 \text{ mm}$

अब परिवर्तित होने के पश्चात् कुल मोटाई $= t - \Delta t = 50 - 0{\cdot}0013888$

$$= 49{\cdot}9986 \text{ mm}$$

**उदाहरण 25. 250 mm लम्बी एक छड़ की अनुप्रस्थ काट 40 mm चौड़ी तथा 30 mm मोटाई की है। इस पर चौड़ाई की दिशा में 180 N/mm^2 का एक सम्पीडन प्रतिबल लगाया गया है। छड़ की मापों में परिवर्तन की गणना कीजिये। मानिए $E = 200 \text{ GN/m}^2$ तथा $m = 4$ है।

हल—$E = 200 \text{ GN/m}^2 = 200 \text{ kN/mm}^2 = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

छड़ में अनुदैर्घ्य विकृति (चौड़ाई की दिशा में) होगी।

∴ $e_b = \frac{P_b}{E} = \frac{180}{2 \times 10^5}$ (सम्पीडन विकृति)

या $e_b = \frac{\Delta b}{b} = \frac{180}{2 \times 10^5}$

या चौड़ाई में कमी, $\Delta b = b \times \frac{180}{2 \times 10^5}$

या $\Delta b = 40 \times \frac{180}{2 \times 10^5}$

$$= 3{\cdot}6 \times 10^{-2} \text{ mm} = 0{\cdot}036 \text{ mm}$$

अब पार्श्व विकृति, $\left(\frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta l}{l} \right) = \frac{1}{m} \times e$ सूत्र द्वारा,

यहाँ (तनाव विकृति होगी)

Scanned with CamScanner

$$\therefore \quad \frac{\Delta t}{t} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{4} \times \frac{180}{2 \times 10^5}$$

अत: मोटाई में वृद्धि

$$\Delta t = 30 \times \frac{1}{4} \times \frac{180}{2 \times 10^5}$$

$$= 0{\cdot}675 \times 10^{-2} \text{ mm} = 0{\cdot}00675 \text{ mm}$$ उत्तर

तथा लम्बाई में वृद्धि

$$\Delta l = 250 \times \frac{1}{4} \times \frac{180}{2 \times 10^5} = 0{\cdot}05625 \text{ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 26. एक आयताकार काट की छड़ की लम्बाई 2 m, चौड़ाई 80 mm तथा गहराई 50 mm है। इस पर क्रमश: लम्बाई की दिशा में तनाव 150 N/mm^2, चौड़ाई की दिशा में 120 N/mm^2 का सम्पीडन तथा गहराई की दिशा में 100 N/mm^2 का तनाव प्रतिबल लगा है। छड़ की विमाओं तथा आयतन में परिवर्तन का मान ज्ञात कीजिए, जबकि : $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2, $\frac{1}{m} = \frac{1}{4}$ है।

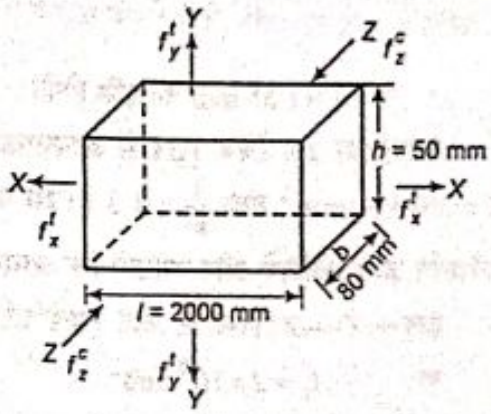
हल—दिया है,

$f_x^t = 150$ N/mm^2 (तनाव प्रतिबल)

$f_y^t = 100$ N/mm^2 (तनाव प्रतिबल)

$f_z^c = 120$ N/mm^2 (सम्पीडन प्रतिबल)

$\frac{1}{m} = \frac{1}{4}$, $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2



चित्र 1.33

x-अक्ष की दिशा में अक्षीय विकृति

$$\therefore \quad e_x = \left(\frac{f_x}{E} - \frac{f_y}{mE} + \frac{f_z}{mE} \right)$$

या $$e_x = \frac{150}{2 \times 10^5} - \frac{100}{4 \times 2 \times 10^5} + \frac{120}{4 \times 2 \times 10^5} = 0{\cdot}000775$$

अब y-अक्ष की दिशा में विकृति

$$e_y = \frac{f_y}{E} - \frac{f_x}{mE} + \frac{f_z}{mE}$$

$$\therefore \quad e_y = \frac{100}{2 \times 10^5} - \frac{150}{4 \times 2 \times 10^5} + \frac{120}{4 \times 2 \times 10^5} = 0{\cdot}0004625$$

तथा z-अक्ष की दिशा में कुल विकृति

$$e_z = -\frac{f_z}{E} - \frac{f_x}{mE} - \frac{f_y}{mE}$$

$$\therefore \quad e_z = -\frac{120}{2 \times 10^5} - \frac{150}{4 \times 2 \times 10^5} - \frac{100}{4 \times 2 \times 10^5} = -0{\cdot}0009125$$

Scanned with CamScanner

∴ आयतन विकृति

$$e_v = e_x + e_y + e_z = \cdot 000775 + \cdot 0004625 - \cdot 0009125$$

या $$\frac{\Delta V}{V} = e_v = 0 \cdot 000325$$

या $$\Delta V = V \times e_v = (2000 \times 80 \times 50) \times \cdot 000325$$

या आयतन में परिवर्तन, $$\Delta V = 2600 \text{ mm}^3$$ उत्तर

अब $$\frac{\Delta b}{b} = e_z$$ या $$\Delta b = b \times e_z = 80 \times (-\cdot 0009125)$$

$$= 0 \cdot 073 \text{ mm (चौड़ाई में कमी)}$$

तथा $$\frac{\Delta h}{h} = e_y$$ या $$\Delta h = h \times e_y = 50 \times 0 \cdot 0004625$$

$$= 0 \cdot 023125 \text{ mm (गहराई में वृद्धि)}$$

∵ $$\frac{\Delta l}{l} = e_x$$ या $$\Delta l = l \times e_x$$

$$= 2000 \times 0 \cdot 000775 = 1 \cdot 55 \text{ mm}$$

∴ लम्बाई में 1·55 mm की वृद्धि होगी। उत्तर

उदाहरण 27. चित्र 1.34 में आयताकार इस्पात का टुकड़ा दिखाया गया है। इसके पदार्थ का यंग मापांक $E = 200 \text{ kN/mm}^2$ तथा $\frac{1}{m} = 0 \cdot 3$ है। इस पर दिखायी गयी दिशाओं में बल कार्य कर रहे हैं। टुकड़े के आयतन में परिवर्तन ज्ञात कीजिये और बताइये कि आयतन में वृद्धि होगी या कमी।

हल—X—X दिशा के लिये टुकड़े की काट का क्षेत्रफल $= 100 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$

या $$A_x = 2 \times 10^4 \text{ mm}^2$$

Y—Y दिशा के लिये टुकड़े की काट का क्षेत्रफल

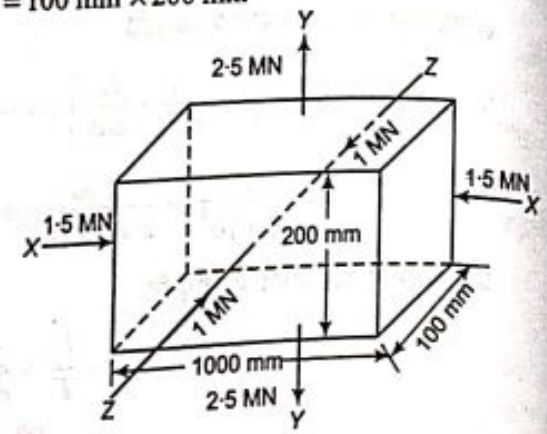
$$= 1000 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$$

या $$A_y = 1 \times 10^5 \text{ mm}^2$$

Z—Z दिशा के लिये टुकड़े की काट का क्षेत्रफल

$$= 1000 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$$

या $$A_z = 2 \times 10^5 \text{ mm}^2$$



चित्र 1.34

1·5 MN के सम्पीडन बल के कारण X—X दिशा में सीधा

प्रतिबल = बल/क्षेत्रफल $\left[\text{Stress} = \frac{\text{Force}}{\text{Area}}\right]$

$$f_x = \frac{1 \cdot 5 \times 10^6}{A_x} = \frac{1 \cdot 5 \times 10^6}{2 \times 10^4} = 75 \text{ N/mm}^2$$

2·5 MN के तनाव बल के कारण Y—Y दिशा में सीधा प्रतिबल

$$f_y = \frac{2 \cdot 5 \times 10^6}{A_y} = \frac{2 \cdot 5 \times 10^6}{1 \times 10^5} = 25 \text{ N/mm}^2$$

1 MN के सम्पीडन बल के कारण Z—Z दिशा में सीधा प्रतिबल

Scanned with CamScanner

$$f_z = \frac{1\times10^6}{A_z} = \frac{1\times10^6}{2\times10^5} = 5\ \text{N/mm}^2$$

प्रश्न के अनुसार $E = 200\ \text{kN/mm}^2 = 2\times10^5\ \text{N/mm}^2$

X—X दिशा में विकृति :

$X—X$ दिशा में f_x के कारण विकृति ऋणात्मक (-ve) होगी क्योंकि बल सम्पीडन (Compression) का है, परन्तु अन्य दिशाओं में यह वृद्धि करेगा।

$\therefore$ f_x के कारण विकृति $= -\frac{f_x}{E} = -\frac{75}{2\times10^5}$

f_y के कारण $X—X$ दिशा में पार्श्व विकृति ऋणात्मक (-ve) होगी क्योंकि बल तनाव (Tension) का है। अत: यह $Y—Y$ दिशा में वृद्धि करेगा, अन्य दिशाओं में कमी।

$\therefore$ f_y के कारण पार्श्व विकृति $= -\frac{f_y}{mE} = -\frac{25\times0{\cdot}3}{2\times10^5}$

f_z के कारण $X—X$ दिशा में पार्श्व विकृति धनात्मक (+ve) होगी क्योंकि बल सम्पीडन में है। अत: यह $Z—Z$ दिशा में विकृति को घटायेगा तथा अन्य दिशाओं में वृद्धि करेगा।

$\therefore$ f_z के कारण पार्श्व विकृति $= \frac{f_z}{mE} = \frac{5\times0{\cdot}3}{2\times10^5}$

$\therefore$ कुल विकृति, $$e_x = -\frac{f_x}{E} - \frac{f_y}{mE} + \frac{f_z}{mE}$$

$$= -\frac{75}{2\times10^5} - \frac{25\times0{\cdot}3}{2\times10^5} + \frac{5\times0{\cdot}3}{2\times10^5} = -\frac{0{\cdot}81}{2\times10^3}$$

Y—Y दिशा में विकृति :

ऊपर दिये गये विवरण के आधार पर,

$$e_y = \frac{f_y}{E} + \frac{f_x}{mE} + \frac{f_x}{mE}$$

$$= \frac{25}{2\times10^5} + \frac{5\times0{\cdot}3}{2\times10^5} + \frac{75\times0{\cdot}3}{2\times10^5} = \frac{0{\cdot}49}{2\times10^3}$$

Z—Z दिशा में विकृति :

$$e_z = \frac{f_z}{E} - \frac{f_y}{mE} + \frac{f_x}{mE}$$

$$= -\frac{5}{2\times10^5} - \frac{25\times0{\cdot}3}{2\times10^5} + \frac{75\times0{\cdot}3}{2\times10^5} = \frac{0{\cdot}1}{2\times10^3}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = e_x + e_y + e_z \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$= -\frac{0{\cdot}81}{2\times10^3} + \frac{0{\cdot}49}{2\times10^3} + \frac{0{\cdot}1}{2\times10^3} = -\frac{0{\cdot}22}{2\times10^3}$$

अत: आयतन में परिवर्तन $\Delta V = -\frac{0{\cdot}22}{2\times10^3}\times V$

Scanned with CamScanner

क्योंकि $V = 1000 \times 100 \times 200 = 2 \times 10^7 \text{ mm}^3$

$$\Delta V = -\frac{0{\cdot}22}{2 \times 10^3} \times 2 \times 10^7$$

अत: आयतन में परिवर्तन $\Delta V = -2{\cdot}2 \times 10^3 \text{ mm}^3$

क्योंकि यह ऋण (–ve) है इसलिये आयतन घटेगा।

अत: **आयतन में कमी $= 2{\cdot}2 \times 10^3 \text{ mm}^3$**

अत: **अन्त में शेष आयतन $= V - \Delta V$**

$$= 2 \times 10^7 - 2{\cdot}2 \times 10^3$$

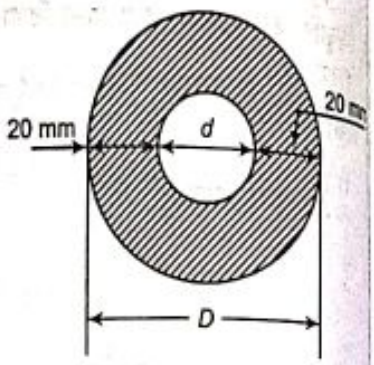
$$= 19997{\cdot}8 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

उदाहरण 28. लोहे के बने खोखले खम्भे पर 800 kN का सम्पीडन बल (Compressive Force) लगाया जाता है और लोहे का अन्तिम प्रतिबल (Ultimate Stress) 800 N/mm^2 है। यदि खम्भे की दीवार की मोटाई 20 mm रखनी है तो सुरक्षा गुणांक 8 के लिये खम्भे का अन्त:व्यास ज्ञात कीजिये। (U.P. 2001)

हल—माना अन्त:व्यास d तथा बाह्य व्यास D है।

$D = d + 2 \times$ चादर की मोटाई

$= d + 2 \times 20 = (d + 40)$



चित्र 1.35

सुरक्षा गुणांक

$$S = \frac{\text{अन्तिम प्रतिबल}}{\text{कार्यकारी प्रतिबल}}$$

या $$8 = \frac{800}{p \text{ (माना)}}$$

∴ कार्यकारी या सुरक्षात्मक प्रतिबल,

$$p = \frac{800}{8} = 100 \text{ N/mm}^2$$

परन्तु प्रतिबल $p = \dfrac{\text{बल } (F)}{\text{क्षेत्रफल } (A)}$

∴ $$100 = \frac{800 \times 1000}{A}$$

या $$A = 8000 \text{ mm}^2$$

परन्तु खम्भे की काट का क्षेत्रफल,

$$A = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}$$

या $$8000 = \frac{\pi [(d+40)^2 - d^2]}{4} = \frac{\pi [1600 + 80\,d]}{4}$$

Scanned with CamScanner

या $$1600 + 80\,d = \frac{32000}{\pi} = 10185{\cdot}92$$

या $$d = \frac{(10185{\cdot}92 - 1600)}{80} = \frac{8585{\cdot}92}{80} = 107{\cdot}32 \text{ mm}$$ उत्तर

विशेष : संयुक्त काट वाली छड़ तथा स्तम्भ पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 29. समान लम्बाई की दो छड़ें A तथा B आपस में 60 सेमी की दूरी पर ऊर्ध्वाधर लटकी हैं तथा एक क्षैतिज छड़ को आलम्बित करती हैं। एक 50 kN का भार A से 20 सेमी की दूरी पर क्षैतिज छड़ पर लटकाया जाता है। यदि छड़ B में 50 N/mm^2 का प्रतिबल उत्पन्न हो, तो छड़ A में प्रतिबल तथा A व B छड़ों की काट के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $E_A = 2\times10^5$ N/mm^2 तथा $E_B = 0{\cdot}9\times10^5$ N/mm^2 है।

हल—दिया है, 50 kN का भार क्षैतिज छड़ पर A से 20 cm (200 mm) की दूरी पर (माना बिन्दु C पर) लटका है तो छड़ B से इसकी दूरी = 60 − 20 = 40 cm (400 mm) होगी।

माना छड़ A में खिंचाव बल F_A तथा छड़ B में खिंचाव बल F_B है।

छड़ A में प्रतिबल P_A तथा छड़ B में प्रतिबल P_B है।

छड़ A की काट का क्षेत्रफल A_a तथा छड़ B की काट का क्षेत्रफल A_b है।

अब भार के बिन्दु C पर घूर्ण लेने पर,

$$F_A \times 200 = F_B \times 400$$

या $$F_A = 2F_B$$

परन्तु $$F_A + F_B = F \text{ (कुल भार बल)}$$

या $$2F_B + F_B = F$$

या $$3F_B = F$$

या $$F_B = \frac{F}{3} = \frac{50}{3} \text{ kN}$$

$\therefore$ $$F_A = 2F_B = 2\times\frac{50}{3} = \frac{100}{3} \text{ kN}$$

अब $\frac{p_A}{E_A} = \frac{p_B}{E_B}$ सूत्र से,

$$p_A = p_B \times \frac{E_A}{E_B} = 50 \times \frac{2\times10^5}{0{\cdot}9\times10^5}$$

या छड़ A में प्रतिबल, $$P_A = \frac{1000}{9} = 111{\cdot}11 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

$\because$ $$p_A = \frac{F_A}{A_a}$$

या $$A_a = \frac{F_A}{p_A}$$

$\therefore$ $$A_a = \frac{\frac{100}{3}\times1000}{1000/9} = 300 \text{ mm}^2$$ उत्तर

Scanned with CamScanner

तथा $$p_B = \frac{F_B}{A_b}$$

या $$A_b = \frac{F_B}{p_B}$$

$$\therefore \quad A_b = \frac{\frac{50}{3} \times 1000}{50} = 333 \cdot 33 \text{ mm}^2$$ उत्तर

उदाहरण 30. इस्पात (Steel) तथा ताँबे (Copper) की एक संयुक्त छड़ की कुल काट का क्षेत्रफल 20 सेमी^{2} है जिसमें $A_s = 8$ सेमी^{2} है। प्रत्येक छड़ की लम्बाई 50 सेमी है। संयुक्त छड़ पर 28 T का तनाव बल लगा है। दोनों पदार्थों में प्रतिबल (p_s तथा p_c) तथा लम्बाई में वृद्धि का मान ज्ञात कीजिये, जबकि $E_s = 2 \times 10^6$ kg/cm^2 तथा $E_c = 1 \times 10^6$ kg/cm^2 है।

हल—$A_c + A_s = 20 \text{ cm}^2$ तथा $A_s = 8 \text{ cm}^2$ दिया है, तब

$$A_c = 20 - 8 = 12 \text{ cm}^2$$

अब $\frac{P_s}{E_s} = \frac{p_c}{E_c}$ सूत्र से,

$$p_s = p_c \times \frac{2 \times 10^6}{1 \times 10^6} = 2p_c$$

अतः $$p_s = 2p_c \quad \ldots(1)$$

अब $p_s A_s + p_c A_c = F$ सूत्र से,

$$2p_c \times 8 + p_c \times 12 = 28000 \text{ kg}_\text{f}$$

या $p_c [16 + 12] = 28000$ या $p_c = \frac{28000}{28} = 1000 \text{ kg}_\text{f}/\text{cm}^2$

∴ ताँबे की छड़ में प्रतिबल,

$$p_c = 1000 \text{ kg/cm}^2 = 100 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

तथा स्टील की छड़ में प्रतिबल,

$$p_s = 2p_c = 2 \times 100 = 200 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

∵ संयुक्त छड़ की लम्बाई में परिवर्तन, $\Delta l = \frac{p_s l}{E_s}$ (सूत्र)

$$\therefore \quad \Delta l = \frac{2000 \times 50}{2 \times 10^6} = 0 \cdot 05 \text{ cm} = 0 \cdot 5 \text{ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 31. 40 mm व्यास की ताँबे की एक छड़ 40 mm आन्तरिक व्यास तथा 50 mm बाह्य व्यास की इस्पात की ट्यूब से घिरी हुई है। प्रत्येक की लम्बाई 800 mm है। इस समुच्चय (Assembly) को 165 kN के अक्षीय भार द्वारा सम्पीडित किया जाता है। प्रत्येक पदार्थ में उत्पन्न प्रतिबल तथा समुच्चय में उभयनिष्ठ संकुचन ज्ञात कीजिये।

$E = 2 \times 10^5$ N/mm^2, $E_c = 1 \times 10^5$ N/mm^2 (उ० प्र० 2010)

हल—प्रश्न के अनुसार छड़ की काट चित्र 1.36 के अनुसार होगी।

माना ताँबे की छड़ तथा इस्पात की ट्यूब में प्रतिबल क्रमशः p_c तथा p_s उत्पन्न होते हैं तथा इनकी काट के क्षेत्रफल क्रमशः A_c तथा A_s हैं।

Scanned with CamScanner

$\therefore$ ताँबे की छड़ की काट का क्षेत्रफल $A_c = \frac{\pi (40)^2}{4} = 1256{\cdot}64 \text{ mm}^2$

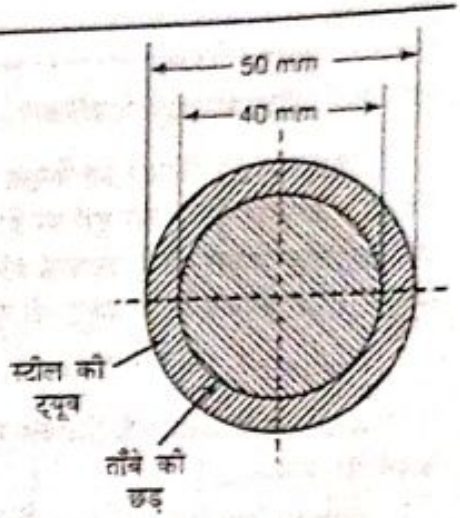
तथा स्टील ट्यूब की काट का क्षेत्रफल $A_s = \frac{\pi (d_0^2 - d_i^2)}{4}$

$$A_s = \frac{\pi (50^2 - 40^2)}{4} = 706{\cdot}86 \text{ mm}^2$$

अब सूत्र $\frac{p_s}{E_s} = \frac{p_c}{E_c}$ द्वारा,

$$p_s = p_c \times \frac{E_s}{E_c} = p_c \times \frac{2\times10^5}{1\times10^5} = 2p_c$$

$$p_s = 2p_c \quad \text{...(i)}$$



चित्र 1.36

सूत्र $F = p_s A_s + p_c A_c$ द्वारा,

$$165000 = 2p_c \times 706{\cdot}86 + p_c \times 1256{\cdot}64$$
$$= p_c [1413{\cdot}72 + 1256{\cdot}64]$$
$$= 2670{\cdot}36 \times p_c$$

या $p_c = \frac{165000}{2670{\cdot}36} = \mathbf{61{\cdot}789 \text{ N/mm}^2}$ उत्तर

$\therefore$ समीकरण (i) से, $p_s = 2p_c = 2 \times 61{\cdot}789 = \mathbf{123{\cdot}58 \text{ N/mm}^2}$ उत्तर

$$\Delta l = \frac{p_s l}{E_s} = \frac{123{\cdot}58 \times 800}{2\times10^5} = \mathbf{0{\cdot}4940 \text{ mm}}$$ उत्तर

उदाहरण 32. उदाहरण 31 में यदि छड़ का व्यास 30 mm हो और शेष बातें सब वही रहें और छड़ तथा ट्यूब दोनों सिरों पर दृढ़ता से जुड़ी हों तो छड़ तथा ट्यूब में प्रतिबल ज्ञात कीजिये।

हल—इस दशा में बनी संयुक्त काट चित्र 1.37 के अनुसार होगी।

छड़ की काट का क्षेत्रफल,

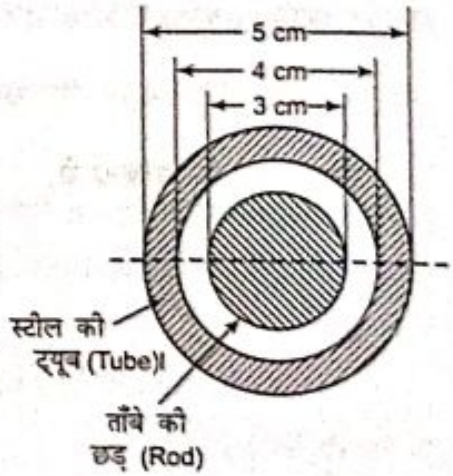
$$A_c = \frac{\pi (30)^2}{4} = 706{\cdot}86 \text{ mm}^2$$

स्टील ट्यूब काट का क्षेत्रफल,

$$A_s = \frac{\pi (50^2 - 40^2)}{4} = 706{\cdot}86 \text{ mm}^2$$

अब $\frac{p_s}{E_s} = \frac{p_c}{E_c}$ सूत्र से,

$$p_s = p_c \times \frac{E_s}{E_c} = p_c \times \frac{2\times10^5}{1\times10^5} = 2p_c \quad \text{...(i)}$$



चित्र 1.37

तथा $F = p_s A_s + p_c A_c$ सूत्र से,

$$165 \times 1000 = 2p_c \times 706{\cdot}86 + p_c \times 706{\cdot}86$$
$$= p_c [2120{\cdot}575]$$

$\therefore$ **ताँबे की छड़ में प्रतिबल,** $p_c = \frac{165000}{2120{\cdot}575} = \mathbf{77{\cdot}809 \text{ N/mm}^2}$ उत्तर

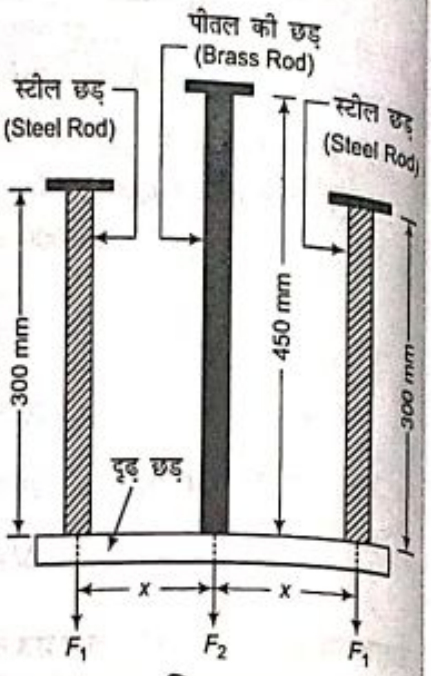
Scanned with CamScanner

तथा स्टील की ट्यूब में प्रतिबल, $p_s = 2 \times p_c = 155{\cdot}618\ \text{N/mm}^2$

उत्तर

उदाहरण 33. चित्र 1.38 में एक दृढ़ छड़ तीन अन्य छड़ों द्वारा लटका हुआ है। तीन छड़ें एक ही ऊर्ध्वाधर समतल में हैं तथा एक दूसरे के बराबर दूरी पर हैं। दोनों बाहरी छड़ें इस्पात की बनी हैं, लम्बाई 300 mm है तथा व्यास 25 mm है। बीच की छड़ पीतल की है, लम्बाई 450 mm है तथा व्यास 20 mm है। 100 kN भार के कारण छड़ों में उत्पन्न बल ज्ञात कीजिए। भार लगने के बावजूद भी दृढ़ छड़ क्षैतिज रहती है।

$E_{\text{इस्पात}} = 2{\cdot}1 \times 10^5\ \text{N/mm}^2$, $E_{\text{इस्पात}} = 1{\cdot}05 \times 10^5\ \text{N/mm}^2$



चित्र 1.38

हल—चूँकि तीनों छड़ें मिलकर एक संयुक्त छड़ (Composite Bar) बनती हैं। अब

माना कि प्रत्येक इस्पात तथा पीतल की छड़ की काट का क्षेत्रफल A_s तथा A_b और उनके यंग मापांक E_s तथा E_b हैं।

माना कि इस्पात की प्रत्येक छड़ के द्वारा भार F_1 तथा पीतल की छड़ द्वारा भार F_2 सहन किया जाता है। [क्योंकि इस्पात की दोनों छड़ों की लम्बाइयाँ तथा व्यास बराबर हैं, इसलिये उनके द्वारा सहन किये भारों के मान बराबर होंगे।]

प्रश्नानुसार कुल भार,

$$F = 100\ \text{kN} = 10^5\ \text{N}$$

$$F = 2F_1 + F_2 = 2\ p_s A_s + p_b A_b \quad \ldots (i)$$

यदि इस्पात तथा पीतल की छड़ में प्रतिबल क्रमशः p_s तथा p_b उत्पन्न होते हैं तब,

$$A_s = \frac{\pi\,(25)^2}{4} = 490{\cdot}87\ \text{mm}^2$$

$$A_b = \frac{\pi\,(20)^2}{4} = 314{\cdot}16\ \text{mm}^2$$

संयुक्त छड़ के प्रतिबन्ध से, $\Delta l_s = \Delta l_b$

$\therefore$ $$\frac{p_s l_s}{E_s} = \frac{P_b l_b}{E_b}$$

या $$p_s = p_b \times \frac{E_s}{E_b} \times \frac{l_b}{l_s}$$

$$p_s = p_b \times \frac{2{\cdot}1 \times 10^5}{1{\cdot}05 \times 10^5} \times \frac{450}{300} = 3p_b$$

$\therefore$ $$p_s = 3p_b \quad \ldots (ii)$$

समीकरण (i) से, $$10^5 = 2p_s A_s + P_b A_b$$

$$= 2 \times 3p_b \times 490{\cdot}87 + p_b \times 314{\cdot}16$$

$$p_b\,[2945{\cdot}2 + 314{\cdot}16] = 3259{\cdot}38\ p_b$$

या $$p_b = \frac{10^5}{3259{\cdot}38} = 30{\cdot}68\ \text{N/mm}^2$$

उत्तर

Scanned with CamScanner

$\therefore$ $p_s = 3p_b = 3 \times 30{\cdot}68 = 92{\cdot}04 \text{ N/mm}^2$ उत्तर

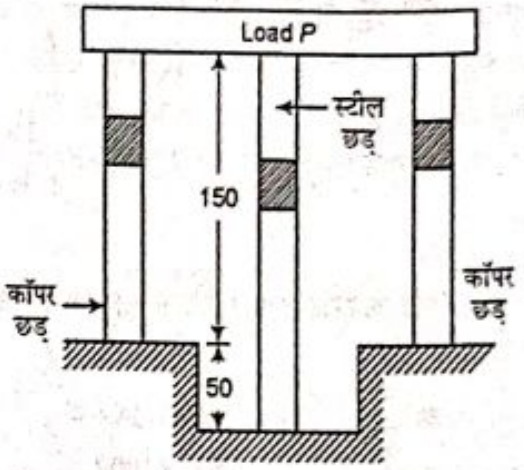
$\therefore$ स्टील की छड़ में प्रतिबल $F_1 = p_s A_s = 92{\cdot}04 \times 490{\cdot}87 = 45180{\cdot}6 \text{ N}$

उत्तर

पीतल की छड़ में बल F_2 = कुल भार – 2 स्टील छड़ों में बल

$= 10^5 - 2 \times 45180{\cdot}6 = 9638{\cdot}64 \text{ N}$ उत्तर

उदाहरण 34. दो कॉपर रॉड तथा एक स्टील छड़ मिलकर एक भार (Load) P को चित्र 1.39 के अनुसार उठाती हैं। कॉपर की छड़ के काट का क्षेत्रफल 25 mm × 25 mm है तथा स्टील छड़ की काट का क्षेत्रफल $30 \times 30 \text{ mm}^2$ है। यदि कॉपर तथा स्टील में प्रतिबल क्रमशः $60 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ तथा $120 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ से अधिक नहीं होने देना है। तब इस संयुक्त प्रबन्ध द्वारा उठाया गया सुरक्षित भार (Safe Load) ज्ञात करो। $E_s = 2E_c$ है।



चित्र 1.39

हल—संयुक्त छड़ के सूत्र, $\boxed{\frac{p_s l_s}{E_s} = \frac{p_c l_c}{E_c}}$ के द्वारा,

या $p_s = p_c \times \frac{E_s}{E_c} \times \frac{l_c}{l_s}$

$= p_c \times \frac{2E_c}{E_c} \times \frac{150}{200} = 1{\cdot}5\, p_c$

$\therefore$ $p_s = 1{\cdot}5\, p_c$ ...(i)

जब steel में प्रतिबल की दी गई सीमा $P_S = 120 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ प्रयोग करते हैं तो कॉपर में प्रतिबल समीकरण (i) से $p_c = \frac{120 \times 10^6}{1{\cdot}5} = 80 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ प्राप्त होता है, जो कि कॉपर की दी गई प्रतिबल सीमा 60×10^6 से अधिक है। अतः इसे प्रयोग नहीं कर सकते।

जब कॉपर में प्रतिबल की दी गई सीमा, $p_c = 60 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ का प्रयोग करते हैं तो स्टील में प्रतिबल समीकरण (i) से $p_s = 1{\cdot}5 \times 60 \times 10^6 = 90 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ प्राप्त होता है, जो कि स्टील की दी गई प्रतिबल सीमा से कम है। अतः यह मान सुरक्षित (safe) होगा (प्रयोग करेंगे)।

$\therefore$ सुरक्षित प्रतिबल (safe stresses), $p_s = 90 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ तथा $p_c = 60 \times 10^6 \text{ N/m}^2$

अब संयुक्त छड़ या सुरक्षित बल, $P = p_s A_s + 2\, p_c A_c$ [$\because$ Cu की दो छड़ें हैं]

$\therefore$ $P = 90 \times 10^6 \times (0{\cdot}030 \times 0{\cdot}030) + 2 \times 60 \times 10^6 \times (0{\cdot}025 \times 0{\cdot}025)$

$= 156000 \text{ N} = 156 \text{ kN}$ उत्तर

उदाहरण 35. कांक्रीट के बने एक स्तम्भ की काट 250 mm × 400 mm है। इसमें चार स्टील की छड़ें चारों कोनों पर सम्पूर्ण लम्बाई में लगी हैं। कॉलम पर 500 kN का अक्षीय सम्पीडन बल लगा है। यदि $E_s = 2{\cdot}0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ तथा $E_e = 1{\cdot}6 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ है तो दोनों पदार्थों में प्रतिबल ज्ञात कीजिए, जबकि प्रत्येक छड़ का व्यास 20 mm है।

हल—माना इस्पात (Steel) की छड़ों में प्रतिबल p_s तथा कांक्रीट में प्रतिबल p_e है।

Scanned with CamScanner

∴ इस्पात की प्रत्येक छड़ की काट का क्षेत्रफल

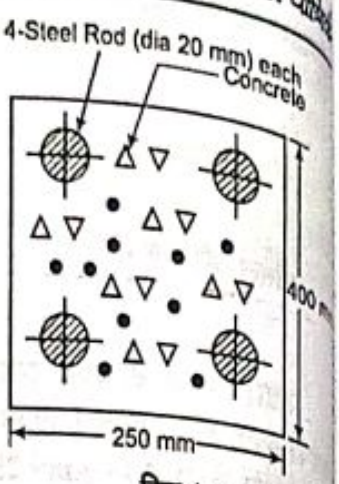
$$A_s = \frac{\pi (20)^2}{4} = 314{\cdot}16 \text{ mm}^2$$

कांक्रीट के स्तम्भ का क्षेत्रफल

$$A_c = (250 \times 400) - 4 \times 314{\cdot}16$$
$$= 98743{\cdot}36 \text{ mm}^2$$

अब $\frac{p_s}{E_s} = \frac{p_c}{E_c}$ सूत्र से,

$$p_s = p_c \times \frac{E_s}{E_c}$$
$$= p_c \times \frac{2 \times 10^5}{1{\cdot}76 \times 10^4} = 12{\cdot}5\ p_c$$



चित्र 1.40

∴ $$p_s = 12{\cdot}5\ p_c \qquad \text{(i)}$$

यदि कँकरीट तथा स्टील में बलक्रम F_c तथा F_s माना जाये तो

$$F_c + F_S = F$$

या $$p_c \times 98743{\cdot}36 + 4 \times 12{\cdot}5\ p_c \times 314{\cdot}16 = 500 \times 1000\text{N}$$

या $$p_c = \frac{500 \times 1000}{114451{\cdot}36} = 4{\cdot}37\text{N/mm}^2$$

अब (i) से $$p_s = 12{\cdot}5 \times p_c = 54{\cdot}61\text{N/mm}^2$$

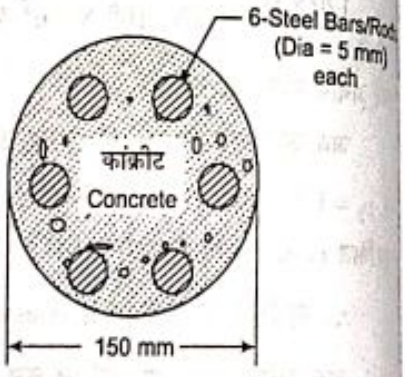
उदाहरण 36. एक प्रतिबलित कंक्रीट स्तंभ का व्यास 150 mm है। इसमें 6 इस्पात की छड़ें प्रतिबलन हेतु डाली गई हैं तथा इनमें प्रत्येक का व्यास 5 mm है। स्तंभ पर 20 kN का अक्षीय भार लगाया गया है। इस्पात तथा कंक्रीट में उत्पन्न प्रतिबलों का मान ज्ञात कीजिए। इस्पात तथा कंक्रीट के प्रत्यास्थता मापांक क्रमशः 200 GPa तथा 15 GPa हैं। (U.P. 2012

हल—∵ प्रत्येक steel rod का व्यास $d = 5$ mm है।

∴ $$A_s = \frac{\pi (5)^2}{4} = 19{\cdot}625 \text{ mm}^2$$

कंक्रीट का क्षेत्रफल, $A_c = \frac{\pi (150)^2}{4} - 6\ A_s$

∴ $$A_c = 17662{\cdot}5 - 6 \times 19{\cdot}625$$
$$= 17544{\cdot}75 \text{ mm}^2$$



चित्र 1.41

संयुक्त छड़ (Composite Bar) के सूत्र, $\frac{p_s}{E_s} = \frac{p_c}{E_c}$ से,

$$p_s = p_c \times \frac{E_s}{E_c} = p_c \times \frac{200}{15} = 13{\cdot}33 \times p_c \qquad \ldots (i$$

अब $F = 6\ p_s\ A_s + p_c\ A_c$ सूत्र द्वारा, (यहाँ 6 इसलिये आया है क्योंकि 6 steel rods हैं)

$$20 \times 1000 = 6 \times 13{\cdot}33\ p_c \times 19{\cdot}625 + p_c \times 17544{\cdot}75$$

Scanned with CamScanner

$$= P_c\,[19114{\cdot}3575]$$

या
$$P_c = \frac{20000}{19114{\cdot}3575} = 1{\cdot}046\ \text{N/mm}^2$$ (कंक्रीट में प्रतिबल) उत्तर

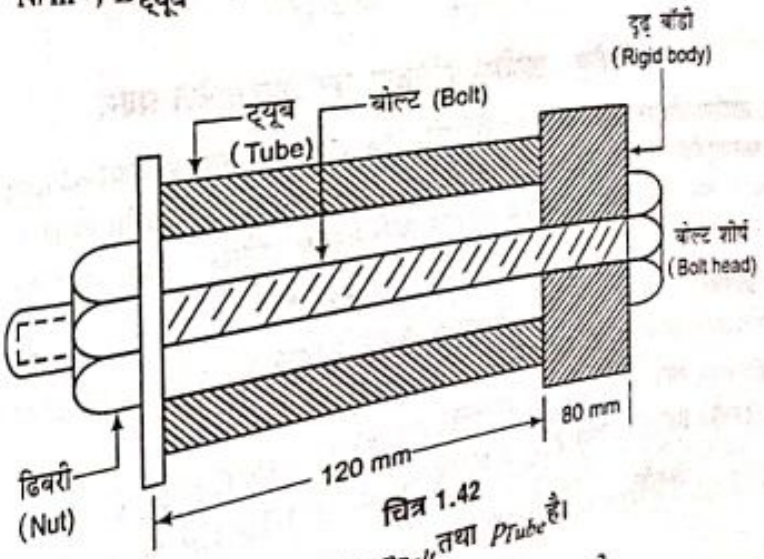
समी० (I) से प्रत्येक steel rod में प्रतिबल,

$$P_s = 13{\cdot}33 \times 1{\cdot}046$$

$\therefore$
$$P_s = 13{\cdot}9476\ \text{N/mm}^2$$ उत्तर

उदाहरण 37. चित्र 1.42 के अनुसार ढलवाँ लोहे की दृढ़ बॉडी में से होकर एक बोल्ट गुजारा जाता है तथा यह एक ट्यूब के अन्दर से होता हुआ ढिबरी की सहायता से ट्यूब को जोड़ता है। बॉडी में बोल्ट की लम्बाई 80 mm तथा ट्यूब की लम्बाई 120 mm है। बोल्ट का व्यास 24 mm तथा ट्यूब के अन्त: तथा बाह्य व्यास क्रमश: 28 mm तथा 36 mm हैं। चूड़ी का पिच 3 mm है। यदि ढिबरी को 20° के घुमाव से कस दिया जाता है तो बोल्ट और ट्यूब में उपजे प्रतिबल ज्ञात कीजिये।

$E_{\text{बोल्ट}} = 2\times10^5\ \text{N/m}^2$, $E_{\text{ट्यूब}} = 1\times10^5\ \text{N/m}^2$



चित्र 1.42

हल—माना बोल्ट तथा ट्यूब में प्रतिबल क्रमश: p_{Bolt} तथा p_{Tube} है।

$$A_{Bolt} = \frac{\pi\,(24)^2}{4} = 452{\cdot}389\ \text{mm}^2$$

$$A_{Tube} = \frac{\pi\,[36^2 - 28^2]}{4} = 402{\cdot}124\ \text{mm}^2$$

$\because$ तथा

$\because$ ढिबरी (Nut) को 360° का कोण घुमाने पर चली दूरी = 3 mm (पिच)

$\therefore$ 360° का कोण घुमाने पर नट द्वारा चली दूरी = 3 mm

$\therefore$ 20° का कोण घुमाने पर नट द्वारा चली दूरी $= \frac{20\times3}{360} = 0{\cdot}1667$ mm

$\therefore$ नट-बोल्ट के प्रतिबन्ध से,

नट द्वारा चली दूरी = बोल्ट की लम्बाई में वृद्धि + ट्यूब की लम्बाई में कमी

$$0{\cdot}1667 = \frac{F\times l_{bolt}}{A_{bolt}\times E_{bolt}} + \frac{F\times l_{tube}}{A_{tube}\times E_{tube}}$$

या

Scanned with CamScanner

$$= F\left[\frac{(120+80)}{452{\cdot}39\times2\times10^5}+\frac{120}{402{\cdot}12\times1\times10^5}\right]$$

या $$0{\cdot}1667=\frac{F}{10^5}[0{\cdot}221+0{\cdot}2984]$$

या $$0{\cdot}1667\times10^5=F\times0{\cdot}5194$$

या $$F=\frac{16670}{0{\cdot}5194}$$

$\therefore$ बोल्ट मे तनाव बल, $F = 32094{\cdot}725$ N

$\therefore$ बोल्ट मे प्रतिबल, $P_{bolt}=\frac{F}{A_{bolt}}=\frac{32094{\cdot}725}{452{\cdot}389}=\mathbf{70{\cdot}945\ N/mm^2}$ उत्तर

तथा ट्यूब मे प्रतिबल, $P_{tube}=\frac{F}{A_{tube}}=\frac{32094{\cdot}725}{402{\cdot}124}=\mathbf{79{\cdot}813\ N/mm^2}$ उत्तर

**विशेष : तापीय प्रतिबल पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 38. तापीय प्रतिबल की परिभाषा दीजिये। एक 400 mm लम्बी तथा 60 mm व्यास की एक ताँबे की छड़ दोनों सिरों पर दृढ़तापूर्वक टिकी (जुड़ी) है। छड़ में कोई प्रतिबल नहीं है जबकि कमरे का तापमान 25°C है। यदि छड़ का तापमान 50°C कर दिया जाये तो उसमें उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल तथा स्वभाव (प्रकृति-Nature) ज्ञात कीजिये यदि $\alpha_{Cu}=18{\cdot}5\times10^{-6}/°C$ तथा $E_{Cu}=110\ GN/m^2$ है। (UP 2003; UK 2011, S)

हल—**तापीय प्रतिबल**—"किसी छड़ में तापान्तर के कारण उत्पन्न हुए प्रतिबल को तापीय प्रतिबल कहते हैं, जबकि छड़ की लम्बाई मे होने वाले परिवर्तनों को दृढ़तापूर्वक रोका जाये।"

दिया है, $l = 400$ mm, व्यास $d = 60$ mm, तापान्तर $t = 50°C - 25°C = 25°C$

$\alpha_{Cu}=18{\cdot}5\times10^{-6}/°C$ तथा $E_{Cu}=110\ GN/m^2=1{\cdot}1\times10^5\ N/mm^2$

$\therefore$ विकृति $(e)=\alpha t$ (सूत्र)

$=18{\cdot}5\times10^{-6}\times25=4{\cdot}625\times10^{-4}$

अब तापीय प्रतिबल, $p = eE$ (सूत्र)

$=4{\cdot}625\times10^{-4}\times1{\cdot}1\times10^5$

$=\mathbf{50{\cdot}875\ N/mm^2}$

तथा प्रतिबल की प्रकृति = संपीडन (compressive) उत्तर

उदाहरण 39. इस्पात की 500 mm लम्बी एक छड़, जिसका व्यास 20 mm है, दोनों सिरों पर मजबूती से जकड़ी हुई है। फिर इसका तापमान 200°C बढ़ा दिया जाता है। यदि इस्पात के लिए रैखिक प्रसार गुणांक $\alpha = 12\times10^{-6}$ प्रति °C हो तो छड़ में उत्पन्न हुई विकृति (strain), प्रतिबल (stress) तथा छड़ पर जकड़ (grips) द्वारा लगा सम्पीडन बल (compressive force) ज्ञात कीजिये। $E = 200$ GPa (UK 2010, S)

हल—यहाँ $l = 500$ mm, $\alpha=12\times10^{-6}/°C$, $d = 20$ mm, $t = 200°C$ तथा $E = 200\ GPa = 200\ kN/mm^2$

छड़ की काट का क्षेत्रफल, $A=\frac{\pi}{4}\times d^2=\frac{\pi}{4}\times20^2=314\ mm^2$

छड़ में उत्पन्न हुई विकृति, $e=\alpha t=12\times10^{-6}\times200$

Scanned with CamScanner

$$= 2 \cdot 4 \times 10^{-3}$$

फिर छड़ में उत्पन्न हुआ प्रतिबल, $p = \alpha . t . E = 2 \cdot 4 \times 10^{-3} \times 200$

$$= 0 \cdot 48 \text{ kN/mm}^2$$

छड़ पर लगा सम्पीडन बल, $F = p . A = 0 \cdot 48 \times 314$

$$= 150 \cdot 72 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 40. किसी छड़ को 373°C तक गर्म करके दोनों सिरों पर जकड़ दिया जाता है। फिर इसको ठण्डा करके 293 °C तापमान पर लाया जाता है। यदि छड़ का व्यास 30 mm हो और उसके पदार्थ का रैखिक प्रसार गुणांक (coefficient of linear expansion) $\alpha = 18 \times 10^{-6}$ /°C हो तो छड़ में उत्पन्न विकृति, प्रतिबल तथा बल ज्ञात कीजिये। छड़ के पदार्थ का प्रत्यास्थता गुणांक (modulus of elasticity), $E = 100 \text{ kN/mm}^2$ है। (UK 2008, S)

हल—छड़ के तापमान में परिवर्तन, $t = 373 - 293 = 80 \text{ K}$

छड़ की काट का क्षेत्रफल, $A = \frac{\pi}{4} \times 30^2 = 706 \cdot 86 \text{ mm}^2$

हम देखते हैं कि इस उदाहरण में जकड़ (grips) छड़ की लम्बाई को घटने से रोक रही है। इसलिए जकड़, छड़ पर तनाव बल (tensile force) लगाती है।

अब छड़ में उत्पन्न हुई तनाव विकृति (strain) $= \alpha t = 18 \times 10^{-6} \times 80 = 1 \cdot 44 \times 10^{-3}$ उत्तर

छड़ में उत्पन्न हुआ तनाव प्रतिबल $p = e . E = \alpha . t . E$

$$= 1 \cdot 44 \times 10^{-3} \times 100 = 0 \cdot 144 \text{ kN/mm}^2$$ उत्तर

इसलिए छड़ पर लगाया गया तनाव बल (tensile force),

$$F = \alpha . t . E . A = 0 \cdot 144 \times 706 \cdot 86 = 101 \cdot 79 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 41. एक छड़ 20°C पर 20 m लम्बी है। यदि तापमान 65°C तक बढ़ाया जाता है, तो छड़ का मुक्त प्रसार ज्ञात कीजिये। उत्पन्न तापीय प्रतिबल निम्न आधार पर ज्ञात कीजिये—

(i) जब छड़ के प्रसार को रोका जाता है।

(ii) जब छड़ को 5·8 mm बढ़ने दिया जाता है। (UP 2013)

हल— ∵ तापमान में अन्तर, $t = 65°\text{C} - 20°\text{C} = 45°\text{C}$

∴ तापमान बढ़ने पर मुक्त प्रसार (Freely expansion),

$\Delta l = l \alpha t$ सूत्र में α = रेखीय प्रसार गुणांक है।

∴ मुक्त रूप से हुआ प्रसार, $\Delta l = (20 \times 1000) \times \alpha \times 45$

$$= 900000 . \alpha$$ उत्तर

(i) तापीय प्रतिबल, जबकि छड़ के प्रसार को रोका जाता है।

Stress, $p = \alpha t E$ (सूत्र)

प्रतिबल $p = \alpha . 45 . E$ जहाँ E = पदार्थ का यंग मापांक है।

तथा α = पदार्थ का रेखीय प्रसार गुणांक

Scanned with CamScanner

(ii) जब छड़ को 5·8 mm बढ़ने दिया जाता है अर्थात् $\Delta l = 5{\cdot}8$ mm है।

$\Delta l = l \alpha t$ सूत्र में, $l = 20\text{ m} = 20 \times 1000$ mm

$5{\cdot}8 = 20000 . \alpha . 45$

$\alpha = 6{\cdot}44 \times 10^{-6}$ /°C

∴ तापीय प्रतिबल $p = \alpha t E = 6{\cdot}44 \times 10^{-6} \times 45 \times E$

∴ $= 2{\cdot}9 \times 10^{-4} \times E$ उत्तर

विशेष : तापीय प्रतिबल की संयुक्त छड़ों पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 42. एक इस्पाती छड़ एवं दो ताँबे की छड़ें हैं। सभी का क्षेत्रफल तथा लम्बाई समान है तथा जिनके दोनों सिरे दृढ़ता से जुड़े हुये हैं। इनका तापमान 15°C है। इस्पाती छड़ ताँबे की छड़ों के बीच में रखी है। इनका तापमान 250°C तक बढ़ने पर प्रत्येक छड़ की लम्बाई 2 मिमी बढ़ जाती है। प्रत्येक छड़ की मूल लम्बाई तथा इनमें प्रतिबल ज्ञात करो। $E_s = 2 \times 10^5$ N/mm^2, $E_c = 10^5$ N/mm^2, $\alpha_s = 12 \times 10^{-6}$/°C तथा $\alpha_c = 18 \times 10^{-6}$/°C लीजिये।

(U.P. 2001)

हल—माना संयुक्त छड़ की लम्बाई l है और इसमें इस्पात (steel) की छड़ में प्रतिबल p_s तथा ताँबे (copper) की छड़ में प्रतिबल p_c है, दोनों धातुओं की छड़ों के काट के क्षेत्रफल समान हैं, माना A है।

दिया है, $l_s = l_c = l$ तथा $A_s = A_c = A$ है।

तापान्तर $t = 250°\text{C} - 15°\text{C} = 235°\text{C}$

लम्बाई में परिवर्तन, $\Delta l = 2$ mm

संयुक्त छड़ के सूत्र $p_s A_s = p_c A_c$ के द्वारा

$p_s = 2p_c$ [∵ ताँबे की छड़ दो हैं।] ... (i)

अब सूत्र $\frac{p_s}{E_s} + \frac{p_c}{E_c} = t(\alpha_c - \alpha_s)$ के द्वारा

$$\frac{2p_c}{2 \times 10^5} + \frac{p_c}{1 \times 10^5} = 235 \times \frac{1}{10^6}[18 - 12]$$

∴ $2p_c = 23{\cdot}5 \times 6$

या $p_c = 70{\cdot}5$ N/mm^2 उत्तर

अब समी० (I) से, $p_s = 2p_c = 2 \times 70{\cdot}5 = 141$ N/mm^2 उत्तर

∴ $\Delta l = l\alpha_s t + \frac{p_s l}{E_s}$ सूत्र से

$$2 = l\left[12 \times 10^{-6} \times 235 + \frac{141}{2 \times 10^5}\right]$$

या $4 \times 10^6 = l[24 \times 235 + 1410]$

Scanned with CamScanner

या $l = 567 \cdot 37$ mm उत्तर

उदाहरण 43. आरम्भ में तीन छड़ें 2 m लम्बी तथा 20 mm व्यास की हैं। बीच वाली छड़ इस्पात (steel) तथा दोनों बाहरी छड़ें ताँबे (copper) की हैं। छड़ों के सिरे इतने जकड़े गए हैं कि सभी दशाओं में उनकी लम्बाइयाँ बराबर रहती हैं। छड़ों में प्रतिबल ज्ञात कीजिए यदि उनका तापमान 50°C बढ़ा दिया जाता है।

$E_s = 200 \text{ kN/mm}^2$ $\alpha_s = 12 \times 10^{-6}$ /°C

$E_c = 120 \text{ kN/mm}^2$ $\alpha_c = 18 \cdot 5 \times 10^{-6}$ /°C (U.P.)

हल—प्रत्येक छड़ की काट का क्षेत्रफल, $A = \frac{\pi}{4} \times 20^2 = 314 \text{ mm}^2$

माना इस्पात में प्रतिबल p_s तथा ताँबे में p_c पैदा होता है, तब

हम जानते हैं कि, इस्पात में विकृति + ताँबे में विकृति $= t(\alpha_c - \alpha_s)$

$$\frac{p_s}{E_s} + \frac{p_c}{E_c} = t(\alpha_c - \alpha_s) \quad \text{(सूत्र)} \quad \ldots (1)$$

तथा इस्पात में खिचाव बल = ताँबे में दबाव बल (सूत्र) ... (2)

अत: $p_s A_s = 2\, p_c A_c$ (क्योंकि ताँबे की दो छड़ें हैं)

$\therefore$ $p_s \times 314 = 2\, p_c \times 314$

$\therefore$ $p_s = 2\, p_c$ ... (3)

p_s का यह मान (1) में रखने पर,

$$\frac{2p_c}{2 \times 10^5} + \frac{p_c}{1 \cdot 2 \times 10^5} = \frac{50}{10^6}(18 \cdot 5 - 12)$$

$\therefore$ $$p_c\left[1 + \frac{1}{1 \cdot 2}\right] = 5 \times 6 \cdot 5$$

या $p_c = 17 \cdot 727 \text{ N/mm}^2$ उत्तर

$\therefore$ समी० (3) से, $p_s = 2 \times 17 \cdot 727$

$= 35 \cdot 45 \text{ N/mm}^2$ उत्तर

उदाहरण 44. एक इस्पात नली, जिसका बाह्य व्यास 2·4 cm है तथा आन्तरिक व्यास 1·8 cm है, अपने अन्दर 1·5 cm व्यास वाली ताँबे की छड़ को बन्द रखती है तथा इस्पात नली छड़ के साथ दृढ़ता से दोनों सिरों पर जुड़ी है। यदि 283°C ताप पर कोई अनुदैर्ध्य प्रतिबल न हो तो छड़ व नली में प्रतिबलों की गणना कीजिये जबकि ताप 473°C पर हो जाये।

$E_s = 210000 \text{ N/mm}^2$ $\alpha_s = 11 \times 10^{-6}$ /°C

$E_c = 100000 \text{ N/mm}^2$ $\alpha_c = 18 \times 10^{-6}$ /°C (U.K. 2012, S)

हल—Tube में, steel का बाहरी व्यास (outer dia) $d_o = 24$ mm तथा आन्तरिक व्यास (Inner Dia) $d_i = 18$ mm है।

Scanned with CamScanner

∴ क्षेत्रफल (Area), $A_s = \frac{\pi (d_o^2 - d_i^2)}{4}$ सूत्र से,

(In steel tube) $A_s = \frac{\pi (24^2 - 18^2)}{4} = 197{\cdot}82 \text{ mm}^2$

(In Cu rod) $A_c = \frac{\pi (15)^2}{4} = 176{\cdot}625 \text{ mm}^2$

तापान्तर (temperature difference) $t = 473 - 283 = 190°\text{C}$

माना steel tube में प्रतिबल p_s तथा copper rod में प्रतिबल p_c है।

∴ $p_s A_s = p_c A_c$ सूत्र से, $p_c = \frac{p_s \times A_s}{A_c}$

∴ $p_c = 1{\cdot}12 \times p_s$ ... (I)

अब सूत्र से $\frac{p_s}{E_s} + \frac{p_c}{E_c} = t(\alpha_c \sim \alpha_s)$

$$\frac{p_s}{2{\cdot}1 \times 10^5} + \frac{1{\cdot}12\, p_s}{1 \times 10^5} = 190 \times \frac{1}{10^6}(18 - 11)$$

$$p_s \left[\frac{1}{2{\cdot}1} + \frac{1{\cdot}12}{1}\right] = 19 \times 7$$

या $p_s = 83{\cdot}32 \text{ N/mm}^2$ उत्तर

समी० (I) से, $p_c = 1{\cdot}12 \times 83{\cdot}32 = 93{\cdot}32 \text{ N/mm}^2$ उत्तर

उदाहरण 45. 8 cm बाह्य व्यास तथा 4 cm अन्त: व्यास की एक इस्पात की ट्यूब में 4 cm व्यास की एक ताँबे की छड़ पूरी तरह से बन्द है। छड़ तथा ट्यूब की लम्बाइयाँ समान हैं। छड़ तथा ट्यूब के दोनों सिरे एक दूसरे से जकड़ दिए गए हैं जिससे उनमें कोई सापेक्ष (relative) विस्थापन (displacement) न हो। इस समुच्चय (assembly) का तापमान 60°C बढ़ा दिया जाता है तो समुच्चय में विकृति तथा छड़ और ट्यूब में प्रतिबल ज्ञात कीजिए।

मानिए—

$E_s = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ $\alpha_s = 12 \times 10^{-6}$ per°C

$E_c = 1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ $\alpha_c = 18 \times 10^{-6}$ per°C

हल—ताँबे की छड़ की काट का क्षेत्रफल, $A_c = \frac{\pi}{4} \times 4^2 = 12{\cdot}56 \text{ cm}^2 = 1256 \text{ mm}^2$

स्टील-ट्यूब की काट का क्षेत्रफल, $A_s = \frac{\pi}{4}(8^2 - 4^2) = 37{\cdot}68 \text{ cm}^2 = 3768 \text{ mm}^2$

माना कि इस्पात तथा ताँबे में प्रतिबल p_s तथा p_c पैदा होते हैं, तब हम जानते हैं कि

$$\frac{p_s}{E_s} + \frac{p_c}{E_c} = t(\alpha_c - \alpha_s)$$

या $$\frac{p_s}{2 \times 10^5} + \frac{p_c}{1 \times 10^5} = 60(18 \times 10^{-6} - 12 \times 10^{-6})$$

Scanned with CamScanner

या $$\frac{p_s}{2} + p_c = 60 \times 6 \times 10^{-1} = 36$$

या $$p_s + 2p_c = 72 \quad \text{... (I)}$$

फिर हम जानते हैं कि इस्पात में खिचाव = ताँबे में दबाव बल

या $$p_s \times A_s = p_c \times A_c$$

$$p_s = p_c \times \frac{A_c}{A_s} = p_c \times \frac{1256}{3768} = p_c \times 0{\cdot}333 \quad \text{... (II)}$$

(II) से p_s का मान (I) में रखने पर,

$$p_c \times 0{\cdot}333 + 2p_c = 72$$

$$p_c = \frac{72}{2{\cdot}333} = 30{\cdot}86\ \text{N/mm}^2 \quad \text{उत्तर}$$

$\therefore$ $$p_s = 30{\cdot}86 \times 0{\cdot}333 = 10{\cdot}276\ \text{N/mm}^2 \quad \text{उत्तर}$$

अब समुच्चय (assembly) में विकृति

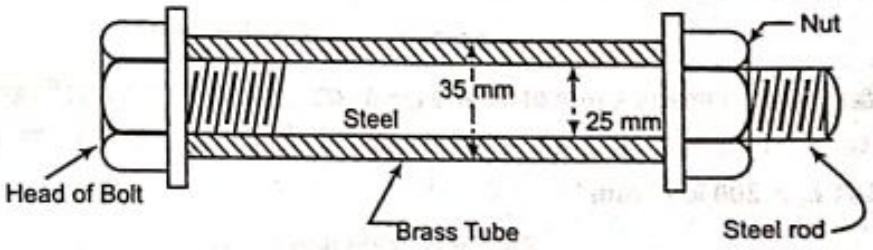
$$e = \frac{\delta l}{l} = \alpha_s t + \frac{p_s}{E_s} \quad \text{सूत्र से}$$

$$e = 12 \times 10^{-6} \times 60 + \frac{10{\cdot}276}{2 \times 10^5}$$

$$= 7{\cdot}2 \times 10^{-4} + 5{\cdot}138 \times 10^{-5}$$

$$= 7{\cdot}7138 \times 10^{-4} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 46. 25 mm व्यास की एक इस्पात की छड़ 25 mm आन्तरिक व्यास एवं 35 mm बाह्य व्यास की पीतल से बनी नली में जाती है (चित्र 1.43)। छड़ पर लगे नट को इतना कसा जाता है कि छड़ में $10\ \text{N/mm}^2$ का प्रतिबल उत्पन्न हो जाए। तदुपरान्त नली में तापमान 60°C बढ़ाया जाता है। छड़ एवं नली में अन्तिम प्रतिबल क्या होगा? $E_s = 2 \times 10^5\ \text{N/mm}^2$, $\alpha_s = 0{\cdot}0000117\ /°\text{C}$, $E_b = 0{\cdot}8 \times 10^5\ \text{N/mm}^2$ तथा $\alpha_b = 0{\cdot}000019\ /°\text{C}$ मानिये। (U.P.)



चित्र 1.43

हल—नट को कसने पर इस्पात में प्रतिबल $= 10\ \text{N/mm}^2$ (तनाव)

$\therefore$ इस्पात छड़ का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल,

$$A_s = \frac{\pi}{4} \times 25^2 = 490{\cdot}8\ \text{mm}^2$$

तथा पीतल की नली का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल,

Scanned with CamScanner

$$A_b = \frac{\pi}{4} \times (35^2 - 25^2) = 471 \text{ mm}^2$$

Nut-Bolt के प्रतिबन्ध द्वारा, इस्पात छड़ पर तनाव बल = पीतल की नली पर संपीडन बल

$$p_s \times A_s = p_b \times A_b$$

अत: पीतल की नली में संपीडन प्रतिबल

$$p_b = \frac{p_s \times A_s}{A_b} = \frac{10 \times 490 \cdot 8}{471} = 10 \cdot 42 \text{ N/mm}^2 \text{ (संपीडन)}$$

माना कि, तापमान बढ़ने के कारण इस्पात में तनाव प्रतिबल p_s' तथा पीतल में संपीडन प्रतिबल p_b' पैदा होता है।

$$\frac{p_s'}{E_s} + \frac{p_b'}{E_b} = t(\alpha_b - \alpha_s) \quad \text{(सूत्र)} \quad \ldots (1)$$

तथा

$$p_s' \times A_s = p_b' \times A_b \quad \text{(सूत्र)} \quad \ldots (2)$$

$$\therefore \quad p_b' = \frac{p_s' \times A_s}{A_b} = \frac{p_s' \times 490 \cdot 8}{471} = p_s' \times 0 \cdot 042$$

p_b' का मान सम्बन्ध (1) में रखने पर

$$p_s' \left[\frac{1}{2 \times 10^5} + \frac{1 \cdot 042}{0 \cdot 8 \times 10^5} \right] = 60 \, (0 \cdot 000019 - 0 \cdot 0000117)$$

$$\therefore \quad p_s' = 24 \cdot 3 \text{ N/mm}^2 \text{ (तनाव)}$$

तथा

$$p_b' = p_s' \times 1 \cdot 042 = 24 \cdot 3 \times 1 \cdot 042$$

$$= \mathbf{25 \cdot 32 \text{ N/mm}^2 \text{ (संपीडन)}} \quad \text{उत्तर}$$

$$\therefore \quad \text{इस्पात छड़ में अन्तिम प्रतिबल} = 10 + 24 \cdot 3$$

$$= \mathbf{34 \cdot 3 \text{ N/mm}^2 \text{ (तनाव)}} \quad \text{उत्तर}$$

तथा पीतल नली में अन्तिम प्रतिबल $= 10 \cdot 42 + 25 \cdot 32$

$$= \mathbf{35 \cdot 74 \text{ N/mm}^2 \text{ (संपीडन)}} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 47. किसी छड़ की लम्बाई 5 m तथा व्यास 2 cm है। यह दोनों सिरों पर जकड़ी है। इसका तापमान 30°C से 150°C तक बढ़ाया जाता है। यदि सिरों की जकड़ें 3 mm ढीली हो जायें तो छड़ पर बल ज्ञात कीजिये। $\alpha = 11 \times 10^{-6}$/°C तथा $E = 200 \text{ kN/mm}^2$।

हल—दिया है, $l = 5 \text{ m} = 5000 \text{ mm}$

व्यास (Dia) $d = 2 \text{ cm} = 20 \text{ mm}$

तापान्तर (Diff. in temperature), $t = 150 - 30 = 120°C$

∵ सिरों की जकड़ें (Grips) $\delta = 3 \text{ mm}$ लम्बाई से ढीली (yield) हो जाती हैं।

∴ $\Delta l = l\alpha t - \delta$ तथा विकृति (strain) $e = \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \left(\alpha t - \frac{\delta}{l} \right)$ (सूत्र)

तथा

प्रतिबल (stress) $p = eE$ $[\because E = p/e]$

Scanned with CamScanner

$\therefore$ $$p = \left(\alpha t - \frac{\delta}{l}\right) E \qquad \text{(सूत्र)}$$

अब जकड़ द्वारा लगा बल, $$F = p \times A$$

$$F = \left(\alpha t - \frac{\delta}{l}\right) E A \qquad \text{(सूत्र)}$$

$\therefore$ बल, $$F = \left(11 \times 10^{-6} \times 120 - \frac{3}{5000}\right) \times 2 \times 10^5 \times \frac{\pi (20)^2}{4}$$

$$= 45216 \text{ N} = 45{\cdot}216 \text{ kN}$$ उत्तर

विशेष : पहिये तथा टायर से सम्बन्धित प्रश्न

उदाहरण 48. इस्पात के एक पतले टायर को 60°C पर गर्म कर लकड़ी के 1 मी० व्यास के पहिये पर चढ़ाया जाता है। गर्म करने के पूर्व टायर का आन्तरिक व्यास क्या होना चाहिये? पहिये पर टायर का तापमान सामान्य होने पर टायर में परिधि प्रतिबल भी ज्ञात कीजिये। मानिये $\alpha_s = 10^{-5}$ प्रति °C एवं $E_s = 200$ GPa। (U.P.)

हल—दिया है, तापान्तर, $t = 60°\text{C}$

पहिये का व्यास (Dia of wheel) $D = 1\text{ m}$

टायर (Tyre) का आन्तरिक व्यास $d = ?$

तथा टायर की परिधि में प्रतिबल (Hoop stress) = ?

$\because$ हम जानते हैं कि टायर में परिधीय विकृति $e = \dfrac{D-d}{d}$ (सूत्र)

तथा परिधीय प्रतिबल (circumferential stress) or Hoop stress

$$p = eE \Rightarrow \left(\frac{D-d}{d}\right) E \qquad \text{(सूत्र)}$$

और तापान्तर $$t = \left(\frac{D-d}{d}\right) \times \frac{1}{\alpha} \qquad \text{(सूत्र)}$$

$\therefore$ $$60 = \left(\frac{1-d}{d}\right) \times \frac{1}{10^{-5}}$$

या $$\left(\frac{1-d}{d}\right) = \frac{60}{10^5} = \frac{6}{10000}$$

$\therefore$ $$10000 - 10000\, d = 6d$$

या $$10006\, d = 10000$$

या $$d = 0{\cdot}9994 \text{ metre}$$

या $$d = 999{\cdot}4 \text{ mm}$$ उत्तर

$\therefore$ परिधि पर प्रतिबल (Hoop stress) $(p) = \left(\dfrac{D-d}{d}\right) E$ सूत्र से

Scanned with CamScanner

$$= \left(\frac{1000 - 999{\cdot}4}{999{\cdot}4}\right) \times 200 \times 1000 \text{ N/mm}^2$$

$$= 120{\cdot}07 = 120 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

उदाहरण 49. एक दृढ़ पहिये पर, जिसका व्यास 1·2 m है, 1·19952 m अन्तः व्यास का टायर गर्म करके तथा सिकोड़कर चढ़ाया जाता है। चढ़ने के पश्चात् टायर में परिधीय प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये। टायर के लिये $E = 200$ GPa मानिये। टायर चढ़ाने के लिये उसे न्यूनतम कितने तापमान तक गर्म करने की आवश्यकता पड़ेगी? $\alpha = 1 \times 10^{-5}/\text{K}$

हल—दिया है, पहिये का व्यास $D = 1{\cdot}2 \text{ m}$

टायर का व्यास $d = 1{\cdot}19952 \text{ m}$

∴ परिधीय प्रतिबल (Hoop stress) $p = \left(\frac{D-d}{d}\right) E$ सूत्र से

$$p = \left(\frac{1{\cdot}2 - 1{\cdot}19952}{1{\cdot}19952}\right) \times 200 \times 1000 = 80{\cdot}03 \text{ N/mm}^2$$

∴ प्रतिबल, $p = 80 \text{ N/mm}^2$ उत्तर

अब तापान्तर, $t = \left(\frac{D-d}{d}\right)\frac{1}{\alpha}$ सूत्र से

$$t = \left(\frac{1{\cdot}2 - 1{\cdot}19952}{1{\cdot}19952}\right) \times \frac{1}{1 \times 10^{-5}} = 40°\text{C}$$ उत्तर

उदाहरण 50. 80 सेमी व्यास के एक पहिये पर गर्म करके इस्पात का टायर चढ़ाया जाता है। यदि पहिया दृढ़ माना जाए और सिकुड़ने के बाद टायर में परिधीय प्रतिबल 100 N/mm² हो तो टायर का आन्तरिक व्यास क्या होगा? पहिये पर टायर चढ़ाने के लिये उसे कितने तापमान तक गर्म करना होगा यदि पहिये का तापमान 25°C है। टायर के लिये $\alpha = 11 \times 10^{-6}/°\text{C}$ तथा $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$। (U.P.)

हल—∵ पहिये का व्यास $D = 800 \text{ mm}$ (दिया है)

टायर का आन्तरिक व्यास, $d = ?$ (ज्ञात करना है)

तापान्तर, $t = 25°\text{C}$ पर परिधीय प्रतिबल $p = 100 \text{ N/mm}^2$ है।

∴ प्रतिबल, $p = \left(\frac{D-d}{d}\right) E$ सूत्र से,

∴ $$100 = \left(\frac{800-d}{d}\right) \times 2 \times 10^5$$

या $$\frac{800-d}{d} = \frac{5}{10000}$$

या $$5d = 8 \times 10^6 - 10000\,d$$

या $$10005\,d = 8 \times 10^6$$

या $$d = 799{\cdot}6 \text{ mm}$$

Scanned with CamScanner

$= 0{\cdot}7996$ metre उत्तर

अब तापान्तर, $t = \frac{D-d}{d}\frac{1}{\alpha} = \frac{800-799{\cdot}6}{799{\cdot}6} \times \frac{1}{11\times10^{-6}} = 45{\cdot}47°C$

∴ अन्तिम तापमान (last temperature) $= 25°C + 45{\cdot}47°C = 70{\cdot}47°C$ उत्तर

अभ्यास (Exercises)

1. निम्न रिक्त स्थानों की पूर्ति उचित शब्दों से कीजिये—

(i) प्रतिबल (Stress) का S.I. में मात्रक (Unit) ..... होता है।

(ii) किसी वस्तु के इकाई क्षेत्रफल पर कार्य करने वाले आन्तरिक प्रतिरोधी बल को ..... कहते हैं।

(iii) प्रतिबल की इकाई प्राय: ..... प्रयोग की जाती है।

(iv) बल के प्रभाव में किसी वस्तु के रूप व आकार में हुए परिवर्तन या विरूपण (Deformation) को ..... कहते हैं।

(v) कर्तन या स्पर्शी प्रतिबल (Shear or Tangential Stress) भार के तल के ..... कार्य करते हैं।

(vi) विकृति (Strain), $e = \frac{\text{.....}}{\text{प्रारम्भिक आकार}}$

(vii) पॉइजन अनुपात (Poisson's Ratio) $\frac{1}{m} = \frac{\text{.....}}{\text{.....}}$ सूत्र होता है।

(viii) प्रतिबल या प्रतिबल तीव्रता = यंग मापांक $(E) \times$ .....

(ix) प्रत्यास्थता गुणांक, $E = \frac{\text{अनुदैर्घ्य प्रतिबल}}{\text{.....}}$

(x) ..... विकृति को ..... विकृति से भाग देकर पॉइजन अनुपात $\left(\frac{1}{m}\right)$ ज्ञात किया जाता है।

(xi) अन्तिम प्रतिबल (Ultimate Stress) तथा कार्यकारी प्रतिबल (Working Stress) के अनुपात को ..... कहते हैं।

(xii) प्रत्यास्थता की सीमा (Elastic Limit) के अन्दर उत्पन्न सीधे प्रतिबल एवं उसके कारण उपजी आयतन विकृति के अनुपात को ..... कहते हैं।

(xiii) जिस गुण के कारण पदार्थ कटने, खरोंचे जाने या गड्ढा बनने का विरोध करता है, पदार्थ को ..... कहलाती है।

(xiv) कर्तन प्रतिबल (Shear Stress) तथा कर्तन विकृति (Shear Strain) के अनुपात को ..... कहते हैं।

(xv) E तथा G में सम्बन्ध सूत्र $E = 2G[1 + ...]$ है।

(xvi) E तथा K में सम्बन्ध सूत्र $E = 3K[1 - .....]$ है।

(xvii) अक्षीय भार की स्थिति में वस्तु (या पदार्थ) की लम्बाई में परिवर्तन (Δl) तथा प्रारम्भिक लम्बाई (l) के अनुपात को ..... विकृति कहते हैं।

(xviii) परस्पर लम्बरूप तीनों दिशाओं में विकृतियों के बीजगणितीय योग को ..... कहते हैं।

(xix) किसी धरन (Beam) में ..... के कारण तनाव तथा सम्पीडन प्रतिबल उत्पन्न होते हैं।

Scanned with CamScanner

(xx) नरम इस्पात (Mild Steel) के तनाव परीक्षण के समय प्रतिबल विकृति वक्र (Stress-strain curve) के किस भाग में बिना बल बढ़ाये विकृति बढ़ती है, उस भाग (Range) को ..... कहते हैं।

(xxi) तनाव भार वस्तु को ..... है, जबकि संपीडन भार वस्तु को ..... है।

(xxii) हुक के नियमानुसार, उत्पन्न अनुदैर्ध्य प्रतिबल $\propto$ ..... ।

उपरोक्त प्रश्न के उत्तर

(i) N/mm^2, (ii) प्रतिबल या प्रतिबल तीव्रता, (iii) N/mm^2, (iv) विकृति (Strain), (v) समानान्तर (Parallel), (vi) आकार में परिवर्तन, (vii) $\frac{\text{पार्श्व विकृति (Lateral Strain)}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति (Longitudinal Strain)}}$, (viii) विकृति (Strain), (ix) अनुदैर्ध्य विकृति, (x) पार्श्व, अनुदैर्ध्य, (xi) सुरक्षा गुणांक (Factor of Safety), (xii) आयतन मापांक (Bulk Modulus), (xiii) कठोरता (Hardness), (xiv) कर्तन मापांक या दृढ़ता गुणांक (G), (xv) $\frac{1}{m}$, (xvi) $\frac{2}{m}$, (xvii) अनुदैर्ध्य, (xviii) आयतन विकृति, (xix) अक्षीय भार या बल, (xx) पराभव (Yield), (xxi) खींचता, दबाता, (xxii) अनुदैर्ध्य विकृति।

2. निम्न की परिभाषित कीजिये एवं संक्षेप में समझाइये–

(i) प्रतिबल (Stress) एवं इसके प्रकार

(ii) विकृति (Strain) एवं इसके प्रकार

(iii) प्रत्यास्थता सीमा (Elastic Limit)

(iv) हुक का नियम (Hooke's Law) **(U.P. 2002)**

(v) तापीय प्रतिबल (Thermal stress) **(U.K. 2011, 12; U.K. 2013 W)**

(vi) कर्तन विकृति (Shear Strain) **(U.P. 2003; U.K. 2011, S)**

(vii) पार्श्व विकृति (Lateral Strain)

(viii) आयतन विकृति (Volumetric Strain)

(ix) कर्तन प्रतिबल (Shear Stress)

(x) सीधे भार तथा सीधे प्रतिबल (Direct Load and Direct Stress) **(U.P. 2012)**

(xi) यंग मापांक या प्रत्यास्थता गुणांक

(xii) कर्तन मापांक (Modulus of Rigidity)

(xiii) आयतन मापांक (Bulk Modulus) **(U.P. 2002, 12)**

(xiv) पॉइजन अनुपात (Poisson's Ratio) **(U.P. 2000)**

(xv) सुरक्षा गुणांक (Factor of Safety)

(xvi) पराभव बिन्दु एवं प्रतिबल (Yield Point & Stress) **(U.P. 2010)**

(xvii) प्रत्यास्थता (Elasticity) **(U.P. 2003, 10, 11, 12-S)**

(xviii) प्लास्टिकता (Plasticity) **(U.P. 2003)**

(xix) कठोरता (Hardness)

(xx) तन्यता (Tenacity/Ductility)

(xxi) कुट्टयता (Malleability) **(U.P. 2013)**

(xxii) चीमड़पन (Toughness) **(U.P. 2013)**

(xxiii) भंगुरता (Brittleness)

(U.P. 2013)

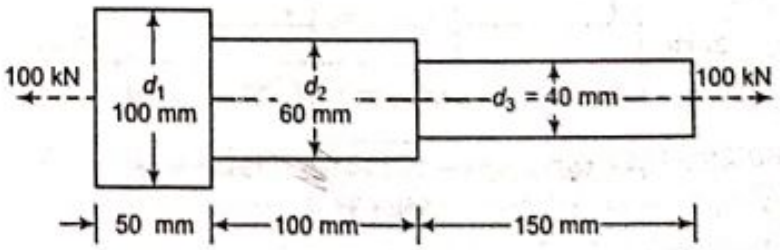
(U.P. 2013)

Scanned with CamScanner

3. निम्न में अन्तर कीजिये–
   (i) बल और प्रतिबल
   (ii) प्रतिबल और विकृति
   (iii) तन्य प्रतिबल और सम्पीड्य प्रतिबल
   (iv) अन्तिम भार तथा कार्यकारी भार
   (v) प्रत्यास्थता सीमा तथा समानुपाती सीमा
   (vi) कठोरता तथा चीमड़पन (Hardness & Toughness)
   (vii) अन्तिम प्रतिबल तथा कार्यकारी प्रतिबल (Ultimate Stress & Working Stress) **(U.P. 2002, 10)**
4. मृदु इस्पात के लिये तनन परीक्षण में प्रतिबल-विकृति (भार-विरूपण) आरेख बनाइये। इसके बिन्दुओं को अंकित कर नाम लिखिये तथा उनकी परिभाषा लिखिये। **(U.P. 2006, 08, 11, 12)**
5. संयुक्त छड़ (Composite Bar) को समझाइये तथा उपयोग लिखिये।
6. यदि मृदु इस्पात (Mild Steel) को स्थैतिक तनन में उसके विभाजन तक परीक्षण किया जाये तो उसके लिये प्रतिबल-विकृति वक्र दर्शाइये तथा स्पष्ट कीजिये– **(U.P. 2006, 08, 11, 12)**
   (अ) पराभव प्रतिबल, (ब) समानुपाती सीमा,
   (स) चरम प्रतिबल, तथा (द) विभंजन प्रतिबल।
7. विभंजन प्रतिबल का मान चरम प्रतिबल से कम क्यों होता है? समझाइये।
8. निम्नलिखित को परिभाषित कीजिये–
   (i) कार्यशील प्रतिबल (Working Stress)
   (ii) अपरूपण विकृति (Shear Strain)
   (iii) आयतन प्रत्यास्थता गुणांक (Bulk Modulus)
   (iv) तनन प्रतिबल (Tensile Stress)
   (v) पराभव बिन्दु (Yield Point) **(U.P. 2010)**
   (vi) सुरक्षा गुणांक (Factor Safety) **(U.P. 2010)**
9. मृदु इस्पात (Mild Steel) के मुख्य यांत्रिक गुण लिखिये। उनके महत्व को समझाइये। **(U.P. 2012)**

विशेष : प्रतिबल-विकृति एवं लम्बाई में परिवर्तन (Δl) पर आधारित

10. एक इस्पात के तार द्वारा 2·5 kN भार को उठाना है। तार का न्यूनतम व्यास कितना होना चाहिये जिससे उसमें प्रतिबल 100 kN/mm^2 से अधिक न हो? यदि तार की लम्बाई 5 मीटर हो तो तार की बढ़ोत्तरी (Δl) को भी ज्ञात कीजिये। $E = 2\times10^5$ N / mm^2 मान लीजिये।
    [उत्तर : $d = 0{\cdot}18$ mm, $\Delta l = 2456$ mm]
11. इस्पात (Steel) की एक गोल छड़, जिसका व्यास 2 सेमी है, पर 30 kN का तनन बल लगा है। छड़ में तनन प्रतिबल ज्ञात कीजिये। अगर उसकी लम्बाई 30 सेमी हो तो बढ़ोत्तरी (Δl) की गणना कीजिये। $E_s = 2\times10^5$ N / mm^2 मानिये।



चित्र 1.44

Scanned with CamScanner

[उत्तर : $p = 95{\cdot}5\ N/mm^2$, $\Delta l = 0{\cdot}0001432$ mm]

12. एक 4 मीटर लम्बी इस्पात की छड़, जिसका अनुप्रस्थ (अनुप्रस्थ-काट) 3 cm × 2 cm है, पर 50 kN का अक्षीय तनन बल वहन करती है। प्रतिबल, विकृति और छड़ की लम्बाई में परिवर्तन ज्ञात कीजिये, यदि $E = 2\times10^5\ N/mm^2$ है।

[उत्तर : $p = 83{\cdot}33\ N/mm^2$, $e = 4{\cdot}167\times10^{-4}$, $\Delta l = 1{\cdot}667$ mm]

13. चित्र 1.44 में प्रदर्शित इस्पात की छड़ के लिये निम्नलिखित ज्ञात कीजिये–

(i) अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल, (ii) अधिकतम तथा न्यूनतम विकृति,

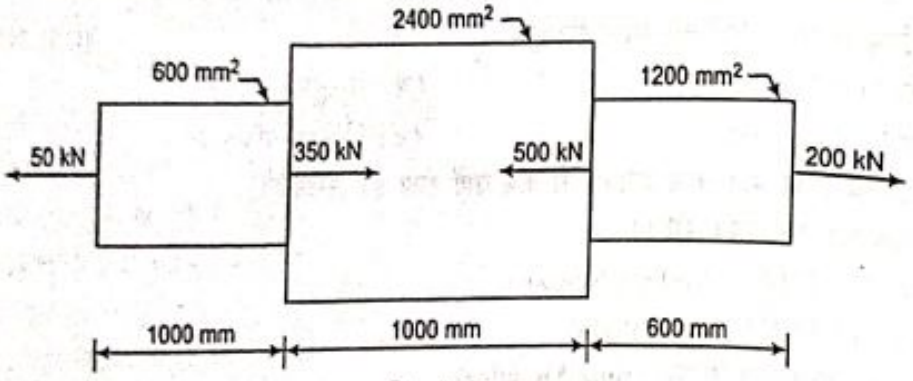
(iii) छड़ की लम्बाई में परिवर्तन।

दिया है, तनन बल = 100 kN, $E = 2\times10^5\ N/mm^2$ **(U.P. 2011-S)**

[उत्तर : $79{\cdot}6\ N/mm^2$, $12{\cdot}7\ N/mm^2$, $3{\cdot}98\times10^{-4}$, $0{\cdot}635\times10^{-4}$, 0·0805 mm]

14. चित्र 1.45 में दर्शाई छड़ की पूर्ण लम्बाई में परिवर्तन ज्ञात कीजिये। ($E = 2\times10^5\ N/mm^2$)

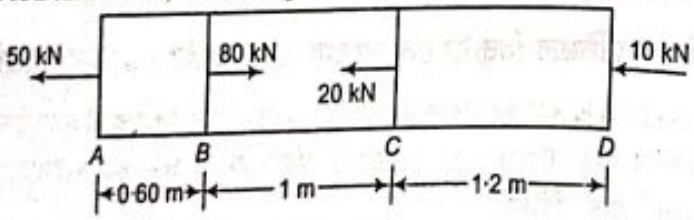
[उत्तर : 0·2916 mm]



चित्र 1.45

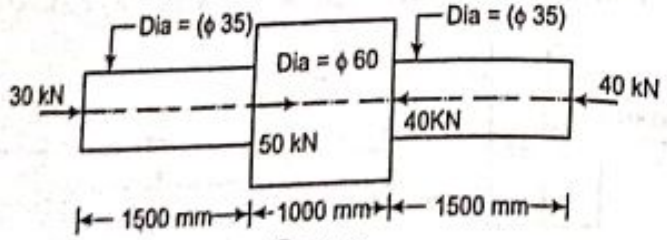
15. एक पीतल की छड़ की अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल 1000 mm^2 है। इस छड़ पर चित्र 1.46 के अनुसार बल लगे हैं; छड़ की लम्बाई में कुल परिवर्तन ज्ञात कीजिये। $E = 1{\cdot}06\times10^5\ N/mm^2$ **(U.P. 2010; U.K. 2011)**

[उत्तर : $\Delta l = -0{\cdot}1132$ mm लम्बाई कम होगी।]



चित्र 1.46

16. एक स्टील की स्टैण्ड छड़ पर चित्र 1.47 के अनुसार बल लगे हैं। छड़ की पूर्ण लम्बाई में परिवर्तन ज्ञात कीजिये जबकि $E = 200$ GPa है। **(U.P. 2002, U.K. 2010)**

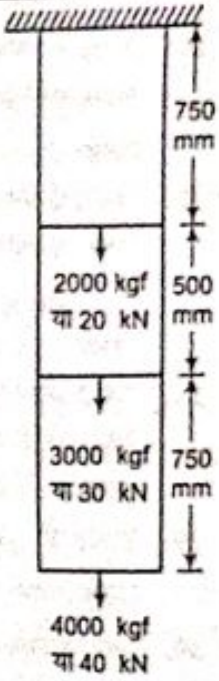


चित्र 1.47

[उत्तर : $\Delta l = 0{\cdot}687$ mm की लम्बाई में कमी]

Scanned with CamScanner

17. चित्र 1.48 में दिखायी गयी इस्पात की बनी 2 मीटर लम्बी 6 वर्ग सेमी क्षेत्रफल वाली एकसमान काट की छड़ पर भार लगा है। छड़ की लम्बाई में कुल वृद्धि ज्ञात कीजिये। $E = 2\times10^5$ N / mm^2 है। [उत्तर : $\Delta l = 1{\cdot}1$ mm]



चित्र 1.48

18. 40 सेमी० लम्बाई, 4·5 सेमी० चौड़ाई और 5 सेमी० गहराई वाले धातु की एक छड़ के लिये प्रत्यास्थता गुणांक तथा पॉयजन का अनुपात ज्ञात कीजिये। छड़ पर 450 kN का अक्षीय सम्पीडन भार लगाया गया है। छड़ की लम्बाई में 0·09 सेमी० की कमी तथा चौड़ाई में 0·003 सेमी० की वृद्धि होती है। **(U.P. 2002)**

[उत्तर : $0{\cdot}9\times10^5$ N / mm^2, $\frac{1}{m} = 0{\cdot}3$]

19. एक 550 मिमी० लम्बा ताँबे का रॉड जिसका 200 मिमी० हिस्सा 30 मिमी० व्यास का, 200 मिमी० 20 मिमी० व्यास का, बाकी हिस्सा 10 मिमी० व्यास का है। प्रत्येक हिस्से में प्रतिबल का मान बताइए तथा रॉड का सम्पूर्ण खिंचाव बताइए यदि भार 30 kN का लगा हो। मानिये $E = 100$ kN/mm^2 है। **(U.P. 2012)**

[उत्तर : 42·46 N/mm^2, 95·54 N/mm^2, 382·16 N/mm^2, $\Delta l = 0{\cdot}84$ mm]

20. किसी भाप इन्जन (Steam Engine) में पिस्टन का व्यास 200 mm है। संयोजक दण्ड (Connecting Rod) की लम्बाई 1·5 मीटर तथा इसकी अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 20 cm^2 है। यदि सिलिण्डर में भाप का अधिकतम दाब 4 N/mm^2 है तो संयोजक दण्ड की लम्बाई में कमी तथा प्रतिबल ज्ञात कीजिये। $E = 2\times10^5$ N / mm^2 है।

[उत्तर : $f = 62{\cdot}8$ N / mm^2, $\Delta l = 0{\cdot}471$ mm]

21. किसी पैट्रोल इंजन के पिस्टन का व्यास 20 सेमी है। सिलिण्डर में गैसों का दाब 2·5 N / mm^2 है। सिलिण्डर कवर को चार बोल्ट लगाकर कसा गया है। यदि प्रत्येक बोल्ट का व्यास 2 सेमी तथा लम्बाई 60 सेमी है तो प्रत्येक बोल्ट में उत्पन्न अधिकतम तनाव प्रतिबल एवं लम्बाई में वृद्धि ज्ञात कीजिये। दिया है $E = 2\times10^5$ N / mm^2।

[उत्तर : 62·5 N / mm^2, $\Delta l = 0{\cdot}1875$ mm]

22. हाइड्रॉलिक लिफ्ट की छड़ का व्यास 3 सेमी तथा लम्बाई 12 मीटर है। इसके साथ जुड़े प्लंजर (Plunger) का व्यास 12 सेमी है और इस पर क्रियाकारी दाब 8 N/mm^2 है। यदि $E = 2\times10^5$ N / mm^2 है तो छड़ की लम्बाई में परिवर्तन ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 7·68 mm]

23. 3 सेमी मोटी प्लेट में 25 mm व्यास का छेद किया जाता है। यदि प्लेट के पदार्थ का अधिकतम कर्तन प्रतिबल 300 N/mm^2 हो तो प्लेट में छेद करने के लिये आवश्यक बल ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 706·5 kN]

24. एक खोखला इस्पात के स्तंभ (column) पर $1{\cdot}9\times10^6$ N का अक्षीय भार लगा है, इसके लिये चरम प्रतिबल (Utimate Stress) 480 N/mm^2 उत्पन्न होता है। यदि स्तंभ का बाहरी व्यास 20 सेमी० हो तो उसका आन्तरिक व्यास ज्ञात कीजिये। सुरक्षा गुणांक (Factor of Safety) का मान 4 मान लीजिये। **(U.P. 2001)**

[उत्तर : $D = 140{\cdot}8$ mm]

विशेष : पार्श्व विकृति तथा पॉइजन अनुपात पर आधारित प्रश्न

25. एक मृदु इस्पात छड़ पर जिसका व्यास 1 सेमी है। 22 kN का भार लगाये जाने से उसके व्यास में 0·0004 सेमी का परिवर्तन हो जाता है। यदि $E = 200$ GN/m^2 हो तो पॉइजन अनुपात ज्ञात करें। [उत्तर : 0·2856]

Scanned with CamScanner

26. 20 mm व्यास की एक वृत्ताकार अनुप्रस्थ काट तथा 3 मीटर लम्बाई की एक ऊर्ध्वाधर ताँबे की छड़ पर 150 kN का तनाव बल लगा है। यदि पॉइजन अनुपात 0·25 तथा $E = 0{\cdot}9 \times 10^5$ N / mm^2 हो तो व्यास में कमी की गणना कीजिये।

[उत्तर : 0·0265 mm]

27. 300 kN बल से एक 30 सेमी० लम्बाई, 5 सेमी० चौड़ाई और 4 सेमी० मोटाई वाले इस्पात की छड़ को इसकी लम्बाई की दिशा में खींचा जाता है। इसके आयतन में परिवर्तन का मान ज्ञात कीजिये। $E = 2 \times 10^5$ N / mm^2 और पॉइसन (Poisson's) अनुपात 0·25 मान लीजिये। (U.P. 200

[उत्तर : $\Delta V = 2250$ mm^3]

28. एक 2 मीटर लम्बी छड़, जिसका आयताकार अनुप्रस्थ काट 60 मिमी × 50 मिमी है, 60 कि० न्यूटन का अक्षीय तनाव वहन करती है। छड़ की परिवर्तित विमाओं की गणना कीजिये, यदि $m = 3{\cdot}6$ एवं $E = 200$ GPa है।

[उत्तर : लम्बाई = 2·002 m, अनुप्रस्थ काट 59·9983 × 49·9986 mm]

29. इस्पात की 20 mm व्यास व 200 mm लम्बी छड़ की 25 kN के तनाव बल से लम्बाई $7{\cdot}8 \times 10^{-2}$ mm बढ़ जाती है और उसके व्यास में $2{\cdot}32 \times 10^{-3}$ mm परिवर्तन होता है। पॉइजन अनुपात का मान ज्ञात करें। [उत्तर : 0·29]

30. एक आयताकार काट की छड़ की लम्बाई 2 मीटर, चौड़ाई 8 सेमी तथा गहराई 5 सेमी है। इस पर क्रमश: लम्बाई की दिशा में 150 N/mm^2 का तनाव, चौड़ाई की दिशा में 120 N/mm^2 का सम्पीडन तथा गहराई की दिशा में 100 N/mm^2 का तनाव प्रतिबल लगा है। छड़ की विमाओं तथा आयतन में परिवर्तन का मान ज्ञात कीजिये जबकि—

$E = 2 \times 10^6$ kgf / cm^2 (2×10^5 N / mm^2) तथा $\frac{1}{m} = \frac{1}{4}$ है।

[उत्तर : $\Delta l = 1{\cdot}55$ mm वृद्धि, $\Delta b = 0{\cdot}073$ mm कमी,
$\Delta t = 0{\cdot}023125$ mm वृद्धि, $\Delta V = 2600$ mm^3 वृद्धि]

31. एक 30 mm व्यास तथा 300 mm लम्बाई की छड़ (Bar) पर 56 kN का तनाव भार (Tensile Load) लगा है। पाठ्यांकों (Reading) से ज्ञात हुआ कि इसकी लम्बाई में वृद्धि 0·12 mm तथा व्यास में संकुचन (Contraction in Diameter) 0·0036 mm है। तो गणना कीजिये—(i) पॉइजन अनुपात (Poisson's Ratio), (ii) तीनों प्रकार के मापांकों के मान (Values of Three Moduli) अर्थात् E, G and K.

[उत्तर : $\frac{1}{m} = 0{\cdot}3$, $E = 1{\cdot}9815 \times 10^5$ N/mm^2, G या $C = 0{\cdot}762 \times 10^5$ N/mm^2 तथा $K = 1{\cdot}65 \times 10^5$ N/mm^2]

विशेष : संयुक्त छड़ों पर आधारित प्रश्न

32. समान लम्बाई की दो छड़ें A तथा B 60 सेमी० की दूरी पर ऊर्ध्वाधर लटकी हैं तथा एक क्षैतिज छड़ को आलम्बित करती हैं। यह छड़ क्षैतिज ही रहती है। जब एक 50 kN का भार A से 20 सेमी की दूरी पर लगाया जाता है तो छड़ B में 50 N/mm^2 का प्रतिबल उत्पन्न होता है। छड़ A में प्रतिबल तथा A व B की काट के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये, जबकि पदार्थों के यंग मापांक इस प्रकार हैं—$E_A = 2 \times 10^5$ N/mm^2 तथा $E_B = 0{\cdot}9 \times 10^5$ N/mm^2।

[उत्तर : 111 N/mm^2, 300 mm^2, 333 mm^2]

33. इस्पात तथा ताँबे की एक संयुक्त छड़ की कुल काट का क्षेत्रफल 20 सेमी^{2} है जिसमें इस्पात का क्षेत्रफल 8 सेमी^{2} है। प्रत्येक छड़ की लम्बाई 50 सेमी है। संयुक्त छड़ पर 28 T का तनन बल लगाया गया है। दोनों पदार्थ में उत्पन्न प्रतिबल तथा छड़ की लम्बाई में वृद्धि ज्ञात कीजिये। $E_s = 2 \times 10^6$ kg/cm^2 तथा $E_c = 1 \times 10^6$ kg/cm^2 है।

[उत्तर : 1000 kg/cm^2, 2000 kg/cm^2, 0·5 mm]

34. 4 सेमी व्यास की एक ताँबे की छड़ 4 सेमी आन्तरिक व्यास तथा 5 सेमी बाह्य व्यास की इस्पात की ट्यूब से घिरी हुई है। प्रत्येक की लम्बाई 80 सेमी है। समुच्चय (Assembly) को 165 kN के अक्षीय भार द्वारा सम्पीडित किया जाता है। प्रत्येक

Scanned with CamScanner

पदार्थ में उत्पन्न प्रतिबल तथा समुच्चय में उभयनिष्ठ संकुचन ज्ञात कीजिये। $E_s = 2\times10^5$ N/mm^2, $E_c = 1\times10^5$ N/mm^2

[उत्तर : 123·586 N/mm^2, 61·793 N/mm^2, 0·494 mm] (उ० प्र० 2010)

35. एक इस्पात की बनी छड़ की लम्बाई 30 सेमी तथा व्यास 2 सेमी है। यह एक ट्यूब के अन्दर फिट की गयी है। ट्यूब का बाहरी व्यास 2·5 सेमी तथा भीतरी व्यास 2 सेमी है। इस समुच्चय (Assembly) पर 1000 kgf का अक्षीय दाब है। ट्यूब तथा छड़ में प्रतिबल ज्ञात करें तथा छड़ की लम्बाई का परिवर्तन ज्ञात करें। $E_{\text{ट्यूब}} = 0{\cdot}8\times10^6$ kgf/cm^2, $E_{\text{छड़}} = 2\times10^6$ kgf/cm^2

[उत्तर : 259·79 kgf/cm^2, 103·9 kgf/cm^2, 0·0039 cm]

36. एक प्रतिबलित कंक्रीट स्तंभ का व्यास 150 mm तथा लम्बाई 2·5 m है। इसमें मृदु इस्पात की 15 mm व्यास वाली छः छड़ें परिच्छेद में सममितीय रूप से आबद्ध हैं। स्तम्भ पर 100 kN का भार लगाया गया है। कंक्रीट तथा इस्पात में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए। स्तंभ की लम्बाई में परिवर्तन कितना होगा यह भी गणना कीजिए। इस्पात तथा कंक्रीट के प्रत्यास्थता मापांक क्रमशः 200 GPa तथा 10 GPa मान लीजिए तथा स्तंभ का भार नगण्य मान लीजिए।

[उत्तर : 2·62 N/mm^2, 52·4 N/mm^2, 0·655 mm]

(U.P. 2005, 09, 12)

37. एक 450 × 450 मिमी काट के छोटे स्तम्भ पर 2 kN का भार लगा है। इसमें 10 मिमी० व्यास की इस्पात की चार छड़ें स्तम्भ के चारों कोनों पर पूरी लम्बाई में लगी हैं। कंक्रीट तथा इस्पात में प्रतिबलों के मान ज्ञात कीजिए। $E_{\text{steel}} = 2{\cdot}1\times10^5$ N/mm^2 तथा $E_{\text{conct.}} = 1{\cdot}4\times10^4$ N/mm^2 मान लें।

[U.P. 2014 (S)]

[उत्तर : 2·847 MN/m^2, 42·71 MN/m^2]

38. कंक्रीट (Concrete) के बने एक स्तम्भ की काट 200 × 300 mm है। इसमें चार इस्पात की छड़ें स्तम्भ के चारों कोनों पर उसकी पूरी लम्बाई में लगी हैं। इस स्तम्भ पर 400 kN का दबाव बल (Compressive Force) अक्षीय (Axial) लगता है। यदि इस्पात तथा कंक्रीट के लिये प्रत्यास्थता गुणांक क्रमशः $2{\cdot}0\times10^5$ तथा $1{\cdot}6\times10^4$ N/mm^2 हो तो दोनों पदार्थों में प्रतिबल ज्ञात कीजिये। प्रत्येक छड़ का व्यास 15 mm है।

(U.K. 2012, S)

[उत्तर : $p_s = 73{\cdot}375$ N/mm^2, $p_c = 5{\cdot}87$ N/mm^2]

39. कंक्रीट (Concrete) के बने एक खम्भे की काट 30 × 30 सेमी है। इसमें चार स्टील की छड़ें खम्भे के चारों कोनों पर पूरी लम्बाई में लगी हैं। इस खम्भे पर 520 kN का अक्षीय दबाव बल लगता है। प्रत्येक छड़ की अनुप्रस्थ काट 2·5 सेमी^{2} है। स्टील के लिये E का मान कंक्रीट के E के मान से 15 गुना है। प्रत्येक स्टील छड़ तथा कंक्रीट में प्रतिबल ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : 75 N/mm^2, 5 N/mm^2]

40. इस्पात (Steel) तथा ताँबे (Copper) की एक संयुक्त छड़ (Composite Bar) की कुल काट का क्षेत्रफल 2100 mm^2 है जिसमें इस्पात का क्षेत्रफल 900 mm^2 है। छड़ की कुल लम्बाई 300 mm है तथा इस पर 320 kN का तनाव भार (Tensile load) लगता है। दोनों पदार्थों में प्रतिबल तथा छड़ की लम्बाई में वृद्धि ज्ञात कीजिये। यहाँ $E_{steel} = 200$ kN/mm^2 तथा $E_{Copper} = 90$ kN/mm^2 है।

(U.K. 2010, W)

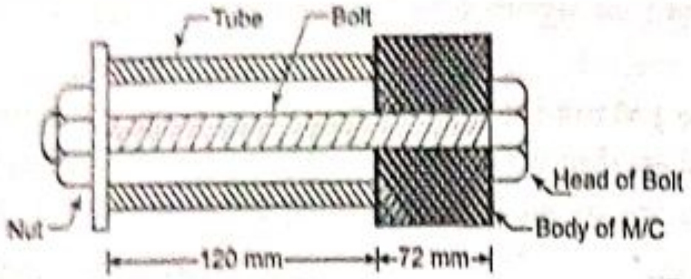
[उत्तर : 222·139 N/mm^2, 100·06 N/mm^2, 0·3335 mm]

41. चित्र 1.49 के अनुसार ढलवाँ लोहे की दृढ़ बॉडी में से होकर एक बोल्ट गुजारा जाता है तथा यह एक ट्यूब के अन्दर से होता हुआ ढिबरी की सहायता से ट्यूब को जोड़ता है। बॉडी में बोल्ट की लम्बाई 72 mm तथा ट्यूब की लम्बाई 120 mm है। बोल्ट का व्यास 24 mm तथा ट्यूब के अन्तः तथा बाह्य व्यास क्रमशः 28 mm तथा 36 mm हैं। चूड़ी की पिच 3 mm है। यदि ढिबरी को 20° के घुमाव से कस दिया जाता है तो बोल्ट और ट्यूब में उपजे प्रतिबल ज्ञात कीजिए। $E_{\text{बोल्ट}} = 210$ kN/mm^2, $E_{\text{ट्यूब}} = 90$ kN/mm^2 मानिये।

[उत्तर : ट्यूब में 77·63 N/mm^2 सम्पीडन, बोल्ट में 69·09 N/mm^2 तनाव]

(U.P.S. 2010)

Scanned with CamScanner



चित्र 1.49

विशेष : तापीय प्रतिबल (Temperature Stress) पर आधारित प्रश्न

42. 400 mm लम्बी तथा 60 mm व्यास की एक ताँबे की छड़ दोनों सिरों पर दृढ़तापूर्वक टिकी है। छड़ में कोई प्रतिबल नहीं है जबकि कमरे का ताप 25°C है। यदि छड़ का तापमान 50°C कर दिया जाये तो उसमें उत्पन्न अभिलम्ब प्रतिबल का परिमाण तथा स्वभाव पता कीजिये। यदि $\alpha_{Cu} = 18{\cdot}5 \times 10^{-6}/°C$ तथा $E_{Cu} = 110\ GN/m^2$।

[उत्तर : 50·875 N/mm^2, संपीड़न (U.P. 2003)

43. एक छड़ 10°C पर 2 मीटर लम्बी है। छड़ का प्रसार ज्ञात कीजिये जब तापमान बढ़ाकर 80°C कर दिया जाता है। यदि प्रसार रोक दिया जाता है तो पदार्थ में प्रतिबलों को ज्ञात कीजिये। $E = 1 \times 10^5\ N/mm^2$ तथा $\alpha = 1{\cdot}2 \times 10^{-5}$ प्रति °C प्रति mm मान लीजिये।

[उत्तर : 1·68 mm, 84 N/mm^2 (U.K. 2009, W

44. समान लम्बाई की ताँबे तथा इस्पात की छड़ें दोनों सिरों पर आपस में मजबूती से जुड़ी हैं। ताँबे की छड़ का व्यास 3·51 cm तथा इस्पात की छड़ का व्यास 4·06 cm है। इस संयुक्त छड़ का तापमान 35°C से 146°C तब बढ़ाया जाता है। दोनों छड़ों में प्रतिबल तथा लम्बाई में विकृति (strain) ज्ञात कीजिये। इस्पात के लिये $\alpha = 11{\cdot}7 \times 10^{-6}/°C$ ताँबे के लिये $\alpha = 17 \times 10^{-6}/°C$, $E_s = 200\ kN/mm^2$, $E_c = 100\ kN/mm^2$।

[उत्तर : ताँबे में 42·826 N/mm^2, इस्पात में 32·008 N/mm^2, $1{\cdot}4587 \times 10^{-3}$

45. एक इस्पाती छड़ एवं दो ताँबे की छड़ें हैं। सभी का क्षेत्रफल तथा लम्बाई समान है तथा जिनके दोनों सिरे दृढ़ता से जुड़े हुए हैं। इनका तापमान 15°C है। इस्पाती छड़ ताँबे की छड़ों के बीच में रखी है। इनका तापमान 250°C तक बढ़ाने पर प्रत्येक छड़ की लम्बाई 2 मिमी बढ़ जाती है। प्रत्येक छड़ की मूल लम्बाई तथा इनमें प्रतिबल ज्ञात करें।
$E_s = 2 \times 10^5\ N/mm^2$, $E_c = 10^5\ N/mm^2$, $\alpha_s = 12 \times 10^{-6}/°C$ तथा $\alpha_c = 18 \times 10^{-6}/°C$ लीजिये।

[उत्तर : 567·37 mm, $p_s = 141\ N/mm^2$, $p_c = 70{\cdot}5\ N/mm^2$ (U.P. 200

46. पीतल की एक ट्यूब का अन्त: व्यास 40 mm तथा दीवार की मोटाई 12·5 mm है। इसकी लम्बाई 1500 mm है। इतनी ही लम्बी तथा 40 mm व्यास की इस्पात की एक छड़ ट्यूब के अन्दर घुसाकर दोनों सिरों पर ट्यूब के साथ जकड़ दी गई है। यदि इस संयुक्त छड़ का तापमान 60 K बढ़ा दिया जाये तो ट्यूब में प्रतिबल ज्ञात कीजिये।
पीतल के लिये, $E = 100\ GPa$, $\alpha = 18 \times 10^{-6}/°C$
तथा इस्पात के लिये, $E = 200\ GPa$, $\alpha = 11 \times 10^{-6}/°C$

[उत्तर : 23·07 MP

47. एक 1·2 m व्यास के दृढ़ लकड़ी के पहिये पर पतले स्टील टायर (Tyre) को गर्म करके तथा सिकोड़कर चढ़ाया जाता है। चढ़ने के बाद टायर में परिधीय प्रतिबल (Hoop Stress) 120 MN/m^2 तक सीमित है तो टायर का आन्तरिक व्या

Scanned with CamScanner

(inner dia) ज्ञात करें तथा टायर को चढ़ाने के लिये कितने न्यूनतम तापमान तक गर्म करने की आवश्यकता होगी? टायर के पदार्थ के लिये $E = 200\ \text{GN/m}^2$ तथा $\alpha = 12 \times 10^{-6}/°\text{C}$ मानिये। [उत्तर : $d = 1{\cdot}199$ m तथा $t = 69{\cdot}5°\text{C}$]

48. एक इस्पात (Steel) के घेरे (Ring) को 80°C तक गर्म करके पानी को एकत्र करने के लिये (For storing the water) बने एक ड्रम (Drum) पर चढ़ाया जाता है। ड्रम का व्यास 1·2 m है। इस्पात के Ring का गर्म करने से पूर्व का व्यास (d) ज्ञात करें तथा Ring में परिधीय प्रतिबल (Circumferential or Hoop Stress) ज्ञात कीजिये। $E = 210\ \text{kN/mm}^2$ तथा $\alpha_s = 12 \times 10^{-6}/°\text{C}$ है।

[उत्तर : $d = 1{\cdot}19988$ metre, $p = 20{\cdot}16\ \text{N/mm}^2$]

❑

Scanned with CamScanner

2 कर्तन बल एवं नमन आघूर्ण (SHEAR FORCE AND BENDING MOMENT)

2.1 परिचय (Introduction)

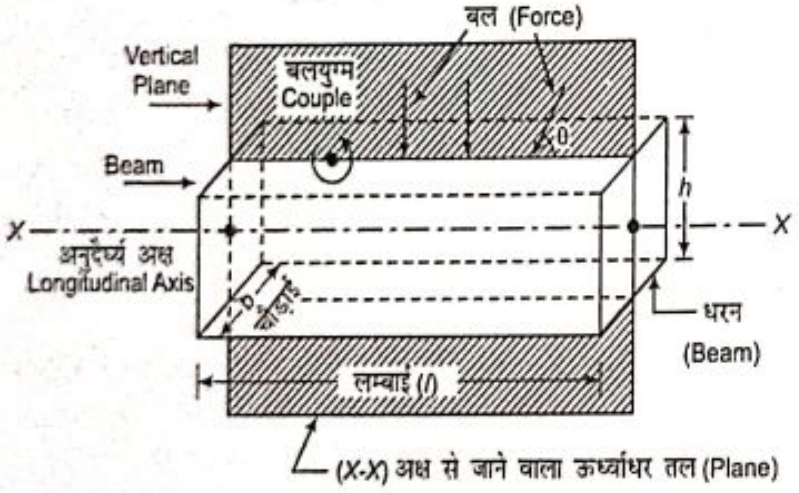
यदि किसी छड़ (Bar) या धरन (Beam) पर कुछ भार कार्य कर रहे हैं तो वह धरन (Beam) नीचे को लचक जाती है अर्थात् झुक जाती है अथवा हम कह सकते है कि धरन का नमन (Bending of beam) हो गया है। यह नमन (Bending) धरन (Beam) पर लगे भारों (Loads) या बलों के घूर्ण (Moments of Forces) के कारण होता है, जिसे नमन घूर्ण (Bending Moment) कहते हैं। धरन की नमन सामर्थ्य (Bending Strength of beam) के लिये धरन की विभिन्न अनुप्रस्थ काटों (at different sections of beam) पर नमन घूर्ण (Bending Moment) का मान जानना आवश्यक होता है, अधिकतम नमन आघूर्ण पर छड़ अथवा धरन अधिकतम झुकती है।

धरन पर लगे भार या बलों के कारण धरन की विभिन्न काटों पर कर्तन बल (Shear force) भी कार्य करता है, जिसको प्रत्येक काट पर बलों के बीजीय योग (Algebraic sum) से ज्ञात किया जाता है। इससे धरन की काटों पर कर्तन सामर्थ्य (Shearing Strength) का अनुमान लगाया जाता है।

2.2 धरन (Beam)

"धरन (Beam), समान काट (Uniform Section) वाली छड़ (Bar) है जिस पर लगने वाले भार (Loads) उसकी लम्बाई वाली अक्ष (Longitudinal Axis) के लम्बरूप (Perpendicular) कार्य करते हैं अथवा जिस पर कार्य करने वाले सभी बल या बलयुग्म (Couple) छड़ की लम्बाई की अक्ष (Longitudinal Axis) से जाने वाले समतल (Plane) में होते हैं।" (देखें चित्र 2.1) छड़ या धरन पर लगने वाले सभी बल उसका नमन (bending) करते हैं अर्थात् झुकाते हैं।

धरन की लम्बाई उसकी काट की मापों की तुलना में बहुत अधिक होती है। धरन का उपयोग पुलों या छतों में (In Bridges and in Roofs) भारों को वहन करने के लिये किया जाता है। जैसे—कमरों की छतों में छत की कड़ियों के रूप में तथा मशीनों के आधारों (Beds) में धरने (Beams) प्राय: इस्पात (steel), लकड़ी (wood) तथा कंक्रीट की बनाई जाती है।



चित्र 2.1

अधिक मजबूती (अथवा अधिक सामर्थ्यवान) होने के लिये धरन (Beam) के काट की गहराई (h), चौड़ाई (b) से अधिक होनी चाहिये अर्थात् $h > b$ होना चाहिये।

Scanned with CamScanner

2.3 धरन की टेकों के प्रकार (Types of Supports of the Beam)

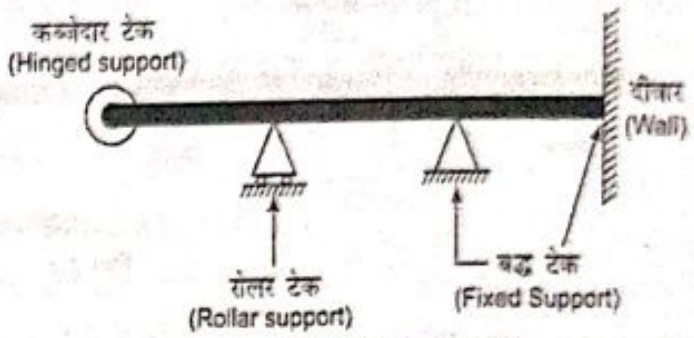
धरन की टेकें (Supports) मुख्य रूप से तीन प्रकार की होती हैं—

(1) सरल या रोलर टेक (Simple or Roller Support),

(2) कब्जेदार या पिन-टेक (Hinged or Pin Support),

(3) आबद्ध टेक (Fixed Support or Built-in Support)।

(1) सरल या रोलर टेक (Simple or Roller Support)—रोलर टेक, चित्र 2.2 के अनुसार एक समतल सतह पर रखे रोलर (Roller) से बनायी जाती है। रोलर टेक क्षैतिज बलों के लिये कोई भी प्रतिक्रिया उत्पन्न नहीं करती है और न ही संरचना (Structure) को अक्षीय (Longitudinal) दिशा में सरकने से रोकती है। रोलर की प्रतिक्रियायें सदैव धरन (Beam) की अक्ष के लम्ब-रूप होती हैं, चाहे भार किसी भी कोण पर अवनत (Inclined) लगे हों।



(Types of Supports)

चित्र 2.2

(2) कब्जेदार या पिन-टेक (Hinged or Pin Support)—कब्जेदार एक कब्जे (Hinge) की तरह होती है। देखें चित्र 2.2 इस प्रकार की टेक किसी भी दिशा में प्रतिक्रिया दे सकती है। इस टेक पर प्रतिक्रिया (Reaction) के कार्य करने की दिशा धरन पर लगे भारों की स्थिति पर निर्भर करती है, अर्थात् किसी कोण पर तिरछे (Inclined) भार लगे होने पर प्रतिक्रिया भी क्षैतिज से अवनत या तिरछी होती है तथा अक्ष के लम्ब-रूप भार लगे होने पर प्रतिक्रिया भी ऊर्ध्वाधर होती है। कब्जेदार टेक पर धरन केवल घूम सकती है, परन्तु दायें-बायें सरक नहीं सकती और न ही ऊपर उठ सकती है।

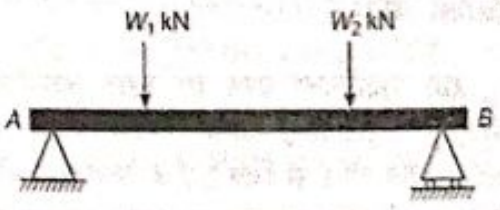
(3) आबद्ध टेक (Fixed Support or Built-in Support)—यदि किसी धरन के एक सिरे A को या दोनों सिरों A तथा B को किसी दीवार या स्तम्भ में बद्ध (Fixed or Built up) किया जाये तो सिरों की टेकों को आबद्ध टेक (Fixed Support) कहते हैं। यह टेक धरन पर किसी भी दिशा में लगे बलों को सहन कर सकती है। बद्ध टेक पर प्रतिक्रिया के कार्य करने की दिशा कब्जेदार टेक की भाँति धरन पर लगे भारों की स्थिति पर निर्भर करती है, अर्थात् प्रतिक्रियायें किसी भी दिशा में हो सकती हैं।

2.4 धरन पर भारों के प्रकार (Types of Loads on Beam)

(अ) धरन पर भार (Loads on Beam)—प्राय: धरनों पर भार अनुप्रस्थीय (धरन की अक्ष के लम्ब-रूप) का कार्य करते हैं जो कि निम्न प्रकार के हो सकते हैं—

(i) संकेन्द्रित या बिन्दु भार (Concentrated or Point load)—वास्तव में बिन्दु भार सम्भव नहीं होता है, परन्तु जिन भारों को धरन के एक बिन्दु पर क्रिया करता हुआ माना जा सके, उन्हे बिन्दु भार कहते हैं; जैसे—धरन (Beam) पर हैंगर की सहायता से लटकाये गये भार या छत से लटकाये गये पंखों के भार आदि।

इस भार की इकाई (Unit) किग्रा० (kg), टन (Ton) या किलोन्यूटन (kN) होती है। ये भार धरन पर ऊर्ध्वाधर (Vertical), तिरछे (Inclined) या क्षैतिज (Horizontal) कार्य कर सकते हैं। चित्र 2.3 के अनुसार तीर लगाकर बिन्दु भार को दर्शाया जाता है।

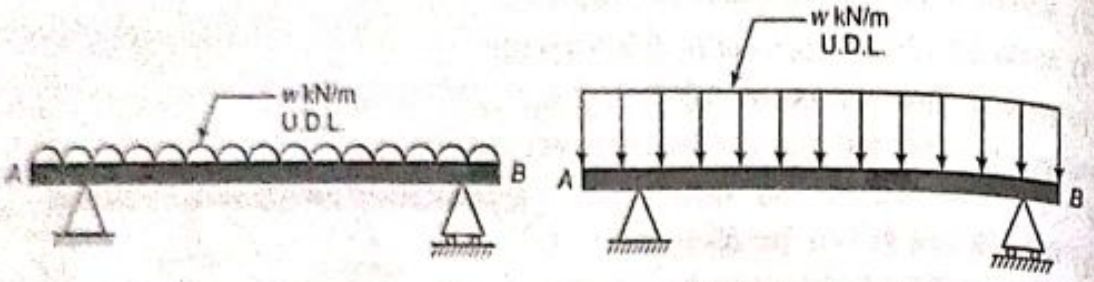


Point Loads on Beam

चित्र 2.3

Scanned with CamScanner

(ii) **एक समान बँटा हुआ या समवितरित भार** (Uniformly Distributed Loads or U.D.L)—इस प्रकार का भार धरन की कुछ या पूर्ण लम्बाई पर एक समान रूप से बँटा हुआ होता है। इसकी इकाई kg/m या Ton/m या kN/m प्रयोग की जाती है। किसी फर्श या धरन (Beam) का भार इसके प्रमुख उदाहरण हैं। U.D.L भार को चित्र 2.4 के अनुसार प्रदर्शित करते हैं।

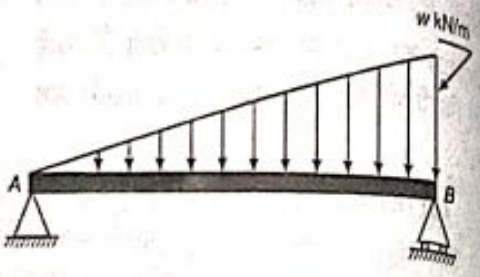


U.D.L. ON BEAM

चित्र 2.4

(iii) **एक समान रूप से बदलता भार या परिवर्तनशील भार** (Uniformly Varying load)—इस प्रकार के भार धरन की कुछ या पूर्ण लम्बाई पर समान रूप से नहीं लगते हैं बल्कि इनका मान प्राय: प्रत्येक बिन्दु पर बदलता जाता है। यदि दीवार के सहारे मिट्टी या रेत का ढेर लगा दिया जाये तो यह उस स्थान पर परिवर्तनशील भार का उदाहरण होगा।

इस प्रकार के भार को चित्र 2.5 में दर्शाया गया है।

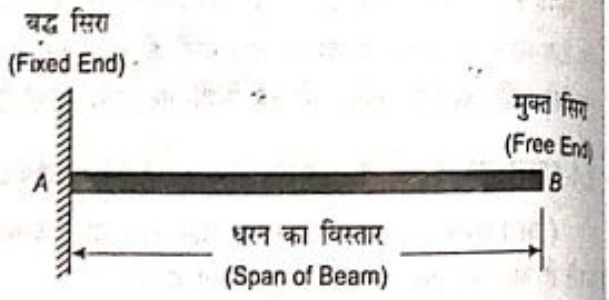


(VARYING LOAD)

चित्र 2.5

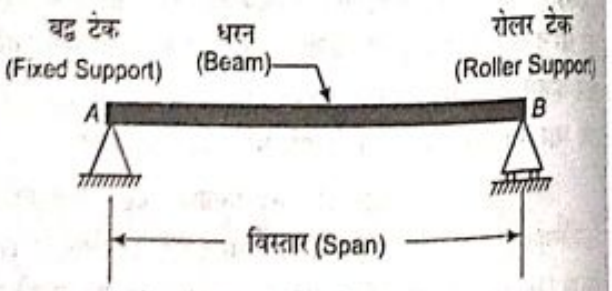
2.5 टेकों के आधार पर धरन के प्रकार (Types of Beams on the basis of supports)

(i) **परास धरन** (Cantilever Beam)—इस प्रकार की धरन का एक सिरा दीवार में चपटी सतह (Flat Surface) पर बद्ध (Fixed) होता है तथा दूसरा सिरा बिना टेक लगे हुए स्वतन्त्र (मुक्त Free) होता है। देखें चित्र 2.6 में। **उदाहरण** (Examples)—दरवाजे या खिड़की (door or window) के ऊपर लगे छज्जे (Sunshades) तथा किसी बड़ी बिल्डिंग के मुख्य द्वार (Main Entrance) पर लगे बड़े छज्जे (Big Shades) आदि।



चित्र 2.6

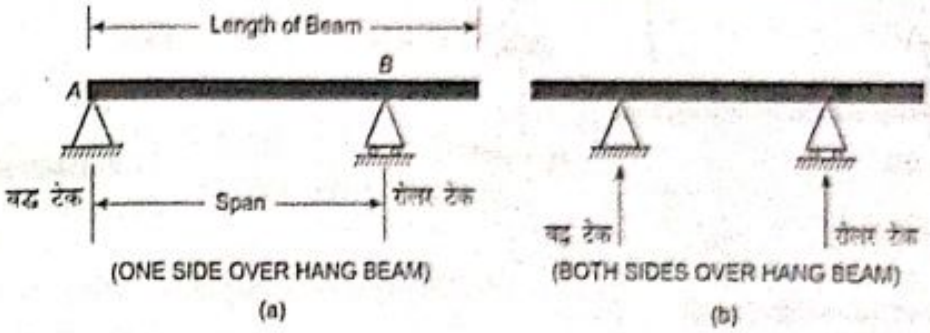
(ii) **शुद्धालम्ब धरन या सरल आलम्बित धरन** (Simply Supported Beam)—इस प्रकार की धरन (Beam) दोनों सिरों पर चित्र 2.7 के अनुसार टिकी होती है। एक रोलर टेक होने के कारण यह गर्मी के मौसम में फैलकर आगे बढ़ सकती है ताकि मुड़ (Bend) न हो पाये।



चित्र 2.7

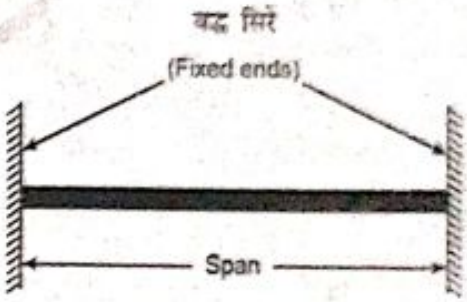
Scanned with CamScanner

(iii) टेकों से बाहर निकली धरन (Over hanging Beam)—इस प्रकार की धरन (beam) चित्र 2.8 के अनुसार एक सिरे पर अथवा दोनों सिरों पर टेकों से बाहर निकली होती है। देखें चित्र 2.8 (a) तथा (b)।



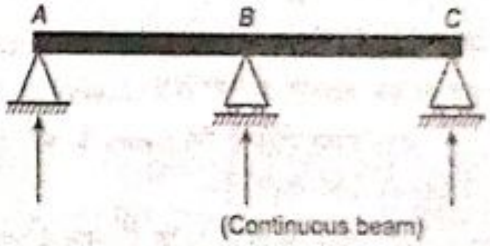
चित्र 2.8

(iv) आबद्ध धरन (Fixed Beam)—इस प्रकार की धरन चित्र 2.9 के अनुसार दोनों सिरों पर दीवार में चपटी सतहों (Flat Surfaces) पर जकड़ी हुई अथवा बद्ध (Built up or Fixed) होती है। जैसे Cantilever का बद्ध सिरा जकड़ा होता है। Buildings के कमरे (Rooms) की छत (roofs) में लगायी गई Beams इसका उदाहरण है।



चित्र 2.9 : Fixed Beam

(v) सतत धरन या अनेकाधार वाली धरन (Continuous Beam)—देखें चित्र 2.10 इस काट की धरन दो से अधिक टेकों पर टिकी हुई होती है। जैसे—किसी नदी पर बनने वाले लम्बे पुल (Long Bridge) को दो से अधिक गोले या खम्भों (Poles) पर टेकना पड़ता है।



चित्र 2.10

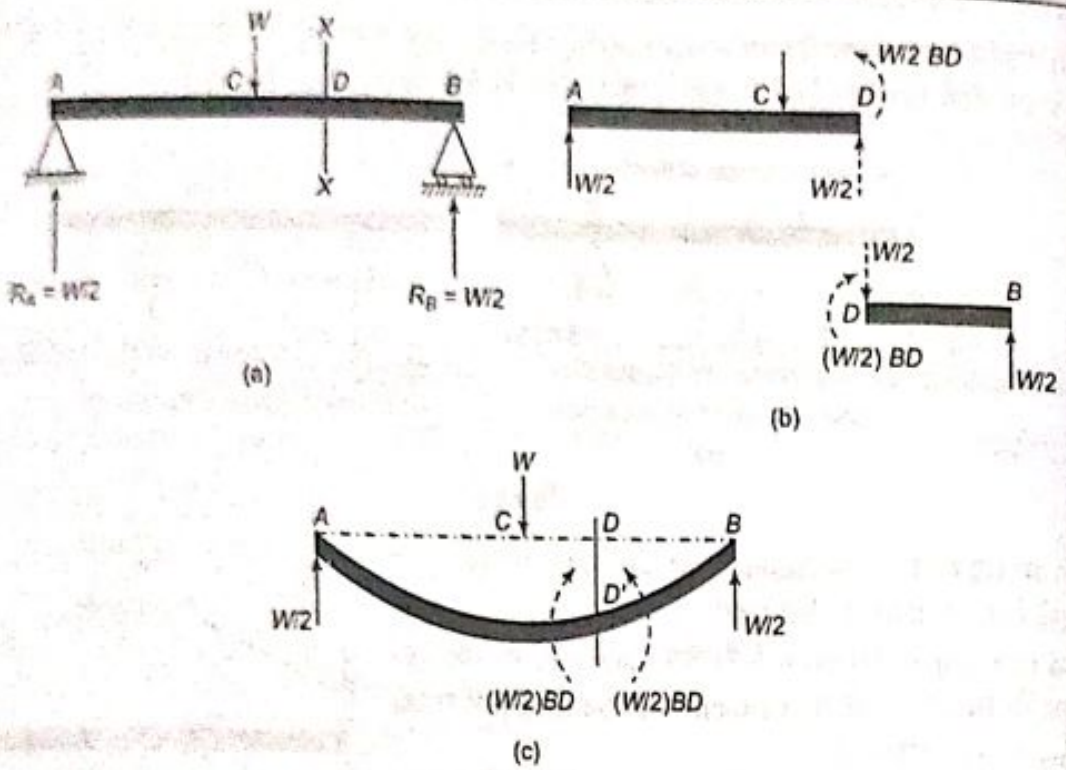
2.6 कर्तन बल तथा नमन घूर्ण की संकल्पना
(Concept of Shearing Force and Bending Moment)

जब किसी धरन (beam) पर भार लगाया जाता है तो उसकी टेकों में प्रतिक्रिया उत्पन्न (Develop) होती है और धरन पर लगे बाह्य बलों (External Loads) एवं इन प्रतिक्रियाओं के प्रभाव में भी धरन (Beam) सन्तुलित (Balanced) रहती है।

चित्र 2.11 में एक शुद्धालम्ब धरन AB के मध्य-बिन्दु C पर भार W नीचे की ओर कार्य कर रहा है तो दोनों टेकों की प्रतिक्रियायें $\frac{W}{2}$, $\frac{W}{2}$ ऊपर की ओर कार्य करेंगी। क्योंकि पूर्ण धरन सन्तुलन में है, अत: धरन का प्रत्येक भाग जैसे (X-X) काट पर BD भाग भी सन्तुलन में होगा।

अत: B पर प्रतिक्रिया $R_B = \frac{W}{2}\uparrow$ है जो B से C तक कर्तन बल (S.F.) रूप में ऊपर की ओर होगा। इस बीच किसी भी काट (D पर X-X काट) पर सन्तुलन के लिये उतने ही मान $\frac{W}{2}$ का बल नीचे की ओर कार्य करेगा।

Scanned with CamScanner



चित्र 2.11

अब B पर $\frac{W}{2}$ बल ऊपर की ओर तथा D पर $\frac{W}{2}$ बल सन्तुलन के लिए नीचे की ओर लगा होने पर एक बलाघूर्ण $\left(\frac{W}{2} \times BD\right.$ मान का बनेगा जो BD भाग को प्रवाम (Anticlockwise) ( ) दिशा में घुमाने का प्रयास करेगा। इसे सन्तुलित करने के लिये इतने मान का एक बलाघूर्ण प्रदक्षिण (Clockwise) (2) दिशा में D पर पैदा हो जाता है जिससे BD भाग पूर्ण सन्तुलन में हो जाता है।

अत: स्पष्ट होता है कि Beam के भाग BD के पूर्ण सन्तुलन के लिये काट D पर निम्न बल (Force) तथा बलाघूर्ण (Torque) कार्य करते हैं—

(i) धरन की काट D पर $\frac{W}{2}$ मान का बल नीचे की ओर कार्य करेगा जिसे कर्तन बल (Shear Force at D) कहते हैं।

(ii) काट D पर $\left(\frac{W}{2} \times BD\right)$ मान का प्रदक्षिण दिशा (Clockwise) में बलाघूर्ण (torque) कार्य करेगा जिसे (D) पर नमन आघूर्ण (BM at D) कहते हैं।

ये दोनों बल तथा बलाघूर्ण काट D पर Beam के भाग AD द्वारा लगाई जाती है। इसी प्रकार धरन के भाग AD को लेकर सन्तुलन को सिद्ध किया जा सकता है।

चित्र 2.11 (b) में काट D पर $\frac{W}{2}$ बल कार्य करता है (चाहे भाग BD को लिया जाये या भाग AD को) और यह बल काट के ही समतल में होता है, इसलिए इसे काट पर कर्तन बल (Shear Force) कहते हैं।

अत: धरन की प्रत्येक काट के लिये कर्तन बल (S.F.) को निम्न प्रकार परिभाषित (Define) किया जाता है—

(1) कर्तन बल (Shear Force)—"धरन की किसी काट पर कर्तन बल (S.F.) का मान उस काट के दायीं ओर या बायीं ओर लगे बलों के बीजगणितीय योग के बराबर होता है।"

Shear Force at any section of the beam is the algebraic sum of the forces acting either right side or left side of that section of beam. Or we can also say—

"Unbalanced force at any section of the beam is the Shear Force."

Scanned with CamScanner

मात्रक (Unit)—किलोन्यूटन (kN) या टन (Ton)

Note : 10 kN = 1 Ton

चित्र 2.11 (b) में काट D पर $\frac{W}{2} \times BD$ मान का बलाघूर्ण (torque) कार्य करता है (चाहे BD भाग पर विचारें अथवा AD भाग पर)। यह घूर्ण धरन को झुकाने की प्रवृत्ति (Tendency) रखता है, अत: इसे उस काट पर नमन आघूर्ण (Bending Moment) कहते हैं।

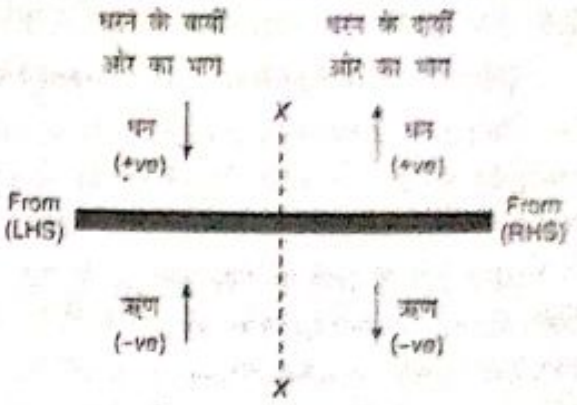
अत: धरन की प्रत्येक काट के लिये नमन आघूर्ण को निम्न प्रकार परिभाषित किया जाता है—

(2) नमन आघूर्ण (Bending Moment)—"धरन की किसी काट पर नमन आघूर्ण (BM) का मान, उस काट के दायीं ओर या बायीं ओर लगे बलों का उस काट पर आघूर्णों के बीजगणितीय योग के बराबर होता है।"

"Bending Moment at any section of the beam is the algebraic sum of the moments of the forces acting either right side or left side of that section. "

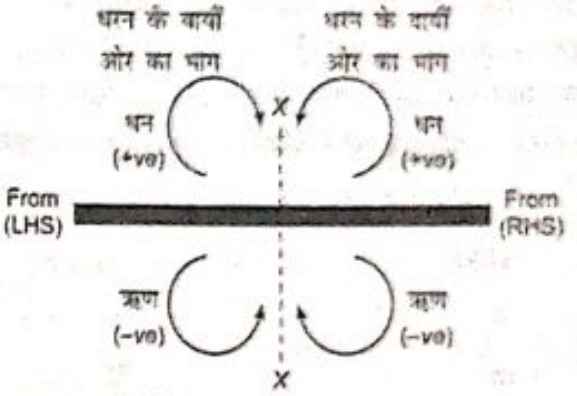
मात्रक (Unit)—किलोन्यूटन-मीटर (kN-m)

तथा टन-मीटर (Ton-m)



चिन्ह प्रणाली (Sign Conventions)

चित्र 2.12

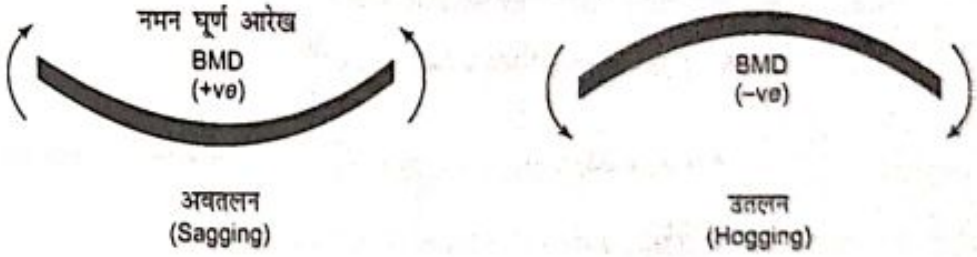


चिन्ह प्रणाली (Sign Conventions)

चित्र 2.13

2.7 अवतलन (Sagging) तथा उत्तलन (Hogging) नमन आघूर्ण (B.M.)

जब कोई धरन (beam), भार (load) लगने के कारण नीचे को झुकती है, तो धरन की इस स्थिति को उसका अवतलन (Sagging) कहते हैं और अवतलन (Sagging) की स्थिति में धरन (beam) का नमन घूर्ण (Bending Moment) धनात्मक (+ve) होता है। जैसे—सरल आलम्बित धरन (Simply supported Beam) भार लगने के कारण नमन स्थिति (bending position) में आती है।



चित्र 2.14

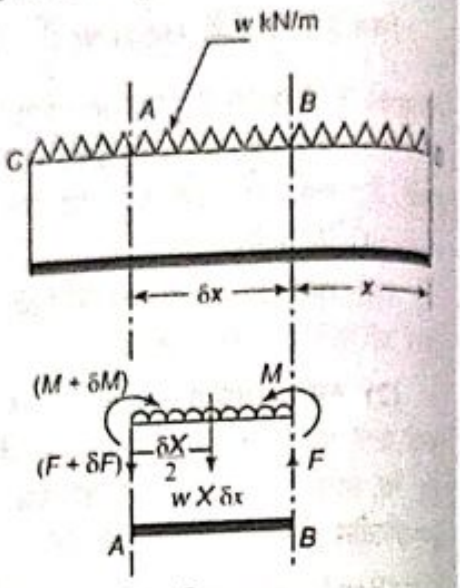
जब Beam पर भार लगाने से वह ऊपर की ओर वक्र रूप (cuved shape) में लचकती है (जैसे—cantilever beam में होता है) तो धरन की इस स्थिति को उसका उत्तलन (Hogging) कहते हैं। इस स्थिति में नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) ऋण (– ve) होता है। इस प्रकार का घूर्ण उत्तलन घूर्ण (Hogging moment) कहलाता है।

"The sign convention for bending moment is that a beam in "hogging" condition is subject to negative bending moment and in a "Sagging" condition to positive bending moment."

Scanned with CamScanner

2.8 भार, कर्तन बल तथा नमन आघूर्ण में सम्बन्ध (Relation between Load, Shear Force and Bending Moment)

चित्र 2.15 में किसी धरन (beam) CD पर माना w kN/m का एक समान बँटा भार (U.D.L.) लगा है। अब इस धरन के दायें सिरे D से x दूरी पर धरन का बहुत छोटा भाग AB (लम्बाई δx) माना।



चित्र 2.15

माना धरन के लिये गये छोटे भाग AB के सिरे (काट) B पर (सम्पर्क वाले भाग BD के कारण) ऊपर की ओर कर्तन बल (Shearing Force) F तथा नमन आघूर्ण (Bending Moment) M लग रहे हैं। इसी प्रकार माने गये छोटे भाग AB के सिरे (काट) A पर (सम्पर्क वाले भाग CA पर भार के कारण) कर्तन बल $(F + \delta F)$ नीचे की ओर तथा नमन आघूर्ण (B.M.) $M + \delta M$ लग रहे हैं। क्योंकि भाग AB पर समान बँटा भार (U.D.L.) w kN/m मान का भी लगा है, अतः इस भाग की लम्बाई (δx) पर $(w \times \delta x)$ मान का कुल भार AB के मध्य में (at middle) कार्य करेगा।

∴ सन्तुलन की स्थिति में— $(\Sigma V = 0$ द्वारा)

नीचे की ओर लगे बलों का योग = ऊपर की ओर लगे बल

अर्थात् $$(F + \delta F) + w \times \delta x = F$$

या $$\delta F = -w \times \delta x$$

या $$\frac{\delta F}{\delta x} = -w \qquad \text{अथवा} \qquad \frac{dF}{dx} = -w \qquad \ldots (i)$$

अतः सम्बन्ध (i) से हमें पता चलता है कि किसी काट पर, बल F के परिवर्तन की दर (rate of change of force) $\frac{dF}{dx}$ उस काट पर भार की दर (rate of load) w के बराबर होती है।

$\Rightarrow$ Rate of change of S.F. $\left(\frac{dF}{dx}\right) = -$ Rate of Load (w/unit length)

अब आघूर्ण (Moment) के सन्तुलन के लिये, $\Sigma M = 0$

अब A पर आघूर्ण (Moment) लेने पर—

Clockwise Moment = Anticlockwise Moment

$$F \times \delta x + M = (M + \delta M) + (w \times \delta x) \times \frac{\delta x}{2}$$

$$F \times \delta x = \delta M + 0 \qquad \left(\because w \times \frac{(\delta x)^2}{2} \text{ का मान बहुत कम होने पर नगण्य मान}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\delta M}{dx} = F$$

या $$\frac{dM}{dx} = F \qquad \ldots (ii)$$

अतः सम्बन्ध (ii) से हमें ज्ञात होता है कि किसी काट पर नमन घूर्ण M के परिवर्तन की दर $\frac{dM}{dx}$ उस काट पर कर्तन बल के बराबर होती है।

∴ **"Rate of Change of B.M. at any section is equal to Shearing Force (F) at that section."**

Scanned with CamScanner

(i) संकेन्द्रित भार (Point Load) के लिए—

यदि किसी काट पर भार की दर w शून्य है, जैसे कि संकेन्द्रित भार (point load) की दशा में,

तब $$\frac{dF}{dx} = 0$$

$\because$ Constant का $\frac{d}{dx} = 0$ होती है, अत: यहाँ F = स्थिर (constant)

अर्थात् धरन के लिये कर्तन बल (S.F.) स्थिर (Constant) रहता है।

अब सम्बन्ध (ii) से, $$\frac{dM}{dc} = F = \text{स्थिरांक}$$

$\therefore$ $$dM = F\,dx$$

समाकलन करने पर (on integration)

$$\int dM = F \int dx$$

अत: $M = Fx + C_1$, यहाँ C_1 एक स्थिरांक है।

यह एक सरल रेखा का समीकरण है। **इसलिये संकेन्द्रित भार (Point Load) की दिशा में नमन घूर्ण M में सरल रैखिक परिवर्तन होता है।**

(ii) समवितरित भार (U.D.L.) के लिये—

यदि धरन पर w kN/metre मान का समान बँटा भार (U.D.L.) है, तब

सम्बन्ध (i) से, $$\frac{dF}{dx} = -w$$

या $$dF = -w\,dx$$

समाकलन करने पर (on integration)

$$\int dF = -w \int dx$$

अत: $$F = -wx + C_2$$

जहाँ C_2 एक समाकलन स्थिरांक (constant of integration) है।

इस प्रकार बिन्दु भार की दशा में कर्तन बल (S.F.) में सरल रैखिक परिवर्तन (linearly change) होता है।

अत: $$\frac{dM}{dx} = F = -wx + C_2$$

या $$dM = (-wx + C_2)\,dx$$

समाकलन करने पर, $$\int dM = \int (-wx + C_2)\,dx$$

अत: $$M = -\frac{wx^2}{2} + C_2x + C_3$$

जहाँ C_3 भी कोई दूसरा समाकलन स्थिरांक है। यहाँ हम देखते हैं कि नमन घूर्ण M के लिये एक द्वितीय घात समीकरण (second degree equation) प्राप्त होती है जो कि एक परवलय (parabola) को प्रदर्शित करती है। इसलिये समान बँटे भार (U.D.L.) की दशा में नमन घूर्ण परवलयिक (parabolic) ढंग से बदलता है।

(iii) अधिकतम नमन घूर्ण—इस दशा में जहाँ कर्तन बल शून्य है वहाँ

$$F = 0$$

$\therefore$ $$\frac{dM}{dx} = F = 0 \qquad \left[\text{क्योंकि } \frac{dM}{dx} = F\right]$$

Scanned with CamScanner

जो यह प्रदर्शित करता है कि नमन घूर्ण परिवर्तन की दर शून्य है। इसलिये $F = 0$ वाले बिन्दु पर नमन घूर्ण के परवलय (Parabolic form) पर स्पर्शी (tangent) क्षैतिज हो जाती है, अतः वहाँ पर नमन घूर्ण (B.M.) का मान अधिकतम या न्यूनतम होगा।

जब M अधिकतम या न्यूनतम नमन घूर्ण (B.M.) है, तब

$$\frac{d\,[M_{\text{अधिकतम या न्यूनतम}}]}{dx} = 0$$

2.9 कर्तन बल तथा नमन घूर्ण आरेख (Shear force and Bending moment diagrams)

धरन (beam) पर लगने वाले भारों के आधार पर हम कह सकते हैं कि धरन की विभिन्न अनुप्रस्थ काटों (cross sections) पर कर्तन बल (shear force) तथा नमन घूर्ण (bending moment) के मान भिन्न हो सकते हैं। और इनके मान धरन के विभिन्न भागों के लिये कर्तन बल तथा नमन घूर्ण के समीकरण बनाकर प्राप्त किये जा सकते हैं जिनसे धरन की विभिन्न काटों पर इनके मान ज्ञात हो जाते हैं। परन्तु समीकरण की सहायता से यह तुरन्त पता नहीं चल सकता कि धरन पर कर्तन बल और नमन घूर्णों के मान किस प्रकार बदलते हैं। इसके लिये ही कर्तन बल तथा नमन घूर्ण आरेख खींचे जाते हैं। ये आरेख धरन की लम्बाई को आधार मानकर, उसके विभिन्न बिन्दुओं पर कर्तन बल और नमन घूर्ण के मान लम्बवत् दिशा में काटकर खींचे जाते हैं।

इन आरेखों को देखने मात्र से ही यह पता चल जाता है कि धरन की लम्बाई पर कर्तन बल तथा नमन घूर्ण किस प्रकार बदल रहा है। इससे धरन के अभिकल्पन (design) में काफी सहायता मिलती है।

2.10 किसी धरन के लिए कर्तन बल आरेख तथा नमन घूर्ण आरेख खींचना (To Draw Shear Force Diagram and Bending Moment Diagram for a Beam)

धरन के किसी काट पर कर्तन बल (S.F.) तथा नमन घूर्ण (B.M.) की गणना निम्न पदों (Steps) में की जाती है। तत्पश्चात् SFD तथा BMD बनाये जाते हैं।

(i) शुद्ध आलम्बित धरन (S.S. Beam) की दशा में सर्वप्रथम सिरों पर प्रतिक्रियायें (Reactions) ज्ञात करते हैं।

(ii) धरन के दायें अथवा बायें तरफ का चयन करते हैं जहाँ से गणना प्रारम्भ करनी है। कैंटीलीवर धरन की दशा में गणना हमेशा मुक्त सिरे से गणना प्रारम्भ करनी चाहिये।

(iii) कर्तन बल ज्ञात करने के लिए, चयन किये गये धरन के भाग पर लगे ऊर्ध्वाधर बलों (Vertical Forces) एवं टेक (support) की प्रतिक्रिया का बीजगणितीय योग (algebraic sum) ज्ञात करते हैं।
काट में एक तरफ के सभी ऊर्ध्वाधर बलों का बीजगणितीय योग, उस काट पर कर्तन बल (S.F.) का मान होता है।

(iv) नमन घूर्ण (B.M.) ज्ञात करने के लिए, चयनित भाग पर लगे सभी बलों के घूर्ण उस काट के सापेक्ष ज्ञात करते हैं, सभी बलघूर्णों का बीजगणितीय योग, उस काट पर बलघूर्ण (B.M.) का मान होता है।

(v) धरन की लम्बाई के समान्तर एक शून्य रेखा (Datum line) क्षैतिज दिशा में खींचते हैं। उपयुक्त पैमाना मानकर सभी काटों पर कर्तन बल के ज्ञात किये गये (calculated) मान अंकित करते हैं। रूढ़ि चिन्हों (Sign conventions) को ध्यान में रखते हुए धनात्मक मान शून्य रेखा के ऊपर तथा ऋणात्मक मान शून्य रेखा से नीचे लिये जाते हैं।

(vi) इसी प्रकार नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिए भी एक शून्य रेखा खींच कर उस पर उपरोक्त की भाँति नमन घूर्ण के ज्ञात किये गये मान अंकित करते हैं।

(vii) इन सभी मानों को कर्तन बल आरेख के लिए सीधी अथवा तिरछी सरल रेखाओं से तथा नमन घूर्ण आरेख के लिए तिरछी सरल रेखा या परवलय वक्र (Parabolic curve) के द्वारा मिलाते हैं। बिन्दु भारों (point loads) के S.F.D. में सीधी क्षैतिज रेखा तथा B.M.D. तिरछी सरल रेखा द्वारा बनाया जाता है जबकि समवितरित भारों (U.D.L.) के लिए S.F.D. में तिरछी सरल रेखा तथा B.M.D. में वक्र रेखाओं (Parabolic curve) द्वारा बनाया जाता है।

Scanned with CamScanner

(viii) कर्तन बल एवं नमन घूर्ण (S.F. and B.M.) के अधिकतम मानों को भी इन आरेखों (diagrams) पर दर्शाया जाना चाहिए।

(ix) नमन घूर्ण आरेख पर नति परिवर्तन बिन्दु (Point of contraflexure) (यदि कोई हो तो) भी प्रदर्शित करते हैं।

नति परिवर्तन बिन्दु (Point of contraflexure)

"किसी Beam का B.M.D., जिस बिन्दु पर शून्य (Zero) होकर (– ve) से (+ ve) की ओर या (+ve) से (– ve) की ओर जाता है, उसे नति परिवर्तन बिन्दु (Point of contraflexure) कहते हैं।" यह Over-hanging Beam में प्राप्त हो सकता है।

Definition. In bending moment diagram (B.M.D.), where the B.M. is zero and changes sign, such a point is called "Point of contraflexure". This case is possible in over hanging beam.

महत्वपूर्ण उदाहरण
(Important Example)

विशेष—कैन्टीलीवर धरन (Cantilever beam) के लिये कर्तन बल (SF) तथा नमन घूर्ण (BM) आरेख

उदाहरण 1. एक L लम्बाई की Cantilever beam पर दिये गये भार (Load) के लिये कर्तन बल आरेख (Shear Force diagram) तथा नमन आघूर्ण आरेख (Bending Moment Diagram) खींचिये—

जबकि (i) Cantilever के मुक्त सिरे (Free end) पर भार W है।

(ii) इसकी पूर्ण लम्बाई (L) पर समवितरित भार w kN/m का (U.D.L.) है।

(iii) 4 m लम्बे एक Cantilever के पूरे विस्तार पर समान रूप से वितरित भार 3 kN/m का धारण किये हुए है। SFD व BMD बनायें। (U.P. 2013)

हल—चित्र 2.16 (a) में Loaded Beam दिखाई गई है।

(i) माना स्वतन्त्र सिरे B से x दूरी पर कोई काट X-X है।

S.F.D. की गणना के पद—

$\because$ SF at Section $(X-X)$ $F_x = -W$

(1) कर्तन बल ठीक B से पहले अर्थात्

S.F. just before $B \Rightarrow \overrightarrow{F_B} = 0$

(2) कर्तन बल ठीक B पर अर्थात् S.F. at $B \Rightarrow F = -W$

(3) Beam के बद्ध सिरे A पर कर्तन बल का मान अर्थात् SF at fixed end $A = -W$

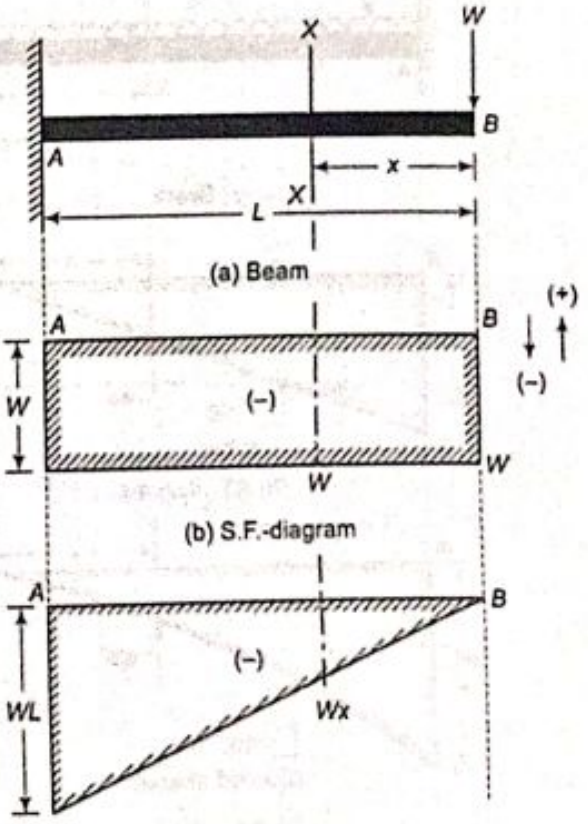
B.M.D. की गणना के पद (Steps for B.M.D.)—

$\because$ B.M. at Section $(X-X)$, $M_X = -W.x$

At $x = 0$, B.M. at $B \Rightarrow M_B = 0$

At $x = L$, B.M. at $A \Rightarrow M_A = -W \times L$

इसका कर्तन बल आरेख (SFD) चित्र (b) में तथा नमन आघूर्ण आरेख (BMD) चित्र (c) में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 2.16

Scanned with CamScanner

(ii) जब cantilever की पूर्ण लम्बाई (L) पर कोई U.D.L. लगा है।

माना समवितरित भार (UDL) w/unit length (i.e. w kN/m) है।

For S.F.D. $(+)\uparrow$ $\downarrow(-)$

S.F. at $(X-X)$, $F_X = -wx$

At, $x = 0$, S.F. at B $(F_B) = 0$

At, $x = L$, SF at A, $(F_A) = -wL$

For B.M.D.—

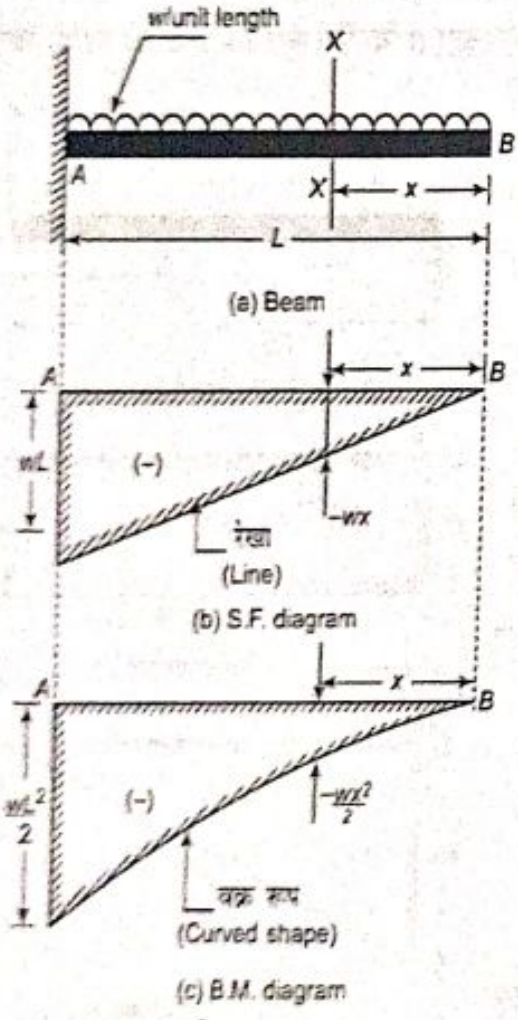
BM at $(X-X)$, $M_X = -(wx)\frac{x}{2}$

$$= \frac{-wx^2}{2} \text{ (curved shape)}$$

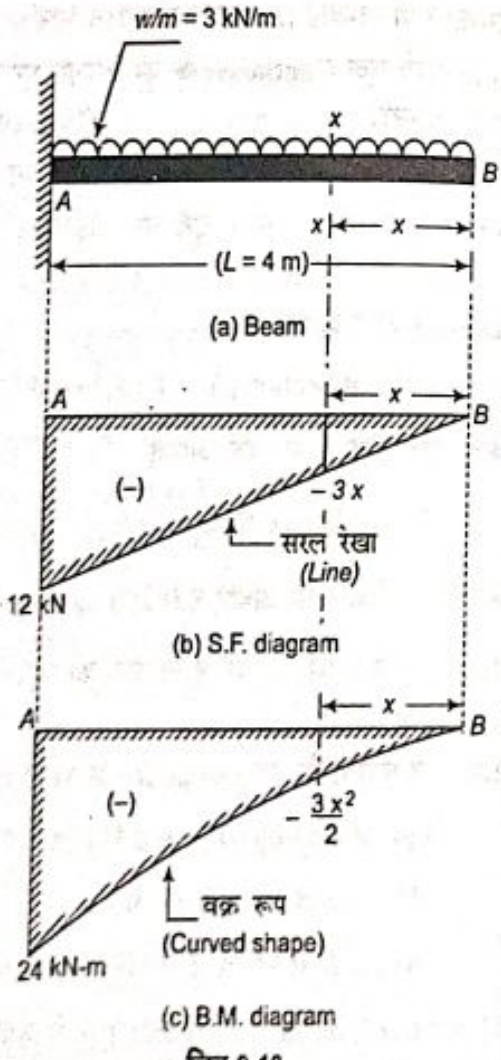
At $(x = 0)$, B.M. at $B = 0$

At $(x = L)$, B.M. at $A\ (M_A) = \frac{-wL^2}{2}$

इस Cantilever के S.F.D. तथा B.M.D. को चित्र 2.17 (b) व (c) में दिखाया गया है।



चित्र 2.17



चित्र 2.18

Scanned with CamScanner

(iii) यह भाग भी भाग (ii) के समान हल करें।

उत्तर— Max S.F. = 12 kN (U.P., S.O.M., 2013)

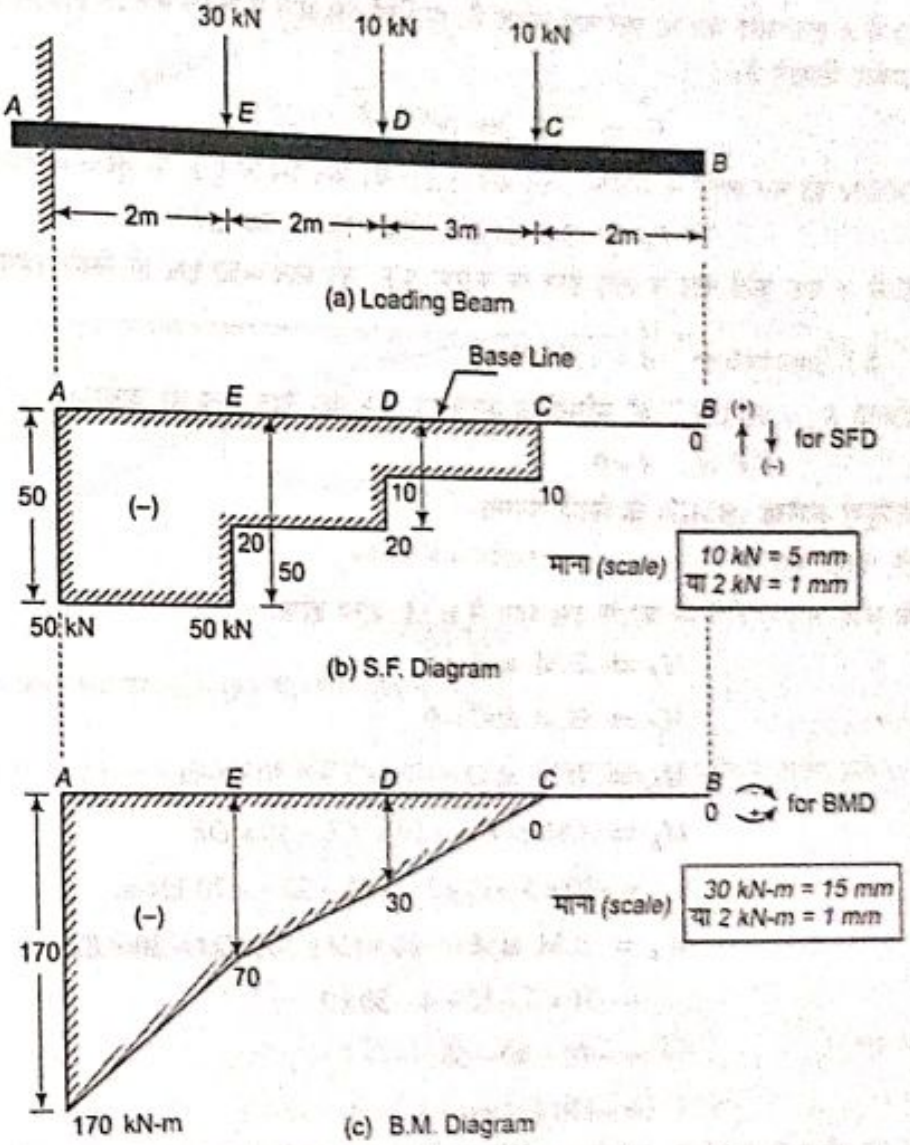
Max B.M. = 24 kN-m

(दोनों ही बद्ध सिरे A पर होंगे)

SFD व BMD को चित्र 2.18 (b) तथा 2.18 (c) में दिखाया गया है।

उदाहरण 2. चित्र 2.19 (a) में दिखाये गये कैंटीलीवर के लिये कर्तन बल तथा नमन आघूर्ण आरेख (S.F.D. and B.M.D.) खींचिये।

हल— (उ० प्र० 1993)



चित्र 2.19

Scanned with CamScanner

हल—(1) कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिए गणना—

क्योंकि धरन (Beam) पर B से C तक कोई भार या बल नहीं है, इसलिये इस भाग में कर्तन बल (S.F.) का मान शून्य (Zero) होगा। $\therefore F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = 0$

C पर 10 kN का बल नीचे की ओर है, अत: C पर कर्तन बल F_C का मान

$F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = -10$ kN होगा,

क्योंकि C से D तक अन्य कोई भार या बल नहीं लग रहा है। इसलिये इस भाग में कर्तन बल (S.F.) का मान -10 kN स्थिर रहेगा। इसे निम्न प्रकार लिखते हैं—

$$\text{S.F. just before } \vec{D} = -10 \text{ kN}$$

अब बिन्दु D पर 10 kN का भार नीचे की ओर लगा है। अत: कर्तन बल का मान बिन्दु D पर तुरन्त बदलकर निम्न हो जायेगा। $F_D \Rightarrow$ S.F. at $D = -10 - 10 = -20$ kN

फिर बिन्दु D से E तक कोई भार या बल नहीं लगता है। इसलिये इस भाग में कर्तन बल (S.F.) का मान -20 kN स्थिर रहेगा। इसे निम्न प्रकार लिखते हैं।

$$\vec{F_E} \Rightarrow \text{S.F. just before } \vec{E} = -20 \text{ kN}$$

अब E पर 30 kN का भार लगने के कारण कर्तन बल (S.F.) का मान इस बिन्दु E पर तुरन्त बदलकर निम्न हो जायेगा।

$$F_E \Rightarrow \text{S.F. at } E = -20 - 30 = -50 \text{ kN}$$

अब फिर E से A तक कोई भार न लगा होने के कारण S.F. का मान -50 kN ही स्थिर रहेगा।

$$\therefore \quad \text{S.F. just before } \vec{A} = -50 \text{ kN}$$

बाद में प्रतिक्रिया $R_A = 50$ kN ↑ को सम्मिलित करने पर S.F. का मान शून्य हो जायेगा।

$$\therefore \quad \text{S.F. at } A = 0$$

(2) नमन आघूर्ण आरेख (BMD) के लिये गणना—

चिन्ह प्रणाली, दायीं ओर से

B से C तक कोई भार न होने के कारण इस भाग में B.M. शून्य होगा।

$$\therefore \quad M_B \Rightarrow \text{B.M. at } B = 0$$

$$M_C \Rightarrow \text{B.M. at } C = 0$$

$$M_D \Rightarrow \text{B.M. at } D = -10 \times 3 = -30 \text{ kN-m}$$

$$M_E \Rightarrow \text{B.M. at } E = -10 \times CE - 10 \times DE$$

$$= -10 \times 5 - 10 \times 2 = -50 - 20 = -70 \text{ kN-m}$$

$$M_A \Rightarrow \text{B.M. at } A = -10 \times CA - 10 \times DA - 30 \times EA$$

$$= -10 \times 7 - 10 \times 4 - 30 \times 2$$

$$= -70 - 40 - 60$$

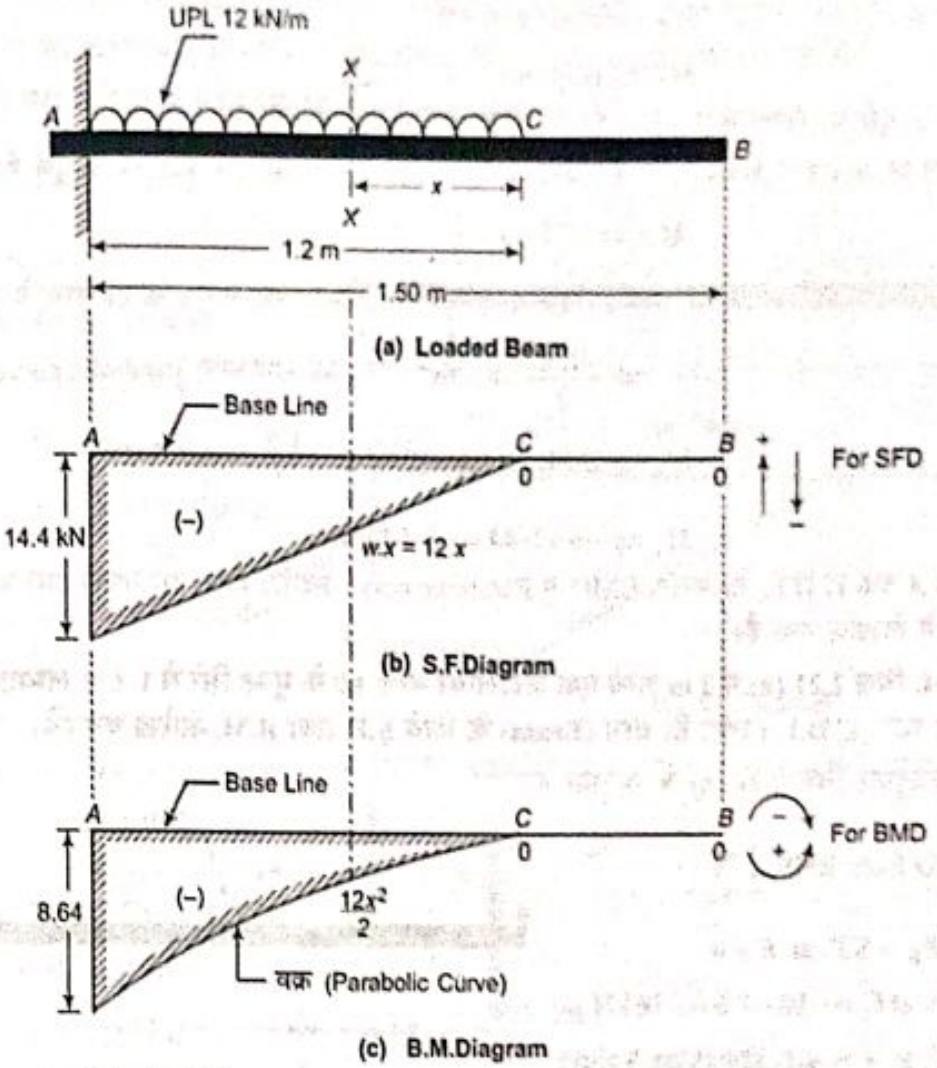
$$= -170 \text{ kN-m}$$

उत्तर

धरन या बलों के बीच में B.M.D. एक सरल रैखिक होगा, अत: भारों के बीच अलग-अलग सरल रेखायें खींची जायेंगी, इस प्रकार नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) को चित्र 2.19 (c) में दिखाया गया है।

उदाहरण 3. चित्र 2.20 (a) में दिखाये गये 1·5 m लम्बे कैंटीलीवर के बद्ध सिरे A से 1·2 m लम्बाई तक 12 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है, इसके लिये कर्तन बल आरेख (S.F.D.) तथा नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) खींचिये।

Scanned with CamScanner



चित्र 2.20

हल—कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिए गणना— + ↓ ↑ (–)

क्योंकि धरन (Beam) पर B से C तक कोई भार या बल नहीं है, इसलिये इस भाग में कर्तन बल (S.F.) का मान शून्य (Zero) होगा।

$\therefore$ $F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = 0$

तथा $F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = 0$

$\because$ C से x दूरी पर स्थित काट $(X - X)$ पर कर्तन बल,

$$F_X = -wx$$

$\therefore$ $F_X \Rightarrow$ S.F. at $(X - X) = -12 \times x$ kN (यह एक सरल रेखा है)

$F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -12 \times 1{\cdot}2 = -14{\cdot}4$ kN (यहाँ $x = 1{\cdot}2$ m है)

इस गणना द्वारा प्राप्त S.F.D. को चित्र 2.20 (b) में दिखाया गया है।

नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिये गणना—

चिन्ह प्रणाली, दायीं ओर से

धरन पर B से C तक कोई भार न होने के कारण इस भाग में नमन आघूर्ण का मान शून्य (Zero) होगा।

Scanned with CamScanner

$\therefore$ $M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = 0$

$M_C \Rightarrow$ B.M. at $C = 0$

यदि C से x दूरी पर स्थित काट $(X-X)$ पर नमन आघूर्ण M_x है, तो

$M_X \Rightarrow$ B.M. at $(X-X) = (X-X)$ काट के दायीं ओर के भार का इस काट पर आघूर्ण है।

या $$M_X \Rightarrow -12 \times x \times \frac{x}{2}$$

(∵ x लम्बाई के U.D.L. का भार x के ही मध्य में कार्य करेगा।)

$$\Rightarrow \frac{-12x^2}{2} \Rightarrow -6x^2$$ (यह समीकरण Parabolic curve की है।)

अब $$M_B \Rightarrow \text{B.M. at } A = -12 \times 1{\cdot}2 \times \frac{1{\cdot}2}{2} = -6 \times (1{\cdot}2)^2$$

$\therefore$ $$M_A \Rightarrow -6 \times 1{\cdot}44 = -8{\cdot}64 \text{ kN-m}$$

यहाँ C से A तक U.D.L. के कारण BMD में Parabolic curve प्रदर्शित होगा। इस गणना द्वारा प्राप्त B.M.D. को चित्र 2.20 (e) में दिखाया गया है।

उदाहरण 4. चित्र 2.21 (a) में 2 m लम्बे एक कैंटीलीवर धरन AB के मुक्त सिरे से 1·6 m लम्बाई तक 10 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। धरन (Beam) के लिये S.F. तथा B.M. आरेख बनाइये।

हल—प्रश्नानुसार चित्र 2.21 (a) के अनुसार है।

For S.F.D from RHS $\overset{+}{\uparrow}$ $\underset{(-)}{\downarrow}$

$F_B = \text{S.F. at } B = 0$

$F_C = \text{S.F. at } C = -10 \times 1{\cdot}6 = -16 \text{ kN}$

$F_A = \text{S.F. at } A = -16$ kN (Max Value)

For B.M.D. (from R.H.S.)

$M_B = \text{BM at } B = 0$

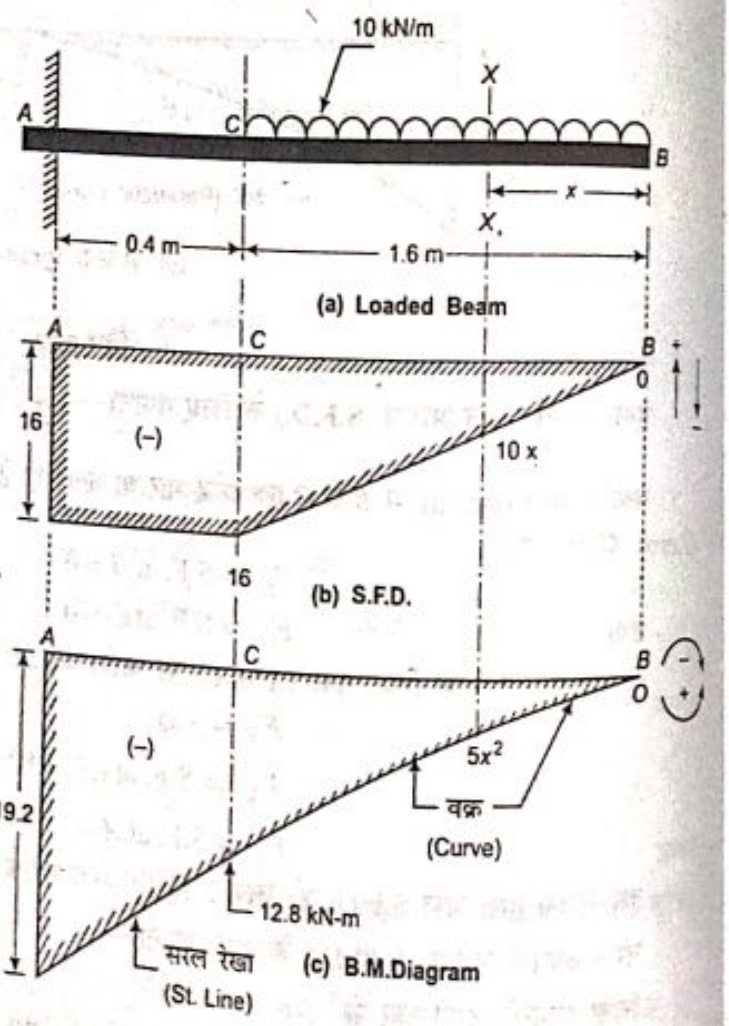
$M_X = \text{BM at distance } x \text{ from } B$

$= -10 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -5x^2$ (Parabolic curve)

$M_C = \text{BM at } C = -5 \times (1{\cdot}6)^2 = -12{\cdot}8$ kN

$$M_A = -10 \times 1{\cdot}6 \times \left(0{\cdot}4 + \frac{1{\cdot}6}{2}\right)$$

$= -19{\cdot}2$ kN-m



चित्र 2.21

Scanned with CamScanner

उदाहरण 5. एक 4 मीटर लम्बे कैन्टीलीवर धरन के बीच (middle) की 2 m लम्बाई पर 10 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। कर्तन बल आरेख (S.F.D.) तथा नमन आघूर्ण आरेख (BMI) खींचिये।

हल—कर्तन बल आरेख के लिये गणना (For S.F.D. from R.H.S.)

For S.F.D $\overset{+}{\uparrow}$ $\downarrow$ $(-)$

From R.H.S.

Scale (1 cm = 10 kN)

$F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = 0$

$F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = 0$

$F_D \Rightarrow$ S.F. at $D = -10 \times 2$

$= -20$ kN

D से A तक beam खाली है, मान स्थिर होगा।

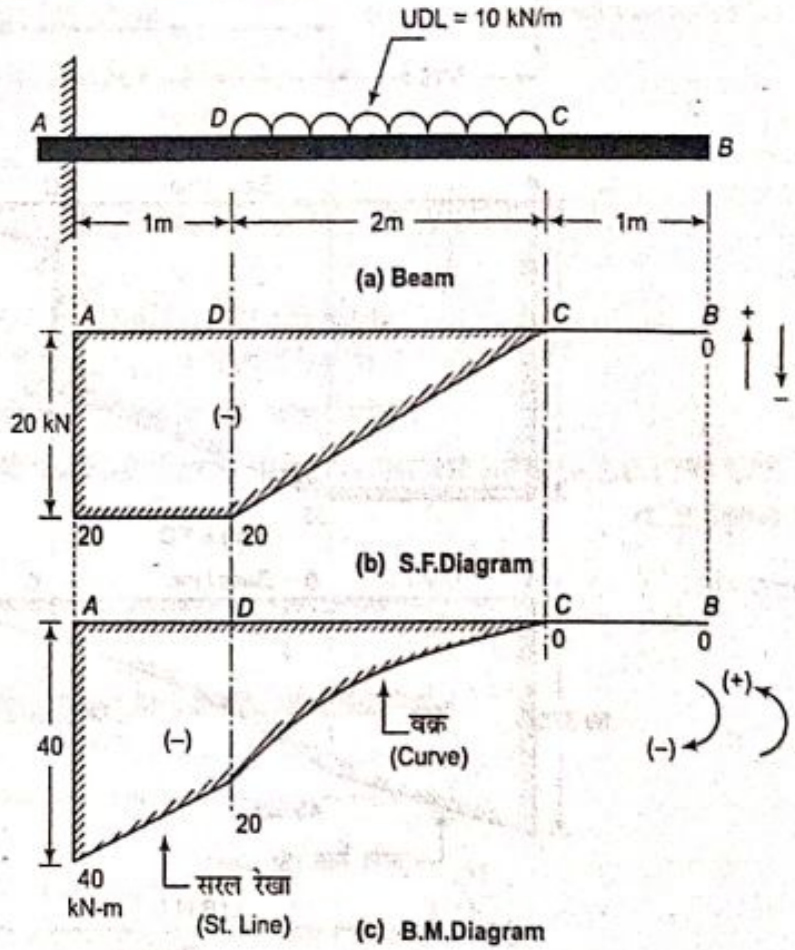
$F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -20$ kN

अब S.F.D. को चित्र 2.22 (b) के अनुसार बनाते हैं।

नमन आघूर्ण (B.M.D.) के लिये गणना—चिन्ह प्रणाली

$M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = 0$

$M_C \Rightarrow$ B.M. at $C = 0$



चित्र 2.22

$M_D \Rightarrow$ B.M. at $D = -10 \times 2 \times \frac{2}{2} = -20$ kN-m

$M_A \Rightarrow$ B.M. at $A = -10 \times 2\left[1 + \frac{2}{2}\right]$

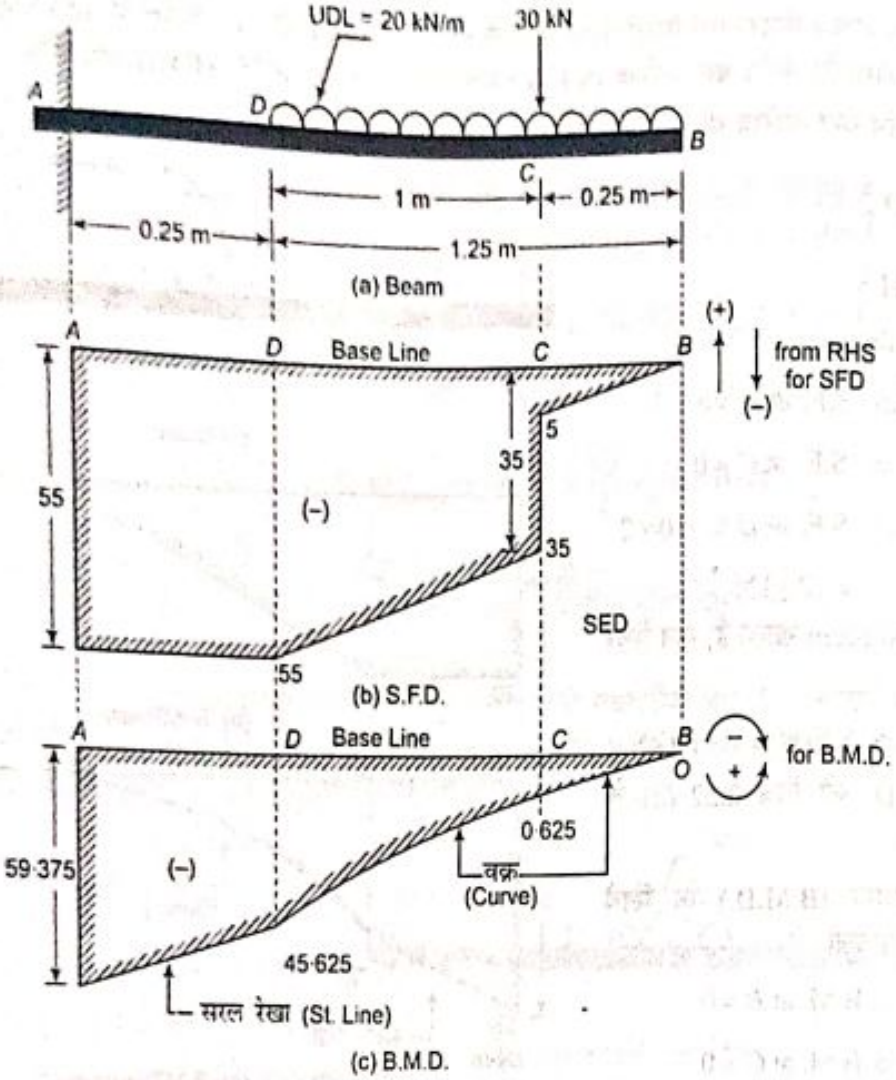
$= -40$ kN-m

अब B.M.D. को चित्र 3.22 (c) के अनुसार बनाते हैं।

** उदाहरण 6. एक 1·5 m लम्बे कैन्टीलीवर पर स्वतन्त्र सिरे से 1·25 m लम्बाई तक 20 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। उस पर स्वतन्त्र सिरे से 0·25 m की दूरी पर एक 30 kN का बिन्दु भार भी लगा है। कैन्टीलीवर के लिये कर्तन बल आरेख (S.F.D.) तथा नमन आघूर्ण आरेख (BMD) खींचिये। (U.P. 2002)

Scanned with CamScanner

हल—



चित्र 2.23

कर्तन बल आरेख (S.F.D) के लिये गणना—

बिन्दु B पर कर्तन बल, $F_B \Rightarrow \text{SF at } B = 0$ [∵ B पर कोई बिन्दु भार नहीं है]

अब बिन्दु C के ठीक पहले कर्तन बल का मान (C पर 30 kN के भार को प्रयोग न करने पर)

$$F_C \Rightarrow \text{S.F. just before } \vec{C} = -20 \times 0{\cdot}25 = -5 \text{ kN}$$

$$F_C \Rightarrow \text{S.F. at } C = -5 - 30 = -35 \text{ kN}$$

$$F_D \Rightarrow \text{S.F. at } D = -35 - 20 \times 1 = -55 \text{ kN}$$

$$F_A \Rightarrow \text{S.F. at } A = -55 \text{ kN}$$

(D से A तक भार न होने के कारण SF का मान स्थिर है।)

इनसे बने S.F.D. को चित्र 2.23 (b) में दिखाया गया है।

नोट—धरन के जिस बिन्दु पर संकेन्द्रित भार (Point Load) लगा होता है, वहाँ S.F.D. की गणना में S.F. just before लेते हैं। इसके बाद S.F. at Point लेते हैं।

नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिये गणना—

$$M_B \Rightarrow \text{B.M. at } B = 0 \qquad \text{(Zero, due to No Point Load at } B\text{)}$$

Scanned with CamScanner

$$M_C \Rightarrow \text{B.M. at } C = -20 \times 0{\cdot}25 \times \frac{0{\cdot}25}{2}$$

(यह C के दायीं ओर के भार का C पर घूर्ण)

$$= -0{\cdot}625 \text{ kN-m} \qquad \text{((– ve) due to clockwise moment)}$$

$$M_D \Rightarrow \text{B.M. at } D = -20 \times 1{\cdot}25 \times \frac{1{\cdot}25}{2} - 30 \times 1$$

$$= -15{\cdot}625 - 30 = -45{\cdot}625 \text{ kN-m}$$

$$M_A \Rightarrow \text{B.M. at } A = -30 \times 1{\cdot}25 - 20 \times 1{\cdot}25 \times \left[0{\cdot}25 + \frac{1{\cdot}25}{2}\right]$$

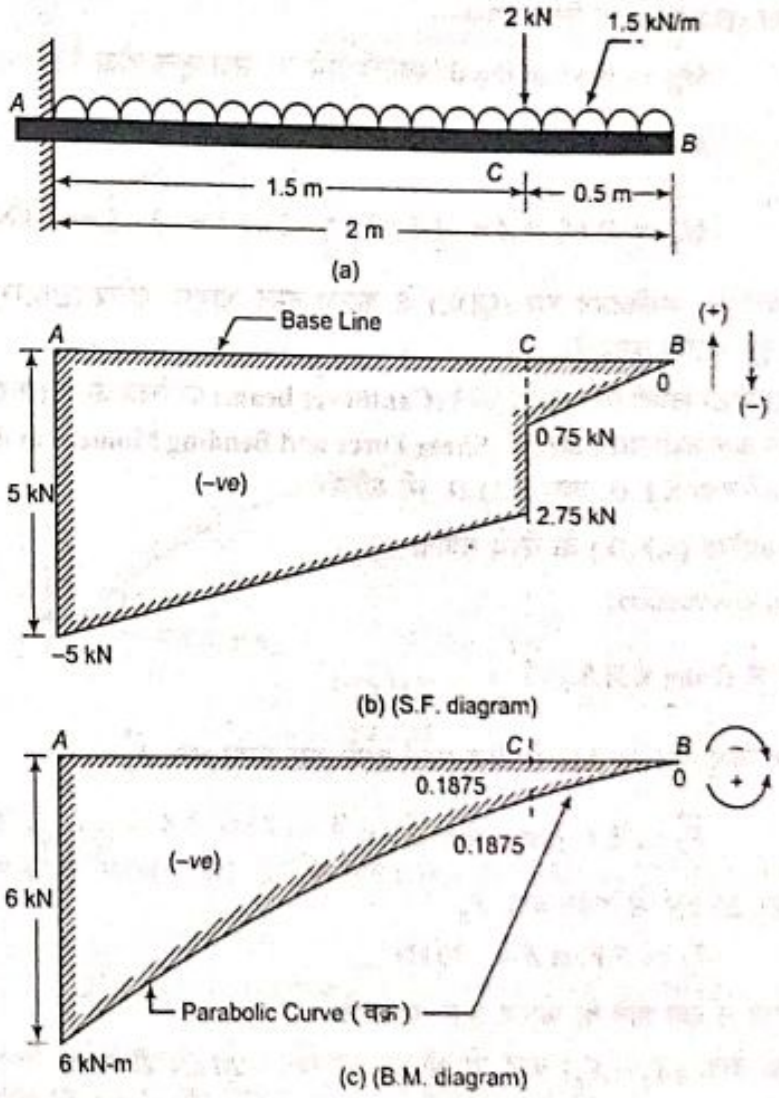
$$= -37{\cdot}5 - 21{\cdot}875 = -59{\cdot}375 \text{ kN-m}$$

B.M. के इन मानों से प्राप्त B.M.D. को चित्र 2.23 (c) में दिखाया गया है।

नोट—S.F.D. तथा B.M.D. के चित्रों को उचित पैमाना मानकर बनाना चाहिये।

उदाहरण 7. चित्र 2.24 (a) में दिखाये गये एक कैन्टीलीवर के लिये अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) तथा नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) खींचिये। **(U.P. 2004)**

हल—



चित्र 2.24

Scanned with CamScanner

अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

स्वतन्त्र सिरे B पर कर्तन बल,

$$F_B \Rightarrow \text{S.F. at } B = 0$$

C पर लगे बिन्दु भार से ठीक पहले कर्तन बल,

$$F_C \Rightarrow \text{S.F. just before } C = -1{\cdot}5 \times 0{\cdot}5 = -0{\cdot}75 \text{ kN}$$

अब C पर बिन्दु भार 2 kN के कारण SF का मान तुरन्त एक ऊर्ध्वाधर रेखा में बदलेगा।

$$\therefore \quad F_C \Rightarrow \text{S.F. at } C = -0{\cdot}75 - 2$$

$$= -2{\cdot}75 \text{ kN}$$

अब C से A तक फिर U.D.L. के कारण S.F. तिरछी रेखा के अनुसार बदलेगा।

$$\therefore \quad F_A \Rightarrow \text{S.F. at } A = -2{\cdot}75 - 1{\cdot}5 \times 1{\cdot}5$$

$$= -2{\cdot}75 - 2{\cdot}25$$

$$F_A \Rightarrow -5 \text{ kN (अधिकतम)}$$

नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिये गणना—

$$M_B \Rightarrow \text{B.M. at } B = 0 \text{ (स्वतन्त्र सिरे पर सदा शून्य होता है)}$$

$$M_C \Rightarrow \text{B.M. at } C = -1{\cdot}5 \times 0{\cdot}5 \times \frac{0{\cdot}5}{2} = -0{\cdot}1875 \text{ kN-m}$$

$$M_A \Rightarrow \text{B.M. at } A = -1{\cdot}5 \times 2 \times \frac{2}{2} - 2 \times 1{\cdot}5 = -3 - 3 = -6 \text{ kN-m}$$

धरन की पूर्ण लम्बाई पर समवितरित भार (UDL) के कारण नमन आघूर्ण आरेख (BMD) में Parabolic curve (वक्र) ऊपर को उठाते हुए बनाया जाता है।

उदाहरण 8. एक दो मीटर लम्बी कैंटीलीवर धरन (Cantilever beam) पर चित्र के अनुसार भार लग रहा है। मुख्य भागों की काटों पर कर्तन बल तथा नमन आघूर्ण (Shear Force and Bending Moment at different sections of main portion) ज्ञात करें तथा S.F.D. तथा B.M.D. भी खींचें।

हल—कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

चिन्ह प्रणाली (sign convention)

काट के दायीं ओर से (from R.H.S.) $\overset{(+)}{\uparrow}\ \underset{(-)}{\downarrow}$

धरन के सिरे B पर बिन्दु भार 20 kN से ठीक पहले दायीं ओर कर्तन बल, $\vec{F_B}$

$$\therefore \quad \vec{F_B} \Rightarrow \text{S.F. just before } \vec{B} = 0$$

अब B पर बिन्दु भार 20 kN से कर्तन बल, F_B

$$F_B \Rightarrow \text{S.F. at } B = -20 \text{ kN}$$

B से C तक कोई भार न लगे होने के कारण S.F. का मान

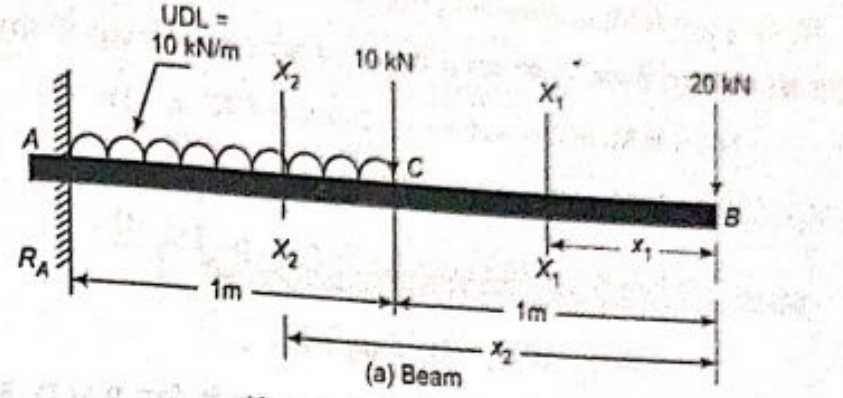
इस बीच स्थिर रहेगा। अत: $(X_1 - X_1)$ काट पर भी SF का मान – 20 kN ही रहेगा।

Scanned with CamScanner

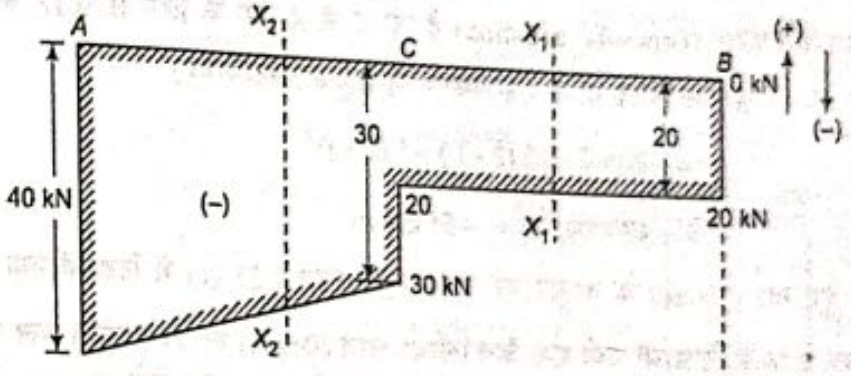
$\therefore$ $\vec{F_C} \Rightarrow$ S.F. just before $\vec{C} = -20$ kN

तथा $F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = -20 - 10 = -30$ kN

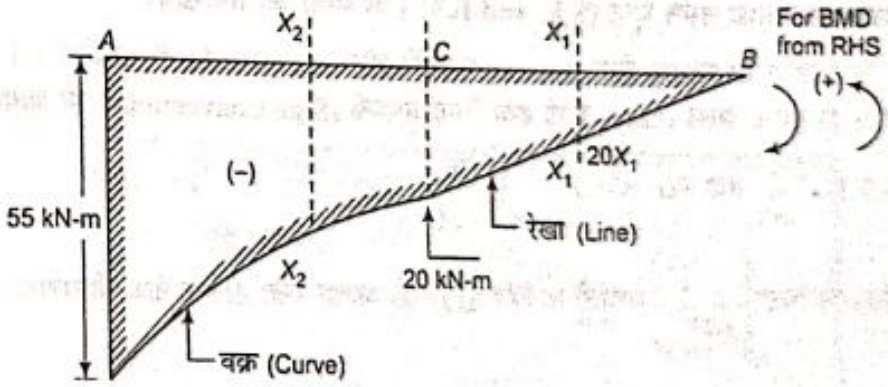
B से x_2 दूरी पर स्थित काट $(X_2 - X_2)$ पर कर्तन बल,



(a) Beam



(b) S.F.D.



(c) B.M.D.

चित्र 2.25

$$F_{(X_2-X_2)} = \text{S.F. at } (X_2 - X_2) = -30 - 10 \times (x_2 - 1)$$ उत्तर

यह एक सरल रेखा का समीकरण है। अत: SF_1 का मान C से A तक अर्थात् x_2 का मान 1 m से 2 m तक तिरछी सरल रेखा के रूप में बढ़ेगा।

$\therefore$ $\vec{F_A} = \text{S.F. just before } \vec{A} = -30 - 10 \times (2 - 1) = -40$ kN

$\therefore$ S.F. at fixed end $A = -40$ kN (यहाँ $x_2 = 2$ m रखा है)

प्राप्त मानों के आधार पर S.F.D. को चित्र 2.25 (b) में दिखाया गया है।

Scanned with CamScanner

नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिये गणना—

चिन्ह प्रणाली (Sign Conventions), दायीं ओर से

$$M_B = \text{B.M. at } B = 0$$

$$M_{(X_1-X_1)} = \text{B.M. at distance } x_1 \text{ from } B = -20x_1$$

यह एक सरल रेखा का समीकरण है जहाँ x_1 का मान 0 से 1 m तक बढ़ेगा जिससे BMD भी सरल रेखीय रूप में होगा

$$\therefore \quad M_C = \text{B.M. at } C = -20 \times 1 = -20 \text{ kN-m (यहाँ } x_1 = 1 \text{ m है।)}$$

$$M_{(X_2-X_2)} = \text{B.M. at distance } x_2 \text{ from } B \text{ (at Section } X_2 - X_2)$$

$$= -20 \times x_2 - 10 \times (x_2 - 1) - 10 (x_2 - 1) \times \frac{(x_2 - 1)}{2}$$

$$= -20 x_2 - 10 (x_2 - 1) - 5 (x_2 - 1)^2$$

यह एक परवलय समीकरण (Parabolic equation) है जो C से A तक के लिये B.M.D. को प्रदर्शित करेगी।

$$\therefore \quad M_A = \text{B.M. at } A \text{ (समीकरण में } X_2 = 2 \text{ रखने पर)}$$

$$= -20 \times 2 - 10 (2 - 1) - 5 (2 - 1)^2$$

$$= -40 - 10 - 5 = -55 \text{ kN-m}$$

B.M. के प्राप्त हुए मान (Value) के आधार पर B.M.D को चित्र 2.25 (c) में दिखाया गया है।

उदाहरण 9. चित्र 2.26 में दिखायी गयी एक कैन्टीलीवर धरन (Beam) के लिये कर्तन बल आरेख (SFD) तथा नमन घूर्ण आरेख (BMD) उचित पैमाना मानकर बनाइये। इस कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे (Free end) 0, 2, 4, 6 तथा 8 m की दूरियों पर कर्तन बल तथा नमन घूर्ण (S.F. and B.M.) के मानों को लिखिये।

हल—क्योंकि कैन्टीलीवर का स्वतन्त्र सिरा (Free end) बायीं ओर (at Left Side) है, इसलिए S.F.D. तथा B.M.D. की गणना बायीं ओर से ही करनी सरल (easy) होगी तथा चिन्ह प्रणाली (Sign Conventions) भी बायीं ओर वाली प्रयोग करेंगे। जैसे—For S.F.D. $\overset{\rightarrow}{\underset{(+)}{\downarrow}}$ तथा For BMD $\overset{(-)}{\underset{(+)}{\curvearrowright}}$

नोट—इसके विपरीत चिन्ह $\left(\underset{(-)}{\downarrow} \overset{(+)}{\uparrow}\right)$ प्रणाली मानकर SFD को आधार रेखा AD के नीचे भी बनाया जा सकता है।

कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिए गणना (From L.H.S. $\overset{(-)}{\uparrow} \underset{(+)}{\downarrow}$)

$$F_A \Rightarrow \text{S.F. at } A = +250 \text{ N (आधार रेखा AD से ऊपर +ve होता है)}$$

B के ठीक बायीं ओर के भार के कारण कर्तन बल $= \overleftarrow{F_B}$ अर्थात्

$$\text{S.F. just before } \overleftarrow{B} \text{ (from L.H.S.)} = +250 + 30 \times 2 = +310 \text{ N}$$

$$F_B \Rightarrow \text{S.F. at } B = 310 + 700 = 1010 \text{ N (यह मान } B \text{ से } C \text{ तक स्थिर रहेगा)}$$

$$F_E \Rightarrow \text{S.F. at } E = 1010 \text{ N}$$

Scanned with CamScanner

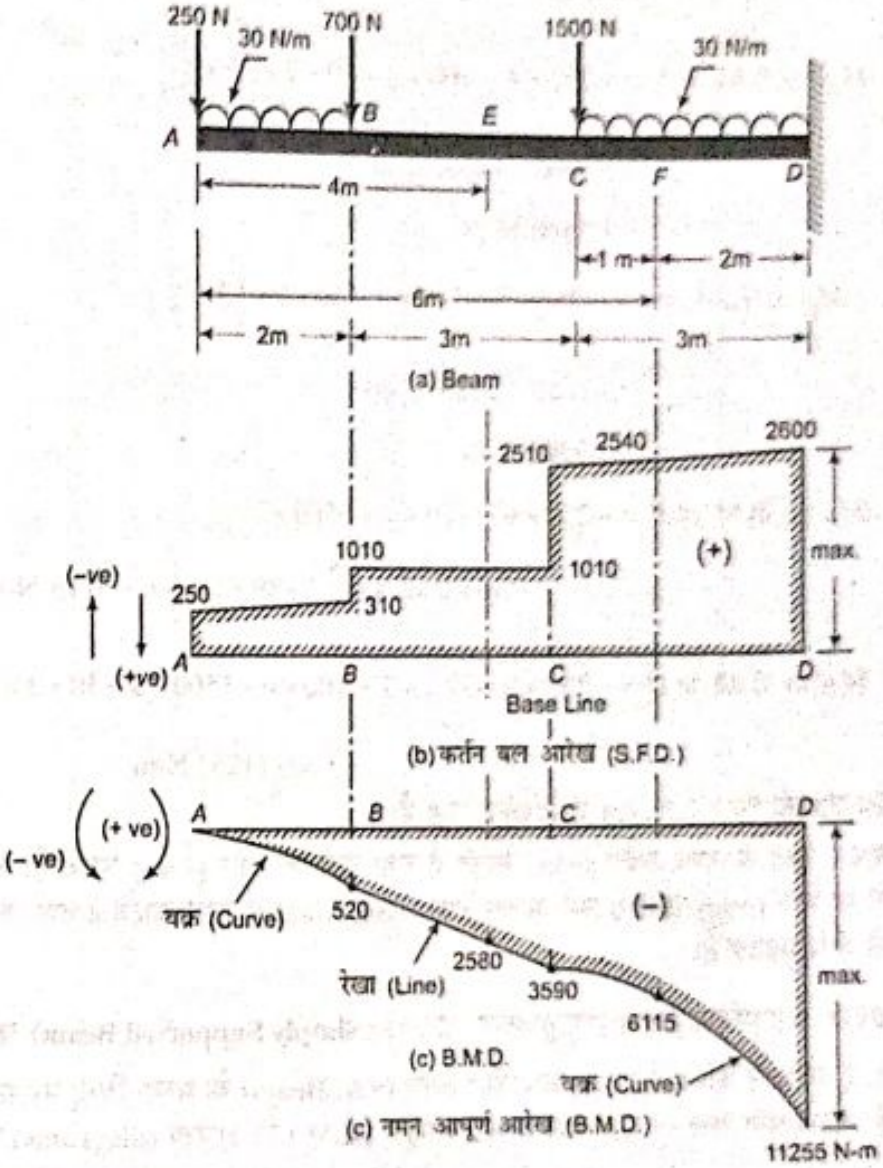
अब C के ठीक पहले बायीं ओर (1500 N भार को प्रयोग न करके)

$\overleftarrow{F_C} \Rightarrow$ S.F. just before $\overleftarrow{C} = 1010$ N

$F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = 1010 + 1500 = 2510$ N

$F_F \Rightarrow$ S.F. at $F = 2510 + 30 \times 1 = 2540$ N

$F_D \Rightarrow$ S.F. at $D = 2540 + 30 \times 2 = 2600$ N



चित्र 2.26

नोट—S.F. के धन (+ve) मानों को आधार रेखा से ऊपर लेकर चित्र बनाया जायेगा। कर्तन बल आरेख (SFD) को चित्र 2.26 (b) में दिखाया गया है।

Scanned with CamScanner

बंकन आघूर्ण आरेख (BMD) के लिये गणना

चिन्ह प्रणाली, बायीं ओर से (From LHS)

$M_A \Rightarrow$ B.M. at $A = 0$ (स्वतन्त्र सिरे पर BM का मान सदैव शून्य होता है।)

$$M_B \Rightarrow \text{B.M. at } B = -250 \times 2 - 30 \times 2 \times \frac{2}{2}$$

$$= -500 - 60 = -560 \text{ N-m}$$

$$M_E \Rightarrow \text{B.M. at } E = -250 \times 4 - 700 \times 2 - 30 \times 2 \times \left(2 + \frac{2}{2}\right)$$

$$= -1000 - 1400 - 180$$

$$= -2580 \text{ N-m}$$

$$M_C \Rightarrow \text{B.M. at } e = -250 \times 5 - 700 \times 3 - 30 \times 2 \times \left(3 + \frac{2}{2}\right)$$

$$= -1250 - 2100 - 240$$

$$= -3590 \text{ N-m}$$

$$M_F \Rightarrow \text{B.M. at } F = -250 \times 6 - 700 \times 4 - 1500 \times 1$$

$$-30 \times 2 \times \left(4 + \frac{2}{2}\right) - 30 \times 1 \times \frac{1}{2} = -6115 \text{ N-m}$$

$$M_D \Rightarrow \text{B.M. at } D = -250 \times 8 - 302 \times 7 - 700 \times 6 - 1500 \times 3 - 30 \times 3 \times \frac{3}{2}$$

$$= -11255 \text{ N-m}$$

इनसे प्राप्त BMD को चित्र 2.26 (c) में दिखाया गया है।

**नोट—आधार रेखा से ऊपर सदैव (+ve) मानते हैं तथा नीचे की ओर (– ve) मानते हैं। अत: चिन्ह प्रणाली के आधार पर गणना से जो मान (+ve) आता है उसे आधार रेखा (Base Line) से ऊपर काटते हैं तथा जो मान (– ve) आता है उसे आधार रेखा से नीचे काटते हैं।

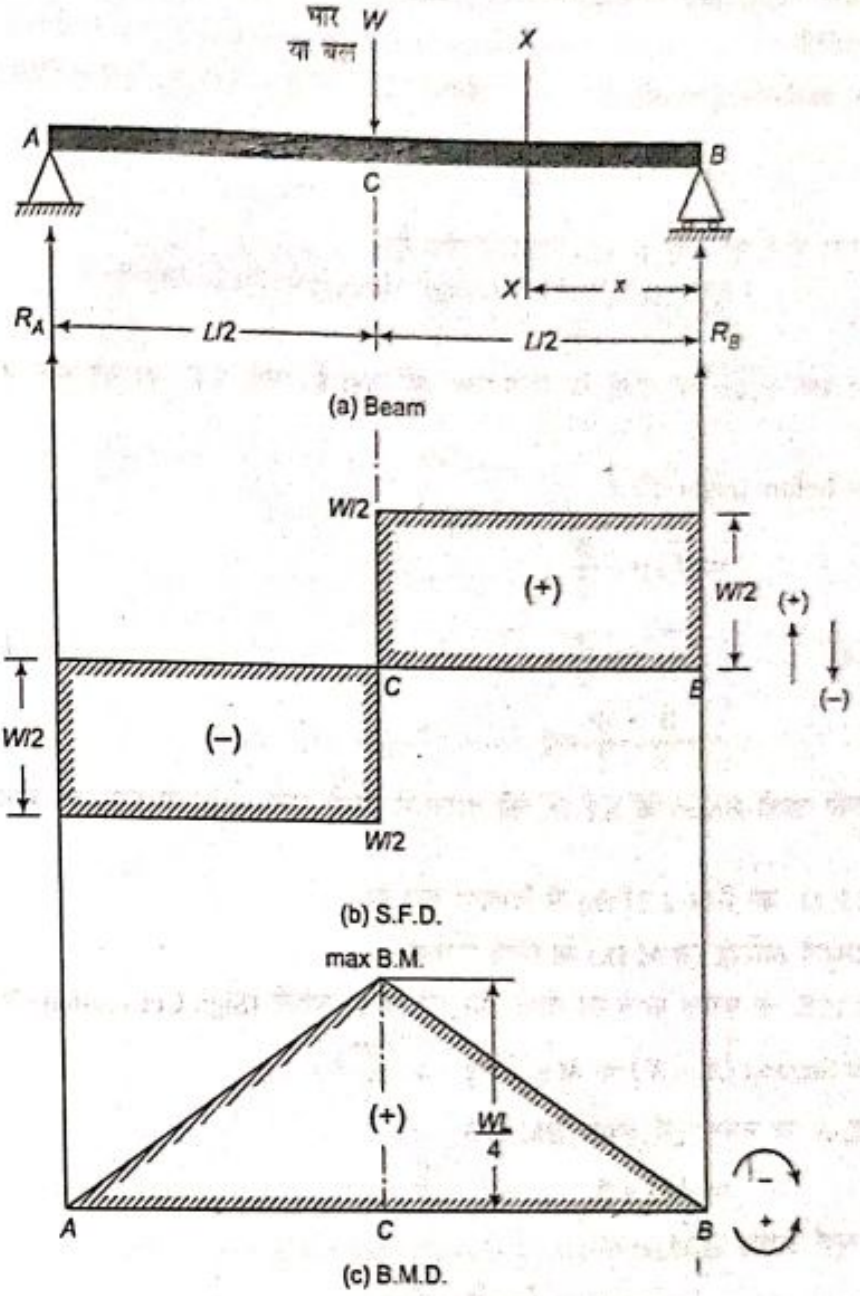
**विशेष–सरल आधारित धरन (शुद्धालम्ब धरन) (Simply Supported Beam) पर आधारित–

उदाहरण 10. L विस्तार की एक सरल आधारित धरन (S.S. Beam) के मध्य-विन्दु पर संकेन्द्रित बल (Point Load) W लगा है। अपरूपण बल (S.F.) तथा बंकन आघूर्ण (B.M.) के आरेख (diagrams) खींचिये।

(U.P. 2013, M.O.S. & S.O.M.)

Scanned with CamScanner

हल—



चित्र 2.27

प्रश्नानुसार घरन (Beam) चित्र 2.27 (a) में दिखाई गई है। इसमें भार W लम्बाई L के मध्य में (at mid-point) होने के कारण दोनों टेकों A तथा B की प्रतिक्रियायें क्रमशः R_A तथा R_B आपस में समान होंगी

$$\therefore \qquad R_A = R_B = \frac{\text{कुल भार } (W)}{2} \text{ होगा।}$$

(1) कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

Beam के R.H.S. की चिन्ह प्रणाली (Sign Convention) प्रयोग करने पर—

अब ठीक B पर कर्तन बल $= R_B = \frac{W}{2}\uparrow$ अर्थात् S.F. at $B = R_B = \frac{W}{2}$ (+ve)

Scanned with CamScanner

∵ धरन (Beam) के भाग BC में कोई अन्य भार (Load) नहीं लग रहा है, अत: S.F. का मान B से C पर पहुँचने तक स्थिर (constant) रहेगा।

∴ S.F. just before (right of) C

$$\Rightarrow \vec{F_C} = \frac{W}{2} \text{ (+ve)}$$

अब C पर भार नीचे की ओर (– ve) दिशा में लगा है।

∴ S.F. at C $\Rightarrow F_C = +\frac{W}{2} - W = -\frac{W}{2}$

अब C से A तक beam पर कोई भी अन्य भार नहीं लगा है, अत: S.F. का यह मान A पर पहुँचने तक स्थिर (constant) रहेगा।

∴ S.F. just before (right of) A

$$\Rightarrow \vec{F_A} = -\frac{W}{2}$$

∴ S.F. at A $\Rightarrow \vec{F_A} = -\frac{W}{2} + R_A$ (∵ A पर प्रतिक्रिया R_A है)

$$= -\frac{W}{2} + \frac{W}{2} = 0$$

नोट—दो टेकों वाली Beam के S.F.D. की गणना में सबसे अन्त (last) में S.F. का मान शून्य (Zero) अवश्य आयेगा।

Beam के S.F.D. को चित्र 2.27 (b) में दिखाया गया है।

(2) नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिये गणना—

Beam के R.H.S. से गणना करने पर दायीं ओर की चिन्ह प्रणाली (Sign Convention) प्रयोग की जायेगी।

अब B.M. at Section $(X-X) \Rightarrow M_X = R_B \times x = \frac{W}{2} \times x$

∴ $x = 0$ पर; B पर नमन घूर्ण अर्थात् BM at B

$$\Rightarrow M_B = 0$$

C पर नमन घूर्ण अर्थात् B.M. at C

$$\Rightarrow M_C = R_B \times \frac{L}{2} = \frac{W}{2} \times \frac{L}{2}$$

$$M_C = \frac{WL}{4} \text{ (अधिकतम मान)}$$

अब A पर नमन आघूर्ण अर्थात् BM at A

$$\Rightarrow M_A = R_B \times L - W \times \frac{L}{2}$$

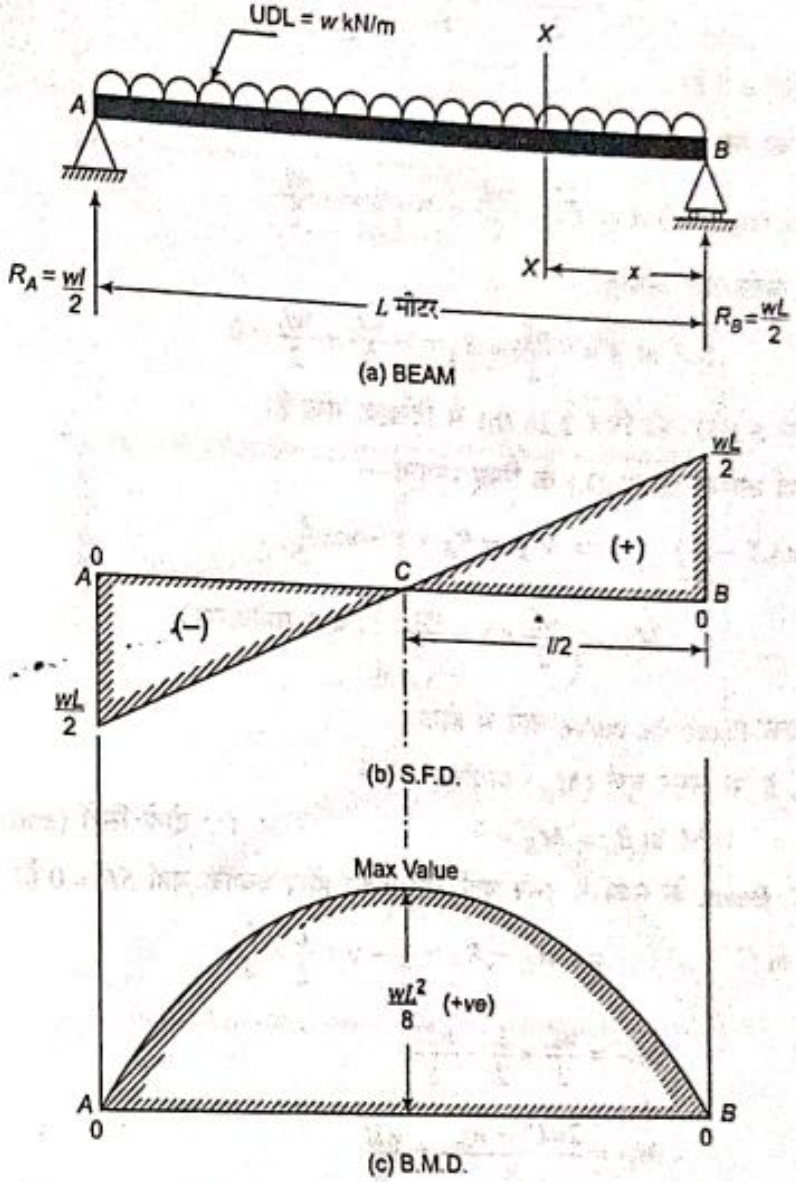
∴ $M_A = \frac{W}{2} \times L - W \times \frac{L}{2} = 0$ (देखें चित्र 2.27 (c))

याद रखें—दो टेकों वाली Beam के दोनों सिरों पर B.M. का मान सदैव शून्य (Zero) होता है।

Scanned with CamScanner

उदाहरण 11. चित्र 2.28 (a) में विस्तार L की एक सरल आलम्बित धरन (Simply Supported Beam) पर wkN/m का समान रूप से बँटा भार (Uniformly Distributed Load — U.D.L.) लगा है। अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) तथा नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) बनाइये और इनके अधिकतम मानों को दर्शाइये। (U.P. 2014)

हल—



चित्र 2.28

भार की सममिति के कारण (Due to Symmetry of Loading)

$$R_A = R_B = \frac{\text{Total Load } (w \times L)}{2}$$

कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

B से x दूरी पर स्थित काट $(X - X)$ पर

S.F. at Section $(X - X)$

$$F_X = R_B - w.x$$

$$F_X = \left(\frac{wL}{2} - w.x\right) \quad \text{... (i)}$$

Scanned with CamScanner

$x = 0$ रखने पर S.F. at $B = \frac{wL}{2} \Rightarrow R_B$

$x = \frac{L}{2}$ पर S.F. at centre (C)

$$F_C = \frac{wL}{2} - w \times \frac{L}{2} = 0$$

अतः केन्द्र पर $SF = 0$ है।

अब कर्तन बल का मान, A पर पहुँचने तक अर्थात्

S.F. just before (right of) $A \Rightarrow \vec{F}_A = \frac{wL}{2} - w \times L = -\frac{wL}{2}$ [∵ यहाँ $x = L$]

∴ ठीक A पर कर्तन बल अर्थात्

$$\text{S.F. at } A = -\frac{wL}{2} + R_A = -\frac{wL}{2} + \frac{wL}{2} = 0$$

प्राप्त हुए मानों से S.F.D. को चित्र 2.28 (b) में दिखाया गया है।

(2) नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिए गणना—

BM at Section $(X - X)$ $\Rightarrow M_X = R_B \times x - w.x.\frac{x}{2}$

$$M_X = \left(\frac{wL}{2} \times x - \frac{wx^2}{2}\right) \text{ (वक्र समीकरण)}$$

अतः B.M.D. एक Parabolic curve रूप में होगा।

$x = 0$ रखने पर, B पर नमन घूर्ण (M_B) अर्थात्

B.M. at $B \Rightarrow M_B = 0$ (∵ दोनों सिरों (ends) पर $BM = 0$ होता है)

$x = \frac{L}{2}$ रखने पर, Beam के मध्य में नमन घूर्ण अधिकतम होगा क्योंकि यहाँ $SF = 0$ है।

∴ Max B.M. at C $\Rightarrow M_C = R_B \times \frac{L}{2} - w \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{4}$

या $$M_C = \frac{wL}{2} \times \frac{L}{2} - \frac{wL^2}{8}$$

∴ $$M_C = \frac{2wL^2 - wL^2}{8} = \frac{wL^2}{8}$$ (सूत्र)

टेक A पर नमन आघूर्ण (M_A) अर्थात् ($x = L$ रखने पर Moment)

B.M. at A $\Rightarrow M_A = \frac{wL}{2} \times L - w \times L \times \frac{L}{2} = 0$

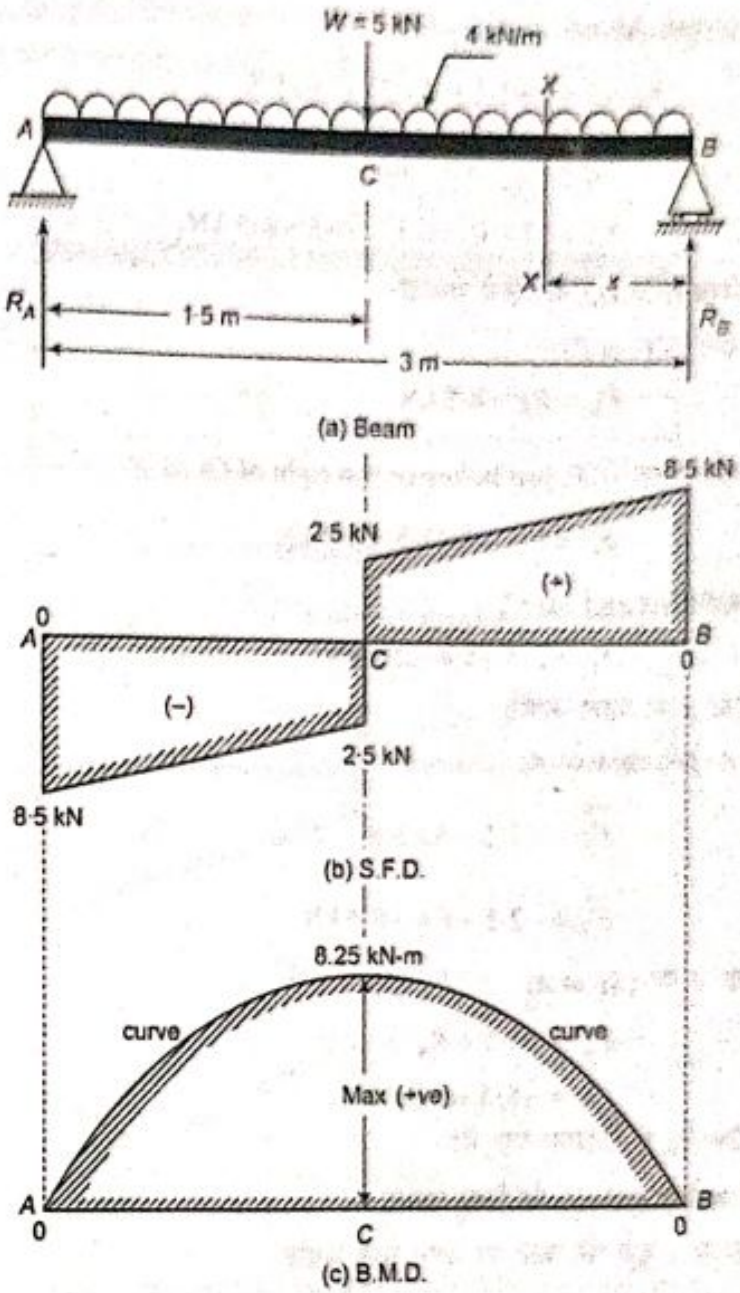
अतः Beam के दोनों सिरों (Ends) पर B.M. का मान शून्य (Zero) है।

इस Beam के B.M.D. को चित्र 2.28 (c) में देखें।

उदाहरण 12. एक शुद्धालम्ब धरन (S.S. Beam) का विस्तार (span) 3 m है। इसकी पूरी लम्बाई पर 4 kN/m का एकसमान वितरित भार (U.D.L.) तथा मध्य-बिन्दु (mid-point) पर 5 kN का संकेन्द्री भार (Point Load) लगा है। इस धरन के लिये कर्तन बल तथा नमन घूर्ण आरेख (SFD) तथा (BMD) खींचिये। इनके अधिकतम मानों को आरेख पर अंकित कीजिये। **(U.P. 2008, MOS)**

Scanned with CamScanner

हल—



चित्र 2.29

माना टेक A तथा टेक B की प्रतिक्रियायें क्रमशः R_A तथा R_B हैं।

∵ भार सममित रूप में (symmetrical) अर्थात् सिरों से बराबर दूरी पर बराबर भार लगे हैं। अतः

$$R_A = R_B = \frac{\text{कुल भार}}{2}$$

$$R_A = R_B = \frac{5 + (4 \times 3)}{2} = \frac{17}{2}$$

$$= 8{\cdot}5 \text{ kN}$$

अथवा प्रतिक्रियायें (Reactions) को निम्न प्रकार भी ज्ञात कर सकते हैं—

$$R_A + R_B = \text{Total Load on Beam}$$

$$= 5 + (4 \times 3) = 17 \text{ kN}$$

Scanned with CamScanner

बिन्दु A के सापेक्ष आघूर्ण लेने पर

$$R_B \times 3 = 5 \times 1{\cdot}5 + 4 \times 3 \times \frac{3}{2} = 25{\cdot}5$$

या $$R_B = \frac{25{\cdot}5}{3} = 8{\cdot}5 \text{ kN}$$

$\therefore$ $$R_A = 17 - R_B \Rightarrow 17 - 8{\cdot}5 = 8{\cdot}5 \text{ kN}$$

(1) कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

बिन्दु B पर कर्तन बल (S.F. at B)

$\Rightarrow$ $$F_B = R_B = 8{\cdot}5 \text{ kN}$$

ठीक C के पहले कर्तन बल (S.F. just before or just right of C) $\Rightarrow \vec{F}$

$\therefore$ $$\vec{F_C} = 8{\cdot}5 - 4 \times 1{\cdot}5 = 2{\cdot}5 \text{ kN}$$

अब ठीक C पर कर्तन बल (S.F. at C)

$\Rightarrow$ $$F_C = 2{\cdot}5 - 5 = -2{\cdot}5 \text{ kN}$$

अब कर्तन अब ठीक A से पहले अर्थात्

S.F. just before A (just right of A)

$\Rightarrow$ $$\vec{F_A} = -2{\cdot}5 - 4 \times 1{\cdot}5$$

$\therefore$ $$\vec{F_A} = -2{\cdot}5 - 6 = -8{\cdot}5 \text{ kN}$$

$\therefore$ कर्तन बल ठीक A पर (SF at A)

$\Rightarrow$ $$F_A = -8{\cdot}5 + R_A$$
$$= -8{\cdot}5 + 8{\cdot}5 = 0$$

SFD को चित्र 2.29 (b) में दिखाया गया है।

(2) नमन आघूर्ण आरेख (BMD) के लिए गणना—

धरन (beam) में B से x दूरी की काट पर नमन घूर्ण अर्थात्

B.M. at Section $(X - X)$

$\Rightarrow$ $$M_X = R_B x - 4 \cdot x \frac{x}{2}$$

या $$M_X = 8{\cdot}5x - 2x^2$$ (यह Parabolic equation है)

At $x = 0$, B.M. at B $\Rightarrow M_B = 0$

At $x = 1{\cdot}5$, B.M. at centre $C \Rightarrow M_C = 8{\cdot}5 \times 1{\cdot}5 - 4 \times 1{\cdot}5 \times \frac{1{\cdot}5}{2}$

$\therefore$ $$M_C = 8{\cdot}25 \text{ kN-m}$$ (Max B.M. due to SF = 0 at C)

अब A पर नमन घूर्ण (B.M. at A) $\Rightarrow M_A$

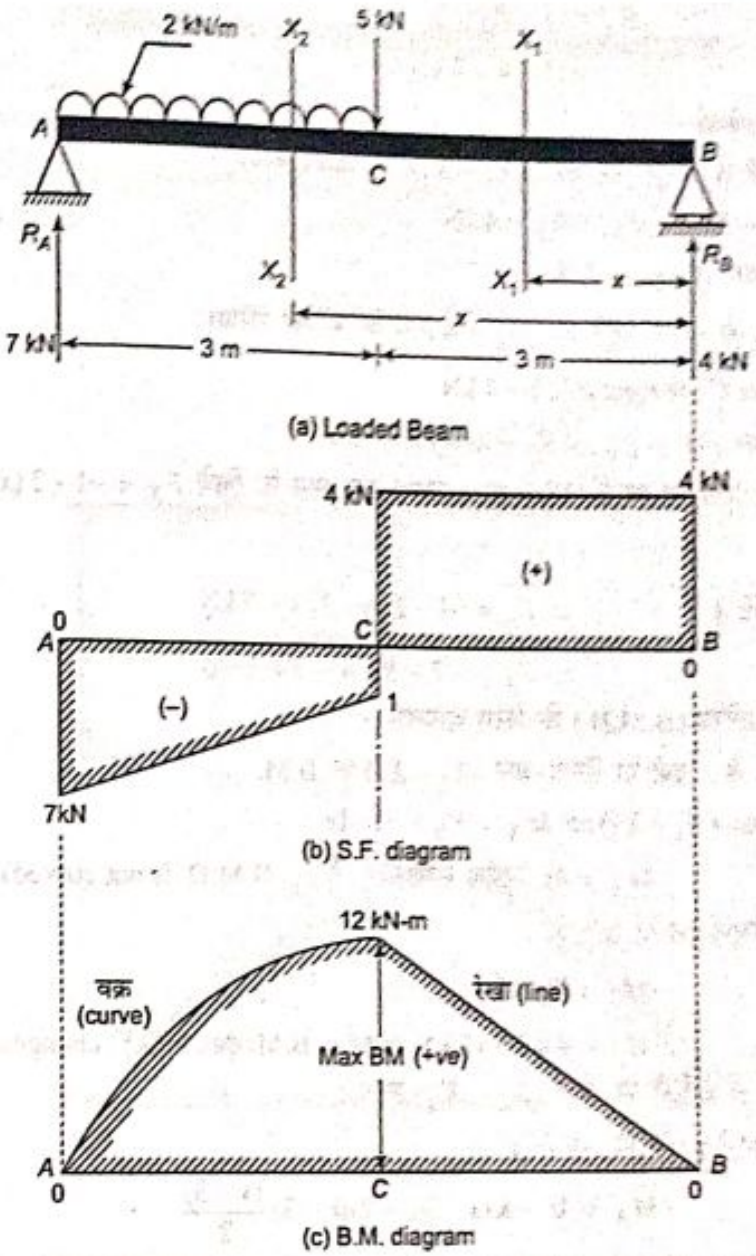
$\therefore$ $$M_A = 8{\cdot}5 \times 3 - 5 \times 1{\cdot}5 - 4 \times 3 \times \frac{3}{2} = 0$$

B.M.D. को चित्र 2.29 (c) में दिखाया गया है।

Scanned with CamScanner

उदाहरण 13. चित्र 2.30 में प्रदर्शित एक शुद्धालम्बित धरन (Simply Supported Beam) के लिए अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) तथा बंकन आघूर्ण (B.M.D.) खींचिए। (U.P. 2011, U.K. 2014)

हल—



चित्र 2.30

माना सिरों पर लगी टेकों की प्रतिक्रियायें R_A तथा R_B हैं।

$\therefore$ $R_A + R_B$ = Total Load on Beam

$= 5 + 2 \times 3$

$= 11$ kN

A पर आघूर्ण (Moment) लेने पर—

$$6 \times R_B = 5 \times 3 + 2 \times 3 \times \frac{3}{2}$$

$$= 15 + 9 = 24$$

Scanned with CamScanner

$$\therefore \quad R_B = \frac{24}{6} = 4\,\text{kN}$$

अब $R_A = 11 - R_B$

$= 11 - 4 = 7\,\text{kN}$

(1) For S.F. diagram—

BC भाग के लिये B से x दूरी पर काट $(X_1 - X_1)$ पर कर्तन बल

S.F. at $(X_1 - X_1) \Rightarrow F_X = R_B = 4\,\text{kN}$

$\because$ F_X का मान स्थिर (Constant) है।

$\therefore$ S.F. का मान B से C पर पहुँचने तक $R_B = 4$ kN के बराबर रहेगा।

$\therefore$ S.F. just before C (or right of C) $= 4\,\text{kN}$

अब C पर कर्तन बल (SF at C) $\Rightarrow F_C = 4 - 5 = -1\,\text{kN}$

CA भाग में B से x दूरी पर काट $(X_2 - X_2)$ माना। इस भाग के लिये $F_X = -1 - 2(x-3)$, यह सरल रेखीय समीकरण है।

$\therefore$ S.F. just before A $\Rightarrow \vec{F_A} = -1 - 2(6-3) = -7\,\text{kN}$

S.F. at A $\Rightarrow F_A = -7 + R_A = -7 + 7 = 0$

(2) नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिए गणना—

BC भाग के लिए B से x दूरी पर स्थित काट $(X_1 - X_1)$ पर B.M.

$\therefore$ BM at Section $(X_1 - X_1) \Rightarrow M_X = R_B \times x = 4x$

$M_X = 4x$ रेखीय समीकरण है ($\because$ B.M.D. is not curved)

अब C पर नमन आघूर्ण (B.M. at C)

$\Rightarrow \quad M_C = R_B \times 3$

या $M_C = 4 \times 3 = 12\,\text{kN-m}$ Max B.M. due to S.F. changes sign at C

अब CA भाग में B से x दूरी पर काट $(X_2 - X_2)$ माना

$\therefore$ BM at Section $(X_2 - X_2) \Rightarrow M_X$

$\therefore \quad M_X = 4x - 5(x-3) - 2(x-3)\dfrac{(x-3)}{2}$

यह वक्र समीकरण है, इसलिए AC भाग में BMD एक वक्र (Curved) रूप में होगा।

$\therefore$ A पर नमन आघूर्ण (B.M. at A) $\Rightarrow M_A$, यहाँ $x = 6$ होगा

या $M_A = 4 \times 6 - 5(6-3) - 2(6-3)\dfrac{(6-3)}{2}$

$= 24 - 15 - 9 = 24 - 24 = 0$

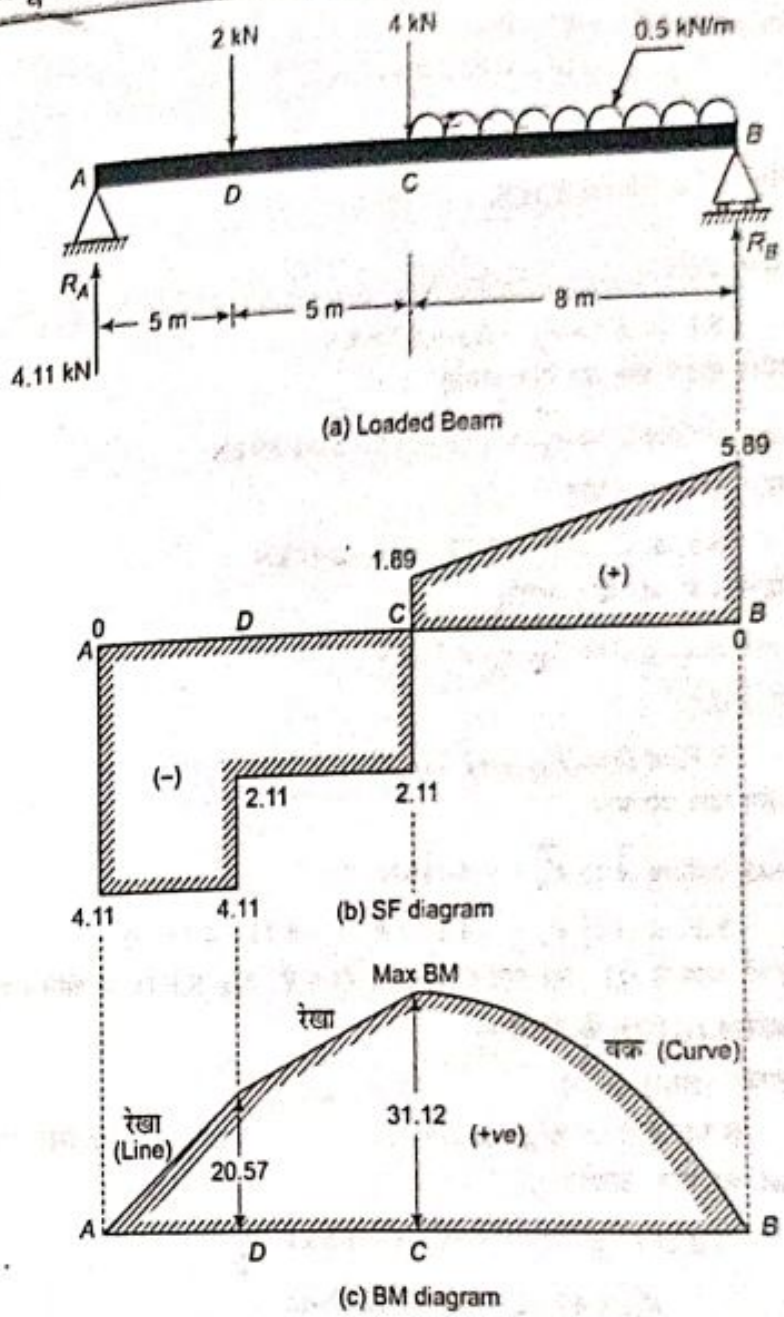
अत: S.S. Beam के दोनों सिरों A तथा B पर BM का मान शून्य (Zero) होता है।

उदाहरण 14. एक सरल धरन (Simply Supported beam) पर चित्र 2.31 के अनुसार भाग लगे हैं। इस धरन के लिए अपरूपण बल आरेख (SFD) तथा बंकन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) बनाइये।

(U.P. 2005, U.K.2011, 12, 14, S)

Scanned with CamScanner

हल—



चित्र 2.31

A तथा B टेकों की प्रतिक्रियायें (Reactions) R_A व R_B हैं

$\therefore$ $R_A + R_B$ = Beam पर कुल भार

$= 2 + 4 + 0{\cdot}5 \times 8$

$= 6 + 4 = 10$

$$R_A + R_B = 10 \text{ kN} \quad \text{... (i)}$$

अब A पर आघूर्ण (Moment) लेने से

$$R_B \times 18 = 2 \times 5 + 4 \times 10 + 0{\cdot}5 \times 8 \times 14$$

$$= 10 + 40 + 56 = 106$$

या $$R_B = \frac{106}{18} = 5{\cdot}89 \text{ kN}$$

Scanned with CamScanner

$\therefore \quad R_A = 10 - R_B$

$= 10 - 5{\cdot}89 = 4{\cdot}11$

$\therefore \quad R_A = 4{\cdot}11\,\text{kN}$

(1) S.F.D. के लिये— $\left(\begin{matrix}+\\ \uparrow\downarrow \\ -\end{matrix}\right)$ from R.H.S.

बिन्दु B पर कर्तन बल अर्थात्

$$\text{S.F. at } B \Rightarrow F_B = R_B = 5{\cdot}89\ \text{kN}$$

बिन्दु C के ठीक पहले कर्तन बल का मान अर्थात्

$$\text{S.F. just before } C \Rightarrow \vec{F_C} = 5{\cdot}89 - 0{\cdot}5 \times 8 = 1{\cdot}89\,\text{kN}$$

ठीक C पर कर्तन बल का मान अर्थात्

$$\text{S.F. at } C \Rightarrow F_C = 1{\cdot}89 - 4 = -2{\cdot}11\,\text{kN}$$

बिन्दु D के ठीक पहले S.F. का मान अर्थात्

$$\text{S.F. just before } D \Rightarrow \vec{F_D} = -2{\cdot}11\,\text{kN}$$

D पर S.F. का मान अर्थात्

$$\text{S.F. at } D \Rightarrow F_D = -2{\cdot}11 - 2 = -4{\cdot}11\,\text{kN}$$

A के ठीक पहले कर्तन बल का मान

$$\text{S.F. just before } \vec{A} \Rightarrow \vec{F_A} = -4{\cdot}11\,\text{kN}$$

$$\text{S.F. at } A \Rightarrow F_A = -4{\cdot}11 + R_A = -4{\cdot}11 + 4{\cdot}11 = 0$$

नोट—Beam के खाली भाग में S.F. का मान Constant रहता है, अत: S.F.D. में क्षैतिज रेखा होगी।

(2) नमन आघूर्ण आरेख (BMD) के लिये—

ठीक B पर नमन आघूर्ण (BM) अर्थात्

$$\text{B.M. at } B \Rightarrow M_B = 0 \qquad (\because \text{सिरों पर सदा शून्य होता है})$$

अब ठीक C पर BM का मान, अर्थात्

$$\text{BM at } C \Rightarrow M_C = 5{\cdot}89 \times 8 - 0{\cdot}5 \times 8 \times \frac{8}{2}$$

$\therefore \quad M_C = 47{\cdot}12 - 16 = 31{\cdot}12\,\text{kN-m}$

बिन्दु D पर नमन आघूर्ण (BM) का मान (अधिकतम मान) अर्थात्

$$\text{B.M. at } D \Rightarrow M_D = 5{\cdot}89 \times 13 - 0{\cdot}5 \times 8 \times 9 - 4 \times 5$$

$\therefore \quad M_D = 20{\cdot}57\,\text{kN-m}$

बिन्दु A पर BM का मान अर्थात्

$$\text{B.M. at } A \Rightarrow M_A = 5{\cdot}89 \times 18 - 0{\cdot}5 \times 8 \times 14 - 4 \times 10 - 2 \times 5$$

$\therefore \quad M_A = 0{\cdot}02\ \text{kN-m} \cong 0\ (\text{Zero माना})$

⇨ **याद रखें—(1)** जिस बिन्दु पर SF अपना चिन्ह बदलता है, उस बिन्दु पर BM का मान Max (अधिकतम) होता है।

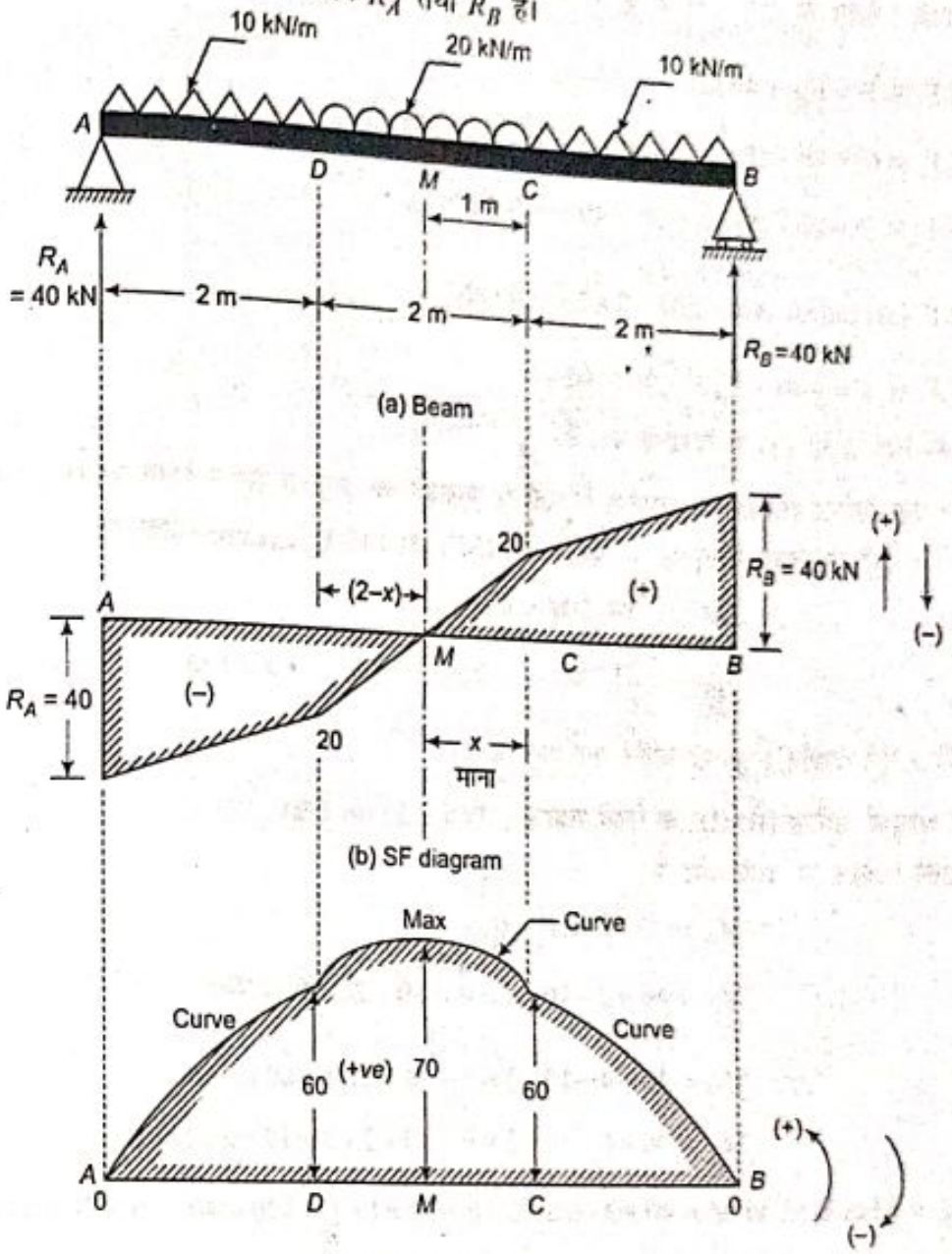
(2) U.D.L. वाले भाग में BMD वक्र रूप में बनाते हैं। अन्य सभी बिन्दु भारों के लिए सरल रेखा रूप में BMD को बनाते हैं।

(3) Beam के जिस बिन्दु पर बलयुग्म (Couple) लगा होता है, उस बिन्दु पर BM का मान तुरन्त एक Vertical Line में बदलता है।

Scanned with CamScanner

उदाहरण 15. चित्र 2.32 (a) में दिखायी गयी धरन (Beam) के लिये कर्तन बल तथा नमन आघूर्ण आरेख (SFD and BMD) खींचिये तथा अधिकतम नमन आघूर्ण (B.M.) का मान ज्ञात कीजिये।

हल—माना धरन की टेकों की प्रतिक्रियायें R_A तथा R_B हैं।



चित्र 2.32

$$R_A + R_B = \text{कुल भार (total load on beam)}$$
$$= (10 \times 2) + (20 \times 2) + (10 \times 2)$$
$$= 20 + 40 + 20 = 80 \text{ kN}$$

$$\therefore \quad R_A + R_B = 80 \quad \ldots (i)$$

∵ दोनों सिरों से बराबर दूरी पर बराबर भार लगे हैं। इसलिये

$$R_A = R_B = \frac{\text{कुल भार}}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ kN}$$

Scanned with CamScanner

(1) कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

चिन्ह प्रणाली : धरन के दायीं ओर से कर्तन बल के लिये $\overset{+}{\uparrow}\downarrow$

$F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = R_B = 40\,\text{kN}$

$F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = 40 - 10 \times 2 = 20\,\text{kN}$

$F_D \Rightarrow$ S.F. at $D = 20 - 20 \times 2 = 20 - 40 = -20\,\text{kN}$

$\vec{F_A} \Rightarrow$ S.F. just before $\vec{A} = -20 - 10 \times 2 = -40\,\text{kN}$

$F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -40 + R_A = -40 + 40 = 0$

S.F.D. को चित्र 2.32 (b) में दिखाया गया है।

अब कर्तन बल आरेख (SFD) के समरूप त्रिभुजों में भुजाओं का अनुपात समान रखने पर (By Geometry) माना C से x दूरी पर स्थित बिन्दु M पर कर्तन बल (SF) का मान शून्य (Zero) होता है।

$\therefore$ जब $\quad CM = x$ तब $DM = (2 - x)$

$\therefore \quad \dfrac{x}{20} = \dfrac{2-x}{20}$ या $\quad 2x = 2$ या $\quad x = 1\,\text{m}$

अत: C से x दूरी अर्थात् 1 m पर कर्तन बल शून्य होगा।

(2) नमन आघूर्ण आरेख (BMD) के लिये गणना—चित्र 2.32 (c) देखें।

चिन्ह प्रणाली : धरन पर दायीं ओर से

$M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = 0$

$M_C = 40 \times 2 - 10 \times 2 \times \dfrac{2}{2} = 80 - 20 = 60\,\text{kN-m}$

$M_D = 40 \times 4 - 10 \times 2 \times 3 - 20 \times 2 \times 1 = 60\,\text{kN-m}$

$M_A = 40 \times 6 - 10 \times 2 \times 5 - 20 \times 2 \times 3 - 10 \times 2 \times 1 = 0$

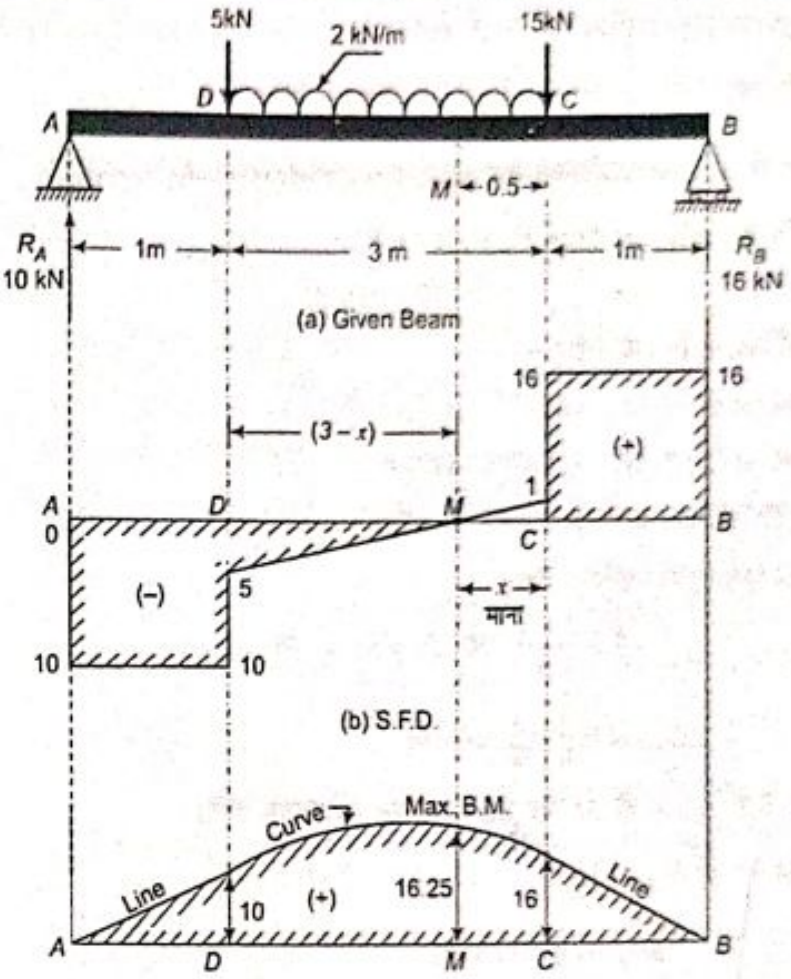
$M_M = \text{Max B.M. at } M = 40 \times 3 - 10 \times 2 \times 2 - 20 \times 1 \times \dfrac{1}{2} = 120 - 40 \div 10 = 70\,\text{kN-m}$

धरन के सभी भागों में U.D.L. के कारण नमन घूर्ण आरेख (BMD) वक्र रूप में होगा।

उदाहरण 16. दिये गये चित्र 3.33 (a) के अनुसार अधिकतम कर्तन बल (Max. Shear force) तथा अधिकतम नमन घूर्ण (Max. Bending Moril) का मान ज्ञात कीजिये एवं SFD और BMD बनाइये।

(U.P. 2005, 10; U.K. 2014 (S) mech)

Scanned with CamScanner



चित्र 3.33

हल—(चित्र 3.33 (b) व (c) देखें)

$$R_A + R_B = 5 + 15 + (2 \times 3)$$

$$= 26 \qquad \ldots (1)$$

अब A पर आघूर्ण (Moment) लेने पर,

$$5 \times R_B = 5 \times 1 + 2 \times 3 \times 2{\cdot}5 + 15 \times 4$$

$$R_B = \frac{80}{5} = 16\,\text{kN}$$

$$\therefore \quad R_A = 26 - R_B$$

$$= 26 - 16 = 10\,\text{kN}$$

(1) S.F.D. के लिए—(दायीं ओर से चिन्ह $\overset{(+)}{\uparrow}\ \underset{(-)}{\downarrow}$ प्रयोग करने पर)

B पर कर्तन बल (S.F. at B) $\Rightarrow F_B = R_B = 16\,\text{kN}$

अब C पर पहुँचने तक कर्तन बल (S.F. just before C) $\Rightarrow \overrightarrow{F_C} = 16\,\text{kN}$

C पर कर्तन बल (S.F. at C) $\Rightarrow F_C = 16 - 15 = 1\,\text{kN}$

Scanned with CamScanner

अब कर्तन बल D पर लोक पहुँचने तक कर्तन बल (S.F. just before D) $\Rightarrow \vec{F_D} = 1 - 2 \times 3 = -5$ kN

बिन्दु D पर कर्तन बल (S.F. at D) $\Rightarrow F_D = -5 - 5 = -10$ kN

अब बिन्दु A पर लोक पहुँचने पर कर्तन बल (S.F. just before A) $\Rightarrow \vec{F_A} = -10$ kN

बिन्दु A पर कर्तन बल (S.F. at A) $\Rightarrow F_A = -10 + R_A$

$$= -10 + 10 = 0$$

(2) नमन आघूर्ण (B.M.D.) के लिए—

B पर घूर्ण (B.M. at B) $\Rightarrow M_B = 0$

C पर घूर्ण (B.M. at C) $\Rightarrow M_C = 16 \times 1 = 16$ kN-m

SF के चित्र में माना $CM = x$ तो $DM = (3 - x)$ होगा

अब समरूप Δ (Similar triangles) में—

$$\frac{x}{1} = \frac{3-x}{5} \text{ या } 5x = 3 - x \text{ या } 6x = 3$$

या $$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{\cdot}5 \text{ m}$$

∵ बिन्दु M पर S.F. $= 0$ है तो M पर BM का मान अधिकतम होगा।

∴ Max. BM at $M \Rightarrow M_M = 16 \times 1{\cdot}5 - 15 \times 0{\cdot}5 - 2 \times 0{\cdot}5 \times \frac{0{\cdot}5}{2}$

$$M_M = 16{\cdot}25 \text{ kN-m}$$

BM at $D \Rightarrow M_D = 16 \times 4 - 15 \times 3 - 2 \times 3 \times \frac{3}{2} = 10$ kN-m

अब A पर घूर्ण (BM at A) $\Rightarrow F_A = 16 \times 5 - 15 \times 4 - 5 \times 1 - 2 \times 3 \times 2{\cdot}5$

$$= 0$$

**विशेष-धरन पर बलयुग्म (Couple) का आघूर्ण होने पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 17. 5 m लम्बी एक शुद्धालम्ब धरन (Simply Supported Beam) पर एक ब्रैकेट द्वारा 2000 N का बल चित्र 2.34 (a) के अनुसार लगाया गया है। कर्तन बल तथा नमन आघूर्ण (SFD and BMD) खींचिये।

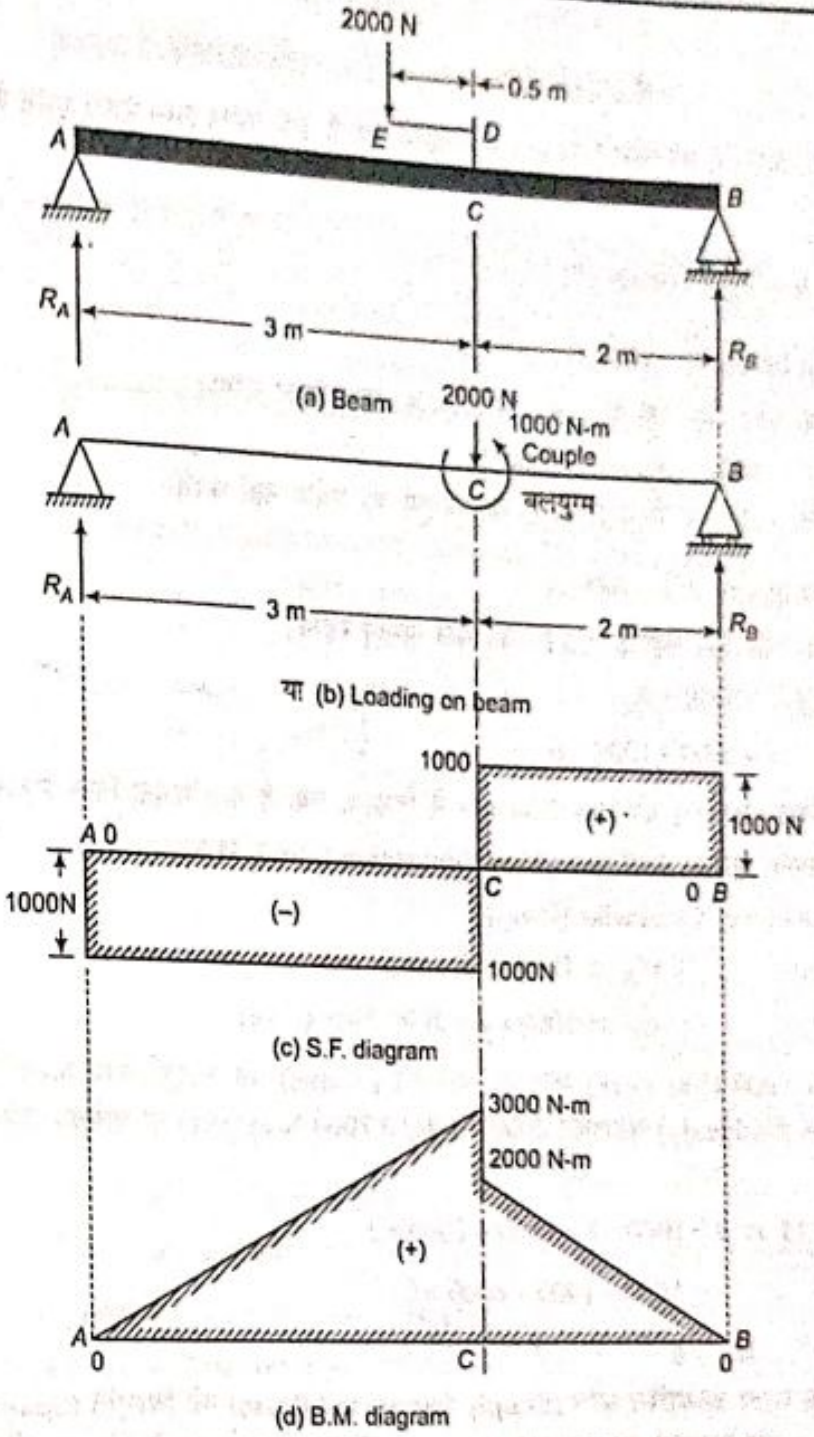
[U.K. 2012-13 (W), 2013 (W)]

हल—माना टेकों की प्रतिक्रियायें R_A तथा R_B हैं।

चित्र को दूसरे प्रकार से भी दिखाया जा सकता है। जैसे चित्र 2.34 (b) देखें।

∵ चित्र (a) के अनुसार ब्रैकेट पर लगाया गया बल दो प्रकार से अपना प्रभाव Beam पर डालता है।

Scanned with CamScanner



चित्र 2.34

(i) C पर 2000 N का ऊर्ध्वाधर बल (Vertical Force) के रूप में।

(ii) एक वामावर्त्त बलयुग्म के आघूर्ण (Moment of anticlockwise couple) के रूप में, जिसका मान $2000 \times 0{\cdot}5 = 1000$ N-m है।

$\because$ $$R_A + R_B = 2000 \text{ N} \quad \ldots (i)$$

अब A पर आघूर्ण लेने पर, (Anticlockwise Moment = Clockwise Moment)

$$R_B \times 5 + 1000 = 2000 \times 3$$

या $$R_B = \frac{6000 - 1000}{5} = \frac{5000}{5} = 1000 \text{ N}$$

Scanned with CamScanner

$\therefore$ (i) से $\quad R_A = 2000 - R_B = 2000 - 1000 = 1000$ N

$\therefore \quad R_A = 1000$ N तथा $R_B = 1000$ N

कर्तन बल आरेख (S.F.D) को चित्र 2.34 (c) में दिखाया गया है तथा गणना निम्न प्रकार करते हैं—(चिन्ह प्रणाली ↑↓)

दायीं ओर से।

$F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = R_B = 1000$ N (↑)

$\vec{F_C} \Rightarrow$ S.F. just before $\vec{C} = 1000$ N

(∵ B से C तक कोई भार नहीं है ∴ BC में S.F. का मान स्थिर रहेगा)

$F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = 1000 - 2000 = -1000$ N

नोट—कर्तन बल (S.F.) के लिये Couple के आघूर्ण को प्रयोग नहीं करते।

$\vec{F_A} \Rightarrow$ S.F. just before $\vec{A} = -1000$ N

(∵ C से A तक कोई भार नहीं है ∴ S.F. का मान समान रहेगा)

$F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -1000 + R_A$

$= -1000 + 1000 = 0$

नमन आघूर्ण आरेख (BMD) को चित्र 2.34 (d) में दिखाया गया है तथा गणना निम्न प्रकार करते हैं—

(दायीं ओर से गणना आरम्भ करने पर) (Sign Convention from R.H.S.)

(Anticlockwise (+ ve) Clockwise (– ve))

$\therefore \quad M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = 0$

तथा $\quad M_C \Rightarrow 1000 \times 2 = 2000$ N-m (+ ve)

परन्तु C पर एक 1000 N-m (+ve) मान का बलयुग्म (couple) का आघूर्ण कार्य करता है, अत: नमन आघूर्ण (B.M.) का मान एकदम (Suddenly) बदलकर $2000 + 1000 = 3000$ N-m (+ve) हो जायेगा। जैसे—B.M.D के चित्र में दर्शाया गया है।

अब, $M_A \Rightarrow$ B.M. at $A = 1000 \times 5 + 1000 - 2000 \times 3$

$= 5000 + 1000 - 6000 = 0$

$\therefore \quad M_A = 0$

उदाहरण 18. एक सरल आधारित धरन (Simply Supported Beam) की विस्तृति (Span) 6 m है। इसके मध्य बिन्दु पर एक 30 kN-m के आघूर्ण का बलयुग्म (Couple) क्रियाशील है। इसके आधार की प्रतिक्रिया बल ज्ञात कीजिये तथा इस धरन का बंकन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) एक अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) खींचकर उस पर मुख्य मानों को दिखाइये। **(उ० प्र० 2000 Mech)**

हल—माना प्रतिक्रियायें R_A तथा R_B हैं। इस धरन को चित्र 2.35 (a) में प्रदर्शित किया गया है।

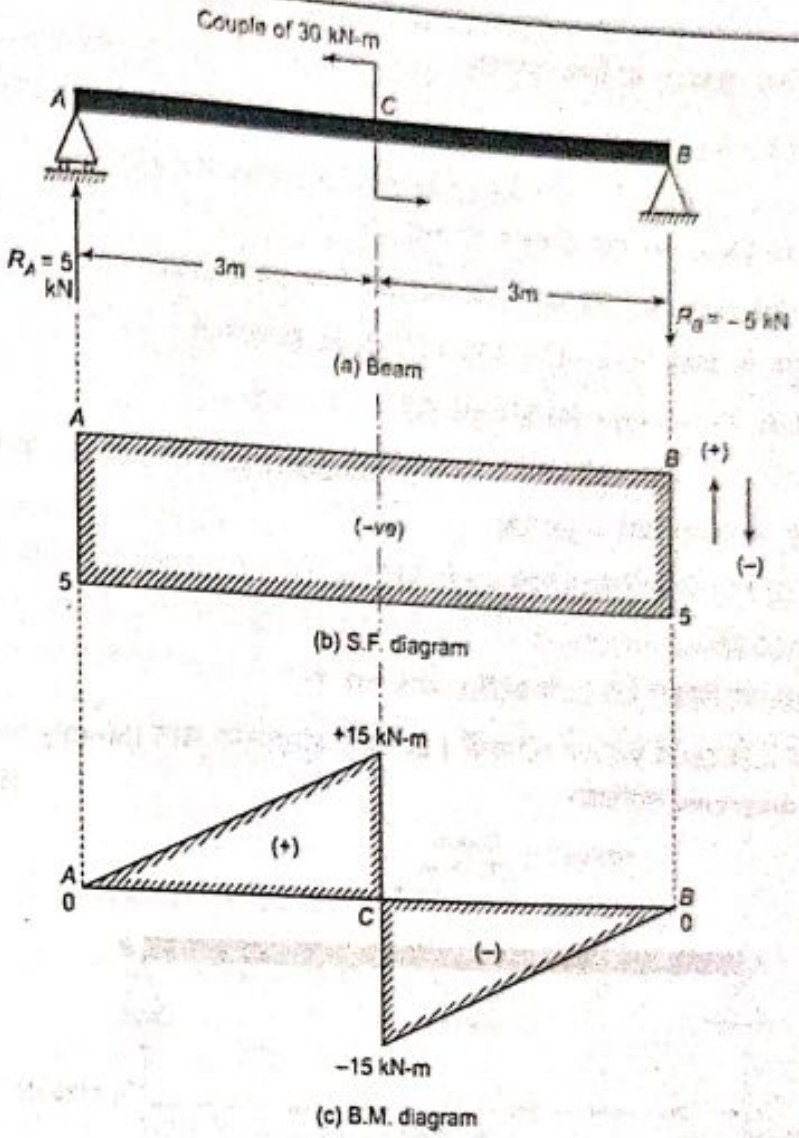
$$R_A + R_B = 0 \quad \ldots \text{(i)}$$

A पर आघूर्ण लेने पर,

$$6R_B + 30 = 0$$

$$\therefore \quad R_B = -\frac{30}{6} = -5 \text{ kN}$$

Scanned with CamScanner



चित्र 2.35

समीकरण (i) से $R_A = -R_B = -(-5)$

या $R_A = 5\,\text{kN}$

∴ प्रतिक्रियायें $= \pm 5$ kN

कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

$F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = -5\,\text{kN}$

$F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = -5$ kN

B से A तक बीच में कहीं भी ऊर्ध्वाधर बल नहीं लगा है, इसलिये कर्तन बल (S.F.) का मान B से A तक (–5 kN) का स्थिर रहेगा।

$\vec{F_A} \Rightarrow$ S.F. just before $\vec{A} = -5\,\text{kN}$

$F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -5 + R_A = -5 + 5 = 0$

Scanned with CamScanner

नमन आघूर्ण आरेख (BMD) के लिये गणना—

$M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = R_B \times 0 = 0$

$M_C \Rightarrow \quad R_B \times 3 = -5 \times 3 = -15$ kN-m

परन्तु C पर (+) 30 kN-m का एक बलयुग्म भी लगा है।

अत: C पर नमन आघूर्ण (B.M.) का मान तुरन्त बदलकर निम्न प्रकार होगा।

M_C (बलयुग्म के प्रयोग से) $= -15 + 30 = +15$ kN-m हो जायेगा।

अब M_A = B.M. at $A = -5 \times 6 +$ बलयुग्म का मान

$= -30 + 30 = 0$

अत: कर्तन बल के अधिकतम मान $= \pm 5$ kN

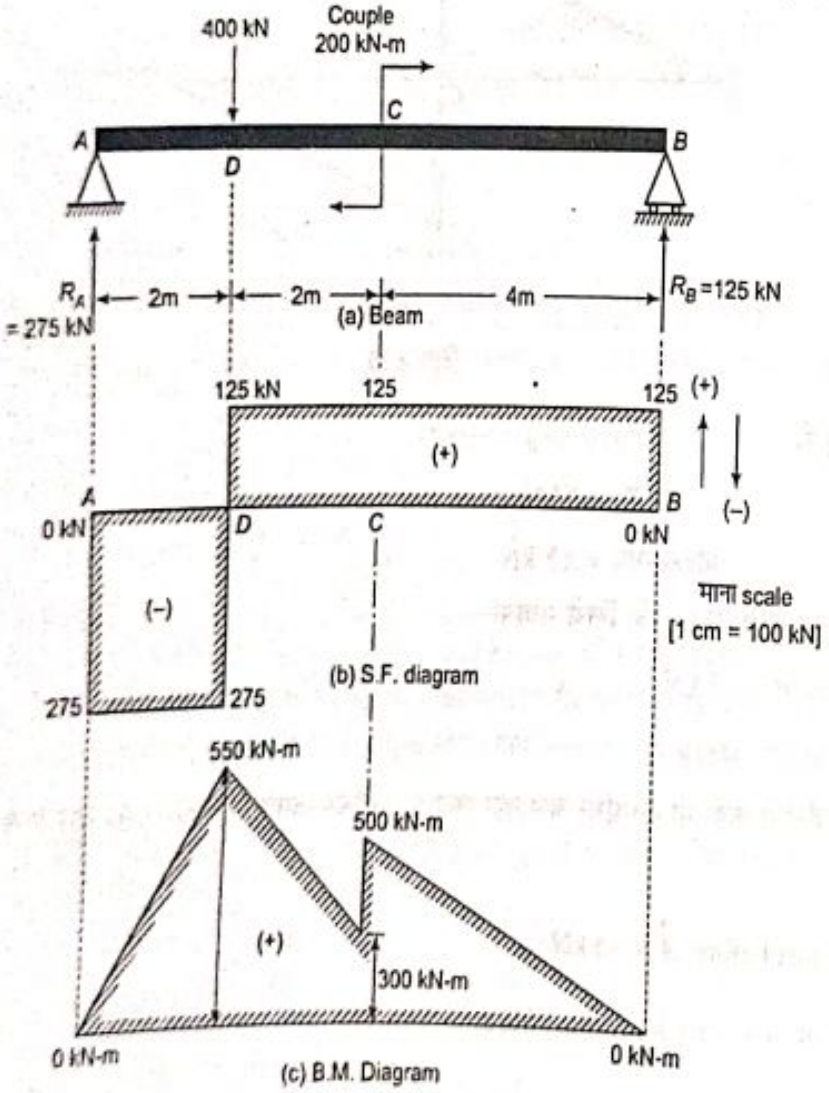
तथा नमन आघूर्ण (B.M.) के अधिकतम मान $= \pm 15$ kN

और प्रतिक्रियायें $= \pm 5$ kN

प्राप्त मानो से BMD को चित्र 2.35 (c) में प्रदर्शित किया गया है।

उदाहरण 19. चित्र 2.36 (a) में प्रदर्शित की गयी 4 m लम्बी शुद्धालम्ब धरन (Simply Supported Beam) के लिये S.F. तथा B.M. diagrams खींचिये। **[U.K. 2013 (S) B.P.]**

हल—



चित्र 2.36

Scanned with CamScanner

$R_A + R_B = 400$ kN [$\because R_A + R_B$ = Total Vertical Load on Beam]

A पर आघूर्ण लेने पर,

$$R_B \times 8 = 400 \times 2 + 200 \text{ (Couple)}$$

$$= 800 + 200 = 1000 \text{ kg}$$

$$R_B = \frac{1000}{8} = 125 \text{ kN}$$

$$\therefore \quad R_A = 400 - R_B = 400 - 125 = 275 \text{ kN}$$

कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

$F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = R_B = 125$ kN

अब B से D के बीच कोई ऊर्ध्वाधर बल (Vertical load) न होने के कारण S.F. का मान 125 kN ही स्थिर रहेगा। फिर D पर संकेन्द्रित भार 400 kN का लगा होने पर S.F. का मान एक ही ऊर्ध्वाधर रेखा में एकदम (Suddenly) बदलकर $125 - 400 = -275$ kN हो जायेगा। पुन: D से A के बीच कोई भार (load) न होने के कारण S.F. का मान -275 ही स्थिर रहेगा। इसके बाद A पर प्रतिक्रिया $R_A = +275$ kN के कारण S.F. का मान एक ही ऊर्ध्वाधर रेखा (Vertical Line) में एकदम बदलकर $-275 + R_A = 0$ हो जायेगा।

$\therefore \quad F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = +125$ kN

$\vec{F_D} \Rightarrow$ S.F. just before $D = +125$ kN

$F_D \Rightarrow$ S.F. at $D = 125 - 400 = -275$ kN

$\vec{F_A} \Rightarrow$ S.F. just before $A = -275$ kN

$F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -275 - R_A = -275 + 275 = 0$

कर्तन बल आरेख (S.F.D.) को चित्र 2.36 (b) में प्रदर्शित किया गया है।

नमन आघूर्ण आरेख (BMD) के लिये गणना—

$M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = R_B \times 0 = 0$ kN-m

$M_C \Rightarrow$ B.M. at C (just on the right hand side of C)

$$= 125 \times 4 = 500 \text{ kN-m (Anticlockwise)}$$

परन्तु C पर एक 200 kN-m का बलयुग्म (couple) दक्षिणावर्त्त (Clockwise) लगा होने के कारण B.M. का मान एकदम ऊर्ध्वाधर रेखा (Vertical Line) में बदलकर $500 - 200 = 300$ kN-m हो जायेगा।

$\therefore \quad M_C \Rightarrow$ B.M. just on the left hand side of C (after couple) $= 500 - 200 = 300$ kN-m

$M_D \Rightarrow$ B.M. at $D = 125 \times 6 - 200$ (couple at C) $= 750 - 200 = 550$ kN-m

$M_A \Rightarrow$ B.M. at $A = 125 \times 8 - 200$ (couple) $- 400 \times 2$

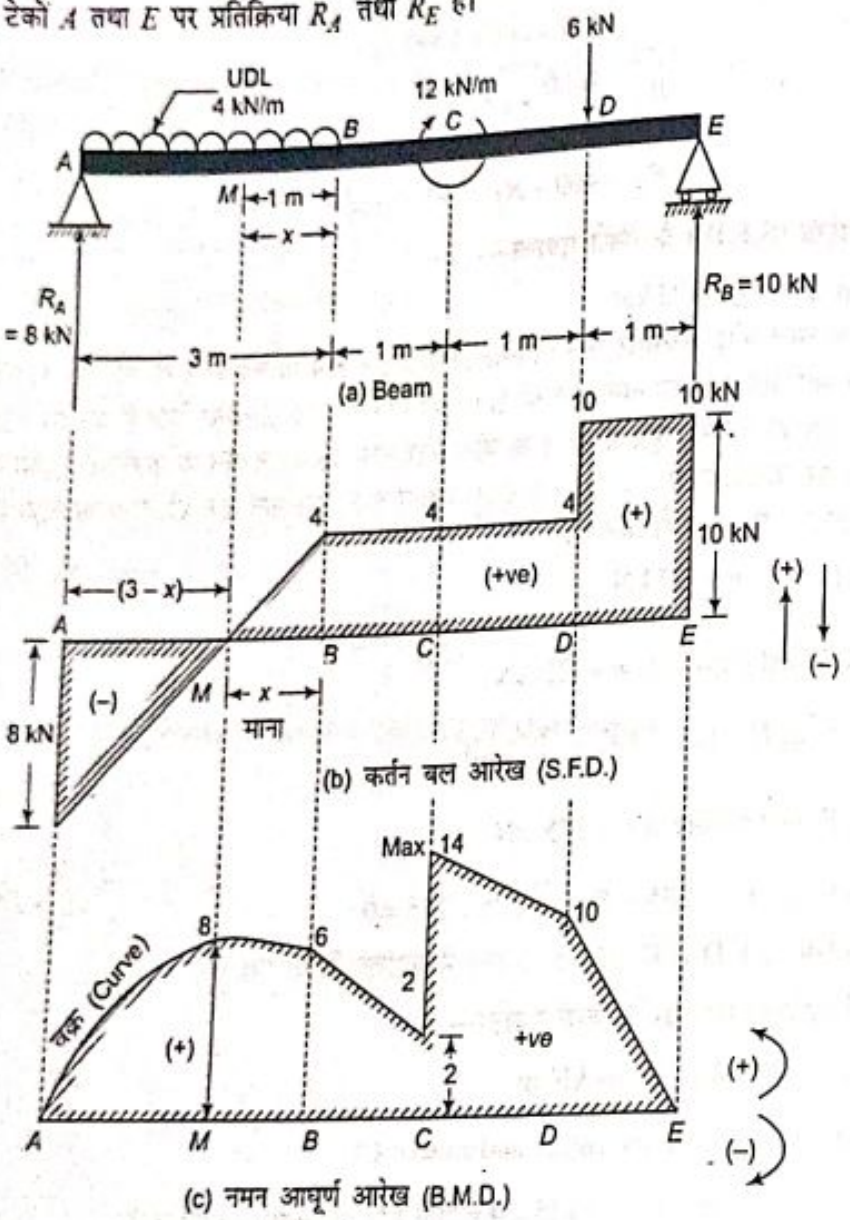
$$= 1000 - 200 - 800 = 0$$

B.M. Diagram को चित्र 2.36 (c) में दिखाया है।

Scanned with CamScanner

उदाहरण 20. चित्र 2.37 (a) में शुद्धालम्ब धरन (Simply supported beam) पर समवितरित भार (U.D.L.), बलयुग्म का आघूर्ण (Moment of Couple) तथा बिन्दु भार कार्य कर रहे हैं। इस धरन के लिये कर्तन बल आरेख (S.F.D.) तथा नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) खींचिये। (उ० प्र० 1999, Civil)

हल—माना टेकों A तथा E पर प्रतिक्रिया R_A तथा R_E हैं।



चित्र 2.37

$\therefore$ $R_A + R_E$ = धरन पर लगा ऊर्ध्वाधर भार

$= 4 \times 3 + 6 = 12 + 6 = 18$ kN

टेक A पर आघूर्ण लेने पर,

$$R_E \times 6 = 6 \times 5 + 12 + 4 \times 3 \times \frac{3}{2} = 30 + 12 + 18 = 60$$

$\therefore$ $$R_E = \frac{60}{6} = 10 \text{ kN}$$ तथा $R_A = 18 - R_E = 18 - 10 = 8$ kN

(I) कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

$F_E \Rightarrow$ S.F. at $E = R_E = 10$ kN ↑ (+ve) दिशा

Scanned with CamScanner

E से D तक धरन (Beam) खाली है, इसलिये S.F. का मान 10 kN स्थिर रहेगा।

$\therefore \vec{F_D} \Rightarrow$ S.F. just before $\vec{D} = 10\,\text{kN}$

अब D पर 6 kN के बिन्दु भार के कारण S.F. का मान तुरन्त बदलेगा।

इस प्रकार अब

$F_D \Rightarrow$ S.F. at $D = 10 - 6 = 4\,\text{kN}$ हो जायेगा।

अब D से B तक कोई ऊर्ध्वाधर भार (Vertical load) न होने के कारण कर्तन बल (S.F.) का मान (D से B तक) 4 kN का स्थिर रहेगा।

$\therefore F_C \Rightarrow$ S.F. at $C = 4\,\text{kN}$

$F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = 4\,\text{kN}$

S.F. A के ठीक पहले

$\vec{F_A} \Rightarrow$ S.F. just before $\vec{A} = 4 - 4 \times 3 = -8\,\text{kN}$

S.F. ठीक A पर,

$F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -8 + R_A = -8 + 8 = 0$

इन मानों (Values) से बना कर्तन बल आरेख (S.F.D.) को चित्र 2.37 (b) में प्रदर्शित किया गया है जिसमें $\frac{x}{4} = \frac{3-x}{8}$ या $3x = 3$ या $x = 1\,m$ इस दूरी पर कर्तन बल का मान शून्य होकर चिन्ह बदलता है।

(2) नमन आघूर्ण आरेख (BMD) के लिये गणना—

$M_E \Rightarrow$ B.M. at $E = 0$

$M_D \Rightarrow$ B.M. at $D = 10 \times 1 = 10$ kN-m

$M_C \Rightarrow$ B.M. at $C = R_E \times 2 - 6 \times 1 = 10 \times 2 - 6 = 20 - 6 = 14$ kN-m,

परन्तु C पर 12 kN-m का एक बलयुग्म का आघूर्ण भी लगा है, इसलिये B.M. का मान C पर एक ऊर्ध्वाधर रेखा के रूप में तुरन्त (suddenly) बदलेगा और बदलकर $14 - 12 = 2$ kN-m रह जायेगा।

$\therefore$ B.M. at C (after couple) $\Rightarrow M_C = 2$ kN-m

अब $M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = 10 \times 3 - 6 \times 2 - 12$

$= 30 - 24 = 6$ kN-m

तथा $M_A \Rightarrow$ B.M. at $A = 10 \times 6 - 6 \times 5 - 12 - 4 \times 3 \times \frac{3}{2}$

$= 60 - 30 - 12 - 18 = 0$

अत: दो टेकों वाली धरन के दोनों सिरों पर B.M. का मान शून्य (Zero) होता है।

∵ बिन्दु M पर S.F. ने शून्य होकर चिन्ह बदला है, इसलिए बिन्दु M पर B.M. का मान अवश्य ज्ञात करना होगा।

अत: B.M. at $M \Rightarrow M_M = 10 \times 4 - 6 \times 3 - 12 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2}$

$\therefore \quad M_M = 40 - 18 - 12 - 2 = 8$ kN-m

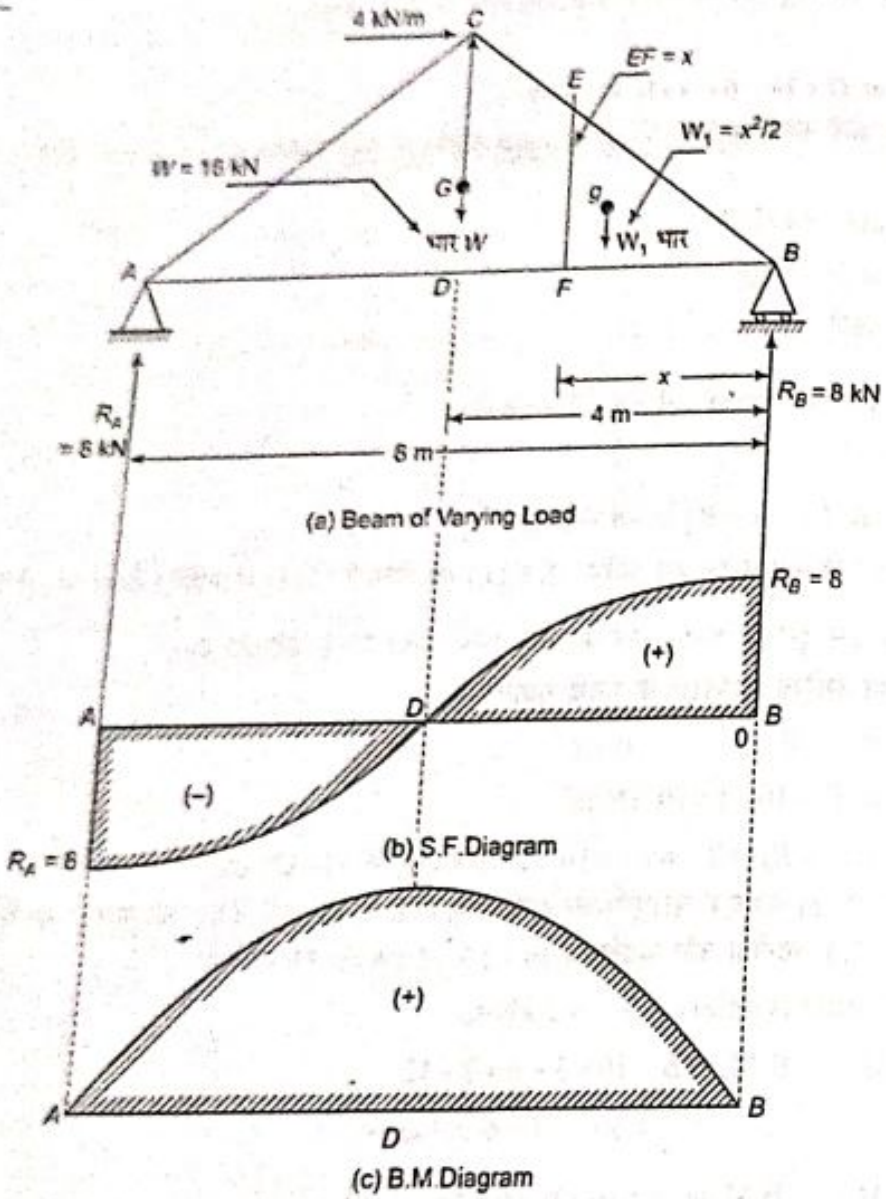
(गणना से प्राप्त मानों को प्रयोग करके बना B.M.D चित्र 2.37 (c) में दिखाया गया है।)

नोट—A से B तक U.D.L. लगा होने के कारण B.M.D. में वक्र (Curve) बनेगा।

Scanned with CamScanner

उदाहरण 21. चित्र 2.38 (a) में दर्शायी गई परिवर्तनशील भार की धरन के लिये अपरूपण बल तथा बंकन आघूर्ण आरेख (S.F.D. and B.M.D.) बनाइये। (U.P. 2003)

हल—



चित्र 2.38

Varying Load का भार अर्थात् ΔABC का भार

$$W = \frac{\text{आधार (base)} \times \text{ऊँचाई (height)}}{2}$$

$$W = \frac{8 \times 4}{2} = 16 \text{ kN}$$

∵ भार की *Symmetry* के कारण

$$R_A = R_B = \frac{W}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ kN}$$

Scanned with CamScanner

माना B से x दूरी पर काट EF है।

अब छोटे ΔBEF का भार W_1 इसके गुरुत्व केन्द्र g पर होगा। जैसे बड़े ΔABC का भार इसके गु० के० G पर होगा।

अब समरूप ΔBEF तथा ΔBCD में

$$\frac{EF}{FB} = \frac{CD}{DB} \text{ या } \frac{EF}{x} = \frac{4}{4}$$

$\therefore$ $EF = x$ होगा। अत: इस छोटे ΔBEF का भार (W_1)

$$W_1 = \frac{\text{आधार } (FB) \times \text{ ऊँचाई } (EF)}{2} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

(1) SFD के लिये गणना

$\therefore$ B से x दूरी पर काट (Section) EF पर कर्तन बल (S.F.) $\Rightarrow F_X$

$\therefore$
$$F_X = R_B - W_1 = \left(8 - \frac{x^2}{2}\right)$$ (यह द्विघात समीकरण curve equation है)

अत: S.F.D. एक वक्र रूप (Curved Shape) में होगा।

अब टेक B पर कर्तन बल (S.F. at B) $\Rightarrow F_B = 8$ kN $\uparrow$ (R_B)

$\because$
$$F_x = R_B - \frac{x^2}{2} = \left(8 - \frac{x^2}{2}\right)$$ में B के लिये $x = 0$ होगा।

अब घरन के मध्य-बिन्दु D पर कर्तन बल (F_X समीकरण में $x = 4$ रखा)

अर्थात् S.F. at D $\Rightarrow F_D = 8 - \frac{4 \times 4}{2} = 8 - 8 = 0$ (Zero है)

अब टेक A के ठीक पहले कर्तन बल $\Rightarrow \vec{F_A}$ अर्थात्

$$\vec{F_A} = \text{S.F. just before } A \text{ or just right of } A$$

$$= R_B - W = 8 - 16 = -8 \text{ kN}$$

$\therefore$ ठीक A पर कर्तन बल $\Rightarrow F_A$

या
$$F_A = \text{S.F. at } A = -8 + R_A = -8 + 8 = 0$$

याद रखें—दो टेकों वाली Beam की गणना के last में शून्य (Zero) आयेगा।

(2) B.M.D. के लिये गणना—

B से x दूरी पर स्थित काट EF पर नमन आघूर्ण $\Rightarrow M_X$

$\therefore$
$$M_x = \text{B.M. at distance } (x) \text{ on Section } (EF)$$

$$= R_B \times x - W_1 \times \left(\frac{1}{3}x\right)$$

$$= 8x - \left(\frac{x^2}{2}\right)\left(\frac{x}{3}\right)$$

$\therefore$
$$M_x = \left(8x - \frac{x^3}{6}\right)$$ यह Cubic equation है।

अत: B.M.D. भी एक वक्र (Curve) में होगा।

Scanned with CamScanner

∴ At $x = 0$, B.M. at $B \Rightarrow M_B = 0$

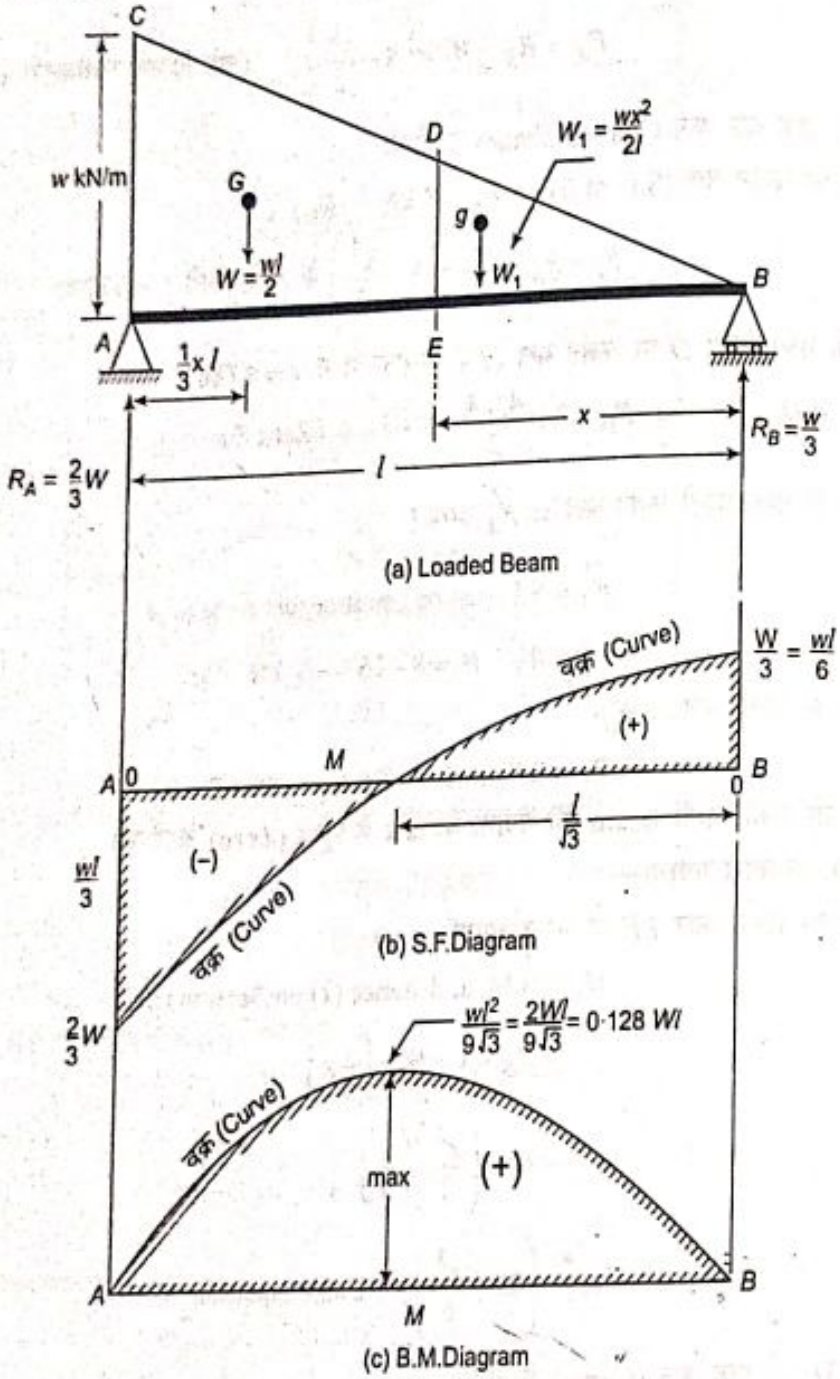
At $x = 4$ m (for centre D), $M_D = \left(8 \times 4 - \frac{4 \times 4 \times 4}{6}\right) = 32 - 10{\cdot}67$

∴ केन्द्र पर, $M_D = 21{\cdot}33$ kN-m (B.M. का अधिकतम मान, चूँकि यहाँ $SF = 0$ है।)

अब $M_A \Rightarrow$ B.M. at $A = R_B \times 8 - W \times 4 = 8 \times 8 - 16 \times 4 = 0$

S.F.D. व B.M.D. के चित्र 2.38 (b) तथा (c) में देखें।

उदाहरण 22. चित्र 2.39 (a) में एक Simply Supported beam AB दिखाई गई है जिस पर समान रूप से बदलता भार (Uniformly Varying Load) लगा है जिसकी तीव्रता एक सिरे पर शून्य (Zero) से समान रूप से बढ़ते हुए, दूसरे सिरे पर w kN/m हो जाती है। इस धरन के लिये कर्तन बल एवं नमन घूर्ण आरेख (S.F.D. and B.M.D.) खींचिये।



चित्र 2.39

Scanned with CamScanner

हल—माना भार की तीव्रता (w) B पर शून्य है तथा A पर w kN/m हो जाती है।

$\therefore$ ΔABC का भार $\Rightarrow W$ (माना)

$\therefore$ $$W = \frac{lw}{2}$$ $\left[\because W = \frac{\text{आधार} \times \text{ऊँचाई}}{2}\right]$

$$R_A + R_B = W = \frac{wl}{2}$$ ... (i)

A पर आघूर्ण (Moment) लेने पर

$$R_B \times l = W \times \left(\frac{1}{3} \times l\right)$$

$\therefore$ $$R_B = \frac{W}{3} \Rightarrow \frac{wl}{6}$$

तथा $$R_A = W - R_B$$

$\therefore$ $$R_A = W - \frac{W}{3} = \frac{2}{3}W$$

या $$R_A = \frac{2}{3}W = \frac{2}{3} \times \frac{wl}{2} = \frac{wl}{3}$$

B से x दूरी पर रेखा DE लेने से बने छोटे ΔDEB का भार W_1 इसके गुरुत्व केन्द्र g पर होगा। अब समरूप ΔDEB तथा ΔCAB में,

$$\frac{DE}{EB} = \frac{CA}{AB} \text{ या } \frac{DE}{x} = \frac{w}{l} \text{ या } DE = \left(\frac{x}{l}\right)w$$

अब छोटे Δ का भार $$W_1 = \frac{EB \times DE}{2} = \frac{x \times \left(\frac{x}{l}w\right)}{2} = \frac{wx^2}{2l}$$

(1) S.F.D. के लिए—

$F_X \Rightarrow$ S.F. at distance $x = R_B - W_1$

$\therefore$ $$F_x = \left(\frac{wl}{6} - \frac{wx^2}{2l}\right)$$ ... (i) यह एक वक्र (Curve) समीकरण है।

अत: S.F.D. एक वक्र रूप में होगा। चित्र 3.38. (b) देखें।

At $x = 0$, S.F. at $B \Rightarrow F_B = \frac{wl}{6} = R_B = \frac{W}{3}$

At $x = l$, S.F. just before $\vec{A} \Rightarrow \vec{F_A} = \frac{wl}{6} - \frac{w}{2l} \times l^2$

$\therefore$ $$\vec{F_A} = \frac{wl}{6} - \frac{wl}{2} = \frac{wl - 3wl}{6} = -\frac{2wl}{6}$$

$$= -\frac{wl}{3} = -R_A = -\frac{2}{3}W$$

अब ठीक A पर S.F. $\Rightarrow F_A =$ S.F. at $A = -\frac{2}{3}W + R_A = 0$

Scanned with CamScanner

∵ B.M. के अधिकतम मान के लिये S.F. = 0 होना चाहिये।

$$\therefore \quad F_X = \left(\frac{wl}{6} - \frac{wx^2}{2l}\right) = 0 \text{ रखने पर}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{w}{2l}\right)x^2 = \frac{wl}{6} \text{ या } x^2 = \frac{wl}{6} \times \frac{2l}{w} = \frac{l^2}{3}$$

$$\therefore \quad x = \frac{l}{\sqrt{3}} \qquad \text{(अत: } B \text{ से } \frac{l}{\sqrt{3}} \text{ दूरी पर S.F. = 0 होगा)}$$

(2) B.M.D. के लिये—

$$M_x = \text{B.M. at distance } x \text{ from end } B$$

$$= R_B \times x - W_1 \times \frac{1}{3}x$$

$$= \frac{wl}{6}x - \frac{wx^2}{2l} \times \frac{x}{3}$$

$$M_x = \left(\frac{wl}{6}\right)x - \left(\frac{w}{6l}\right).x^3 \qquad \text{... (ii) यह वक्र (curve) समीकरण है।}$$

At $x = 0$, $M_A \Rightarrow$ B.M. at $A = 0$

At $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$, $M_M =$ Max B.M. at $M = \frac{wl^2}{6\sqrt{3}} - \frac{w}{6l} \times \frac{l^3}{3\sqrt{3}}$

या $$M_M = \frac{wl^2}{6\sqrt{3}} - \frac{wl^2}{18\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad \text{अधिकतम B.M.} = \frac{3wl^2 - wl^2}{18\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2wl^2}{18\sqrt{3}} = \frac{wl^2}{9\sqrt{3}} = \frac{2Wl}{9\sqrt{3}}$$

$$M_M = 0{\cdot}128\, wl \qquad \text{उत्तर}$$

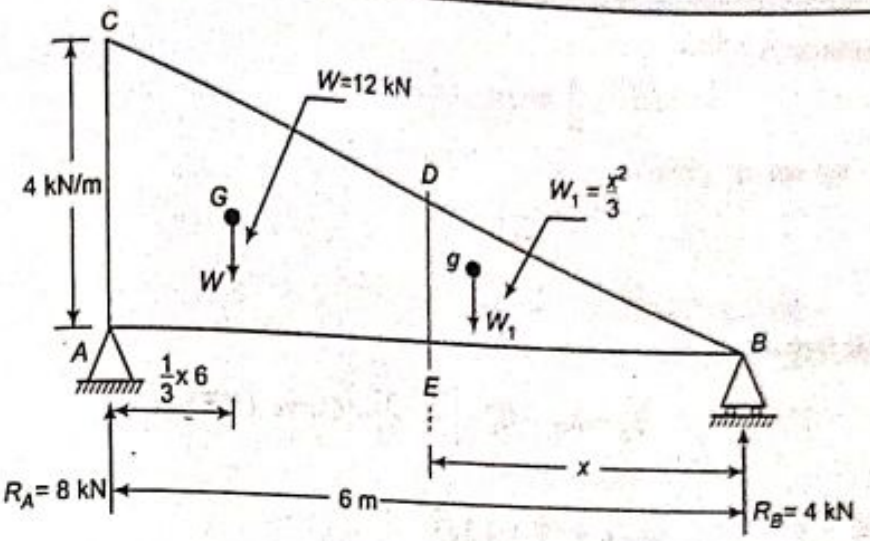
अब, $$\text{B.M. at } A \Rightarrow M_A = R_B \times l - W \times \frac{1}{3}l$$

$$= \frac{W}{3} \times l - \frac{W}{3} \times l = 0$$

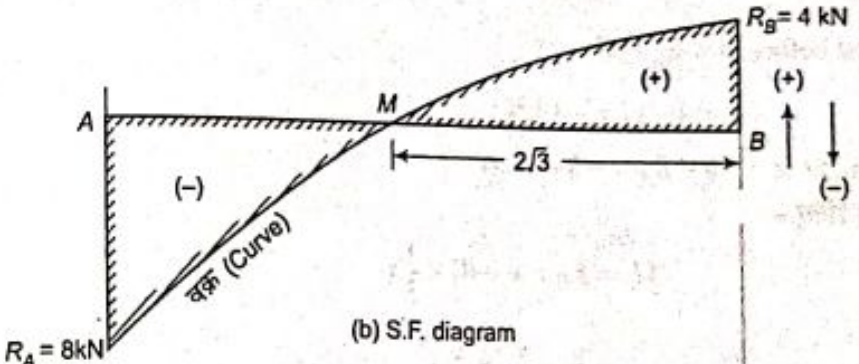
उदाहरण 23. चित्र 2.40 (a) में दिखाई गई Beam के लिये S.F.D. तथा B.M.D. खींचिये।

Scanned with CamScanner

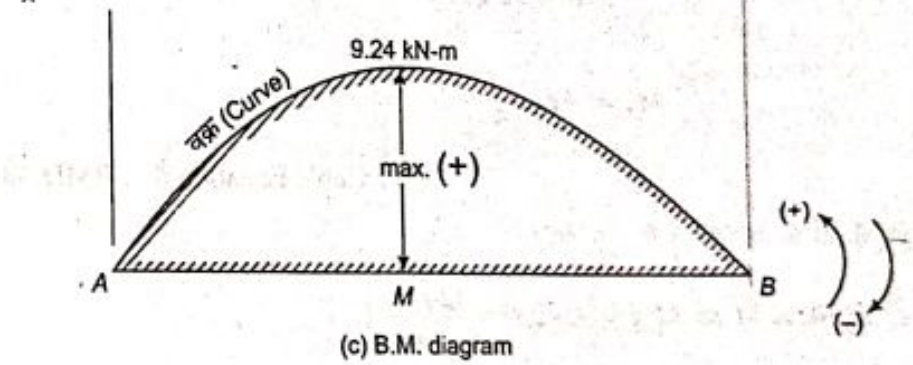
हल—



(a) Loaded Beam



(b) S.F. diagram



(c) B.M. diagram

चित्र 2.40

Total Load on beam = W

$$\therefore \quad W = \frac{6 \times 4}{2} = 12 \text{ kN}$$

A पर Moment लेने से—

$$6R_B = W \times \left(\frac{1}{3} \times 6\right) = 24$$

$$\therefore \quad R_B = 4 \text{ kN}$$

अब

$$R_A = W - R_B$$

$$= 12 - 4 = 8 \text{ kN}$$

Scanned with CamScanner

समरूप Δ (Similar Δ) में—

$$\frac{DE}{x}=\frac{4}{6} \text{ या } DE=\frac{2x}{3}$$

छोटे ΔDEB का भार W_1 (माना)

$$W_1=\frac{x\left(\frac{2x}{3}\right)}{2}=\frac{x^2}{3}$$

$\therefore$

(1) S.F.D. के लिए—

$$F_x=R_B-W_1=\left(4-\frac{x^2}{3}\right) \text{ Curve (वक्र)}$$

अब $F_x=0$ से,

$$\frac{x^2}{3}=4 \text{ या } x=2\sqrt{3}$$

$F_B=$ S.F. at $B=R_B=4$ kN

$\vec{F_A}=$ S.F. just before $A=R_B-W$

$=4-12=-8$ kN

$\therefore$ $F_A \Rightarrow$ S.F. at $A=-8+R_A=-8+8=0$

(2) BMD के लिए—

$$M_x=R_B\times x-W_1\times\frac{1}{3}x$$

$$=4x-\frac{x^2}{3}\times\frac{x}{3}$$

$\therefore$

$$M_x=\left(4x-\frac{x^3}{9}\right) \quad \text{–(i)}$$

[$\because$ Cubic Equation है $\therefore$ BMD भी वक्र रूप में होगा]

At $x=0$, B.M. at $B \Rightarrow M_B=0$

AT $x=2\sqrt{3}$, B.M. at $M \Rightarrow M_M=\left[4\times2\sqrt{3}-\frac{(2\sqrt{3})^3}{9}\right]$

$\therefore$ Maximum B.M. at $M=8\sqrt{3}-\frac{8\times3\sqrt{3}}{9}=9{\cdot}24$ kN-m

अब B.M at $A \Rightarrow M_A=R_B\times6-W\times\frac{1}{3}\times6$

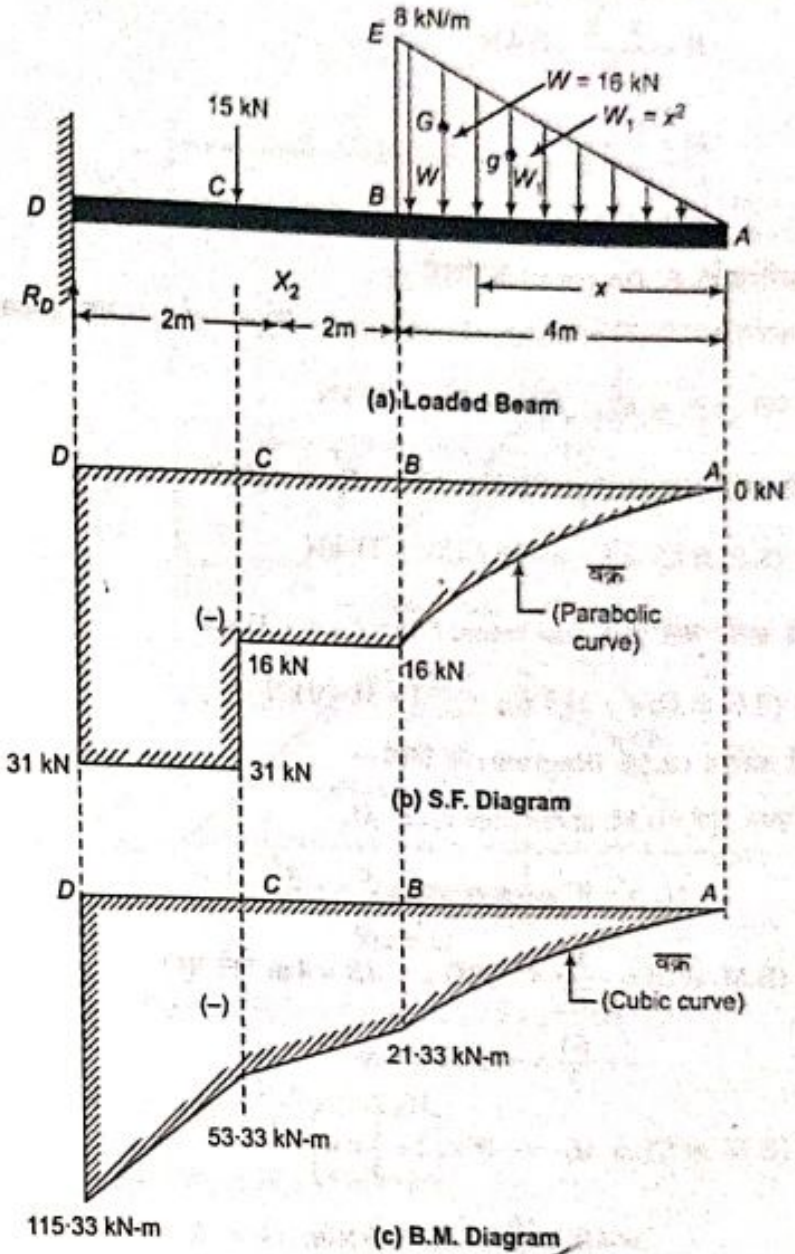
$\therefore$

$$M_A=4\times6-12\times\frac{6}{3}=24-24=0$$

उदाहरण 24. चित्र 2.41 (a) में प्रदर्शित धरन (Beam) का अपरूपण बल आरेख (Shear Force Diagram) और बंकन आघूर्ण आरेख (Bending Moment Diagram) खींचिये। **(U.P. 2005)**

Scanned with CamScanner

हल—चित्र 2.41 (b) तथा (c) देखें।



चित्र 2.41

∵ धरन (beam) पर कुल भार ही D पर प्रतिक्रिया R_D ऊपर की ओर होगी।

$$\therefore \quad R_D = 15 + \frac{4 \times 8}{2} = 31\,\text{kN}$$

चित्र में A से x दूरी पर काट $(K-L)$ माना। अब समरूप $\Delta\, ALK$ तथा $\Delta\, ABE$ में

$$\frac{KL}{LA} = \frac{EB}{BA}$$

या $$\frac{KL}{x} = \frac{8}{4}$$

$$\therefore \quad KL = 2x$$

Scanned with CamScanner

ΔABE का भार (W) इसके गुरुत्व केन्द्र G पर तथा ΔALK का भार (W_1) इसके गु० केन्द्र g पर होगा।

$$\therefore \quad W = \frac{4 \times 8}{2} = 16\,\text{kN}$$

तथा $$W_1 = \frac{(x) \times (2x)}{2}$$

$$\therefore \quad W_1 = x^2$$

(1) कर्तन बल आरेख (S.F. Diagram) के लिये—

A से x दूरी पर कर्तन बल (S.F. at distance) $x = F_x \Rightarrow -W_1 = -x^2$ (वक्र समीकरण Curve equation)

$\therefore$ B पर कर्तन बल (S.F. at B) $\Rightarrow F_B = -4^2 = -16\,\text{kN}$ ($\because$ यहाँ $x = 4\,\text{m}$)

C के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before C) $\Rightarrow \vec{F_C} = -16\,\text{kN}$

C पर कर्तन बल (S.F. at C) $\Rightarrow F_C = -16 - 15 = -31$ kN

D के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before D) $\Rightarrow \vec{F_D} = -31\,\text{kN}$

D पर कर्तन बल (S.F. at D) $= -31 + R_D = -31 + 31 = 0\,\text{kN}$

(2) नमन आघूर्ण आरेख (B.M. Diagram) के लिये—

A से x दूरी पर नमन घूर्ण (B.M. at distance x) $\Rightarrow$ M_x

$$\therefore \quad M_x = -W_1 \times \frac{1}{3}x = -x^2 \times \frac{x}{3} = -\frac{x^3}{3}$$ (वक्र समीकरण)

B पर नमन घूर्ण (B.M. at B) $= -\frac{1}{3} \times 4^3$ (यहाँ $x = AB = 4\,\text{m}$ लेने पर)

$$= -\frac{64}{3} = -21{\cdot}33\,\text{kN-m}$$

C पर नमन घूर्ण (B.M. at C) $\Rightarrow M_C = -W \times \left[2 + \frac{1}{3} \times 4\right]$

$$= -16 \times \frac{10}{3} = -53{\cdot}33\,\text{kN-m}$$

D पर नमन घूर्ण (B.M. at D) $\Rightarrow M_D = -W\left[2 + 2 + \frac{1}{3} \times 4\right] - 15 \times 2$

$$\therefore \quad M_D = -16 \times \frac{16}{3} - 30 = -115{\cdot}33\,\text{kN-m}$$

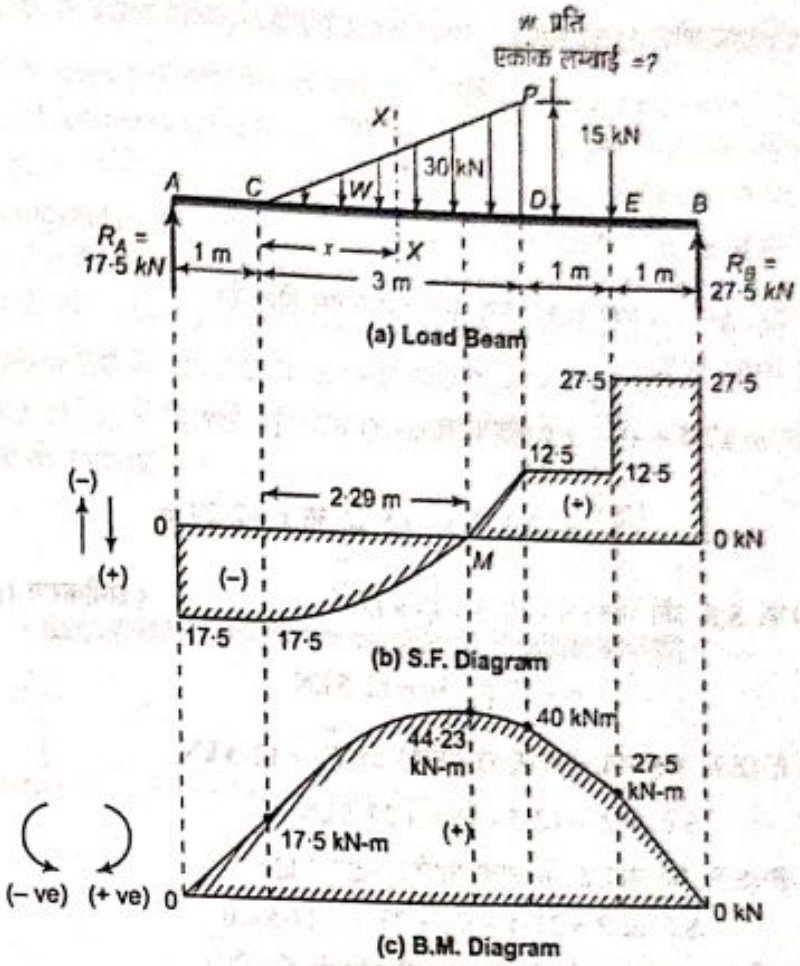
अत: S.F.D. तथा B.M.D. के अधिकतम मान cantilever के बद्ध सिरे पर होंगे। उत्तर

उदाहरण 25. चित्र 2.42 (a) में प्रदर्शित शुद्धालम्ब धरन (S.S. Beam) के लिये कर्तन बल तथा नमन घूर्ण आरेख (S.F.D. तथा B.M.D.) खींचिये तथा इनके अधिकतम मान तथा उनकी स्थिति भी ज्ञात कीजिये। चित्र में ΔCPD का भार 30 kN है।

हल—देखें चित्र (b) तथा (c)—

चित्र (a) में टंकी की प्रतिक्रियायें R_A तथा R_B ज्ञात करने के लिये A पर घूर्ण लेने से—

Scanned with CamScanner



चित्र 2.42

$$R_B \times 6 = 30\left[1 + \frac{2}{3} \times 3\right] + 15 \times 5 = 165 \text{ kN}$$

$\therefore$ $$R_B = \frac{165}{6} = 27{\cdot}5 \text{ kN}$$

परन्तु $$R_A + R_B = 30 + 15 = 45 \text{ kN}$$

$\therefore$ $$R_A = 45 - R_B = 45 - 27{\cdot}5 = 17{\cdot}5 \text{ kN}$$

$\because$ C पर भार शून्य (Zero) से धीरे-धीरे बढ़कर D पर wkN/m होता है तथा Δ CPD का भार 30 kN दिया है।

$\therefore$ $\frac{3 \times w}{2} = 30$ होगा या $w = 20$ kN/m

(1) कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये—(बायीं ओर से $\bar{\uparrow}\underset{+}{\downarrow}$)

S.F. just before A (अर्थात् S.F. का मान A से ठीक पहले) $= 0$

S.F. at A (S.F. का मान A पर) $\Rightarrow F_A = R_A = -17{\cdot}5$ kN

S.F. at C (S.F. का मान C पर) $\Rightarrow F_C = -17{\cdot}5$ kN

अब C से x दूरी पर काट $(X - X)$ मानने पर,

$$\frac{\text{काट } (X-X) \text{ पर ऊँचाई}}{x} = \frac{(w \text{ या } 20)}{3} \text{ या } (X-X) \text{ काट पर ऊँचाई} = \frac{20x}{3}$$

Scanned with CamScanner

$\therefore$ C से $(X-X)$ तक छोटे Δ का भार

$$W_1 = \frac{x \times \left(\frac{20x}{3}\right)}{2} = \frac{10x^2}{3}$$

$$\text{S.F. at } (X-X) = -17{\cdot}5 + \frac{10x^2}{3} \quad \text{...(i)}$$

हम जानते हैं कि जहाँ $SF = 0$ वहाँ B.M. का मान अधिकतम होता है।

अत: $SF = 0$ की स्थिति के लिए,

$$-17{\cdot}5 + \frac{10x^2}{3} = 0 \text{ रखने पर}$$

$$\frac{10x^2}{3} = 17{\cdot}5 \text{ या } x^2 = 5{\cdot}25 \text{ या } x = 2{\cdot}29 \text{ m}$$

$$\text{S.F. at } D \text{ (D पर S.F. का मान)} = -17{\cdot}5 + \frac{10}{3} \times (3)^2 \quad \text{(समीकरण (i) में } x = 3 \text{ रखने पर)}$$

$$= -17{\cdot}5 + 30 = 12{\cdot}5 \text{ kN}$$

S.F. just before E (S.F. का मान ठीक E से पहले) $\Rightarrow \overleftarrow{F_E} = 12{\cdot}5$ kN

$\therefore$ S.F. at $E = 12{\cdot}5 + 15 = +27{\cdot}5$ kN

S.F. just before B (S.F. का मान B के ठीक पहले) $= 27{\cdot}5$ kN

$$\text{S.F. at } B = 27{\cdot}5 - R_B = 27{\cdot}5 - 27{\cdot}5 = 0$$

(2) नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिये—[बायीं ओर से $(-+)$]

$M_A \Rightarrow$ B.M. at $A = 0$

$M_C \Rightarrow$ B.M. at $C = 17{\cdot}5 \times 1 = 17{\cdot}5$ kN-m

$$M_{X-X} \Rightarrow \text{B.M. at } (X-X) = 17{\cdot}5 \times (1+x) - W_1 \times \left(\frac{1}{3}x\right)$$

$$M_{X-X} = 17{\cdot}5 \times (1+x) - \frac{10x^2}{3} \times \left(\frac{x}{3}\right) \quad \text{...(ii)}$$

Max. B.M. के लिए $SF = 0$ होगा। इसके लिये $x = 2{\cdot}29$ m रखने पर

$$\therefore \quad \text{Max. B.M. at } M = 17{\cdot}5 \times (1 + 2{\cdot}29) - \frac{10}{9} \times (2{\cdot}29)^3 = 44{\cdot}23 \text{ kN-m}$$

$$M_D \Rightarrow \text{B.M. at } D = 17{\cdot}5 \times (1+3) - \frac{10}{3 \times 3} \times (3)^3$$

$= 40$ kN-m [समीकरण (ii) में $x = 3$ रखने पर]

$M_E \Rightarrow$ B.M. at $E = R_B \times 1 = 27{\cdot}5 \times 1 = 27{\cdot}5$ kN-m

$M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = 0$

सभी प्राप्त मान व दूरियाँ चित्र 2.42 (b तथा c) में दिखाये गये हैं।

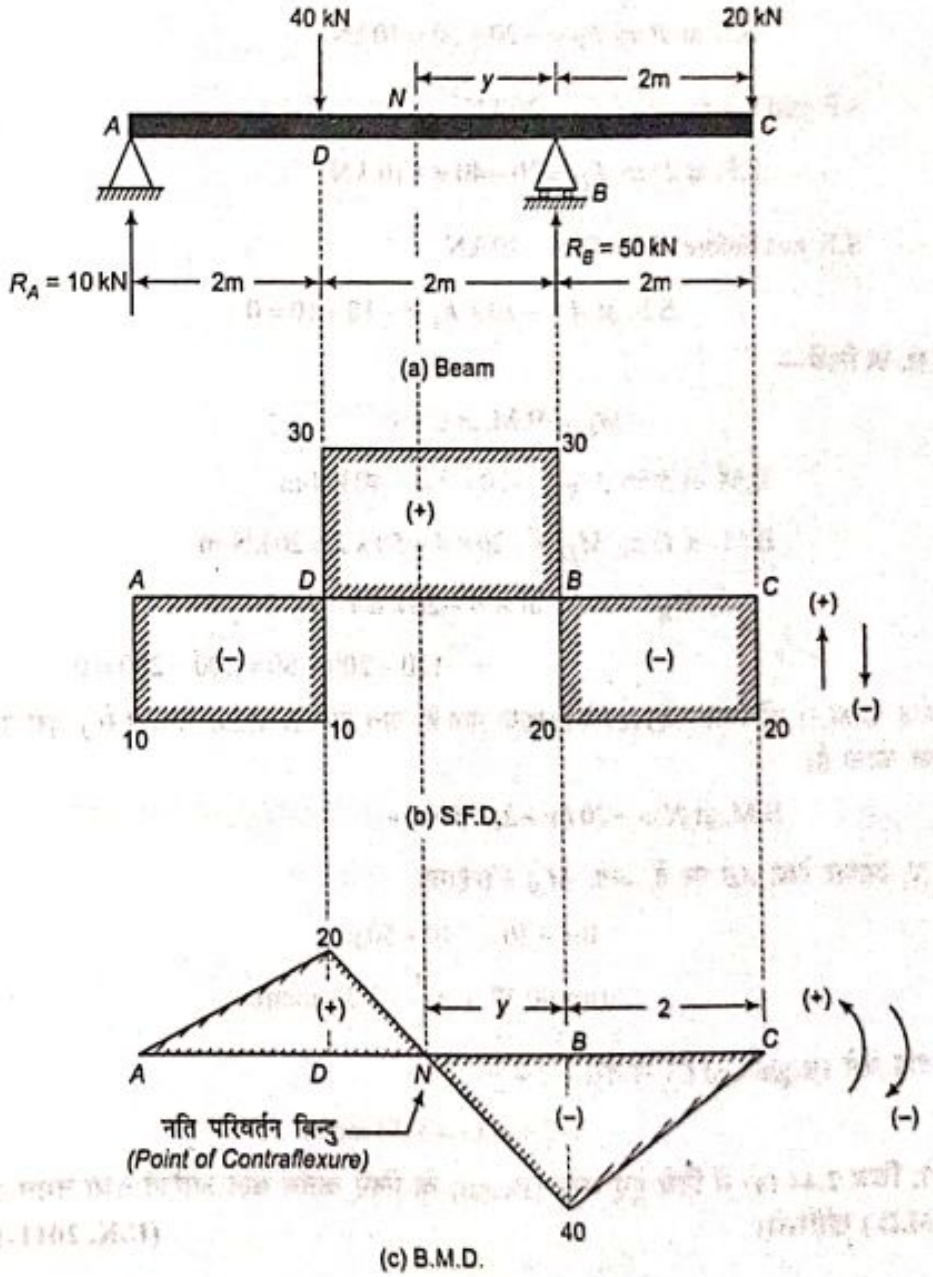
Scanned with CamScanner

**विशेष–टेक से बाहर निकली धरन (overhanging beam) पर आधारित प्रश्न

☞ **नोट**—(1) एक टेक (Support) से बाहर निकली धरन (One side Overhanging Beam) तथा दोनों टेकों से बाहर निकली धरन (Both sides Over hanging Beam) में ही "नति परिवर्तन बिन्दु" (Point of Contra flexure) प्राप्त हो सकता है, अन्य Beams (जैसे Cantilever Beam तथा Simply Supported Beam) में यह बिन्दु नहीं होता।

☞ **(2) "नति परिवर्तन बिन्दु (Point of Contraflexure)" की परिभाषा**—किसी धरन का नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) दोनों सिरों को छोड़कर बीच में कहीं भी जिस बिन्दु पर शून्य (Zero) होकर अपना चिन्ह परिवर्तित करता है, उस बिन्दु को "नति परिवर्तन बिन्दु" कहते हैं। इसे "Point of Contraflexure" या "Point of Inflexion" के नाम से जाना जाता है। यह Overhanging Beam में ही प्राप्त हो सकता है। ज्ञात करने की विधि को उदाहरणों द्वारा आसानी से समझा जा सकता है।

उदाहरण 26. चित्र 2.43 (a) में दिखाई गई धरन (Beam) के लिए S.F.D. तथा B.M.D. बनाइये तथा नति परिवर्तन बिन्दु भी यदि है तो ज्ञात कीजिए।



चित्र 2.43

Scanned with CamScanner

हल— $R_A + R_B = 40 + 20 = 60\ \text{kN}$

A पर Moment लेने पर—

$$4R_B = 40 \times 2 + 20 \times 6$$

$$\therefore \quad R_B = 20 + 30 = 50\ \text{kN}$$

अब $$R_A = 60 - R_B = 60 - 50 = 10$$

$$\therefore \quad R_A = 10\ \text{kN}$$

(1) S.F.D. के लिए—

$$F_C = -20\ \text{kN}$$

$$\vec{F_B} = \text{S.F. just before } L = -20\ \text{kN}$$

$$\therefore \quad \text{S.F. at } B \Rightarrow F_B = -20 + 50 = 30\ \text{kN}$$

$$\text{S.F. just before } D \Rightarrow \vec{F_D} = 30\ \text{kN}$$

अब $$\text{S.F. at } D \Rightarrow F_D = 30 - 40 = -10\ \text{kN}$$

$$\text{S.F. just before } A \Rightarrow \vec{F_A} = -10\ \text{kN}$$

$$\text{S.F. at } A = -10 + h_A = -10 + 10 = 0$$

(2) B.M.D. के लिये—

$$M_C = \text{B.M. at } C = 0$$

$$\text{B.M. at } B \Rightarrow M_B = -20 \times 2 = -40\ \text{kN-m}$$

$$\text{B.M. at } D \Rightarrow M_D = -20 \times 4 + 50 \times 2 = 20\ \text{kN-m}$$

$$M_A \Rightarrow \text{B.M. at } A = -20 \times 6 + 50 \times 4 - 40 \times 2$$

$$= -120 + 200 - 80 = 200 - 200 = 0$$

गणना से प्राप्त B.M.D. को चित्र 2.43 (c) में दिखाया गया है। अब माना B.M.D., टेक B से y दूरी पर स्थित बिन्दु N पर चिन्ह परिवर्तित करता है।

$$\therefore \quad \text{B.M. at } N = -20(y+2) + 50 \times y$$

$\because$ Point N, आधार रेखा AB पर है, अत: $M_N = 0$ होगा।

$$\therefore \quad 0 = -20y - 40 + 50y$$

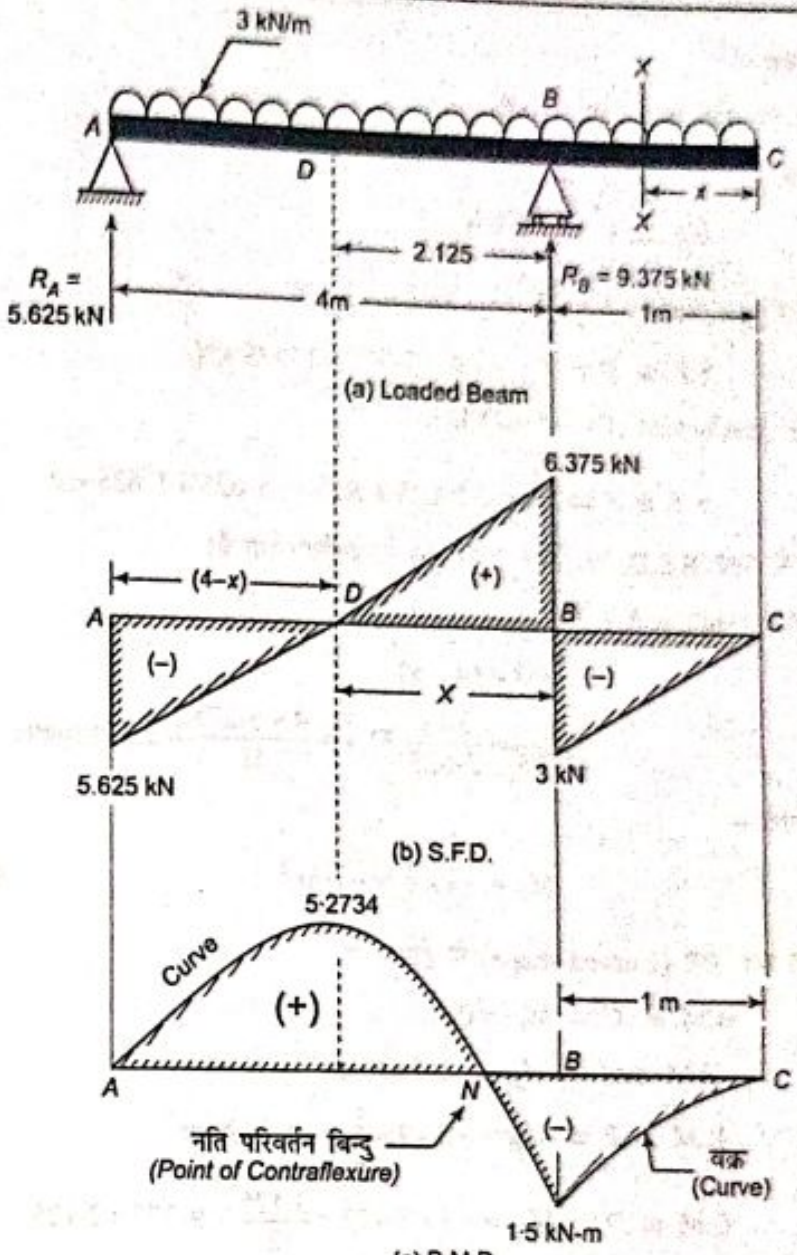
या $$30y = 40 \text{ या } y = \frac{4}{3} = 1{\cdot}33 \text{ metre}$$

$\therefore$ N की दायें सिरे (Right end C) से दूरी $= 2 + y$

$$= 2 + 1{\cdot}33 = 3{\cdot}33 \text{ metre}$$ उत्तर

उदाहरण 27. चित्र 2.44 (a) में दिये हुए धरन (Beam) के लिए कर्तन बल आरेख तथा नमन आघूर्ण आरेख (S.F.D. and B.M.D.) खींचिये। **(U.K. 2011-12 (Winter))**

Scanned with CamScanner



चित्र 2.44

हल—माना A व B टेकों पर प्रतिक्रियायें (Reactions), R_A तथा R_B हैं।

$$\therefore \quad R_A + R_B = \text{Beam का कुल भार}$$

$$= 3 \times 5 = 15 \text{ kN}$$

अब A पर Moment लेने पर—

$$4 \times R_B = 3 \times 5 \times \frac{5}{2}$$

$$R_B = \frac{37 \cdot 5}{4} = 9 \cdot 375 \text{ kN}$$

अब

$$R_A = 15 - R_B$$

$$= 15 - 9 \cdot 375 = 5 \cdot 625$$

Scanned with CamScanner

(I) S.F.D. के लिए—

माना C से x दूरी पर कोई काट $(X-X)$ है।

$\therefore F_x = -3x$ यह रेखीय समीकरण है।

At $x=0$, S.F. at $C \Rightarrow F_C = 0$

At $x=1$ m, S.F. just before $B \Rightarrow \vec{F_B} = -3\times1 = -3$ kN

S.F. at $B \Rightarrow F_B = -3+9{\cdot}375 = 6{\cdot}375$ kN

अब S.F. just before $A = -5{\cdot}625$ kN

S.F. at $A \Rightarrow \vec{F_A} = -5{\cdot}625 + R_A = -5{\cdot}625 + 5{\cdot}625 = 0$

S.F. के इन मानों से प्राप्त S.F.D. को चित्र 3.41 (b) में दर्शाया गया है।

S.F.D. के समरूप Δ (similar Δ) में

$BD = x$ माना, तो $AD = (4-x)$

$$\therefore \quad \frac{x}{6{\cdot}375} = \frac{4-x}{5{\cdot}625} \text{ या } x = \frac{4\times6{\cdot}375}{12} = 2{\cdot}125 \text{ metre}$$

(I) B.M.D. के लिये—

$$M_x = -3x.\frac{x}{2} = -1{\cdot}5x^2$$ (वक्र रूप समीकरण है)

अतः B.M.D. एक वक्र रूप (Curved shape) में होगा।

At $x=0$, B.M. at $C \Rightarrow M_C = 0$

At $x=1$ m, B.M. at $B \Rightarrow M_B = -1{\cdot}5$ kN-m

या B.M. at $B \Rightarrow M_B = -3\times1\times\frac{1}{2} = -1{\cdot}5$ kN-m

B.M. at $D \Rightarrow M_D = -3\times3{\cdot}125\times\frac{3{\cdot}125}{2} + 9{\cdot}375\times2{\cdot}125$

$= 5{\cdot}2734$ kN-m (max value)

नोट—जिस बिन्दु पर $SF = 0$ होकर sign change करता है वहाँ B.M. का मान अधिकतम होता है।

B.M. at $A \Rightarrow F_A = -3\times5\times\frac{5}{2} + 9{\cdot}375\times4$

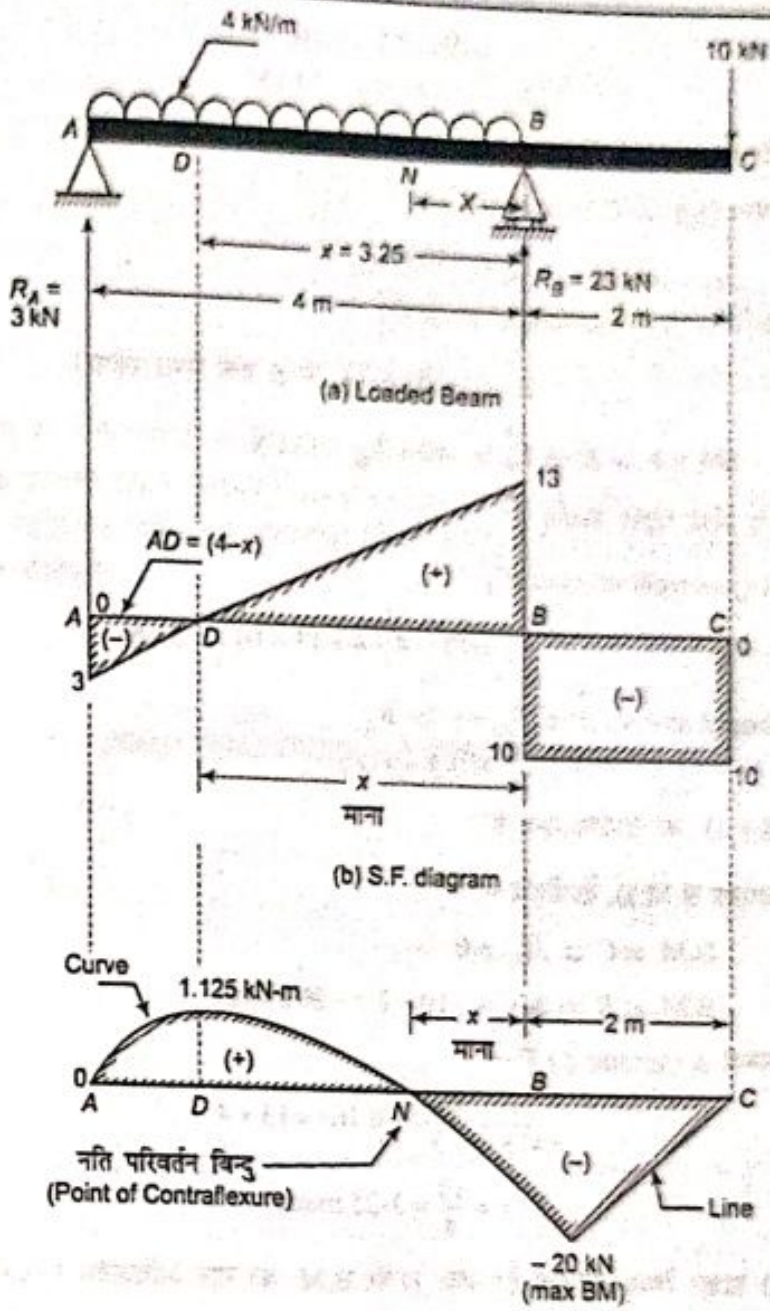
$= -37{\cdot}5 + 37{\cdot}5 = 0$

नोट—दो टेकों वाली Beam के दोनों सिरों पर B.M. = 0 होता है।

उदाहरण 28. एक 6 m लम्बी धरन (Beam) पर भार चित्र 2.45 (a) के अनुसार लगे हैं। कर्तन बल तथा नमन घूर्ण आरेखों (S.F.D. and B.M.D.) को बनाइये। अधिकतम नमन घूर्ण का स्थान एवं परिमाण ज्ञात करें। इसके साथ नति परिवर्तन बिन्दु (Point of Contraflexure) भी ज्ञात करें। (U.K. 2012-13 (W))

Scanned with CamScanner

हल—



चित्र 2.45

$\because$ $R_A + R_B = (4 \times 4) + 10$

या $R_A + R_B = 26\,\text{kN}$

A पर (घूर्ण) Moment लेने पर—

$$4R_B = 4 \times 4 \times \frac{4}{2} + 10 \times 6$$

$$= 32 + 60 = 92$$

$\therefore$ $$R_B = \frac{92}{4} = 23\,\text{kN}$$

अत: $R_A = 26 - R_B$

Scanned with CamScanner

$$= 26 - 23 = 3 \text{ kN}$$

$$\therefore \quad R_A = 3 \text{ kN}, R_B = 23 \text{ kN}$$

(I) कर्तन बल आरेख S.F.D. के लिए—

ठीक C पर कर्तन बल (S.F. at C) $\Rightarrow F_C$

$$\therefore \quad F_C = -10 \text{ kN}$$

S.F. ठीक B के पहले $\Rightarrow$ S.F. just before $B \Rightarrow \vec{F_B}$

$$\therefore \quad \vec{F_B} = -10 \text{ kN } (C \text{ से } B \text{ तक स्थिर रहेगा})$$

$$\text{अब S.F. at } B \Rightarrow \vec{F_B} = -10 + R_B = 13 \text{ kN}$$

अब कर्तन बल A के ठीक पहले अर्थात्

S.F. just before A (just right of A) $\Rightarrow \vec{F_A}$

$$\therefore \quad \vec{F_A} = 13 - 4 \times 4 = 13 - 16 = -3 \text{ kN}$$

$$\text{Shear Force at } \vec{A} \Rightarrow F_A = -3 + R_A$$

$$= -3 + 3 = 0$$

चित्र 2.45 (b) में S.F.D. को दर्शाया गया है।

(i) नमन आघूर्ण आरेख B.M.D. के लिये—

$$\text{B.M. at } C \Rightarrow M_C = 0$$

$$\text{B.M. at } B \Rightarrow M_B = -10 \times 2 = -20 \text{ kN-m}$$

अब S.F.D. के समरूप Δ (similar Δ) में—

$$\frac{x}{13} = \frac{4-x}{3} \text{ या } 16x = 13 \times 4$$

$$\text{या} \quad x = \frac{13}{4} = 3{\cdot}25 \text{ metre}$$

$\because$ D पर S.F. = 0 होकर चिन्ह बदलता है। अत: D पर B.M. का मान अधिकतम (+ve में) होगा।

$$\therefore \quad \text{B.M. at } D \Rightarrow M_D = -10 \times (2 + 3{\cdot}25) + 23 \times 3{\cdot}25 - 4 \times 3{\cdot}25 \times \frac{3{\cdot}25}{2}$$

$$\therefore \quad M_D = 1{\cdot}125 \text{ kN-m } (+\text{ve दिशा में})$$

$$\text{B.M. at } A \Rightarrow M_A = -10 \times 6 + 23 \times 4 - 4 \times 4 \times \frac{4}{2} = 0$$

B.M. के प्राप्त मान (values) से B.M.D. को चित्र 2.45 (c) में दर्शाया गया है।

माना नति परिवर्तन बिन्दु (N) की टेक B से दूरी x है।

$$\therefore \quad \text{B.M. at } N = 0 \qquad [\because \text{बिन्दु } N, \text{ आधार रेखा पर है}]$$

$$\text{अब} \quad -10(2+x) + 23.x - 4.x.\frac{x}{2} = 0$$

$$\text{या} \quad -20 - 10x + 23x - 2x^2 = 0$$

$$\text{या} \quad 2x^2 - 13x + 20 = 0$$

Scanned with CamScanner

या $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ सूत्र से—

$$= \frac{13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \times 2 \times 20}}{2 \times 2} = \frac{13 \pm 3}{4}$$

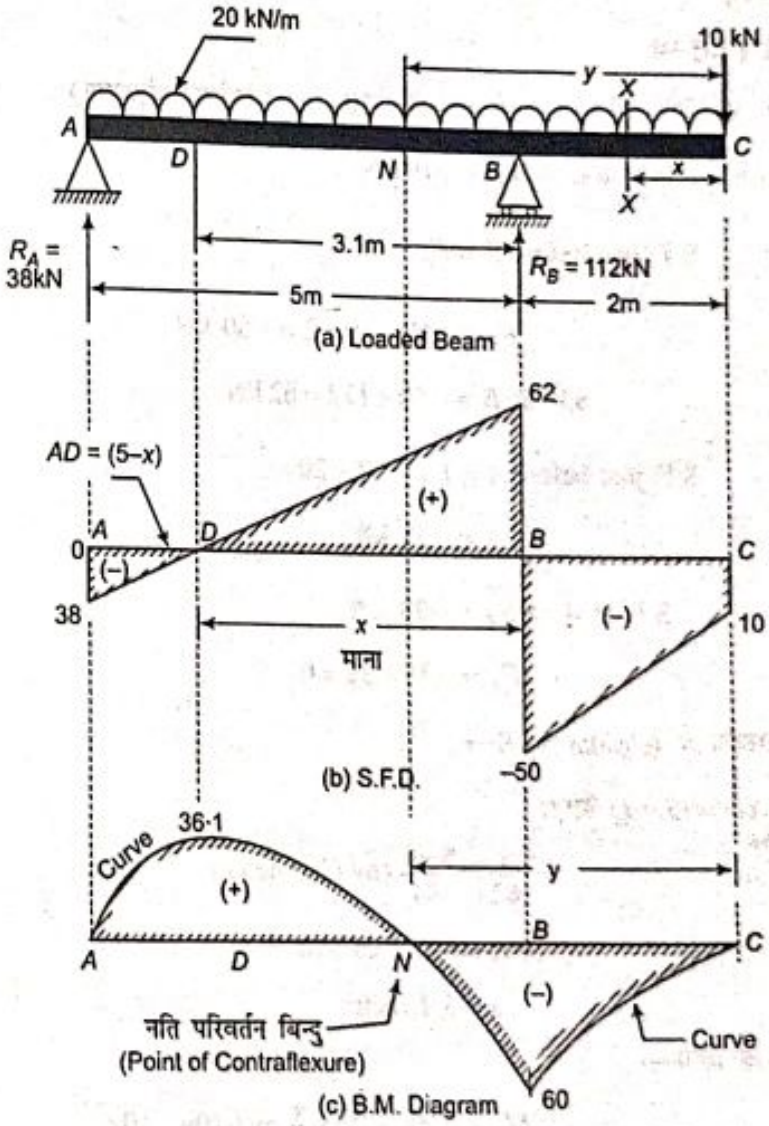
(+ve) लेने पर, $x = \frac{16}{4} = 4$ m (अमान्य है, छोड़ देना होगा)

(– ve) लेने पर, $x = \frac{10}{4} = 2{\cdot}5$ m (टेक B से N की दूरी $= 2{\cdot}5$ m है)

नति परिवर्तन बिन्दु N, दायें सिरे C से $(2 + 2{\cdot}5 = 4{\cdot}5$ m) पर स्थित है।

उदाहरण 29. एक प्रलम्बी दंड या धरन (Overhanging Beam) पर चित्र 2.46 (a) के अनुसार भार लगे हुये हैं। S.F.D. तथा B.M.D. खींचकर अधिकतम धनात्मक बंकन आघूर्ण (B.M.) तथा कॉन्ट्राफ्लैक्सर बिन्दु (Point of Contraflexure) ज्ञात कीजिये।

(U.P. 2013, M.O.S.)



चित्र 2.46

Scanned with CamScanner

हल— $R_A + R_B = \text{Total Load on Beam}$

$\therefore \quad R_A + R_B = (20 \times 7 + 10)$

$= 150 \text{ kN}$

अब A पर Moment लेने पर—

$$5R_B = 20 \times 7 \times \frac{7}{2} + 10 \times 7$$

$$\therefore \quad R_B = \frac{560}{5} = 112 \text{ kN}$$

$$\therefore \quad R_A = 150 - R_B = 150 - 112$$

या $\quad R_A = 38 \text{ kN}$

(I) S.F.D. के लिए—

BC भाग में C से x दूरी पर

$$F_x = -10 - 20 \times x \quad \text{(रेखीय समीकरण)}$$

$$\therefore \quad \text{S.F. at } C \Rightarrow F_C = -10 \text{ kN}$$

$$\text{S.F. just before } B = \vec{F_B}$$

$$\therefore \quad \vec{F_B} = -10 - 20 \times 2 = -50 \text{ kN}$$

$$\therefore \quad \text{S.F. at } B = -50 + 112 = 62 \text{ kN}$$

$$\text{S.F. just before } A = \vec{F_A} = 62 - 20 \times 5$$

$$= -38 \text{ kN}$$

$$\therefore \quad \text{S.F. at } A \Rightarrow \vec{F_A} = -38 + R_A$$

$$\therefore \quad F_A = -38 + 38 = 0$$

अब S.F.D. के समरूप Δ (similar Δ) में—

माना $BD = x$ तो $AD = (5 - x)$ होगा।

$$\therefore \quad \frac{x}{62} = \frac{5-x}{38} \text{ (by Geometry)}$$

$$100x = 62 \times 5 \Rightarrow 310$$

$$x = 3{\cdot}1 \text{ metre}$$

नमन घूर्ण (B.M.) के लिये—

$$M_x = -10x - 20.x.\frac{x}{2} \Rightarrow -10x - 10x^2$$

अत: इस Beam पर U.D.L. के कारण B.M.D. में वक्र (Curve) होगा।

Scanned with CamScanner

$\therefore \quad M_C \Rightarrow$ B.M. at $C = 0$

तथा $M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = -10 \times 2 - 20 \times 2 \times \frac{2}{2} = -60$

☞ **याद रखें**—जिस टेक पर (Beam) बाहर निकली होती है, उस टेक पर B.M. का मान सदैव (– ve) में होता है।

∵ D पर S.F. $= 0$ होकर sign change किया है, इसलिए D पर BM का मान (+ve) दिशा में अधिकतम होगा।

$$\therefore \quad M_D \Rightarrow \text{B.M. at } D = -10 \times (3{\cdot}1 + 2) + 112 \times 3{\cdot}1 - 20 \times (3{\cdot}1 + 2)\left(\frac{3{\cdot}1 + 2}{2}\right)$$

$$\therefore \quad M_D = -51 + 347{\cdot}2 - 260{\cdot}1$$

$$= 36{\cdot}1 \text{ kN-m}$$

$$\because \quad M_A \Rightarrow \text{B.M. at } A = -10 \times 7 + 112 \times 5 - 20 \times 7 \times \frac{7}{2}$$

$$\therefore \quad M_A = 0$$

☞ Beam के दोनों सिरों पर B.M. सदैव शून्य (Zero) होता है।

B.M.D. को चित्र 2.46 (c) में दर्शाया गया है। इसमें बिन्दु N, कॉन्ट्राफ्लैक्सर बिन्दु है, माना $CN = y$ है।

$$\therefore \quad \text{B.M. at } N = 0 \qquad [\because N, \text{ आधार रेखा ABC पर है}]$$

$$\text{या} \quad -10y - 20 \times y \times \frac{y}{2} + 112 \times (y - 2) = 0$$

$$\text{या} \quad -10y - 10y^2 + 112y - 224 = 0$$

$$\text{या} \quad -10y^2 - 102y + 224 = 0$$

$$\text{या} \quad y = \frac{102 \pm \sqrt{102^2 - 4 \times 10 \times 224}}{2 \times 10}$$

$$\text{या} \quad y = \frac{102 \pm 38}{20} = 5{\cdot}1 \pm 1{\cdot}9$$

अत: $y = 7$ m तथा $y = 3{\cdot}2$ metre

$\therefore \quad y = 3{\cdot}2$ metre ही मान्य होगा। उत्तर

उदाहरण 30. चित्र 2.47 (a) में दर्शायी गयी धरन (Beam) के लिए कर्तन बल एवं नमन घूर्ण आरेख (S.F.D. and B.M.D.) खींचिये तथा निम्न को ज्ञात कीजिये।

(i) अधिकतम नमन आघूर्ण की स्थिति तथा मान।

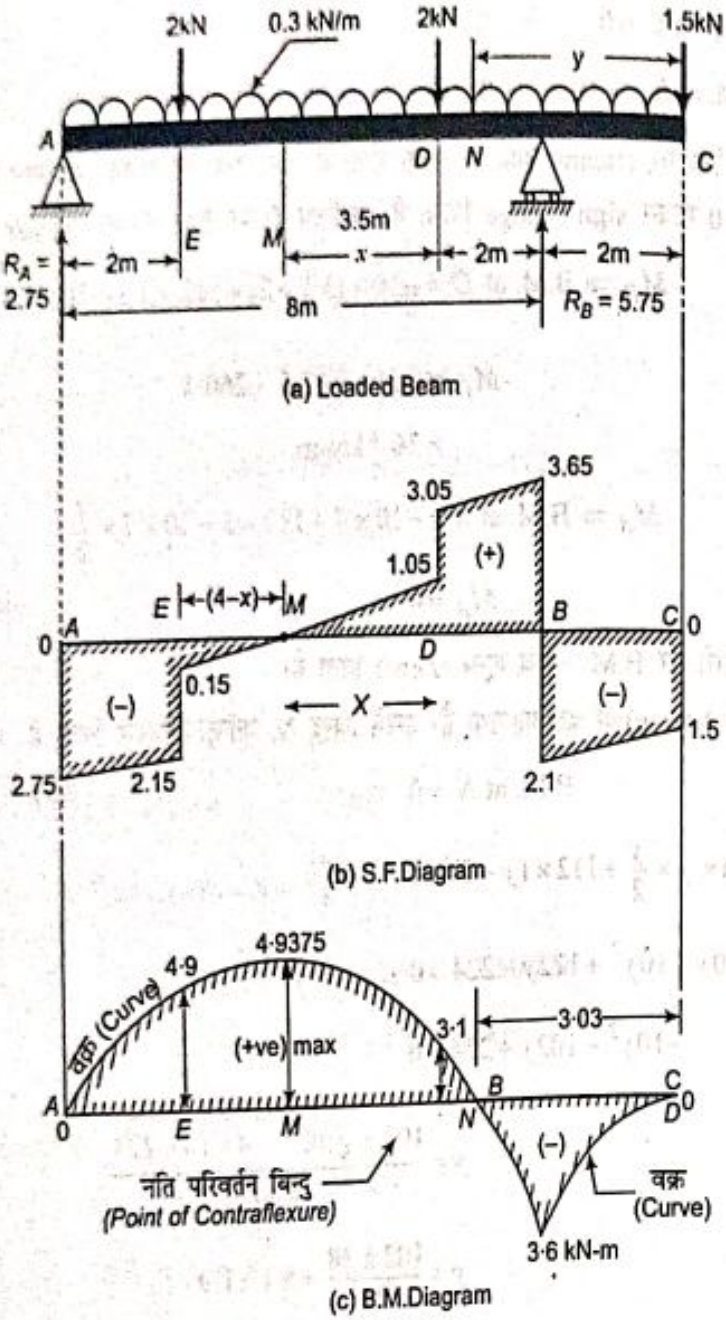
(ii) नति परिवर्तन बिन्दु की स्थिति

हल— $R_A + R_B = 2 + 2 + 1{\cdot}5 + 0{\cdot}3 \times 10 = 8{\cdot}5$ kN

टेक A पर आघूर्ण (Moment) लेने पर,

$$8R_B = 2 \times 2 + 2 \times 6 + 1{\cdot}5 \times 10 + 0{\cdot}3 \times 10 \times \frac{10}{2} = 46$$

Scanned with CamScanner



चित्र 2.47

या $$R_B = \frac{46}{8} = 5{\cdot}75\,\text{kN}$$

अत: $$R_A = 8{\cdot}5 - R_B = 2{\cdot}75\,\text{kN}$$

(1) कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये—(दायीं ओर से $\overset{+}{\uparrow}\underset{-}{\downarrow}$)

S.F. at C (बिन्दु C पर कर्तन बल) $= -1{\cdot}5\,\text{kN}$

S.F. just before $\vec{B}$ (कर्तन बल बिन्दु B के ठीक पहले) $\Rightarrow \vec{F_B} = -1{\cdot}5 - 0{\cdot}3 \times 2$

$$\vec{F_B} = -2{\cdot}1\,\text{kN}$$

S.F. at B (कर्तन बल, बिन्दु B पर), $\Rightarrow F_B = -2{\cdot}1 + R_B = -2{\cdot}1 + 5{\cdot}75 = 3{\cdot}65\,\text{kN}$

S.F. just before D (कर्तन बल बिन्दु D के ठीक पहले) $\Rightarrow \vec{F_D}$

$\therefore$ $$\vec{F_D} = 3{\cdot}65 - 0{\cdot}3 \times 2 = 3{\cdot}05\,\text{kN}$$

Scanned with CamScanner

S.F. at D (कर्तन बल, बिन्दु D पर) $\Rightarrow F_D = 3{\cdot}05 - 2 = 1{\cdot}05$ kN

S.F. just before E (कर्तन बल बिन्दु E के ठीक पहले) $= \vec{F_E}$

$\therefore \quad \vec{F_E} = 1{\cdot}05 - 0{\cdot}3 \times 4 = -0{\cdot}15$ kN

S.F. at E (कर्तन बल, बिन्दु E पर), $\Rightarrow F_E = -0{\cdot}15 - 2 = -2{\cdot}15$ kN

S.F. just before A (कर्तन बल ठीक A से पहले) $\Rightarrow \vec{F_A}$

$\therefore \quad \vec{F_A} = -2{\cdot}15 - 0{\cdot}3 \times 2 = -2{\cdot}75$ kN

S.F. at A (कर्तन बल ठीक बिन्दु A पर) $\Rightarrow F_A = -2{\cdot}75 + R_A = 0$

(2) नमन घूर्ण आरेख के लिए (For B.M.D.)

B.M. at $C \Rightarrow M_C \Rightarrow$ (C पर नमन घूर्ण) $= 0$

B.M. at $B \Rightarrow M_B \Rightarrow$ (B पर नमन घूर्ण) $= -1{\cdot}5 \times 2 - 0{\cdot}3 \times 2 \times \frac{2}{2} = -3{\cdot}6$ kN-m

B.M. at $D \Rightarrow M_D \Rightarrow$ (D पर नमन घूर्ण) $= -1{\cdot}5 \times 4 - 0{\cdot}3 \times 4 \times \frac{4}{2} + 5{\cdot}75 \times 2$

$= 3{\cdot}1$ kN-m

अब S.F.D. के समरूप त्रिभुज (Similar Δs) में,

$$\frac{x}{1{\cdot}05} = \frac{4-x}{0{\cdot}15}$$

या $\quad 1{\cdot}2x = 4 \times 1{\cdot}05$

या $\quad x = \frac{4{\cdot}2}{1{\cdot}2} = 3{\cdot}5$ m (यह दूरी DM है)

$\therefore$ B.M. at M (बिन्दु M पर नमन घूर्ण) $\Rightarrow M_{at\ M}$

$= -1{\cdot}5 \times 7{\cdot}5 - 2 \times 3{\cdot}5 - 0{\cdot}3 \times 7{\cdot}5 \times \frac{7{\cdot}5}{2} + 5{\cdot}75 \times 5{\cdot}5$

$= 4{\cdot}9375$ kN-m (अधिकतम नमन घूर्ण है)

B.M. at E (बिन्दु E पर नमन घूर्ण) $\Rightarrow M_E$

$= -1{\cdot}5 \times 8 + 5{\cdot}75 \times 6 - 2 \times 4 - 0{\cdot}3 \times 8 \times \frac{8}{2} = 4{\cdot}90$ kN-m

B.M. at $A = -1{\cdot}5 \times 10 + 5{\cdot}75 \times 8 - 2 \times 6 - 2 \times 2 - 0{\cdot}3 \times 10 \times \frac{10}{2} = 0$

माना नतिपरिवर्तन बिन्दु N की C से दूरी y है।

अब $\quad$ B.M. at $N = 0$

या $\quad -1{\cdot}5 \times y - 0{\cdot}3 \times y \times \frac{y}{2} + 5{\cdot}75 \times (y-2) = 0$

$$-1{\cdot}5\,y - \frac{0{\cdot}3}{2} \times y^2 + 5{\cdot}75\,y - 11{\cdot}5 = 0$$

$$0{\cdot}3y^2 - 8{\cdot}5y + 23 = 0$$

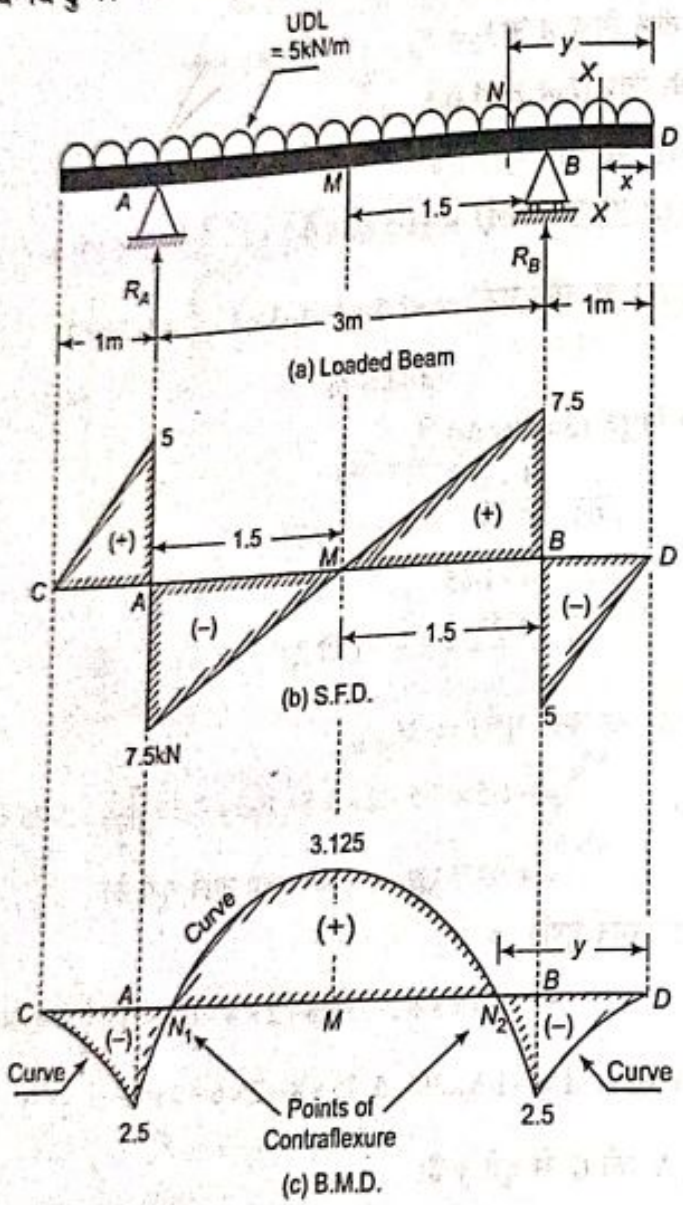
Scanned with CamScanner

$$y = \frac{8{\cdot}5 \pm \sqrt{(8{\cdot}5)^2 - 4 \times 0{\cdot}3 \times 23}}{2 \times 0{\cdot}3} = \frac{8{\cdot}5 \pm 6{\cdot}682}{0{\cdot}6}$$

(+ ve) लेने पर, $y = 25{\cdot}3$ m (असम्भव है) छोड़ देंगे।

(− ve) लेने पर, $y = 3{\cdot}03$ m (अत: C से N की दूरी 3·03 m है।)

उदाहरण 31. एक प्रलम्बी धरन (overhanging beam) की लम्बाई 5 m है तथा यह अपने सिरों (ends) से 1 m की दूरी पर सरल आधारित (simply supported) है। धरन पर 5 kN/m का एकसमान बँटा भार (U.D.L.) लगा है। धरन (Beam) के मध्य-बिन्दु पर बंकन आघूर्ण (B.M.) तथा अपरूपण बल (S.F.) ज्ञात कीजिये। (U.P. 2012, MOS)



चित्र 2.48

हल—भार की Symmetry के कारण $R_A = R_B = \dfrac{\text{Total Load}}{2}$

$\therefore$ $$R_A = R_B = \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25}{2} = 12{\cdot}5 \text{ kN}$$

Scanned with CamScanner

(1) S.F.D. के लिये— $F_x = -5x$

$F_D \Rightarrow$ S.F. at $D = 0$

$\vec{F_B} \Rightarrow$ S.F. just before $B = -5 \times 1 = -5$ kN

$F_B \Rightarrow$ S.F. at $B = -5 + R_B = -5 + 12{\cdot}5 = 7{\cdot}5$ kN

$\vec{F_A} \Rightarrow$ S.F. just before $A = 7{\cdot}5 - 5 \times 3$

$= 7{\cdot}5 - 15 = -7{\cdot}5$ kN

$\therefore$ $F_A \Rightarrow$ S.F. at $A = -7{\cdot}5 + R_A$

$= -7{\cdot}5 + 12{\cdot}5 = 5$ kN

$F_C =$ S.F. at $C = 5 - 5 \times 1 = 0$

भार की symmetry के कारण मध्य-बिन्दु M पर ही S.F. = 0 होगा S.F.D. को चित्र 2.48 (b) में दिखाया गया है।

(2) B.M.D. के लिये—

$$M_x = -5 \times x \times \frac{x}{2} = -2{\cdot}5x^2$$

अत: B.M.D. एक Curve Shape में होगा।

$M_D \Rightarrow$ B.M. at $D = -2{\cdot}5 \times 0 = 0$

$M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = -5 \times 1 \times \frac{1}{2} = -2{\cdot}5$ kN-m

$M_M \Rightarrow$ B.M. at $M = -5 \times 2{\cdot}5 \times \frac{2{\cdot}5}{2} + 12{\cdot}5 \times 1{\cdot}5$

$= 3{\cdot}125$ kN-m (max +ve B.M.)

$M_A \Rightarrow$ B.M. at $A = -5 \times 4 \times \frac{4}{2} + 12{\cdot}5 \times 3$

या $M_A = -40 + 37{\cdot}5 = -2{\cdot}5$ kN-m

$M_C \Rightarrow$ B.M. at $C = -5 \times 5 \times \frac{5}{2} + 12{\cdot}5 \times 4 + 12{\cdot}5 \times 1 = 0$

इस धरन (Beam) का B.M.D. आधार रेखा CD को दो स्थानों पर काट कर Sign Change करता है। अत: नति परिवर्तन बिन्दु N_1 व N_2 दो होंगे।

$\therefore$ B.M. at $N_2 = 0$

या $-5y \times \frac{y}{2} + R_B \times (y-1) = 0$

या $-2{\cdot}5y^2 + 12{\cdot}5y - 12{\cdot}5 = 0$

या $2{\cdot}5y^2 - 12{\cdot}5y + 12{\cdot}5 = 0$

या $y^2 - 5y + 5 = 0$

अब सूत्र $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ से

Scanned with CamScanner

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$$

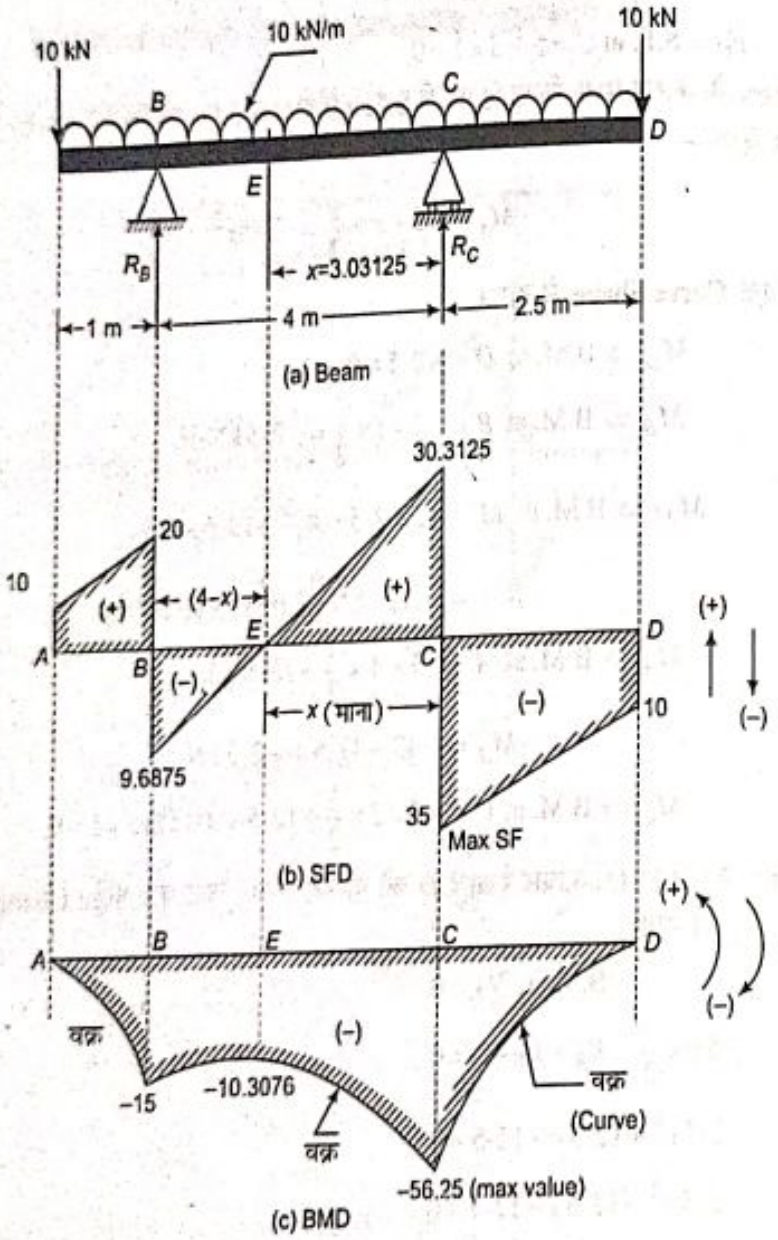
या $$y = \frac{5 \pm 2 \cdot 236}{2} = 2 \cdot 5 \pm 1 \cdot 118$$

$$\therefore \quad y = 3 \cdot 618 \text{ m तथा } y = 1 \cdot 382 \text{ metre}$$

अत: $DN_2 = 1 \cdot 382$ m तथा $DN_1 = 3 \cdot 618$ m

तथा Max B.M. (+ve) = 3·125 kN-m (मध्य में)

उदाहरण 32. चित्र 2.49 (a) में दर्शायी गयी धरन के लिये अपरूपण बल एवं बंकन आघूर्ण आरेख (S.F.D. and B.M.D.) खींचिये। (उ० प्र० 2004)



चित्र 2.49

हल— $R_B + R_C = 10 + 10 + 10 \times 7{\cdot}5 = 95$ ... (i)

B पर आघूर्ण लेने से, (Clockwise = Anticlockwise Moment)

$$R_C \times 4 + 10 \times 1 + 10 \times 1 \times \frac{1}{2} = 10 \times 6{\cdot}5 \times \frac{6{\cdot}5}{2} + 10 \times 6{\cdot}5$$

$$4R_C + 10 + 5 = 211{\cdot}25 + 65$$

या $4R_C = 261{\cdot}25$

या $R_C = \frac{261{\cdot}25}{4} = 65{\cdot}3125$

समीकरण (1) से $R_B = 95 - R_C = 95 - 65{\cdot}3125$

या $R_B = 29{\cdot}6875\ \text{kN}$

∴ $R_B = 29{\cdot}6875\ \text{kN}$

तथा $R_C = 65{\cdot}3125\ \text{kN}$

कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के लिये गणना—

D पर कर्तन बल (S.F. at D), $F_D = -10\ \text{kN}$

C के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before C)

$$\vec{F_C} = -10 - 10 \times 2{\cdot}5 = -10 - 25 = -35\ \text{kN}$$

अब ठीक C पर कर्तन बल (S.F. at C)

$$F_C = -35 + R_C = -35 + 65{\cdot}3125 = 30{\cdot}3125\ \text{kN}$$

अब B के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before B)

$$\vec{F_B} = 30{\cdot}3125 - 10 \times 4 = -9{\cdot}6875\ \text{kN}$$

B पर कर्तन बल (S.F. at B), $F_B = -9{\cdot}6875 + R_B$

या $F_B = -9{\cdot}6875 + 29{\cdot}6875 = 20\ \text{kN}$

अब A के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before $\vec{A}$)

∴ $\vec{F_A} = 20 - 10 \times 1 = 10\ \text{kN}$

तथा A पर कर्तन बल (S.F. at A), $F_A = 10 - 10 = 0$

S.F.D. में माना C से x दूरी पर कर्तन बल का मान शून्य होता है।

यदि $CE = x$ तब $BE = (4 - x)$

समरूप त्रिभुजों (Similar Triangles) में भुजाओं का अनुपात बराबर रखने पर—

$$\frac{x}{30{\cdot}3125} = \frac{4 - x}{9{\cdot}6875}$$

Scanned with CamScanner

या $40x = 121{\cdot}25$

या $x = \frac{121{\cdot}25}{40} = 3{\cdot}03125$ metre

नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिये गणना—

D पर नमन आघूर्ण (B.M. at D), $M_D = 0$

C पर नमन आघूर्ण (B.M. at C), $M_C = -10 \times 2{\cdot}5 - 10 \times 2{\cdot}5 \times \frac{2{\cdot}5}{2}$

या $M_C = -25 - 31{\cdot}25 = -56{\cdot}25$ kN-m

∵ E पर S.F. = 0 है, अत: B.M. का मान धनात्मक दिशा की ओर अधिकतम होगा।

B.M. at $E \Rightarrow$ $M_E = -10 \times 5{\cdot}53125 + 65{\cdot}3125 \times 3{\cdot}03125 - 10 \times 5{\cdot}53125 \times \frac{5{\cdot}53125}{2}$

$M_E = -55{\cdot}3125 + 197{\cdot}9785 - 152{\cdot}9736$

$= -208{\cdot}286 + 197{\cdot}9785 = -10{\cdot}3076$ kN-m

B पर नमन आघूर्ण (B.M. at B), गणना की आसानी के लिये बायीं ओर से घूर्ण लेने पर—

$M_B = -10 \times 1 - 10 \times 1 \times \frac{1}{2}$

(अब चिन्ह प्रणाली बायीं ओर वाली प्रयोग करेंगे)

$= -10 - 5 = -15$ kN-m

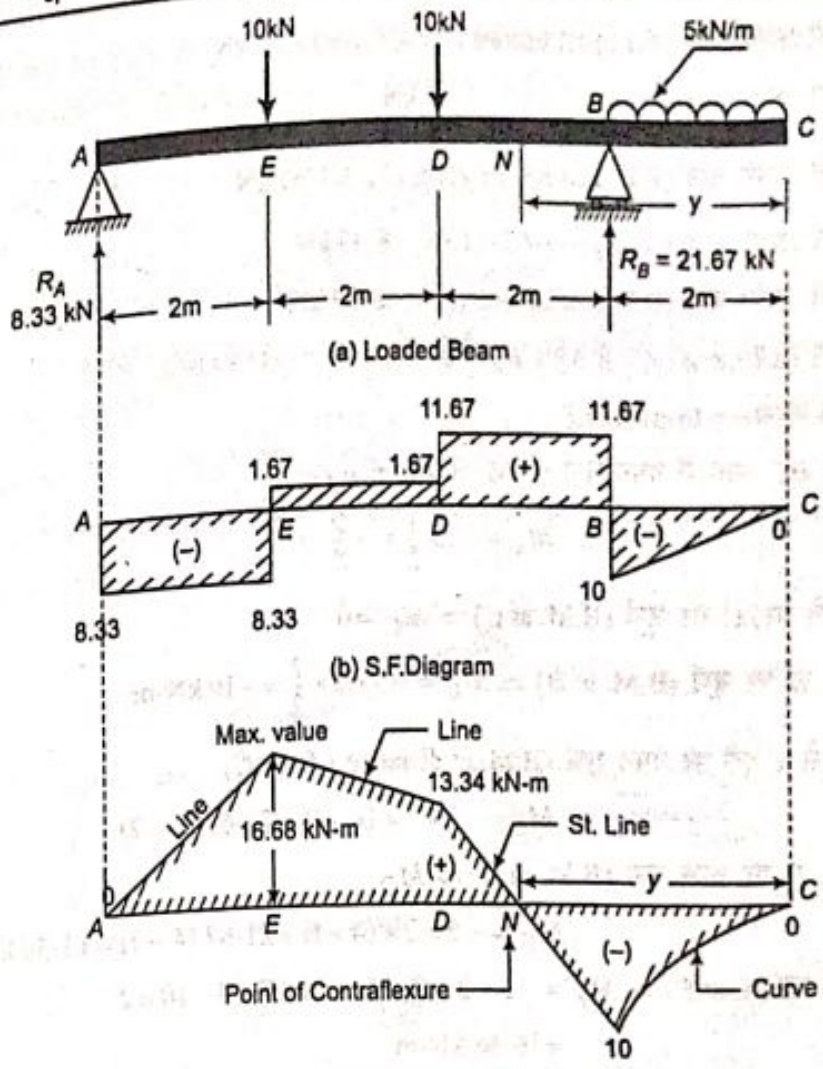
अब A पर नमन आघूर्ण (B.M. at A), $M_A = 0$ (∵ दोनों सिरों पर शून्य होता है)

∵ नमन घूर्ण आरेख B.M.D. ने शून्य होकर बीच में कहीं भी अपना चिन्ह परिवर्तित नहीं किया। इसलिये यहाँ नति परिवर्तन बिन्दु नहीं होगा।

उदाहरण 33. चित्र 2.50 (a) में दिखाई गई धरन के लिए अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) तथा बंकन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) खींचिये। (U.K. 2014 (S), CIVIL)

यदि नति परिवर्तन बिन्दु (Point of Contraflexure) भी हो तो उसकी स्थिति भी बताइये।

Scanned with CamScanner



चित्र 2.50

हल—[चित्र 3.47 (b) व (c) देखें]

$$R_A + R_B = 30$$

A पर घूर्ण (mount) लेने से—

$$6R_B = 10\times 2 + 10\times 4 + 5\times 2\times 7$$

$$R_B = \frac{130}{6} = 21{\cdot}67\,\text{kN}$$

$$\therefore \quad R_A = 30 - 21{\cdot}67$$

$$= 8{\cdot}33\,\text{kN}$$

(1) S.F.D. के लिये— $\overset{(+)}{\uparrow}\ \underset{(-)}{\downarrow}$ from R.H.S.

C पर कर्तन बल (S.F. at C) $= 0$

B के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before B) $\Rightarrow \vec{F}_B = -5\times 2 = -10\,\text{kN}$

B पर कर्तन बल (S.F. at B) $\Rightarrow F_B = -10 + R_B = 11{\cdot}67\,\text{kN}$

Scanned with CamScanner

D के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before D) $\Rightarrow F_D = 11{\cdot}67$ kN

D पर कर्तन बल (S.F. at D) $= 11{\cdot}67 - 10 = 1{\cdot}67$ kN

E के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before E) $\Rightarrow \vec{F_E} = 1{\cdot}67$ kN

E पर कर्तन बल (S.F. at E) $\Rightarrow F_E = 1{\cdot}67 - 10 = -8{\cdot}33$ kN

A के ठीक पहले कर्तन बल (S.F. just before A) $= -8{\cdot}33$ kN

A पर कर्तन बल (S.F. at A) $= -8{\cdot}33 + R_A = 0$

(2) B.M.D. के लिये— from R.H.S.

C से x दूरी पर BC भाग में नमन घूर्ण (B.M. at distance x)

$$M_x = -5x\frac{x}{2} = -\frac{5}{2}.x^2 \qquad \text{(Curve equation)}$$

इसमें $x = 0$ रखने पर, C पर घूर्ण (B.M. at C) $\Rightarrow M_C = 0$

$x = 2$ रखने पर, B पर घूर्ण (B.M. at B) $\Rightarrow M_B = -5 \times 2 \times \frac{2}{2} = -10$ kN-m

BD भाग में C से x दूरी पर नमन घूर्ण (B.M. at distance x from C)

$$M_x = -5 \times 2 \times (x-1) + 21{\cdot}67\,(x-2) \qquad \text{(Linear equation)}$$

$x = 4$ रखने पर, D पर नमन घूर्ण (B.M. at D) $\Rightarrow M_D$

$$M_D = -5 \times 2 \times (4-1) + 21{\cdot}67\,(4-2) = 13{\cdot}34 \text{ kN-m}$$

E पर नमन घूर्ण (B.M. at E) $\Rightarrow M_E = -5 \times 2 \times (6-1) + 21{\cdot}67 \times 4 - 10 \times 2$

$$= 16{\cdot}68 \text{ kN-m}$$

A पर नमन घूर्ण (B.M. at A) $\Rightarrow M_A = -5 \times 2 \times (8-1) + 21{\cdot}67 \times (8-2) - 10 \times 4 - 10 \times 2$

$$= 0{\cdot}02 \equiv 0 \text{ (Say) माना}$$

(3) नति परिवर्तन बिन्दु N के लिए माना $CN = y$ है।

$\therefore \quad -5 \times 2 \times (y-1) + 21{\cdot}67\,(y-2) = 0$

या $\qquad 11{\cdot}67y = 33{\cdot}34$ या $y = 2{\cdot}86$ m उत्तर

**विशेष–S.F.D. या B.M.D. दिया होने पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 34. चित्र 2.51 (a) में एक धरन का कर्तन बल आरेख (S.F.D.) दिया गया है। यह धरन दो टेकों (Supports) पर आधारित है जिनमें से एक टेक बायें (left) सिरे पर है। इसके द्वारा धरन पर भारों के प्रकार व स्थिति तथा नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) प्रदर्शित कीजिये।

हल—दिये गये कर्तन बल आरेख (S.F.D.) का अध्ययन अथवा निरीक्षण (inspection) करने से ज्ञात होता है कि धरन की दूसरी टेक (support) बिन्दु B पर होगी जहाँ कर्तन बल (S.F.), चिन्ह बदलता है और चित्र में हम यह भी देखते हैं कि C से B तक S.F. का मान 1 kN का स्थिर है। अत: C पर 1kN का एक बिन्दु भार (Point load) होगा।

अब टेक B की प्रतिक्रिया चित्र 2.49 (a) में देखने से,

$$R_B = 1 + 4 = 5 \text{ kN होती है।}$$

Scanned with CamScanner

क्योंकि S.F. का मान B पर 4 kN से D पर 1 kN तक तिरछी रेखा (Inclined Line) के रूप में घटता है तो इससे ज्ञात होता है कि B से D तक समवितरित भार (U.D.L.) लगा है प्रति मीटर जिसका मान

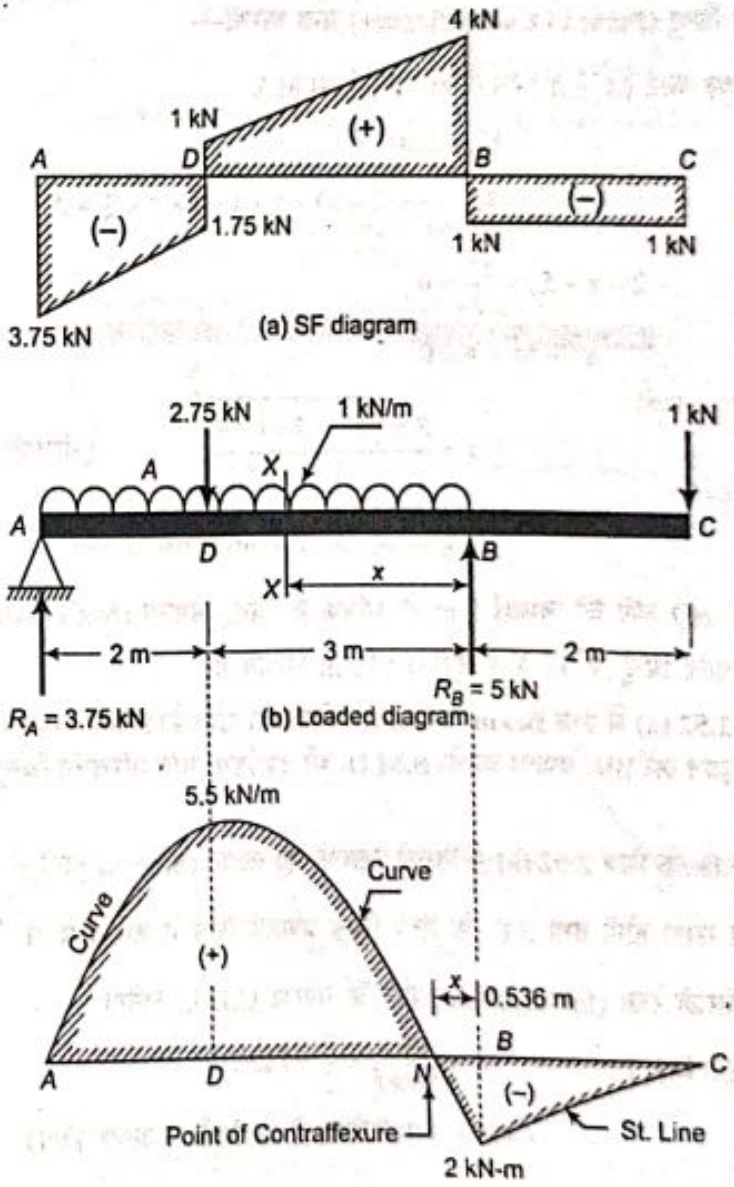
$$w = \frac{\text{तिरछी रेखा के सिरों की ऊँचाइयों में अन्तर}}{\text{सिरों के बीच की क्षैतिज दूरी}}$$

$$\therefore \quad w = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \text{ kN/m}$$

अब क्योंकि D पर S.F. एकदम (Suddenly) बदलता है, इससे ज्ञात होता है कि D पर एक बिन्दु भार (Point load) $= 1 + 1 \cdot 75 = 2 \cdot 75$ kN का लगा है।

इसके बाद फिर D पर S.F. $= 1 \cdot 75$ kN से A पर S.F. $= 3 \cdot 75$ kN

तक तिरछी रेखा के रूप में बदलता है, अत: D से A तक समवितरित भार (U.D.L.) कार्य करता है जिसका मान प्रति मीटर में w हो तो $w = \frac{2}{2} = 1$ kN/m होगा।



चित्र 2.51

Scanned with CamScanner

अब बिन्दु A पर S.F.D. में एक ऊर्ध्वाधर रेखा (Vertical line) होने के कारण ज्ञात होता है कि A पर प्रतिक्रिया (Reaction at A) $\Rightarrow R_A = 3{\cdot}75$ kN है।

इस आधार पर धरन की भारित स्थिति (loaded position of the Beam) को चित्र 2.51 (b) में दर्शाया गया है।

नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) के लिये गणना (चित्र 2.51 c) देखें।

B.M. at C $\quad M_C = 0$

B.M. at D $\Rightarrow \quad M_B = -1 \times 2 = -2$ kN-m

बिना टेक के स्थान या C से 5 m की दूरी पर (जहाँ S.F. अपना चिन्ह परिवर्तित करता है) स्थित बिन्दु D पर B.M. अधिकतम होगा। (B.M. will be maximum at D (*i.e.* 5 m from C) where S.F. changes sign)

$$\therefore \quad M_{max} = M_D = -1 \times 5 + 5 \times 3 - 1 \times 3 \times \frac{3}{2} = 5{\cdot}5 \text{ kN-m}$$

अब धरन के सिरे A पर नमन आघूर्ण, $M_A = 0$ [∵ दोनों सिरों पर शून्य होता है]

अब नति परिवर्तन बिन्दु (Point of Contraflexure) ज्ञात करना—

B से x दूरी पर स्थित काट $(X - X)$ पर नमन आघूर्ण (B.M.),

$$M_x = 0 \text{ for } N$$

$$\therefore \quad M_x = -1(2 + x) + 5 \times x - 1 \times x \times \frac{x}{2} = 0$$

$$-2 - x + 5x - \frac{x^2}{2} = 0$$

या $\quad x^2 - 8x + 4 = 0$

$$\therefore \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} \qquad \text{(बीजगणितीय श्रीधराचार्य सूत्र से)}$$

$$x = \frac{8 \pm 6{\cdot}928}{2} = 7{\cdot}46 \text{ m तथा } 0{\cdot}536 \text{ m}$$

परन्तु $x = 7{\cdot}46$ m, BD भाग की लम्बाई 3 m से अधिक है, अत: अमान्य (Not Possible) होगा।

$\therefore$ BD में नति परिवर्तन बिन्दु N की B से दूरी $0{\cdot}536$ m सम्भव है। उत्तर

उदाहरण 35. चित्र 2.52 (a) में एक Beam का S.F.D. दिखाया गया है। इसका अध्ययन (Study) कर धरन पर भार (Loads on beam) ज्ञात करें तथा गणना करके B.M.D. भी दर्शाइये। नति परिवर्तन बिन्दु भी हो तो उसकी स्थिति बतायें।

नोट—दिये गये S.F.D. के चित्र 2.52 (a) में तिरछी रेखाओं का ढलान (Slopes) बायीं से दायीं ओर है, अत: गणना बायें सिरे से आरम्भ करनी सरल होगी तथा S.F. के लिये चिन्ह प्रणाली चित्र में बायें सिरे से $\overset{(+)}{\uparrow}\ \downarrow_{(-)}$ प्रयोग की गई है।

हल—AB भाग में तिरछी रेखा (Inclined line) होने के कारण U.D.L. लगेगा

$\therefore$ समवितरित भार (U.D.L.) $\quad w = \dfrac{\text{भार}}{\text{लम्बाई}} = \dfrac{2}{2} = 1$ kN/m

(भार = तिरछी रेखाओं के सिरों में अन्तर होगा)

Scanned with CamScanner

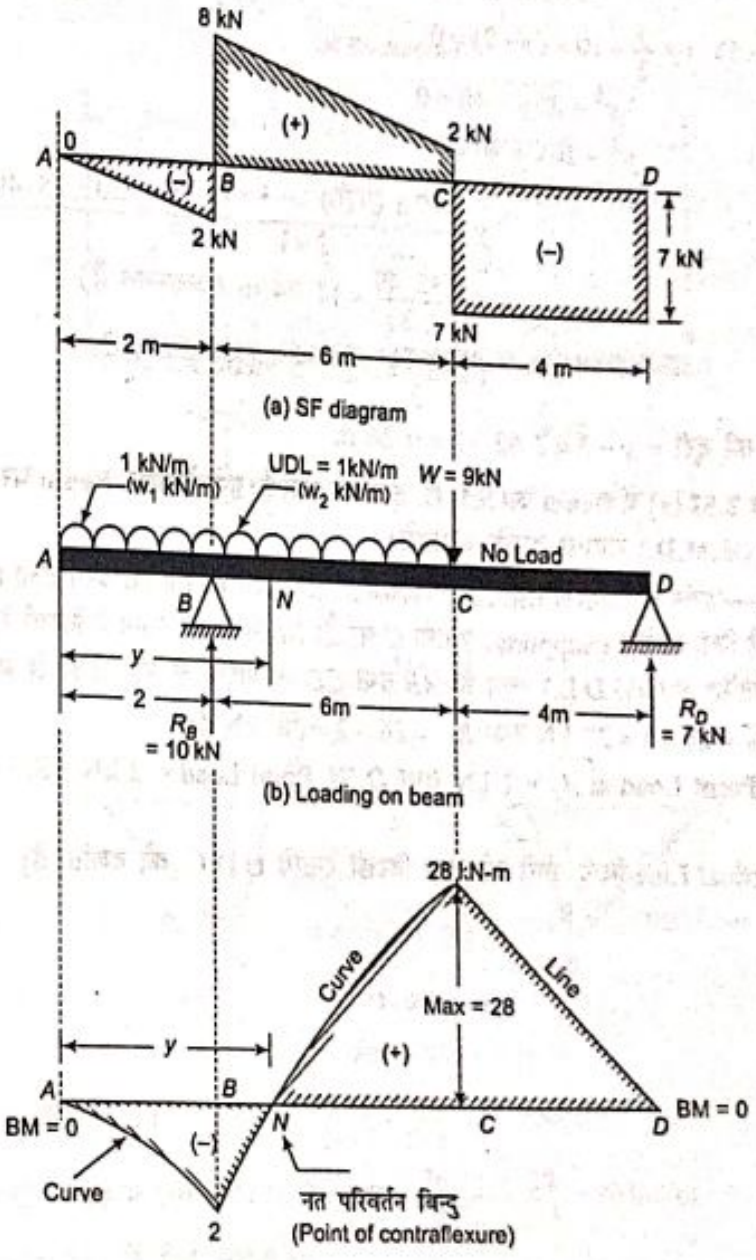
BC भाग में भी तिरछी रेखा के कारण U.D.L. ही कार्य करेगा।

$$\therefore \quad w_2 = \frac{\text{भार}}{\text{लम्बाई}} = \frac{8-2}{6} = \frac{6}{6} = 1 \text{ kN-m}$$ उत्तर

$\because$ *CD* लम्बाई तक S.F.D. में क्षैतिज रेखा (Horizontal line) है, अत: धरन पर कोई भार नहीं होगा।

अब बिन्दु *C* पर संकेन्द्रित भार (Point Load) = 2 + 7 = 9 kN है।

तथा *B* पर प्रतिक्रिया $R_B = 8 + 2 = 10$ kN तथा *D* पर प्रतिक्रिया = 7 kN है।



चित्र 2.52

Scanned with CamScanner

इस प्रकार प्राप्त धरन का भार चित्र 2.52 (b) में दिखाया गया है।

$M_D \Rightarrow$ B.M. at $D = 0$

$M_C \Rightarrow$ B.M. at $C = 7 \times 4 = 28$ kN-m

अब बायीं ओर से, $M_B \Rightarrow$ B.M. at $B = -1 \times 2 \times \frac{2}{2} = -2$ kN-m

मान लो A से N की दूरी y है। (नति परिवर्तन बिन्दु की स्थिति के लिये)

$\therefore$ B.M. at $N = 0$ ($\because$ आघार रेखा पर N है)

$$-1 \times y \times \frac{y}{2} + 10 \times (y-2) = 0$$

या $$-y^2 + 20y - 40 = 0$$

या $$y^2 - 20y + 40 = 0$$

$\therefore$ $$y = \frac{20 \pm \sqrt{(20)^2 - 4 \times 1 \times 40}}{2 \times 1} = \frac{20 \pm 15{\cdot}49}{2}$$

(+ ve) लेने पर, $y = \frac{35{\cdot}49}{2} = 17{\cdot}74$ m (असम्भव है)

(– ve) लेने पर, $y = \frac{4{\cdot}51}{2} = 2{\cdot}255$ metre $\cong 2{\cdot}26$ m

$\therefore$ टेक B से N की दूरी $= y - 2 = 2{\cdot}62 - 2 = 0{\cdot}26$ m उत्तर

उदाहरण 36. चित्र 2.53 (a) में Beam का S.F.D. दर्शाया गया है। इसे देखकर Beam पर Loading ज्ञात कीजिये तथा नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) गणना करके बनाइये।

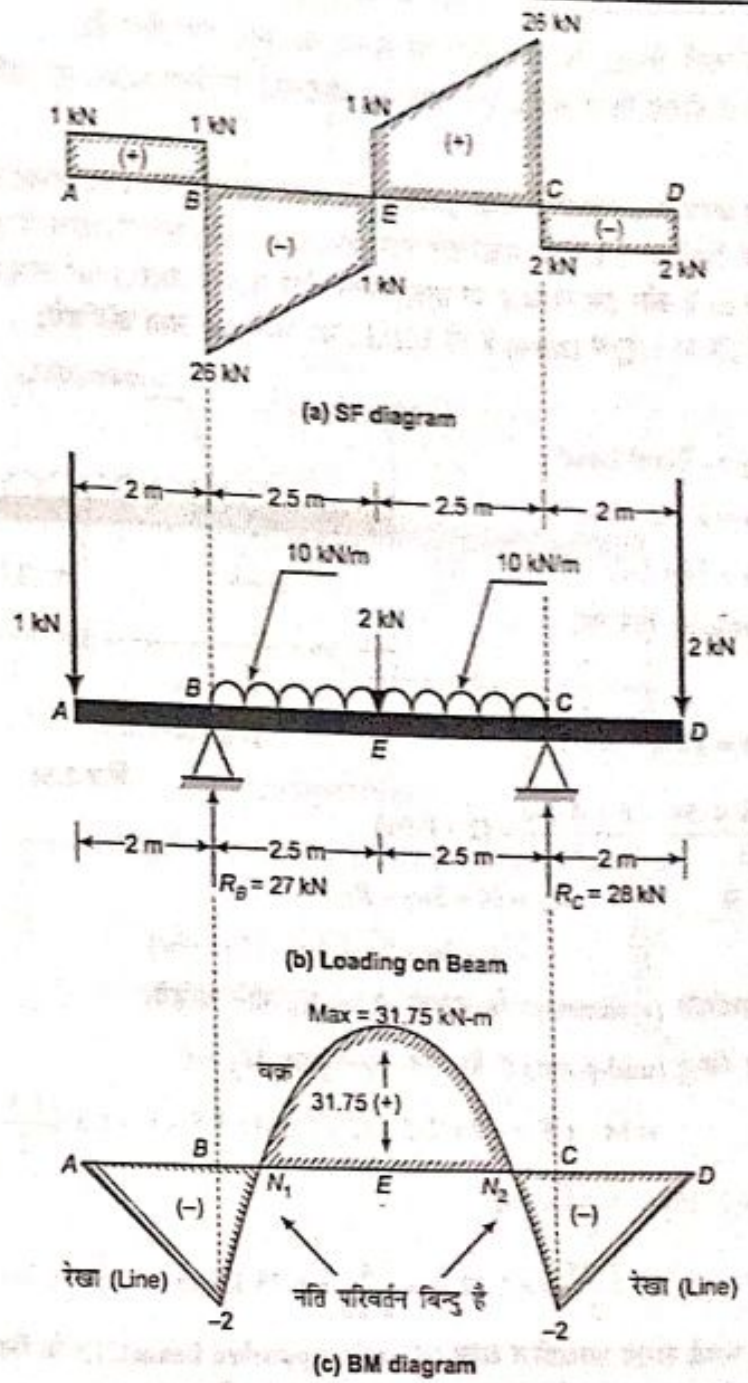
अध्ययन (Study)—कर्तन बल आरेख (S.F.D.) के चित्र 2.53 से ज्ञात होता है कि धरन दोनों सिरों से बाहर निकली धरन (overhanging beam) है जिसको टेकें (Supports) B तथा C पर हैं। BE तथा CE भागों में तिरछी रेखा होने के कारण इन BE तथा CE भागों पर समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। AB तथा CD लम्बाइयों के भाग टेकों से बाहर निकले हैं।

गणना—अब $R_B = 26 + 1 = 27$ kN तथा $R_C = 26 + 2 = 28$ kN हैं।

A पर बिन्दु भार (Point Load at A) = 1 kN तथा D पर Point Load = 2 kN (S.F.D. से) तथा E पर भार $= 1 + 1 = 2$ kN

[$\because$ S.F.D. में Vertical Line बिन्दु भारों को तथा तिरछी रेखायें U.D.L. को दर्शाती हैं]

Scanned with CamScanner



चित्र 2.53

BE लम्बाई में लगे U.D.L. का मान $= \frac{26-1}{2.5} = \frac{25}{2.5} = 10$ kN/m

BC लम्बाई में लगे U.D.L. का मान $= \frac{26-1}{2.5} = \frac{25}{2.5} = 10$ kN/m

अब नमन आघूर्ण (B.M.) के लिये गणना—

$$M_D = 0,\ M_C = -2 \times 1 = -2 \text{ kN-m}$$

$$M_E = -2 \times 3{\cdot}5 + 28 \times 2{\cdot}5 - 10 \times 2{\cdot}5 \times \frac{2{\cdot}5}{2} = 31{\cdot}75 \text{ kN-m}$$

$$M_B = -1 \times 2 = -2 \text{ kN-m}$$ (बायीं ओर से गणना आसानी के लिये की है).

Scanned with CamScanner

$M_A = 0$ दो टेकों वाली Beam के दोनों सिरों पर B.M. का मान शून्य होता है।

∵ E पर S.F. = 0 होकर चिन्ह बदला है (टेकों को छोड़कर) इसलिए B.M. का अधिकतम (+ve) मान E पर ही होगा।

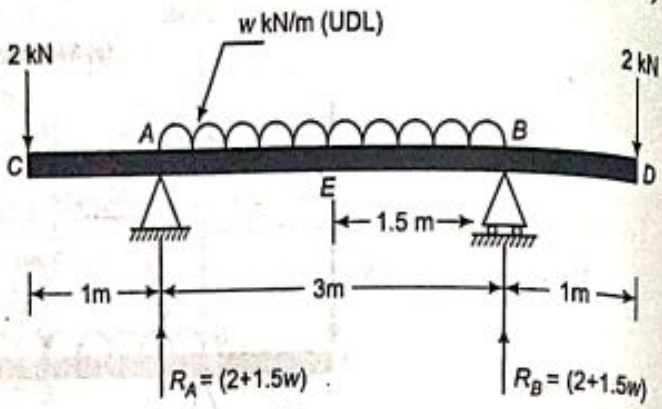
उदाहरण 37. एक धरन 5 m लम्बी है तथा इसके दोनों सरल आधारों पर 1 m लम्बा प्रलम्बन (Overhanging Length) है। इसके दोनों सिरों पर 2 kN के संकेन्द्रित भार (Point Loads) लगे हैं। बीच में आधारित लम्बाई (length between supports) 3 m है और इस लम्बाई पर एक समान बँटा भार (U.D.L.) 'w' लग रहा है। यदि धरन के मध्य बिन्दु पर बंकन आघूर्ण (B.M.) शून्य (zero) है तो U.D.L. का मान (w) ज्ञात कीजिये। (U.P. 2009, MOS)

हल—

∵ $R_A + R_B =$ Total Load

∴ $R_A + R_B = 2 + 2 + 3w$

$R_A + R_B = (4 + 3w)$ ... (i)



चित्र 2.54

A पर आघूर्ण (Moment) लेने पर,

$(\Sigma M = 0)$ से

$$R_B \times 3 + 2 \times 1 = 2 \times 4 + w \times 3 \times \frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad R_B = \frac{8 - 2 + 4{\cdot}5w}{3} = \frac{6 + 4{\cdot}5w}{3} = (2 + 1{\cdot}5w)$$

अब समीकरण (i) से $R_A = (4 + 3w) - R_B$

$$= 4 + 3w - 2 - 1{\cdot}5w = (2 + 1{\cdot}5w)$$

वैसे भी भारों की सममिति (symmetry) के कारण, $R_A = R_B$ होने चाहियें।

माना धरन का मध्य-बिन्दु (mid-point) E है। अत: प्रश्नानुसार $M_E = 0$

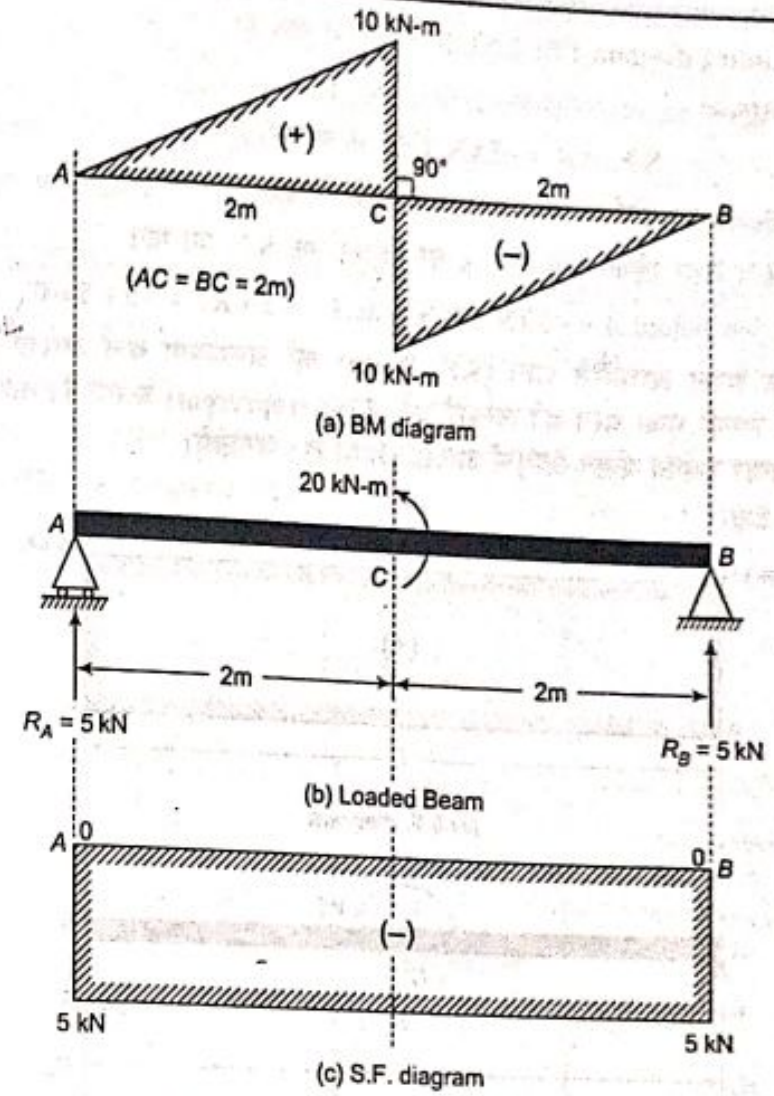
$$\therefore \quad \text{B.M. at } E = -2 \times 2{\cdot}5 + (2 + 1{\cdot}5w) \times 1{\cdot}5 - w \times 1{\cdot}5 \times \frac{1{\cdot}5}{2} = 0$$

या $$-5 + 3 + 2{\cdot}25w - \frac{2{\cdot}25}{2}w = 0$$

$$\therefore \quad \frac{2{\cdot}25}{2}w = 2 \text{ या } w = \frac{4}{2{\cdot}25} = 1{\cdot}78 \text{ kN/m}$$ उत्तर

प्रश्न 38. एक 4 m लम्बे सरल आधारित धरन (simply supported beam) AB के लिए बंकन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) चित्र 2.55 में दिखाया गया है। धरन (Beam) का भारण चित्र (Loading diagram) बनाकर इसका अपरूपण आरेख (S.F.D.) बनाइये। (U.P. 2008)

Scanned with CamScanner



चित्र 2.55

हल—B.M.D. से ज्ञात होता है

B.M. at $C \Rightarrow$ $M_C = \pm 10$ kN-m

माना Reactions R_A तथा R_B हैं।

$\therefore$ $R_B \times 2 = -10$

$\therefore$ $R_B = -\frac{10}{2} = -5$ kN

$\therefore$ $R_B = 5$ kN $\downarrow$

इसी प्रकार R_A का C पर Moment से

$R_A \times 2 = +10$

$\therefore$ $R_A = \frac{10}{2} = +5$ kN

$\because$ B.M.D. में Moment बिन्दु C पर -10 से +10 तक एकदम (Suddenly) बदला है।

$\therefore$ C पर Anticlockwise Moment of couple = 10 + 10 = 20 kN-m

Scanned with CamScanner

∴ Beam का Loading diagram चित्र 2.53 (b) में दर्शाया गया है।

अब S.F.D. के लिए—

S.F. at $B = -5$ kN (R_B के बराबर होगा)

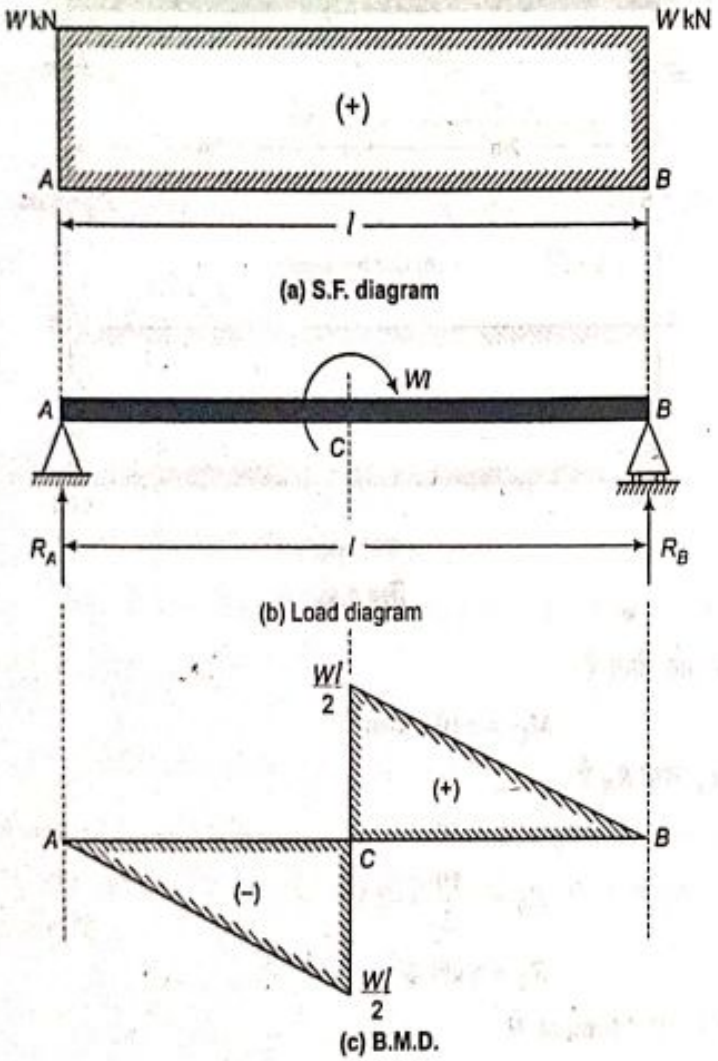
∵ B से C तक Beam पर कोई भी Vertical Load नहीं है, अत:

S.F. का मान –5 kN स्थिर रहेगा। अब ठीक A पर पहुँचने तक S.F. का मान

$\Rightarrow$ S.F. just before $A = -5$ kN तथा S.F. at $A = -5 + R_A = -5 + 5 = 0$

उदाहरण 39. एक सरल आधारित धरन (S.S. Beam) का अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) एक आयत (Rectangle), जिसकी लम्बी भुजा धरन की लम्बाई को व्यक्त (represent) करती है। तब धरन का भारण चित्र (Load diagram) बनाकर उसका बंकन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) बनाइये। (U.P. 2009, B.P.)

हल—चित्र 2.56 देखें।



चित्र 2.56

S.S. Beam पर आयत S.F.D. के रूप में तब होता है जब केन्द्र पर एक बलयुग्म (couple) का घूर्ण लगा हो, जैसे चित्र (b) में केन्द्र पर $W \times l$ का बलयुग्म दिखाया है।

∵ $R_A + R_B = 0$ ... (i)

Scanned with CamScanner

A पर Moment लेने पर,

$$R_B \times l = Wl \text{ या } R_B = W\uparrow \text{ अब समीकरण (i) से } R_A = -W\downarrow$$

अब B.M. at $B \Rightarrow$ $M_B = 0$,

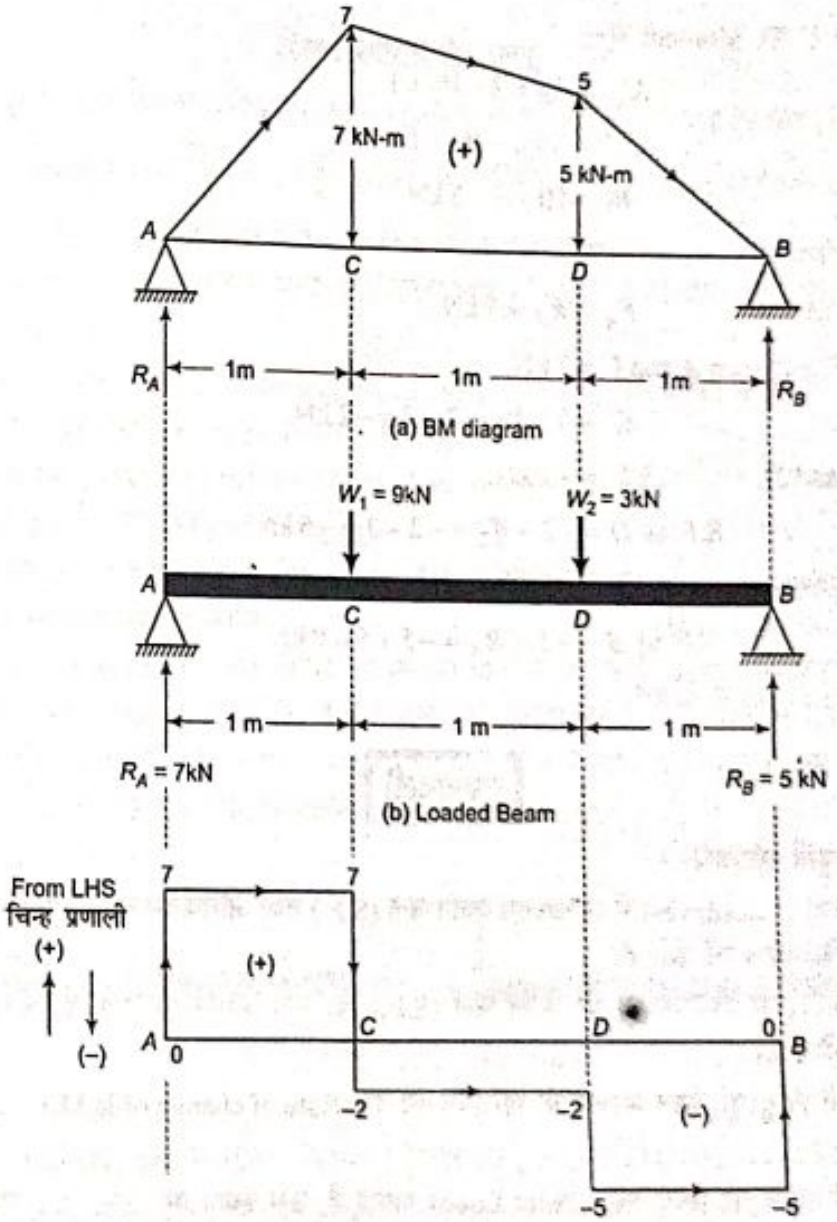
B.M. at C (Without Couple) $= R_B \times \frac{l}{2} = \frac{Wl}{2}$

B.M. at C (With Couple) $= \frac{Wl}{2} - Wl = -\frac{Wl}{2}$ (B.M. का मान एकदम Suddenly बदलता है)

अब B.M. at $A = R_B \times l - W \times l = Wl - Wl = 0$

इस Beam के B.M.D. को चित्र 2.56 (c) में दिखाया गया है।

उदाहरण 40. चित्र 2.57 में एक शुद्धालम्ब धरन (S.S. Beam) का B.M.D. दर्शाया गया है। टेकों की प्रतिक्रियायें ज्ञात करें तथा गणना द्वारा S.F. Diagram बनाइये।



चित्र 2.57

Scanned with CamScanner

हल— B.M. at $C = 7$ दिया है

$\Rightarrow$ $R_A \times 1 = 7$ दिया है

$\therefore$ $R_A = 7$ kN उत्तर

इसी प्रकार, $R_B \times 1 = 5$

या $R_B = 5$ kN उत्तर

अब AD भाग के लिये D पर Moment से

$\because$ B.M. at $D \Rightarrow$ $M_D = R_A \times 2 - W_1 \times 1$

या $5 = 7 \times 2 = W_1 \times 1$

$\therefore$ $W_1 = 14 - 5 = 9$ kN उत्तर

BC भाग के लिये C पर Moment से—

$$M_C = R_B \times 2 - W_2 \times 1$$

$$7 = 5 \times 2 - W_2 \times 1$$

या $W_2 = 10 - 7 = 3$ kN उत्तर

अब S.F.D. के लिये

$\therefore$ S.F.D. at $A \Rightarrow$ $F_A = R_A = 7$ kN

S.F. between A and $C = 7$ kN

S.F. at C, $F_C = 7 - W_1 = 7 - 9 = -2$ kN

$\therefore$ between C and D, S.F. $= -2$ kN

S.F. at $D = -2 - W_2 = -2 - 3 = -5$ kN

S.F. between D and $B = -5$ kN

$\therefore$ S.F. at $B = -5 + R_B = -5 + 5 = 0$ kN

S.F.D. को चित्र 2.57 (c) में देखिये।

प्रश्नावली

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये—

(i) एक कैन्टीलीवर (Cantilever) में अधिकतम कर्तन बल (S.F.) तथा अधिकतम नमन घूर्ण (B.M.) के मान सदैव ..... के स्थान पर होते हैं।

(ii) एक Cantilever में जिस स्थान पर कर्तन बल (S.F.) का मान अधिकतम होता है, बंकन आघूर्ण (B.M.) ..... होता है।

(iii) धरन के किसी बिन्दु पर नमन आघूर्ण के परिवर्तन की दर (Rate of change of B.M.) ..... के बराबर होती है।

(iv) धरन के जिस स्थान पर बिन्दु भार (Point Load) लगता है, उस स्थान पर ..... एकदम बदलता है।

(v) धरन की जितनी लम्बाई में कोई बल नहीं लगता तो उस लम्बाई में ..... स्थिर रहता है और बँकन आघूर्ण (B.M.) ..... ढंग से बदलता है।

Scanned with CamScanner

(vi) एक शुद्धालम्बित धरन (S.S. Beam) के मध्य-बिन्दु (middle point) पर कोई बिन्दु भार (Point Load) W लगा हो तो धरन के मध्य में ही अधिकतम नमन घूर्ण ..... होता है।

(vii) यदि l लम्बाई की शुद्धालम्बित धरन (S.S.Beam) की पूर्ण लम्बाई पर समान बँटा भार (U.D.L.) w/m लगा है तो धरन (Beam) के मध्य-बिन्दु पर अधिकतम नमन घूर्ण ..... होता है।

(viii) एक धरन (Beam) के जिस बिन्दु पर नमन आघूर्ण (B.M.) दिशा परिवर्तित करता है, ... कहलाता है।

(U.K. 2010, S)

(ix) धरन के जिन स्थानों पर नमन घूर्ण (B.M.) चिन्ह बदलता है, उन स्थानों को ..... कहते हैं और वहाँ नमन घूर्ण (B.M.) ..... होता है।

(x) धरन के जिस बिन्दु पर कर्तन बल (S.F.) अपना चिन्ह बदलता है, वहीं पर नमन घूर्ण (B.M.) ..... होता है।

(xi) धरन के जिस बिन्दु पर S.F. का मान शून्य (zero) होता है तो उस बिन्दु पर नमन घूर्ण (B.M.) का मान ..... होता है।

(U.K. 2014)

रिक्त स्थानों के उत्तर

(i) बद्ध सिरे (Fixed end) (ii) भी अधिकतम (Max) (iii) कर्तन बल (S.F.) (iv) कर्तन बल (S.F.) (v) कर्तन बल (S.F.), सरल रेखीय (linearly) (vi) $\frac{Wl}{4}$ (vii) $\frac{wl^2}{8}$ (viii) नति परिवर्तन बिन्दु (Point of Contraflexure) (ix) नति परिवर्तन बिन्दु (N), शून्य (Zero) (x) अधिकतम (Max) (xi) अधिकतम (Max)।

2. भारित धरन (Loaded Beam) के किसी काट पर "नमन आघूर्ण" तथा "अपरूपण बल" को परिभाषित करें।

3. निम्नलिखित को समझाइये।

(a) धरन (Beam), कर्तन बल एवं नमन आघूर्ण (S.F. and B.M.) को परिभाषित करें। **(U.K. 2014, S)**

(b) विभिन्न प्रकार की धरनों (beams) के प्रकार चित्र सहित। **(U.P. 2014)**

(c) नत परिवर्तन बिन्दु (Point of inflection) or (Point of contraflexure) **(U.K. 2013)**

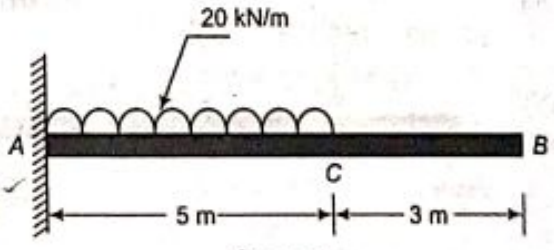
(d) उत्तलन (Hogging) या अवतलन (Sagging)।

4. भार, अपरूपण बल (S.F.) तथा बंकन आघूर्ण (B.M.) के लिये चिन्ह परिपाटी (Sign Convention) का उल्लेख करते हुए उनमें आपसी सम्बन्ध स्थापित कीजिये। **(U.P./U.K. 2007, 08, 09, 12, 13)**

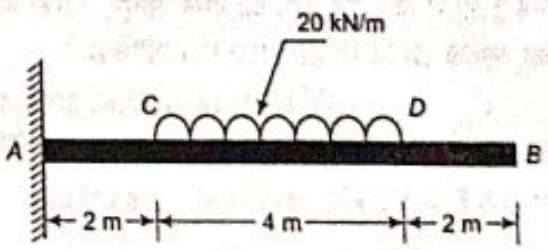
5. भार (Load) अपरूपण बल (S.F.) तथा बंकन आघूर्ण (B.M.) में आपस में सम्बन्ध समझाइये। **(U.P. 2013, 14)**

6. विभिन्न प्रकार के धरन (Beam) कौन-कौन से हैं? प्रत्येक को समझाइये। **(U.P. 2013, U.K. 2014, S)**

7. चित्र 2.58 तथा चित्र 2.59 में दिखाई गई Cantilever के लिए अपरूपण बल आरेख तथा नमन आघूर्ण आरेख (S.F.D. तथा B.M.D.) बनाइये तथा अधिकतम मान लिखिये।



चित्र 2.58



चित्र 2.59

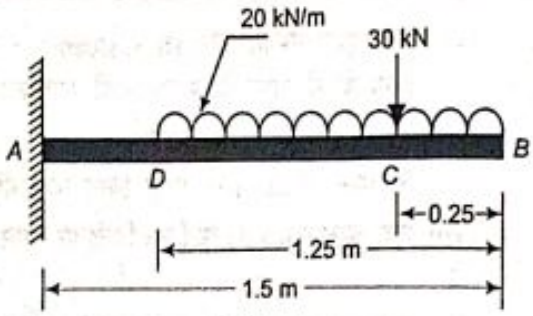
[उत्तर : $F_A = -100$ kN, $M_A = -250$ kN-m] [उत्तर : $F_A = -80$ kN, $M_A = (-)320$ kN-m]

8. 4 m के विस्तृति (span) वाला एक प्रास धरन (Cantilever Beam) पूरे विस्तार पर समान रूप से वितरित 3 kN/m का भार धारण किये हुए है। इस धरन के लिये अपरूपण बल तथा बंकन आघूर्ण आरेख (S.F.D. and B.M.D.) बनायें।

(U.P. 2008, 13, SOM)

Scanned with CamScanner

9. चित्र 2.60 में दिखाये गये Cantilever के लिये S.F.D. व B.M.D. खींचिये। **(U.P. 2002)**



चित्र 2.60

10. एक कैन्टीलीवर धरन (Cantilever Beam) की लम्बाई 100 cm (1 m) है, इसके आबद्ध सिरे से 40 cm तथा 70 cm की दूरी पर क्रमश: 3 kN तथा 2 kN के बिन्दु भार क्रियाशील हैं। धरन (Beam) का अपना भार 20 N/cm है। धरन के लिये अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) तथा बंकन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) दर्शाइये तथा अधिकतम S.F. एवं B.M. को अंकित कीजिये। **(U.P. 2008, SOM)**

[उत्तर : $F_{max} = -7$ kN, $M_{max} = -3{\cdot}6$ kN-m]

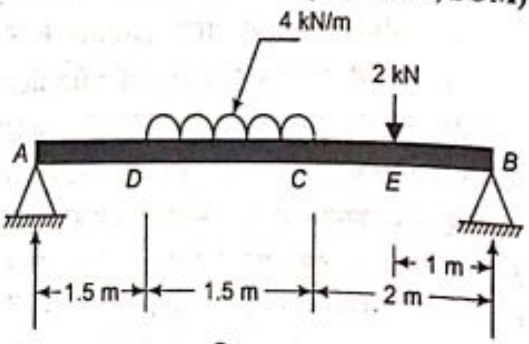
11. (i) एक सामान्य ढंग से आलम्बित धरन (a simply supported beam) जो अपने विस्तार (span) के मध्य (mid) में W बिन्दु भार (Point Load) धारण किये हुए है, के लिए अपरूपण बल तथा बंकन आघूर्ण आरेख (S.F.D. तथा B.M.D.) बनायें। धरन की लम्बाई L है। (**संकेत** : Ex-10 देखें) **(U.P. 2013, SOM)**

(ii) 'l' लम्बाई (span) की एक सामान्य रूप से अवलम्बित (simply supported beam) धरन AB जिसके सम्पूर्ण स्पेन पर समान रूप से वितरित भार प्रति यूनिट रन (uniformly distributed load "w" per unit run) है, ऐसी धरन के लिए शीयर फोर्स डायग्राम (SFD) तथा बेन्डिग मोमेन्ट डायग्राम (BMD) बनाऐं।

(**संकेत** : Ex-11 देखें) **(U.P. 2014, SOM)**

12. चित्र 2.61 में दर्शाये गई बीम के लिए कर्तन बल तथा नमन आघूर्ण आरेख (S.F.D. तथा B.M.D.) खींचिये। महत्तम नमन आघूर्ण की स्थिति एवं परिमाण भी ज्ञात कीजिये। **(U.K.2012, 13, W)**

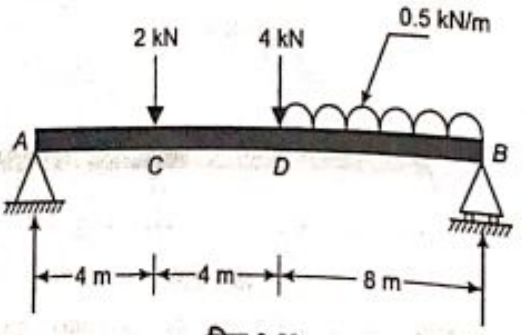
[उत्तर : 7·26 kN-m, B से 2·575 m की दूरी पर]



चित्र 2.61

13. चित्र 2.62 में दिये हुए धरन का नमन आघूर्ण आरेख एवं कर्तन बल आरेख (B.M.D. and S.F.D.) खींचिए। **(U.K. 2014, S; U.K. 2011-12, W)**

[Hint : $R_A = 4{\cdot}5$ kN, $R_B = 5{\cdot}5$ kN,
Max. S.F. = 5·5 kN, Max B.M. = 28 kN-m]



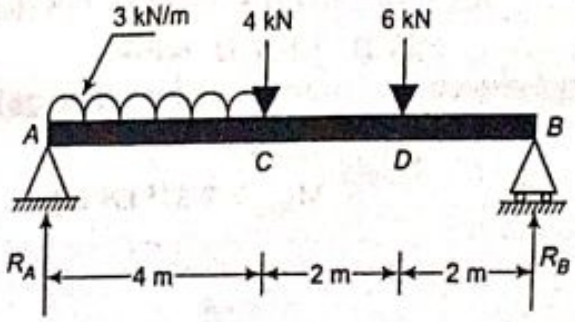
चित्र 2.62

Scanned with CamScanner

14. चित्र 2.63 में दर्शाये गये शुद्धालम्बित धरन (S.S. Beam) के लिये S.F.D. तथा B.M.D. खींचिए।

(U.K. 2010 (S))

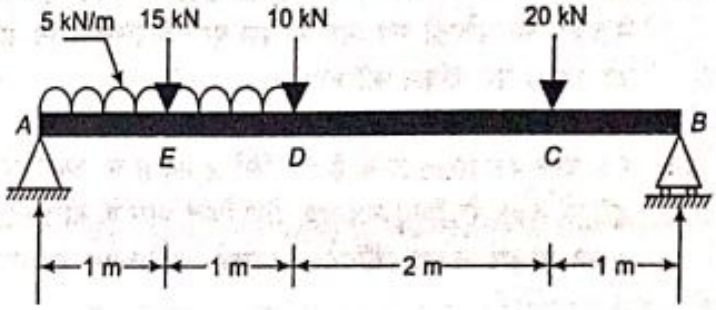
[उत्तर : Max S.F. = 125 kN, Max B.M. = 26 kN-m]



चित्र 2.63

15. चित्र 2.64 में दिखाये गये भारों के वास्ते नमन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) तथा अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) खींचिए। धरन में अधिकतम B.M. तथा S.F. के मान क्या हैं? बतायें।

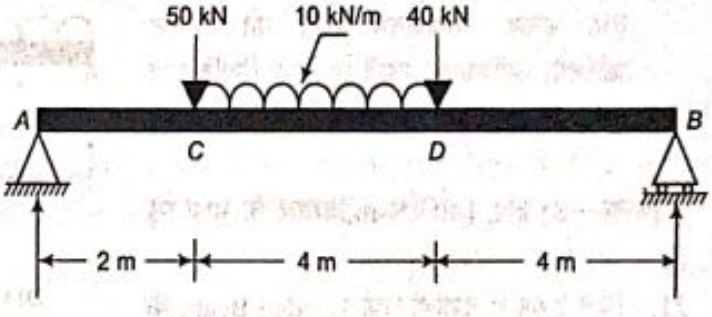
[उत्तर : 35 kN-m, 30 kN]



चित्र 2.64

16. चित्र 2.65 में एक 10 m विस्तृति (Span) वाले सरल आलम्बित धरन पर भाग लगा रहे हैं। इस धरन के लिए अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) तथा बंकन आघूर्ण आरेख (B.M.D.) बनाइये। और यदि कोई नमन परिवर्तन बिन्दु हो तो उसकी स्थिति भी ज्ञात कीजिए।

(U.K. 2013, B.P.; U.P. 2005, 09)

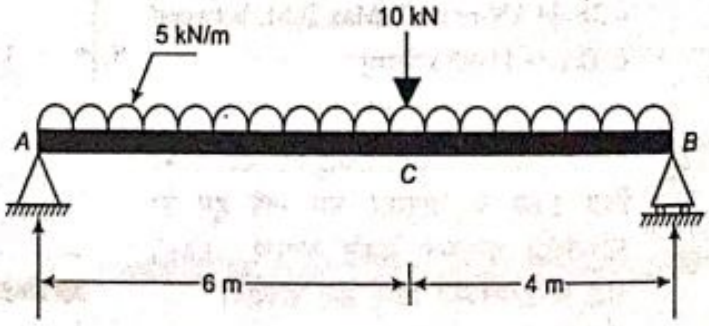


चित्र 2.65

[उत्तर : Max S.F. = 80 kN, BM_{max} = 205 kN-m , *B* से 5 m पर तथा नति परिवर्तन बिन्दु *N* नहीं है।]

17. (i) एक सरल आधारित धरन (S.S. Beam) पर चित्र 2.66 (i) के अनुसार भार लगे हैं। S.F.D. तथा B.M.D. खींचें।

[उत्तर : F_{max} = 31 kN,
M_{max} = 84·1 kN-m,
B से 4·2 m की दूरी पर]



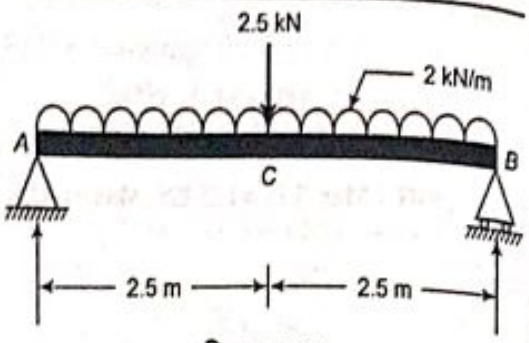
चित्र 2.66 (I)

Scanned with CamScanner

(ii) चित्र 2.66 (ii) में दर्शायी गई धरन (beam) के लिए S.F.D. व B.M.D. खींचिये।

[U.K. 2014 (B.P.), S]

[उत्तर : Max S.F. = 6·25 kN, M_{Max} = 9·375 kN-m]



चित्र 2.66 (II)

18. एक शुद्धालम्ब धरन का विस्तार (span) 5 m है। इसकी पूर्ण लम्बाई पर 3 kN/m का एक समान वितरित भार तथा मध्य में 5 kN का संकेन्द्री भार लगा है। इस धरन के लिये कर्तन-बल तथा नमन घूर्ण आरेख खींचिये। उनके अधिकतम मानों को आरेख पर अंकित कीजिये। [उत्तर—±10 kN, +15·625 kN-m]

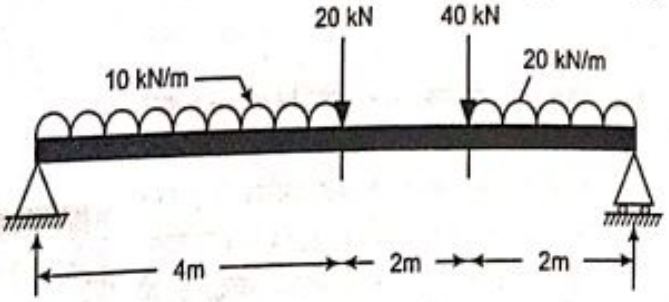
(U.P. 2009)

19. एक धरन *AB* 10 m लम्बी है तथा सिरे *A* एवं *B* पर आलम्बित है। इस पर *A* से 3 m दूरी पर 5 kN तथा *A* से 7 m की दूरी पर 5 kN के बिन्दु भार तथा दोनों बिन्दु भारों के बीच 1 kN/m का समवितरित भार लग रहे हैं। अपरूपण बल तथा बंकन आघूर्ण आरेख खींचिये। [उत्तर—अधिकतम अपरूपण बल ± 7 kN तथा अधिकतम नमन आघूर्ण 23 kN-m]

(U.P. 2004)

20. चित्र संख्या 2.67 में दिखाई गई भारित धरन के लिये कर्तन बल तथा नमन घूर्ण आरेख खींचिये तथा उनके अधिकतम मानों को अंकित कीजिये। अधिकतम नमन घूर्ण की स्थिति ज्ञात कीजिये। **(U.P.)**

[उत्तर—85 kN, 140 kN-m, विस्तार के मध्य में]

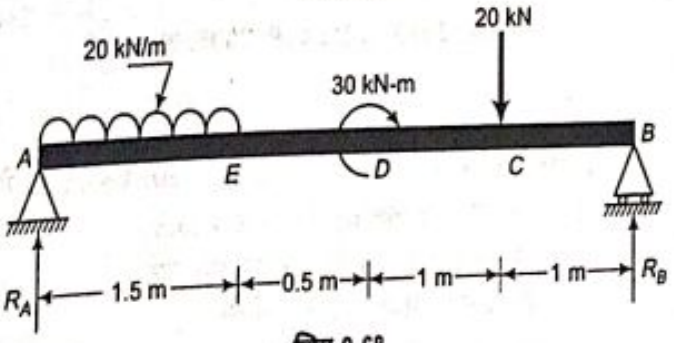


चित्र 2.67

21. चित्र 2.68 में दर्शायी गयी Loaded Beam के लिये S.F.D. तथा B.M.D. खींचिये।

Hint : उदाहरण 20 को देखें।

[उत्तर : Max S.F. = 28·12 kN, Max B.M. = 36·24 kN-m at *D*, Max B.M. between U.D.L. = 11·95 kN-m]

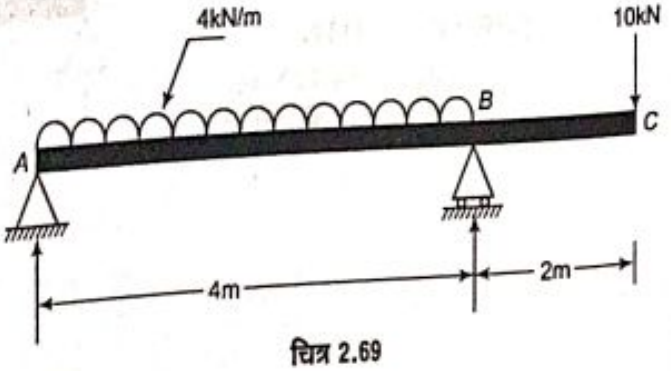


चित्र 2.68

22. एक प्रलम्बी धरन (overhanging beam) पर चित्र 2.69 के अनुसार भार लगे हुए हैं। अधिकतम धनात्मक बंकन आघूर्ण (B.M.) तथा कान्ट्राफ्लैक्सर बिन्दु ज्ञात कीजिये।

(U.P. 2011, 13; U.K. 2012-13 S)

[उत्तर : अधिकतम B.M. = 1·125 kN-m, (टेक *B* से 3·25 m की दूरी पर) तथा *N* की सिरे *C* से दूरी 4·5 m है।]



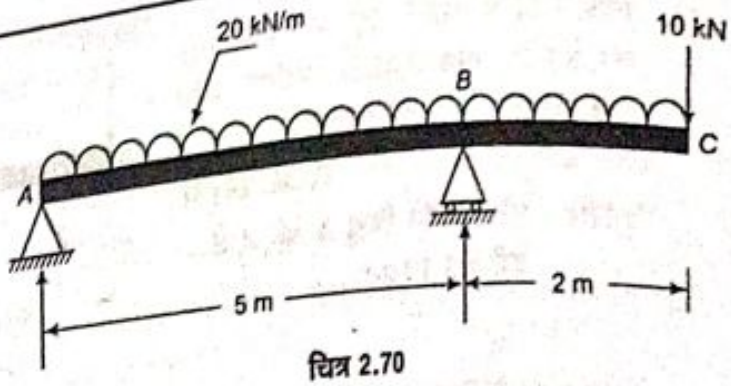
चित्र 2.69

Scanned with CamScanner

23. एक 6 मीटर लम्बी धरन पर भार चित्र 2.70 के अनुसार दर्शाया गया है। कर्तन बल तथा नमन घूर्ण आरेखों (S.F.D. and B.M.D.) को चित्रित कीजिए। अधिकतम नमन आघूर्ण का स्थान एवं परिमाण (Position and magnitude of Max B.M.) ज्ञात करें। इसके साथ-साथ नति परिवर्तन बिन्दु भी ज्ञात करें।

(U.P. 2002; U.K. 2012-13, W)

[उत्तर : Max. $SF = 62$ kN, Max. $BM = -60$ kN-m and $+36{\cdot}1$ kN-m नति परिवर्तन बिन्दु N की C से दूरी $CN = 3{\cdot}2$ m]



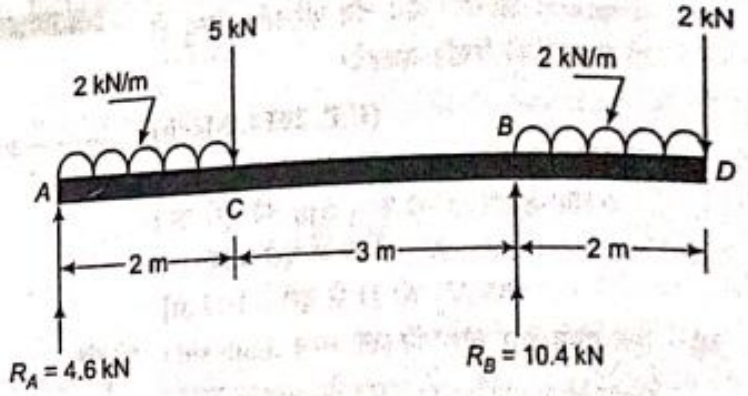
चित्र 2.70

24. चित्र 2.71 में दिखाई धरन के लिये कर्तन बल और नमन घूर्ण आरेख खींचिये।

(U.K. 2013 (S))

[उत्तर : $SF_{max.} = -6$ kN

$BM_{max} = -8$ kN-m तथा $+5{\cdot}2$ kN-m]



चित्र 2.71

25. एक प्रलंबी धरन (overhanging beam) की लम्बाई 5 m है तथा यह अपने सिरों से 1 m की दूरी पर सरल आधारित है। धरन पर 5 kN/m का एकसमान बंटित भार (U.D.L.) लगा है। इस धरन के मध्य-बिन्दु पर बंकन आघूर्ण तथा अपरूपण बल (B.M. and S.F.) ज्ञात कीजिये। इसके लिए SFD तथा BMD खींचिये। **(U.P. 2012)**

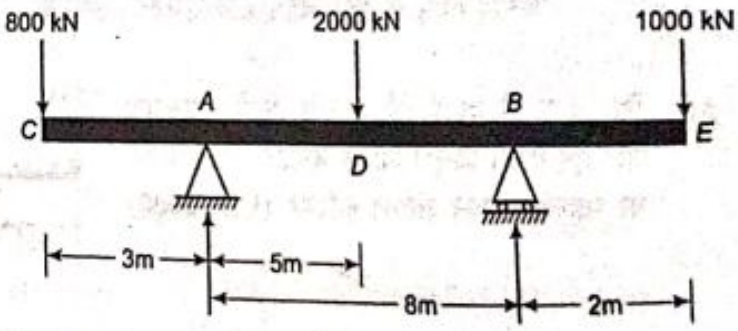
[उत्तर : 3·125 kN-m, 0]

26. एक प्रलम्बित धरन (overhanging beam) जो चित्र 2.72 के अनुसार भारित है, का S.F. तथा B.M. आरेख खींचो।

(U.P. 2010)

[उत्तर $F_{Max} = 1200$ kN,

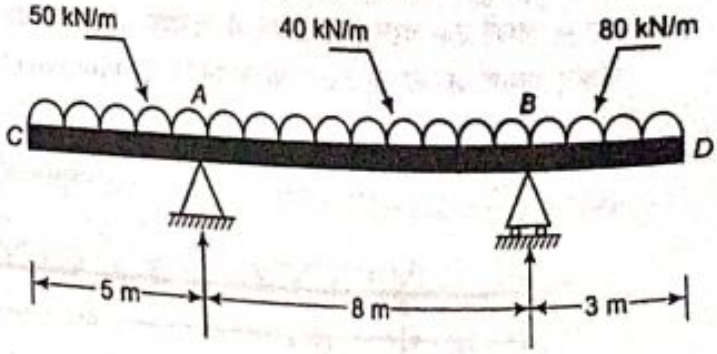
$M_{Max} = -2400$ kN-m नति पविर्तन बिन्दु N की E से दूरी = 3·66 m]



चित्र 2.72

27. चित्र 2.73 में दर्शायी गयी धरन के लिए बंकन आघूर्ण (B.M.D.) एवं अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) बनाइये। **(U.P. 2003, 2007)**

[उत्तर : Max. S.F. = +250 kN Max B.M. = – 625 kN-m]

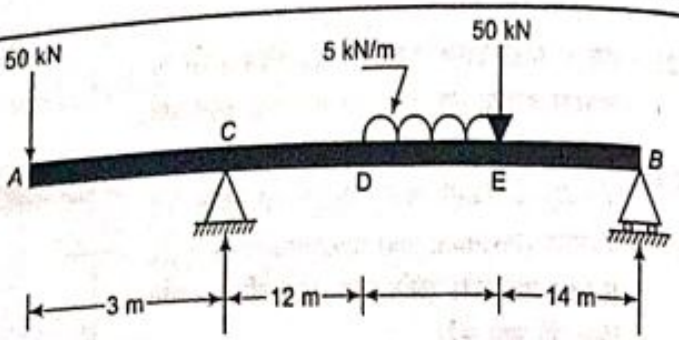


चित्र 2.73

Scanned with CamScanner

28. चित्र 2.74 में दर्शायी गयी धरन (Beam) का S.F.D. तथा B.M.D. खींचिये और नति परिवर्तन बिन्दु को दर्शाइये। **(U.K. 2013)**

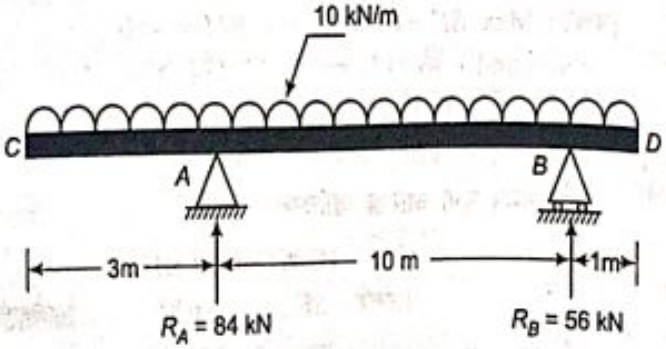
[उत्तर : नति पवितन बिन्दु N की A से दूरी = 3·19 m]



चित्र 2.74

29. चित्र 2.75 में दिखाई गई धरन (Beam) के लिए अपरूपण बल तथा बंकन आघूर्ण आरेख (Shear force and Bending moment diagram) खींचिए। यदि नति परिवर्तन बिन्दु हो तो उसकी भी स्थिति बताइये। **(U.P. 2014, Mech)**

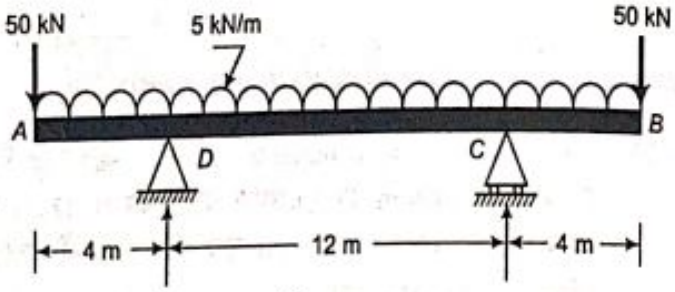
[उत्तर : S.F. (max) = 54 kN, B.M. (max) = 100·8 kN-m (B से 4·6 m की दूरी पर) N_1 की D से दूरी = 10·1 m तथा N_2 की D से दूरी = 1·11 m]



चित्र 2.75

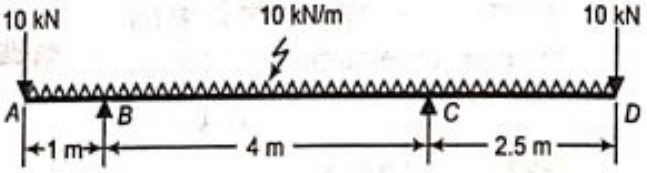
30. एक दोनों ओर बाहर निकली धरन (both side over hanging beam) चित्र के अनुसार भारित (Loaded) है। धरन के लिए S.F.D. तथा B.M.D. खींचिये। **(U.K. 2013, B.P.)**

[उत्तर : F_{Max} = 70 kN, M_{Max} = −240 kN-m, नति पवितन बिन्दु N नहीं है।]



चित्र 2.76

31. चित्र 2.77 में दर्शाई गई धरन के लिये अपरूपण बल एवं बंकन आघूर्ण आरेख बनाइये तथा आरेखों पर महत्वपूर्ण मान अंकित करिये। **(U.P. 2000)**

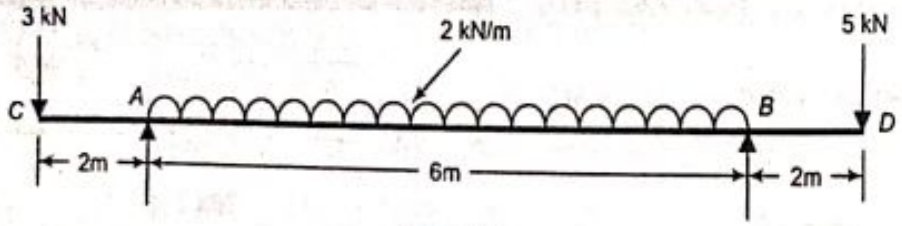


चित्र 2.77

[उत्तर—अधिकतम अपरूपण बल = 35 kN, अधिकतम बंकन आघूर्ण = 56·25 kN-m नति परिवर्तन नहीं है।]

32. 10 m लम्बी एक धरन चित्र 2.78 में दिखाये अनुसार भार वहन करती है। प्रलम्बी धरन के लिए अपरूपण बल तथा बंकन आघूर्ण आरेख खींचे तथा प्रतिनमन बिन्दु (Point of Contraflexure), यदि कोई हो, तो ज्ञात करें। **(U.P. 2001)**

[उत्तर—D से 4·275 m तथा 6·394 m पर]



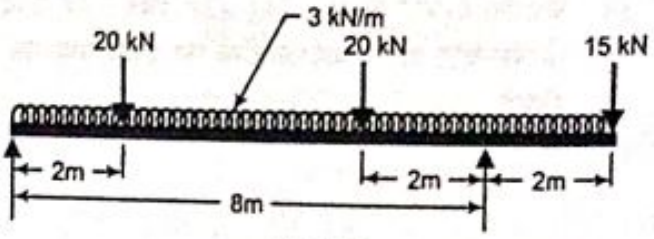
चित्र 2.78

Scanned with CamScanner

33. चित्र 2.79 में दर्शाई धरन के कर्तन बल तथा नमन आघूर्ण आरेख खींचिये तथा उल्लेख कीजिये—(i) अधिकतम बल आघूर्ण की स्थिति तथा मान, (ii) नति परिवर्तन बिन्दु (point of contraflexure) की स्थिति।

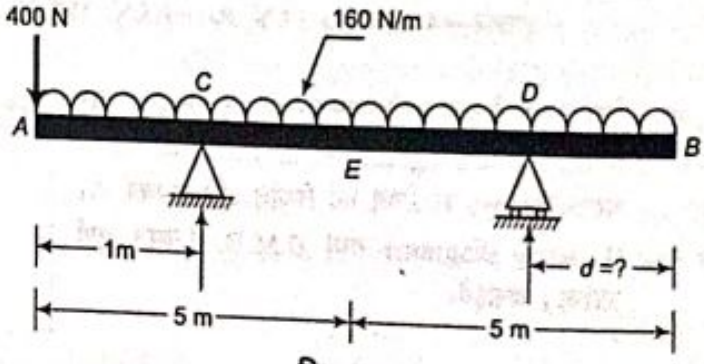
[संकेत : उदाहरण 30 देखें।]

[उत्तर—(i) दायें सिरे से 7·5 m पर, मान 49·375 kN-m
(ii) दायें सिरे से 3·033 पर]



चित्र 2.79

34. चित्र 2.80 में दिखायी गयी 10 m लम्बी भारित धरन (Loaded Beam) के लिये दायें सिरे B से टेक D की दूरी ज्ञात करें जबकि नति परिवर्तन बिन्दु (Point of Contraflexure) की स्थिति Beam के मध्य-बिन्दु (Mid-Point) पर है। इस धरन (Beam) के लिये अपरूपण बल आरेख (S.F.D.) तथा नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) भी बनाइये। यदि अन्य कोई नति परिवर्तन बिन्दु भी हो तो उसकी स्थिति भी बतायें।

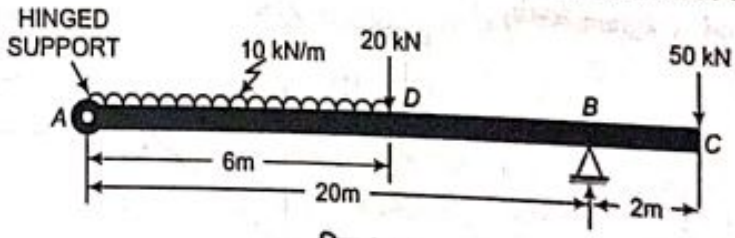


चित्र 2.80

[उत्तर : $BD = 10$ m, A से N की दूरी $= 2{\cdot}5$ m, $R_C = 1000$ N, $R_D = 1000$ N]

35. चित्र 2.81 में दिखाई गयी एक भारित धरन के लिये कर्तन बल तथा नमन घूर्ण आरेख खींचिये तथा उनके अधिकतम मानों को अंकित कीजिये। अधिकतम नमन घूर्णों तथा नति परिवर्तन बिन्दु की स्थितियाँ ज्ञात कीजिये।

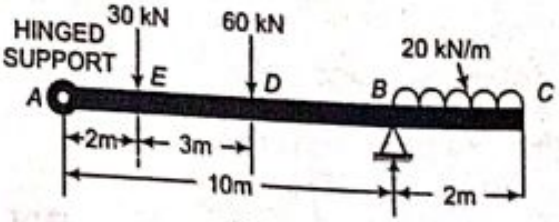
[उत्तर— – 50 kN, 100 kN-m हिन्ज सिरे से 10 m पर तथा नति परिवर्तन बिन्दु हिन्ज से 7·5 m पर]



चित्र 2.81

36. चित्र 2.82 में दिखायी गयी एक भारित धरन के लिये कर्तन बल तथा नमन घूर्ण आरेखों को खींचिये, कर्तन बल तथा नमन घूर्ण के अधिकतम मानों को इंगित कीजिये तथा नति परिवर्तन बिन्दु (point of contraflexure) की स्थिति ज्ञात कीजिये।

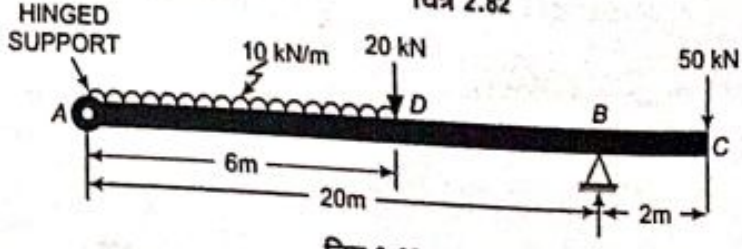
[उत्तर—— 50 kN, 160 kN-m दायें सिरे से 3 m पर]



चित्र 2.82

37. चित्र 2.83 में दर्शाये धरन के लिये कर्तन बल तथा नमन घूर्ण आरेख बनाइये। अधिकतम नमन घूर्ण का परिमाण तथा अवस्थिति ज्ञात कीजिये। नति परिवर्तन बिन्दु की स्थिति भी ज्ञात करें।

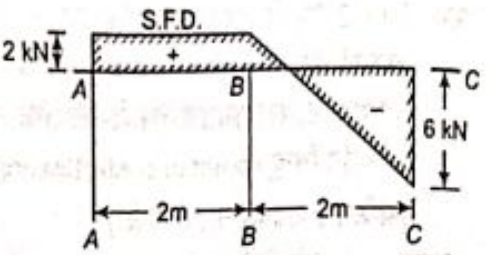
[उत्तर—16·5 kN-m, 8·26 m]



चित्र 2.83

Scanned with CamScanner

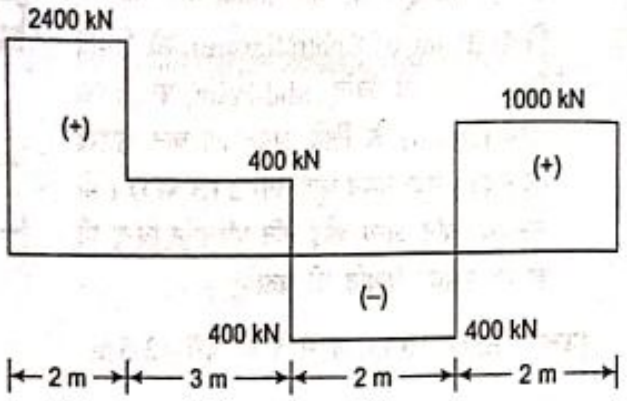
38. यदि किसी धरन का (S.F.D.) ABC चित्र 2.84 में दिये अनुसार हो तो उस धरन की लम्बाई आलम्बो का प्रकार तथा भार वितरण कैसा होगा?



चित्र 2.84

[उत्तर—4 m, $R_A = 2$ kN, $R_C = 6$ kN, दोनों सिरों पर सरल टेकों A तथा C पर ऊपर की ओर प्रतिक्रियायें तथा C से B तक 4 kN/m का समवितरित भार।]

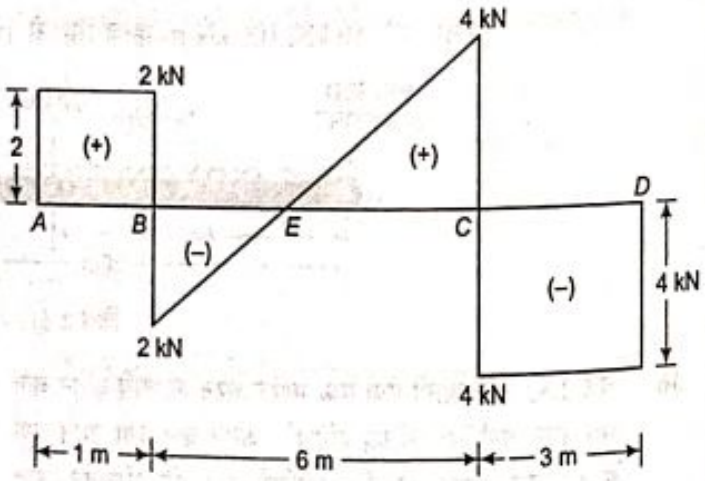
39. चित्र 2.85 में एक भारित धरन (Loaded Beam) का Shear Force Diagram (S.F.D.) दिखाया गया है। धरन (Beam) पर टेकों की स्थिति और इसका भार (Loading diagram) तथा B.M.D. (नमन घूर्ण आरेख) बनाइये।



चित्र 2.85

[उत्तर : Max B.M. = 6000 kN-m]

40. चित्र 2.86 में दिखाये गये S.F.D. से Beam पर Load तथा B.M. diagram बनायें।



चित्र 2.86

[उत्तर : B तथा C पर टेक हैं। $M_C = -10$, $M_E = -4$, $M_B = -2$ kN-m]

❑

Scanned with CamScanner

3 नमन प्रतिबल (BENDING STRESSES)

§ 3.1 परिचय (Introduction)

पिछले अध्याय में हमें ज्ञात हुआ कि धरन (Beam) पर अनुप्रस्थ भार (transverse load) के कारण धरन की प्रत्येक काट पर कर्तन बल (shearing force) तथा नमन-आघूर्ण (Bending Moment) के मान बदलते हैं। साथ-साथ यह भी ज्ञात हुआ कि धरन पर भार लगने से धरन का अवतलन (Sagging) और उत्तलन (Hogging) कैसे होता है। धरन पर भार या बल के कारण उत्पन्न प्रतिक्रिया बल और धरन पर उसके प्रभाव को जाना अर्थात् धरन का नमन होने के कारण उसमें कर्तन व नमन प्रतिबल उत्पन्न होते हैं। धरन के झुकाव (bending) से सम्बन्धित ज्ञान का उपयोग धरनों के पदार्थों का सामर्थ्य (Strength of material of the beam) ज्ञात करने में किया जाता है। इसी का आधार लेकर धरनों (beams) के काट की माप व लम्बाई आदि सभी पैरामीटर्स निर्धारित किये जाते हैं। धरन की नमन (bending of beam) में सामर्थ्य का उपयोग छतों (roofs), फर्शों (Floors), ट्रसों (Trusses), शाफ्टों (Shafts), धुरी (Axles), लीवरों, स्प्रिंगों (Springs) तथा मशीन के आधारों में मुख्य रूप से होता है।

§ 3.2 शुद्ध या सरल नमन (Pure or Simple Bending)

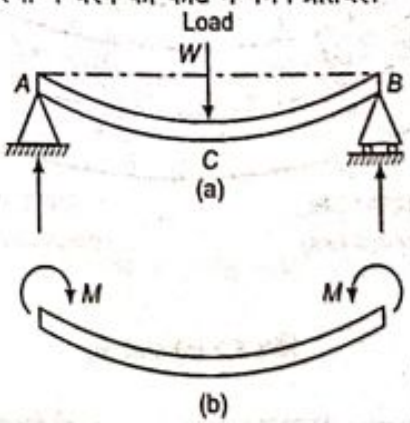
परिभाषा—"यदि किसी धरन का अथवा उसके कुछ भाग का नमन इस प्रकार हो कि उसकी काट पर केवल नमन प्रतिबल (Bending Stress) ही उत्पन्न हों, कर्तन प्रतिबल (Shearing Stress) उत्पन्न न हों, तो इस प्रकार के नमन को शुद्ध या सरल नमन (Pure or Simple Bending) कहते हैं।" अथवा धरन के जिस भाग में केवल नमन घूर्ण (BM) स्थिर हो और कर्तन बल शून्य (SF = 0) हो तो इसे शुद्ध नमन की स्थिति कहते हैं।

यहाँ यह ध्यान देने योग्य बात है कि शुद्ध नमन की दशा में धरन की काट पर कर्तन बल (S.F.) नहीं होने चाहिएँ तब ही कर्तन प्रतिबल (Shearing Stress) भी उत्पन्न नहीं हो सकेंगे।

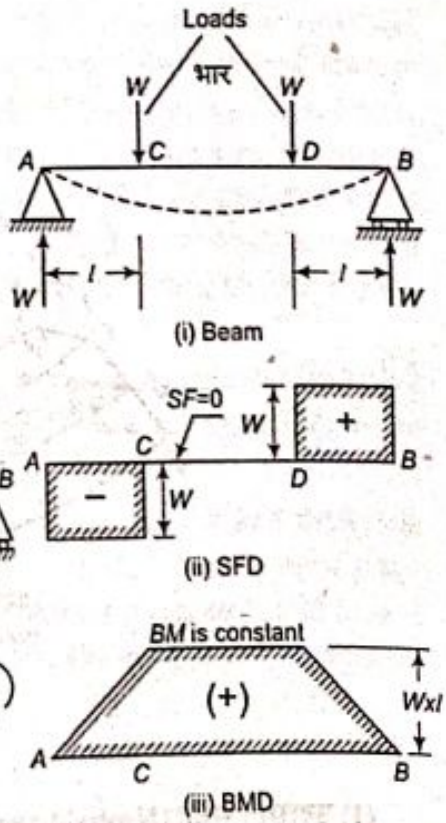
Definition : "When a beam is loaded in such a manner that it is subjected to constant bending moment only and there is no shear force. This condition is called pure bending or simple bending."

चित्र 3.1 (a) में दिखायी गयी धरन का नमन, एक बिन्दु भार (Point Load) W लगाकर किया गया है। इस अवस्था में धरन की काट में नमन प्रतिबल के साथ कर्तन प्रतिबल भी होंगे, अत: यह शुद्ध नमन नहीं है।

चित्र 3.1 (b) में धरन का नमन, सिरों पर नमन घूर्ण (M) लगाकर किया गया है। अत: इस अवस्था में धरन की किसी भी काट में कोई कर्तन बल (δF) नहीं होगा और न ही कोई कर्तन प्रतिबल उत्पन्न होंगे, अत: यह शुद्ध नमन का उदाहरण है।



चित्र 3.1



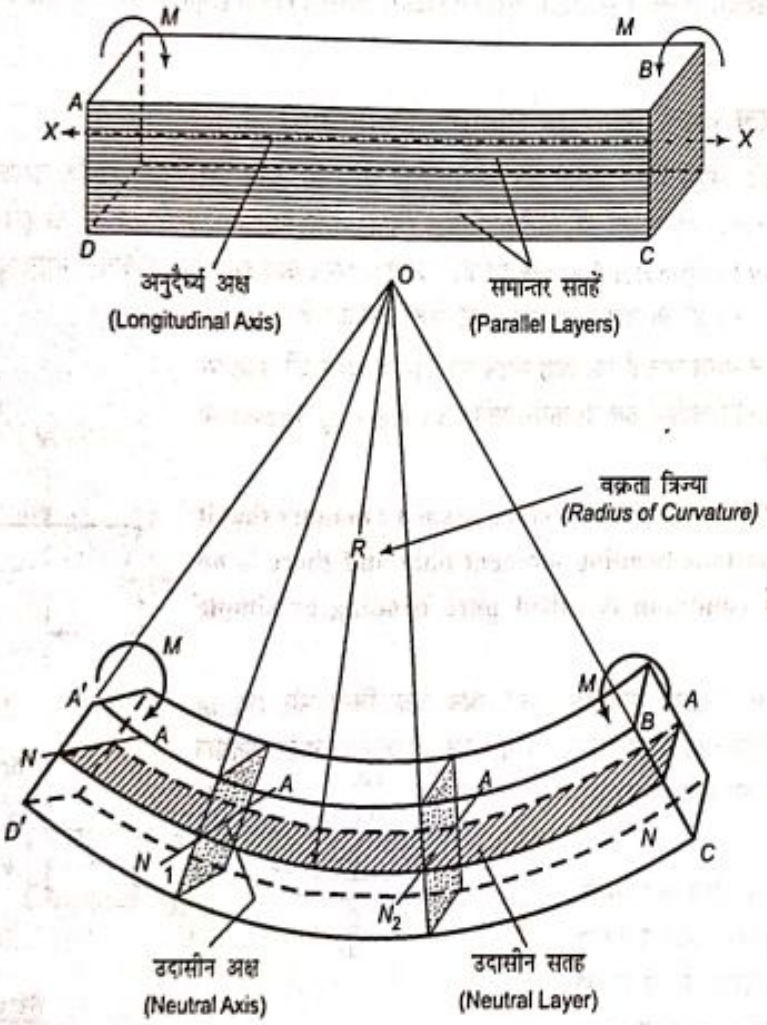
चित्र 3.1 (c)

Scanned with CamScanner

चित्र 3.1 (c) में धरन पर दोनों टेकों से बराबर दूरी पर बराबर भार (W) लगे हैं। इसके लिये पिछले अध्याय के आधार पर खींचे गये कर्तन बल आरेख (S.F.D.) तथा बंकन घूर्ण आरेख (B.M.D.) से पता चलता है कि धरन के CD भाग में कर्तन बल (S.F.) शून्य (Zero) है और इस भाग में नमन (बंकन) आघूर्ण (Bending Moment) ($W \times l$) स्थिर है, अत: CD भाग का नमन, शुद्ध नमन (Pure Bending) का उदाहरण है।

3.3 नमन प्रक्रिया तथा इससे सम्बन्धित महत्वपूर्ण पद (Process of Bending and Important terms related to it)

चित्र 3.2 में प्रदर्शित एक आयताकार काट वाली धरन के सिरों पर नमन आघूर्ण M लगाकर इसका शुद्ध नमन किया जाता है और धरन एक वृत्ताकार चाप (Circular arc) में मुड़ जाती है। माना यह धरन कई समान्तर, पतली तथा समतल सतहों (Layers) की बनी है, जो लम्बाई की अक्ष के समान्तर है। माना धरन का पदार्थ सर्वांगसम (Homogeneous) है। तनाव तथा संपीडन (Tension side and compression) दोनों में ही धरन के पदार्थ का यंग मापांक (या प्रत्यास्थता गुणांक) अर्थात् E का मान समान रहता है।



चित्र 3.2 (a) and (b)

(1) **उदासीन सतह** (Neutral Layer)—धरन का नमन (layer) की स्थिति में धरन के ऊपर वाली (अर्थात् चाप के अन्दर वाली) सतहों की लम्बाई कम हो जाती है क्योंकि सिकुड़ती है तथा नीचे वाली (अर्थात् चाप के बाहर वाली) सतहों

Scanned with CamScanner

की लम्बाई बढ़ जाती है क्योंकि ये सतह फैलती हैं। अत: धरन के बीच में कहीं एक ऐसी सतह (या परत layer) अवश्य होती है, जिसकी लम्बाई में कोई परिवर्तन नहीं होता। इस सतह को "उदासीन सतह" (Neutral layer) कहते हैं। इस सतह (या परत) पर कोई प्रतिबल नहीं होता। इस सतह को चित्र में दिखाया गया है। संक्षेप में हम कह सकते हैं कि—

"धरन की नमन की स्थिति में दोनों सिरों के गुरुत्व केन्द्रों को मिलाने वाली लम्बाई के समान्तर काल्पनिक पट्टी (Imaginary Strip) को उदासीन सतह (Neutral layer) कहते हैं।"

Definition. "Imaginary strip in the length of a beam, joining the centroids (or C.G.) of both ends of the beam is known as "Neutral Layer." In bending position of beam, neutral layer divides the layers in tension and compression. Neutral layer has no stress."

(2) उदासीन अक्ष (Neutral Axis)—धरन की कोई भी अनुप्रस्थ काट उदासीन सतह को जिस रेखा पर मिलती है, उस कटान रेखा को काट की उदासीन अक्ष (Neutral Axis) कहते हैं। चित्र 3.2 में इसे *N-A* द्वारा दिखाया गया है।

"In any cross-section of the beam, the horizontal lime passing through centroid of section of beam (like $X - X$ axis) is known as neutral axis."

(3) वक्रता त्रिज्या (Radius of Curvature)—नमन की स्थिति (Bending Position) में कोई धरन जिस चाप (Arc) में मुड़ जाती है अथवा Bend हो जाती है, उस चाप (Arc) की त्रिज्या को ही वक्रता त्रिज्या (Radius of Curvature) कहते हैं। इसे चित्र में (R) द्वारा दर्शाया गया है।

अत: "धरन के नमन की स्थिति में दोनों सिरों को आगे बढ़ाने पर रेखायें आपस में जिस बिन्दु O पर मिलती हैं, उसे वक्रता केन्द्र (Centre of Curvature) कहते हैं। अब इस वक्रता केन्द्र O से उदासीन सतह (Neutral Layer) के बीच की दूरी को वक्रता त्रिज्या (radius of curvature) कहते हैं तथा R से दर्शाते हैं। यह धरन के चाप की त्रिज्या होती है।"

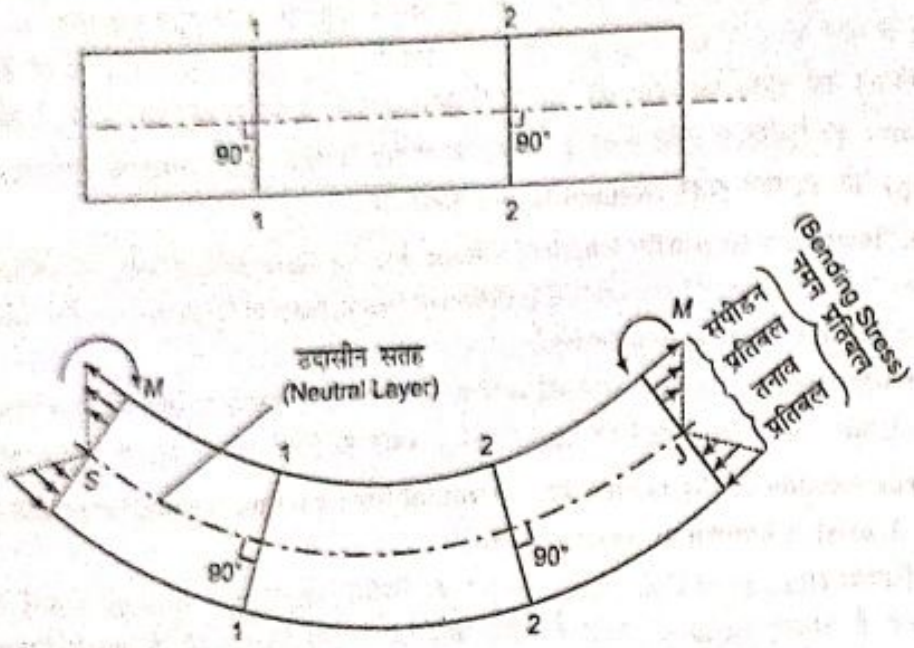
Definition. "In bending position of a beam, the neutral layer being bent to form an arc of a circle of radius 'R'. This radius "R" of a beam in bent position is known as radius of curvate."

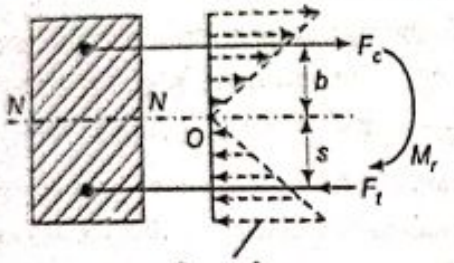
(4) धरन में नमन प्रतिबल (सम्पीडन तथा तनाव प्रतिबल) (Bending Stresses in the beam (or tensile and compressive stresses))—(चित्र 3.3 देखें) हम जानते हैं कि नमन की स्थिति में धरन की विभिन्न सतहों की लम्बाई में परिवर्तन होता है और लम्बाई में परिवर्तन के कारण ही धरन के पदार्थ में नमन प्रतिबल (Bending Stress) उत्पन्न होते हैं। अत: धरन के नमन की दशा में धरन में उत्पन्न हुए प्रतिबल को नमन प्रतिबल (bending stress) कहते हैं। नीचे वाली सतहों में तनाव नमन प्रतिबल उपजते हैं क्योंकि नीचे वाली इन सतहों की लम्बाई में वृद्धि होती है और ऊपर वाली परतों में (या सतहों में) सम्पीडन नमन प्रतिबल उपजते हैं क्योंकि सतहों के सिकुड़ने अथवा फैलने के कारण सतहों की लम्बाई में परिवर्तन होता है जिसके कारण उनमें नमन प्रतिबल उपजते हैं और ये नमन प्रतिबल सतहों की लम्बाई की दिशा में उत्पन्न होते हैं। अत: नमन प्रतिबलों की दिशा धरन की अनुप्रस्थ काट पर लम्बरूप होती है।

(5) प्रतिरोधी घूर्ण (Moment of Resistance)—चित्र 3.3 में धरन की अनुप्रस्थ काट पर नमन प्रतिबल दिखाये गये हैं जो सतहों की लम्बाई की दिशा में होते हैं। इस चित्र में सम्पीडन और तनाव प्रतिबलों की तीव्रता भी दिखाई गई है। ये नमन प्रतिबल, अनुप्रस्थ काट पर लम्ब दिशा में होते हैं।

माना सम्पीडन प्रतिबलों का सम्मिलित प्रभाव बल F_C तथा तनाव प्रतिबलों का F_t द्वारा दिशा तथा स्थिति में प्रदर्शित होता है और ये उदासीन अक्ष के बिन्दु O से क्रमश: b तथा a दूरियों पर हैं। अब F_C तथा F_t का अक्ष $N - N$ के सापेक्ष आघूर्ण $M_r = (F_C b + F_t a)$ होता है। यही आघूर्ण बाहर से लगाये गये नमन आघूर्ण M का विरोध करता है। सन्तुलन की स्थिति में यह आन्तरिक आघूर्ण M_r, बाह्य आघूर्ण M को साध लेता है अर्थात् बराबर एवं विपरीत होता है। इस आन्तरिक आघूर्ण M_r को ही प्रतिरोधी आघूर्ण कहा जाता है।

Scanned with CamScanner





नमन प्रतिबल तीव्रता
(Bending stress intensity)

चित्र 3.3

3.4 नमन प्रतिबलों की स्थिति (Position of Bending Stresses)

हम जान चुके हैं कि धरन में नमन घूर्ण (Bending Moment) के साथ-साथ उसकी काट में नमन प्रतिबल (Bending Stress) भी उत्पन्न होते हैं। अत: नमन आघूर्ण (M) तथा नमन प्रतिबल (f या σ) में सम्बन्ध स्थापित करना आवश्यक है, जिसको नमन समीकरण (Bending equation or flexural formula) कहते हैं।

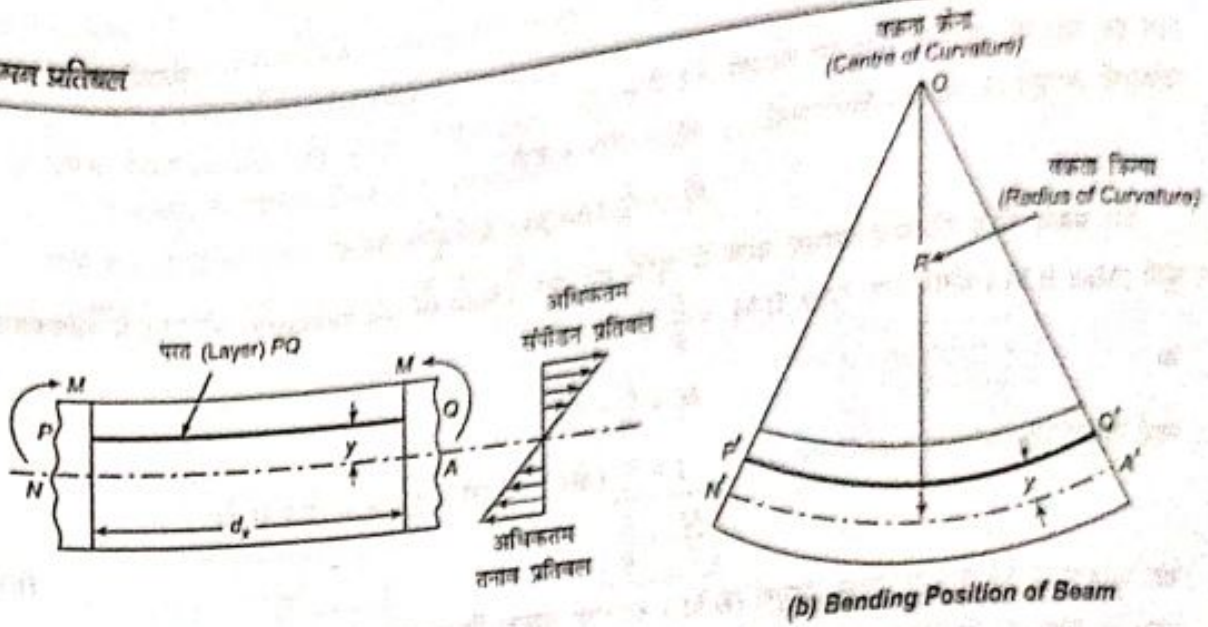
नमन समीकरण स्थापित करना

चित्र 3.4 (a) में धरन (Beam) का एक छोटा भाग (Small length of a beam) प्रदर्शित किया गया है। इसमें $N - A$, उदासीन सतह (परत-Layer) है तथा इससे y-दूरी पर कोई परत (any layer) PQ है।

इस धरन की छोटी लम्बाई के भाग पर शुद्ध नमन घूर्ण (Pure Bending Moment) लगाने पर धरन (beam) नीचे की ओर चित्र 3.4 (b) के अनुसार झुक जाती है अथवा नमन की स्थिति (bending position) में आ जाती है। इस स्थिति में उदासीन सतह $N'A'$ तथा इससे y दूरी पर स्थित परत $P'Q'$ अवस्था में आ जाती है। इस स्थिति में धरन के दोनों सिरों को आगे बढ़ाने पर आपस में बिन्दु O पर मिलते हैं, जो वक्रता केन्द्र कहलाता है। इस बिन्दु O से उदासीन सतह ($N'A'$) तक की दूरी वक्रता त्रिज्या (Radius of Curvature) R कहलाती है।

अब चित्र 3.4 (b) में नमन के कारण परतों की लम्बाई में परिवर्तन नगण्य (Negligible) है क्योंकि यह Beam का बहुत छोटा भाग (Very small part of Beam) है।

Scanned with CamScanner



(a) Small length of beam

(b) Bending Position of Beam

चित्र 3.4 : Bending Stress

$\therefore$ $PQ = P'Q' = NA = N'A'$ होगा।

अब $\Delta OP'Q'$ तथा $\Delta ON'A'$ समरूप (Similar Δs) हैं।

$\therefore$ ज्यामिति द्वारा (By Geometry), $\frac{P'Q'}{N'A'} = \frac{R-y}{R}$ (भुजाओं व ऊँचाई में अनुपात समान रखा)

या $$1 - \frac{P'Q'}{N'A'} = 1 - \frac{R-y}{R}$$

या $$\frac{N'A' - P'Q'}{N'A'} = \frac{R-R+y}{R} = \frac{y}{R}$$

अब $N'A'$ के स्थान पर PQ रखने पर

$$\frac{PQ - P'Q'}{PQ} = \frac{y}{R}$$

परन्तु परत PQ में विकृति $(e) = \frac{\text{लम्बाई में परिवर्तन } (\Delta l)}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई } (l)} = \frac{PQ - P'Q'}{PQ} \Rightarrow \frac{y}{R}$

$\therefore$ $$\boxed{e = \frac{y}{R}}$$

माना परत PQ में नमन प्रतिबल (bending stress) f उत्पन्न होते हैं, अत: प्रतिबल $(f) = e.E$ (By Hooke's Law)

या $$f = \frac{y}{R}E$$

या $$\boxed{\frac{f}{y} = \frac{E}{R}} \quad \text{...(i)}$$

यह सम्बन्ध समीकरण (i), नमन प्रतिबल (bending stress) तथा धरन (beam) की वक्रता त्रिज्या (R) में सम्बन्ध कहलाता है।

अब माना परत PQ का क्षेत्रफल δa या Δa है।

परत PQ में बल (Force in layer PQ) = Stress × Area

$\therefore$ $$F = f \times \Delta a$$

$$= \frac{y}{R}E.\Delta a \Rightarrow \frac{E}{R} x\, \Delta a.\, y$$

Scanned with CamScanner

अब इस बल का उदासीन सतह पर आघूर्ण लेने से—

प्रतिरोधी आघूर्ण (Resisting Moment), M_r = बल × दूरी

$$M_r = \frac{E}{R}(\Delta a.y) \times y = \frac{E}{R} \times \Delta a.y^2$$

∴ इस प्रकार धरन की सभी सम्भव परतों में घूर्णों का योग (Sum of the moments) ही धरन में अधिकतम नमन घूर्ण (Max B.M.) होगा। अत: Max B.M. $= \frac{E}{R}.\Sigma \Delta a.y^2$

या $$M = \frac{E}{R} \times I$$

जहाँ जड़त्वघूर्ण (Moment of Inertia), $I = \Sigma$ (क्षे०) × दूरी^{2} $= \Sigma \Delta a.y^2$ सूत्र से है।

∴ $$\boxed{\frac{M}{I} = \frac{E}{R}} \quad \text{...(ii)}$$

यह सम्बन्ध समीकरण (ii), नमन आघूर्ण (B.M.) M तथा वक्रता त्रिज्या (R) में सम्बन्ध कहलाता है।

अत: (i) तथा (ii) से लिखा जा सकता है कि—

$$\boxed{\frac{M}{I} = \frac{f}{y} = \frac{E}{R}}$$ यही नमन समीकरण (Bending equation) कहलाती है

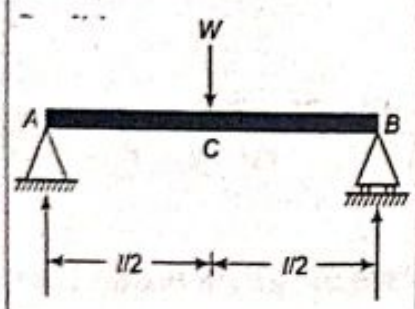
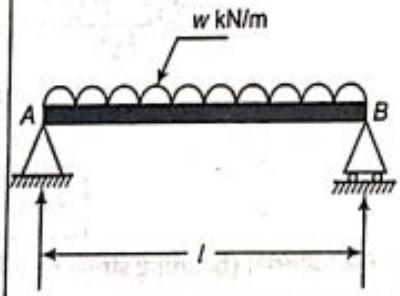
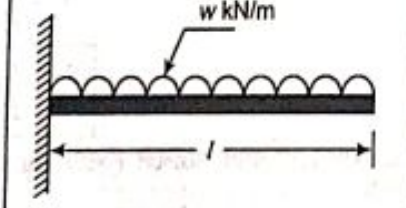
अथवा यदि नमन प्रतिबल σ हो तो, $$\boxed{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} = \frac{E}{R}}$$ इसे Flexural Formula के नाम से भी जाना जाता है।

सूत्र का विस्तार (Details)—

यहाँ $M \Rightarrow$ अधिकतम नमन घूर्ण (max B.M.) या प्रतिरोधी घूर्ण (moment of resistance) कहलाता है।

इसका मात्रक (N-mm) या N-m प्रयोग करते हैं।

तालिका

1.		नमन आघूर्ण (B.M.) सूत्र $M = \frac{Wl}{4}$	2.		Max B.M. सूत्र $M = \frac{wl^2}{8} = \frac{Wl}{8}$ यहाँ $W = w \times l$
3.		सूत्र $M = W \times l$	4.		सूत्र $M = (w \times l) \times \frac{l}{2}$ यदि $W = w \times l$ तब $M = W \times \frac{l}{2}$

उपरोक्त चार स्थितियों में यदि प्रश्न है तब सम्बन्धित सूत्र द्वारा अधिकतम नमन आघूर्ण (Max B.M.) M का मान ज्ञात करते हैं अन्यथा गणना द्वारा ज्ञात करते हैं।

y = काट के गुरुत्व केन्द्र (G) से अधिकतम दूरी वाली परत (layer) या किनारे की दूरी है।

I = जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) है। इसका मात्रक mm^4 या m^4 प्रयोग करते हैं।

Scanned with CamScanner

f या $\sigma \Rightarrow$ नमन प्रतिबल (Bending Stress) है।

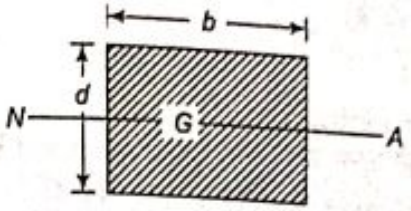
इसका मात्रक N/mm^2 या N/m^2 प्रयोग किया जाता है।

E = धरन के पदार्थ (material of Beam) का यंग मापांक N/mm^2 में है।

तथा R = धरन की वक्रता त्रिज्या (Radius of Curvature) है।

I तथा y के मान निम्न सूत्रों द्वारा ज्ञात करते हैं—

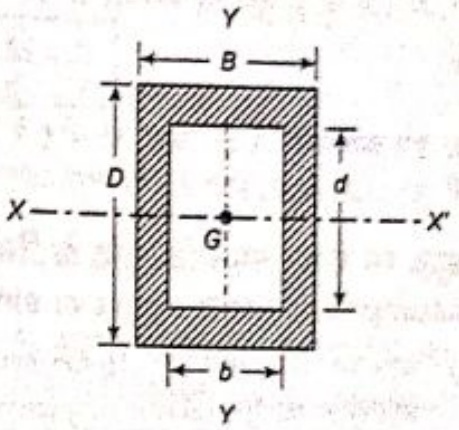
1.



Rectangular Section

सूत्र $I = \frac{b \times d^3}{12}$, $y = \frac{d}{2}$

2.

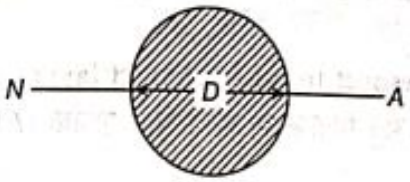


Hollow Rectangular Section :

जड़त्व आघूर्ण (M.O.I), $I = \left[\frac{B \times D^3}{12} - \frac{b \times d^3}{12}\right]$

$y_{max} = \frac{D}{2}$

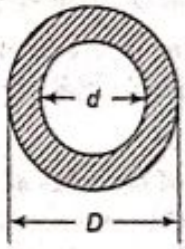
3.



Circular Section

सूत्र $I = \frac{\pi D^4}{64}$, $y = \frac{D}{2}$

4.



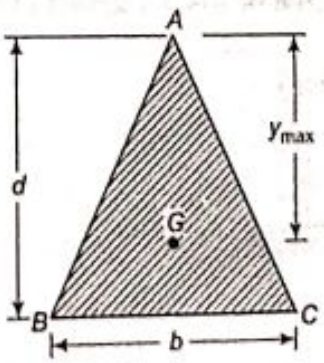
Hollow Circular Section

सूत्र $I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$

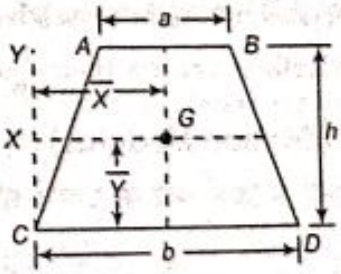
तथा $y = \frac{D}{2}$

5. $I_G = \frac{bd^3}{36}$ $y_{max} = \frac{2}{3}d$,

$I_{BC} = \frac{b \times d^3}{12}$



6.



समलम्ब (Trapezium) काट में—

क्षेत्रफल (area), $A = \frac{(a+b)}{2} \times h$ (सूत्र)

$\bar{Y} = \frac{(2a+b)}{(a+b)} \times \frac{h}{3}$ (सूत्र), $\bar{X} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3(a+b)}$

$I_{CD} = \frac{h^3}{12} \times (3a + b)$ (सूत्र) तथा $I_{XX} = \frac{h^3}{36}\left[\frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)}\right]$

Scanned with CamScanner

§ 3.5 नमन प्रतिबल (f) तथा ($N - A$) से दूरी (y) में सम्बन्ध– (UP 2010)

∵ नमन समीकरण द्वारा, $\boxed{\frac{f}{y} = \frac{E}{R}}$ है।

यहाँ E तथा R नमन स्थिति में एक धरन के लिये स्थिर (Constant) है।

$\therefore \quad f \propto y$ होगा।

अतः $N - A$ से y_1 दूरी पर प्रतिबल f_1 तथा y_2 दूरी पर प्रतिबल f_2 है।

तब $\boxed{\frac{f_1}{y_1} = \frac{f_2}{y_2}}$ सूत्र

अतः हम कह सकते हैं कि किसी भी सतह में प्रतिबल, उस सतह की शून्य बल सतह (Neutral layer) से दूरी y के समानुपाती (Proportional) होता है और शून्य बल सतह अर्थात् Neutral layer में प्रतिबल शून्य होते हैं।

§ 3.6 शुद्ध या सरल नमन सिद्धान्त के लिये मान्यतायें (Assumptions for the pure or simple bending theory)

(1) धरन का पदार्थ सर्वांगसम (Homogeneous) तथा समगुण (Isotropic) है जिससे सभी दिशाओं में धरन का प्रत्यास्थता का गुण (elastic properties) समान है।

The material of the beam is homogeneous (of the same kind throughout) and isotropic (i.e., elastic properties are equal in all the directions).

(2) धरन का नमन उसकी प्रत्यास्थता की सीमा के अन्दर ही होता है।

Bending of the beam is within elastic limit.

(3) धरन की प्रत्येक परत (layer), अपने ऊपर या नीचे सम्पर्क वाली अन्य परतों को बिना प्रभावित किये हुए फैलने या सिकुड़ने के लिये स्वतन्त्र होती है।

(Every layer is free to expand and contract with respect to other contact layers.)

(4) तनाव तथा सम्पीडन दोनों ओर की परतों में धरन के पदार्थ का यंग मापांक या प्रत्यास्थता गुणांक (E) का मान समान रहता है।

The value of modulus of elasticity (E) is same for the fibres (or layers) of the beam under tension and compression and stresses are within under tension and elastic limits.

(5) धरन की कोई भी अनुप्रस्थ काट (cross-section) जो कि नमन (bending) से पहले समतल (plane) है, नमन के बाद भी समतल ही रहती है।

The cross-section of the beam, which is plane before bending remains plane after bending.

(6) धरन का नमन (bending of beam) होने पर वक्रता त्रिज्या (radius of curvature) R उसकी अनुप्रस्थ काट की मापों (dimensions of cross-section) की अपेक्षा बहुत अधिक होता है।

Radius of curvature (R) of the beam is large compared with the dimensions of the cross-section.

(Valid if deflections are less than $\frac{1}{10}$th of the depth of beam.)

§ 3.8 आकृति मापांक (Section Modulus)

धरन की नमन की स्थिति में किसी काट पर उत्पन्न अधिकतम तनाव तथा अधिकतम सम्पीडन प्रतिबल निम्न प्रकार ज्ञात किये जाते हैं—

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma \text{ या } f}{y} \text{ (from bending equation)}$$

या $$\sigma = \frac{My}{I} \Rightarrow \frac{M}{(I/y)}$$

Scanned with CamScanner

(1) अधिकतम तनाव प्रतिबल (tensile stress)

$$f_t \text{ या } \sigma_t = \frac{M}{I/y_t} = \frac{M}{Z_t} \quad \ldots (1)$$

(जहाँ y_t = Neutral Axis से तनाव वाली परत की अधिकतम दूरी)

(2) अधिकतम सम्पीडन प्रतिबल (Compression Stress)

$$f_c \text{ या } \sigma_c = \frac{M}{I/y_c} = \frac{M}{Z_c} \quad \ldots (2)$$

(जहाँ $y_c = (N - A)$ से सम्पीडन वाली परत की अधिकतम दूरी)

जहाँ $\boxed{Z_t = \frac{I}{y_t} = \text{ तनाव आकृति मापांक}}$ (Section Modulus in Tension)

तथा $\boxed{Z_c = \frac{I}{y_c} = \text{ सम्पीडन आकृति मापांक}}$ (Section Modulus in Compression)

परिभाषा—धरन की काट की उदासीन अक्ष (Neutral Axis) पर जड़ता आघूर्ण (I) तथा उदासीन अक्ष ($N-A$) से काट के किनारे की अधिकतम दूरी (y) के अनुपात को उस काट का आकृति मापांक (Section Modulus) कहते हैं तथा Z से दर्शाते हैं। इसका मात्रक (unit) mm^3 या m^3 होता है। Z के मान पर धरन की शक्ति निर्भर करती है।

$$\therefore \text{ Section Modulus } (Z) = \frac{\text{Moment of Inertia about the neutral axis } (I)}{\text{Distance of the most distant point of the section from the neutral axis } (y_{max})}$$

The strength of the beam sections depends mainly on the value of section modulus (Z).

अर्थात् $\boxed{Z = \frac{I}{y}}$ सूत्र, इसकी इकाई (unit) प्राय: mm^3 होती है। अब यदि काट सममित (symmetrical) है तो

$\boxed{y_t = y_c}$ तथा $\sigma_t = \sigma_c = \sigma$ या f (नमन प्रतिबल) माना

अत: $Z_t = \frac{I}{y_t} = Z_c = \frac{I}{y_c}$ होगा

$\therefore$ $Z_t = Z_c = Z$ (माना)

अत: बिन्दु (1) तथा (2) से $M = \sigma_t \times Z_t = \sigma_c \times Z_c = \sigma \times Z$

अत: $\boxed{M = \sigma \times Z}$ अथवा $\boxed{M = f \times Z}$ ... (iii)

* धरन की विभिन्न काटों के आकृति मापांक (Section Modulus of different Sections of Beam)

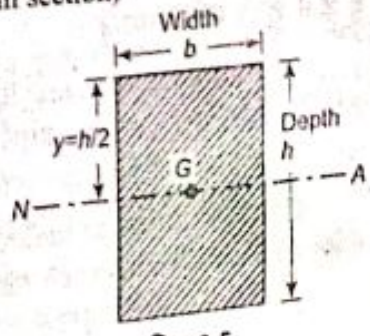
(a) आयताकार काट (Rectangular Section)—माना b चौड़ाई तथा h गहराई की आयताकार काट है तथा NA इस काट का Neutral Axis है।

तब काट का जड़त्व आघूर्ण (जड़ता घूर्ण) (Moment of Inertia of the beam section)

$$I = \frac{bh^3}{12} \text{ तथा } y_{max} = \frac{h}{2}$$

$$Z = \frac{I}{y_{max}} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

$\therefore$ $\boxed{Z = \frac{bh^2}{6}}$



चित्र 3.5

Scanned with CamScanner

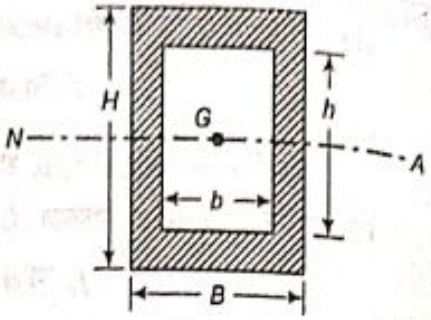
(b) खोखली आयताकार काट (Hollow rectangular Section)—

$$\therefore \quad I = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} = \left(\frac{BH^3 - bh^3}{12}\right)$$

तथा $y_{max} = H/2$

$$\therefore \quad Z = \frac{I}{y_{max}} = \left(\frac{BH^3 - bh^3}{12}\right)$$

$$Z = (BH^3 - bh^3)/6H$$



चित्र 3.6

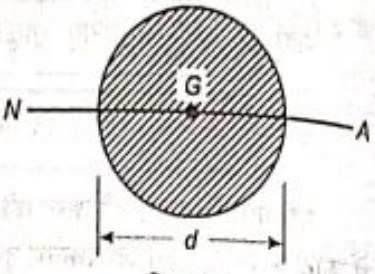
(c) वृत्ताकार काट (Circular Section)—

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

तथा $y_{max} = d/2$

$$\therefore \quad Z = \frac{D}{y} = \frac{\pi d^4/64}{d/2}$$

$$\therefore \quad Z = \frac{\pi d^3}{32}$$



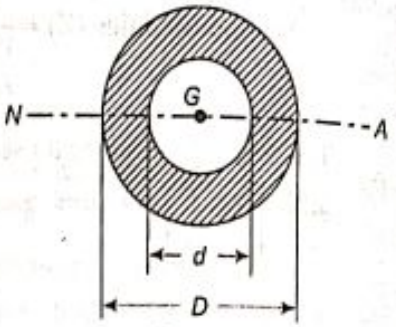
चित्र 3.7

(d) खोखली वृत्ताकार काट (Hollow Circular Section)—

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4), \; y_{max} = \frac{D}{2}$$

$$\therefore \quad Z = \frac{I}{y_{max}} = \frac{\pi}{64}\frac{(D^4 - d^4)}{D/2}$$

$$\therefore \quad \boxed{Z = \frac{\pi}{32}\left(\frac{D^4 - d^4}{D}\right)}$$



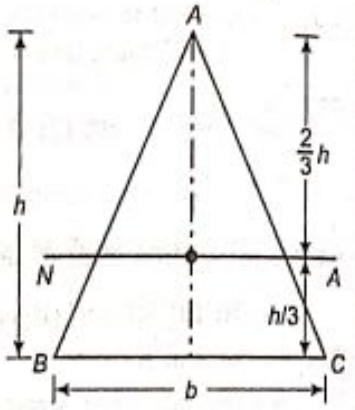
चित्र 3.8

(e) त्रिभुजाकार काट (Triangular Section)—

$$I_X = \frac{bh^3}{36}, \; y_{max} = \frac{2}{3}h$$

$$\therefore \quad Z = \frac{I}{y_{max}} = \frac{bh^3/36}{\frac{2}{3}h} = \frac{bh^2}{24} \text{ (सूत्र)}$$

नोट—$I_{BC} = bh^3/12$ होता है।



चित्र 3.9

§ 3.9 कुछ परिभाषायें

(1) नमन दृढ़ता (Flexural Rigidity)—धरन की किसी काट के लिये, उसके पदार्थ के प्रत्यास्थता गुणांक (E) तथा काट के जड़ता घूर्ण (जड़त्व-आघूर्ण) (I) की गुणा ($E \times I$) को नमन दृढ़ता (Flexural Rigidity) कहते हैं। नमन दृढ़ता से धरन की पूर्ण सामर्थ्य नियन्त्रित होती है।

(2) फटन मापांक (Modulus of Rupture)—यदि कोई अंग (member) नमन घूर्ण M पर टूटता है तो इस मान को प्रयोग करके नमन समीकरण की सहायता से ज्ञात किये गये नमन प्रतिबल (bending stress) f (या σ) के मान को फटन

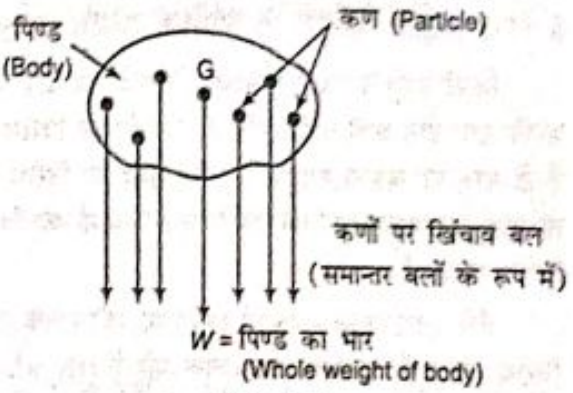
Scanned with CamScanner

मापांक (Modulus of Rupture) कहते हैं। यह मान अधिकतर लकड़ी, ढलवाँ लोहा (C.I.) तथा आयताकार काट वाले अंगों के लिये प्रयोग होता है।

3.10-1 गुरुत्व केन्द्र

"किसी पिण्ड (Body) अथवा वस्तु का गुरुत्व केन्द्र वह बिन्दु है, जहाँ पर उसका सम्पूर्ण भार, एक बिन्दु भार (Point Load) के रूप में कार्य करता हुआ माना जा सकता है, पिण्ड चाहे किसी भी स्थिति में रखा हो।"

किसी पिण्ड अथवा वस्तु का गुरुत्व केन्द्र (C.G.) केवल एक ही बिन्दु होता है और वह वस्तु के अन्दर ही होना आवश्यक नहीं। जैसे किसी छल्ले (Ring) का गुरुत्व केन्द्र छल्ले के पदार्थ के बाहर उसके केन्द्र पर होता है। अत: एक दृढ़ पिण्ड की किसी भी स्थिति में उसका गुरुत्व केन्द्र स्थिर रहता है।



चित्र 3.10

3.10-2 गुरुत्व केन्द्र का इन्जीनियरिंग क्षेत्र में महत्त्व

किसी रेखा, आयतन तथा क्षेत्रफल के संदर्भ में गुरुत्व केन्द्र (Centre of gravity) का इन्जीनियरी उपयोगिता (Engineering-Utility) के आधार पर अत्यधिक महत्त्व है। इसका उपयोग इन्जीनियरी की अनेक समस्याओं को हल करने के लिये किया जाता है। किसी भारी पिण्ड (वस्तु) या मशीन को उठाने के लिये सुविधाजनक बिन्दुओं पर रस्सा (Rope) या चेन (Chain) बाँधने की स्थिति (Position) गुरुत्व केन्द्र (C.G.) पर निर्भर करती है। यदि किसी समतल वस्तु के गुरुत्व केन्द्र पर बल लगाया जाये तो वह सम्पूर्ण क्षेत्र (Whole Surface Area) पर समान रूप से बँट जाता है। किसी वस्तु के सन्तुलन (Balancing) के लिये भी उसके गुरुत्व केन्द्र (C.G.) का ज्ञान होना अनिवार्य है।

3.10-3 क्षेत्रफल केन्द्र (Centre of Area) तथा केन्द्रक (Centroid)

(i) क्षेत्रफल बिन्दु (Centre of Area)—वह बिन्दु जहाँ किसी क्षेत्रफल का सम्पूर्ण प्रभाव संकेन्द्रित हुआ (concentrated) माना जा सके, उसका क्षेत्रफल केन्द्र कहलाता है।

(ii) केन्द्रक (Centroid)—ज्यामितीय आकृतियों (Geometrical Figures) [जैसे—वृत्त (Circle), वर्ग (Square), आयत (Rectangle), त्रिभुज (Triangle) तथा षट्भुजाकार तल (Hexagonal Plane) आदि] के केन्द्र ही इनके केन्द्रक कहलाते हैं।

अथवा केन्द्रक (Centroid), किसी ज्यामितीय आकृति या सर्वांगसम (Homogeneous) वस्तु का वह बिन्दु है जहाँ आकृति के आधार पर उसकी लम्बाई, क्षेत्रफल या आयतन का प्रभाव संकेन्द्रित (concentrated) माना जा सकता है।

Centroid : "The plane figures (like triangle, quadrilateral, circle etc.) have only areas, but no mass. The centre of area of such figures is known as centroid." We can also say "The C.G. of a plane figure where the entire area is assumed to be concentrated is known as the centroid of that area.

3.11-1 जड़त्व (Inertia)

वस्तुओं के उस गुण को, जिसके कारण वे स्वयं अपनी अवस्था में परिवर्तन करने में असमर्थ रहती हैं, "जड़त्व (Inertia)" कहते हैं। वस्तु का द्रव्यमान (mass) उसके जड़त्व की माप होता है तथा जड़त्व के कारण ही वस्तु में बाह्य बल का विरोध करने का गुण आता है।

3.11-2 जड़त्व आघूर्ण या द्वितीय आघूर्ण (Moment of Inertia or Second Moment) की परिभाषा

"किसी निश्चित अक्ष के चारों ओर घूमती हुई वस्तु का वह गुण, जो उसकी वृत्तीय गति में परिवर्तन का विरोध करता है, वस्तु का घूर्णन अक्ष (Rotational Axis) के परित:जड़त्व आघूर्ण या द्वितीय आघूर्ण कहलाता है।"

Scanned with CamScanner

अथवा

जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia)—किसी दिये हुए अक्ष के परित: काट के क्षेत्रफल के द्वितीय आघूर्ण (IInd Moment) को ही उसका जड़त्वाघूर्ण या जड़ता घूर्ण (Moment of Inertia) कहते हैं। $I = \sum$ क्षेत्रफल $\times$ दूरी$^2 = \sum ar^2$ (सूत्र)

3.11-3 जड़त्व आघूर्ण के भौतिक महत्व (Physical Significance of Moment of Inertia)

किसी वस्तु का जड़त्व आघूर्ण, लगाये गये बाह्य बलयुग्म (couple) की प्रवृत्ति (tandency) का विरोध करता है, अर्थात् उसके द्वारा होने वाले वृतीय गति में परिवर्तन का विरोध करता है। अत: बलयुग्म यदि वस्तु के कोणीय वेग में वृद्धि करने वाला है तो वस्तु का जड़त्व आघूर्ण इस वेग वृद्धि का विरोध करता है। इसी प्रकार यदि बलयुग्म कोणीय वेग में कमी करने वाला है तो वस्तु का जड़त्व आघूर्ण उसके वेग में कमी का विरोध करता है। अत: स्पष्ट है कि जड़त्व आघूर्ण गति में परिवर्तन का विरोध करता है।

जैसे उदाहरणार्थ—किसी इन्जन का गतिपालक पहिया (fly wheel) अपने जड़त्व के कारण घूर्णन-गति में परिवर्तन का विरोध करता है। इसलिये गतिपालक पहियों (fly wheels) को बड़ा व भारी बनाया जाता है।

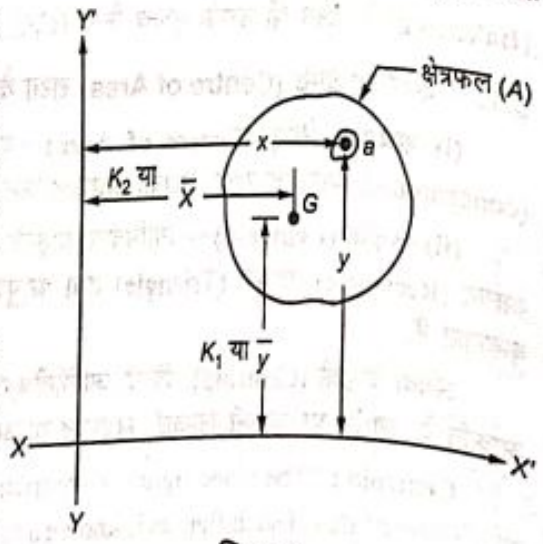
जड़त्व आघूर्ण का प्रयोग "पिण्डों की गतिकी (dyanamics of rigid bidies) का अध्ययन (study) करने में, पदार्थों की सामर्थ्य (strength of materials) ज्ञात करने में तथा धरनों का विक्षेप (deflection of beams) अथवा किसी कॉलम आदि का बहकाव (buckling of column) को निर्धारित करने के लिये किया जाता है।"

3.11-4 क्षेत्रफल जड़त्व आघूर्ण या द्वितीय आघूर्ण (Area Moment of Inertia) Or (Second Moment of Area)

परिभाषा (Defination)—"किसी अक्ष के सापेक्ष (परित:) एक क्षेत्रफल का जड़त्व आघूर्ण या द्वितीय आघूर्ण, उसके क्षेत्रफल (A) तथा अक्ष से उसकी दूरी के वर्ग के गुणनफल के बराबर होता है।"

माना सम्पूर्ण क्षेत्रफल A का जड़त्व आघूर्ण उसके समतल में ही दोनों अक्षों $X-X$ तथा $Y-Y$ के परित: ज्ञात करना है। चित्र 3.11 में सम्पूर्ण क्षेत्रफल A में से एक छोटे से क्षेत्रफल 'a' पर विचार करना है। माना छोटे क्षेत्रफल a की $X-X$ तथा $Y-Y$ अक्षों से दूरियाँ चित्र के अनुसार y तथा x हैं।

अत: परिभाषा के अनुसार, क्षेत्रफल (a) का $X-X$ अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण $I = ay^2$ तथा $Y-Y$ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $= ax^2$ होगा।



चित्र 3.11

क्योंकि सम्पूर्ण क्षेत्र (A), छोटे-छोटे क्षेत्रफलों से मिलकर बना होता है। अत: सम्पूर्ण क्षेत्रफल (A) का $X-X$ अक्ष तथा $Y-Y$ अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण क्रमश:

$$I_{XX} = \sum ay^2 \quad \ldots (3)$$

$$I_{YY} = \sum ax^2 \quad \ldots (4)$$

यदि पूर्ण क्षेत्र का प्रभाव G पर हो और इसकी अक्षों से दूरियाँ क्रमश: K_1 तथा K_2 हों तो,

$$I_{XX} = AK_1^2 \quad \ldots (5)$$

$$I_{YY} = AK_2^2 \quad \ldots (6)$$

Scanned with CamScanner

अत: परिभ्रमण त्रिज्या (Radius of Gyration) को क्षेत्रफल के आधार पर निम्न प्रकार परिभाषित कर सकते हैं—

परिभ्रमण त्रिज्या (Radius of gyration) or (Radius of Inertia)—किसी घूर्ण अक्ष के परित: (about the rotating axis) किसी पिण्ड की परिभ्रमण त्रिज्या (K), अक्ष से मापी गयी वह दूरी है जिसके वर्ग (K^2) को पिण्ड के द्रव्यमान (mass) 'm' से गुणा किया जाये तो यह गुणनफल, उस अक्ष के परित: पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण (I) के बराबर होता है। अत: $I = mK^2$ तथा समतल सतह के क्षेत्रफल (A) के लिए $I = AK^2$ (सूत्र)

∴ परिभ्रमण त्रिज्या $\boxed{K = \sqrt{\frac{I}{A}}}$ सूत्र

" One of the properties of cross-section which influences the structural behaviour of the members is radius of gyration."

§ 3.12 समान्तर अक्ष प्रमेय (Theorem of Parallel Axis)

परिभाषा—इस प्रमेय के अनुसार, "यदि किसी समतल परिच्छेद के गुरुत्व केन्द्र से जाने वाले अक्ष के परित: (या अक्ष के सापेक्ष) उसके जड़त्व आघूर्ण को I_{XXG} (अथवा I_G) से प्रदर्शित किया जाये तथा इस अक्ष के समान्तर और उससे h दूरी पर स्थित रेखा AB के परित: (about AB) जड़त्व आघूर्ण को I_{AB} से प्रदर्शित किया जाये तब,

$\boxed{I_{AB} = I_{XG} + Ah^2}$ होता है।"

जहाँ A, समतल परिच्छेद का क्षेत्रफल है।

अथवा परिभाषा समान्तर अक्ष प्रमेय (Parallel Axes Theorem)—इस प्रमेय के अनुसार, किसी क्षेत्र का किसी अक्ष (X-X) पर जड़त्वाघूर्ण (Moment of Inertia) का मान, उस क्षेत्र के गुरुत्व केन्द्र (C.G.) g_1 से होकर जाने वाली उसी (X-X) अक्ष के समान्तर अक्ष पर जड़त्वाघूर्ण (I_{Xg_1}) तथा उस क्षेत्रफल (a) और दोनों अक्षों के बीच की लम्ब दूरी (h) के वर्ग के गुणनफल के योग के बराबर होता है। अर्थात्

$\boxed{I_{XX} = I_{Xg_1} + ah^2}$ सूत्र

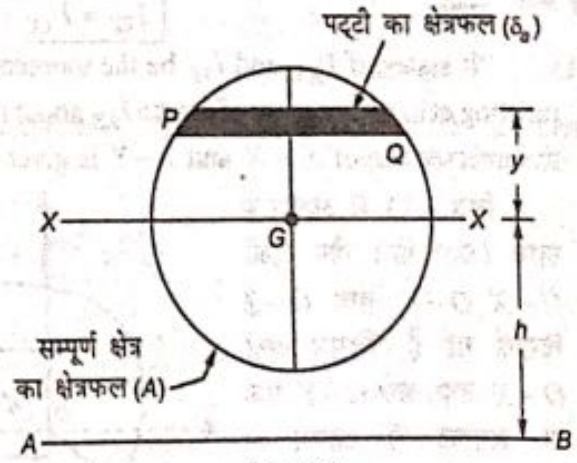
"Parallel Axis Theorem" states, if the moment of inertia of a plane area about an axis through the centre of gravity is denoted by I_G, then moment of inertia of the area about any other axis AB, parallel to the first and at a distance h from C.G. is given by :

$\boxed{I_{AB} = I_G + Ah^2}$

सत्यापन (Proof)—चित्र 3.12 में कोई समतल परिच्छेद दिखाया गया है जिसका गुरुत्व केन्द्र G तथा क्षेत्रफल A है।

हमें $X - X$ अक्ष के समान्तर रेखा AB पर समतल परिच्छेद का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है।

माना समतल पच्छिेद में PQ कोई छोटी सी पट्टी (small strip) है, जिसकी गुरुत्व केन्द्र (G) से दूरी y है तथा रेखा AB से दूरी ($y + h$) है जैसा कि चित्र 3.12 में दिखाया गया है। PQ का क्षेत्रफल δ_a है तब



चित्र 3.12

क्षेत्रफल δ_a का G से जाने वाले अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण $= \delta_a \cdot y^2$

∴ पूरे परिच्छेद का, G से जाने वाले अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण,

$$I_{XG} = \Sigma \delta_a \cdot y^2$$

Scanned with CamScanner

∵ क्षेत्रफल (δ_a) का AB के परित: जड़त्व आघूर्ण,

$$= \delta_a \cdot (y+h)^2$$

∴ पूरे परिच्छेद का AB के परित: जड़त्व आघूर्ण,

$$I_{AB} = \Sigma \delta_a \cdot (y+h)^2$$

$$= \Sigma \delta_a \cdot (y^2 + h^2 + 2yh)$$

$$= \Sigma \delta_a \cdot y^2 + \Sigma \delta_a \cdot h^2 + \Sigma \delta_a \cdot 2yh$$

$$= I_{XG} + h^2 \cdot \Sigma \delta_a + 2h \Sigma \delta_a \cdot y$$

$$= I_{XG} + h^2 \cdot A + 0$$

$$= I_{XG} + Ah^2$$ सत्यापित (Proved)

अत: $\boxed{I_{AB} = I_{XG} + Ah^2}$ सूत्र

नोट— $\boxed{\Sigma \delta_a \cdot y = 0}$ यह, सन्तुलन की अवस्था में क्षेत्रफलों का गुरुत्व केन्द्र से जाने वाले अक्ष के सापेक्ष आघूर्णों का बीजीय योग है, जोकि शून्य होता है।

§ 3.13 अभिलम्ब अक्ष प्रमेय (Perpendicular Axis Theorem)

परिभाषा—इस प्रमेय के अनुसार "किसी क्षेत्र (area) का, उस क्षेत्र के ही समतल में स्थित परस्पर लम्ब दो अक्षों $X-X$ तथा $Y-Y$ पर जड़त्व आघूर्णों (I_{XX} तथा I_{YY}) का योग, उन दोनों अक्षों के कटान बिन्दु से जाने वाले तथा क्षेत्र के समतल पर लम्ब अक्ष ($Z-Z$ axis) पर, उस क्षेत्र के जड़त्व आघूर्ण (I_{ZZ}) के बराबर होता है।" अर्थात्

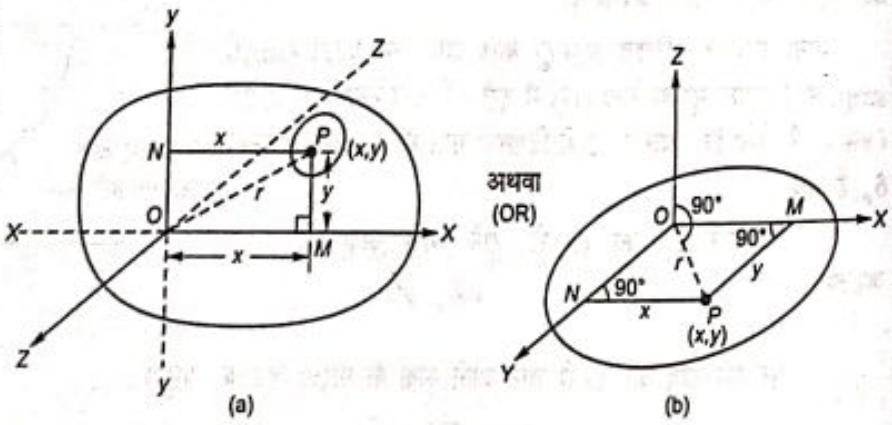
$$\boxed{I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY}}$$

अथवा अभिलम्ब अक्ष प्रमेय (Perpendicular Axes Theorem)—"किसी क्षेत्र के समतल में स्थित दो परस्पर लम्ब अक्षों पर जड़त्वाघूर्णों का योग ($I_{XX} + I_{YY}$), इन दोनों अक्षों के कटान बिन्दु से होकर जाने वाली, उस क्षेत्र से समतल के लम्ब अक्ष (Z-Z) पर उस क्षेत्र के जड़त्वाघूर्ण के बराबर होता है।"

अर्थात् $\boxed{I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY}}$ सूत्र

"It states, if I_{XX} and I_{YY} be the moment of inertia of a plane section about two perpendicular axis meeting at 0, the moment of inertia I_{ZZ} about the axis $Z-Z$, perpendicular to the plane and passing through the intersection of $X-X$ and $Y-Y$ is given by "$I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY}$".

चित्र 3.13 में आपस में लम्ब (90° पर) तीन अक्षों $O-X, O-Y$ तथा $O-Z$ दिखाई गई हैं, जिसमें अक्ष $O-X$ तथा अक्ष $O-Y$ एक ही समतल में आपस में लम्बरूप हैं तथा अक्ष $O-Z$, समतल पर (अथवा $O-X$ तथा $O-Y$ के) लम्ववत् (perpendicular) है।



चित्र 3.13

Scanned with CamScanner

माना $P(x, y)$ पूरे क्षेत्रफल (area) का एक छोटा सा भाग है जिसका क्षेत्रफल δ_a है। माना कि P की ZOZ अक्ष (या OZ अक्ष) से लम्बवत् दूरी r है

अर्थात् $OP = r$

तब $OP^2 = OM^2 + PM^2$

या $r^2 = x^2 + y^2$ ... (1)

अब क्षेत्रफल δ_a के लिये, $I_{XX} = \delta_a \cdot y^2$

तथा $I_{YY} = \delta_a \cdot x^2$

और $I_{ZZ} = \delta_a \cdot r^2$

या $I_{ZZ} = \delta_a \cdot (x^2 + y^2)$ $(\because r^2 = x^2 + y^2)$

$= \delta_a \cdot x^2 + \delta_a \cdot y^2$

$= I_{YY} + I_{XX}$ (सत्यापित)

$\therefore$ $\boxed{I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY}}$ (सूत्र)

§ 3.14 कुछ मुख्य काटों के जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia of Some Important Sections)

(1) आयताकार काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I of Rectangular Section)—चित्र 3.14 में एक आयताकर काट दिखाई गई है जिसकी चौड़ाई b तथा ऊँचाई (अथवा गहराई) h है। इसके गुरुत्व केन्द्र G से होती हुई दो लम्ब अक्षों (axes) $X-X$ तथा $Y-Y$ को खींचते हैं।

अब $X-X$ अक्ष के समान्तर तथा इससे y दूरी पर आयत में एक मोटाई dy की पतली सी पट्टी को माना (consider) किया।

इस पट्टी (strip) का क्षेत्रफल $= b \times dy$

$\therefore$ इस पट्टी का $X-X$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I)

= क्षेत्रफल × (दूरी)^2 सूत्र से

$= (b \times d_y) \times y^2$ ... (1)

अब पूरे पच्छिेद (काट) का जड़त्वाघूर्ण ज्ञात करने के लिये समीकरण (1) का काट की गहराई $\left(-\frac{h}{2}\right)$ से $\left(+\frac{h}{2}\right)$ तक के लिये समाकलन (Integration) कर प्राप्त किया जा सकता है। अत:

$$I_{XX} = \int_{-h/2}^{+h/2} b \cdot y^2 \cdot dy = b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot dy$$

$$= b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{b}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{b}{3}\left[2 \cdot \frac{h^3}{8}\right]$$

अत: $\boxed{I_{XX} = \frac{bh^3}{12}}$ सूत्र

Scanned with CamScanner

इसी प्रकार, यदि आयत का जड़त्वाघूर्ण $Y-Y$ अक्ष पर भी निकाला जाये तो उसका मान

$$I_{YY} = \frac{hb^3}{12}$$

सूत्र

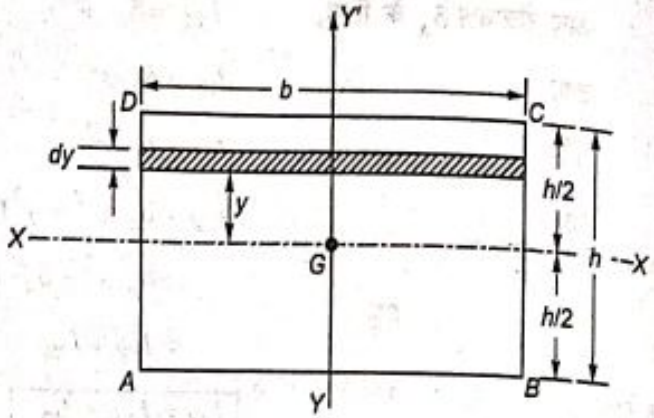
अब आयत $ABCD$ का जड़ताघूर्ण, रेखा AB पर समान्तर अक्ष प्रमेय द्वारा

$$I_{AB} = I_{XX'} + A\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

या $$I_{AB} = \frac{bh^3}{12} + (b \times h) \times \frac{h^2}{4}$$

$$= \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4}$$

$$\boxed{I_{AB} = \frac{bh^3}{3}}$$



चित्र 3.14

इसी प्रकार आयत $ABCD$ का जड़त्व आघूर्ण भुजा AD पर,

$$I_{AD} = I_{YY} + A \times \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

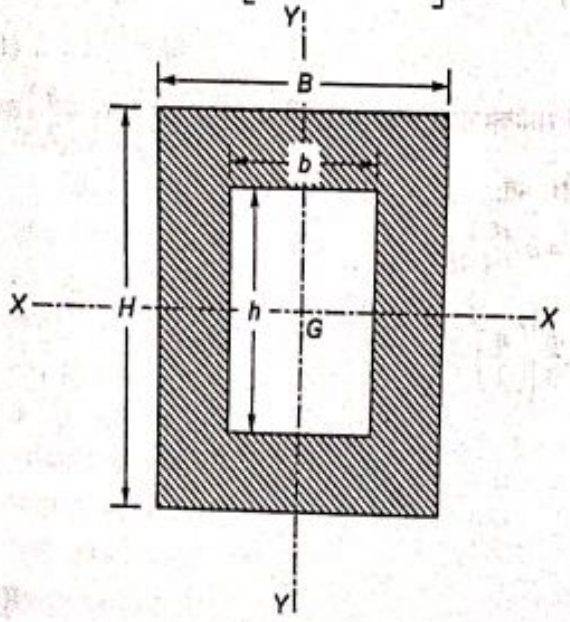
$$= \frac{hb^3}{12} + (b \times h)\left(\frac{b^2}{4}\right)$$

∴ $$\boxed{I_{AD} = \frac{hb^3}{3}}$$

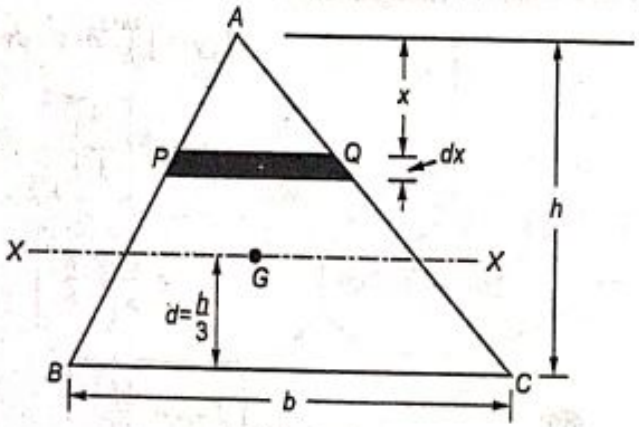
नोट—खोखले आयताकार (Hollow rectangular section) के M.O.I के लिए बाहर के बड़े आयत के जड़त्वाघूर्ण (जड़ताघूर्ण) में से अन्दर वाले छोटे आयत का जड़त्वाघूर्ण (M.O.I) को घटाकर प्राप्त करते हैं।

अर्थात् चित्र 3.15 में दिखाये गये खोखले आयत के लिये,

$$I_{XX} = \left[\frac{BXH^3}{12} - \frac{bXh^3}{12}\right]$$



चित्र 3.15



चित्र 3.16

Scanned with CamScanner

(2) त्रिभुजाकर काट (Triangular Section)—माना चित्र 3.16 में दिखाई गई त्रिभुजाकार काट ABC का जड़त्व आघूर्ण (या जड़ताघूर्ण) ज्ञात करना है। इसमें b = त्रिभुजाकार काट का आधार तथा h = इस काट की ऊँचाई है। अब त्रिभुज के शीर्ष A से x दूरी पर dx मोटाई की एक पतली पट्टी PQ पर विचार करने पर

ज्यामिति से, समरूप त्रिभुज (similar triangles) APQ तथा ABC में,

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{x}{h}$$

$$\therefore \quad PQ = \frac{x}{h} \times BC = \frac{b \cdot x}{h}$$

$$\because \quad \text{पट्टी } PQ \text{ का क्षेत्रफल} = PQ \times dx$$

$$= \frac{b \cdot x}{h} dx$$

अब इस पट्टी (strip) के आधार BC के परित: जड़त्व आघूर्ण

$$I_{BC} = \text{क्षेत्रफल} \times (\text{दूरी})^2$$

$$\Rightarrow \quad I_{BC} = \left[\frac{b \cdot x}{h} dx\right] \times (h - x)^2$$

$\because$ मानी गई पट्टी Δ की सम्पूर्ण ऊँचाई (h) में (अर्थात् 0 से h तक) कहीं भी मानी जा सकती है। अत: पूरे त्रिभुज का जड़त्व आघूर्ण (M.I.) ज्ञात करने के लिये I_{BC} के प्राप्त मान को (0 से h) लिमिट तक समाकलन करने पर प्राप्त होगा। अर्थात्

$$I_{BC} = \int_0^h \frac{b \cdot x}{h} (h - x)^2 \cdot dx$$

$$= \frac{b}{h} \int_0^h x (h^2 + x^2 - 2h \cdot x)\, dx$$

$$= \frac{b}{h} \left[h^2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - 2h \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \frac{b}{h} \left[\frac{h^4}{2} + \frac{h^4}{4} - \frac{2}{3} \cdot h^4\right] = \frac{bh^3}{12}$$

$$\therefore \quad I_{BC} = \frac{bh^3}{12} \qquad \text{(सूत्र)} \qquad \ldots \text{(I)}$$

हम जानते हैं कि त्रिभुज का गुरुत्व केन्द्र (G), इसके आधार से $\frac{h}{3}$ ऊँचाई पर होता है।

$\therefore$ ΔABC के गुरुत्व केन्द्र ($C, G \Rightarrow G$) से जाने वाली $X - X$ अक्ष पर त्रिभुजाकार काट ABC का जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.)

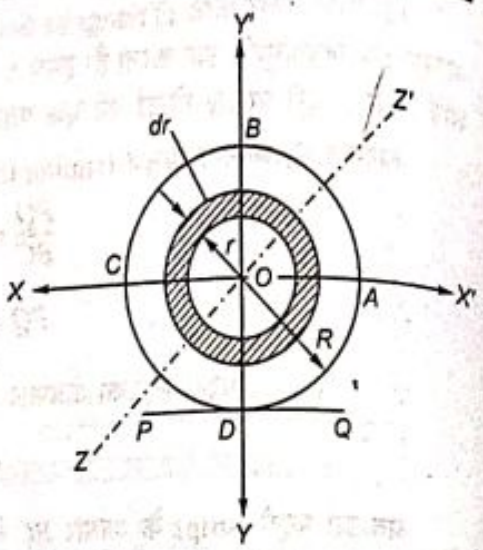
$$I_{XXG} = I_{BC} - Ad^2 \qquad [\because I_{XX} = I_G + Ah^2]$$

$$= \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{b \times h}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$

$$\boxed{I_{XXG} = \frac{bh^3}{36}} \qquad \ldots \text{(सूत्र)}$$

Scanned with CamScanner

(3) वृत्ताकार काट का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia of a Circular Section)—चित्र 3.17 में R त्रिज्या का एक वृत्त $ABCD$ है। इसके केन्द्र O से होकर दो लम्ब अक्षों $X-X$ तथा $Y-Y$ खींचते हैं। अब इस वृत्त केन्द्र O से r त्रिज्या (radius) पर बहुत कम मोटाई dr की एक पट्टी (strip) को एक रिंग (ring) रूप में माना।



चित्र 3.17

अत: रिंग का क्षेत्रफल $= 2\pi r \times dr$

केन्द्र O से जाने वाली $Z-Z$ अक्ष, दोनों अक्षों, (X-अक्ष तथा Y-अक्ष अर्थात् रिंग के समतल) पर लम्ब होती है तथा $Z-Z$ अक्ष की रिंग से दूरी r है। अत: $Z-Z$ अक्ष के परित: रिंग का जड़त्व आघूर्ण,

$$I_{ZZ} = \text{क्षेत्रफल} \times (\text{दूरी})^2$$
$$= [2\pi r \times dr] \times (r)^2$$
$$= 2\pi r^3 dr$$

अब ($Z-Z$) अक्ष के परित: पूरे वृत्ताकार काट का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करने के लिये उपरोक्त प्राप्त हुए I_{ZZ} के मान को (0 से R तक) सीमा (limit) में समाकलन (integrate) करना होगा। अत:

$$I_{ZZ} = \int_0^R 2\pi r^3 \, dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$= \frac{\pi}{2}(R^4 - 0) = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi \times (D/2)^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

∵ हम जानते हैं कि, $I_{XX} + I_{YY} = I_{ZZ}$ (लम्ब अक्ष प्रमेय)

तथा वृत्त दोनों अक्षों पर सममित (symmetrical) है। अत: वृत्ताकार काट के लिए, $I_{XX} = I_{YY}$ होगा।

$$\therefore \quad I_{XX} = I_{YY} = \frac{I_{ZZ}}{2} = \frac{\pi D^4}{32 \times 2}$$

$$\therefore \quad \boxed{I_{XX} = I_{YY} = \frac{\pi D^4}{64}} \quad \text{(सूत्र)}$$

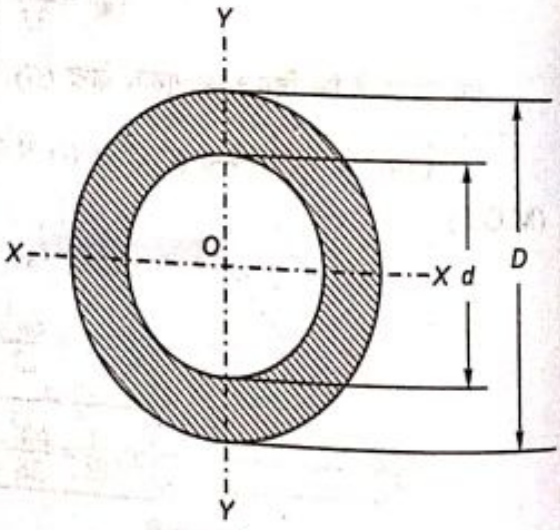
नोट—$I_{PQ} = I_{XX} + A \times (OD)^2 = \frac{\pi D^4}{64} + \left(\frac{\pi D^2}{4}\right) \times \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{5\pi D^4}{64}$ (वृत्त को स्पर्श करती रेखा PQ पर)

(4) खोखले वृत्ताकार काट का जड़त्व आघूर्ण (M.I of Hollow Circular Section)—चित्र 3.18 में एक खोखली वृत्ताकार काट दिखाई गई है जिसका बाहरी व्यास (Outer Diameter) = D तथा आन्तरिक व्यास (Inner Diameter) = d है।

अब मुख्य बाहरी वृत्त (Main Outer Circle) का $X-X$ अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण,

$$I_{XX_1} = \frac{\pi D^4}{64}$$

इसी प्रकार अन्दर से काटकर निकाले गये d व्यास के वृत्त का $X-X$ अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण,



चित्र 3.18

Scanned with CamScanner

$$I_{XX_2} = \frac{\pi d^4}{64}$$

अत: खोखले काट (sectioned portion) का $X-X$ अक्ष पर जड़ताघूर्ण

$$I_{XX} = I_{XX_1} - I_{XX_2}$$

$$= \left(\frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}\right) = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \quad \text{(सूत्र)}$$

इसी प्रकार $$I_{YY} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} \quad \text{(सूत्र)}$$

तथा $$I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32} \quad \text{(सूत्र)}$$

§ 3.10 आकृति मापांक (Modules of Section)

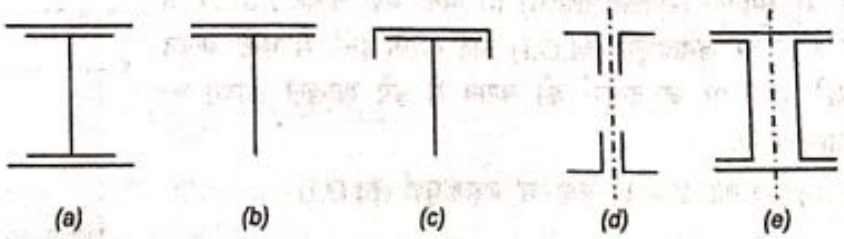
किसी काट में, उसके गुरुत्व केन्द्र से जाने वाली अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण (I) तथा अक्ष के काट के किनारे की अधिकतम दूरी (y) के अनुपात (ratio) को उस काट का आकृति मापांक (modulus of section) कहते हैं, तथा Z द्वारा प्रदर्शित करते हैं। अर्थात्

$\boxed{Z = \frac{I}{y}}$ सूत्र, **इसकी इकाई (मात्रक-Unit) mm^3 या m^3 प्रयोग की जाती है।**

Z का मान किसी धरन (beam) की सामर्थ्य (strength) को दर्शाता है।

(A) मानक अनुप्रस्थ काटें (Standard Transverse Sections)—भारतीय मानक संस्थान द्वारा धरन या कॉलम की मानक अनुप्रस्थ काटों को विभिन्न उपयोगी आकृतियों (useful shapes of sections) में निर्धारित की गई हैं। बाजार में उपलब्ध ये काटें नरम इस्पात (mild steel) को रोलित (rolled) करके बनायी जाती हैं। इनमें प्रमुख काटें आई (I), टी (Tee), एंगल (L या Angle), चैनल (C या channel) तथा Z आकृतियों (चित्र के अनुसार) में उपलब्ध होती हैं जिन्हें धरन (beams) तथा स्ट्रट (strut) की काटों (sections) में प्रयोग किया जाता है। इनके अतिरिक्त मानक साइजों में इस्पात प्लेटें (steel sheets), वर्गाकार (square) तथा गोल छड़ें (round sectioned rods) तथा ट्यूबें (tubes) आदि भी आती हैं।

(B) संयुक्त अथवा यौगिक काटों का द्वितीय आघूर्ण या जड़त्व आघूर्ण (Second moment of area or moment of inertia of compound sections)—जब विभिन्न आकार की मानक काटों (जैसे I, T, एंगल (L), चैनल (C) और आयताकार (□) आदि) को मिलाकर एक धरन या कॉलम की काट बनती है तो उसे यौगिक काट कहते हैं। इन काटों का प्रयोग व्यावहारिक रूप में उपयुक्त सामर्थ्य तथा कड़ेपन (stiffness) की धरनों तथा कॉलम प्राप्त करने में किया जाता है। ऐसी कुछ काटें चित्र में प्रदर्शित हैं।



चित्र 3.19

Scanned with CamScanner

जड़त्व आघूर्ण पर महत्वपूर्ण उदाहरण
(Important Examples on M.O.I.)

उदाहरण 1. किसी धरन (Beam) की काट (section) आयताकार (rectangular) है, यह चित्र 3.20 में दिखाई गई है। इस काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I) निम्न के सापेक्ष ज्ञात कीजिये—

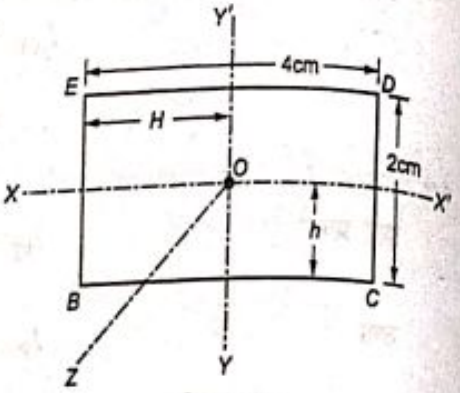
(1) $X-X$ अक्ष पर।

(2) $Y-Y$ अक्ष पर।

(3) केन्द्र से जाने वाली परन्तु काट के तल पर लम्ब अक्ष (अर्थात् OZ-अक्ष) पर।

(4) भुजा BC या भुजा DE के सापेक्ष।

(5) भुजा CD या भुजा BE के सापेक्ष।



चित्र 3.20

हल—∵ आयताकार काट में जड़त्वाघूर्ण (जड़ता घूर्ण), $I = \dfrac{\text{चौड़ाई} \times (\text{गहराई})^3}{12}$ (सूत्र)

(1) $I_{XX} = \dfrac{4\times 2^3}{12} = \dfrac{8}{3}\ \text{cm}^4$ उत्तर $\left[I_{XX} = \dfrac{bh^3}{12}\right.$ सूत्र द्वारा]

(2) $I_{YY} = \dfrac{2\times 4^3}{12} = \dfrac{128}{12} = \dfrac{32}{3}\ \text{cm}^4$ उत्तर $\left[I_{YY} = \dfrac{h\times b^3}{12}\right.$ सूत्र द्वारा]

(3) $I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY}$ (लम्ब अक्ष प्रमेय सूत्र द्वारा)

$\therefore\quad I_{OZ} = \dfrac{8}{3} + \dfrac{32}{3} = 13{\cdot}33\ \text{cm}^4$ उत्तर

(4) ∵ भुजा BC या भुजा DE की काट केन्द्र O से दूरी, $h = \dfrac{2}{2} = 1$ cm है।

अब $I_{BC} \Rightarrow I_{DE} = I_{XX} + Ah^2$ (समान्तर अक्ष प्रमेय सूत्र द्वारा)

$= \dfrac{8}{3} + (4\times 2)\times 1^2 = \dfrac{32}{3} = 10{\cdot}666\ \text{cm}^4$ उत्तर

(5) $I_{CD} \Rightarrow I_{BE} = I_{YY} + AH^2$

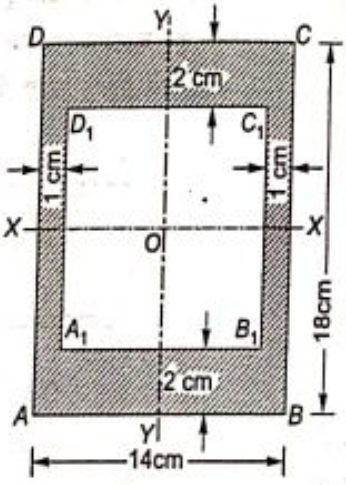
$= \dfrac{32}{3} + (4\times 2)\times\left(\dfrac{4}{2}\right)^2 = 42{\cdot}66\ \text{cm}^4$ उत्तर

उदाहरण 2. चित्र 3.21 में दिखाई गई खोखली आयताकार काट का जड़ताघूर्ण (M.O.I) $X-X$ तथा $Y-Y$ अक्षों (axes) के परित: ज्ञात कीजिये। (U.K. 2006)

हल—बड़ा आयत $ABCD$ तथा छोटा आयत $A_1B_1C_1D_1$ दोनों ही अक्षों $X-X$ तथा $Y-Y$ पर सममित (symmetrical) हैं। अत: बड़े आयत $ABCD$ के $X-X$ तथा $Y-Y$ अक्षों पर जड़ताघूर्ण (M.O.I) ज्ञात करके इनमें से छोटे आयत $A_1B_1C_1D_1$ के उन्हीं अक्षों पर जड़ताघूर्ण को घटाने से हमें खोखले आयत का जड़ताघूर्ण (M.O.I) प्राप्त होगा।

∵ बड़े आयत $ABCD$ का $X-X$ अक्ष पर जड़ताघूर्ण (M.O.I)

$I_{XX_1} = \dfrac{bh^3}{12}$ सूत्र से,



चित्र 3.21

Scanned with CamScanner

$$= \frac{14 \times 18^3}{12} = 6804 \text{ cm}^4$$

इसी प्रकार छोटे आयत $A_1 B_1 C_1 D_1$ का $X-X$ अक्ष पर जड़ताघूर्ण (M.O.I)

$$I_{XX_2} = \frac{(14-2) \times (18-4)^3}{12} = \frac{12 \times 14^3}{12} = 2744 \text{ cm}^4$$

∴ खोखली आयताकार काट का $X-X$ अक्ष पर जड़ताघूर्ण

$$I_{XX} = I_{XX_1} - I_{XX_2} = 6804 - 2744 = 4060 \text{ cm}^4 = 4060 \times 10^4 \text{ mm}^4$$ उत्तर

इसी प्रकार, $I_{YY_1} = \frac{hb^3}{12}$ (बड़े आयत का $Y-Y$ अक्ष पर)

$$= \frac{18 \times 14^3}{12} = 4116 \text{ cm}^4$$

तथा छोटे आयत का $Y-Y$ अक्ष पर जड़ता घूर्ण (जड़त्व आघूर्ण)

$$I_{YY_2} = \frac{(18-4) \times (14-2)^3}{12} = \frac{14 \times 12^3}{12} = 2016 \text{ cm}^4$$

∴ खोखले काट (hollow section) का $Y-Y$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण

$$I_{YY} = I_{YY_1} - I_{YY_2} = 4116 - 2016 = 2100 \text{ cm}^4 = 2100 \times 10^4 \text{ mm}^4$$ उत्तर

उदाहरण 3. चित्र 3.22 में दिखाई गई खोखली आयताकार काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I) $X-X$ तथा $Y-Y$ अक्षों पर ज्ञात करें।

हल—दी गई काट Y-अक्ष पर सममित है, अत: हमें $\bar{Y}$ ज्ञात करना होगा जो खोखली काट के गुरुत्व केन्द्र (G) की स्थिति को बतायेगा और G पर ही $X-X$ अक्ष तथा $Y-Y$ अक्ष प्रतिच्छेद करती हुई जायेंगी।

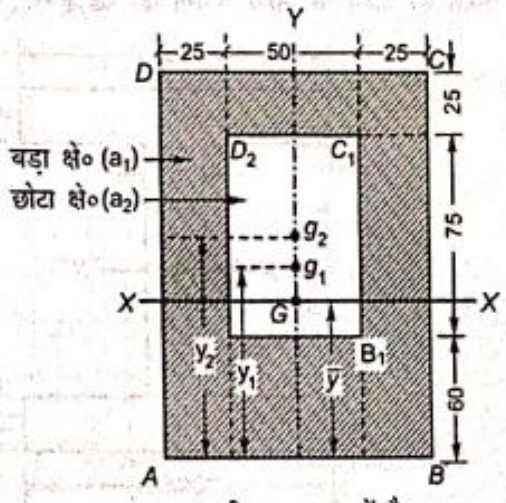
यहाँ बड़े आयत का केन्द्र g_1, क्षेत्रफल a_1 तथा AB से ऊँचाई y_1 है तथा छोटे आयत $A_1B_1C_1D_1$ का केन्द्र g_2 क्षेत्रफल a_2 तथा g_2 की AB से ऊँचाई y_2 है।

अत: $a_1 = 100 \times 160 = 16000 \text{ mm}^2$

तथा $a_2 = 50 \times 75 = 3750 \text{ mm}^2$

$$y_1 = \frac{160}{2} = 800 \text{ mm}$$

तथा $$y_2 = 60 + \frac{75}{2} = 97{\cdot}5 \text{ mm}$$



सभी माप mm में है।

चित्र 3.22

गुरुत्व केन्द्र G की AB से ऊँचाई $\bar{y} = \frac{a_1 y_1 - a_2 y_2}{a_1 - a_2}$ सूत्र से,

$$\bar{y} = \frac{16000 \times 80 - 3750 \times 97{\cdot}5}{16000 - 3750}$$

$$= \frac{914375}{12250} = 74{\cdot}643 \text{ mm}$$

अब $h_1 = g_1$ व G के बीच दूरी $= y_1 - \bar{y} = 80 - 74{\cdot}64 = 5{\cdot}36$ mm

$h_2 = g_2$ व G के बीच दूरी $= y_2 - \bar{y} = 97{\cdot}5 - 74{\cdot}64 = 22{\cdot}86$ mm

अत: $X-X$ अक्ष पर खोखले आयताकार काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I)

Scanned with CamScanner

$$I_{XX} = [I_{x_{g1}} + a_1 h_1^2] - [I_{x_{g2}} + a_2 h_2^2]$$

$$= \left[\frac{100 \times 160^3}{12} + 16000 \times 5{\cdot}36^2\right] - \left[\frac{50 \times 75^3}{12} + 3750 \times 22{\cdot}86^2\right]$$

$$= [34593006{\cdot}93] - [3717486]$$

$\therefore$ $I_{XX} = 30875520{\cdot}93 \text{ mm}^4$

या $I_{XX} = 3{\cdot}0875 \times 10^7 \text{ mm}^4$ उत्तर

अब $Y-Y$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण के लिये $H_1 = 0, H_2 = 0$ होगा।

$$I_{YY} = [I_{Y_{g1}} + a_1 H_1^2] - [I_{Y_{g2}} + a_2 H_2^2]$$

$$= \left[\frac{160 \times 100^3}{12} + 0\right] - \left[\frac{75 \times 50^3}{12} + 0\right] = 13333333{\cdot}33 - 781250$$

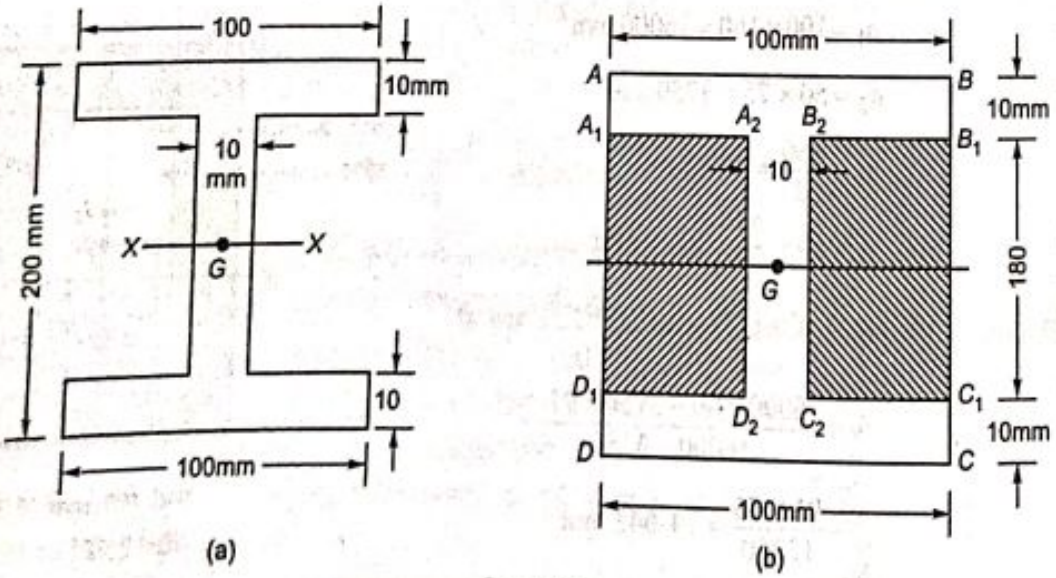
$I_{YY} = 12552083{\cdot}33 \text{ mm}^4 = 1{\cdot}25 \times 10^7 \text{mm}^4$ उत्तर

उदाहरण 4. चित्र 3.23 (a) में दिखाई गई एक I-काट का I_{XX}, I_{YY} तथा आकृति मापांक (Modulus of Section) ज्ञात कीजिये।

हल—चित्र 3.23 (b) देखें—

∵ दी गई I-काट (I-section), x-अक्ष (x-Axis) तथा y-अक्ष (y-Axis) दोनों के सममित (Symmetrical) है, इसलिये हमें गुरुत्व केन्द्र (C.G.) के लिये $\bar{X}$ या $\bar{Y}$ ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि गुरुत्व केन्द्र (G) कुल चौड़ाई (100 mm) तथा कुल गहराई (200 mm) के मध्य (middle) में होगा।

जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) ज्ञात करने के लिए बड़े आयत $ABCD$ के जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) में से अन्दर सिरों पर बने हैचिंग रेखाओं वाले आयतों (Rectangles) $A_1A_2D_2D_1$ तथा आयत $B_2B_1C_1C_2$ के जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.) को घटाकर प्राप्त करते हैं। जैसा कि नीचे गणना की गई है—



चित्र 3.23

$$\bar{I}_{XX} = \left[\frac{100 \times 200^3}{12} - \frac{90 \times 180^3}{12}\right]$$

Scanned with CamScanner

$$= 66666666{\cdot}67 - 43740000$$

$$= 22926666{\cdot}67 \text{ mm}^4$$

$$= 22{\cdot}92 \times 10^6 \text{ mm}^4$$ उत्तर

अब $$I_{YY} = \frac{10 \times 100^3}{12} + \frac{180 \times 10^3}{12} + \frac{10 \times 100^3}{12}$$

$$= 1681666{\cdot}667 \text{ mm}^4$$

$$= 1{\cdot}68 \times 10^6 \text{ mm}^4$$ उत्तर

आकृति मापांक (Modulus of Section)

$Z = \frac{I_{XX}}{y}$ सूत्र से (जहाँ $y = \frac{\text{काट की गहराई}}{2} = \frac{200}{2} = 100$)

$$= \frac{22{\cdot}92 \times 10^6}{100} = 22{\cdot}92 \times 10^4 \text{ mm}^3$$ उत्तर

उदाहरण 5. चित्र 3.24 (a) में दिखाई गई I-काट (I-Section) का x-अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I. at x-axis) I_{XX} तथा y-अक्ष (y-axis) पर जड़त्व आघूर्ण (I_{YY}) ज्ञात कीजिये। **(U.K. 2014, S)**

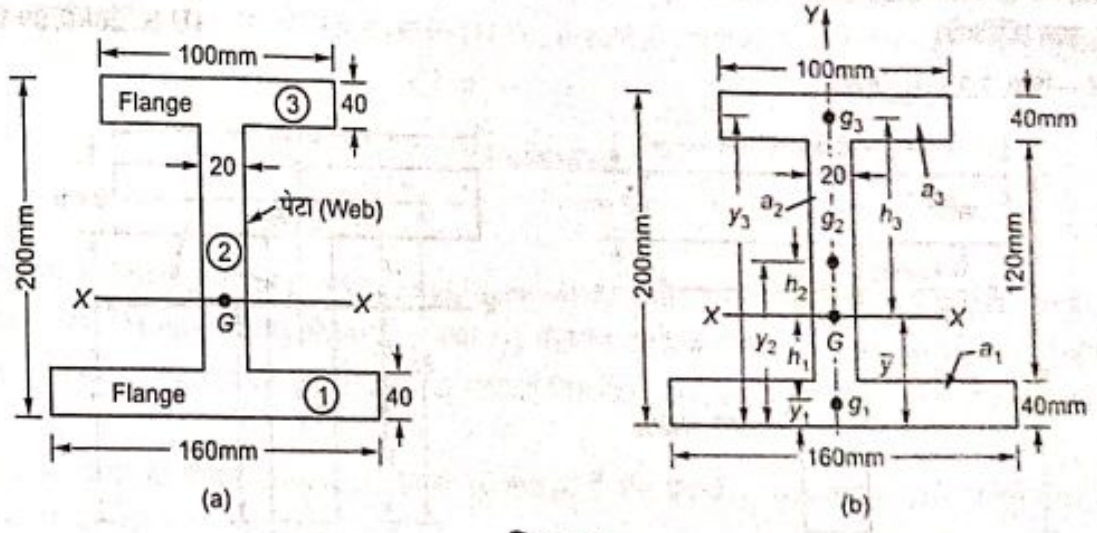
हल—चित्र 3.24 (b) में I-काट के तीनों आयताकार भागों के गुरुत्व केन्द्र (C.G.) क्रमश: g_1, g_2 तथा g_3 को प्रदर्शित कर, सबसे नीचे की रेखा से इनकी ऊचाँइयों को क्रमश: y_1, y_2 तथा y_3 को ज्ञात करते हैं तथा संयुक्त काट का गुरुत्व केन्द्र (C.G.) 'G' के लिये $\bar{y}$ ज्ञात करते हैं।,

माना इनके क्षेत्रफल क्रमश: a_1, a_2 तथा a_3 हैं।

∴ (1) आयत (Rectangle) का क्षेत्रफल (area), $a_1 = 160 \times 40 = 6400 \text{ mm}^2$

इसके गुरुत्व केन्द्र g_1 की ऊँचाई $(y_1) = \frac{40}{2} = 20 \text{ mm}$

(2) आयत का क्षेत्रफल (area), $a_2 = 20 \times 120 = 2400 \text{ mm}^2$



चित्र 3.24

इसके गुरुत्व केन्द्र g_2 की ऊँचाई $(y_2) = 40 + \frac{120}{2} = 100 \text{ mm}$

Scanned with CamScanner

(3) आयत (Rectangle) का क्षेत्रफल (area), $a_3 = 100 \times 40 = 4000\ mm^2$

अब केन्द्र (g_3) की ऊँचाई $y_3 = 200 - 20 = 180\ mm$

$\therefore$ $\bar{y} = \dfrac{a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3}{a_1 + a_2 + a_3}$ सूत्र से

$$\bar{y} = \frac{(6400 \times 20) + (2400 \times 100) + (4000 \times 180)}{6400 + 2400 + 400}$$

$$= 85\ mm$$

$\therefore$ चित्र 3.24 (b) के अनुसार $h_1 = \bar{y} - y_1 = 85 - 20 = 65\ mm$

इसी प्रकार $h_2 = g_2$ तथा G के बीच दूरी (Gap) $= y_2 - \bar{y} = 100 - 85 = 15\ mm$

तथा $h_3 = g_3$ और G के बीच दूरी (Gap) $= y_3 - \bar{y} = 180 - 85 = 95\ mm$

अत: $I_{xx} = [I_{xg_1} + a_1h_1^2] + [I_{xg_2} + a_2h_2^2] + [I_{xg_3} + a_3h_3^2]$ सूत्र से

$$= \left[\frac{160 \times 40^3}{12} + (6400 \times 65^2)\right] + \left[\frac{20 \times 120^3}{12} + (2400 \times 15^2)\right] + \left[\frac{100 \times 40^3}{12} + (4000 \times 95^2)\right]$$

$$= 67946666{\cdot}67\ mm^4$$ उत्तर

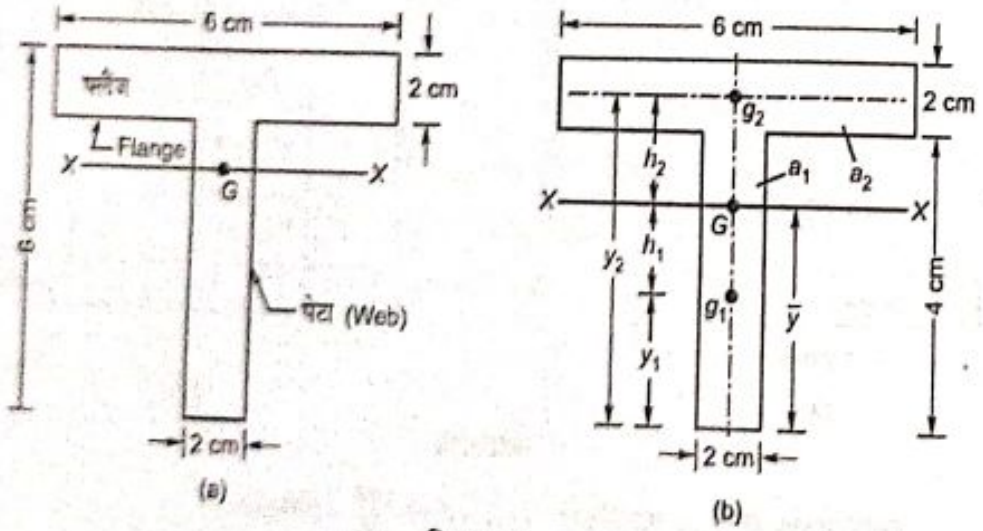
अब $I_{yy} = I_{yg_1} + I_{yg_2} + I_{yg_3}$ सूत्र से

$$= \left[\frac{40 \times 160^3}{12} + \frac{120 \times 20^3}{12} + \frac{40 \times 100^3}{12}\right]$$

$$= 17066666{\cdot}67\ mm^4$$ उत्तर

उदाहरण 6. चित्र 3.25 (a) में दिखाई गई T-काट का $X - X$ अक्ष (axis) पर जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) ज्ञात कीजिये। **(U.K. 2006, 09 W, 12 S)**

हल—चित्र 3.25 (b) देखें।



चित्र 3.25

Scanned with CamScanner

Web तथा Flange के आयत (Rectangle) के केन्द्र (centre) क्रमशः g_1 तथा g_2 की ऊँचाइयाँ y_1 तथा y_2 (सबसे नीचे की रेखा से) हैं। इनके क्षेत्रफल (areas) a_1 तथा a_2 हैं।

$\therefore$ वैब (Web) का क्षेत्रफल (area), $a_1 = 2 \times 4 = 8\ \text{cm}^2$

तथा फ्लैंज (Flange) का क्षेत्रफल $a_2 = 6 \times 2 = 12\ \text{cm}^2$

अब नीचे के किनारे से g_1 की ऊँचाई $y_1 = \frac{4}{2} = 2\ \text{cm}$

तथा नीचे के किनारे से g_2 की ऊँचाई $y_2 = 4 + 1 = 5\ \text{cm}$

$\therefore$ $\bar{y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2}$ सूत्र से [$\because$ y-axis के symmetrical है]

$$y = \frac{8 \times 2 + 12 \times 5}{8 + 12} = \frac{16 + 60}{20} = \frac{76}{20} = 3{\cdot}8\ \text{cm}$$

$$= 38\ \text{mm}$$

अब g_1 व G के बीच दूरी (Gap), $h_1 = \bar{y} - y_1$

$$= 3{\cdot}8 - 2 = 1{\cdot}8\ \text{cm}$$

तथा g_2 व G के बीच दूरी (Gap), $h_2 = y_2 - \bar{y}$

$$= 5 - 3{\cdot}8 = 1{\cdot}2\ \text{cm}$$

$\therefore$ $(X - X)$ axis पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I. at $X - X$ axis)

$$I_{xx} = [I_{xg_1} + a_1 h_1^2] + [I_{xg_2} + a_2 h_2^2]$$

$$= \left[\frac{2 \times 4^3}{12} + 8 \times 1{\cdot}8^2\right] + \left[\frac{6 \times 2^3}{12} + 12 \times 1{\cdot}2^2\right]$$

$$= 57{\cdot}8666\ \text{cm}^4 = 578666{\cdot}66\ \text{mm}^4 = 5{\cdot}78 \times 10^5\ \text{mm}^4$$ उत्तर

नोट—यदि हमें y-axix पर भी जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) अर्थात् I_{yy} ज्ञात करना हो तो निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं—

$I_{yy} = I_{yg1} + I_{yg2}$ सूत्र से

$$I_{yy} = \frac{4 \times 2^3}{12} + \frac{2 \times 6^3}{12} = 38{\cdot}66666\ \text{cm}^4$$

$$= 38{\cdot}66 \times 10^4\ \text{mm}^4$$ उत्तर

उदाहरण 7. चित्र 3.26 में दो L-काट (Angle Section) का संयोजन (combination) दिखाया गया है। संयोजन का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) I_{XX} तथा I_{YY} के मान उसके केन्द्रक (centroid) के परितः ज्ञात कीजिये।

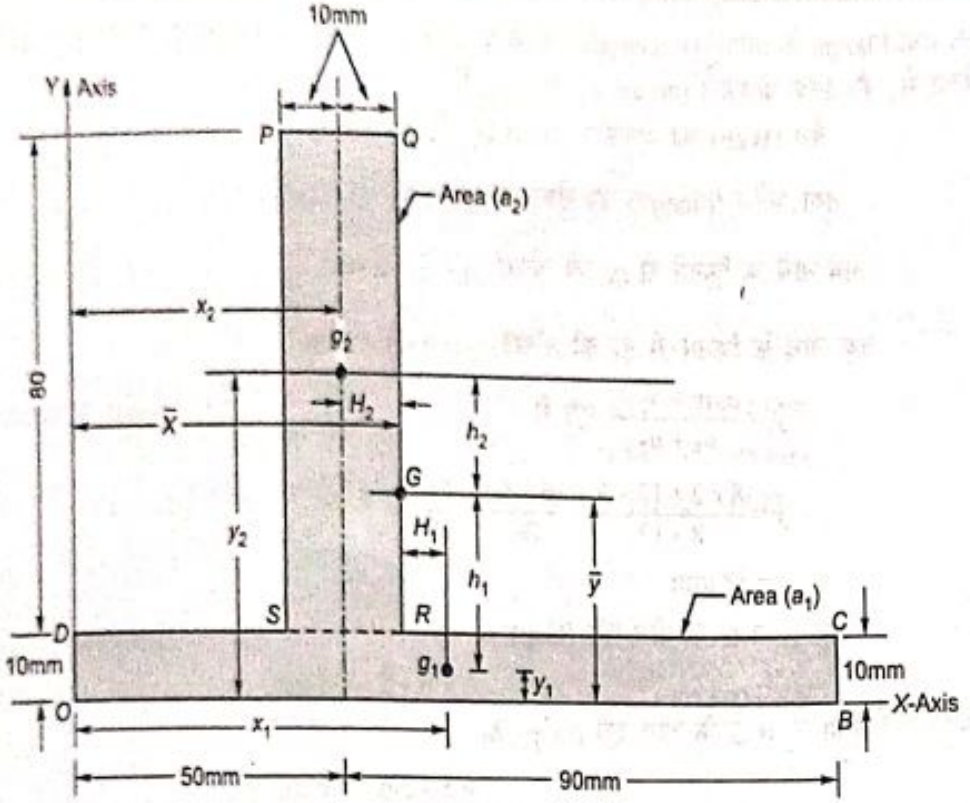
हल—चित्र 3.26 के अनुसार इस काट को दो भागों में विभाजित (divide) किया (जैसे आयत (Rectangle) $OBCD$ तथा आयत $PQRS$)

इन दोनों आयतों के केन्द्रक (centroid) क्रमशः g_1 तथा g_2 हैं और इनकी y-axis तथा x-axis से दूरियाँ क्रमशः x_1 व x_2 तथा y_1 व y_2 हैं।

$$x_1 = \frac{50 + 90}{2} = \frac{140}{2} = 70\ \text{mm}\ \text{तथा}\ x_2 = 50\ \text{mm}$$

$$y_1 = \frac{10}{2} = 5\ \text{mm} \qquad \text{तथा}\ y_2 = 10 + \frac{80}{2} = 50\ \text{mm}$$

Scanned with CamScanner



चित्र 3.26

आयत (Rectangle) *OBCD* का क्षेत्रफल (area) $a_1 = 140 \times 10 = 1400\ \text{mm}^2$

आयत (Rectangle) *PQRS* का क्षेत्रफल (area) $a_2 = 20 \times 80 = 1600\ \text{mm}^2$

∵ यह संयुक्त काट (Combined Section) x-axis और y-axis में से किसी के भी सममित (symmetrical) नहीं है, अतः हमें $\bar{X}$ तथा $\bar{Y}$ दोनों ही ज्ञात करने होंगे।

$$\therefore \quad \bar{X} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2}{a_1 + a_2} = \frac{(1400 \times 70) + (1600 \times 50)}{(1400 + 1600)} = 59{\cdot}33\ \text{mm}$$

तथा
$$\bar{Y} = \frac{a_1y_1 + a_2y_2}{a_1 + a_2} = \frac{(1400 \times 5) + (1600 \times 50)}{(1400 + 1600)} = 29\ \text{mm}$$

अब g_1 व G की अक्षों (axes) के बीच दूरी (Gap) h_1 तथा H_1 हैं और g_2 व G की अक्षों (axes) के बीच दमरी (Gap) h_2 तथा H_2 हैं।

$$\therefore \quad h_1 = \bar{y} - y_1 \text{ (चित्र से)}$$
$$= 29 - 5 = 24\ \text{mm}$$
$$H_1 = x_1 - \bar{x} \text{ (चित्र से)}$$
$$= 70 - 59{\cdot}33 = 10{\cdot}67\ \text{mm}$$

इसी प्रकार
$$h_2 = y_2 - \bar{y} \text{ (चित्र से)}$$
$$= 50 - 29 = 21\ \text{mm}$$
$$H_2 = \bar{x} - x_2 \text{ (चित्र से)}$$
$$= 59{\cdot}33 - 50 = 9{\cdot}33\ \text{mm}$$

Scanned with CamScanner

अब $I_{XX} = [I_{xg1} + a_1h_1^2] + [I_{xg2} + a_2h_2^2]$ (समान्तर अक्ष प्रमेय सूत्र से)

$$= \left[\frac{140 \times 10^3}{12} + 1400 \times 24^2\right] + \left[\frac{20 \times 80^3}{12} + 1600 \times 21^2\right]$$

$$= 818066 \cdot 6667 + 1558933 \cdot 333$$

$\therefore$ $I_{XX} = 2377000 \text{ mm}^4$ उत्तर

इसी प्रकार $I_{YY} = [I_{yg1} + a_1H_1^2] + [I_{yg2} + a_2H_2^2]$ (समान्तर अक्ष प्रमेय सूत्र से)

$$= \left[\frac{10 \times 140^3}{12} + 1400 \times 10 \cdot 67^2\right] + \left[\frac{80 \times 20^3}{12} + 1600 \times 9 \cdot 33^2\right]$$

$$= 2446055 \cdot 127 + 192611 \cdot 5733$$

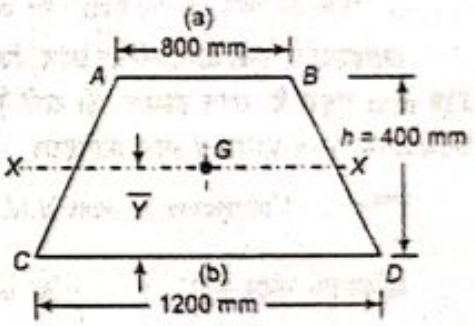
$$= 2638666 \cdot 7 \text{ mm}^4$$ उत्तर

उदाहरण 8. *ABCD* समलम्ब (trapezium), जिसमें *AB* 400 mm की दूरी पर *CD* के समानान्तर (Parallel) है, के लिए *CD* के निकट क्षेत्र का द्वितीय आघूर्ण (Second moment of area about *CD*) ज्ञात करें। यहाँ *AB* = 800 mm तथा *CD* = 1200 mm है। **(U.P. 2014, CIVIL)**

हल—(1) ∵ दिये गये समलम्ब (trapezium) के केन्द्रक (centroid) (*G*) की आधार *CD* से दूरी, $\bar{Y} = \frac{(2a+b)}{(a+b)} \times \frac{h}{3}$ सूत्र से

$$\bar{Y} = \frac{2 \times 800 + 1200}{800 + 1200} \times \frac{400}{3} = 1 \cdot 4 \times 133 \cdot 33 = 186 \cdot 67 \text{ mm}$$

(From base)



चित्र 3.27

(2) Second moment of area about base

$$I_{CD} = \frac{h^3}{12}(3a + b) \text{ सूत्र से}$$

$$= \frac{400^3}{12}(3 \times 800 + 1200) = 1 \cdot 92 \times 10^{10} \text{ mm}^4$$

OR (IInd Method)

(3) आधार *CD* के समान्तर, गुरुत्व केन्द्र *G* से जाने वाला $(X - X)$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.)

[M.O.I. about an axis, parallel to base and passing through centroid.]

$$I_X = \left[\frac{a^2 + 4ab + b^2}{a + b}\right] \times \frac{h^3}{36} \text{ सूत्र से}$$

$$I_{XX} = \left[\frac{800^2 + 4 \times 800 \times 1200 + 1200^2}{800 + 1200}\right] \times \frac{400^3}{36}$$

$$= 2960 \times 1777777 \cdot 78 = 5262222222$$

$$= 52 \cdot 6 \times 10^8 \text{ mm}^4$$ उत्तर

अब समान्तर अक्ष प्रमेय (Parallel axis theorem) के सूत्र से

$$I_{CD} = I_{XX} + \text{Area} \times H^2$$

Scanned with CamScanner

$$= 52{\cdot}6 \times 10^8 + \left(\frac{800+1200}{2}\right) \times 400 \times (186{\cdot}67)^2$$

$$= 1{\cdot}92 \times 10^{10} \text{ mm}^4$$ उत्तर

नोट—[Area of tropezium $= \frac{(a+b)}{2} \times h$ तथा $H = \bar{y}$ है (अक्ष से हटी दूरी)]

नमन समीकरण पर महत्वपूर्ण उदाहरण (Important Examples on Bending Equation)

उदाहरण 1. किसी कैन्टीलीवर के एक अनुप्रस्थ काट (cross-section) में उदासीन अक्ष (Neutral axis) से ऊपर की ओर 40 mm की दूरी पर 15 N/mm² का नमन प्रतिबल है। इस प्रतिबल की प्रकृति (Nature) कैसी है? उदासीन अक्ष से नीचे की ओर 80 mm की दूरी पर भी नमन प्रतिबल की मात्रा एवं प्रकृति की जाँच कीजिये।

हल—हम जानते हैं कि, कैन्टीलीवर पर भार लगाने से जब यह धरन नीचे की ओर झुकती है तो उदासीन अक्ष से ऊपर की परतों में तनाव प्रतिबल तथा नीचे की परतों में सम्पीडन प्रतिबल पैदा होते हैं।

प्रश्नानुसार, दूरी $y_t = 40$ mm पर तनाव प्रतिबल (f_t या σ_t) $= 15 \text{ N/mm}^2$

तथा नीचे की ओर की दूरी $y_c = 80$ mm पर सम्पीडन प्रतिबल (f_c या σ_c) = ? ज्ञात करना है।

अब सूत्र $\boxed{\frac{f_t}{y_t} = \frac{f_c}{y_c}}$ से $$f_c = \frac{f_t}{y_t} \times y_c = \frac{15}{40} \times 80 = 30 \text{ N/mm}^2$$

∴ नीचे की ओर 30 N/mm^2 का compressive stress होगा। उत्तर

उदाहरण 2. एक कैन्टीलीवर धरन, जिसकी लम्बाई 5 m है, का अनुप्रस्थ काट (X-Section) 40 mm चौड़ा तथा 120 mm गहरा है। धरन इस्पात की बनी है तथा इस पर 5 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। धरन में अधिकतम नमन प्रतिबल ज्ञात कीजिये।

हल—∵ Cantilever में Max B.M. $= w \times l \times \frac{l}{2}$ सूत्र से

अधिकतम नमन घूर्ण $$M = 5 \times 5 \times \frac{5}{2} = \frac{125}{2} = 62{\cdot}5 \text{ kN-m}$$

$$= 62{\cdot}5 \times 10^6 \text{ N-mm}$$

तथा जड़त्वाघूर्ण (Moment of Inertia),

$$I = \frac{b \times h^3}{12} \text{ (सूत्र)}$$

∴ $$I = \frac{40 \times (120)^3}{12} = 5760000 \text{ mm}^4$$

$$y = \frac{\text{गहराई } (h)}{2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ mm}$$

अधिकतम नमन प्रतिबल (Max Bending Stress) σ_b = ?

∴ $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$ सूत्र से,

$$\frac{62{\cdot}5 \times 10^6}{5760000} = \frac{\sigma_b}{60}$$

या $$\sigma_b = 651{\cdot}04 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 3. एक कैन्टीलीवर की लम्बाई 3 m है। इसके लिये अनुमेय प्रतिबल (permissible stress) का मान 120 MPa और इसकी आयताकार काट की गहराई 257 mm है। यदि गहराई, चौड़ाई की $2\frac{1}{2}$ गुनी है, तो कैन्टीलीवर पर समान बँटा कुल भार (Total Load of U.D.L.) कितना लगाया जा सकता है? [उत्तर : 90·53 kN]

हल—दिया है, $l = 3 \text{ m} = 3000 \text{ mm}$

प्रतिबल (Stress) $\sigma = 120 \text{ MPa} = 120 \text{ N/mm}^2$

काट की गहराई $h = 257 \text{ mm}$

माना काट की चौड़ाई (width) b है, तो दिया है,

$$h = \frac{5}{2} \times b \text{ या } (h = 2{\cdot}5 \times b)$$

$$\therefore \quad b = \frac{h}{2{\cdot}5} = \frac{257}{2{\cdot}5} = 102{\cdot}8 \text{ mm}$$

सूत्र से $$y = \frac{h}{2} = \frac{257}{2} = 128{\cdot}5 \text{ mm}$$

Cantilever में अधिकतम नमन घूर्ण (B.M.)

$$M = (w \times l) \times \frac{l}{2} = (\text{U.D.L. का कुल भार } W) \times \frac{l}{2}$$

या $$M = W \times \frac{3000}{2} = W \times 1500 \text{ kN-mm} = W \times 1500 \times 1000 \text{ N-mm}$$

$$M = 1500000 \times W \text{ N-mm}$$

जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.), $$I = \frac{b \times h^3}{12} \quad \text{(सूत्र)}$$

$$\therefore \quad I = \frac{102{\cdot}8 \times (257)^3}{12} = 145415680 \text{ mm}^4$$

अब $\boxed{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}}$ सूत्र से (मान रखने पर)

$$\frac{1500000 \times W}{145415680} = \frac{120}{128{\cdot}5}$$

$$W = \frac{120 \times 145415680}{1500000 \times 128{\cdot}5}$$

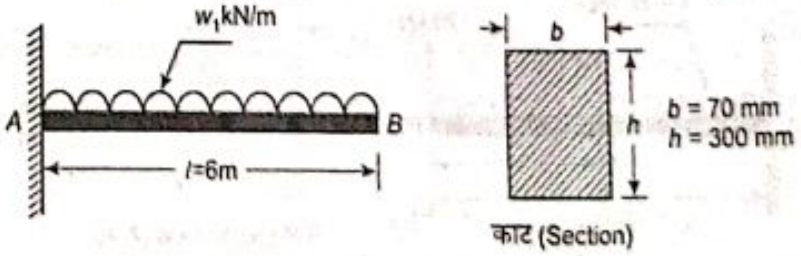
$$= 90{\cdot}53 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 4. एक 6 m लम्बी कैन्टीलीवर धरन के सैक्शन की गहराई तथा चौड़ाई क्रमशः 300 mm तथा 70 mm हैं। यदि धरन में अनुज्ञेय प्रतिबल की तीव्रता 120 MPa हो तो निम्नलिखित को ज्ञात कीजिये—

(i) धरन के सम्पूर्ण स्पैन पर अधिकतम UDL

(ii) स्पैन के मध्य 4 m पर अधिकतम UDL [उत्तर : 7 kN/m, 10·5 kN/m]

हल—



चित्र 3.28

Scanned with CamScanner

∵ नमन प्रतिबल (Bending Stress) $\sigma = 120 \text{ MPa} = 120 \text{ N/mm}^2$

तथा जड़त्वाघूर्ण (M.O.I), $I = \frac{bh^3}{12} = \frac{70 \times (300)^3}{12} = 157500000$

B.M. $(M) = (w_1 \times l) \times \frac{l}{2}$ सूत्र से

∴ B.M. $(M) = w_1 \times 6 \times \frac{6}{2} \text{ kN-m} = 18 \times w_1 \times 10^6 \text{ N-mm}$

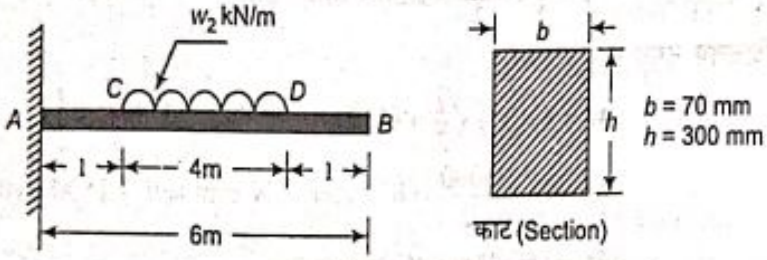
तथा $y = \frac{h}{2} = \frac{300}{2} = 150 \text{ mm}$

अब नमन समीकरण से, $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$

∴ $\frac{18 \times 10^6 \times w_1}{157500000} = \frac{120}{150}$

या $w_1 = 7 \text{ kN/m}$ उत्तर

✓Part (ii)



चित्र 3.29

$I = \frac{bh^3}{12} = 157500000 \text{ mm}^4$

अधिकतम नमन घूर्ण (B.M.) $M = (w_2 \times 4) \times (1+2) = 12w_2 \text{ kN-m}$

$= 12 \times 10^6 \times w_2 \text{ N-mm}$

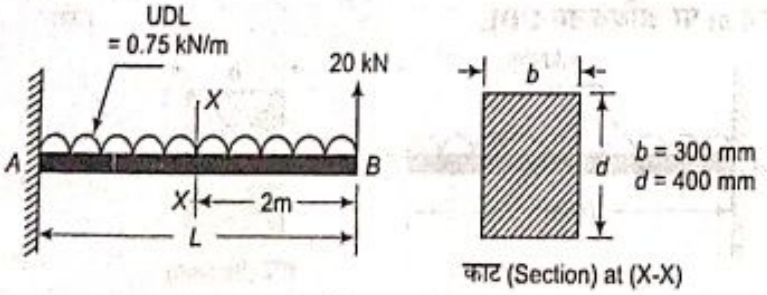
$\sigma = 120 \text{ N/mm}^2$, $y = \frac{300}{2} = 150 \text{ mm}$

अब $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$ से, $\frac{12 \times 10^6 \times w_2}{157500000} = \frac{120}{150}$

या $w_2 = 10{\cdot}5 \text{ kN/m (U.D.L.)}$ उत्तर

उदाहरण 5. एक Cantilever beam की पूर्ण लम्बाई पर 0·75 kN/m का समान बँटा भार (U.D.L.) तथा स्वतन्त्र सिरे (Free end) पर एक बल (Force) ऊपर की ओर (upward) 20 kN का लगा है। यदि इस Beam के काट की गहराई 400 mm तथा चौड़ाई 300 mm है तो Beam के स्वतन्त्र सिरे (Free End) से 2m की दूरी पर अधिकतम नमन प्रतिबल (Max Bending Stress) ज्ञात कीजिये।

हल—



चित्र 3.30

Scanned with CamScanner

Free end से 2m की दूरी पर Max Bending Moment $(X-X)$ काट पर,

$$M = 20\times 2 - 0{\cdot}75\times 2\times\frac{2}{2}$$
$$= 38{\cdot}5 \text{ kN-m}$$
$$= 38{\cdot}5\times 10^6 \text{ N-mm}$$

जड़त्वाघूर्ण (MOI), $$I = \frac{bd^3}{12} = \frac{300\times 400^3}{12} = 16\times 10^8 \text{ mm}^4$$

$$y = \frac{d}{2} = \frac{400}{2} = 200 \text{ mm}$$

माना काट (X – X) पर Max Bending Stress σ है।

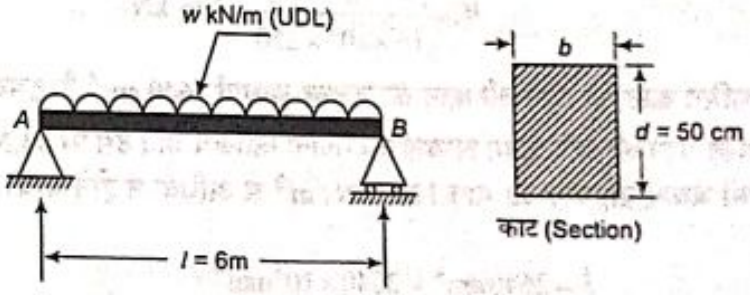
अब $$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} \text{ से } \sigma = \frac{My}{I} \text{ (सूत्र)}$$

$\therefore$ $$\sigma = \frac{38{\cdot}5\times 10^6\times 200}{16\times 10^8} = 4{\cdot}81 \text{ N/mm}^2$$

$\therefore$ $\boxed{\sigma = 4{\cdot}81 \text{ MPa}}$ उत्तर

उदाहरण 6. एक आयताकार काट की धरन 50 cm मोटी है एवं उदासीन अक्ष के परितः जड़ता आघूर्ण 40000 cm^4 है। धरन 6 m पर शुद्धालम्बित है एवं पूर्ण लम्बाई पर समवितरित भार लगा है। यदि अधिकतम नमन प्रतिबल 165 N/mm^2 से अधिक न होता हो तो वह भार ज्ञात करिये जो कि यह धारण कर सकती है। विकल्पतया इसी धरन की लम्बाई के मध्य में कितना कुल केन्द्रित भार लगाया जा सकता है?

हल—



चित्र 3.31

दिया है depth $(d) = 50$ cm

$\therefore$ $$d = 500 \text{ mm}$$

तथा $$y = \frac{d}{2} = 250 \text{ mm}$$

$$I = 40000 \text{ cm}^4$$

या $$I = 4\times 10^8 \text{ mm}^4$$

Max Bending Stress $(\sigma_b) = 165 \text{ N/mm}^2$ है

Max Bending Moment $(M) = \frac{wl^2}{8}$ सूत्र से

$\therefore$ $$M = \frac{w\times 6^2}{8} \text{ kN-m} = \frac{36}{8}\times 10^6 \times w \text{ N-mm}$$
$$= 45\times 10^5 \times w \text{ N-mm}$$

Scanned with CamScanner

अब $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$ से

$$\frac{45 \times 10^5 \times w}{4 \times 10^8} = \frac{165}{250}$$

$\therefore$ $\boxed{w = 58{\cdot}667 \text{ kN/m}}$

यहाँ w भार प्रति मीटर लम्बाई है।

(ii) यदि Beam पर U.D.L. के स्थान पर Beam के मध्य में एक बिन्दु भार (Point Load) W लगाया जाता है तो अधिकतम नमन घूर्ण (Max B.M.), $M = \frac{Wl}{4}$ (सूत्र)

$\therefore$ $M = \frac{W \times 6}{4}$ kN-m

$$= \frac{W \times 6}{4} \times 10^6 \text{ N-mm} = 15 \times 10^5 \times W$$

अब पुनः $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$ से

$$\frac{15 \times 10^5 \times W}{4 \times 10^8} = \frac{165}{250}$$

$\therefore$ धरन पर केन्द्रीय बिन्दु भार (Point Load at Centre)

$$W = \frac{4 \times 10^8 \times 165}{15 \times 10^5 \times 250} = 176 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 7. एक सममित काट की धरन की काट का जड़त्व आघूर्ण 2640 cm^4 है। इसकी गहराई 20 cm है। इस प्रकार की साधारण आधारित धरन की अधिकतम लम्बाई की गणना कीजिये यदि उस पर 6 kN/m का समवितरित भार पूरी धरन पर लगाने पर भी बंकन प्रतिबल का मान 120 MN/m^2 से अधिक न होने पाये। **(U.P. 2003)**

[उत्तर : 6·499 m]

हल—दिया है, $I = 2640 \text{ cm}^4 = 2640 \times 10^4 \text{mm}^4$

काट की गहराई $d = 20 \text{ cm} = 200 \text{ mm}$ है, अतः $y = \frac{d}{2} = 100 \text{ mm}$

माना धरन (Beam) की लम्बई = l मीटर है।

$\therefore$ Beam पर 6 kN/m का U.D.L. के कारण अधिकतम नमन घूर्ण (Max B.M.), $M = \frac{wl^2}{8}$ सूत्र से

$$M = \frac{6 \times l^2}{8} \text{ kN-m} = \frac{6}{8} \times 10^6 \times l^2 \text{ N-mm}$$

$\therefore$ $M = 750000 \times l^2$ N-mm

$\therefore$ अधिकतम नमन प्रतिबल (Bending Stress) $\sigma = 120 \text{ MN/m}^2$

$\therefore$ $\sigma = 120 \text{ N/mm}^2$

अब $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$ से,

Scanned with CamScanner

$$\frac{750000 \times l^2}{2640 \times 10^4} = \frac{120}{100}$$

$$\therefore \quad l^2 = \frac{2640 \times 120}{75 \times 100} = 42{\cdot}24$$

या $$l = 6{\cdot}499 \text{ metre}$$ उत्तर

उदाहरण 8. एक काष्ठ धरन की विमायें ज्ञात कीजिए जिसका विस्तार 10 मी० है तथा जो एक 0·2 मी० मोटी एवं 4 मी० ऊँचाई की ईंट की दीवार को वहन करती है। ईंट की चिनाई का भार 19 kN/m^3 है तथा काष्ठ धरन में अधिकतम अनुमेय प्रतिबल 8 kN/m^3 तक सीमित है। धरन की गहराई उसकी चौड़ाई की दो गुनी है। **(U.P. 2004, S10)**

[उत्तर : $b = 0{\cdot}33$ m, $d = 0{\cdot}66$ m

हल—माना धरन (Beam) की आयताकार काट (Rectangular Section) b मीटर चौड़ी तथा d मीटर गहरी है। विस्तार (span) 10 मीटर है। इस पर बनी दीवार का भार U.D.L रूप में होगा।

$$\therefore \quad \text{U.D.L. का मान } (w \text{ kN/m}) = \frac{\text{कुल भार kN में}}{\text{लम्बाई मीटर में}}$$

या $$w = \frac{(0{\cdot}2 \times 4 \times 10) \times 19}{10} = 15{\cdot}2 \text{ kN/m}$$

$$\therefore \text{ Max B.M.} \quad (M) = \frac{wl^2}{8} \text{ सूत्र से}$$

$$\therefore \quad M = \frac{15{\cdot}2 \times 10^2}{8} \text{ kN-m} = \frac{1520}{8} \times 1000 \text{ N-m}$$

$$\therefore \quad M = 19 \times 10^4 \text{ N-m}$$

$$I = \frac{b \times d^3}{12} = \frac{b \times (2b)^3}{12} = \frac{8}{12} \times b^4 = \frac{2}{3} \times b^4 \text{ m}^4$$

Max Bending Stress $$(\sigma) = 8 \text{ MN/m}^2 = 8 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \qquad [\therefore 1 \text{ MN} = 10^6 \text{N}]$$

$$y = \frac{d}{2} = \frac{2b}{2} = b \text{ in metre}$$

अब $$\boxed{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}} \text{ से}$$

$$\frac{19 \times 10^4}{2/3 \times b^4} = \frac{8 \times 10^6}{b}$$

या $$b^3 = \frac{19 \times 3}{2 \times 8 \times 100}$$

$$\therefore \quad b^3 = 0{\cdot}035625$$

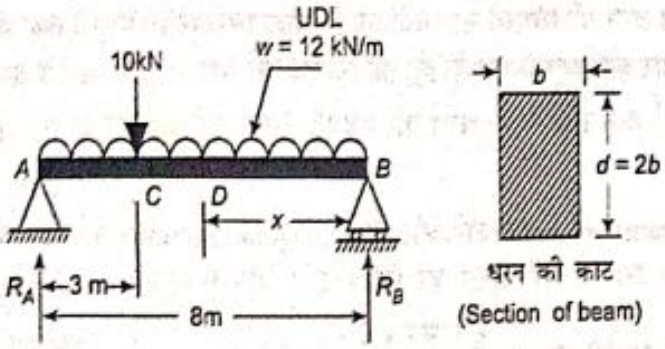
या $$b = 0{\cdot}33 \text{ m}$$

तथा $$d = 2b = 0{\cdot}66 \text{ m}$$

Scanned with CamScanner

उदाहरण 9. एक टिम्बर की आयताकार काट की धरन (Beam) जो 8 m लम्बी है, सामान्य रूप से आलम्बित (Simply supported beam) है। इस धरन पर 12 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) पूरी लम्बाई में लगा है तथा बायें सिरे (left end) से 3 m की दूरी पर एक 10 kN का बिन्दु भार (Point Load) लगा है। यदि गहराई (d) = 2 × चौड़ाई (b) है तथा टिम्बर में प्रतिबल (stress) 8 N / mm^2 से अधिक नहीं होना है तो धरन (beam) के काट की उपयुक्त विमायें ज्ञात करें। (U.P.2010)

हल—



चित्र 3.32

∵ नमन प्रतिबल (bending stress)

$$\sigma_b = 8 \text{ N/mm}^2$$

$$I = \frac{b \times (2b)^3}{12} = \frac{8}{12} b^4$$

$$\therefore \quad I = \frac{2}{3} \times b^4$$

∵ चित्र से, $R_A + R_B = 10 + 12 \times 8 = 106$ kN

A पर Moment लेने से, $R_B \times 8 = 10 \times 3 + 12 \times 8 \times \frac{8}{2} = 414$

$$\therefore \quad R_B = \frac{414}{8} = 51{\cdot}75 \text{ kN}$$

तथा $R_A = 106 - 51{\cdot}75 = 54{\cdot}25$ kN

माना B से x दूरी पर नमन घूर्ण (B.M.) अधिकतम (Max) होता है।

$$\therefore \quad M_x = R_B.x - 12.x.\frac{x}{2}$$

$$M = 51{\cdot}75x - 6x^2 \qquad \text{... (i)}$$

$$\therefore \quad \frac{dM}{dx} = 51{\cdot}75 \times 1 - 6 \times 2x \qquad \text{(अवकलित करने पर)}$$

अब B.M. (M) के अधिकतम मान के लिये $\frac{dM}{dx} = 0$ रखना होगा

$$\therefore \quad 0 = 51{\cdot}75 - 12x$$

या $$x = \frac{51{\cdot}75}{12} = 4{\cdot}3125 \text{ m}$$

Scanned with CamScanner

∴ x का यह मान समीकरण (i) में रखने पर अधिकतम B.M. (M),

$$M = 51{\cdot}75 \times 4{\cdot}3125 - 6 \times (4{\cdot}3125)^2$$

$$= 111{\cdot}586 \text{ kN-m} = 111{\cdot}586 \times 10^6 \text{ N-mm}$$

$$y = \frac{d}{2} = \frac{2b}{2} = b$$

अब $\boxed{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}}$ से,

$$\frac{111{\cdot}586 \times 10^6}{\frac{2}{3} \times b^4} = \frac{8}{b}$$

या $$b^3 = \frac{3 \times 111{\cdot}586 \times 10^6}{2 \times 8}$$

∴ $$b^3 = 20922375$$

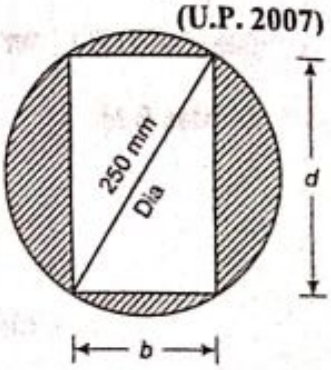
या $$b = 275{\cdot}552 \text{ mm}$$

तथा काट की गहराई $$d = 2b = 551{\cdot}104 \text{ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 10. (i) 250 mm व्यास के लकड़ी के लट्ठे में से अधिकतम शक्ति (maximum strength) की काटी जा सकने वाली आयताकार काट की माप ज्ञात करो। **(U.P. 2007)**

(ii) यदि आयताकार काट की बनी Beam को सरल टेकों वाली धरन के रूप में प्रयोग करें तो इसका सुरक्षित विस्तार (Span of beam) ज्ञात करें जबकि इसकी पूरी लम्बाई में 2·5 kN/m का U.D.L. भार लगा है तथा नमन प्रतिबल की सीमा 10 MN/m² है।

(iii) वृत्ताकार लट्ठे (Circular log) को ही एक Beam के रूप में प्रयोग करें तो कितना अधिकतम लम्बाई का विस्तार (Span) होगा?



चित्र 3.33

हल—(i) For dimensions of Strongest Section

∵ $$b^2 + d^2 = 250^2$$

या $$d^2 = (250^2 - b^2) \quad \text{... (i)}$$

∵ काट की अधिकतम शक्ति के लिये उस काट का आकृति मापांक (Section Modulus) Z भी अधिकतम होना चाहिये।

∴ $$Z = \frac{I}{y} = \frac{\frac{b \times d^3}{12}}{\frac{d}{2}} = \frac{1}{6} \times b \times d^2$$

$$Z = \frac{1}{6} \times b \times (250^2 - b^2)$$

∴ $$Z = \frac{250^2}{6} \times b - \frac{1}{6} \times b^3$$

Scanned with CamScanner

अब $$\frac{dZ}{db} = \frac{250^2}{6} \times 1 - \frac{1}{6} \times 3b^2$$

∵ काट की अधिकतम शक्ति के लिये, $\frac{dZ}{db} = 0$ होगा

∴ $$\frac{1}{6} \times 3b^2 = \frac{250^2}{6}$$

या $$b^2 = \frac{250^2}{3}$$

या $$b = \frac{250}{\sqrt{3}}$$

अत: $$b = 144{\cdot}34 \text{ mm}$$ उत्तर

समीकरण (i) से $$d^2 = 250^2 - b^2$$

$$= 250^2 - \frac{250^2}{3} = 250^2 \times \frac{2}{3}$$

∴ $$d = 250 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 204{\cdot}12 \text{ mm}$$ उत्तर

(ii) For Safe Maximum Span of Beam (*l*)—

दिया है, $$\sigma = 10 \text{ MN/m}^2 \Rightarrow 10 \text{ N/mm}^2$$

Beam पर U.D.L. भार $$w = 2{\cdot}5 \text{ kN/m}$$ है

∴ Max B.M. $$(M) = \frac{wl^2}{8} = \frac{2{\cdot}5 \times l^2}{8} \times 10^6 \text{ N-mm}$$

$$M = 312500 \times l^2 \text{ N-mm}$$

$$I = \frac{bd^3}{12} = \frac{144{\cdot}34 \times (204{\cdot}12)^3}{12} = 102296820{\cdot}1 \text{ mm}^4$$

$$y = \frac{d}{2} = \frac{204{\cdot}12}{2} = 102{\cdot}06 \text{ mm}$$

अब $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$ नमन समीकरण (bending equation) से—

$$\frac{312500 \times l^2}{102296820{\cdot}1} = \frac{10}{102{\cdot}06}$$

∴ $$l^2 = 32{\cdot}074$$

या $$l = 5{\cdot}66 \text{ metre}$$ उत्तर

(iii) For longest Span of Circular beam (*l*)—

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi (250)^4}{64} = 191650390{\cdot}6$$

$$y = \frac{D}{2} = \frac{250}{2} = 125 \text{ mm}$$

$$M = \frac{wl^2}{8} = \frac{2{\cdot}5 \times l^2}{8} \text{ kN-m} = \frac{2{\cdot}5\ l^2}{8} \times 10^6 \text{ N-mm}$$

Scanned with CamScanner

$$= 312500 \times l^2 \text{ N-mm}$$

$\sigma = 10 \text{ N/mm}^2$ दिया है।

$$\therefore \frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} \text{ से } \quad \frac{312500\, l^2}{191650390 \cdot 6} = \frac{10}{125}$$

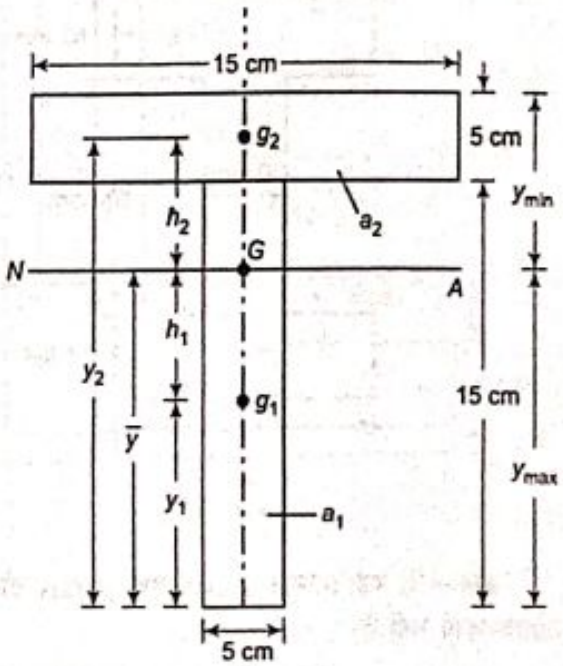
या $$l^2 = 49 \cdot 0625$$

या $$l = 7 \cdot 00 \text{ metre}$$ उत्तर

उदाहरण 11. एक T-काट की धरन का परिच्छेद चित्र 3.34 में दिखाया गया है। इस पर 3·4 kN-m का अधिकतम नमन आघूर्ण (B.M.) लगा है तो इसमें उत्पन्न अधिकतम प्रतिबलों के मान एवं प्रकृति (Nature) ज्ञात करें। **(U.K. 2014; U.P. 2007)**

हल—

दी गई T-काट, y-axis के सममित (symmetrical) है। अत: G की स्थिति के लिए केवल $\bar{y}$ ही ज्ञात करना होगा।



चित्र 3.34

यहाँ $$a_1 = 15 \times 5 = 75 \text{ cm}^2$$

$$a_2 = 15 \times 5 = 75 \text{ cm}^2$$

$$y_1 = \frac{15}{2} = 7 \cdot 5 \text{ cm}$$

$$y_2 = 15 + \frac{15}{2} = 17 \cdot 5 \text{ cm}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2} = \frac{75 \times 7 \cdot 5 + 75 \times 17 \cdot 5}{75 + 75} = 12 \cdot 5 \text{ cm}$$

अब $$g_1G = h_1 = \bar{y} - y_1 = 12 \cdot 5 - 7 \cdot 5 = 5 \text{ cm}$$

तथा $$g_2G = h_2 = y_2 - \bar{y} = 17 \cdot 5 - 12 \cdot 5 = 5 \text{ cm}$$

$\therefore$ जड़त्वाघूर्ण (MOI),

$$I = [I \times g_1 + a_1 h_1^2] + [I \times g_2 + a_2 h_2^2]$$

$\therefore$

$$I = \left[\frac{5 \times 15^3}{12} + 75 \times 5^2\right] + \left[\frac{15 \times 5^3}{12} + 75 \times 5^2\right]$$

$$= 5312 \cdot 5 \text{ cm}^4 = 5312 \cdot 5 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$y_{max} = \bar{y} = 12 \cdot 5 \text{ cm} = 125 \text{ mm}$$

$$y_{min} = 20 - \bar{y} = 20 - 12 \cdot 5 = 7 \cdot 5 \text{ cm} = 75 \text{ mm}$$

$\boxed{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}}$ नमन समीकरण से, (यहाँ $M = 3 \cdot 4$ kN-m, $= 3 \cdot 4 \times 10^6$ N-mm)

$(N-A)$ से नीचे की ओर अधिकतम दूरी y_{max} पर तनाव प्रतिबल (tensile stress)

$$\sigma_t = \frac{M}{I} \times y_t$$

$$\sigma_t = \frac{3 \cdot 4 \times 10^6}{5312 \cdot 5 \times 10^4} \times 125 = 8 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

$(N-A)$ से ऊपर की ओर अधिकतम दूरी $y_2 = y_{min} = 75$ mm पर सम्पीडन प्रतिबल (Compressive Stress),

Scanned with CamScanner

$$\sigma_c = \frac{M}{I} \times y_c$$

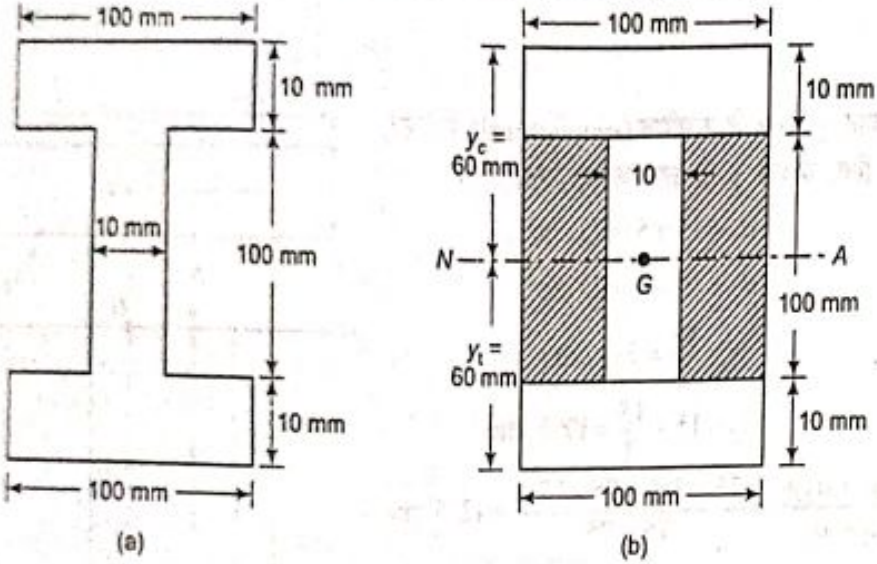
$$\therefore \quad \sigma_c = \frac{3{\cdot}4 \times 10^6}{5312{\cdot}5 \times 10^4} \times 75 = 4{\cdot}8 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

उदाहरण 12. चित्र 3.35 (a) में एक I-परिच्छेद को दर्शाया गया है। इस धरन की लम्बाई 6 m है तथा इसके दोनों सरल आधारित सिरों से 2m की दूरी पर दो 10 kN संकेन्द्री भार लगाये गये हैं। ज्ञात कीजिये–

(i) इस परिच्छेद का उदासीन अक्ष के सापेक्ष क्षेत्र का द्वितीय आघूर्ण

(ii) धरन में उत्पन्न अधिकतम तनन तथा संपीडन प्रतिबल एवं वह परिच्छेद जहाँ पर यह प्रतिबल है।

[उत्तर : $6{\cdot}9 \times 10^6$ mm^4, प्रत्येक $173{\cdot}91$ N/mm^2, धरन के बीच के 2 m भाग पर] (UP 2009)



चित्र 3.35

हल—दी गई I-काट x-axis तथा y-axis दोनों के सममित (symmetrical) हैं। अत: $\bar{x}$ तथा $\bar{y}$ ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं है।

$$\therefore \quad I = \left[\frac{100 \times 120^3}{12} - \frac{90 \times 100^3}{12}\right]$$

$$= 6900000 \text{ mm}^4$$

तथा $$y = \frac{120}{2} = 60 \text{ mm}$$

(i) परिच्छेद का उदासीन अक्ष (N–A) के सापेक्ष द्वितीय घूर्ण (IInd Moment) अथवा जड़ता घूर्ण (Moment of Inertia)

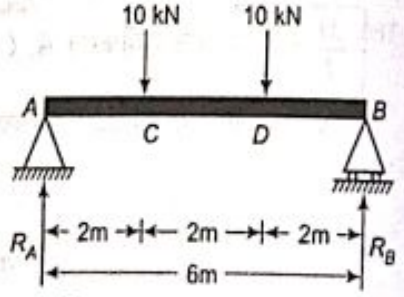
$$I = 6900000 \text{ mm}^4 = 6{\cdot}9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

उत्तर

(ii) चित्र (c) से $R_A = R_B = 10$ kN

$\therefore$ Max BM $(M) = R_B \times 2 = 10 \times 2$

$$M_C = M_D = M_{max} = 20 \text{ kN-mm} = 20 \times 10^6 \text{ N-mm}$$



चित्र 3.36 : Loaded Beam

Scanned with CamScanner

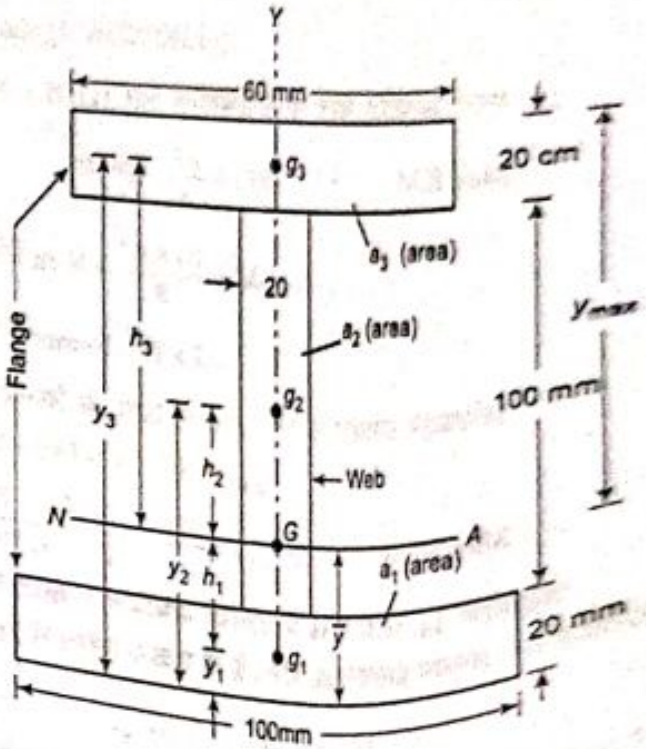
∵ धरन (Beam) की काट में उदासीन अक्ष (Neutral Axis = NA) से ऊपर तथा नीचे के किनारों की दूरियाँ समान हैं अर्थात् तनाव प्रतिबल (σ_t) की दूरी y_t = सम्पीडन प्रतिबल (σ_c) की दूरी (y_c), अत: प्रतिबल (stresses) भी दोनों किनारों पर समान होंगे

$$\therefore \quad \sigma_t = \sigma_c = \frac{M \times y}{I} = \frac{20 \times 10^6 \times 60}{69 \times 10^5} = 173{\cdot}91 \text{ N/mm}^2$$

ये stress, धरन (Beam) के बीच की लम्बाई 2 m पर होंगे।

उदाहरण 13. एक चार मीटर (4 m) लम्बे धरन (Beam) के ऊपर 10 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। धरन का परिच्छेद (Section) चित्र 3.37 में दिखाया गया है। इस काट पर अधिकतम प्रतिबल ज्ञात करो।

(U.K. 2012-13 (W), 2013 (S))



चित्र 3.37

हल— $a_1 = 100 \times 20 = 2000 \text{ mm}^2$

$a_2 = 100 \times 20 = 2000 \text{ mm}^2$

$a_3 = 60 \times 20 = 1200 \text{ mm}^2$

$y_1 = \frac{20}{2} = 10 \text{ mm}$

$y_2 = 20 + \frac{100}{2} = 70 \text{ mm}$

$y_3 = 20 + 100 + 10 = 130 \text{ mm}$

∵ y-axis के symmetrical है, इसलिये G की स्थिति केवल $\bar{y}$ से ज्ञात होगी।

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3}{a_1 + a_2 + a_3} \text{ सूत्र से}$$

$$= \frac{2000 \times 10 + 2000 \times 70 + 1200 \times 130}{2000 + 2000 + 1200}$$

$$= \frac{316000}{5200} = 60{\cdot}77 \text{ mm}$$

अब $h_1 = g_1$ व G के बीच दूरी $= \bar{y} - y_1$

$$\therefore \quad h_1 = 60{\cdot}77 - 10 = 50{\cdot}77 \text{ mm}$$

$h_2 = g_2$ व G के बीच दूरी $= y_2 - \bar{y}$

$$= 70 - 60{\cdot}77 = 9{\cdot}23 \text{ mm}$$

$h_3 = g_3$ व G के बीच दूरी $= y_3 - \bar{y}$

$$= 130 - 60{\cdot}77 = 69{\cdot}23 \text{ mm}$$

$$\therefore \quad I_{xx} = [I_{xg_1} + a_1 h_1^2] + [I_{xg_2} + a_2 h_2^2] + [I_{xg_3} + a_3 h_3^2]$$

Scanned with CamScanner

$$= \left[\frac{100\times 20^3}{12} + 2000\times 50\cdot 77^2\right] + \left[\frac{20\times 100^3}{12} + 2000\times 9\cdot 23^2\right] + \left[\frac{60\times 20^3}{12} + 1200\times 69\cdot 23^2\right]$$

$$= 12850256\cdot 41 \text{ mm}^4$$

∵ सरल आधारित धरन या समवितरित भार (UDL) लगा है

∴ Max B.M. $(M) = \frac{wl^2}{8}$ सूत्र से

$$M = \frac{10\times 4^2}{8} \text{ kN-m} = \frac{10\times 16}{8}\times 10^6 \text{ N-mm}$$

$$= 2\times 10^7 \text{ N-mm}$$

∵ अधिकतम प्रतिबल के लिये NA से ऊपर के किनारे की दूरी अधिक होगी। अत:

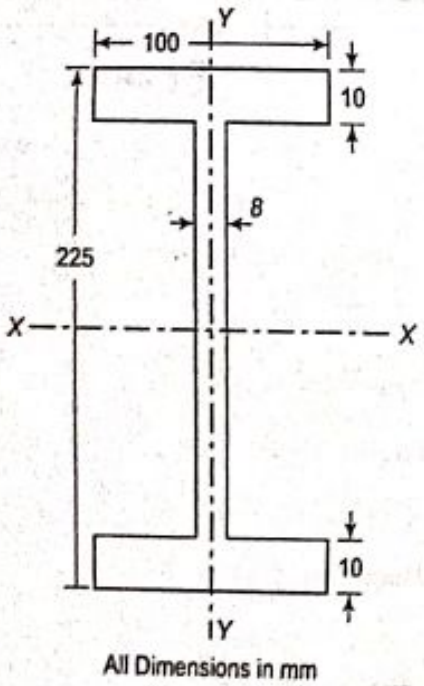
$$y_{max} = 140 - \bar{y} = 140 - 60\cdot 77 = 79\cdot 23 \text{ mm}$$

∴ Max Stress $(\sigma_{max}) = \frac{My}{I} = \frac{2\times 10^7 \times 79\cdot 23}{12850256\cdot 41} = 123\cdot 31 \text{ N/mm}^2$

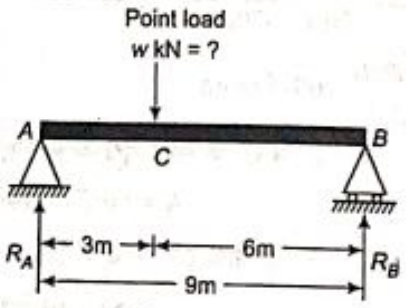
उत्तर

उदाहरण 14. चित्र 3.38 में दर्शायी सममित I-काट की 9 m की विस्तृति पर एक धरन शुद्धालम्बित है। यदि अधिकतम अनुमेय प्रतिबल 80 MPa है तो एक आलम्ब से 3m की दूरी पर कितना संकेन्द्रित भार लगाया जा सकता है?

[उत्तर : 10·266 kN] (U.P.)



चित्र 3.38 (a)



चित्र 3.38 (b)

हल—A पर Moment लेने पर

$$R_B \times 9 = W \times 3$$

या

$$R_B = \frac{W}{3} \text{ kN}$$

Scanned with CamScanner

∵ अधिकतम नमन घूर्ण (Max B.M.), भार के बिन्दु C पर होगा

∴ B.M. at C $= R_B \times 6 = \frac{W}{3} \times 6 = 2W$ kN-m

∴ $M = 2W \times 10^6$ N-mm

∵ नमन प्रतिबल (Bending Stress)

$$\sigma_b = 80 \text{ MPa} = 80 \text{ N/mm}^2$$

जड़त्व आघूर्ण (M.O.I) ⇒ $I = \left[\frac{100 \times 225^3}{12} - \frac{92 \times 205^3}{12}\right]$

या $I = 28872583{\cdot}33 \text{ mm}^4$

$$y = \frac{225}{2} = 112{\cdot}5 \text{ mm}$$

अब नमन समीकरण (Bending equation) से,

$$\boxed{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}}$$

∴ $\frac{2 \times 10^6 \times W}{28872583{\cdot}33} = \frac{80}{112{\cdot}5}$

या $W = 10{\cdot}266$ kN

उत्तर

उदाहरण 15. एक T-धरन, जिसके फ्लैंज की चौड़ाई 20 cm तथा सम्पूर्ण गहराई 350 mm है, 2·5 m की विस्तृति पर सरल आलम्बित है। इसके मध्य-बिन्दु पर 40 kN का संकेन्द्री भार लगा है। धरन में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल का मान एवं धरन पर उसकी स्थिति ज्ञात कीजिये। धरन के फ्लैंज एवं वैब दोनों की मोटाई 30 mm है।

[उत्तर : 29·074 N/mm², धरन के मध्य में उसकी काट के निम्नतम किनारे पर] **(U.P. 2005, 07, 08)**

हल— Max B.M. $(M) = \frac{Wl}{4}$ (सूत्र)

$$M = \frac{40 \times 2{\cdot}5}{4} = 25 \text{ kN-m}$$

$$= 25 \times 10^6 \text{ N-mm}$$

अब चित्र (a) से—

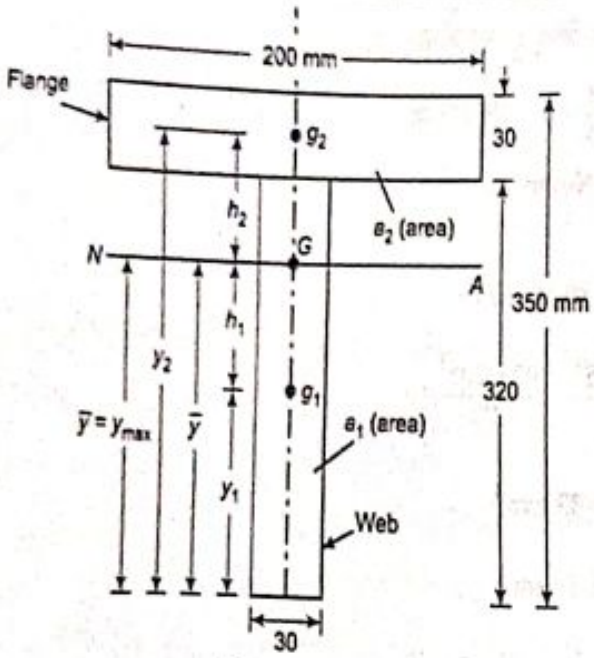
क्षेत्रफल $a_1 = 320 \times 30 = 9600 \text{ mm}^2$

$a_2 = 200 \times 30 = 6000 \text{ mm}^2$

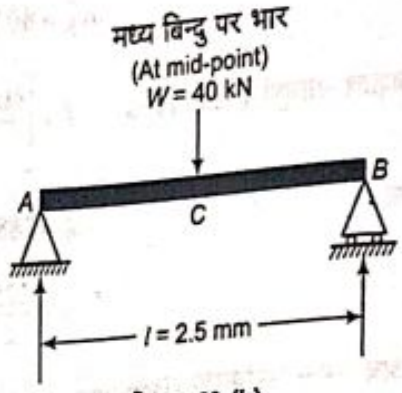
$y_1 = \frac{320}{2} = 160 \text{ mm}$

$y_2 = 320 + 15 = 335 \text{ mm}$

Scanned with CamScanner



चित्र 3.39 (a)



चित्र 3.39 (b)

अब गु० के० (G) की ऊँचाई $\bar{y} = \dfrac{a_1y_1 + a_2y_2}{a_1 + a_2} = \dfrac{9600 \times 160 + 6000 \times 335}{9600 + 6000} = 227{\cdot}3 \text{ mm}$

$$h_1 = \bar{y} - y_1 = 227{\cdot}3 - 160 = 67{\cdot}3 \text{ mm}$$

$$h_2 = y_2 - \bar{y} = 335 - 227{\cdot}3 = 107{\cdot}7 \text{ mm}$$

अब जड़त्व आघूर्ण (MOI), $I = [I_X g_1 + a_1 h_1^2] + [I_X g_2 + a_2 h_2^2]$ सूत्र से

$$I = \left[\frac{30 \times 320^3}{12} + 9600 \times 67{\cdot}3^2\right] + \left[\frac{200 \times 30^3}{12} + 6000 \times 107{\cdot}7^2\right]$$

$$I = 195446924 \text{ mm}^4$$

नमन समीकरण (Bending equation) से,

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$$

या $$\frac{25 \times 10^6}{195446924} = \frac{\sigma}{227{\cdot}3}$$

$\therefore$ $$\sigma = 29{\cdot}074 \text{ N/mm}^2 \text{ (at lower surface of beam)}$$ उत्तर

उदाहरण 16. एक T-परिच्छेद वाली प्रास (cantilever) धरन पर, जिसकी लम्बाई 5 m है, 10 kN/m का एक समान बंटित भार लगाया गया है। धरन के फ्लैंज की चौड़ाई 100 mm तथा सम्पूर्ण मोटाई 120 mm है। इसके फ्लैंज तथा पेटा की मोटाई 15 mm है। परिच्छेद के उदासीन अक्ष की स्थिति तथा उसमें उत्पन्न अधिकतम बंकन प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये। [उत्तर : फ्लैंज किनार से 38·23 mm, 2410 N/mm^2] **(U.P. 2000)**

हल—प्रश्नानुसार चित्र बनाइये।

इसमें, $a_1 = 15 \times 105 = 1575 \text{ mm}^2$

$a_2 = 100 \times 15 = 1500 \text{ mm}^2$

Scanned with CamScanner

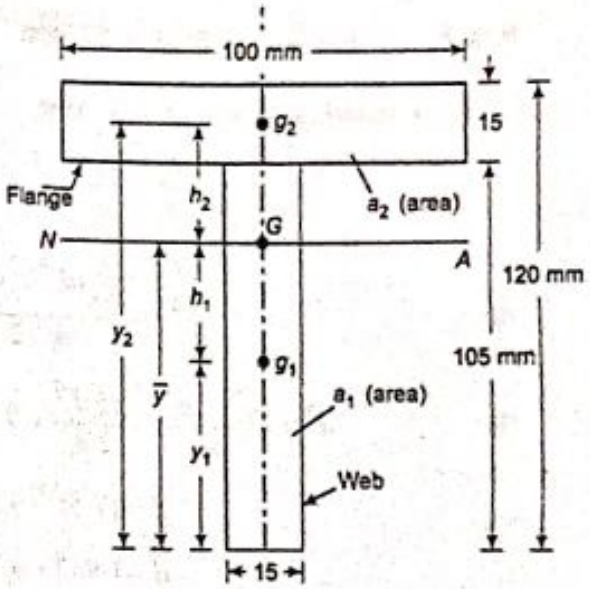
$$y_1 = \frac{105}{2} = 52{\cdot}5 \text{ mm}$$

$$y_2 = 105 + \frac{15}{2} = 112{\cdot}5 \text{ mm}$$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2}$$

$$\bar{y} = \frac{1575 \times 52{\cdot}5 + 1500 \times 112{\cdot}5}{1575 + 1500}$$

$$= \frac{251437{\cdot}5}{3075} = 81{\cdot}768$$



चित्र 3.40 (a)

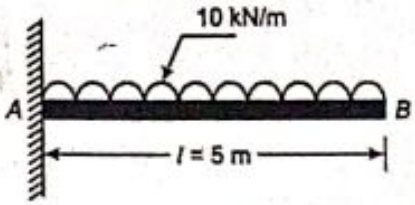
∴ नीचे के किनारे से गु० के० G की दूरी

$\Rightarrow \quad \bar{y} = 81{\cdot}768$

Max (B.M.) $(M) = (w \times l) \times \frac{l}{2}$ (सूत्र)

$$M = \frac{10 \times 5^2}{2} = 125 \text{ kN-m}$$

$$\therefore \quad M = 125 \times 10^6 \text{ N-mm}$$



चित्र 3.40 (b)

चित्र से, $h_1 = \bar{y} - y_1 = 81{\cdot}76 - 52{\cdot}5 = 29{\cdot}26$ mm

तथा $h_2 = y_2 - \bar{y} = 112{\cdot}5 - 81{\cdot}76 = 30{\cdot}74$

$I_{xx} = [I_x g_1 + a_1 h_1^2] + [I_x g_2 + a_2 h_2^2]$ सूत्र से

$$I = \left[\frac{15 \times 105^3}{12} + 1575 \times 29{\cdot}26^2\right] + \left[\frac{100 \times 15^3}{12} + 1500 \times 30{\cdot}74^2\right]$$

$$I = 4241010{\cdot}12 \text{ mm}^4$$

अब $\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$ से $\quad \frac{125 \times 10^6}{4241010{\cdot}12} = \frac{\sigma_b}{81{\cdot}768}$

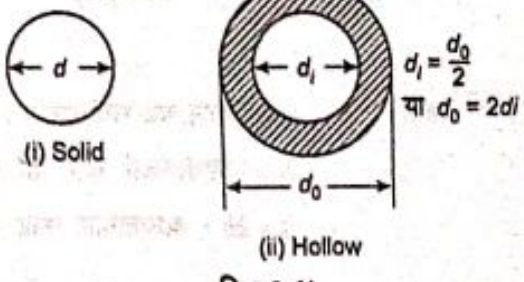
या $\quad \sigma_b = \frac{125 \times 10^6 \times 81{\cdot}76}{4241010{\cdot}12}$

∴ Max Bending Stress, $\sigma_b = 2409{\cdot}81 \text{ N/mm}^2$

या $\quad \sigma_b = 2410 \text{ N/mm}^2$ उत्तर

उदाहरण 17. दो समान सामर्थ्य वाली धरनों के भारों की तुलना कीजिये। दोनों धरन एक पदार्थ की तथा गोलाकार अनुप्रस्थ काट की हैं। एक धरन ठोस तथा दूसरी खोखली है जिसका आन्तरिक व्यास, बाह्य व्यास का आधा है।

$$\left[\text{उत्तर} : \frac{\text{ठोस धरन का भार}}{\text{खोखली धरन का भार}} = 1{\cdot}28\right]$$



चित्र 3.41

हल—माना ठोस काट का व्यास d तथा खोखली के व्यास d_i तथा d_o हैं। देखें चित्र 3.41

Scanned with CamScanner

दिया है $d_i = \frac{d_o}{2}$ अत: $d_o = 2d_i$ होगा

∵ समान सामर्थ्य के हैं अत: $Z_s = Z_h$ होगा

$$\frac{I_s}{y_s} = \frac{I_h}{y_h}$$

या $$\frac{\frac{\pi d^4}{64}}{d/2} = \frac{\frac{\pi}{64}(d_o^4 - d_i^4)}{d_o/2}$$

या $$d^3 = \frac{d_o^4 - d_i^4}{d_i} = \frac{15\,d_i^4}{2\,d_i} = 7{\cdot}5 \times d_i^3$$

∴ $$d = (7{\cdot}5)^{1/3} \times d_i = 1{\cdot}957 \times d_i$$

∴ $$d = 1{\cdot}957 \times d_i$$

भारों की तुलना, $$\frac{W_s}{W_h} \Rightarrow \frac{A_s}{A_h}$$ [∵ समान पदार्थ (material) की है]

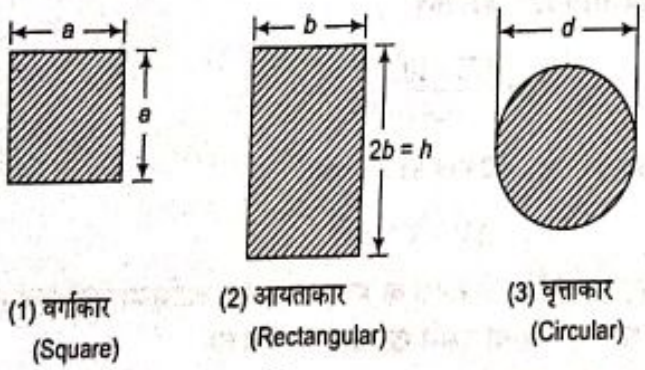
$$\frac{W_s}{W_h} = \frac{\pi d^2/4}{\frac{\pi}{4}(d_o^2 - d_i^2)} = \frac{(1{\cdot}957)^2 \times d_i^2}{3\,d_i^2}$$

$$= \frac{(1{\cdot}957)^2}{3} = 1{\cdot}277 = 1{\cdot}28$$ उत्तर

उदाहरण 18. एक ही धातु की तीन धरनों (beams) की लम्बाई, नमन प्रतिबल (bending stress) तथा अधिकतम नमन घूर्ण (Max B.M.) सभी समान हैं। इनकी काट (Sections) क्रमश: वृत्ताकार (Circular), वर्गाकार (Square) तथा आयताकार (जिसमें गहराई = 2 × चौड़ाई) हैं।

वृत्ताकार एवं आयताकार धरनों के भारों का अनुपात वर्गाकार काट की धरन के भार की अपेक्षा ज्ञात कीजिये।

हल—तीनों Beams के cross-sections नीचे दी गई हैं—



(1) वर्गाकार (Square) (2) आयताकार (Rectangular) (3) वृत्ताकार (Circular)

चित्र 3.42

माना a = धरन की वर्गाकार काट की प्रत्येक भुजा (side of square beam)

b = आयताकार काट की चौड़ाई (width of the rectangular beam)

$h = 2b$ = आयताकार काट की गहराई (depth of rectangular beam),

Scanned with CamScanner

d = वृत्ताकार काट का व्यास (diameter of circular beam)

दिया है, Same length of all beams

$$\therefore \quad L_1 = L_2 = L_3 = L$$

Same allowable stress for all

$$\therefore \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$$

Same B.M. for all,

$$\therefore \quad M_1 = M_2 = M_3 = M$$

परन्तु $\boxed{M = \sigma Z}$ सूत्र

∴ प्रत्येक Beam का Section Modulus (Z) समान होगा।

$$\therefore \quad Z_1 = Z_2 = Z_3$$

या $$\frac{I_1}{y_1} = \frac{I_2}{y_2} = \frac{I_3}{y_3}$$

या $$\frac{\frac{a \times a^3}{12}}{a/2} = \frac{\frac{b \times (2b)^3}{12}}{2b/2} = \frac{\frac{\pi d^4}{64}}{d/2}$$

या $$\frac{a^3}{6} = \frac{2b^3}{3} = \frac{\pi}{32} d^3$$

$$\therefore \quad a = \left(\frac{6\pi}{32}\right)^{1/3} \times d = 0{\cdot}838 \times d$$

$$b = \left(\frac{3\pi}{32 \times 2}\right)^{1/3} \times d = 0{\cdot}527987 \times d$$

∵ भार (W) ∝ काट के क्षेत्र० (A), (∵ समान लम्बाई व घनत्व हैं)

$$\therefore \quad \frac{\text{वृत्ताकार काट की Beam का भार } (W_c)}{\text{वर्गाकार काट की Beam का भार } (W_s)} = \frac{A_c}{A_{sq}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{Wt. of Circular}}{\text{Wt. of Square}} = \frac{A_c}{A_{sq}} = \frac{\pi d^2/4}{a \times a} = \frac{\pi d^2}{4a^2}$$

$$\therefore \quad \frac{W_c}{W_{SQ}} = \frac{\pi d^2}{4 \times (0{\cdot}838)^2 d^2} = 1{\cdot}117$$ उत्तर

अब $$\frac{\text{आयताकार का भार } (W_R)}{\text{वर्गाकार का भार } (W_{SQ})} = \frac{A_{Rect}}{A_{SQ}} = \frac{2b^2}{a^2}$$

$$= \frac{2 \times (0{\cdot}527987)^2 d^2}{(0{\cdot}838)^2 \times d^2}$$

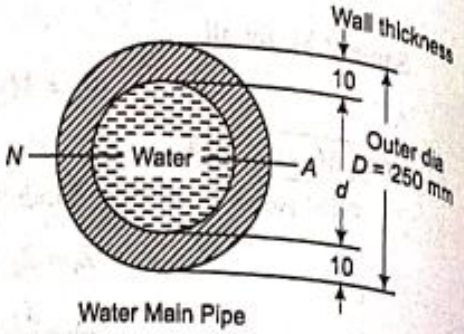
$$\therefore \quad \frac{W_{Rect}}{W_{SQ}} = 0{\cdot}794$$ उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 19. (a) एक ढलवाँ लोहे के पानी का मुख्य पाइप (water main pipe) का बाहरी व्यास (outer dia) 250 mm है, मोटाई (thickness of wall) 10 mm और यह 12m की दूरी पर दो टेकों पर सरल आलम्बित (Freely supported) है। इस पाइप के बाह्य सतह (outer surface) में अधिकतम प्रतिबल ज्ञात करें जब (a) नल (pipe) खाली है, (b) नल (pipe) पानी से पूरा भरा है। ढलवाँ लोहे (C.I.) तथा पानी का घनत्व क्रमशः 75 kN / m^3 तथा 10 kN / m^3 है।

हल—पाइप का अन्त: व्यास (inner dia)

$$d = 250 - 2\times 10 = 230 \text{ mm}$$



चित्र 3.43

$\therefore$ Pipe की काट (Section) $= \dfrac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$

$$= \frac{\pi}{4}(0{\cdot}25^2 - 0{\cdot}23^2)$$

$\therefore$ $$A_{Pipe} = 0{\cdot}007536 \text{ m}^2$$

Pipe का प्रति मीटर लम्बाई का भार,

$$w_p = 0{\cdot}007536 \times 1 \times 75$$

$\therefore$ $$w_p = 0{\cdot}5652 \text{ kN/m (as a U.D.L.)}$$

$\therefore$ Pipe के भार के कारण Max. Bending Moment,

$$M = \frac{wl^2}{8} = \frac{0{\cdot}5652 \times 12^2}{8} = 10{\cdot}1736 \text{ kN-m}$$

$$= 10{\cdot}1736 \times 10^6 \text{ N-mm}$$

Pipe की काट का $(N-A)$ पर जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.)

$$I = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$

$\therefore$ $$I = \frac{\pi}{64}[250^4 - 230^4] = 54353400 \text{ mm}^4$$

$$y = \frac{250}{2} = 125 \text{ mm}$$

अब नमन समीकरण से, $\boxed{\dfrac{M}{I} = \dfrac{\sigma}{y}}$

जहाँ σ = Max Bending Stress है।

या $$\frac{10{\cdot}1736 \times 10^6}{54353400} = \frac{\sigma}{125}$$

$\therefore$ $$\sigma = 23{\cdot}397 \approx 23{\cdot}4 \text{ N / mm}^2$$ उत्तर

(b) अब पानी से पाइप भरा होने पर पाइप पर समान बँटा भार (U.D.L.)

w = pipe के अपने भार के कारण U.D.L. + पानी के कारण U.D.L.

$$= 0{\cdot}5652 + \left[\frac{\pi(0{\cdot}23)^2}{4} \times 1 \times 10\right]$$

$$= 0{\cdot}5652 + 0{\cdot}415265$$

$$= 0{\cdot}980465 \text{ kN/m}$$

Hint

[$\because$ $w = (A_W \times L)x \times$ density]

Scanned with CamScanner

पाइप पर अधिकतम नमन घूर्ण (Max B.M.)

$$M_1 = \frac{w_1 l^2}{8} = \frac{0{\cdot}980465 \times (12)^2}{8} = 17{\cdot}64837$$

$$M_1 = 17{\cdot}65 \text{ kN-m} = 17{\cdot}65 \times 10^6 \text{ N-mm}$$

अब नमन समीकरण से, $\frac{M_1}{I} = \frac{\sigma_1}{y}$

∴ Pipe की बाहरी सतह पर अधिकतम नमन प्रतिबल (Max Bending Stress)

$$\sigma_1 = \frac{M_1 \times y}{I} = \frac{17{\cdot}65 \times 10^6 \times 125}{54353400} = 40{\cdot}59 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

उदाहरण 19. (b) एक 12 मीटर लम्बा ढलवाँ लोहे का पाईप (Pipe) जिसका आन्तरिक व्यास 500 mm तथा पाईप की मोटाई (thickness) 25 mm है, पानी से पूरा भरा हुआ है तथा अपने दो किनारों पर टिका हुआ है। पाईप के पदार्थ में अधिकतम प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये यदि ढलवाँ लोहे के पाईप के पदार्थ का घनत्व (density) 7200 kg/m और पानी का घनत्व 1000 kg/m^3 हो। **(U.K. 2014, B.P.)**

हल—माना बाहरी व्यास d_o व आन्तरिक व्यास d_i है।

∵ पाईप का बाहरी व्यास $d_o = d_i + 2t = 500 + 2 \times 25$

$$d_o = 550 \text{ mm}$$

∴ पाइप (Pipe) की काट (section) $= \frac{\pi (d^{o^2} - d_i^2)}{4}$

∴ $$A_{\text{pipe}} = \frac{\pi (550^2 - 500^2)}{4} = 41212{\cdot}5 \text{ mm}$$

$$= 0{\cdot}0412125 \text{ m}^2$$

पाइप की प्रति मीटर लम्बाई का भार (W_t of per meter length of pipe)

$$W_p = \text{Area} \times \text{length} \times \text{density}$$

$$= 0{\cdot}0412125 \times 1 \times 7200 = 296{\cdot}73 \text{ kg/meter}$$

$$W_p = 2{\cdot}9673 \text{ kN/m (as a U.D.L.)}$$

पाइप में पानी का प्रति मीटर लम्बाई में भार (Wt of water per in long)

$$W_1 = \frac{\pi (0{\cdot}50)^2}{4} \times 1 \times 1000 = 196{\cdot}25 \text{ kg/m} = 1{\cdot}9625 \text{ kN/m}$$

Pipe पानी से भरा होने पर कुल भार (प्रति मीटर U.D.L. रूप में) $= w_p + w_1$

∴ $$w = 2{\cdot}9673 + 1{\cdot}9625 = 4{\cdot}9298 \text{ kN/m}$$

पाइप पर अधिकतम नमन घूर्ण (Max. B.M.)

$$M = \frac{wl^2}{8} = \frac{4{\cdot}9298 \times 12^2}{8} = 88{\cdot}7314 \text{ kN-m}$$

∴ $$M = 88{\cdot}7364 \times 10^6 \text{ N-mm}$$

Pipe की काट का (N - A) पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.),

Scanned with CamScanner

$$I = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{64} = \frac{\pi(550^4 - 500^4)}{64} = 1423119141 \text{ mm}^4$$

अब Pipe की बाहरी सतह (Outer surface) पर अधिकतम प्रतिबल (max. Bending stress),

$\sigma = \frac{My}{I}$ सूत्र से

$$\therefore \quad \sigma = \frac{88{\cdot}7364 \times 10^6 \times \frac{550}{2}}{1423119141} = 17{\cdot}1472 \text{ N/mm}^2$$

उत्तर

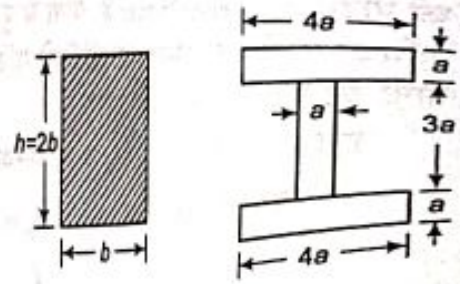
उदाहरण 20. एक आयताकार काट (Rectangular Section) को एक ऐसे I-Section (जो चित्र में दिखाया है) से बदला गया जिसका क्षेत्रफल (area) समान है। इनकी Flexural Strength (नमन सामर्थ्य) की तुलना (Ratio) ज्ञात कीजिये जबकि दोनों समान पदार्थ (Same Material) तथा समान ही नमन प्रतिबल (Same max Bending Stress) रखते हैं।

हल—समान क्षेत्रफल होने पर—

$$2b^2 = 4a^2 + 3a^2 + 4a^2 = 11a^2$$

$$\therefore \quad \boxed{b = 2{\cdot}345 \times a}$$

या $\quad \frac{b}{a} = 2{\cdot}345 \quad \ldots$ (i)



चित्र 3.44

अब आयताकार काट का जड़त्वाघूर्ण

$$(\text{M.O.I.}) = \frac{b \times (2b)^3}{12} = \frac{2}{3}b^4$$

आयताकार काट का Section Modulus,

$$Z_R = \frac{I}{y} = \frac{2b^4/3}{2b/2} = \frac{2}{3}b^3$$

अब I-Section का $\quad \text{M.O.I.} = \frac{4a \times (5a)^3}{12} - \frac{3a \times (3a)^3}{12}$

$$= \frac{(500 - 81)\,a^4}{12} = \frac{419}{12} \times a^4$$

तथा I-Section का Section Modulus,

$$Z_I = \frac{I}{y} = \frac{\frac{419a^4}{12}}{\frac{5a}{2}}$$

$$\therefore \quad Z_I = \frac{419}{30} \times a^3$$

उत्तर

∴ Ratio of Flexural Strength ⇒ ratio of Section Moduli

$$= \frac{2b^3/3}{\frac{419a^3}{30}} = \frac{20}{419} \times \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{20}{419} \times (2{\cdot}345)^3 = 0{\cdot}6155$$

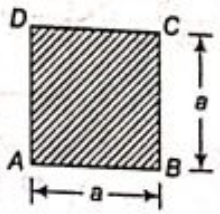
Scanned with CamScanner

उदाहरण 21. एक वर्गाकार काट की घन की एक भुजा a है। यदि अनुमेय बंकन प्रतिबल σ है तो आघूर्ण की गणना कीजिये जबकि धरन की काट इस तरह रखी है कि :

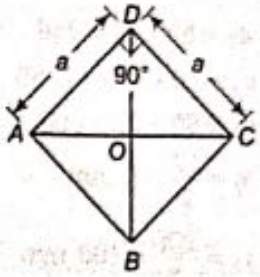
(i) दो भुजायें क्षैतिज हैं। (ii) एक विकर्ण ऊर्ध्वाधर है।

$\left[\text{उत्तर : (i) } \frac{\sigma a^3}{6}, \text{ (ii) } \frac{\sigma a^3}{6\sqrt{2}}\right]$ (U.P. 2010)

हल—



(i) जब दो भुजायें क्षैतिज हैं



(ii) एक विकर्ण उर्ध्वाधर है

चित्र 3.45

(i) In case Ist, $I = \frac{a \times a^3}{12} = \frac{a^4}{12}$ तथा $y = \frac{a}{2}$

∴ Bending equation से, $\boxed{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}}$ मान रखने पर,

प्रतिरोधी नमन घूर्ण (Bending Moment),

$$M = \frac{I}{y} \times \sigma$$

∴ $$M = \frac{I}{y} \times \sigma = \frac{a^4/12}{a/2} \times \sigma = \frac{\sigma a^3}{6}$$ उत्तर

(ii) In case II,

$\Delta\ ACD$ की ऊँचाई $= OD = \frac{\text{विकर्ण}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

∴ M.O.I. of one $\Delta\ ACD$ about $(AC) = \frac{AC \times OD^3}{12}$

$$= \frac{a\sqrt{2} \times (a/\sqrt{2})^3}{12} = \frac{a^4 \times \sqrt{2}}{12 \times 2\sqrt{2}} = \frac{a^4}{24}$$

दोनों त्रिभुजों ACD तथा ACB का कुल जड़त्व आघूर्ण (Total M.O.I.)

Total, $$I = \frac{a^4}{24} \times 2 = \frac{a^4}{12}$$

अब नमन समीकरण (Bending equation) से,

$$\boxed{\frac{M_r}{I} = \frac{\sigma}{y}}$$

∴ प्रतिरोधी घूर्ण $(M_r) = \frac{I}{y} \times \sigma$ [यहाँ $y = \frac{BD}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ है]

$$= \frac{a^4/12}{a/\sqrt{2}} \times \sigma = \frac{\sigma . a^3}{6\sqrt{2}}$$ उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 22. एक चैनल सैक्शन को जिसकी गहराई 200 mm तथा फ्लैंज चौड़ाई 80 mm है, एक सरल आधारित धरन (simply supported beam) के रूप में इस प्रकार प्रयोग किया जाना है कि उसका फ्लैंज क्षैतिज दिशा में तथा पेटा (web) ऊर्ध्वाधर दिशा में रहे। फ्लैंज की मोटाई 12 mm तथा पेटे की मोटाई 10 mm है। इसके लम्बाई के किसी परिच्छेद पर इसको 1400 N-m के बंकन आघूर्ण का प्रतिरोध सहना है। धरन के इस पच्छिेद पर अधिकतम बंकन प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 6·502 N / mm^2]

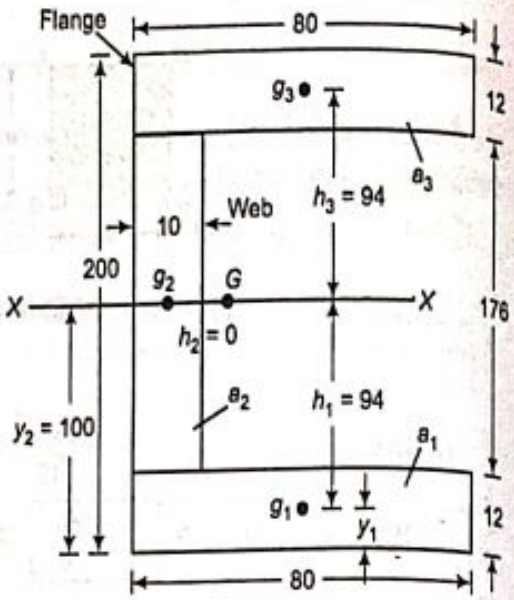
हल—चित्र से $a_1 = 80 \times 12 = 960$

$a_2 = 10 \times 176 = 1760$

$a_3 = 80 \times 12 = 960$

$y_1 = \frac{12}{2} = 6$ mm

$y_2 = \frac{200}{2} = 100$ mm



चित्र 3.46

$$I = [I_X g_1 + a_1 h_1^2] + [I_X g_2 + a_2 h_2^2] + [I_X g_3 + a_3 h_3^2]$$

यहाँ $h_1 = h_3 = 100 - 6 = 94$ mm

$$I = \left[\frac{80 \times 12^3}{12} + 960 \times 94^2\right] \times 2 + \left[\frac{10 \times 176^3}{12} + 0\right]$$

[$\because g_1$ तथा g_3 आयत समान हैं]

$\therefore \quad I = 21531306{\cdot}67 \text{ mm}^4$

Bending Moment $(M) = 1400$ N-m (दिया है)

$= 1400 \times 1000$ N-mm

तथा $y = \frac{200}{2} = 100$ mm

अब नमन समीकरण से, $\boxed{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}}$

$\therefore$ Bending stress $(\sigma) = \frac{My}{I}$

या $\sigma = \frac{14 \times 10^5 \times 100}{21531306{\cdot}67} = 6{\cdot}502 \text{ N / mm}^2$ उत्तर

उदाहरण 23. दो वृत्ताकार काटों (Circular Sections) की शक्ति (Strength) की तुलना कीजिये। पहली काट d व्यास का ठोस है तथा दूसरी काट d_1 बाह्य (outer) तथा d_2 अन्त: व्यास (inner dia) की खोखली हैं। दोनों काटें समान भार तथा समान पदार्थ की बनी हैं। (Both Sections have same W_t and same Material) (U.P.)

हल—$\because$ दोनों काट समान पदार्थ (Material) की हैं तो समान इकाई लम्बाई के भार समान हैं तो काट के क्षेत्रफल भी समान होंगे।

$\because \boxed{W_s = W_h}$ हैं, तो $\boxed{A_s = A_h}$ होगा

$\therefore \quad \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (d_1^2 - d_2^2)}{4}$

या $d^2 = d_1^2 - d_2^2$ ... (i)

ठोस काट का जड़ता घूर्ण (M.O.I.),

Scanned with CamScanner

$$I_s = \frac{\pi d^4}{64}$$

∴ ठोस काट का आकृति मापांक (Section Modulus)

$$Z_s = \frac{I_s}{y_s} = \frac{\pi d^4}{64} \times \frac{1}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32}$$

अब खोखली काट का जड़ता घूर्ण (M.O.I.),

$$I_h = \frac{\pi (d_1^4 - d_2^4)}{64}$$

तथा $$y_h = \frac{d_1}{2}$$

∴ खोखली काट का आकृति मापांक (Section Modulus)

$$Z_h = \frac{I_h}{y_h} = \frac{\pi}{64}(d_1^4 - d_2^4) \times \frac{1}{d_1/2} = \frac{\pi}{32} \times \frac{(d_1^4 - d_2^4)}{d_1}$$

अत: दोनों काटों की शक्तियों की तुलना,

$$\frac{Z_h}{Z_s} = \frac{\pi}{32}\frac{(d_1^4 - d_2^4)}{d_1} / \frac{\pi d^3}{32} = \frac{(d_1^4 - d_2^4)}{d_1 \times d^3}$$

$$= \frac{(d_1^2 - d^2)(d_1^2 + d_2^2)}{d_1 \times d^3} = \frac{d^2 (d_1^2 + d_2^2)}{d_1 \times d^3} = \frac{d_1^2 + d_2^2}{d_1 \times d}$$

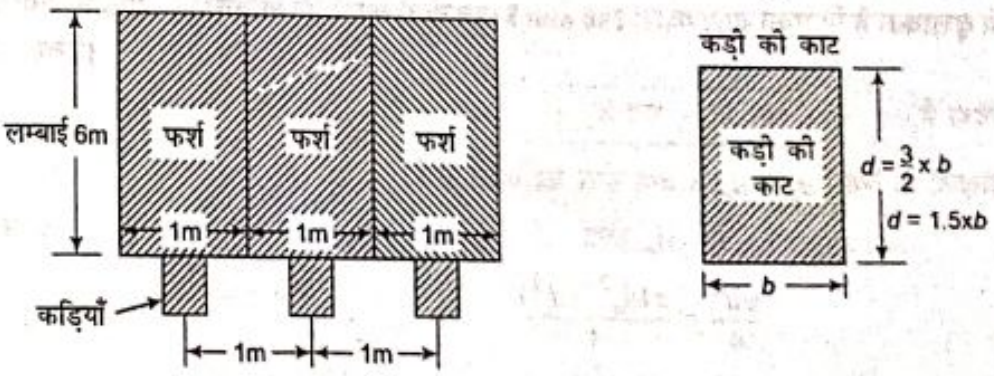
परन्तु (i) से $$d_2^2 = (d_1^2 - d^2)$$

अत: $$\frac{Z_h}{Z_s} = \frac{(2d_1^2 - d^2)}{d_1 \times d} = \left[\frac{2d_1}{d} - \frac{d}{d_1}\right]$$

∴ $$\frac{Z_h}{Z_s} = \frac{d_1}{d}\left[2 - \frac{d^2}{d_1^2}\right]$$ उत्तर

उदाहरण 24. किसी फर्श (Floor) का भार 8 kN / m² है। इसे 6m लम्बी एक-सी कड़ियों के ऊपर बनाया जाना है। यदि प्रत्येक कड़ी के केन्द्र से केन्द्र के बीच दूरी 1m है तथा प्रत्येक कड़ी के लिये नमन प्रतिबल की सीमा 120 MPa है तो कड़ियों की आयताकार काट की माप ज्ञात कीजिये। काट की गहराई, चौड़ाई की $\frac{3}{2}$ गुनी है।

हल—



चित्र 3.47

∵ प्रत्येक कड़ी पर फर्श का भार $= 6 \times 1 \times 8$ kN

Scanned with CamScanner

∴ यह भार U.D.L. के रूप में होने के लिये

$$w = \frac{\text{भार kN में}}{\text{लम्बाई m में}}$$

$$\therefore \quad w = \frac{6 \times 1 \times 8}{6} = 8 \text{ kN/m}$$

अत: कड़ी पर अधिकतम नमन घूर्ण (Max B.M.),

$$M = \frac{wl^2}{8}$$

$$M = \frac{8 \times 6^2}{8} = 36 \text{ kN-m} = 36 \times 10^6 \text{ N-mm}$$

कड़ी की काट का जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.)

$$I = \frac{bd^3}{12}$$

$$\therefore \quad I = \frac{b \times (1{\cdot}5b)^3}{12} = 0{\cdot}28125 \times b^4 \text{ mm}^4$$

$$y = \frac{d}{2} = \frac{1{\cdot}5b}{2} = 0{\cdot}75 \times b \text{ mm}$$

अत: नमन समीकरण से, $\boxed{\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}}$ में नमन प्रतिबल $\sigma = 120 \text{ N/mm}^2$ दिया है

$$\therefore \quad \frac{36 \times 10^6}{0{\cdot}28125 \times b^4} = \frac{120}{0{\cdot}75 \times b}$$

या $$b^3 = 800000$$

या $$b = 92{\cdot}8 \text{ mm}$$ उत्तर

तथा काट की गहराई $$d = 1{\cdot}5 \times b = 139{\cdot}25 \text{ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 25. दो काटों के पदार्थ तथा भार समान हैं। एक काट ठोस वृत्ताकार है जिसका व्यास 200 mm है। दूसरी काट खोखली वृत्ताकार है जिसका बाह्य व्यास 250 mm है। इन दोनों काटों की शक्तियों (आकृति मापांकों) की तुलना कीजिये। [उत्तर : $Z_h / Z_s = 1{\cdot}7$]

हल—दिया है, $\boxed{\text{भार } W_s = \text{ भार } W_h}$

माना खोखली के व्यास d_i व d_o हैं तथा ठोस का व्यास d है।

$$\therefore \quad A_s = A_h \text{ होगा} \qquad (\because \text{ पदार्थ समान है})$$

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi (d_o^2 - d_i^2)}{4}$$

या $$d^2 = d_o^2 - d_i^2$$

या $$(200)^2 = (250)^2 - d_i^2$$

Scanned with CamScanner

या $$d_i^2 = 250^2 - 200^2 = 22500$$

∴ खोखली का अन्त: व्यास $d_i = 150$ mm होगा।

∴ $$I_{solid} = \frac{\pi (d)^4}{64} = \frac{\pi (200)^4}{64} = 78500000 \text{ mm}^4$$

$$y_s = \frac{d}{2} = \frac{200}{2} = 100 \text{ mm}$$

अब ठोस का आकृति मापांक (Section Modulus),

$$Z_s = \frac{I_s}{y_s} = 785000$$

∵ $$I_{hollow} = \frac{\pi (d_o^4 - d_i^4)}{64} = \frac{\pi}{64}(250^4 - 150^4) = 166812500 \text{ mm}^4$$

$$y_h = \frac{d_o}{2} = \frac{250}{2} = 125 \text{ mm}$$

अब $$Z_h = \frac{I_h}{y_h} = \frac{166812500}{125} = 1334500 \text{ mm}^3$$

अत: शक्तियों की तुलना $= \frac{Z_h}{Z_s} = \frac{1334500}{785000} = 1{\cdot}7$ उत्तर

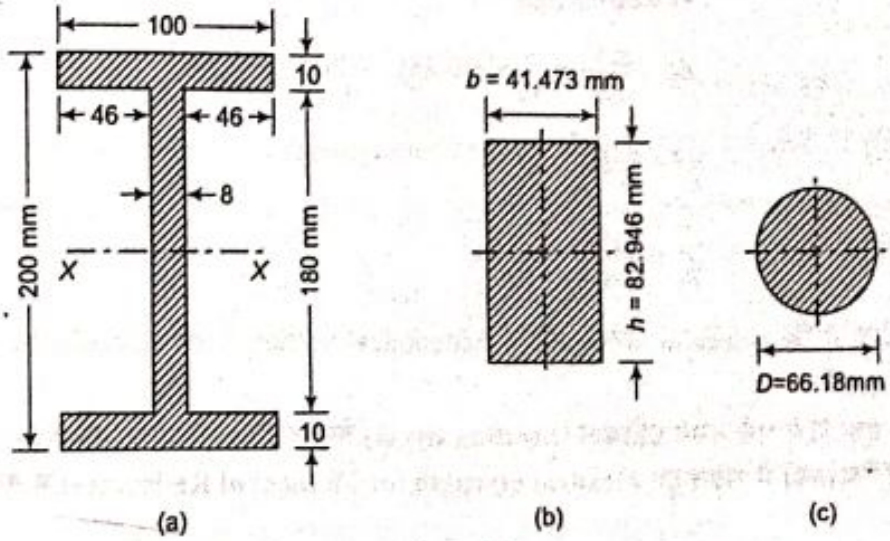
उदाहरण 26. समान भार की निम्न तीन (Beams) के नमन सामर्थ्य (Flexural Strength) की तुलना (Compare) कीजिये।

(a) I-Section; 100 mm × 200 mm जिसके Flange तथा Web की मोटाई (thickness) क्रमश: 10 mm तथा 8 mm है।

(b) Rectangular Section; जिसमें काट की गहराई (depth), चौड़ाई (width) की दुगुनी (twice) है।

(c) Solid Circular Section; व्यास (diameter) = D है।

हल—



चित्र 3.48

Scanned with CamScanner

(a) I-काट का क्षेत्रफल $A_1 = (2\times100\times10 + 180\times8) = 3440\ \text{mm}^2$

जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) $I_1 = \frac{1}{12}[BD^3 - bd^3]$ (सूत्र)

$\therefore$ $I_1 = \frac{1}{12}[100\times(200)^3 - 92\times(180)^3]$

$I_1 = 2195\times10^4\ \text{mm}^4$

$Z_1 = \frac{2195\times10^4}{100} = 219{\cdot}5\times10^3\text{mm}^3$

(b) Rectangular Section :

क्षेत्रफल, $A_2 = b\times d = b\times(2b) = 2b^2$

परन्तु $\boxed{A_2 = A_1}$ है

$\therefore$ $2b^2 = 3440$

या $b = 41{\cdot}473\ \text{mm}$

तथा काट की गहराई $d = 2b = 82{\cdot}946\ \text{mm}$

$\therefore$ Section Modulus $Z_2 = \frac{1}{6}bd^2 = \frac{1}{6}\times(41{\cdot}473)\times(82{\cdot}946)^2 = 47{\cdot}6\times10^3\ \text{mm}^3$

(c) Circular Section : माना व्यास D mm में है।

$\therefore$ $A_3 = \frac{\pi D^2}{4}$

परन्तु $\boxed{A_3 = A_1}$ है।

$\therefore$ $\frac{\pi D^2}{4} = 3440$

या $D = 66{\cdot}18\ \text{mm}$

$\therefore$ $Z_3 = \frac{\pi D^3}{32} = \frac{\pi}{32}\times(66{\cdot}18)^3 = 28{\cdot}5\times10^3\text{mm}^3$

$\therefore$ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{219{\cdot}5}{47{\cdot}6} = 4{\cdot}61$ उत्तर

तथा $\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{219{\cdot}5}{28{\cdot}5} = 7{\cdot}70$ उत्तर

इससे स्पष्ट होता है कि I-Section सबसे अधिक Economical Section है तथा Circular Section सबसे कम Economical Section है।

उदाहरण 27. एक दिये गये नमन प्रतिबल (bending stress) के लिये एक वर्गाकार काट (SQ Section) वाली Beam को निम्न दो स्थितियों में रखते हुए Flexural Strength (or Moment of Resistance) में तुलना (Compare) कीजिये जबकि–

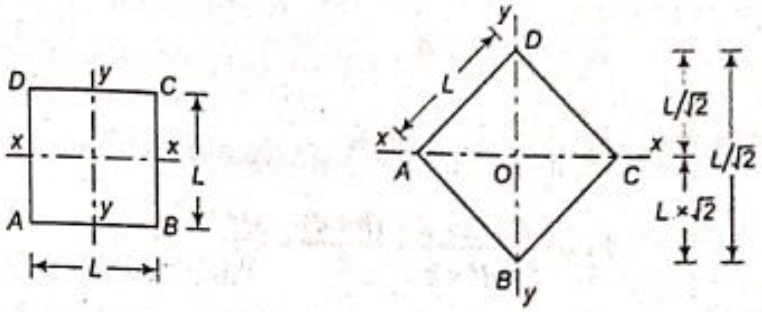
(i) दो भुजायें क्षैतिज हैं (Two sides of section are Horizontal)

(ii) एक विकर्ण क्षैतिज है (With a diagonal is Horizontal)

Scanned with CamScanner

हल—माना वर्ग (square) की भुजा (side) L है।

$\because$ $M = \sigma \times Z \therefore M \propto Z$ है। (σ is constant)



चित्र 3.49

In case (I) :

$$Z_1 = \frac{I_1}{y_1} = \frac{\frac{L \times L^3}{12}}{L/2} = \frac{1}{6}L^3$$

In case II : (चित्र 3.48 (b) देखें)

$$I_{XX} = 2 \times \text{ (I of } \Delta ACD)$$

$$= 2 \times \frac{AC \times (OD)^3}{12} = 2 \times \frac{(L\sqrt{2}) \times (L/\sqrt{2})^2}{12} = \frac{L^4}{12}$$

तथा $$y = \frac{L\sqrt{2}}{2} = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ $$Z_2 = \frac{I}{Y} = \frac{L^4}{12} \times \frac{\sqrt{2}}{L} = \frac{L^3}{6\sqrt{2}}$$

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{2} = 1{\cdot}414$$ उत्तर

अत: इस प्रबन्ध में Ist स्थिति में Beam, IInd स्थिति की Beam से 41·4% अधिक मजबूत (stronger) है।

उदाहरण 28. दर्शाइये कि किसी आयताकार काट के बलशून्य रेखा के ऊपर अर्धकाट पर परिणामी बल $\frac{3M}{2d}$ है जहाँ M बंकन आघूर्ण एक अनुप्रस्थ काट पर, d काट की गहराई है। काट की स्थिति भी ज्ञात करें जहाँ से परिणामी बल गुजरता है। [उत्तर : NA से $d/3$ ऊँचाई पर] **(U.P. 2007)**

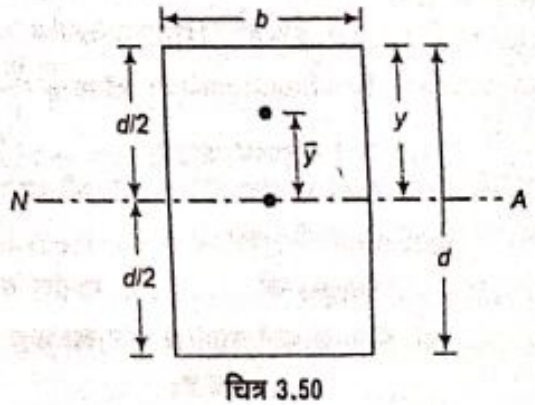
हल—माना आयताकार काट की चौड़ाई b, गहराई d तथा बंकन आघूर्ण (B.M.) = M है।

$\therefore$ नमन प्रतिबल (bending stress)

$$\boxed{f = \frac{My}{I}}$$ (नमन समीकरण से)

$\because$ $$\text{प्रतिबल } (f) = \frac{\text{बल } (F)}{\text{क्षेत्रफल } (A)}$$

$\therefore$ $$\text{बल } F = f \times A = \frac{My}{I} \times A$$



चित्र 3.50

Scanned with CamScanner

अब NA काट पर बल = प्रतिबल × क्षेत्रफल से

$$F_1 = \frac{My}{I} \times A \text{ परन्तु } NA \text{ पर } y = 0 \text{ होगा।}$$

$\therefore$ बल $$F_1 = \frac{M}{I} \times A = 0$$

सबसे ऊपरी काट पर बल $F_2 = \left(\frac{My}{I}\right) \times A$ सूत्र से

या $$F_2 = \frac{M \times 12 \times d}{b \times d^3 \times 2} \times \frac{(b \times d)}{2} = \frac{3M}{d}$$

अब परिणामी बल, $$F = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{0 + \frac{3M}{d}}{2} = \frac{3M}{2d}$$

$\therefore$ $$\boxed{F = \frac{3M}{2d}}$$ **Proved**

अत: परिणामी बल की क्रिया रेखा की NA से दूरी $= \frac{d}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{d}{3}$ (अर्थात् NA से $\frac{d}{3}$ ऊँचाई पर है)

प्रश्नावली (Exercise)

1. निम्न रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये—

(i) सन्तुलन की स्थिति में धरन की किसी काट पर सभी बलों के घूर्णों का योग ..... होता है।

(ii) धरन की काट में अधिकतम नमन प्रतिबल ..... में होते हैं।

(iii) धरन के परिच्छेद में किसी बिन्दु पर नमन प्रतिबल, उस बिन्दु की ..... से दूरी के ..... होता है।

(iv) सरल आलम्बित धरन या भार के कारण नमन की दशा में उदासीन अक्ष से ऊपर के भाग में ..... प्रतिबल तथा नीचे के भाग में ..... प्रतिबल पैदा होते हैं।

(v) काट के जड़त्व आघूर्ण (moment of inertia) I तथा उदासीन अक्ष (NA) से अधिक दूरी वाले किनारे की दूरी (y) के अनुपात को उस काट का ..... कहते हैं। **(UK 2010, S)**

(vi) आकृति मापांक (section modulus) की इकाई (unit) ..... होती है।

(vii) एक d व्यास की वृत्ताकार काट (circular section) का आकृति मापांक (section modulus) $Z =$ ..... होता है।

(viii) किसी धरन की नमन दृढ़ता (Flexural rigidity) ..... का गुणनफल होती है। **(UK 2010, S)**

(ix) परिभ्रमण त्रिज्या (Radius of gyration), $K =$ ..... होता है। **(U.K. 2010 (S), 2011-12 (W))**

(x) लम्ब अक्ष प्रमेय (Perpendicular Axis Theorem) के अनुसार $I_{ZZ} =$ ..... $+ I_{YY}$ **(UK 2010, S; 2014, S)**

(xi) Bending Equation, $M = \frac{\sigma \text{ या } f}{y} = \frac{\text{.....}}{R}$

(xii) कोई अनुप्रस्थ काट (cross-section) जो कि नमन से पहले समतल थी, नमन के बाद भी समतल (plane) ही रहती है, यह ..... की मान्यताओं में से एक है।

(xiii) टूटने की स्थिति में (just at the failure condition), किसी धरन पर अधिकतम नमन प्रतिबल (Max Bending Stress) को ..... मापांक कहते हैं।

(xiv) एक खोखले वृत्ताकार काट का बाह्य व्यास D तथा आन्तरिक व्यास d है तो इसका जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.), $I =$ ..... होता है।

Scanned with CamScanner

रिक्त स्थानों के उत्तर

(i) शून्य (Zero), (ii) बाहरी परतों (Outer layers), (iii) उदासीन अक्ष (Neutral Axis), समानुपाती (Proportional), (iv) संपीडन (Compressive), तनाव (Tensile), (v) आकृति मापांक (Section Modulus), (vi) mm^3 या m^3, (vii) $\frac{\pi d^3}{32}$, (viii) E तथा I, (ix) $\sqrt{\frac{I}{A}}$, (x) I_{XX}, (xi) $\frac{M}{I}=\frac{f}{y}=\frac{E}{R}$, (xii) शुद्ध नमन सिद्धान्त (Theory of Pure Bending), (xiii) फटन मापांक (Modulus of Rupture), (xiv) $I=\frac{\pi(D^4-d^4)}{64}$

2. निम्न को समझाइये— **(U.P. 2013)**

(a) बल शून्य धुरी (Neutral Axis)

(b) उदासीन सतह (परत) (Neutral Layer) **(U.K. 2012-13 (W))**

(c) छेदन मापांक (आकृति मापांक—Section Modulus) **(U.K. 2013, S)**

(d) प्रतिरोधी घूर्ण (Moment of resistance)

(e) परिभ्रमण त्रिज्या (Radius of gyration) **(U.K. 2010, 12)**

(f) क्षेत्र का द्वितीय आघूर्ण (IInd moment of area)

(g) जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) **(U.K. 2013, S)**

3. निम्न को परिभाषित करें— **(U.K 2012-13, Winter)**

(i) नमन प्रतिबल (Bending Stress)

(ii) नमन दृढ़ता (Flexural Rigidity)

(iii) जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) **(U.P. 2013)**

(iv) आकृति मापांक (Section Modulus) के अनुप्रयोग (Applications) **(UK 2013)**

(v) लम्ब अक्ष प्रमेय (Perpendicular Axes Theorem)

4. उदासीन अक्ष (Neutral Axis) तथा उदासीन परत (Neutral Layer) को परिभाषित करें। **(U.K. 2013, S)**

5. शुद्ध नमन की मान्यतायें (Assumptions of Pure bending) लिखिये। **(U.P. 2014; U.K. 2013 (S))**

6. धरन के शुद्ध नमन के निम्नलिखित सम्बन्ध को सिद्ध कीजिये : $\frac{M}{I}=\frac{f}{y}=\frac{E}{R}$ **(U.K. 2014)**

7. (a) उदासीन सतह एवं उदासीन अक्ष में अन्तर बताइये। **(U.P.2006, 08)**

(b) सिद्ध कीजिये कि किसी रेशे में बंकन प्रतिबल धरन के उदासीन अक्ष से रेशे की दूरी के समानुपाती होती है। **(U.P.2010)**

(c) शुद्ध नमन (Pure bending) को परिभाषित करें। **(U.P. 2014)**

(d) फटन मापांक (Modulus of Rupture) **(U.P. 2003, 07, 09)**

8. शुद्ध नमन को परिभाषित कीजिये। शुद्ध नमन के सिद्धान्त में ली गई मान्यतायें लिखिये। **(U.K. 2014 (S) Mech)**

9. (i) लम्ब अक्ष प्रमेय (Perpendicular Axis Theorem) क्या है? सिद्ध करो $I_{ZZ}=I_{XX}+I_{YY}$ **(U.K. 2014, S)**

(ii) समान्तर अक्ष प्रमेय (Parallel Axis Theorem) को बताइये।

10. एक स्टील प्लेट को 10 m अर्द्धव्यास के वृत्तीय आर्क में मोड़ा जाता है। यदि प्लेट का अनुच्छेद 120 mm चौड़ा तथा 20 mm मोटा हो तो उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये तथा बंकन आघूर्ण जो इस प्रतिबल को उत्पन्न कर सके, ज्ञात कीजिये। $E=2\times10^5\ N/mm^2$ मान लीजिये। **(U.P. 2014, Mech)**

[उत्तर : $\sigma=200\ N/mm^2$, $M=800$ N-m]

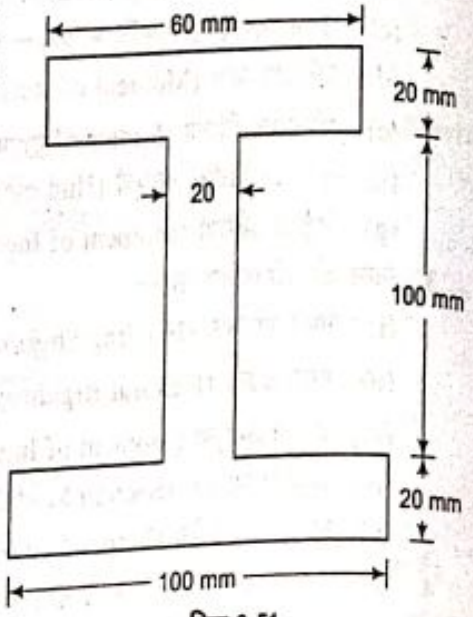
Scanned with CamScanner

11. एक ढलवाँ लोहे के पाइप (cast iron pipe) का बाह्य व्यास 40 मिमी तथा आन्तरिक व्यास 20 मिमी है तथा लम्बाई 4 मी है। जब पाइप सिरों पर आलम्बित है और मध्य में 80 न्यूटन का बिन्दु भार लगा हो तो पाइप में अधिकतम उत्पन्न प्रतिबल ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 13·58 N / mm^2] (U.P.2002)

12. एक शुद्धालम्ब धरन (simply supported beam) 5 मी० लम्बी तथा 40 × 40 मिमी० काट की धरन पर समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। यदि धरन का अनुमेय नमन प्रतिबल (Permissible bending stress) 50 N / mm^2 है तो उस पर लगे भार का मान ज्ञात कीजिये। [उत्तर : w = 0·171 kN/m] (U.K. 2011-12 (Winter))

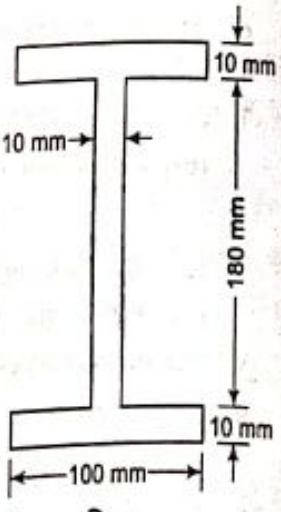
13. एक लकड़ी की धरन 8 cm चौड़ी एवं 12 cm गहरी है। जब यह धरन 3 m की दूरी पर रखे आलम्बों पर शुद्धालम्बित हो और इसकी सारी लम्बाई पर 500 N/m का समवितरित भार हो तो इसमें उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 2·93 N / mm^2] (U.P. 2006)

14. एक चार मीटर लम्बे धरन के ऊपर 10 kN/m का समवितरित भार लगा है। धरन का परिच्छेद चित्र 3.51 में दिखाया गया है। इस काट पर अधिकतम प्रतिबल ज्ञात करो।
[U.K. 2012-13 (W), 2013 (S)]
[उत्तर : σ = 123·31 N / mm^2]



चित्र 3.51

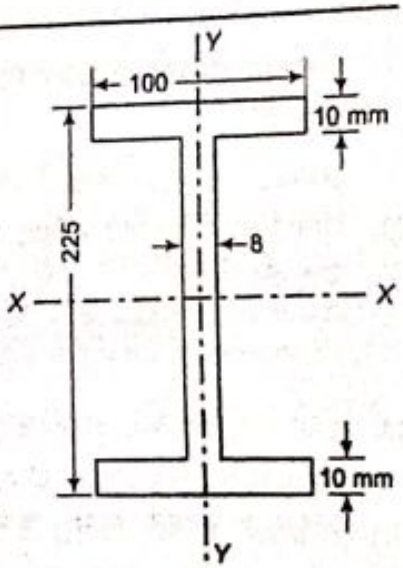
15. चित्र 3.52 में दिखाई गई धरन की काट का आकृति मापांक (section modulus) ज्ञात कीजिये। यदि इस काट की धरन की विस्तार 5 m हो तो 100 N / mm^2 के अनुमेय प्रतिबल (allowable stress) के लिये इसके केन्द्र पर अधिकतम संकेन्द्रित भार ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 229·267 × 10^3 mm^3, 18·34 kN]
(U.P. 2009, B.P.)



चित्र 3.52

Scanned with CamScanner

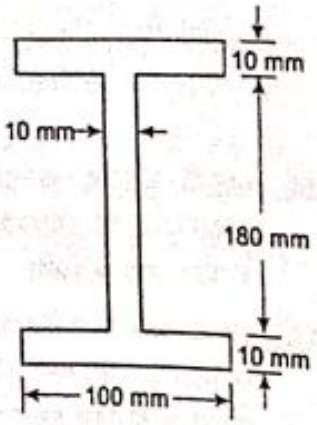
16. चित्र 3.53 में दर्शायी सममित I-काट की 9 m की विस्तृति पर एक धरन शुद्धालम्बित है। यदि अधिकतम अनुमेय प्रतिबल 80 MPa है तो एक आलम्ब से 3 m की दूरी पर कितना संकेन्द्रित भार लगाया जा सकता है? चित्र की सभी मापें mm में हैं। [उत्तर : 10·266 kN] (U.P.)



चित्र 3.53

17. चित्र 3.54 में एक धरन के I-परिच्छेद (I-section) को दिखाया गया है। इस धरन की लम्बाई 6 m है तथा इसके दोनों सरल आधारित सिरों से 2 m की दूरी पर दो बिन्दु भार 10 kN के लगाये गये हैं। ज्ञात करें—
   (i) इस पच्छिेद का उदासीन अक्ष के सापेक्ष क्षेत्र का द्वितीय आघूर्ण (IInd Moment of area)
   (ii) धरन में उत्पन्न अधिकतम तनन तथा सम्पीडन प्रतिबल (Tensile and compressive stress) **(UP 2009)**

   [उत्तर : $6·9 \times 10^6$ mm^4, $\sigma_t = \sigma_c = 173·51$ N/mm^2]



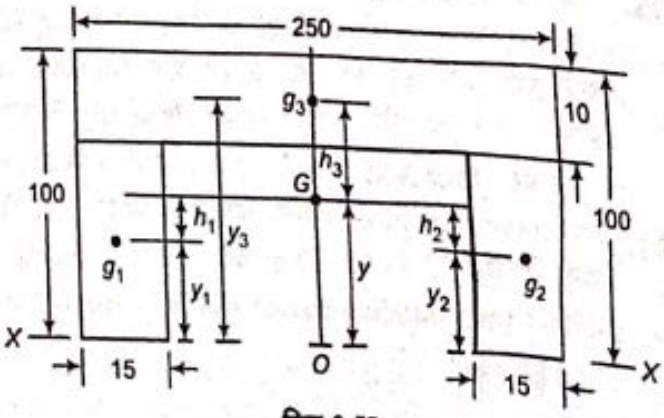
चित्र 3.54

18. एक I-काट की धरन 150 मिमी × 300 मिमी जिसका फ्लैंज 25 मिमी मोटा और वैब 10 मिमी मोटा है। इस काट की नमन सामर्थ्य की तुलना आयताकार और वृत्ताकार काट से कीजिये यदि एक ही पदार्थ, भार और लम्बाई की धरन हो। आयताकार काट के लिए गहराई = 2 × चौड़ाई मानिये। [उत्तर : 4·392, 7·338] (U.P.)

19. 6 मी० विस्तृति के एक सरल आलम्बित धरन, जिसके अनुप्रस्थ काट की गहराई तथा चौड़ाई क्रमश: 300 मिमी तथा 70 मिमी है, पर सम्पूर्ण समवितरित भार का मान क्या होगा? धरन के मध्य में लगने वाले संकेन्द्रित भार का मान क्या होगा? इस धरन में अनुज्ञेय अधिकतम प्रतिबल 120 MPa है। [उत्तर : 168 kN, 84 kN] (U.P.)

20. एक 180 mm × 120 mm आयताकार काट की धरन शुद्धालम्बी है तथा इसकी पूर्ण लम्बाई पर 10 kN/m लम्बाई का समवितरित भार लगा है। यदि नमन प्रतिबल का मान 70 N/mm^2 से अधिक नहीं बढ़ता है तो धरन की अधिकतम सामर्थ्य के लिये आवश्यक विस्तृति ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 6·024 m] (U.P.)

21. एक इस्पात धरन 250 mm चौड़ाई और 100 mm गहराई के उल्टे चैनल से बनी है। देखें चित्र 3.55 फ्लैन्जों की मोटाई 15 mm और वैब 10 mm मोटी है। धरन 12 m विस्तृति पर शुद्धालम्बित है और प्रत्येक आलम्ब से 1 m की दूरी पर ही दो समान



चित्र 3.55

Scanned with CamScanner

संकेन्द्रित भार लगे हैं। प्रत्येक भार का मान ज्ञात कीजिए यदि तनाव मूलक प्रतिबल को 100 N / mm^2 से अधिक नहीं होना है?

[Hints : $\bar{y} = 69{\cdot}0$ mm, $I = 5088525{\cdot}653$ mm^4] [उत्तर : 7·375 kN प्रत्येक] (U.P.2005)

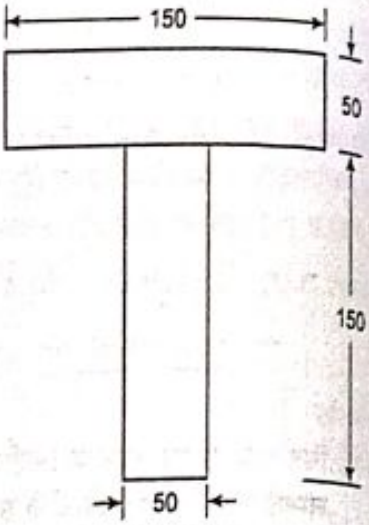
22. चित्र 3.56 में दिये गये T-काट (T-section) के लिये I_{XX} व I_{YY} का मान ज्ञात कीजिये। (U.K. 2011-12 Winter)

[उत्तर : $I_{XX} = 53125000$ mm^4, $I_{YY} = 15625000$ mm^4]

23. प्रश्न (22) के चित्र 3.56 में दिखाई गई T-काट (Section) की धरन (Beam) पर 3·4 kN-m का नमन घूर्ण (B.M.) लगा है तो इसमें उत्पन्न अधिकतम प्रतिबलों के मान व उनकी प्रकृति ज्ञात कीजिये।

(U.K. 2014, S; U.P. 2007)

[उत्तर : तनाव 8 N/ mm^2, संपीडन 4·8 N/ mm^2]



चित्र 3.56

24. एक टी-धरन, दो लकड़ी के तख्तों को जोड़ कर बनाई गई है जिसमें प्रत्येक का माप 50 mm × 15 mm है। इस धरन पर 3400 N-m का अधिकतम नमन घूर्ण लगाया गया है। इस धरन की काट के दूरतम रेशों (extreme fibres) पर प्रतिबलों के मान ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : 247·6 N / mm^2, 142·57 N / mm^2]

25. एक T-बीम के फ्लैंज की चौड़ाई 100 mm तथा पेटा (Web) की गहराई 150 mm है। Flange तथा web की मोटाई 10 mm है। यदि धरन की 4 m की सम्पूर्ण लम्बाई पर 25 kN/m का एक समान बँटा भार (U.D.L.) लगा हो तो उसमें उत्पन्न अधिकतम तनाव प्रतिबल का मान ज्ञात करें। धरन दोनों सिरों पर सरल आधारित है। [उत्तर : 153·17 N / mm^2] (U.P. 2008)

26. दो समान सामर्थ्य वाली धरनों के भारों की तुलना कीजिये। दोनों धरन एक पदार्थ की तथा गोलाकार अनुप्रस्थ काट की हैं। एक धरन ठोस तथा दूसरी खोखली है जिसका आन्तरिक व्यास बाह्य का आधा है।

[उत्तर : $\dfrac{\text{ठोस धरन का भार}}{\text{खोखली धरन का भार}} = 1{\cdot}28$]

27. दो काटों के पदार्थ तथा भार समान हैं। एक काट ठोस वृत्ताकार है जिसका व्यास 200 mm है। दूसरी काट खोखली वृत्ताकार है जिसका बाह्य व्यास 250 mm है। इन दोनों काटों की शक्तियों (आकृति मापांकों) की तुलना कीजिये।

[उत्तर : $Z_h / Z_s = 1{\cdot}7$]

28. एक 5 m विस्तार (span) की सरल आधारित धरन (S.S. Beam) की पूरी लम्बाई पर 10 kN/m का U.D.L. लगा है तथा एक सिरे से दो मीटर की दूरी पर 10 kN का बिन्दु भार भी लगा है। अधिकतम नमन आघूर्ण का मान व स्थिति ज्ञात करें तथा धरन की काट की उचित माप (suitable section) ज्ञात करें जबकि अधिकतम allowable stress 8 N / mm^2 तक सीमित है। काट की गहराई (d), चौड़ाई (b) की दुगनी है। ($d = 2b$)

[उत्तर : Max B.M. = 42·05 kN-m सिरे A से 2·1 m की दूरी पर काट की माप, $b = 198$ mm, $d = 396$ mm]

29. एक water main pipe जिसका आन्तरिक व्यास (internal diameter) 500 mm तथा दीवार की मोटाई 25 mm है, पानी से पूरा भरा है। यह 20 m की लम्बाई पर Freely supported है। पाइप के पदार्थ में उत्पन्न अधिकतम नमन प्रतिबल (max bending stress) ज्ञात करें। Specific weight of steel of Pipe = 75 kN / m^3 and for water = 10 kN / m^3

[उत्तर : $\sigma = 48{\cdot}82 \times 10^6$ N / m^2]

Scanned with CamScanner

30. एक 12 मीटर लम्बा ढलवाँ लोहे (C.I.) का पाईप (Pipe) जिसका आन्तरिक व्यास (internal dia) 500 mm तथा पाईप के चादर की मोटाई (wall thickness) 25 mm है। यह पाइप पानी से पूरा भरा है तथा 12 m की दूरी पर दोनों किनारों पर टिका हुआ है। पदार्थ में उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल (stress) का मान ज्ञात कीजिये। यदि पाईप के पदार्थ का घनत्व 7200 kg / m^3 और पानी का घनत्व 1000 kg / m^3 है। [उत्तर : $\sigma = 17{\cdot}147$ MPa mm] **(U.K. 2014, S)**

31. 500 mm व्यास के लकड़ी के बेलनाकार लट्ठे को काटकर बनाये जाने वाले सबसे मजबूत धरन (Beam) के काट की चौड़ाई व गहराई ज्ञात करें। [उत्तर : $b = 288{\cdot}67$ mm, $h = 408{\cdot}248$ mm] **(UK 2007)**

32. एक 'D' मीटर के लकड़ी के लट्ठे में से अधिकतम शक्ति (max strength) की काटी जा सकने वाली आयताकार काट की माप ज्ञात कीजिये। [उत्तर : $b = \frac{D}{\sqrt{3}} = 0{\cdot}577\,D$, $h = 0{\cdot}816\,D$]

33. एक 4 m लम्बी शुद्ध आलम्बित धरन (simply supported beam) की आयताकार काट की माप (dimensions of rectangular section) 100 mm चौड़ी (width) तथा 200 mm गहरी (depth) है। इस धरन की पूरी लम्बाई पर 4 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है तथा दायें सिरे से 1·5 m की दूरी पर एक संकेन्द्रित भार (Point Load) 2kN का लगा है तो धरन में अधिकतम नमन प्रतिबल (max. bending stress) ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : $\sigma = 14355{\cdot}45$ kN/ $m^2 = 14{\cdot}355$ N/ mm^2] **(U.P. 2010, S)**

34. किसी फर्श (floor) का भार 8 kN/ m^2 है। इसे 6 m लम्बी एक समान कड़ियों (Bars) के ऊपर बनाया गया है। यदि प्रत्येक कड़ियों के केन्द्रों के बीच दूरी (centre to centre distance with each other) 1 m हो और प्रत्येक कड़ी के लिए अधिकतम अनुमेय प्रतिबल (max. permissible stress) 110 N/ mm^2 हो तो कड़ियों की आयताकार काट की माप ज्ञात कीजिये। आयताकार काट की गहराई, चौड़ाई की 1·5 गुनी है। [उत्तर : $b = 95{\cdot}6$ mm, $h = 143{\cdot}4$ mm]

❑

Scanned with CamScanner

4 धरनों में कर्तन प्रतिबल (SHEAR STRESSES IN THE BEAMS)

4.1 परिचय (Introduction)

इससे पूर्व अध्याय "नमन के सिद्धान्त" (Theory of Bending) मे हमने जाना था कि Beams पर ऊर्ध्वाधर भार (Vertical Load) लगाने से धरन (Beam) की परतो (Layers) मे केवल नमन प्रतिबल (Bending Stress) उत्पन्न होते है क्योंकि कर्तन बल (Shear Force) की धरन की काट पर नगण्य (Negligible) अथवा शून्य (Zero) कल्पना की गई थी।

परन्तु वास्तव मे जब किसी धरन पर उसकी अक्ष (Axis) के लम्बरूप बल अर्थात् अनुप्रस्थीय बल (transverse load) लगाया जाता है तो इसके प्रभाव मे दो प्रक्रियाये होती है। (There are two types of actions due to the effect of transverse load)—

(i) कर्तन बल (Shear Force) कार्य करते है।

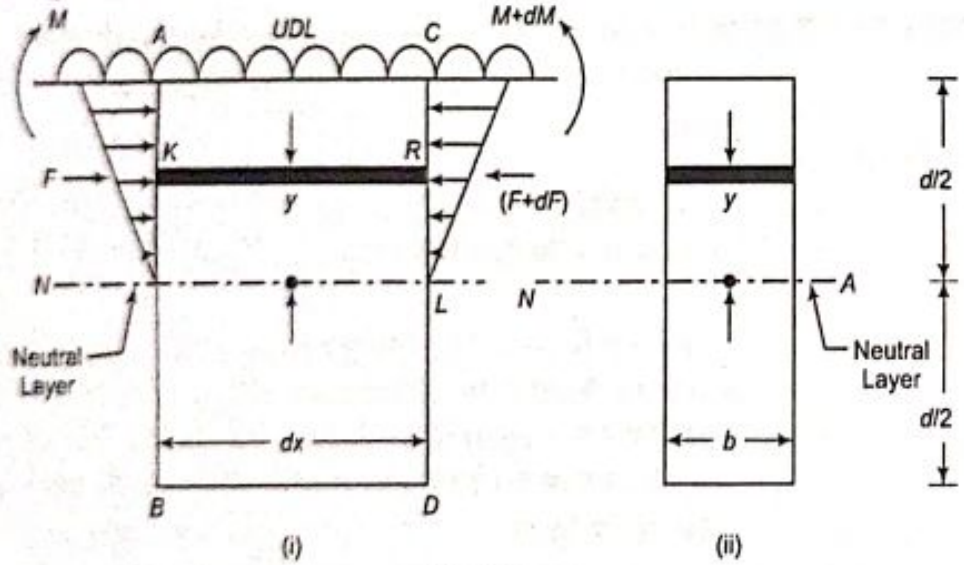
(ii) नमन के कारण नमन आघूर्ण (Bending Moment due to bending)

इस प्रकार हम देखते है कि कर्तन बल (Shear Force) के कारण धरन की काट (Section of beam) कर्तन प्रतिबल (Shear Stresses) तथा नमन आघूर्ण (Bending Moment) के कारण नमन प्रतिबल (Bending Stress) उपजते है (Develop) होते है। अत: इस अध्याय मे हम केवल Shearing stress के महत्व पर विचार करेंगे।

"When a beam is loaded, the shear force at a section always comes into play, alongwith the bending moment. "

"But sometimes, the shearing stress at a section assumes much importance in the design work. So in this chapter, we shall discuss the shearing stress for its own importance."

4.2 धरन पर कर्तन बल के कारण उपजा कर्तन प्रतिबल (Shearing Stress in the Section of the Beam due to Shear Force)



चित्र 4.1

चित्र में समवितरित भार (U.D.L.) से भारित (loaded) धरन (beam) का बहुत छोटा भाग ABCD दिखाया गया है जिसकी लम्बाई dx है। U.D.L. के कारण धरन के इस छोटे भाग में—

$M \Rightarrow$ धरन की काट AB पर नमन आघूर्ण (B. M. at Section AB)

Scanned with CamScanner

$(M + dM) \Rightarrow$ धरन की काट CD पर नमन आघूर्ण (B. M. at Section CD)

$F \Rightarrow$ AB पर कर्तन बल (Shear Force at AB)

$(F + dF) \Rightarrow$ CD पर कर्तन बल (Shear Force at CD)

$I \Rightarrow$ उदासीन अक्ष के सापेक्ष धरन की काट का जड़त्व आघूर्ण

(Moment of inertia of the Section about Neutral Axis)

अब उदासीन अक्ष (Neutral axis) से y दूरी पर एक पट्टी (strip) चित्र के अनुसार माना। माना इसके नमन प्रतिबल तीव्रता (Intensity of bending stress) σ है। इस मानी गई पट्टी (strip) का क्षेत्रफल (a) है। नमन समीकरण से (from theory of bending) हम जानते हैं कि

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y} \text{ या } \sigma = \frac{M}{I} \times y$$

इसी प्रकार, $$(\sigma + d\sigma) = \frac{(M + dM)}{I} \times y$$

जहाँ σ = AB के लम्ब क्षेत्रफल पर उदासीन अक्ष से y दूरी पर नमन प्रतिबल

$(\sigma + d\sigma)$ = CD के लम्ब क्षेत्रफल पर उदासीन अक्ष से y दूरी पर नमन प्रतिबल है।

अब AB के लम्ब दिशा में कर्तन बल (Shear Force)

F = प्रतिबल (Stress) × क्षेत्रफल (a)

$$= \sigma \times a = \frac{M}{I} \times y \times a \quad \text{... (i)}$$

इसी प्रकार CD के लम्ब दिशा में कर्तन बल (Shear Force)

$(F + dF)$ = stress ×area

$$= (\sigma + d\sigma) \times a = \frac{(M + dM)}{I} \times y \times a \quad \text{....(ii)}$$

∴ पट्टी (Strip) के क्षेत्रफल (a) पर परिणामी कर्तन बल (Resultant Shear Force) अर्थात् Unbalanced Force on the strip, [(ii)–(i)] द्वारा—

$$\therefore \quad dF = \frac{M + dM}{I} \times y \times a - \frac{M}{I} \times y \times a = \frac{dM}{I} \times y \times a$$

∵ उदासीन अक्ष (Neutral Axis) से ऊपर कुल कर्तन बल

(Total unbalanced force i.e. Shear Force)

$$F = \int_0^{d/2} \frac{dM}{I} \times a \times y \, dy$$

$$= \frac{dM}{I} \times \int_0^{d/2} a \times y \times dy = \frac{dM}{I} \times A\bar{y} \quad \text{... (iii)}$$

जहाँ A = उदासीन अक्ष से ऊपर धरन की काट का क्षेत्रफल

(Area of beam above neutral axis)

तथा $\bar{y}$ = (N-A) से ऊपर के क्षेत्रफल के गुरुत्व केन्द्र की उदासीन अक्ष (N-A) से दूरी

(Distance between the C.G. of the area and the Neutral Axis)

Scanned with CamScanner

∴ कर्तन प्रतिबल (अपरूपण प्रतिबल) (Shear Stress)

$$q \text{ या } \tau = \frac{\text{कुल कर्तन बल (Total Shear Force) अर्थात् } (F)}{\text{क्षेत्रफल (Area)}}$$

$$q \text{ या } \tau = \frac{\frac{dM}{I} \times A\bar{y}}{\text{लम्बाई } (dx) \times \text{चौड़ाई } (b)} = \frac{dM}{dx} \times \frac{A\bar{y}}{I \times b}$$

$$q \text{ या } \tau = F \times \frac{A\bar{y}}{I \times b} = \frac{F}{I \times b} \times A.\bar{y} \quad \text{(सूत्र)}$$

[∵ यहाँ $\frac{dM}{dx} = F =$ कर्तन बल (Shear Force) है।]

4.3 विभिन्न अनुप्रस्थ काटों में कर्तन प्रतिबलों का वितरण (Shear Stress Distribution in different Sections)

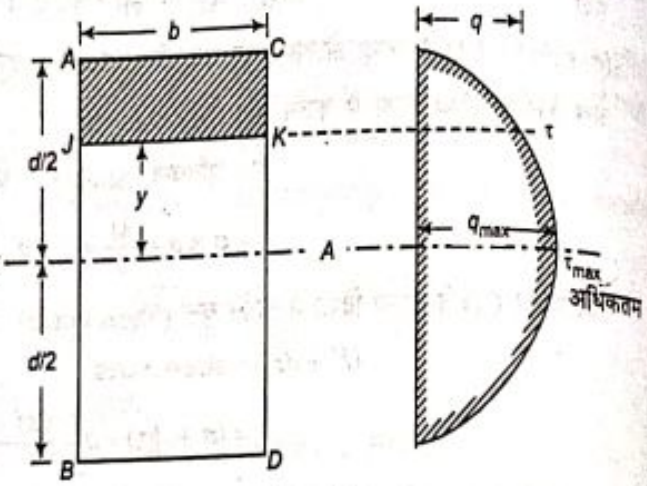
(1) आयताकार काट (Rectangular Section)—चित्र 4.2 में एक Beam की आयताकार काट $(b \times d)$ की दिखाई गई है। इस काट में उदासीन अक्ष $(N.A)$ से y दूरी पर कर्तन प्रतिबल (Shear Stress) q (या τ) का मान ज्ञात करना है।

∵ $(N\text{-}A)$ से y दूरी पर कर्तन प्रतिबल (Shear Stress)

$$q \text{ या } \tau = \frac{F}{I \times b} \times A\bar{y} \text{ (सूत्र) ... (i)}$$

यहाँ A = छायादार क्षेत्रफल (area of shaded portion JKCA)

$$= b \times \left(\frac{d}{2} - y\right)$$



चित्र 4.2

तथा $\bar{y}$ = क्षेत्रफल JKCA के गु० के० की $N\text{-}A$ से दूरी

$$= \left(\frac{d}{2} - y\right) \times \frac{1}{2} + y = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2} + y\right)$$

और $I = \frac{b \times d^3}{12}$, जहाँ b काट की चौड़ाई है।

अब समीकरण (i) में मान रखने पर

कर्तन प्रतिबल (अथवा अपरूपण प्रतिबल-Shear Stress)

$$q = \frac{F}{I \times b} \times \left[b \times \left(\frac{d}{2} - y\right)\right] \times \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d}{2} + y\right)\right]$$

$$\left[\because \left(\frac{d}{2} - y\right)\left(\frac{d}{2} + y\right) = \left(\frac{d^2}{4} - y^2\right) \text{ होते हैं।}\right]$$

$$\boxed{\therefore q \text{ या } \tau = \frac{F}{2I} \times \left[\frac{d^2}{4} - y^2\right]} \quad \text{(सूत्र)}$$

Scanned with CamScanner

उदासीन अक्ष ($N-A$) पर q ज्ञात करने के लिये $y=0$ रखना होगा (चित्र में देखें)

$$\therefore \quad \boxed{q_{\text{अधिकतम}} = \frac{Fd^2}{8I}} \quad \text{(यह } N-A \text{ पर } q \text{ ज्ञात करने के लिये है)} \qquad \text{(सूत्र)}$$

अब $$q_{\text{अधिकतम}} = \frac{f \times d^2 \times 12}{8 \times b \times d^3} = \frac{3}{2} \times \frac{F}{(b \times d)} = 1{\cdot}5\, q_{\text{औसत (average)}}$$

$$\therefore \quad \boxed{q_{\max} = 1{\cdot}5 \times q_{\text{average}}} \qquad \text{(सूत्र)}$$

स्पष्ट है $q_{\max}$ का मान q_{average} से 50 % अधिक है

क्योंकि $$q_{\text{अधिकतम}} = q_{\text{औसत}} + q_{\text{औसत}} \times 50\%$$

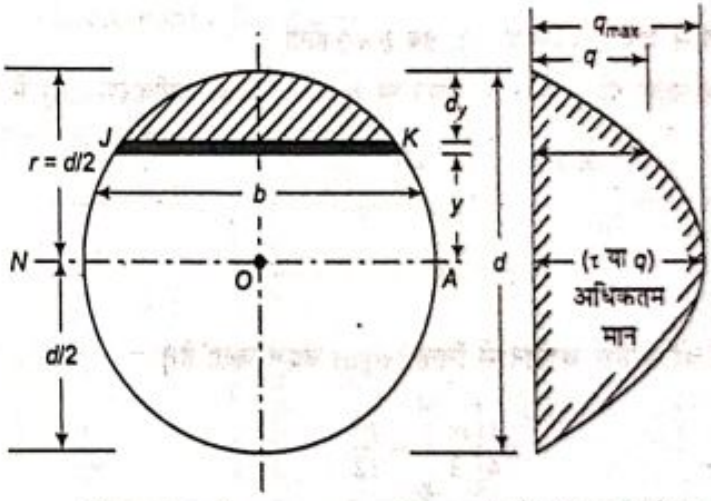
$$= q_{\text{औसत}} \left[1 + \frac{50}{100}\right] = 1{\cdot}50 \times q_{\text{औसत}}$$

नोट—(1) Shear stress τ (या q) $= \frac{F}{2I} \times \left[\frac{d^2}{4} - y^2\right]$ सूत्र में y का मान कम होने पर Shear Stress τ (अथवा q) का मान बढ़ता है।

(2) जब $y = \frac{d}{2}$ तब τ (या q) $= 0$ तथा जब $y=0$ तब Shear Stress (q या τ) का मान अधिकतम होगा।

(3) आयताकार काट के लिये कर्तन प्रतिबलों का मान काट के किनारों पर शून्य से परवलयिक रूप (Parabolic form) से बढ़ता हुआ काट के बीच में अधिकतम हो जाता है जैसा चित्र में Shear stress distribution diagram में दिखाया गया है।

(2) d-व्यास की वृत्ताकार काट में कर्तन प्रतिबल वितरण (Shearing Stress Distribution over a circular section)—



(वृत्ताकार काट) (कर्तन प्रतिबल आरेख)

चित्र 4.3

माना वृत्ताकार काट की त्रिज्या (radius) r है। अत: व्यास (Diameter) $d = 2r$ होगा। अब N-A से y दूरी पर b चौड़ाई की काट JK में कर्तन प्रतिबल (Shearing Stress),

$$\boxed{q = \frac{F}{I \times b} \times A\bar{y}} \qquad \text{(सूत्र)}$$

$\therefore$ NA से y दूरी पर काट की चौड़ाई (width),

$$b = 2\sqrt{(r^2 - y^2)}$$

Scanned with CamScanner

dy मोटाई के छायादार भाग का क्षेत्रफल (area of shaded strip of thickness dy)

$$a = 2\sqrt{(r^2 - y^2)}\, dy$$

$\therefore$ NA पर इस क्षेत्रफल का आघूर्ण (Moment of this area at NA)

$$= 2y\sqrt{(r^2 - y^2)}\, .dy$$

अब सम्पूर्ण छायादार भाग (Whole Shaded Area) का NA पर आघूर्ण ... (i)

$$A.\bar{y} = \int_y^r 2y\sqrt{(r^2 - y^2)}.dy = \int_y^r b \times y\, .dy \quad \text{... (ii)}$$

$$b = 2\sqrt{(r^2 - y^2)}$$

$\therefore$

$$b^2 = 4(r^2 - y^2)$$

या

दोनों ओर का अवकलन (differentiate) करने पर,

$$2b\, .db = -4 \times 2y\, dy = -8y\, .dy$$

$$y\, dy = -\frac{b\, .db}{4}$$

$\therefore$

$y\, dy$ का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$A\,\bar{y} = \int_y^r b\left[-\frac{1}{4} \times b \times db\right] = -\frac{1}{4}\int_y^r b^2.db \quad \text{... (iii)}$$

हम जानते हैं कि चित्र में जब y = त्रिज्या (r), तब $b = 0$ होगा

अतः समाकलन की सीमाओं को y से r के स्थान पर b से 0 (zero) समीकरण (iii) में रखा जा सकता है।

$\therefore$

$$A.\bar{y} = -\frac{1}{4}\int_b^0 b^2.db$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^b b^2 db$$

[$\because$ सीमाओं (limits) को परस्पर बदलने से चिन्ह (sign) बदल जाता है।]

$$= +\frac{1}{4}\left[\frac{b^3}{3}\right]_0^b = \frac{b^3}{12}$$

अब कर्तन प्रतिबल (Shear Stress),

$$q = \frac{F}{I \times b} \times A\bar{y}$$ सूत्र द्वारा

$$q = \frac{F}{I \times b} \times \frac{b^3}{12} = \frac{F \times b^2}{12 \times I}$$

$$= \frac{F}{12I} \times (2\sqrt{(r^2 - y^2)})^2 = \frac{F}{12I} \times [4(r^2 - y^2)]$$

Scanned with CamScanner

∴ कर्तन (या अपरूपण प्रतिबल),

$$q \text{ या } \tau = \frac{F}{3I}(r^2 - y^2)$$

$$= \frac{F}{3 \times \frac{\pi d^4}{64}} \times (r^2 - y^2)$$

$$= \frac{F \times 64}{3 \times \pi \times (2r)^4} \times (r^2 - y^2)$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{F}{\pi r^4} \times (r^2 - y^2)$$

$y = r$ रखते हैं तो $q = 0$ होता है और यदि $y = 0$ रखते हैं तब q (या τ) अधिकतम (max) होता है।

∴ $$q_{max} = \frac{4}{3} \times \frac{F}{\pi r^2}$$

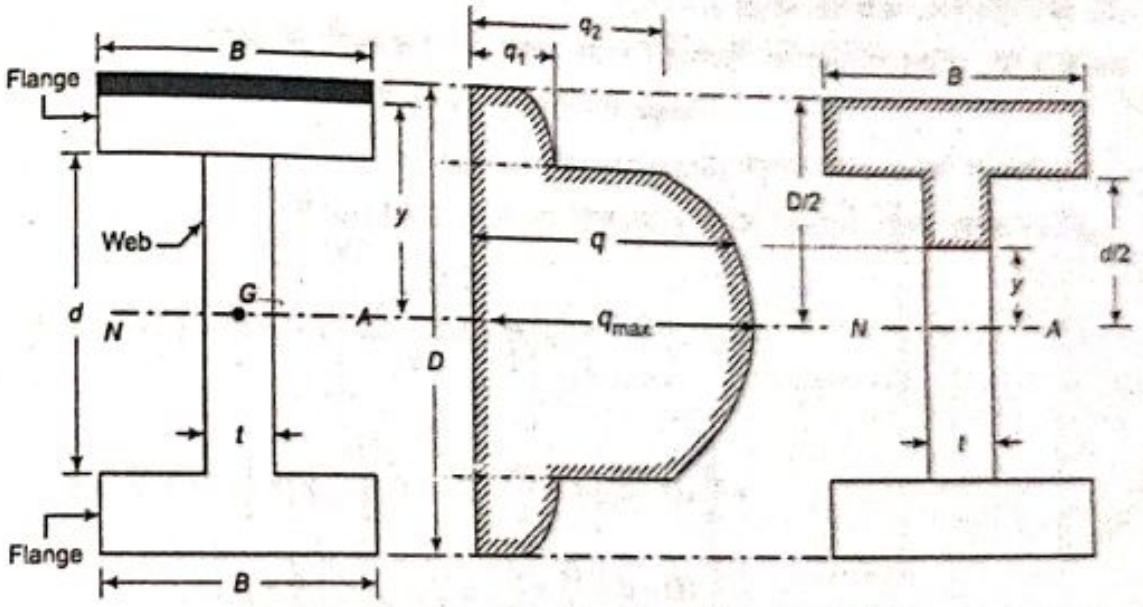
परन्तु $$q_{average} = \frac{\text{Force}}{\text{Area}} = \frac{F}{\pi r^2}$$

∴ $$q_{max} = \frac{4}{3}(q_{average}) \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$= 1{\cdot}333\, q_{av}$$

अत: अधिकतम कर्तन प्रतिबल, औसत से 33·3% अधिक होती है।

(3) सममित I-काट (Symmetrical I-Section)—



(i) I-Section (ii) प्रतिबल-वितरण आरेख (I-काट में) (iii)
(Stress Distribution Diagram)

चित्र 4.4

(A) Flange के लिये—

चित्र में y से ऊपर Shaded भाग का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

∴ क्षेत्रफल (area) $A = B \times \left(\frac{D}{2} - y\right)$

Scanned with CamScanner

इस क्षेत्रफल (Shaded Part) के क्षेत्रफल (A) के गु० केन्द्र की N-A से दूरी,

$$\bar{y} = y + \frac{1}{2}\left(\frac{D}{2} - y\right) = \frac{D}{4} - \frac{y}{2} + y = \frac{D}{4} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{2} + y\right)$$

$\therefore$ NA से y ऊँचाई पर कर्तन प्रतिबल,

$$q \text{ (या } \tau) = \frac{F}{I \times b} \times A.\bar{y} \text{ सूत्र से}$$

$$q = \frac{F}{I \times B} \times B \times \left(\frac{D}{2} - y\right) \times \frac{1}{2}\left(\frac{D}{2} + y\right) \qquad [\because \text{यहाँ } b = B \text{ चौड़ाई है}]$$

$$q = \frac{F}{2I} \times \left[\frac{D^2}{4} - y^2\right] \quad \ldots(i)$$

अत: फ्लैंज में कर्तन प्रतिबल समीकरण (i) के अनुसार Parabolic रूप में बदलता है।

अब फ्लैंज के ऊपर किनारे के लिए $y = \frac{D}{2}$ होगा जहाँ सूत्र से $q = 0$ होगा।

फ्लैंज Flange में वैब (Web) के साथ जोड़ पर कर्तन प्रतिबल (Shear Stress)

$$q_1 = \frac{F}{2I}\left[\frac{D^2}{4} - \frac{d^2}{4}\right] \qquad [\because \text{यहाँ } y = \frac{d}{2} \text{ दूरी है}]$$

या $$q_1 = \frac{F}{8I}[D^2 - d^2] \quad \ldots(ii)$$

(B) Web के लिये—[चित्र 4.4 (iii) में]

N-A से y ऊँचाई पर काट की चौड़ाई $b = t$ है।

अब N-A से y ऊँचाई पर काट का क्षेत्रफल (अर्थात् अलग-अलग क्षेत्रफलों का योग)

= Flange का क्षेत्रफल + Web के भाग का क्षेत्रफल

$\therefore$ इस क्षेत्रफल का N-A पर आघूर्ण (Moment of this area at NA)

$A\bar{y}$ = (अलग-अलग क्षेत्रफलों का N-A पर घूर्णों का योग) (चित्र (iii) में)

$$= B \times \left[\frac{D}{2} - \frac{d}{2}\right] \times \left[\frac{d}{2} + \frac{\left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2}\right)}{2}\right] + t \times \left(\frac{d}{2} - y\right) \times \left[y + \left(\frac{d}{2} - y\right)\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{B}{4}(D - d)\left[d + \frac{D}{2} - \frac{d}{2}\right] + t\left(\frac{d}{2} - y\right) \times \frac{1}{2}\left(2y + \frac{d}{2} - y\right)$$

$$= \frac{B}{4}(D - d)\left(\frac{D}{2} + \frac{d}{2}\right) + \frac{t}{2}\left(\frac{d}{2} - y\right)\left(\frac{d}{2} + y\right)$$

$$= \frac{B}{8}(D^2 - d^2) + \frac{t}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)$$

$\therefore$ $N-A$ से y ऊँचाई पर कर्तन प्रतिबल (Shearing Stress)

$$q = \frac{F}{I \times t}\left[\frac{B}{8}(D^2 - d^2) + \frac{t}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right)\right]$$

Scanned with CamScanner

$$\tau \text{ या } q = \frac{F}{8I} \times \frac{B}{t}(D^2 - d^2) + \frac{F}{2I} \times \left(\frac{d^2}{4} - y^2\right) \quad \text{... (iii)}$$

∴ स्पष्ट होता है कि वैब (Web) वाले भाग में Shearing Stress सम्बन्ध समीकरण (iii) के अनुसार बदलता है।

अब Web में Flange के साथ जोड़ पर कर्तन प्रतिबल (Shearing Stress), सम्बन्ध समीकरण (iii) में $y = \frac{d}{2}$ पर,

$$q_2 = \frac{F}{8I} \times \frac{B}{t}(D^2 - d^2) \quad \text{... (iv)}$$

अत: वैब (Web) तथा फ्लैंज (Flange) के जोड़ पर कर्तन प्रतिबल (Shearing stress) एकदम (Suddenly in a line) q_1 से q_2 तक बदलता है क्योंकि यहाँ पर काट में चौड़ाई भी अचानक B से t हो जाती है।

अब उदासीन अक्ष $(N-A)$ पर अधिकतम कर्तन प्रतिबल (max Shearing stress) के लिये, सम्बन्ध समीकरण (iii) में $y = 0$ रखने पर,

$$q_{max} = \frac{F}{8I} \times \frac{B}{t} \times (D^2 - d^2) + \frac{F}{8I} \times d^2 \quad \text{... (v)}$$

इस प्रकार प्राप्त हुई उपरोक्त सम्बन्ध समीकरणों (equations) के आधार पर

I-काट (I- Section) का प्रतिबल वितरण आरेख (Stress distribution diagram) चित्र 4.4 (ii) में दर्शाया गया है।

नोट—इसी प्रकार हम T तथा L-काटों (Sections) के लिये भी Stress distribution diagram खींच सकते हैं जिसे आगे दिये गये उदाहरणों द्वारा समझा जा सकता है।

महत्वपूर्ण उदाहरण (Important Examples)

उदाहरण 1 (i) 100 mm चौड़ी तथा 225 mm गहरी एक आयताकार काट की धरन (A beam of Rectangular Section) 25 kN के अपरूपण बल (Shearing Force) के अधीन है। अपरूपण प्रतिबल वितरण का रेखाचित्र (Shearing stress distribution diagram) बनायें तथा अधिकतम अपरूपण प्रतिबल (Max. shearing stress) की गणना करें। **(U.P. 2001, 08)**

हल—दिये गये परिच्छेद (Section) का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.)

$$I = \frac{100 \times 225^3}{12} = 94921875 \text{ mm}^4$$

अपरूपण (अथवा कर्तन बल)

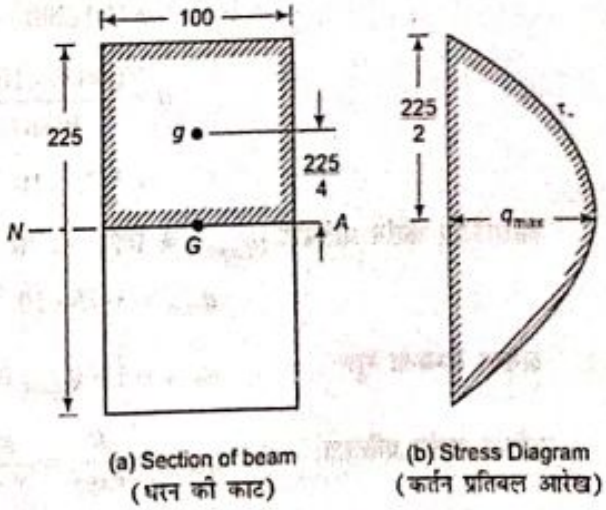
Shearing Force, $(F) = 25$ kN

या $F = 25000$ N

तथा चौड़ाई $b = 100$ mm

अब NA से ऊपर के क्षेत्रफल का NA पर आघूर्ण (Moment of the area above NA at the Neutral axis or x-axis)

$$A\bar{y} = \left(100 \times \frac{225}{2}\right) \times \frac{225}{4} = 632812{\cdot}5$$



(a) Section of beam (धरन की काट) (b) Stress Diagram (कर्तन प्रतिबल आरेख)

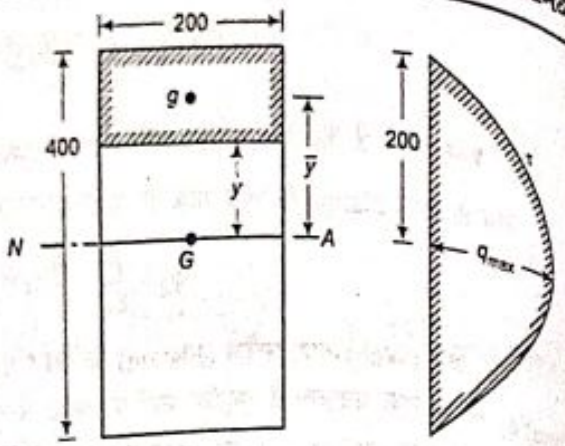
चित्र 4.5 (i)

∴ NA पर max Shearing Stress, $q_{max} = \frac{F}{I \times b} A\bar{y}$ सूत्र से

$$q_{max} = \frac{25000}{94921875 \times 100} \times 632812{\cdot}5 = 1{\cdot}6666 \Rightarrow 1{\cdot}67 \text{ N/mm}^2$$

Scanned with CamScanner

उदाहरण 1 (ii). लकड़ी की एक सरल आलम्बित धरन (S.S. Beam) का विस्तार (Span) 4 m है, इसकी पूरी लम्बाई पर 40kN/m का एक समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। इस धरन की आयताकार काट (Rectangular Section) की माप 200 mm × 400 mm है। कर्तन प्रतिबल वितरण आरेख खींचे तथा ज्ञात करें (i) अधिकतम कर्तन प्रतिबल (max shear stress) (ii) औसत कर्तन प्रतिबल (average shear stress)।



(a) Section of beam (धरन की काट) (b) Stress Diagram (कर्तन प्रतिबल आरेख)

चित्र 4.5 (ii)

हल (Solution)—In general

$$q = \frac{F}{I \times b}(A\bar{y}) \quad \text{सूत्र}$$

जहाँ, $b = 200$ mm (चौड़ाई)

$d = 400$ mm (गहराई)

$$\therefore \quad I = \frac{bd^3}{12} = 10667 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

कर्तन बल (Shear Force) F = टेक की प्रतिक्रिया $= \frac{w \times L}{2}$

$$\therefore \quad F = \frac{40 \times 4}{2} = 80 \text{ kN} = 80000 \text{ N}$$

$$A\bar{y} = 200 \times (200 - y) \times \left[y + \frac{200 - y}{2} \right]$$

$$= 200 (200 - y) \frac{(200 + y)}{2}$$

$$= 100 (200^2 - y^2)$$

$$\therefore \quad q = \frac{80000 \times 100 (200^2 - y^2)}{10667 \times 10^4 \times 200}$$

$$= 3{\cdot}75 \times 10^{-5} (40000 - y^2)$$

अधिकतम कर्तन प्रतिबल (q_{max}) के लिए NA पर $y = 0$ होगा।

$$q_{max} = 3{\cdot}75 \times 10^{-5} (40000 - 0) = 1{\cdot}5 \text{ N/mm}^2$$

अथवा सम्बन्ध सूत्र $\quad q_{max} = \frac{3}{2} \times q_{mean}$ (average) से

औसत कर्तन प्रतिबल, $\quad q_{mean} = \frac{F}{\text{Area}} = \frac{F}{b \times d} = \frac{80000}{200 \times 400}$

in

$$q_{mean} = 1 \text{ N/mm}^2$$

(average)

$$\therefore \text{ अधिकतम कर्तन प्रति } (q_{max}) = \frac{3}{2} \times 1 = 1{\cdot}5 \text{ N/mm}^2$$

उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 2. एक 100 mm व्यास के वृत्ताकार परिच्छेद (Circular Section) वाली धरन (Beam) के किसी परिच्छेद पर 200 N-m का एक वंकन आघूर्ण (Bending Moment) तथा 500 N का अपरूपण बल (Shearing Force) लगाया गया है। इस परिच्छेद पर प्रेरित (induced at this section) अधिकतम वंकन एवं अपरूपण प्रतिबलों (max shearing and bending stress) का मान बताइये। **(U.P. 2006)**

हल—दिया है, वंकन आघूर्ण (नमन आघूर्ण)

$$M = 200 \text{ N-m}$$

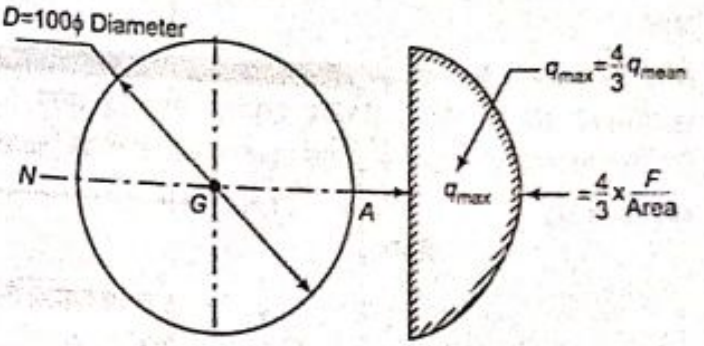
$$= 200 \times 1000 \text{ N-mm}$$

अपरूपण बल (Shear Force)

$$F = 500 \text{ N}$$

जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia)

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi (100)^4}{64} = 4906250 \text{ mm}^4$$



चित्र 4.6

यदि नमन प्रतिबल (bending stress) $= f_b$ या σ_b हो तो

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma \text{ या } f}{y}$$

सूत्र से f (या σ) $= \frac{My}{I}$

जहाँ $$y = \frac{D}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ mm}$$

$\therefore$ $$f_b \text{ या } \sigma_b = \frac{2 \times 10^5 \times 50}{4906250} = 2{\cdot}038 \text{ N/mm}^2$$ **उत्तर**

तथा अधिकतम अपरूपण प्रतिबल (Maximum Shearing Stress)

$$q_m = \frac{F}{I \times b} \times A\bar{y}$$

अथवा $q_{max} = \frac{Fd^2}{12\,I}$ सूत्र से

$$q_{max} = \frac{500 \times (100)^2}{12 \times 4906250} = 0{\cdot}08492569 \text{ N/mm}^2$$

$$= 0{\cdot}085 \text{ N/mm}^2$$ **उत्तर**

नोट—कर्तन प्रतिबल (Shearing stress) ज्ञात करने की दूसरी विधि—

$\because$ औसत कर्तन (अपरूपण) प्रतिबल (mean shearing stress)

$$q_{mean} = \frac{\text{Force (कर्तन बल)}}{\text{Area (क्षेत्रफल)}}$$ (सूत्र से)

$$= \frac{500}{\pi (100)^2/4} = \frac{2000}{\pi \times 10000} = 0{\cdot}06369 \text{ N/mm}^2$$

अब $$q_{\text{अधिकतम}} = \frac{4}{3} \times q_{\text{औसत}} \text{ या } q_{max} = \frac{4}{3} \times q_{mean}$$ (सूत्र)

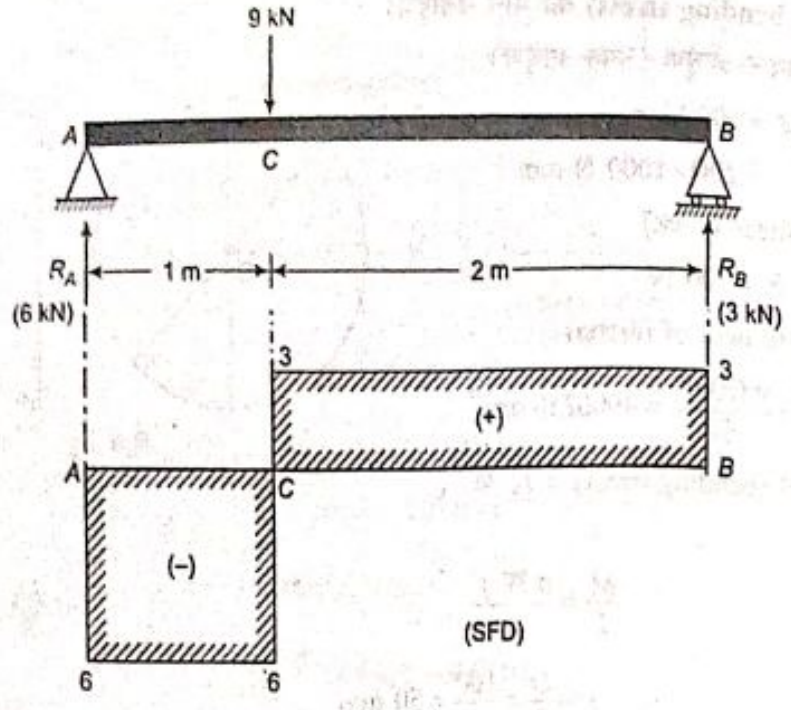
$\therefore$ $$q_{max} = \frac{4}{3} \times 0{\cdot}06369 = 0{\cdot}0849$$

$$= 0{\cdot}085 \text{ N/mm}^2$$ **उत्तर**

Scanned with CamScanner

उदाहरण 3. एक 40 mm × 80 mm काट वाली 3 m लम्बी धरन सिरों पर शुद्धालम्बित (Simply supported) है। इस पर 9 kN का एक बिन्दु भार दायें सिरे से (from right end B) 2 m की दूरी पर लगा है। धरन की काट पर अधिकतम नमन तथा कर्तन प्रतिबल (max bending and shearing stress) ज्ञात कीजिये। (U.K. 2007 (S), 09 (W))

हल—



चित्र 4.7

$$I = \frac{b \times d^3}{12} = \frac{40 \times 80^3}{12} = 1706666{\cdot}667$$

$$y = \frac{d}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ mm}$$

धरन (beam) के सिरे A पर आघूर्ण से,

$$R_B \times 3 = 9 \times 1 \text{ या } R_B = \frac{9}{3} = 3 \text{ kN}$$

∵ अधिकतम नमन आघूर्ण (Max B.M.) C पर होगा। अत: C पर नमन घूर्ण

(B.M. at C), $M = R_B \times 2 = 3 \times 2 = 6 \text{ kN-m}$

∴ $M = 6 \times 10^6 \text{ N-mm}$

अब $\frac{M}{I} = \frac{f}{y}$ सूत्र से, अधिकतम नमन प्रतिबल (max bending max stress) f है।

तब अधिकतम $f = \frac{My}{I} = \frac{6 \times 10^6 \times 40}{1706666{\cdot}667} = 140{\cdot}625 \text{ N/mm}^2$ उत्तर

अब अधिकतम कर्तन बल (Max. Shearing Stress)

$q_{max} = \frac{F.d^2}{8I}$ सूत्र से [अथवा $q_{max} = \frac{4}{3} \times q_{mean}$]

∵ प्रतिक्रिया $R_A = 9 - R_B = 9 - 3 = 6 \text{ kN}$ [जहाँ $q_{mean} = \frac{\text{Shear force}}{\text{Area}}$]

Scanned with CamScanner

∴ अधिकतम कर्तन बल चित्र में C से A तक है। अत: $F = 6\,\text{kN} = 6000\,\text{N}$ अधिकतम कर्तन प्रतिबल (N-A) पर

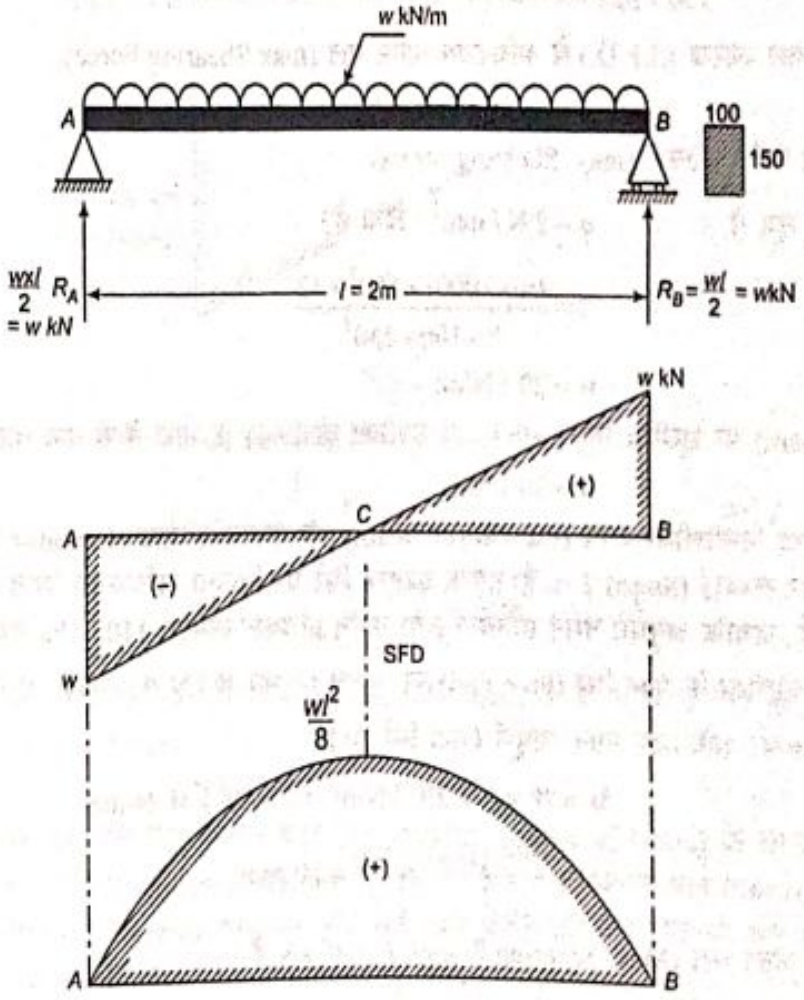
$$q_{max} = \frac{F.d^2}{8I} \text{ सूत्र से,}$$

$$q_{max} = \frac{6000 \times 80^2 \times 12}{8 \times 40 \times 80^3} = 2{\cdot}8125\,\text{N/mm}^2$$

उत्तर

उदाहरण 4. 100 mm × 150 mm आकार (Size) की प्रकाष्ठ धरन (Simply supported beam) की 2 m विस्तृति (Span) पर एक समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। यदि सुरक्षित प्रतिबल बंकन में (in bending) 28 N/mm² तथा अपरूपण में (in Shearing) 2 N/mm² हो तो धरन द्वारा सहन कर सकने वाले अधिकतम भार की गणना कीजिये। **(U.P. 2004)**

हल—



चित्र 4.8

दिया है धरन की काट की चौड़ाई (b) = 100 mm

तथा गहराई (d) = 150 mm

∴ जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.), $I = \frac{100 \times 150^3}{12}\,\text{mm}^4$

तथा $y = \frac{d}{2} = \frac{150}{2} = 75\,\text{mm}$

Scanned with CamScanner

∵ अधिकतम नमन आघूर्ण (Max B.M.)

$$M = \frac{wl^2}{8} \quad \text{(सूत्र)}$$

$$= \frac{w \times 2^2}{8} = \frac{w}{2} \text{ kN-m}$$

$$= \frac{w}{2} \times 10^6 \text{ N-mm}$$

नमन प्रतिबल (bending stress) f या $\sigma = 28 \text{ N/mm}^2$ दिया है।

$\frac{M}{I} = \frac{\sigma}{y}$ सूत्र से, $\quad \frac{\frac{w}{2} \times 10^6 \times 12}{100 \times 150^3} = \frac{28}{75}$ या $w = 21$ kN/m

चित्र में कर्तन बल आरेख (S.F.D.) से अधिकतम कर्तन बल (max Shearing Force),

$$F = w \text{ kN} = w \times 1000 \text{ N}$$

अब अधिकतम कर्तन प्रतिबल (max. Shearing Stress)

$q_{max} = \frac{F.d^2}{8I}$ सूत्र में $\qquad q = 2 \text{ N/mm}^2$ (दिया है)

$$2 = \frac{(w \times 1000) \times 150^2 \times 12}{8 \times 100 \times 150^3}$$

$$\therefore \quad w = 20 \text{ kN/m}$$

अत: धरन (beam) पर सुरक्षित भार (safe load) उपरोक्त दोनों (w) के मानों में से कम वाला मान होगा।

$$\therefore \quad w = 20 \text{ kN/m}$$ उत्तर

उदाहरण 5. एक कैन्टीलीवर धरन (Cantilever beam) की वृत्ताकार काट (Circular Section) का व्यास (Dia) 100 mm और लम्बाई (Span) 2 m है। इसके स्वतन्त्र सिरे पर कितना अधिकतम बिन्दु भार (Point Load) लगाया जा सकता है, जबकि अनुमेय नमन प्रतिबल तथा कर्तन प्रतिबल क्रमश: 110 MPa तथा 80 MPa है।

हल—माना कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे (Free End) पर अधिकतम भार W kN का लगाया जा सकता है,

तब Cantilever पर अधिकतम नमन आघूर्ण (बद्ध सिरे पर)

$$M = W \times l \Rightarrow 2W \text{ kN-m} \Rightarrow 2 \times 10^6 \times W \text{ N-mm}$$

$$y = \frac{\text{व्यास (Dia)}}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ mm}$$

तथा अधिकतम कर्तन बल (Max. Shearing Force), $F = W$ kN है

या $\quad F = W \times 1000 \text{ N}$ है।

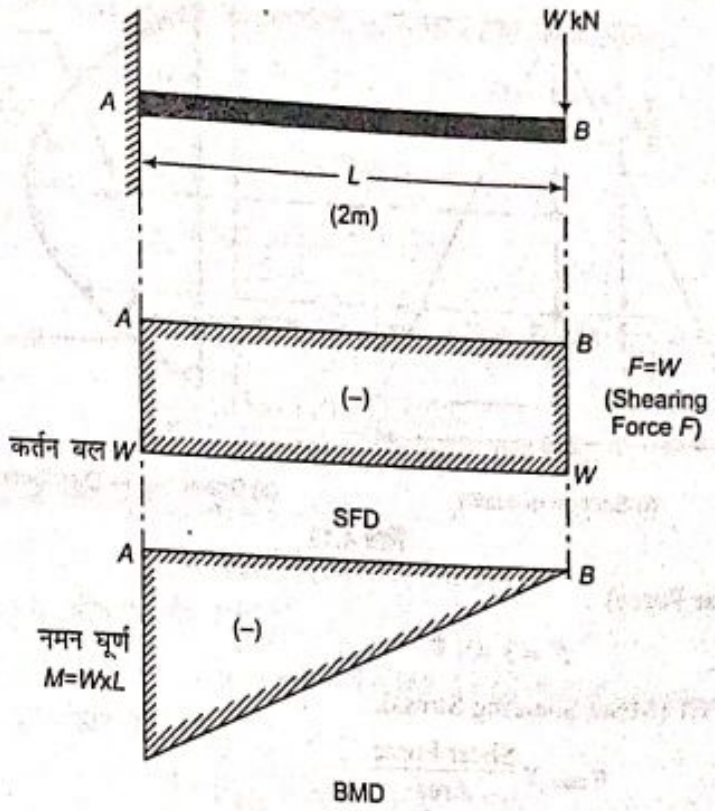
∴ अधिकतम नमन प्रतिबल (max. Bending Stress)

$$\sigma \text{ (या } f) = \frac{M \times y}{I} \text{ (सूत्र है)}$$

$$110 = \frac{2 \times 10^6 \times W \times 50}{\pi (100)^4 / 64}$$

या $\quad W = \frac{110 \times \pi \times (100)^4}{64 \times 2 \times 10^6 \times 50} = 5{\cdot}396875 \text{ kN}$

Scanned with CamScanner



चित्र 4.9

तथा अधिकतम कर्तन प्रतिबल (max. Shearing Stress)

$$q_{max} = \frac{F.d^2}{12I} \text{ (सूत्र)}$$ जहाँ F = Shearing Force है।

$$\therefore \quad 80 = \frac{W \times 1000 \times (100)^2}{12 \times \pi (100)^4 / 64} \text{ या } W = 471 \text{ kN}$$

अत: Cantilever पर अधिकतम सुरक्षित भार (max. Safe Load) W के प्राप्त हुए दोनों मानों (Values) में से कम वाला मान होगा, अर्थात् सुरक्षित भार

$$(W) = 5{\cdot}396875 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 6. एक धरन की त्रिभुजाकार काट (Triangular Section of beam) के आधार की चौड़ाई (base width) 200 mm तथा ऊँचाई (height) 300 mm है, इस पर 3 kN का कर्तन बल (Shearing Force) लगा है। अधिकतम कर्तन प्रतिबल (Shearing Stress) ज्ञात करें तथा कर्तन प्रतिबल वितरण आरेख (Shearing stress distribution diagram) खींचिए।

हल—आधार की चौड़ाई (base width) $b = 0{\cdot}2$ m

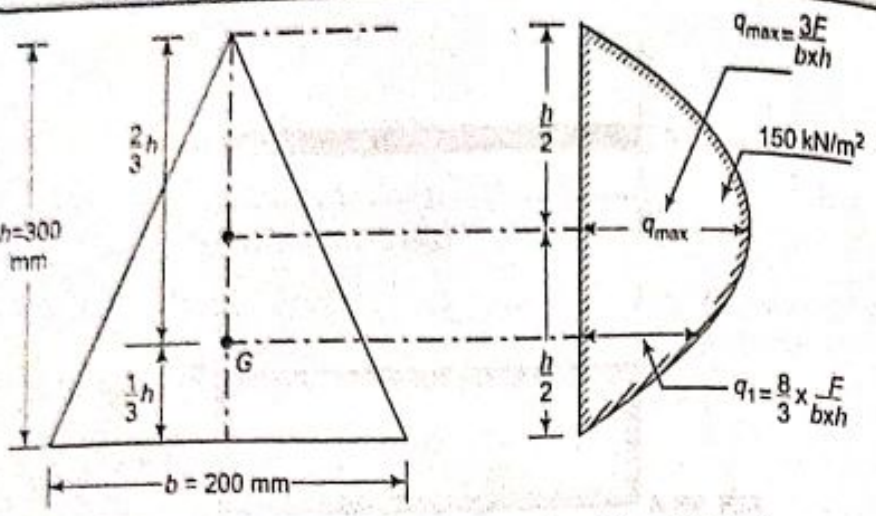
ऊँचाई (height) $h = 0{\cdot}3$ m

$\therefore$ क्षेत्रफल (area) $= \frac{b \times h}{2}$

$$\therefore \quad A = \frac{0{\cdot}2 \times 0{\cdot}3}{2}$$

$$A = 0{\cdot}03 \text{ m}^2$$

Scanned with CamScanner



(i) Section of beam (ii) Shear Stress Distribution

चित्र 4.10

∵ कर्तन बल (Shear Force)

$$F = 3 \text{ kN}$$ है

∵ औसत कर्तन प्रतिबल (Mean Shearing Stress),

$$q_{max} = \frac{\text{Shear Force}}{\text{Area}}$$

$$q_{mean} = \frac{3}{0{\cdot}03} = 100 \text{ kN/m}^2$$

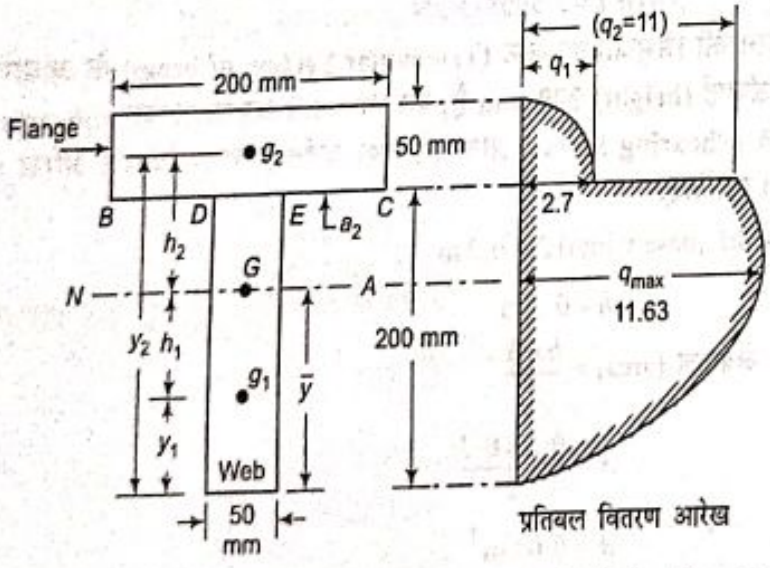
अब सम्बन्ध सूत्र, अधिकतम कर्तन प्रतिबल $q_{max} = \frac{3}{2} \times q_{mean}$ से,

$$q_{max} = \frac{3}{2} \times 100 = 150 \text{ kN/m}^2$$

उत्तर

उदाहरण 7. चित्र 4.11 (i) में दिखाये गये टी-काट की धरन पर 100 kN का कर्तन बल लगा है। काट के मुख्य बिन्दुओं पर कर्तन प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये तथा कर्तन प्रतिबल वितरण आरेख (Shear stress distribution diagram) खींचिये जबकि उदासीन अक्ष (Neutral Axis) के परित: जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.) $I = 113{\cdot}4 \times 10^6 \text{ mm}^4$ मानिये। (U.K. Sp. B. P. 2013)

हल—



(i) Section of Beam (ii) Stress Distribution Diagram

चित्र 4.11

Scanned with CamScanner

गु० के० (g_1) वाले आयत (rectangle) का क्षेत्रफल, $a_1 = 50 \times 200 = 10000 \text{ mm}^2$

गु० के० (g_2) वाले आयत (rectangle) का क्षेत्रफल $a_2 = 200 \times 50 = 10000 \text{ mm}^2$

केन्द्र (g_1) की ऊँचाई $\quad y_1 = \frac{200}{2} = 100 \text{ mm}$

केन्द्र (g_2) की ऊँचाई $\quad y_2 = 200 + \frac{50}{2} = 225 \text{ mm}$

$\therefore \quad \bar{y} = \text{गु० केन्द्र की ऊँचाई} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2}$ सूत्र से

$$\bar{y} = \frac{10000 \times 100 + 10000 \times 225}{10000 + 10000} = \frac{325}{2} = 162{\cdot}5 \text{ mm}$$

अब $h_1 = g_1$ तथा G के बीच दूरी (gap) $= \bar{y} - y_1$

$$h_1 = 162{\cdot}5 - 100 = 62{\cdot}5 \text{ mm}$$

तथा $h_2 = g_2$ तथा G के बीच का गैप (दूरी)

$$= y_2 - \bar{y} = 225 - 162{\cdot}5 = 62{\cdot}5 \text{ mm}$$

अब जड़त्व आघूर्ण, (T-काट का)

$$I = [I_{xg_1} + a_1 h_1^2] + [I_{xg_2} + a_2 h_2^2]$$

$$= \left[\frac{50 \times 200^3}{12} + 10000 \times 62{\cdot}5^2\right] + \left[\frac{200 \times 50^3}{12} + 10000 \times 62{\cdot}5^2\right]$$

$$= [72395833{\cdot}33] + [41145833{\cdot}33]$$

$$= 113541666{\cdot}7 \text{ mm}^4$$

अब Flange में web के साथ जोड़ BC पर कर्तन प्रतिबल (Shear Stress)

$$q_1 \text{ (या } \tau_1) = \frac{F}{I \times b} \times A\bar{y} \qquad \text{(सूत्र)}$$

[यहाँ b = flange की BC पर चौड़ाई 200 mm है]

यहाँ $A\bar{y}$ = BC से ऊपर के क्षेत्र० का NA पर घूर्ण है।

$$q_1 = \frac{100 \times 1000}{113541666{\cdot}7 \times 200} \times (200 \times 50) \times 62{\cdot}5$$

$$= 2{\cdot}75 \text{ N/mm}^2$$

Web में Flange के साथ जोड़ DE पर कर्तन प्रति (Shear Stress)

$q_2 = \frac{F}{I \times b} \times A\bar{y}$ सूत्र में, $\quad b = DE$ पर लम्बाई = 50 mm

$A\bar{y}$ = DE से ऊपर के क्षेत्रफल का NA पर घूर्ण (moment)

$$= (200 \times 50) \times h_2 = 10000 \times 62{\cdot}5 = 625000$$

$$\therefore \quad q_2 = \frac{100 \times 1000}{113541666{\cdot}7 \times 50} \times 625000 = 11{\cdot}01 \text{ N/mm}^2$$

Scanned with CamScanner

अब *N-A* पर अधिकतम कर्तन प्रतिबल (Max. Shear Stress at *N-A*)

यहाँ पर चौड़ाई $(b) = 50$ mm,

$A\bar{y} = NA$ (जहाँ चौड़ाई $b = 50$ mm है) के ऊपर के क्षेत्रफल (Flange + Web) का NA पर आघूर्ण (Moment) है।

$$= (200 \times 50) \times h_2 + (200 - \bar{y}) \times 50 \times \frac{(200 - \bar{y})}{2}$$

$$= (200 \times 50 \times 62{\cdot}5) + (200 - 162{\cdot}5) \times 50 \times \frac{(200 - 162{\cdot}5)}{2}$$

$$= 660156{\cdot}25$$

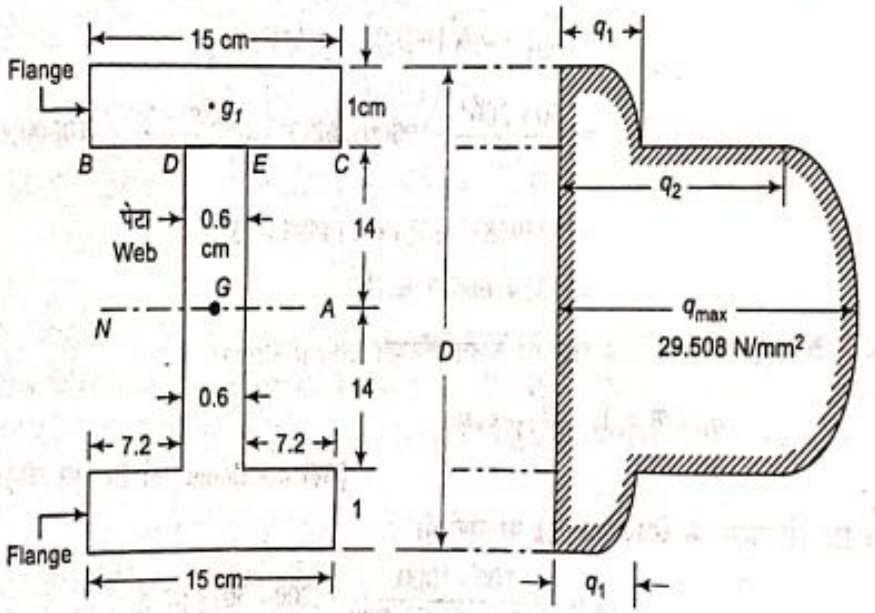
$q_{max} = \frac{F}{I \times b} \times A\bar{y}$ सूत्र से

$$= \frac{100 \times 1000}{113541666{\cdot}7 \times 50} \times 660156{\cdot}25 = 11{\cdot}63 \text{ N/mm}^2$$

उत्तर

प्रतिबल वितरण आरेख (stress distribution diagram) को चित्र 6.10 (ii) के अनुसार बनाते हैं।

उदाहरण 8. चित्र 4.12 (i) में दर्शाये गये I-खण्ड (I-Section) के लिये अपरूपण प्रतिबल आवँटन आरेख (Shear Stress Distribution Diagram) बनाइये यदि खण्ड पर 40 kN का अपरूपण बल (Shear Force) लगा है। **(U.P. 2003, 2008)**



(i) Section of Beam (ii) Shear Stress Distribution Diagram

चित्र 4.12

हल—चित्र (i) में दर्शाई गयी I-काट (I-Section) का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.),

$$I = \left[\frac{15 \times 30^3}{12} - \frac{14{\cdot}4 \times 28^3}{12}\right]$$

$$I = 7407{\cdot}6 \text{ cm}^4$$

$$= 7407{\cdot}6 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

Scanned with CamScanner

अब Flange में Web के साथ जोड़ BC पर अपरूपण प्रतिबल (Shear Stress at BC), $q_1 = \frac{F}{I \times b} \times A\bar{y}$ सूत्र में

Flange की चौड़ाई BC पर, $b = 15 \text{ cm} = 150 \text{ mm}$

तथा $A\bar{y} = BC$ से ऊपर के भाग (Portion above BC) के क्षेत्रफल (area) का $N\text{-}A$ पर घूर्ण (moment) (सभी mm में लेने पर)

$$= (150 \times 10) \times \text{दूरी } (g_1G) = 150 \times 10 \times 145 = 217500 \text{ mm}^3$$

$$\therefore \quad q_1 = \frac{40 \times 1000}{7407{\cdot}6 \times 10^4 \times 150} \times (150 \times 10 \times 145) = 0{\cdot}7829 \text{ N/mm}^2$$

(max stress in flange)

अब Web में Flange के साथ जोड़ पर (DE पर) अपरूपण प्रतिबल (Shearing Stress) $q_2 = \frac{F}{Ib} \times A\bar{y}$ सूत्र में

चौड़ाई $b = DE$ पर चौड़ाई $= 0{\cdot}6 \text{ cm} = 6 \text{ mm}$

$A\bar{y} = DE$ से ऊपर के क्षेत्रफल का NA पर घूर्ण (moment)

$$= (150 \times 10 \times 145) \text{ (मापें mm में ली गई हैं)}$$

$$\therefore \quad q_2 = \frac{40 \times 1000}{7407{\cdot}6 \times 10^4 \times 6} \times (150 \times 10 \times 145) = 19{\cdot}5745 \text{ N/mm}^2$$

अब $N\text{-}A$ पर अधिकतम प्रतिबल (max. Shear Stress at $N\text{-}A$) के लिये, चौड़ाई $(b) = 0{\cdot}6 \text{ cm} = 6 \text{ mm}$

तथा $A\bar{y} = NA$ से ऊपर के क्षेत्रफल (area) का NA पर घूर्ण

$$= (N\text{-}A) \text{ से ऊपर के वैब का क्षेत्रफल + Flange का क्षेत्रफल}$$

$$= 6 \times 140 \times \frac{140}{2} + 150 \times 10 \times 145 = 276300 \text{ mm}^3$$

$$\because \quad q_{max} = \frac{F}{I \times b} \times A\bar{y} \text{ सूत्र से}$$

$$= \frac{40 \times 1000}{7407{\cdot}6 \times 10^4 \times 6} \times 276300$$

$$= 24{\cdot}8663 \text{ N/mm}^2$$

उत्तर

उदाहरण 9. चित्र 4.13 (i) में दर्शायी गई I-काट पर 50 kN का कर्तन बल कार्य करता है तो गणना कीजिये—

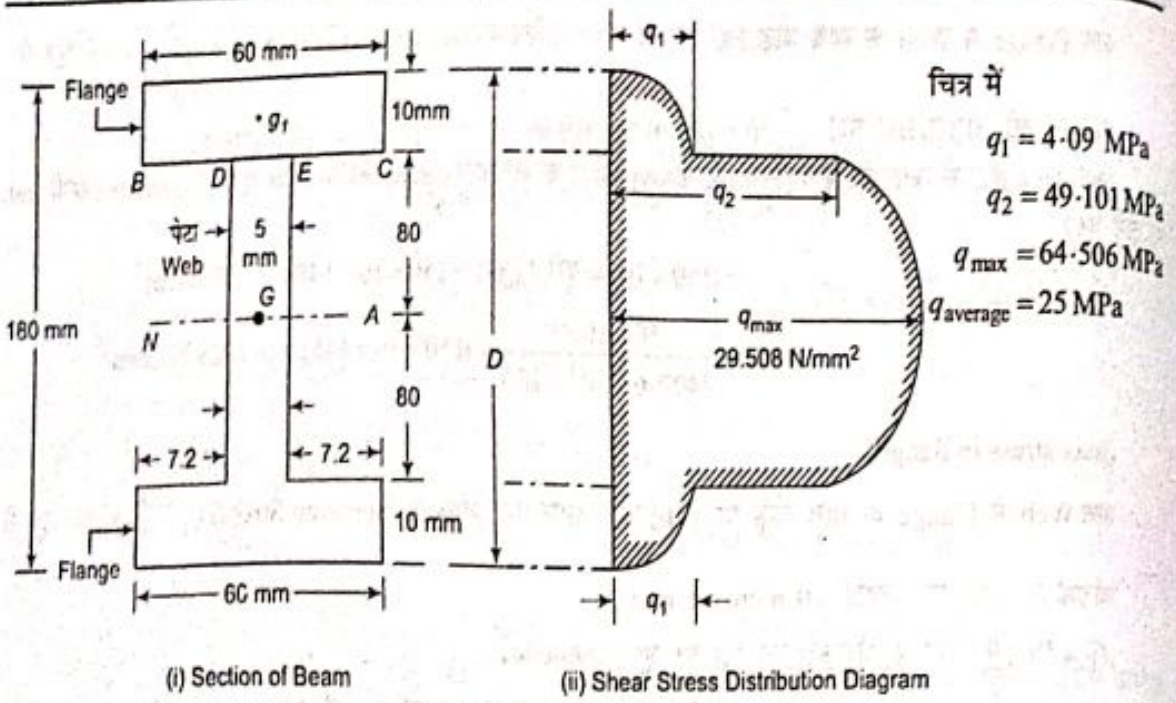
(i) फ्लैन्ज (Flange) में अधिकतम कर्तन प्रतिबल
(max Shearing stress in the Flange)

(ii) वैब (पेटा) में न्यूनतम कर्तन प्रतिबल
(Minimum Shearing Stress in the Web)

(iii) अधिकतम कर्तन प्रतिबल ($N\text{-}A$) पर
Max. Shearing Stress (at the Neutral Axis)

(iv) औसत कर्तन प्रतिबल (Mean or Average Shear Stress) **(U.K. 2008, Summer)**

Scanned with CamScanner



चित्र 4.13

हल—चित्र 4.13 में दिखायी गई I-काट (X- axis) तथा (Y-axis) दोनों के सममित (Symmetrical) हैं। इसलिए $\bar{x}$ या $\bar{Y}$ के मान कुल चौड़ाई व गहराई के मध्य (middle) में होंगे अर्थात् काट के मध्य से जाने वाली y-axis पर 180 mm की आधी ऊँचाई पर G होगा। अत: जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) के लिए—

$$\therefore \quad I = \left[\frac{60\times180^3}{12} - \frac{55\times160^3}{12}\right] = 10386666{\cdot}67 \text{ mm}^4$$

(1) Flange में अधिकतम कर्तन प्रतिबल (max Shearing Stress)

$$\tau_1 \text{ (या } q_1) = \frac{F}{I\times b}\times A\bar{y} \quad \text{सूत्र में,}$$

b = काट में BC पर की चौड़ाई = 60 mm

$A\bar{y} = BC$ से ऊपर के क्षेत्रफल का NA पर घूर्ण (moment)

$$= 60\times10\times85 = 51000 \text{ mm}^3$$

$$\therefore \quad q_1 = \frac{50\times1000}{10386666{\cdot}67\times60}\times51000 = 4{\cdot}092 \text{ N/mm}^2 \qquad \text{उत्तर}$$

(2) वैब (web) में न्यूनतम कर्तन प्रतिबल (minimum Shear Stress) q_2, DE पर होगा, जिसके लिये—

चौड़ाई $b = DE$ पर चौड़ाई = 5 mm

तथा $A\bar{y} = DE$ से ऊपर के क्षेत्रफल का NA पर घूर्ण (moment)

$$= 60\times10\times85 = 5100 \text{ mm}^3$$

$$q_2 \text{ (या } \tau_2) = \frac{F}{I\times b}\times A\bar{y} = \frac{50\times1000}{10386666{\cdot}67\times5}\times51000 = 49{\cdot}101 \text{ N/mm}^2 \qquad \text{उत्तर}$$

(3) अधिकतम कर्तन प्रतिबल (max Shearing Stress) उदासीन अक्ष (Neutral Axis अर्थात् x-axis) NA पर होगा, जिसके लिए—

काट की चौड़ाई $(b) = 5$ mm

Scanned with CamScanner

तथा $A\bar{y} = NA$ से ऊपर के क्षेत्रफल (NA से ऊपर Web का क्षे० + Flange का क्षे०) का NA पर घूर्ण (moment)

$$= (60 \times 10 \times 85) + (5 \times 80 \times \frac{80}{2}) = 67000 \text{ mm}^3$$

$\therefore$ τ_{max} या $q_{max} = \frac{F}{I \times b} \times A\bar{y}$ सूत्र द्वारा

अधिकतम कर्तन प्रतिबल (max Shearing Stress)

$$q_{max} = \frac{500 \times 1000}{10386666{\cdot}67 \times 5} \times 67000 = 64{\cdot}506 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

(4) औसत कर्तन प्रतिबल (mean या average Shearing Stress)

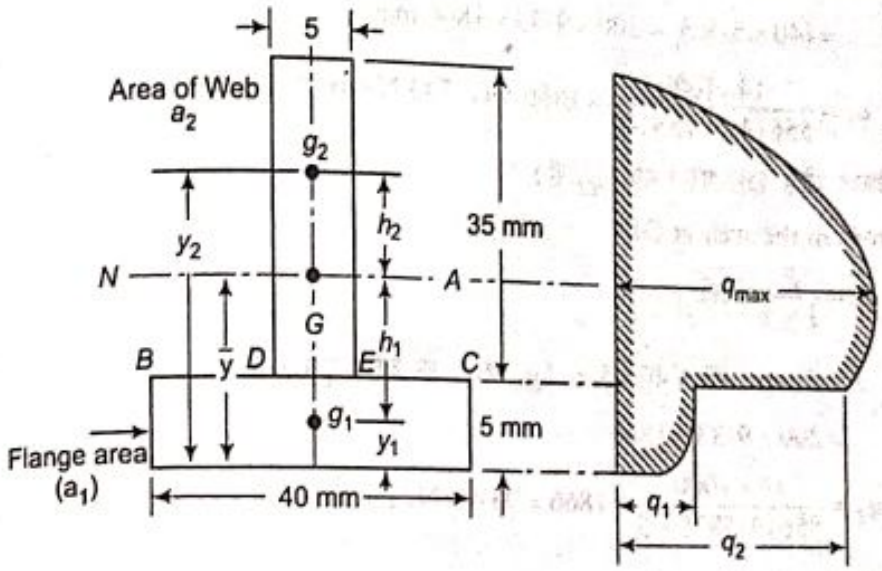
$$= \frac{\text{Shearing Force (कर्तन बल)}}{\text{Total Area of Section (काट का क्षेत्रफल)}}$$ (सूत्र)

$$= \frac{50 \times 1000}{[60 \times 180 - 55 \times 160]} = 25 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

इस I-Section का Shearing Stress distribution diagram को चित्र 4.13 (ii) में दर्शाया गया है।

उदाहरण 10. चित्र 4.14 (i) में दिखाये गये उल्टी T-काट (Inverted T-Section) पर अधिकतम कर्तन प्रतिबल (max Shear Stress) ज्ञात कीजिये जबकि काट पर कर्तन बल 14 kN है। **(U.K. 2009 (W))**

(प्रतिबल-वितरण आरेख भी दर्शाइये)



प्रतिबल वितरण आरेख में

$q_1 = 11{\cdot}74 \text{ N/mm}^2$

$q_2 = 93{\cdot}95 \text{ N/mm}^2$

$q_{max} = 99{\cdot}8 = 100 \text{ N/mm}^2$

चित्र 4.14

नीचे के Flange का केन्द्र g_1, इसका क्षेत्रफल (a_1) और g_1 की ऊँचाई y_1 है।

खड़े आयत (Web) का केन्द्र g_2, इसका क्षेत्रफल (a_2) और g_2 की ऊँचाई y_2 है।

$\therefore$ $a_1 = 40 \times 5 = 200 \text{ mm}^2$, $y_1 = \frac{5}{2} = 2{\cdot}5 \text{ mm}$

तथा $a_2 = 5 \times 35 = 175 \text{ mm}^2$, $y_2 = 5 + \frac{35}{2} = 22{\cdot}5 \text{ mm}$

Scanned with CamScanner

∴ गु० के० G की ऊँचाई $\bar{y} = \dfrac{a_1y_1 + a_2y_2}{a_1 + a_2}$ सूत्र से,

$$\bar{y} = \frac{200 \times 2{\cdot}5 + 175 \times 22{\cdot}5}{200 + 175} = \frac{4437{\cdot}5}{375} = 11{\cdot}83 \text{ mm}$$

$h_1 = g_1$ व G के बीच की दूरी (gap) $= \bar{y} - y_1 = 11{\cdot}83 - 2{\cdot}5 = 9{\cdot}33$ mm

$h_2 = g_2$ व G के बीच की दूरी (gap) $= y_2 - \bar{y} = 22{\cdot}5 - 11{\cdot}83 = 10{\cdot}67$ mm

$$I = [I_{xg_1} + a_1h_1^2] + [I_{xg_2} + a_2h_2^2]$$

$$= \left[\frac{40 \times 5^3}{12} + 200 \times 9{\cdot}33^2\right] + \left[\frac{5 \times 35^3}{12} + 175 \times 10{\cdot}67^2\right]$$

$$= [17826{\cdot}44667] + [37788{\cdot}14083]$$

$$= 55614{\cdot}5875 \text{ mm}^4$$

(1) फ्लैन्ज में अधिकतम कर्तन प्रतिबल BC पर होगा, माना q_1 है (Maximum Shearing Stress in the Flange at BC)

$$q_1 = \frac{F}{I \times b} \times A\bar{y} \text{ (सूत्र) में}$$

$b = BC$ पर Flange लम्बाई $= 40$ mm

$A\bar{y} = BC$ से नीचे के भाग के क्षेत्रफल का NA पर घूर्ण (moment)

$$= (40 \times 5) \times h_1 = 200 \times 9{\cdot}33 = 1866 \text{ mm}^3$$

∴ Shear Stress, $q_1 = \dfrac{14 \times 1000}{55614{\cdot}5875 \times 40} \times 1866 = 11{\cdot}743 \text{ N/mm}^2$

(2) Web में न्यूनतम कर्तन प्रतिबल जोड़ DE पर (माना q_2 है)
(Minimum Shearing Stress in the web at DE)

∴ $$q_2 = \frac{F}{I \times b} \times A\bar{y}$$

यहाँ $b = 5$ mm, $A\bar{y} = 40 \times 5 \times$ (g_1 व G के बीच दूरी h_1)

$$= 200 \times 9{\cdot}33 = 1866$$

∴ $$q_2 = \frac{14 \times 1000}{55614{\cdot}5875 \times 5} \times 1866 = 93{\cdot}95 \text{ N/mm}^2$$

(3) अधिकतम कर्तन प्रतिबल (max Shearing Stress) q_{max}

उदासीन अक्ष (NA) पर होगा, जहाँ $b = 5$ mm

तथा $A\bar{y} = NA$ से नीचे के क्षेत्रफल (Flange + Web का NA तक क्षेत्रफल) का NA पर घूर्ण (moment at NA)

$$= (40 \times 5 \times 9{\cdot}33) + (\bar{y} - 5) \times 5 \times \frac{(\bar{y} - 5)}{2}$$

$$= (200 \times 9{\cdot}33) + \left[(11{\cdot}83 - 5) \times 5 \times \frac{(11{\cdot}83 - 5)}{2}\right]$$

Scanned with CamScanner

$$= 1866 + 116{\cdot}62225 = 1982{\cdot}62225$$

$$\therefore \quad q_{max} = \frac{F}{I \times b} \times A\bar{y}$$

$$= \frac{14 \times 1000}{55614{\cdot}5875 \times 5} \times 1982{\cdot}62225$$

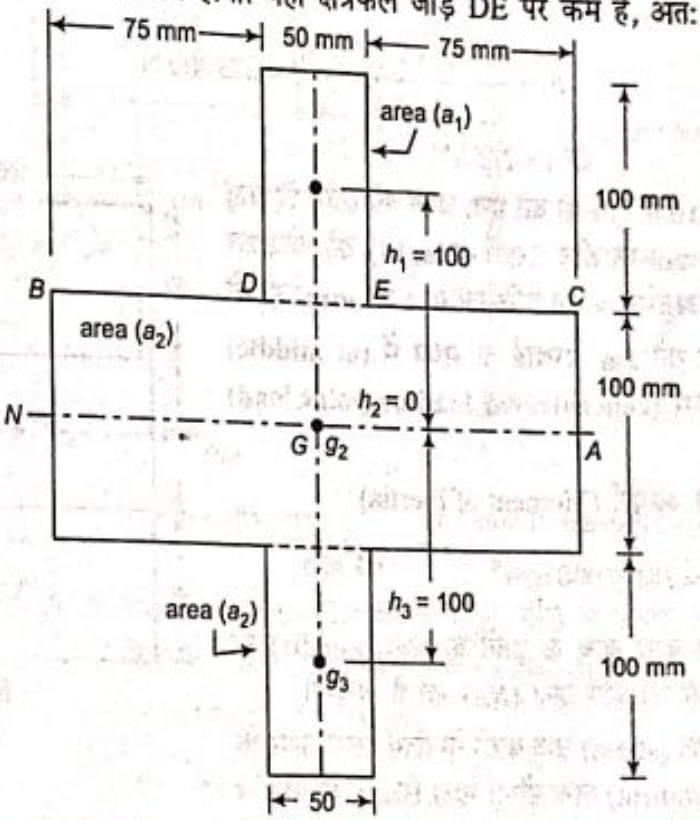
$$= 99{\cdot}82 \text{ N/mm}^2 = 100 \text{ N/mm}^2 \text{ (मानिये)}$$ उत्तर

कर्तन प्रतिबल वितरण आरेख को चित्र 4.14 (ii) में दिखाया गया है।

उदाहरण 11. चित्र 4.15 में दर्शायी गयी काट पर यदि अधिकतम कर्तन प्रतिबल 18 N/mm² हो तो कर्तन बल (Shear Force) का मान ज्ञात कीजिये।

(U.K. 2008, B.P.)

हल—यहाँ *NA* पर Shear Stress अधिकतम नहीं होगा क्योंकि क्षेत्रफल अधिक है। अत: *NA* से ऊपर या नीचे जोड़ पर (जैसे DE पर) प्रतिबल अधिकतम होगा। यहाँ क्षेत्रफल जोड़ DE पर कम है, अत: प्रतिबल अधिक होगा।



चित्र 6.15

∵ काट का *NA* पर जड़त्व आघूर्ण (Momemt of Inertia)

$$I = [I_{xg1} + a_1h_1^2] + [I_{xg2} + a_2h_2^2] + [I_{xg3} + a_3h_3^2]$$

$$= \left[\frac{50 \times 100^3}{12} + (50 \times 100) \times 100^2\right] + \left[\frac{200 \times 100^3}{12} + (200 \times 100) \times 0\right] + \left[\frac{50 \times 100^3}{12} + (50 \times 100) \times 100^2\right]$$

$$= 2 \times \left[\frac{50 \times 100^3}{12} + 5000 \times 100^2\right] + \left[\frac{200 \times 100^3}{12} + 0\right]$$

Scanned with CamScanner

$$= 108333333 \cdot 3 + 16666666 \cdot 67 = 125000000 \text{ mm}^4$$

$$= 125 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

∴ जोड़ DE पर कर्तन प्रतिबल अधिकतम (q_{max}) होगा

परन्तु प्रश्न में दिया है $q_{max} = 18 \text{ N/mm}^2$

∴ $$q_{max} = \frac{F}{I \times b} \times A\bar{y}$$ सूत्र में

DE पर, $b = 50$ mm तथा $A\bar{y} = DE$ से ऊपर के क्षेत्रफल का $N\text{-}A$ पर आघूर्ण है।

∴ $$A\bar{y} = 50 \times 100 \times h_1 = 5000 \times 100 = 5 \times 10^5$$

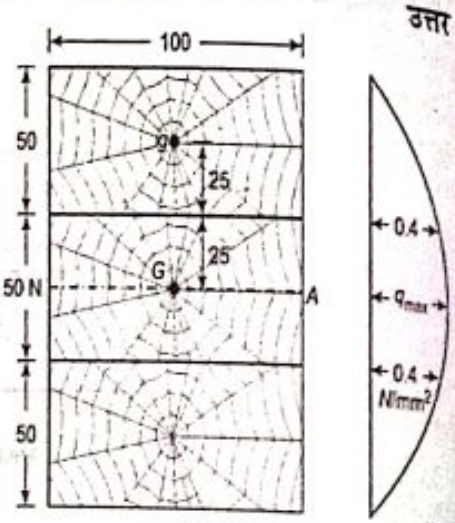
∴ सूत्र से, $$18 = \frac{F}{125 \times 10^6 \times 50} \times 5 \times 10^5$$

या $$F = \frac{18 \times 125 \times 10^6 \times 50}{5 \times 10^5} = 225000 \text{ N}$$

∴ कर्तन बल $(F) = 225$ kN

उत्तर

उदाहरण 12. चित्र 4.16 में लकड़ी की एक धरन की काट दिखाई गई है जो 50 mm × 100 mm के तीन तख्तों (Planks) को जोड़कर बनाई गई है। यदि जोड़ पर अनुमेय कर्तन प्रतिबल 0·4 N/mm² हो तो ज्ञात कीजिये कि इस धरन को 2m लम्बाई के मध्य में (at middle) कितना अधिकतम बिन्दु भार (concentrated load or point load) लगाया जा सकता है।



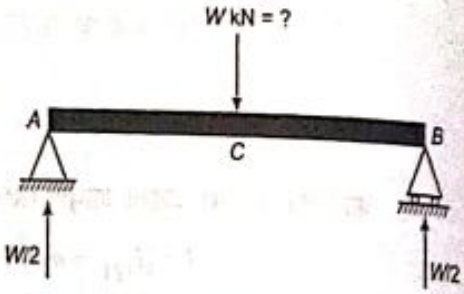
चित्र 4.16

हल—काट का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia)

$$I = \frac{100 \times 150^3}{12} = 28125000 \text{ mm}^4$$

संयुक्त काट का गुरुत्व केन्द्र बीच के तख्ते के मध्य (middle) पर होगा और इसी गु० के० G से उदासीन अक्ष (NA) खींची जायेगी।

जोड़ की रेखा पर प्रतिबल (stress) ज्ञात करने के लिये इससे ऊपर के क्षेत्रफल का $N\text{-}A$ पर घूर्ण (moment) लेना होगा। माना Beam के मध्य में W kN का भार लगा है। हम कर्तन बल आरेख (SFD) के चित्र से जानते हैं कि अधिकतम कर्तन बल (Shear Force) का मान $F = \frac{W}{2}$ kN है।



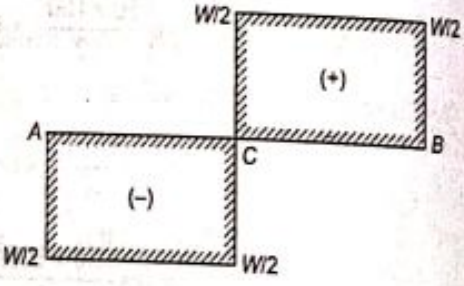
∵ Glue joint पर stress दिया है, इसीलिए जोड़ की रेखा से ऊपर के क्षेत्रफल का NA पर घूर्ण

$$A\bar{y} = (100 \times 50) \times (25 + 25)$$

$$= 250000 \text{ mm}^3$$

∴ $$q_1 = \frac{F}{I \times b} \times A\bar{y}$$ सूत्र में

यहाँ $q_1 = 0{\cdot}4 \text{ N/mm}^2$ तथा $b = 100$ mm है।



SFD (कर्तन बल आरेख)

चित्र 4.17

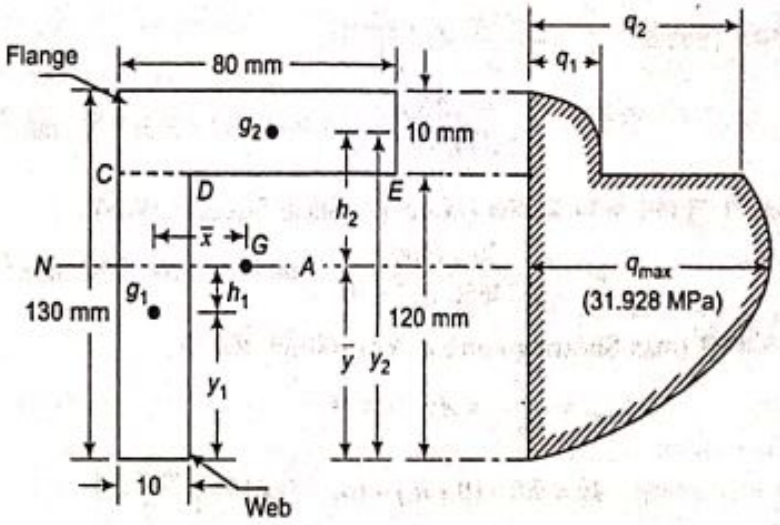
Scanned with CamScanner

$$\therefore \quad 0{\cdot}4 = \frac{\frac{W}{2} \times 250000 \times 1000}{28125000 \times 100}$$

$$\text{या} \quad W = \frac{0{\cdot}4 \times 28125000 \times 100 \times 2}{250000 \times 1000}$$

$$\text{या} \quad W = \frac{225000000}{250000000} = 9\,\text{kN}$$ उत्तर

उदाहरण 13. एक धरन (Beam) की काट (Section) उल्टी-L है जिसे चित्र 4.18 में दर्शाया गया है। अधिकतम प्रतिबल /प्रतिबल तीव्रता (max stress/stress intensity) ज्ञात कीजिये यदि इस पर 30 kN का कर्तन बल (Shear Force) लगा है। प्रतिबल वितरण आरेख भी दर्शाइये। **(U.K 2010, B.P.)**



(i) Section of Beam (ii) Stress Distribution Diagram

चित्र 4.18

हल—चित्र में ऊर्ध्वाधर आयत (Vertical Rectangle) का केन्द्र g_1, नीचे से ऊँचाई y_1, क्षेत्र a_1 तथा क्षैतिज आयत (Horizontal Rectangle) का केन्द्र g_2, ऊँचाई y_2 और क्षेत्रफल (area) a_2 है।

यहाँ $a_1 = 10 \times 120 = 1200\ \text{mm}^2$,

$a_2 = 80 \times 10 = 800\ \text{mm}^2$

$y_1 = \frac{120}{2} = 60\ \text{mm}$,

$y_2 = 120 + 5 = 125\ \text{mm}$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2} = \frac{1200 \times 60 + 800 \times 125}{1200 + 800} = 86\ \text{mm}$$

गु० के० g_1 तथा g_2 की क्षैतिज दूरियाँ क्रमश x_1 व x_2 हैं, तब $x_1 = 5\ \text{mm}$ तथा $x_2 = 40\ \text{mm}$

$$\bar{x} = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{a_1 + a_2} = \frac{1200 \times 5 + 800 \times 40}{1200 + 800} = 19\ \text{mm}$$

g_1 व G के बीच ऊर्ध्वाधर (Vertical Gap) दूरी $h_1 = \bar{y} - y_1 = 86 - 60 = 26\ \text{mm}$

g_2 व G के बीच ऊर्ध्वाधर दूरी (Vertical Gap) $h_2 = y_2 - \bar{y} = 125 - 86 = 39\ \text{mm}$

$$I = [I_{xg1} + a_1 h_1^2] + [I_x g_2 + a_2 h_2^2]$$

Scanned with CamScanner

$$= \left[\frac{10\times120^3}{12} + 1200\times26^2\right] + \left[\frac{80\times10^3}{12} + 800\times39^2\right]$$

$$= [2251200] + [1223466\cdot667]$$

$$= 3474666\cdot667 \text{ mm}^4$$

ऊपर क्षैतिज फ्लैंज (flange) में अधिकतम कर्तन प्रतिबल (max Shearing Stress) के लिये सूत्र में, $b = CE$ पर लम्बाई $= 80$ mm

तथा $A\bar{y} = CE$ रेखा से ऊपर के क्षेत्रफल का NA पर घूर्ण (Moment)

$$= (80\times10)\times h_2 = 800\times39$$

$\therefore$ प्रतिबल (Stress), $q_1 = \frac{F}{I\times b}\times A\bar{y}$ सूत्र से

$$q_1 = \frac{30\times1000}{3474666\cdot667\times80}\times800\times39 = 3\cdot367 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

जोड़ CD पर web में न्यूनतम कर्तन प्रतिबल (Minimum Shear Stress in Web)

$$q_2 = \frac{30\times1000}{3474666\cdot667\times10}\times800\times39 = 26\cdot94 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

अधिकतम कर्तन प्रतिबल (max Shearing Force at NA) उदासीन अक्ष पर,

$$q_{max} = \frac{F}{I\times b}\times A\bar{y} \quad \text{सूत्र में}$$

$b = 10$ mm तथा $A\bar{y} = (80\times10\times h_2) + (h_2-5)\times10\times\left(\frac{h_2-5}{2}\right)$

$$= (800\times39) + (39-5)\times10\times\frac{(39-5)}{2} = 36980$$

$\therefore$ $$q_{max} = \frac{30\times1000}{3474666\cdot667\times10}\times36980 = 31\cdot928 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

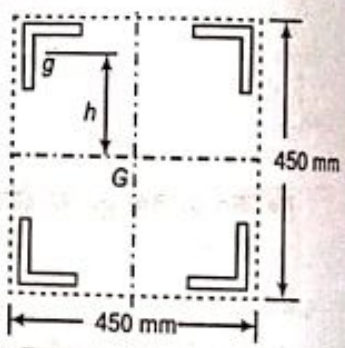
उदाहरण 14. चित्र के अनुसार चार एंगलों की सहायता से एक जिब की काट बनाई गयी है। प्रत्येक एंगल का साइज 80 मिमी × 80 मिमी × 10 मिमी है और ये चारों एक 450 मिमी की वर्गाकार काट का निर्माण करते हैं। इस संयुक्त काट का जड़ता घूर्ण एवं परिभ्रमण त्रिज्या ज्ञात कीजिये। प्रत्येक एंगल के लिए $I_{XX} = I_{YY} = 87\cdot7$ सेमी^{4}, $A = 15\cdot05$ सेमी^{2}, $C_{xx} = C_{yy} = 2\cdot34$ सेमी।

हल—दोनों अक्षों पर Symmetrical section होने के कारण

$$I_{XXG} = I_{YYG} = 4[I_{XX} + Ah^2]$$

$$= 4[87\cdot7 + 15\cdot05\,(22\cdot5 - 2\cdot34)^2]$$

$\therefore$ जड़त्वाघूर्ण $I = 24817\cdot62112 \text{ cm}^4 = 2\cdot48\times10^8 \text{ mm}^4$ उत्तर



चित्र 4.19

Total Area $(A) = 4\times15\cdot05 = 60\cdot2 \text{ cm}^2$

परिभ्रमण त्रिज्या (Least radius of gyration)

$$K = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{24817\cdot62}{60\cdot2}} = \sqrt{412\cdot253}$$

या $K = 20\cdot3 \text{ cm} = \mathbf{203 \text{ mm}}$ उत्तर

Scanned with CamScanner

प्रश्नावली

1. निम्न रिक्त स्थान भरिये (Fill up the blanks in the following)—
   (i) एक आयताकार काट (Rectangular Section) के लिए अधिकतम कर्तन प्रतिबल (q_{max}) = ... × औसत कर्तन प्रतिबल (q_{max})
   (ii) वृत्ताकार काट (circular Section) के लिये q_{max} = ... × q_{mean}
   (iii) औसत कर्तन प्रतिबल (mean Shearing Stress) q_{mean} = $\frac{\text{.....}}{\text{.....}}$
   (iv) आयताकार काट (Rectangular Section) में q_{max} का मान औसत कर्तन प्रतिबल (q_{mean}) से ..... अधिक होता है। **(U.K. 2013, SP.BP.)**
   (v) एक वृत्ताकार काट (Circular Section) में अधिकतम कर्तन प्रतिबल (max Shear Stress) q_{max} का मान औसत कर्तन प्रतिबल (Mean Shear Stress) q_{mean} से ..... अधिक होता है। **(U.K. 2013, B.P.)**
   (vi) एक सीधे I-काट पर कर्तन बल (Shear Force) F है तो अधिकतम कर्तन प्रतिबल (q_{max}) ..... होता है।
   (vii) आयताकार काट के लिए अधिकतम कर्तन प्रतिबल q_{max} = ... × q_{mean} **(U.K. 2014)**
   (viii) वृत्ताकार काट के लिए q_{max} = ... × q_{mean} **(U.K. 2014)**

   उत्तर—(1) $\frac{3}{2}$ या 1·5, (2) $\frac{4}{3}$, (3) $q_{mean} = \frac{\text{कर्तन बल (Shear Force)}}{\text{क्षेत्रफल (Area)}}$, (4) 50%, (5) 33·33%, (6) 1·5, (7) 1·33.
   (6) पेटा (web) के मध्य (centre) में।

2. एक लकड़ी की धरन की काट (Section of Beam) 150 mm × 250 mm है। यह धरन (beam) 3·5 m के विस्तार (span) पर शुद्धालम्बित (simply supported) है। यदि धरन में अधिकतम नमन प्रतिबल सुरक्षित (max safe bending stress) 7500 kN / m^2 है तो इसके लिए धरन (beam) पर समवितरित भार (U.D.L.) का मान ज्ञात कीजिये और इस U.D.L. के लिए धरन पर अधिकतम कर्तन प्रतिबल (max shear stress) q_{max} ज्ञात कीजिये।
   [उत्तर : U.D.L. का मान w = 7·66 kN / m तथा Shear Stress q_{max} = 536 kN / m^2]

3. एक 3 m लम्बे सरल आलम्बित धरन (Simply Supported Beam) की अनुप्रस्थ काट (Cross-section) 150 mm चौड़ी तथा 300 mm गहरी है। इसकी पूरी लम्बाई (Whole Span) पर 15 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। अधिकतम कर्तन प्रतिबल (max. Shearing Stress) ज्ञात कीजिये तथा प्रतिबल वितरण आरेख (Stress distribution diagram) खींचिए। [उत्तर : q_{max} = 0·75 MN / m^2 = 750 kN / m^2]

4. एक 150 mm व्यास की वृत्ताकार काट की धरन (Circular Section of beam) पर 7 kN का कर्तन बल (Shear Force) लगा है। अधिकतम कर्तन प्रतिबल (Max Shear Stress) तथा औसत कर्तन प्रतिबल (q_{mean}) के मान ज्ञात कीजिये तथा प्रतिबल वितरण आरेख भी बनाइये। [उत्तर : q_{mean} = 396 kN / m^2, q_{max} = 528 kN / m^2]

5. 100 mm चौड़ी तथा 225 mm गहरी एक आयताकार धरन 25 kN अपरूपण बल के अधीन है। अपरूपण वितरण का रेखाचित्र बनायें तथा अधिकतम अपरूपण प्रतिबल की गणना करें। **(U.P. 2001, 08)**
   [उत्तर : 1·667 N / mm^2]

6. एक 100 mm वृत्ताकार परिच्छेद वाली धरन के किसी परिच्छेद पर 200 N-m का एक बंकन आघूर्ण तथा 500 N का अपरूपण बल लगाया गया है। इस परिच्छेद पर प्रेरित अधिकतम अपरूपण एवं बंकन प्रतिबलों का मान बताइए। **(U.P. 2006)**
   [उत्तर : 0·085 N / mm^2, 2·037 N / mm^2]

Scanned with CamScanner

7. लकड़ी की एक सरल आलम्बित धरन (S.S. beam) की विस्तार (span) 4 m है। इसकी पूरी लम्बाई पर 40 kN/m का एक समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। इस धरन की आयताकार काट (rectangular section) की माप 200 mm × 400 mm है। कर्तन प्रतिबल वितरण आरेख (stress distribution diagram) खींचिये तथा अधिकतम कर्तन प्रतिबल (q_{max}) और औसत कर्तन प्रतिबल (q_{mean}) ज्ञात कीजिये। [उत्तर : $q_{max} = 1{\cdot}5\ N/mm^2$, $q_{mean} = 1\ N/mm^2$]

8. 100 mm × 60 mm की एक 4 m लम्बी धरन (beam) दोनों सिरों पर शुद्धालम्बित (simply supported) है। इस पर 10 kN का संकेन्द्रित भार (point load) बायें सिरे से 1 m पर लगा है। धरन की काट पर अधिकतम नमन प्रतिबल (max. bending stress) तथा अधिकतम कर्तन प्रतिबल (max. shearing stress) ज्ञात करें।

[उत्तर : $\sigma_b = 7{\cdot}5\ N/mm^2$, $q_{max} = 1{\cdot}875\ N/mm^2$]

9. एक लेमिनेटेड लकड़ी की धरन (Wooden beam) 120 mm चौड़ी (wide) तथा 180 mm गहरी (deep) है, यह 120 mm × 60 mm साइज के तीन तख्तों (planks) को चिपकाकर (glued together) बनायी गयी है। इस काट की धरन (beam) 2·5 m की लम्बाई (span) पर सरल आलम्बिल (Simply Supported) है। यदि glued joint में कर्तन प्रतिबल (Shearing stress) की सीमा (allowable) $0{\cdot}5\ N/mm^2$ है। इस धरन (beam) पर कितना समान बँटा भार (U.D.L.) सुरक्षित प्रतिबल के लिये लगाया जा सकता है। [उत्तर : U.D.L. का मान $w = 6480\ N/m$]
(Hint : उदाहरण 12 की भाँति करें)

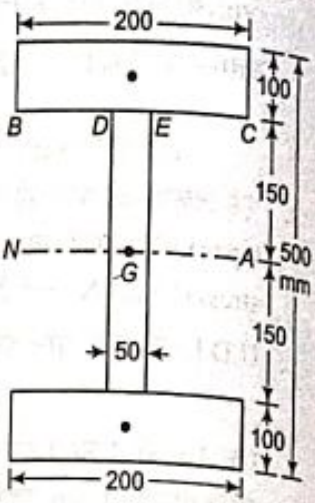
10. चित्र 4.20 में प्रदर्शित समरूप I-परिच्छेद (symmetrical I-Section) का X-X अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) $I_{XX} = 1{\cdot}746 \times 10^9\ mm^4$ है। 2000 kN के अपरूपण बल (Shear Force) द्वारा इस सम्पूर्ण परिच्छेद (Whole Length) पर उत्पन्न अपरूपण प्रतिबल (Shear stress) के वितरण की गणना कीजिये।

(U.P.2008, U.K. 2011, W)

[उत्तर—(i) फ्लैंज (Flange) पर अधिकतम अपरूपण प्रतिबल,
$q_1 = 22{\cdot}9095\ N/mm^2$

(ii) पेटा (Web) में न्यूनतम अपरूपण प्रतिबल
$q_2 = 91{\cdot}638\ N/mm^2$

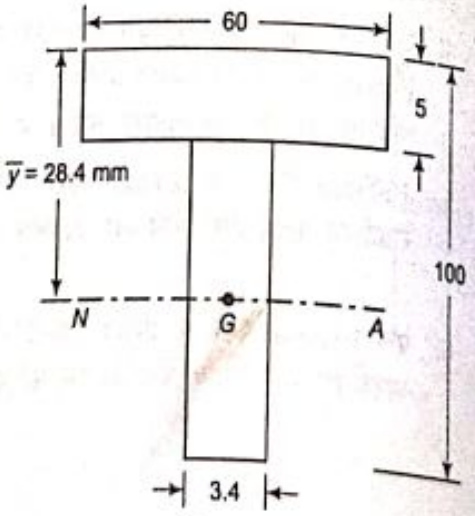
(iii) $q_{NA} = q_{XX}$ = अधिकतम कर्तन प्रतिबल (Shear Stress)
$= 104{\cdot}5246\ N/mm^2$]



चित्र 4.20

11. चित्र 4.21 में प्रदर्शित एक 60 mm × 100 mm की T-काट (T-Section) पर 20 kN का कर्तन बल लगा है। काट पर अधिकतम अपरूपण प्रतिबल (max. Shearing Stress) का मान एवं कर्तन प्रतिबल वितरण आरेख (Shear Stress Distribution diagram) खींचिए। **(U.K. 2009 (W))**

[उत्तर : फ्लैंज में Web के साथ जोड़ पर कर्तन प्रतिबल
(i) (Max Shear Stress in Flange) $q_1 = 4{\cdot}09\ N/mm^2$,
(ii) Web में Flange के साथ जोड़ पर कर्तन प्रतिबल $q_2 = 72{\cdot}18\ N/mm^2$,
(iii) NA पर अधिकतम कर्तन प्रतिबल $q_{max} = 80{\cdot}83\ N/mm^2$]

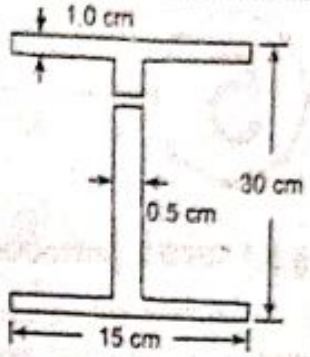


चित्र 4.21

Scanned with CamScanner

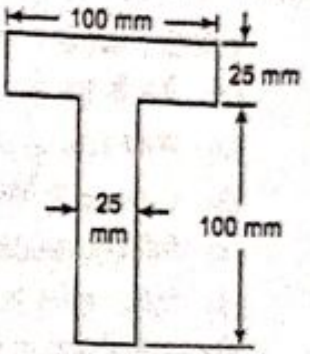
12. चित्र 4.22 में दर्शाये गये I-खण्ड के लिए अपरूपण प्रतिबल आबंटन आरेख बनाइये यदि खण्ड पर 40 kN का अपरूपण बल लगा है। **(U.P. 2000, 03)**

[उत्तर : अपरूपण प्रतिबल $q_{\text{जाल (अधि०)}} = 0{\cdot}7829$, $q_{\text{वेब (न्यू०)}} = 29{\cdot}5$ तथा $q_{\text{वेब (अधि०)}} = 24{\cdot}8663\ \text{N/mm}^2$,



चित्र 4.22

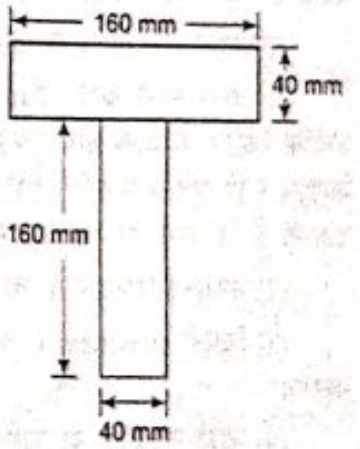
13. चित्र 4.23 में दिखाये गये T-खण्ड के लिए अपरूपण प्रतिबल आबंटन आरेख बनाइये। अधिकतम अपरूपण प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये यदि खण्ड पर अपरूपण बल 50 kN हो। **(U.P.) [उत्तर : 23·257 N/mm²]**



चित्र 4.23

14. एक चित्र 4.24 में दिखाये गये T-काट की धरन पर 80 kN का कर्तन बल लगा है। काट के मुख्य बिन्दुओं पर कर्तन प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिए तथा कर्तन प्रतिबल वितरण आरेख खींचिये। $I = 113{\cdot}4 = 10^6\ \text{mm}^4$ मानिये।

A T-shaped cross-section of a beam is shown in figure 4.24 is subjected to a vertical shear force of 80 kN. Calculate the shear stress at important points and draw shear stress distribution diagram. Take $I = 113{\cdot}4 \times 10^6\ \text{mm}^4$. **(U.K. 2014, (S) B.P.)**



चित्र 4.24

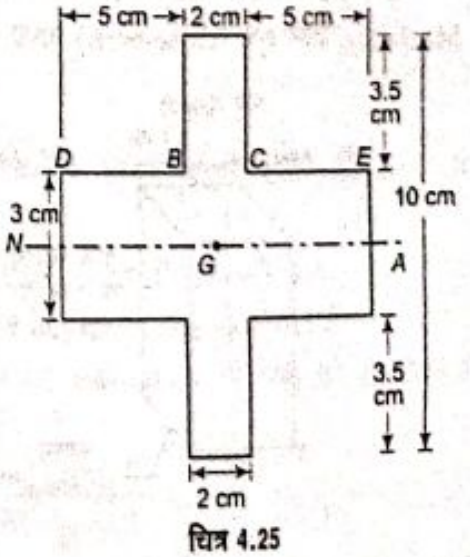
15. किसी धरन की काट (Section of beam) चित्र 4.25 में दर्शायी गयी है। इस पर 50 kN का कर्तन बल (Shear Force) लगा है। इसके BC, DE तथा NA पर कर्तन प्रतिबल तीव्रतायें ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : $I = 189{\cdot}167 \times 10^4\ \text{mm}^4$

$q_{BC} = 30{\cdot}066\ \text{N/mm}^2$

$q_{DE} = 5{\cdot}011\ \text{N/mm}^2$

$q_{NA} = 7{\cdot}984\ \text{N/mm}^2$]



चित्र 4.25

❑

Scanned with CamScanner

5 संयुक्त सीधे तथा नमन प्रतिबल (COMBINED DIRECT AND BENDING STRESSES)

§ 5.1 परिचय (Introduction)

जब किसी ढाँचे (structure) के सदस्य अथवा मशीन के अवयव (member/element of a machine) पर कार्य करने वाला भार या बल उसकी अक्ष (axis) पर अक्षीय (axial) न होकर, अक्ष (axis) से कुछ दूरी (माना e) हट कर अक्ष के समान्तर कार्य करता है, तब इस प्रकार लगे भार या बल को उत्केन्द्रीय भार (Eccentric Load) कहते हैं।

उत्केन्द्रीय भार के व्यावहारिक उदाहरण (Practical Examples of Eccentric load)—

(1) क्रेन के हुक से भार लटकना।

(2) जंजीर (chain) में बल द्वारा खिंचाव या जंजीर से भार लटकाना।

(3) C-clamp में जॉब (Job) को बाँधने पर उसके फ्रेम में उत्पन्न बल।

(4) बिल्डिंग्स (Buildings) में कॉलम (स्तम्भ) पर छत (Roof) का भार।

(5) ड्रिलिंग मशीन पर ड्रिल (Drill) अर्थात् छेद (Hole) करते समय बॉडी में उत्पन्न हुए बल।

नोट—मशीन बॉडी या फ्रेम की अक्ष (axis) से उत्केन्द्रीय भारों (F या W) के बीच दूरी को उत्केन्द्रता (eccentricity) कहते हैं तथा e से प्रदर्शित करते हैं।

उत्केन्द्रीय भार लगने के कारण निम्न हैं—

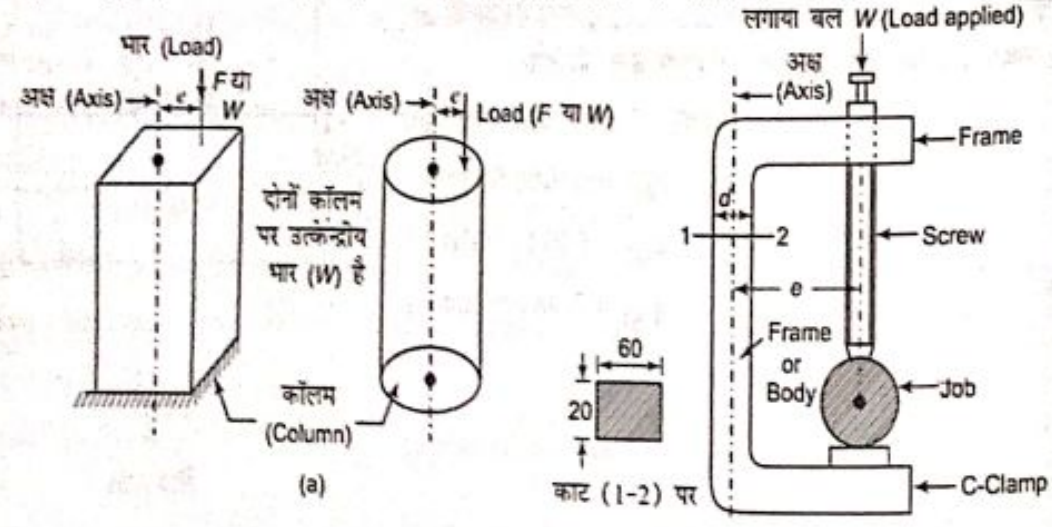
(1) कभी-कभी अंगों (Parts) की आकृति (Shape) में यह सम्भव नहीं होता कि उन्हें सीधा ही बनाया जाये क्योंकि फिटिंग में अन्य अंग रुकावट डालते हैं और कभी-कभी अंगों (Parts) या अवयवों (members) में छेद (Hole) केन्द्रीय न हो पाने के कारण उनकी सहायता से जोड़े जाने वाले अंगों (Parts) की अक्षें (axes) एक सीध में नहीं होती हैं। इन दशाओं में भी अंगों पर भार उत्केन्द्रीय कार्य करते हैं।

(2) उपयुक्त डिजाइन के कारण अंग (Body) को मोड़कर बनाये जाने के कारण।

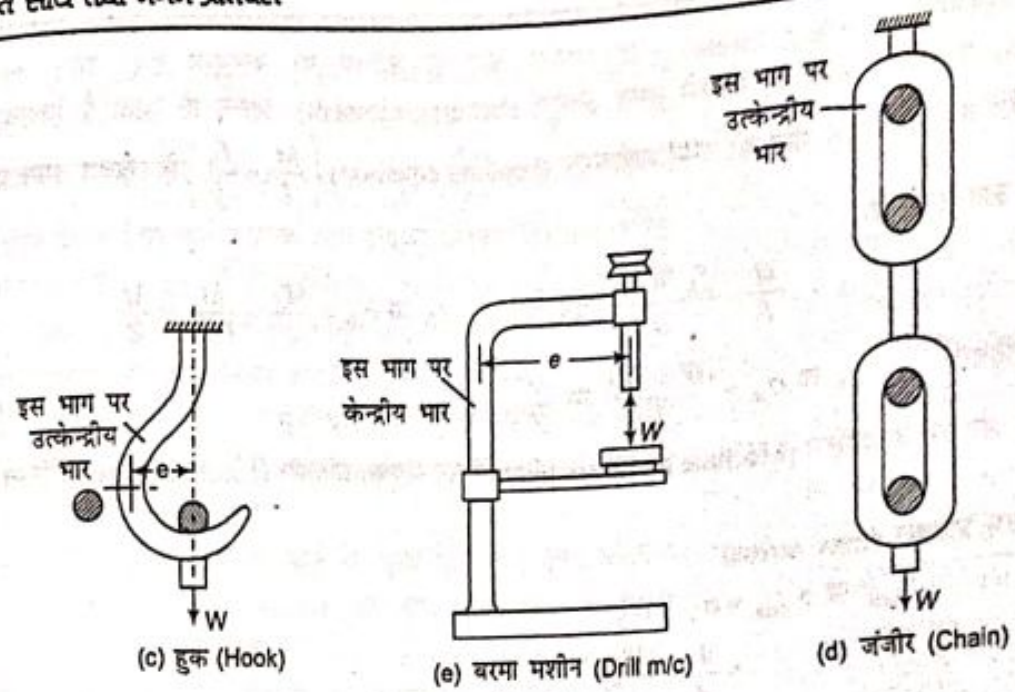
(3) चिमनी (Chimney), बाँध (Dam), वायु दाबधारक दीवारें, छोटे स्तम्भ आदि पर भार लगने की दशाओं के कारण।

(4) जोड़ों की पिनों पर घर्षण के कारण बल उत्केन्द्रीय होता है।

(5) कुछ मशीनों जैसे—सी-क्लैम्प (C-clamp), पंच मशीन (Punch Machine), बरमा मशीन (Drilling Machine), क्रैन हुक (crane-hook) आदि के फ्रेम, बॉडी की बनावट के कारण भी उत्केन्द्रीय भार लगते हैं।



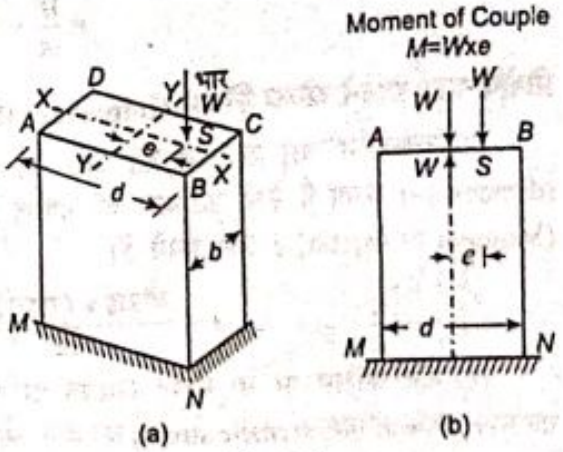
Scanned with CamScanner



चित्र 5.1

§ 5.2 उत्केन्द्रीय भार का अवयव (member) की काट पर प्रभाव (Effect of eccentric load on the section)

चित्र 5.2 (a) के अनुसार अवयव या कॉलम पर उत्केन्द्रीय भार (W) लगा है जिसकी उत्केन्द्रता (eccentricity) e है। अब अवयव की केन्द्रीय अक्ष पर हम अपनी ही ओर भार (W) के समान्तर तथा इतने ही मान के बल (W) आपस में विपरीत दिशा में लगाते हैं। देखें चित्र 5.2 (b)। अक्ष पर नीचे की ओर लगाया गया भार (W) अक्षीय सम्पीडन भार (Axial Compressive Load) के रूप में कार्य करेगा जिससे अवयव में सीधा प्रतिबल (Direct Stress) उपजता है तथा अक्ष पर ऊपर की ओर लगाया गया भार (W), उत्केन्द्रीय भार (W) के साथ (बराबर व विपरीत होने के कारण) एक बलयुग्म (couple) बनाता है जो अवयव को clockwise (प्रदक्षिण दिशा) में $Y-Y$ अक्ष पर झुकाने का प्रयास करता है। इस बलयुग्म का घूर्ण (moment), $M = W \times e$ होता है। इसी के कारण अवयव (member) में नमन प्रतिबल (bending stress) σ_b उत्पन्न होते हैं।



चित्र 5.2

अत: हम इस निष्कर्ष (conclusion) पर पहुँचते हैं कि अवयव (या कॉलम) पर उत्केन्द्रीय भार (Eccentric Load) W का प्रभाव (effect) दो प्रकार का होता है—

(1) केन्द्र पर एक अक्षीय सीधा बल (W) तथा (2) एक बलयुग्म (couple), $M = W \times e$

अत: उत्केन्द्रीय भार (eccentric load) कार्य करने से निम्न दो प्रकार के प्रतिबल (stress) उपजते हैं—

(1) सीधा प्रतिबल (Direct Stress)—यह मशीन अंग या कॉलम की अक्ष (axis) पर अक्ष की ही दिशा में (along the axis) कार्य करता है और इसे f_d या σ_d से प्रदर्शित करते हैं।

$$f_d \text{ या } \sigma_d = \frac{\text{कॉलम पर अक्षीय भार (Axial Load) } W}{\text{कॉलम की काट का क्षेत्रफल (area) } A} \qquad \text{(सूत्र)}$$

Scanned with CamScanner

(2) **नमन प्रतिबल** (Bending Stress)—यह मशीनी अंग या कॉलम पर बलयुग्म द्वारा नमन के प्रभाव (bending effect) के कारण होता है, जिससे नमन आघूर्ण (bending moment) उत्पन्न हो जाता है जिसका मान $(M) = W \times e$ होता है। M के इस मान को नमन समीकरण (bending equation) $\left(\frac{M}{I} = \frac{f_b}{y}\right)$ में रखकर नमन प्रतिबल (f_b या σ_b) को ज्ञात करते हैं।

$$\therefore \quad \frac{M}{I} = \frac{f_b \text{ या } \sigma_b}{y} \text{ सूत्र से,} \qquad f_b \text{ या } \sigma_b = \frac{My}{I} = \frac{M}{I/y} = \frac{M}{Z}$$

$$\therefore \text{ नमन प्रतिबल,} \qquad f_b \text{ या } \sigma_b = \frac{(W \times e)\, y}{I} \text{ या } \frac{M}{Z} \qquad \text{(सूत्र)}$$

अब मशीनी अंग अथवा कॉलम (Machine member/column) पर संयुक्त प्रतिबल (combined stress) निम्न प्रकार उपजते हैं—

(1) अधिकतम प्रतिबल (max. stress)

$$f_{max} \text{ या } \sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b$$

$$= \frac{W}{A} + \frac{(We)\, y}{I} \qquad \text{(सूत्र)}$$

(2) न्यूनतम प्रतिबल (minimum stress)

$$f_{min} \text{ या } \sigma_{min} = \sigma_d \sim \sigma_b$$

$$= \frac{W}{A} \sim \frac{(We)\, y}{I} \qquad \text{(सूत्र)}$$

विशेष याद रखने योग्य नियम (Important Rules)

(1) उत्केन्द्रीय भार से फ्रेम की अक्ष की ओर नापी गयी दूरी (e) के समान्तर फ्रेम की काट की जो विम (dimension) आती है उसी को काट की गहराई (d) तथा काट की अन्य माप को चौड़ाई (b) में लेकर जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) I ज्ञात करते हैं।

$$\therefore \quad I = \frac{\text{चौड़ाई} \times (\text{गहराई})^3}{12} = \frac{b \times d^3}{12} \text{ तथा } y = \frac{\text{गहराई}\,(d)}{2}$$

(2) यदि कॉलम पर या मशीन अवयव पर तनाव बल (tensile force) उपजता है तो अधिकतम प्रतिबल, σ_{max} का मान तनाव प्रतिबल (tensile stress) का होगा और σ_{min} का मान सम्पीडन प्रतिबल (compressive stress) का होगा।

(3) यदि कॉलम या मशीन अवयव पर सम्पीडन बल (compressive force) उपजता है, तब σ_{max} का मान सम्पीडन प्रतिबल (compressive stress) का होता है और σ_{min} का मान तनाव प्रतिबल (Tensile stress) का होता है।

§ 5.3

5.3-1 संयुक्त प्रतिबल आरेख (Combined Stress-diagram)

चित्र 5.3 (a) में सीधा प्रतिबल आरेख (Direct Stress Diagram) दर्शाया गया है, जो पूर्ण काट पर समान है और सम्पीडन (Compression) का है।

चित्र 5.3 (b) में नमन प्रतिबल आरेख (bending stress diagram) है जो बायें किनारे (left end) पर $\sigma_b = \frac{M}{Z} = \frac{(W.e)\, y}{I}$ तनाव (Tension) से दायें किनारे (Right end) पर $\sigma_b = \frac{M}{Z} = \frac{W\, e\, y}{I}$ सम्पीडन (compression) तक सरल रेखीय ढंग से (linearly) बदलता है (सममित काट—Symmetrical Section की दशा में)।

Scanned with CamScanner

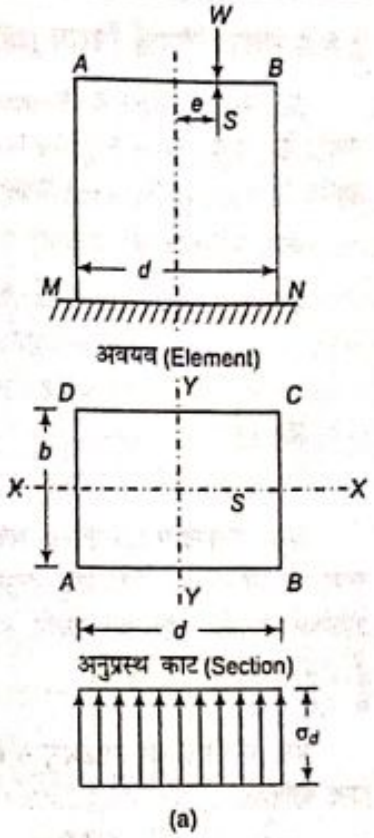
चित्र 5.3 (c) में संयुक्त प्रतिबल आरेख (combined stress diagram) दिखाया गया है जो कि उपरोक्त दोनों आरेखों (diagrams) का बीजगणितीय योग है और $\sigma = \sigma_d \pm \sigma_b = \frac{W}{A} \pm \frac{Wey}{I}$ सूत्र के अनुसार सरल रेखीय है। यहाँ पर पूर्ण काट के लिये संयुक्त प्रतिबल का मान प्रत्येक बिन्दु पर धनात्मक (+ ve) ही है क्योंकि σ_d का मान σ_b से अधिक है।

σ_d तथा σ_b के मानों पर ही संयुक्त प्रतिबल की प्रकृति (Nature) तनाव या सम्पीडन का होना निर्भर करती है। इस प्रकार—

(i) यदि $\sigma_b \le \sigma_d$ है तो पूर्ण काट में संयुक्त प्रतिबल की प्रकृति (Nature) + ve होना अथवा (– ve), σ_d की प्रकृति (+ ve या – ve) के समान होगी।

(ii) यदि $\sigma_b > \sigma_d$ है तो काट के कुछ भाग में संयुक्त प्रतिबल सम्पीडन (compression) का तथा शेष भाग में तनाव (Tension) का होगा।

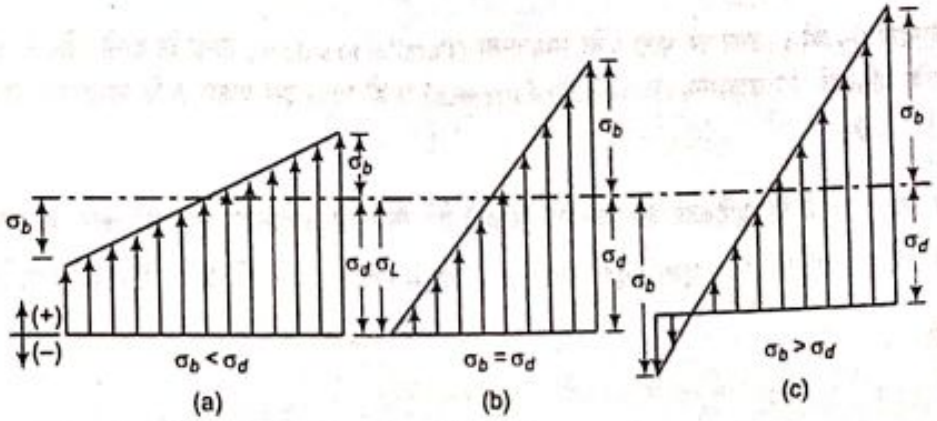
अत: उपरोक्त इन दोनों प्रतिबन्धों के आधार पर तीन भिन्न प्रकार के संयुक्त प्रतिबल आरेख चित्र 5.4 में दिखाये गये हैं। इन्हीं के द्वारा प्रतिबलों का उत्क्रमण (Reversal of Stresses) स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है।



चित्र 5.3

5.3-2 प्रतिबलों का उत्क्रमण (Reversal of Stresses)

(चित्र 5.4 देखें) चित्र 5.4 (a) में $\sigma_b < \sigma_d$ के लिये पूर्ण काट पर संयुक्त प्रतिबल एक ही प्रकृति (+ ve) का है। चित्र 5.4 (b) में $(\sigma_b = \sigma_d)$ होने से प्रतिबल एक किनारे पर शून्य (zero) है तथा दूसरे किनारे पर अधिकतम $(\sigma_d + \sigma_b)$ के बराबर है। अर्थात् अब तक भी प्रतिबल एक ही प्रकृति (+ ve) सम्पीडन के हैं। चित्र 5.4 (c) में उत्केन्द्रीय भार की स्थिति के कारण यदि उत्पन्न नमन प्रतिबलों (σ_b) के मान, सीधे प्रतिबलों (σ_d) के मानों से अधिक हो जाते हैं अर्थात् $(\sigma_b > \sigma_d)$ तब प्रतिबल तीव्रता की रेखा (line of stress intensity) धन (+ ve) से शून्य (zero) होती हुई आधार रेखा से नीचे ऋण (– ve) की ओर जाती है, इसी स्थिति को प्रतिबलों का उत्क्रमण (Reversal of Stresses) कहते हैं।



चित्र 5.4

Scanned with CamScanner

§ 5.4 माध्य तिहाई नियम (Middle Third Rule)

प्रतिबलों के उत्क्रमण (Reversal of Stresses) के अनुसार, हम जानते हैं कि पूर्ण काट पर संयुक्त प्रतिबल एक ही प्रकृति के चिन्ह (Same Sign or Nature) का होने के लिये $\sigma_b \leq \sigma_d$ प्रतिबन्ध है क्योंकि $\sigma_b > \sigma_d$ होने पर प्रतिबलों के प्रकृति चिन्ह (+ ve से – ve) बदलने पर ही प्रतिबलों का उत्क्रमण होता है।

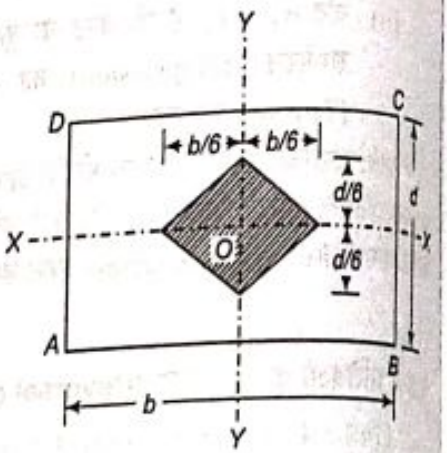
अत: प्रतिबलों का उत्क्रमण न होने देने के लिए $\sigma_b < \sigma_d$ या $\sigma_b = \sigma_d$ होना चाहिये।

(x-अक्ष पर I_{XX} लेने पर)

अर्थात् $$\frac{W.e.y}{I} = \frac{W}{A}$$

या $$e = \frac{W \times I}{W \times y \times A} = \frac{\frac{bd^3}{12}}{\frac{d}{2} \times (b \times d)} = \frac{d}{6}$$

अत: उत्केन्द्रता (e) को y-अक्ष पर भुजा d के समान्तर केन्द्र O से ऊपर या नीचे $d/6$ दूरी तक हटाया जा सकता है ताकि प्रतिबलों का उत्क्रमण न हो पाये। इस प्रकार d के समान्तर हटायी गयी कुल दूरी $\frac{d}{6} + \frac{d}{6} = \frac{d}{3} = \frac{1}{3} \times d$ होगी।



चित्र 5.5

पुन: प्रतिबलों का उत्क्रमण न होने देने की सीमा के लिये $\sigma_b = \sigma_d$ होना चाहिये।

अर्थात् $$\frac{M}{Z} = \sigma_d$$

या $$\frac{(W \times e)}{\frac{I}{y}} = \frac{W}{A}$$

या $$\frac{W \times e \times y}{I} = \frac{W}{A}$$

अब (y-अक्ष के आधार पर I_{YY} लेने पर)

$\therefore$ $$e = \frac{W \times I}{W \times y \times A}$$

$\therefore$ $$e = \frac{\frac{d \times b^3}{12}}{\frac{b}{2} \times (b \times d)} = \frac{b}{6}$$

अत: उत्केन्द्रता (e) को x-अक्ष पर भुजा b के समानान्तर (Parallel to side b), केन्द्र के दोनों ओर $b/6$ दूरी तक हटाया जा सकता है ताकि प्रतिबलों का उत्क्रमण (Reversal of stresses) न हो पाये। इस प्रकार b के समान्तर हटायी गई कुल दूरी $\frac{b}{6} + \frac{b}{6} = \frac{b}{3} = \frac{1}{3} \times b$ है।

इस प्रकार ज्ञात होता है कि प्रतिबलों का उत्क्रमण न होने देने के लिये उत्केन्द्रीय बल को काट के मध्य में भुजाओं के समान्तर भुजाओं की एक-तिहाई $\left(\frac{1}{3} \times \text{भुजा}\right)$ दूरी तक हटाया जा सकता है, इसी को माध्य तिहाई नियम (Middle Third Rule) कहते हैं।

Scanned with CamScanner

महत्त्वपूर्ण उदाहरण (Important Examples)

उदाहरण 1. एक चार मीटर लम्बाई के कॉलम (column) की खोखली काट बाहर से 300 mm × 600 mm तथा अन्दर से 250 mm × 450 mm है। इसकी 600 mm लम्बाई की भुजा के समान्तर तथा केन्द्र से जाने वाली अक्ष पर केन्द्र से 200 mm की दूरी पर 1500 kN का एक भार लगा है। कॉलम में उत्पन्न अधिकतम तनाव तथा सम्पीडन प्रतिबल ज्ञात कीजिये। [U.K. 2012, 13 (W), 2013 (S)]

A hollow column is 4 m long. External size of section of the column is 300 mm × 600 mm and Internal size is 250 mm × 450 mm. A load of 1500 kN has been provided at the axis through centre and parallel to 600 mm arm and 200 mm distance from centre. Find maximum tensile and compressive stresses in column. [U.K. 2013 (S)]

हल—दिया है—

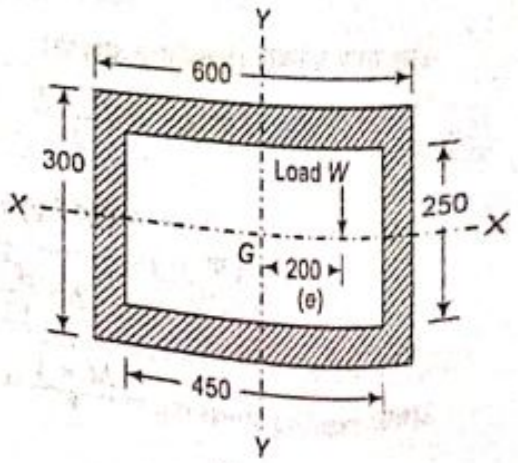
भार $W = 1500\ \text{kN}$

भार की उत्केन्द्रता (eccentricity) $e = 200\ \text{mm}$ है।

चित्र 5.6 में दी गई काट से

क्षेत्रफल $(A) = 300 \times 600 - 250 \times 450$

$= 67500\ \text{mm}^2$



चित्र 5.6

तथा काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.),

$$I = \frac{300 \times 600^3}{12} - \frac{250 \times 450^3}{12}$$

$\therefore \quad I = 3501562500\ \text{mm}^4$

$\therefore$ सीधे प्रतिबल (Direct Stress),

$$f_d \text{ या } \sigma_d = \frac{W}{A} \text{ (सूत्र)}$$

$$\sigma_d = \frac{1500 \times 1000}{67500} = 22{\cdot}222\ \text{N/mm}^2$$

तथा नमन प्रतिबल (Bending Stress),

$$f_b \text{ या } \sigma_b = \frac{M}{Z} \text{ या } \frac{W.e.y}{I}$$

$$\sigma_b = \frac{W.e.y}{I} = \frac{1500 \times 1000 \times 200 \times \frac{600}{2}}{3501562500} \quad \text{(सूत्र)}$$

$= 25{\cdot}703\ \text{N/mm}^2$

अब अधिकतम प्रतिबल (सम्पीडन में) (max. compressive stress)

$$\sigma_c \text{ या } \sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b$$

$= 22{\cdot}222 + 25{\cdot}703 = 47{\cdot}925\ \text{N/mm}^2$

न्यूनतम प्रतिबल अथवा अधिकतम तनाव प्रतिबल (max. tensile stress)

उत्तर

Scanned with CamScanner

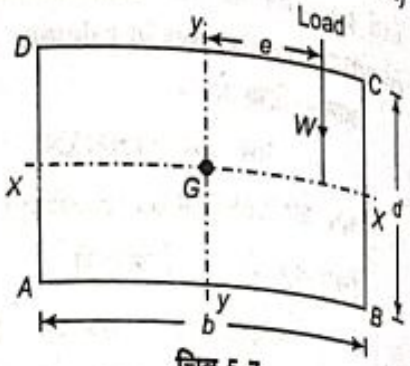
$$\sigma_t \text{ या } \sigma_{min} = \sigma_d \sim \sigma_b \text{ (अन्तर-Difference)}$$
$$= 22{\cdot}222 \sim 25{\cdot}703$$
$$= -3{\cdot}481 \text{ N/mm}^2 \text{ (– ve, तनाव दर्शाता है)}$$

उत्तर

उदाहरण 2. एक आयताकार काट *ABCD* (a rectangular section *ABCD*) जिसमें *AB* = *b* तथा *BC* = *d*, जिसमें केन्द्र से होकर *x* धुरी (अक्ष) के समानान्तर (along *x*-axis through centre) "*e*" उत्केन्द्रता पर कार्यकारी संकेन्द्रित भार "*W*" (a concentrated load "*W*" acting at an eccentricity) है, इसके लिए प्रत्यक्ष तथा बंकन प्रतिबल (direct and bending stress) आप कैसे ज्ञात करेंगे? (U.P. 2014, CIVIL)

हल—सीधे या प्रत्यक्ष प्रतिबल (direct stress)

$$\sigma_d \Rightarrow f_d = \frac{\text{Load } (W)}{\text{Area } (b \times d)}$$



चित्र 5.7

अब नमन प्रतिबल (bending stress)

$$\sigma_b \text{ (या } f_b) = \frac{M \times y}{I} \quad \left[\text{From } \frac{M}{I} = \frac{\sigma_x}{y}\right]$$

$$\sigma_b \text{ (या } f_b) = \frac{(W \times e) \times \frac{d}{2}}{b \times \frac{d^3}{12}} = \frac{6W \times e}{b \times d^2} \quad \text{उत्तर}$$

अथवा bending stress $\sigma_b = \frac{M \times y}{I} = \frac{M}{\frac{I}{y}} = \frac{M}{Z}$ सूत्र

यहाँ नमन घूर्ण (bending moment)

$$M = W \times e$$

तथा आकृति मापांक (Section Modulus)

$$Z = \frac{I}{y} \text{ होगा}$$

जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) $\Rightarrow I = \frac{b \times d^3}{12}$

और $$y = \frac{\text{depth}}{2} = \frac{d}{2}$$

अब $$Z = \frac{I}{y} = \frac{\frac{bd^3}{12}}{\frac{d}{2}} = \frac{bd^2}{6}$$

बंकन प्रतिबल,

$$\therefore \quad \sigma_b = \frac{M}{Z}$$
$$= \frac{W \times e}{\frac{bd^2}{6}} = \frac{6\,W.e}{bd^2}$$

उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 3. एक गोल एवं खोखले स्तम्भ पर, जिसका बाह्य व्यास (outer diameter) 250 mm तथा आन्तरिक व्यास (Internal Diameter) 200 mm है। इस पर 200 kN का अक्षीय भार (Axial Load) लगाया जाता है। एक ब्रैकेट के द्वारा इस पर एक अन्य भार, उसकी अक्ष के समान्तर दिशा (Parallel to Axis) में परन्तु 200 mm की दूरी पर 100 kN का लगाया जाता है। इसके आधार परिच्छेद पर उत्पन्न होने वाले अधिकतम एवं न्यूनतम प्रतिबल का मान ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है, कॉलम का बाहरी व्यास $(d_o) = 250\,\text{mm}$

आन्तरिक व्यास $(d_i) = 200\,\text{mm}$

∴ काट का क्षेत्रफल (area of section),

$$A = \frac{\pi}{4}(d_o^2 - d_i^2) \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$A = \frac{\pi}{4}(250^2 - 200^2) = 17662{\cdot}5\ \text{mm}^2$$

तथा काट का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia)

$$I = \frac{\pi}{64}(d_o^4 - d_i^4) \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$= \frac{\pi}{64}(250^4 - 200^4) = 113150390{\cdot}6\ \text{mm}^4$$

कॉलम पर कुल अक्षीय भार (Total Load along the axis) $W_d = 200\,\text{kN} + 100\,\text{kN} = 300\,\text{kN}$ है।

तथा नमन कराने वाला (नमन प्रतिबल उत्पन्न करने वाला) उत्केन्द्रीय भार (eccentric load) $W = 100\,\text{kN}$ ही रहेगा।

∴ सीधा प्रतिबल (Direct stress),

$$f_d \text{ या } \sigma_d = \frac{W_d}{A} \text{ (सम्पीडन में)}$$

$$\sigma_d = \frac{W_d}{A} = \frac{300 \times 1000}{17662{\cdot}5} = 16{\cdot}98\ \text{N/mm}^2$$

तथा नमन प्रतिबल (Bending stress),

$$f_b \text{ या } \sigma_b = \frac{M}{Z} \text{ या } \frac{W\,e\,y}{I}$$

∴

$$\sigma_b = \frac{100 \times 1000 \times 200 \times \frac{250}{2}}{113150390{\cdot}6} = 22{\cdot}09\ \text{N/mm}^2$$

अब अधिकतम प्रतिबल (max. stress) f_{max} या σ_{max}

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b \qquad \text{(compressive stress)}$$

$$= 16{\cdot}98 + 22{\cdot}09$$

$$= 39{\cdot}07\ \text{N/mm}^2 \text{ (सम्पीडन प्रतिबल)} \qquad \text{उत्तर}$$

तथा न्यूनतम प्रतिबल (अथवा अधिकतम तनाव प्रतिबल)

$$\sigma_{min} \Rightarrow \sigma_t = \sigma_d - \sigma_b \qquad \text{(Tensile stress)}$$

$$= 16{\cdot}98 - 22{\cdot}09$$

$$= -5{\cdot}11\ \text{N/mm}^2$$

$$= 5{\cdot}11\ \text{N/mm}^2 \text{ (तनाव)} \qquad \text{उत्तर}$$

(– ve चिन्ह तनाव प्रतिबल को दर्शाता है)

Scanned with CamScanner

उदाहरण 4. एक खोखला गोलाकार स्तम्भ (circular hollow column) जिसके बाह्य तथा आन्तरिक व्यास (External and internal diameters) क्रमश: 300 mm तथा 250 mm हैं, बाहरी किनारे पर 100 kN का ऊर्ध्व भार (Vertical Load) वहन करता है। अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल तीव्रताओं की गणना करें। (U.P. 2001, 10)

हल—कॉलम (स्तम्भ) की काट (section) चित्र 5.8 में दिखायी गई है। इसकी काट का क्षेत्रफल (area)

$$A = \frac{\pi (d_o^2 - d_i^2)}{4}$$

$$A = \frac{\pi (300^2 - 250^2)}{4} = 6875\,\pi$$

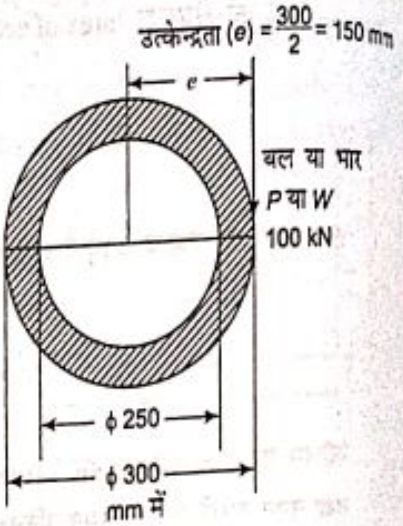
या $A = 21587{\cdot}5 \text{ mm}^2$

तथा जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia)

$$I = \frac{\pi (d_o^4 - d_i^4)}{64} \quad \text{(सूत्र)}$$

$$I = \frac{\pi (300^4 - 250^4)}{64} = 205755859{\cdot}4 \text{ mm}^4$$

∵ प्रश्नानुसार, उत्केन्द्रीय बल (P या W) बाहरी व्यास (outer diameter) के किनारे पर लगा है, अत: उत्केन्द्रता (eccentricity) $e = 150$ mm



चित्र 5.8

∴ सीधा प्रतिबल (Direct stress),

$$\sigma_d = \frac{W}{A} = \frac{100 \times 1000}{21587{\cdot}5}$$

$$= 4{\cdot}6323 \text{ N/mm}^2$$

तथा नमन प्रतिबल (Bending stress),

$$\sigma_b = \frac{M}{Z} \Rightarrow \frac{W e y}{I} \quad \text{(सूत्र)}$$

$$\therefore \quad \sigma_b = \frac{(100 \times 1000) \times 150 \times \frac{300}{2}}{205755859{\cdot}4} = 10{\cdot}9353 \text{ N/mm}^2$$

अत: अधिकतम प्रतिबल (सम्पीडन-compression) $= \sigma_d + \sigma_b$ (सूत्र)

$$\therefore \quad \sigma_{max} = (\sigma_d + \sigma_b)$$

$$\Rightarrow \quad 4{\cdot}6323 + 10{\cdot}9353 = 15{\cdot}5676 \text{ N/mm}^2$$ उत्तर

तथा न्यूनतम प्रतिबल (अथवा अधिकतम तनाव प्रतिबल),

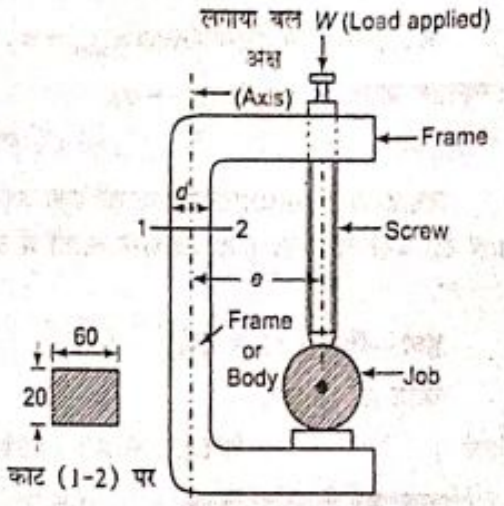
$$\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b = 4{\cdot}6323 - 10{\cdot}9353 = -6{\cdot}30 \text{ N/mm}^2 = 6{\cdot}30 \text{ N/mm}^2$$ (तनाव में)

(–ve) चिन्ह Tensile stress को दर्शाता है। उत्तर

उदाहरण 5. किसी C-क्लैम्प के फ्रेम की काट 20 mm × 60 mm का आयत (Rectangle) है। इस फ्रेम की उदासीन अक्ष (Neutral Axis) से स्क्रू की केन्द्र रेखा 100 mm की दूरी पर है। यदि स्क्रू पर 9·25 kN का बल हो तो फ्रेम में अधिकतम तनाव तथा सम्पीडन प्रतिबल (max. tensile and compressive stress) ज्ञात करें।

Scanned with CamScanner

हल—फ्रेम की आयताकार काट का क्षेत्रफल (area) तथा जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) क्रमश: $A = b \times d$ तथा $I = \frac{bd^3}{12}$ होंगे।



चित्र 5.9 : (C-Clamp)

$\therefore \quad A = 20 \times 60 = 1200 \text{ mm}^2$

तथा $\quad I = \frac{20 \times 60^3}{12} = 360000 \text{ mm}^4$

तथा उत्केन्द्रता (eccentricity) $e = 100$ mm (दिया है)

बल या भार $\quad W = 9{\cdot}25 \text{ kN} = 9{\cdot}25 \times 1000 \text{ N}$

$= 9250 \text{ N}$

$\therefore \quad \sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b$

(अधिकतम तनाव प्रतिबल-tensile stress)

$$= \frac{W}{A} + \frac{W e y}{I} = \frac{9250}{1200} + \frac{9250 \times 100 \times \frac{60}{2}}{20 \times \frac{60^3}{12}}$$

$= 7{\cdot}708 + 77{\cdot}708 = 84{\cdot}792 \Rightarrow 84{\cdot}8 \text{ N/mm}^2$ (तनाव प्रतिबल)

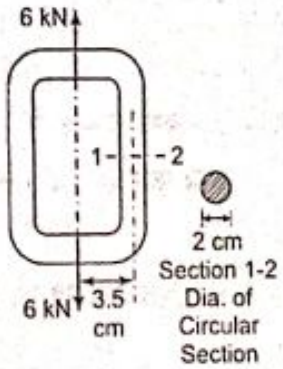
$\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b$ (सम्पीडन प्रतिबल-compressive stress)

$= 7{\cdot}708 - 77{\cdot}708$

$= -70 \text{ N/mm}^2 = 70 \text{ N/mm}^2$ (सम्पीडन में) उत्तर

उदाहरण 6. चित्र 5.10 में दिखाई गई चेन पर 6 kN का बल कार्य करता है। इसकी एक कड़ी के ऊर्ध्वाधर भाग (Vertical portion) में अधिकतम तनाव तथा सम्पीडन प्रतिबल (Tensile and compressive stress) ज्ञात करें। कड़ी के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल (A) = 3·14 cm^2 तथा I = 0·785 cm^4 है। चित्र में चेन की केवल एक कड़ी दिखाई गई है।

हल—जब दो ऊर्ध्व भागों (Vertical Parts) पर 6 kN का बल है तो एक ऊर्ध्वाधर भाग 3 kN का बल सहन करेगा। अत: बल (F या W) = 3 kN है। चित्र में चेन के ऊर्ध्वाधर भाग की अक्ष (Axis) से बल की दूरी (उत्केन्द्रता) $e = 3{\cdot}5$ cm दी है।



चित्र 5.10

$\therefore$ सीधा प्रतिबल (Direct stress)

$$f_d \text{ या } \sigma_d = \frac{(F \text{ या } W)}{A} \quad \text{(सूत्र)}$$

अब $\quad f_d \text{ या } \sigma_d = \frac{3 \times 1000}{3{\cdot}14 \times 100} = 9{\cdot}554 \text{ N/mm}^2$

तथा नमन प्रतिबल (Bending stress),

$$f_b \text{ या } \sigma_b = \frac{M}{2} \Rightarrow \frac{W e y}{I} \quad \text{(सूत्र)}$$

अब $\quad f_b \text{ या } \sigma_b = \frac{3 \times 1000 \times 35 \times \frac{20}{2}}{0{\cdot}785 \times 10^4} = 133{\cdot}758 \text{ N/mm}^2$

$\therefore$ तनाव बल लगे होने के कारण अधिकतम तनाव प्रतिबल तथा न्यूनतम सम्पीडन प्रतिबल होंगे।

Scanned with CamScanner

अत: अधिकतम तनाव प्रतिबल $\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b = 143{\cdot}308 = 143{\cdot}31\ N/mm^2$ तथा अधिकतम सम्पीडन प्रतिबल (न्यूनतम प्रतिबल) $\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b$

$= 9{\cdot}554 - 133{\cdot}758 = -124{\cdot}204\ N/mm^2 = 124{\cdot}204$ (संपीडन) उत्तर

उदाहरण 7. आयताकार काट की एक पैड़ीदार छड़ चित्र 5.10 में प्रदर्शित है। इसकी $A - A'$ किनार के केन्द्र पर 25 kN का बल लग रहा है तो विभिन्न काटों में अधिकतम प्रतिबल ज्ञात करिये।

[उत्तर : 13·89 MPa, 10·417 MPa, 83·33 MPa]

हल—चित्र 5.11 में देखें।

काट $B-B$ पर,

बल (F या W) $= 25\ kN = 25000\ N$

काट का क्षेत्रफल (Area), $A = 20 \times 60$

$A = 1200\ mm^2$

उत्केन्द्रता (eccentricity) $e = \frac{20}{2} = 10\ mm$

तथा $y = \frac{20}{2} = 10\ mm$

जड़त्वाघूर्ण, $I = 60 \times \frac{20^3}{12} = 40000$

∴ सीधे प्रतिबल (Direct stress),

$$\sigma_d = \frac{W}{A} = \frac{25 \times 1000}{1200} = 20{\cdot}833\ N/mm^2$$

तथा नमन प्रतिबल (Bending stress),

$$\sigma_b = \frac{W\,e\,y}{I} \text{ (सूत्र)}$$

$$\sigma_b = \frac{25000 \times 10 \times 10}{40000} = 62{\cdot}5\ N/mm^2$$

∴ काट $B-B$ में $\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b = 20{\cdot}833 + 62{\cdot}5 = 83{\cdot}33\ N/mm^2$ उत्तर

अब काट $(C-C)$ के लिये,

$$A = 60 \times 40 = 2400\ mm^2$$

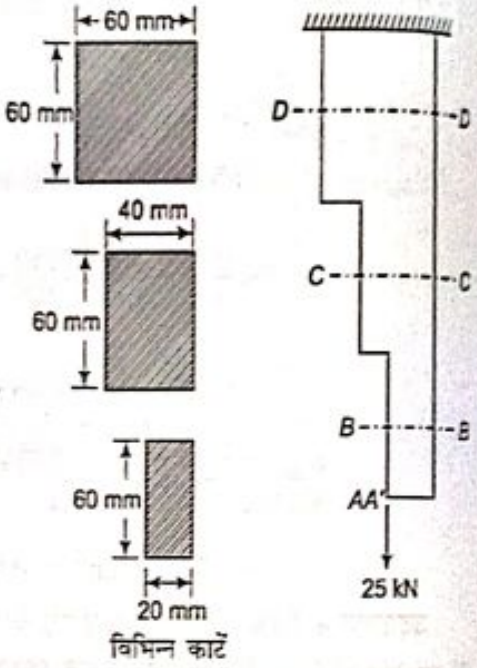
e = बल की रेखा से गु० के० की दूरी $= 0$ तथा $y = \frac{40}{2} = 20\ mm$

$$I = \frac{60 \times 40^3}{12} = 320000\ mm^4$$

∴ $$\sigma_d = \frac{W}{A} = \frac{25000}{2400} = 10{\cdot}4167\ N/mm^2$$

तथा $$\sigma_b = \frac{W\,e\,y}{I} = \frac{25000 \times 0 \times 20}{I} = 0$$

अत: काट $B-B$ में अधिकतम प्रतिबल $= \sigma_d + \sigma_b = 10{\cdot}417\ N/mm^2$ उत्तर



विभिन्न काटें

चित्र 5.11

Scanned with CamScanner

काट $D-D$ के लिये,

$$A = 60 \times 60 = 3600 \text{ mm}^2$$

$$e = 30 - 20 = 10 \text{ mm},\ y = \frac{60}{2} = 30 \text{ mm},\ I = \frac{60 \times 60^3}{12} = 1080000 \text{ mm}^4$$

$$\therefore \quad \sigma_d = \frac{W}{A} = \frac{25000}{3600} = 6{\cdot}944 \text{ N/mm}^2$$

तथा $$\sigma_b = \frac{W\,e\,y}{I} = \frac{25000 \times 10 \times 30}{1080000} = 6{\cdot}944 \text{ N/mm}^2$$

अत: काट $(D-D)$ पर अधिकतम प्रतिबल

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b = 6{\cdot}944 + 6{\cdot}944 = \mathbf{13{\cdot}89 \text{ N/mm}^2}$$ उत्तर

उदाहरण 8. चित्र में प्रदर्शित 3 m × 4 m साइज के पियर पर 80 kN का भार आ रहा है। पियर के प्रत्येक कोने पर प्रतिबल की गणना कीजिये।

A masonry pier of 3 m × 4 m supports a vertical load of 80 kN as shown in fig. Find the stresses developed at each corner of pier. **[U.K. 2009 (W)]**

हल—चित्र 5.12 में बिन्दु (S) पर लगा भार $W = 80 \text{ kN} = 80000 \text{ N}$

काट का क्षेत्रफल $(A) = 4 \times 3 = 12 \text{ m}^2$

काट पर सीधे सम्पीडन प्रतिबल (Direct stress)

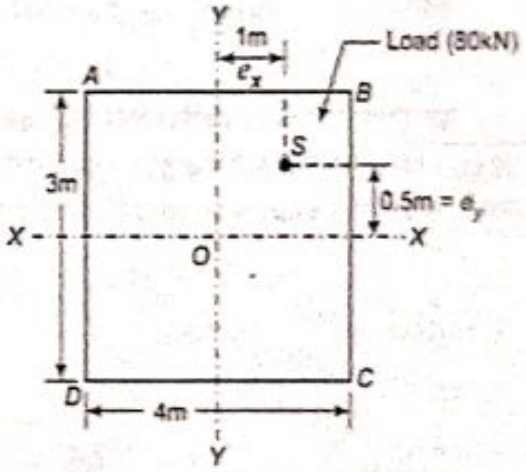
$$\sigma_d{}^c = \frac{W}{A} = \frac{80 \times 1000}{3 \times 4} = 6666{\cdot}67 \text{ N/m}^2$$

भार की $X-X$ से उत्केन्द्रता, $e_y = 0{\cdot}5 \text{ m}$

भार की $Y-Y$ से उत्केन्द्रता, $e_x = 1 \text{ m}$ है।

अब काट का $$I_{XX} = \frac{4 \times 3^3}{12} = 9 \text{ m}^4$$

तथा काट का $$I_{YY} = \frac{3 \times 4^3}{12} = 16 \text{ m}^4$$



चित्र 5.12

(1) $X-X$ अक्ष पर नमन के कारण प्रतिबल—

(भुजा AB, भार के बिन्दु के निकट है, अत: संपीडन होगा)

$$\sigma_c^{AB} = \frac{W \times e \times y}{I_{XX}} = \frac{(80 \times 1000) \times 0{\cdot}5 \times \frac{3}{2}}{9} = 6666{\cdot}67 \text{ N/m}^2$$

भुजा CD, भार के बिन्दु से दूर है, अत: इस पर तनाव होगा। जो σ_{AB} के बराबर होगा। (दोनों समान्तर हैं।)

अधिकतम तनाव प्रतिबल CD पर, $\sigma_t^{CD} = 6666{\cdot}67 \text{ N/m}^2$

(2) $Y-Y$ अक्ष पर नमन के कारण प्रतिबल—

अधिकतम सम्पीडन प्रतिबल $= \sigma_c^{BC} = \dfrac{W \cdot e_x\, y}{I_{YY}}$

$$\sigma_c^{BC} = \frac{80 \times 1000 \times 1 \times \frac{4}{2}}{\frac{3 \times 4^3}{12}} = 10000 \text{ N/m}^2$$

Scanned with CamScanner

∵ अधिकतम तनाव प्रतिबल AD पर होगा।

$$\therefore \quad \sigma'_{AD} = \frac{W \times e_y \times y}{I_{YY}} = \frac{80 \times 1000 \times 1 \times \frac{4}{2}}{16} = 10000 \text{ N/m}^2$$

बल की स्थिति के आधार पर अधिकतम तनाव D पर तथा अधिकतम संपीडन B पर होगा।

अब बिन्दु A पर प्रतिबल, $\sigma_A = \sigma_d - \sigma_{AD} - \sigma_{CD}$

$$\sigma_A = 6666{\cdot}67 - 10000 - 6666{\cdot}67 = 10000 \text{ N/m}^2$$

बिन्दु B पर प्रतिबल, $\sigma_B = \sigma_d + \sigma_{AB} + \sigma_{BC}$

$$= 6666{\cdot}67 + 6666{\cdot}67 + 10000 = 23333{\cdot}34 \text{ N/m}^2$$

बिन्दु C पर प्रतिबल, $\sigma_C = \sigma_d + \sigma_{BC} - \sigma_{CD}$

$$\sigma_C = 6666{\cdot}67 + 10000 - 6666{\cdot}67 = 10000 \text{ N/m}^2$$

बिन्दु D पर प्रतिबल, $\sigma_D = \sigma_d - \sigma_{CD} - \sigma_{AD}$

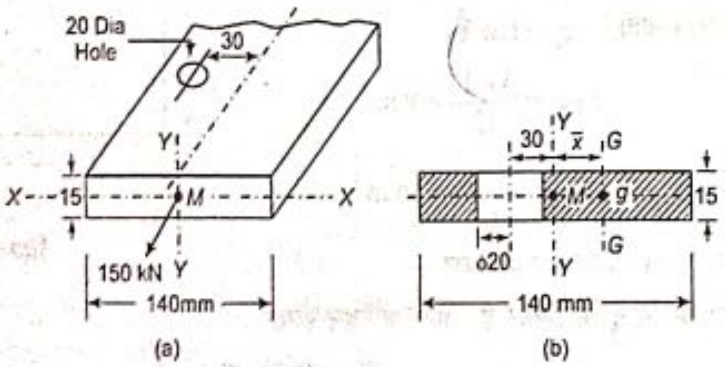
$$\sigma_D = 6666{\cdot}67 - 6666{\cdot}67 - 10000 = -10000 \text{ N/m}^2$$

(– ve) चिन्ह तनाव प्रतिबल होने को दर्शाता है।

अत: $\sigma_A = 10 \text{ kN/m}^2$, $\sigma_B = 23{\cdot}33 \text{ kN/m}^2$

$\sigma_C = 10 \text{ kN/m}^2$ तथा $\sigma_D = 10 \text{ kN/m}^2$ उत्तर

उदाहरण 9. चित्र में प्रदर्शित एक पट्टी 140 mm × 15 mm साइज की है। इस पट्टी की अक्ष से 30 mm की दूरी पर 20 mm व्यास का एक छेद पंच द्वारा बनाया गया है। यदि पट्टी की अक्ष पर 150 kN का तनाव भार (pull) लगे तो इसकी सबसे कमजोर (weak) काट पर अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल ज्ञात करें।



चित्र 5.13

हल—छिद्र (Hole) से होती हुई काट पर छड़ में प्रतिबल अधिकतम होगा (क्योंकि कम क्षेत्रफल पर प्रतिबल अधिक होता है)। अत: चित्र 5.13 (ब) के अनुसार इस काट पर अक्षीय बल की स्थिति M पर है।

चित्र (ब) में काट का शुद्ध क्षेत्रफल,

$$A = a_1 - a_2$$

$$\therefore \quad A = 140 \times 15 - 20 \times 15 = 2100 - 300$$

$$= 1800 \text{ mm}^2$$

शुद्ध काट के गु० के० g की $Y - Y$ अक्ष से दूरी $(\bar{X})$

$$\bar{X} = \frac{a_1 x_1 - a_2 x_2}{a_1 - a_2} = \frac{2100 \times (0) - 300 \times (-30)}{2100 - 300}$$

$$= 5 \text{ mm}$$

Scanned with CamScanner

∵ शुद्ध काट के गु० के० g से भार का क्रिया बिन्दु (M), $\bar{X}$ दूरी पर हटा हुआ है, अत: भार उत्केन्द्रीय (eccentric) है। इस उत्केन्द्रीय भार के कारण नमन आघूर्ण (Bending Moment), M = बल × दूरी

$$M = (150 \times 1000) \times 5 = 750000 \text{ N-mm}$$

शुद्ध काट का नमन अक्ष (bending axis) $G-G$ पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.),

$$I = \left[\frac{15 \times 140^3}{12} + (140 \times 15) \times (5)^2\right] - \left[\frac{15 \times 20^3}{12} + (20 \times 15) \times (30 + \bar{x})^2\right]$$

$$= (3482500) - (377500) = 3105000 \text{ mm}^4$$

काट के गु० के० g से बायें किनारे की दूरी (क्योंकि इसी किनारे पर कमजोर होने के कारण अधिकतम तनाव होगा),

$$y = \frac{140}{2} + \bar{X} = 70 + 5 = 75 \text{ mm}$$

∴ **अधिकतम नमन प्रतिबल, (max. bending stress)**

$$f_b \text{ या } \sigma_b = \frac{M}{I} \times y \qquad \text{(सूत्र से)}$$

$$= \frac{750000}{3105000} \times 75 = 18{\cdot}116 \text{ N/mm}^2 \text{ (तनाव)}$$

तथा तनाव में सीधा प्रतिबल (Direct stress in tension)

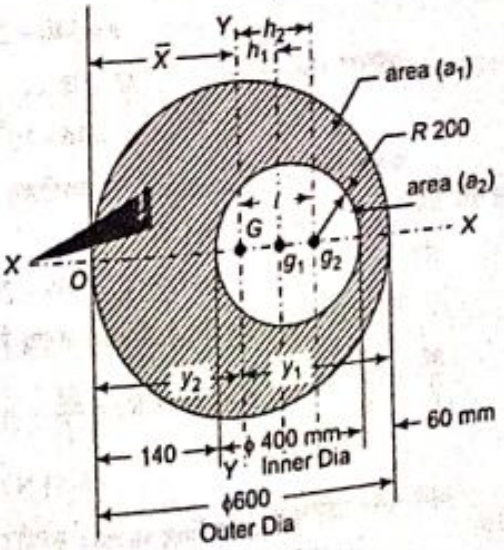
$$f_d \text{ या } \sigma_d = \frac{F \text{ या } W}{A} = \frac{150 \times 1000}{1800} = 83{\cdot}333 \text{ N/mm}^2 \text{ (तनाव)}$$

∴ अधिकतम प्रतिबल (max. stress),

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b = 83{\cdot}333 + 18{\cdot}116$$

$$= 101{\cdot}449 \Rightarrow 101{\cdot}45 \text{ N/mm}^2 \text{ (तनाव)} \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 10. 600 mm बाह्य व्यास (outer dia) तथा 400 mm अन्त: व्यास (internal dia) का एक छोटा और खोखला ढलवाँ लोहे का कॉलम एक फैक्ट्री में ढलाई (casting) से बनाया गया। ढलाई में गलती से उसका छिद्र (HOLE) उत्केन्द्रीय (eccentric) हो गया (जैसा चित्र 5.14 में दिखाया गया है)। यदि इस कॉलम पर 1600 kN का अक्षीय सम्पीडन भार (Axial compressive load) लगाया जाये तो इसकी काट में उत्पन्न (उपजे) अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल ज्ञात करें।



चित्र 5.14

हल— बाह्य व्यास $(d_o) = 600 \text{ mm} = 0{\cdot}6 \text{ m}$

अन्त: व्यास $(d_i) = 400 \text{ mm} = 0{\cdot}4 \text{ m}$

शुद्ध क्षेत्रफल (net area) $= \frac{\pi}{4}(d_o^2 - d_i^2)$

∴ $A = \frac{\pi}{4}[600^2 - 400^2]$

$(a_1 - a_2) = 157000 \text{ mm}^2$

भार (Load) $W = 1600 \text{ kN}$

$= 1600 \times 1000 \text{ N}$

बल या भार $W = 16 \times 10^5 \text{ N}$

Scanned with CamScanner

$$x_1 = Og_1 = \frac{600}{2} = 300 \text{ mm}$$

$$x_2 = Og_2 = 140 + \frac{400}{2} = 340 \text{ mm}$$

बड़े वृत्त का $a_1 = \frac{\pi (600)^2}{4} = 282600 \text{ mm}^2$

तथा a_2 = छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

$$= \frac{\pi (400)^2}{4} = 125600 \text{ mm}^2$$

$\therefore$ $$\bar{X} = OG = \frac{a_1 x_1 - a_2 x_2}{a_1 - a_2}$$ (सूत्र से)

$\therefore$ $$OG = \bar{X} = \frac{282600 \times 300 - 125600 \times 340}{157000} = 268 \text{ mm}$$

अब $$h_1 = Gg_1 = Og_1 - OG = 300 - 268 = 32 \text{ mm}$$

तथा $$h_2 = Og_2 - OG = 340 - 268 = 72 \text{ mm}$$

$$I_{YY} = \left[\frac{\pi (600)^4}{64} + 282600 \times 32^2\right] - \left[\frac{\pi (400)^4}{64} + 125600 \times 72^2\right]$$

$$I_{YY} = 6647882400 - 1907110400$$

$$= 4740772000 \text{ mm}^4 = 4 \cdot 74 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

उत्केन्द्रता (eccentricity) $e = Og_2 - OG = Og_2 - \bar{x}$ (चित्र से)

$$e = 340 - 268 = 72 \text{ mm}$$

$\therefore$ आघूर्ण (Moment), $M = W \times e$

$$= 16 \times 10^5 \times 72 = 1152 \times 10^5 \text{ N-mm}$$

$\because$ पतले किनारे (Thin side) पर सम्पीडन प्रतिबल (compressive stress) तथा मोटे किनारे (Thick end) पर तनाव प्रतिबल (Tensile stress) होगा।

अत: $y_t = \bar{x} = 268 \text{ mm}$ तथा $y_c = 600 - 268 = 332 \text{ mm}$ होगी।

$\therefore$ नमन प्रतिबल (bending stress) तनाव दिशा में—

$\frac{M}{I} = \frac{\sigma_b}{y_t}$ से, $\sigma_b \text{ (Tensile)} = \frac{M}{I} \times y_t = \frac{1152 \times 10^5}{4 \cdot 74 \times 10^9} \times 268$

$$= 6 \cdot 51 \text{ N/mm}^2 = 6 \cdot 51 \text{ MN/m}^2$$

अब नमन प्रतिबल (bending stress) सम्पीडन में,

$$\sigma_b \text{ (Compressive)} = \frac{M}{I} \times y_c = \frac{1152 \times 10^5}{4 \cdot 74 \times 10^9} \times 332$$

$$= 8 \cdot 0688 \text{ N/mm}^2 \text{ (MN/m}^2\text{)}$$

सीधा प्रतिबल (Direct stress), $\sigma_d = \frac{W}{A} = \frac{1600 \times 1000}{157000} = 10 \cdot 19 \text{ MN/m}^2 \text{ (N/mm}^2\text{)}$

Scanned with CamScanner

∴ अधिकतम सम्पीडन प्रतिबल (max. compressive stress),

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_{bc} = 10{\cdot}19 + 8{\cdot}06 = 18{\cdot}25 \text{ N/mm}^2 \text{ (MN/m}^2\text{)}$$ उत्तर

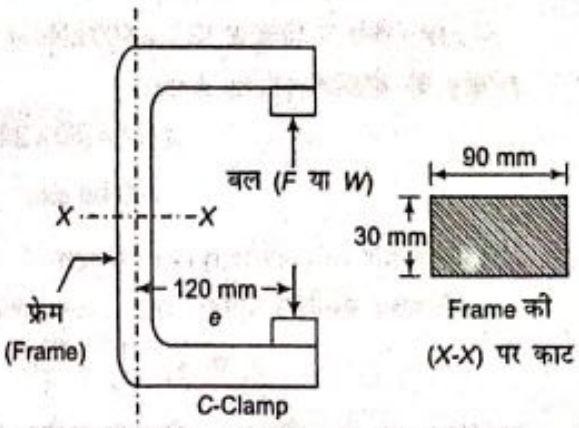
न्यूनतम सम्पीडन प्रतिबल (Minimum compressive stress),

$$\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_{bt} = 10{\cdot}19 - 6{\cdot}51 = 3{\cdot}68 \text{ N/mm}^2 \text{ (MN/m}^2\text{)}$$ उत्तर

उदाहरण 11. एक *C*-क्लैम्प के फ्रेम की काट 30 mm × 90 mm का आयत (Rectangle) है। स्क्रू की केन्द्र रेखा से फ्रेम की उदासीन अक्ष से 120 mm की दूरी पर है। स्क्रू (Screw) द्वारा कितना बल लगाया जाये, ताकि फ्रेम में तनाव प्रतिबल 180 N/mm^2 तक सीमित रहे? फ्रेम में अधिकतम सम्पीडन प्रतिबल का अधिकतम मान भी ज्ञात कीजिये।

[U.K. 2007 (W)]

हल—माना स्क्रू (Screw) द्वारा F या W बल लगाया जाता है (चित्र 5.15 देखें)



चित्र 5.15

(1) अधिकतम तनाव प्रतिबल (max. tensile stress),

$$f_1 \text{ या } \sigma_1 = \frac{F}{A} + \frac{(F \times e) \times y}{I}$$

परन्तु प्रश्न में, f_1 या $\sigma_1 = 180 \text{ N/mm}^2$ दिया है। अत:

$$180 = \frac{F}{30 \times 90} + \frac{F \times 120 \times \frac{90}{2}}{30 \times \frac{90^3}{12}}$$

$$\Rightarrow F\left[\frac{1}{2700} + \frac{120 \times 45 \times 12}{30 \times 90^3}\right]$$

या $$F = \frac{180}{3{\cdot}33 \times 10^{-3}} = 54054{\cdot}054 \text{ N} = 54{\cdot}054 \text{ kN}$$ उत्तर

अब अधिकतम सम्पीडन प्रतिबल (Compressive stress),

$$f_2 \text{ या } \sigma_2 = \frac{F}{A} - \frac{(F \times e)\, y}{I}$$

$$= \left[\frac{54054{\cdot}054}{90 \times 30} - \frac{54054{\cdot}054 \times 120 \times \frac{90}{2}}{30 \times \frac{90^3}{12}}\right]$$

$$= [20{\cdot}020 - 160{\cdot}160] = -140{\cdot}140 \text{ N/mm}^2$$

$$\Rightarrow 140{\cdot}14 \text{ N/mm}^2 \quad \text{(सम्पीडन-compressive stress)}$$ उत्तर

(– ve) चिन्ह सम्पीडन प्रतिबल (compressive stress) को दर्शाता है।

उदाहरण 12. एक *I*-काट के छोटे स्तम्भ (short column) की काट (section) में प्रत्येक फ्लैन्ज (Flange) 80 mm × 20 mm तथा पेटा (web) 20 mm × 120 mm साइज का है। इसकी काट के गुरुत्व केन्द्र (G) से 30 mm की दूरी पर 600 kN का ऊर्ध्वाधर भार (Vertical Load) वैब (Web) पर लगाया जाता है तो काट में उत्पन्न अधिकतम व न्यूनतम प्रतिबलों (max. and min. stresses) की गणना कीजिये।

Scanned with CamScanner

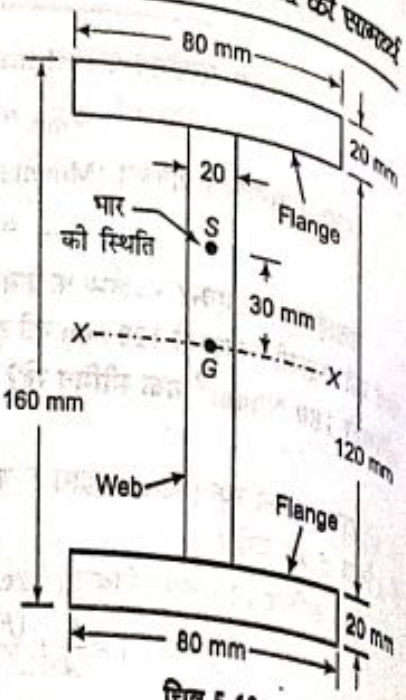
हल—कॉलम की काट चित्र 5.16 में दिखाई गई है।

$$\because \quad I_{XX} = \left[\frac{80\times160^3}{12} - \frac{60\times120^3}{12}\right]$$

$$= [27306666{\cdot}67 - 8640000]$$

$$= 18666666{\cdot}67 \text{ mm}^4$$

$$y_c = y_t = \frac{160}{2} = 80 \text{ mm}$$



चित्र 5.16

उत्केन्द्रीय भार (eccentric load)

W (चित्र में बिन्दु S पर) $= 600$ kN

I-काट का क्षेत्रफल (Total Area),

$$A = 2\times(80\times20) + (20\times120)$$

$$= 5600 \text{ mm}^2$$

उत्केन्द्रता (eccentricity) $e = 30$ mm

∴ अधिकतम सम्पीडन प्रतिबल (max. compressive stress)

$$f_1 \text{ या } \sigma_1 = \frac{W}{A} + \frac{Wey}{I}$$

[सम्पीडन बल लगा होने पर, अधिकतम संपीडन प्रतिबल $f_d + f_b$ से प्राप्त होता है]

$$\therefore \quad \sigma_{max} = \left[\frac{600}{5600} + \frac{600\times30\times\frac{160}{2}}{18666666{\cdot}67}\right]$$

$$= [0{\cdot}10714 + 0{\cdot}07714] = 0{\cdot}1843 \text{ kN/mm}^2$$

$$= 184{\cdot}3 \text{ N/mm}^2$$

उत्तर

तथा न्यूनतम प्रतिबल (min. stress) $= \sigma_d - \sigma_b = 0{\cdot}10714 - 0{\cdot}07714 = 0{\cdot}030$ kN/mm^2

$= 30$ N/mm^2 (सम्पीडन) ($-ve$ आने पर तनाव होता) उत्तर

§ 5.5 दीवारों तथा चिमनी पर वायु-दाब (Wind Pressure on Walls and Chimney)

किसी खड़ी दीवार (Vertical Wall) या चिमनी की दीवार पर लगने वाले वायु-दाब (Wind-Pressure) एवं स्वयं के भार के कारण दो प्रकार के प्रतिबल उपजते हैं—

(i) दीवार या चिमनी के अपने भार (W) के कारण इसके आधार में सीधा सम्पीडन प्रतिबल।

(ii) क्षैतिज वायु-दाब के कारण उसके आधार में नमन प्रतिबल।

यदि, दीवार या चिमनी की चिनाई का घनत्व (density) $= \rho$

दीवार या चिमनी के आधार का क्षेत्रफल (area of base) $= A$

दीवार या चिमनी की ऊँचाई (height of wall) $= h$

क्षैतिज में समान मान की वायुदाब तीव्रता $= p$

दीवार की ऊर्ध्वाधर सतह (Vertical Plane) की चौड़ाई (जिस पर वायुदाब लगता है) $= b$

Scanned with CamScanner

∴ आधार में उत्पन्न हुआ सीधा सम्पीडन प्रतिबल,

$$\sigma_d = \frac{\text{भार}}{\text{क्षेत्रफल}}$$

$$\sigma_d = \frac{W}{A} = \frac{\text{घनत्व} \times \text{आयतन}}{A} = \frac{(\rho \times g) \times (Ah)}{A} = \rho g h$$

वायुदाब के कारण क्षैतिज बल, P = दाब × क्षेत्रफल

$$P = p \times (b \times h)$$

[यह दाब का बल (P), आधार (base) से $\frac{h}{2}$ ऊँचाई पर कार्य करता है]

अब बल (P) के कारण आधार पर नमन घूर्ण (Bending Moment)

$$M = P \times \frac{h}{2}$$

∴ नमन प्रतिबल (Bending stress),

$$\boxed{\sigma_b = \frac{M}{Z}} \quad \text{(सूत्र)}$$

यहाँ Z = आधार का आकृति मापांक है तथा $Z = \frac{I}{y}$ है।

∴ आधार में अधिकतम प्रतिबल (max. stress)

$$\boxed{\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b}$$

तथा आधार में न्यूनतम प्रतिबल (minimum stress),

$$\boxed{\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b}$$

§ 5.6 वायु प्रतिरोध गुणांक (Coefficient of wind resistance)

यदि वायु-दाब के लिये सतह समतल (Plane or Flat) न हो बल्कि वक्राकार (curved) हो तो वायु-दाब बल का मान कुछ कम हो जाता है, जिसके कारण गणना में वक्र सतहों (curved surfaces) के लिये एक गुणांक (c) का प्रयोग करते हैं, इसे (c को) वायु प्रतिरोध गुणांक कहते हैं। इसका मान विभिन्न वक्र सतहों के लिये 0·5 से 0·75 तक बदलता है जबकि समतल सतहों के लिये एक (1) होता है।

अत: किसी गोल चिमनी का बाह्य व्यास (outer diameter) d तथा ऊँचाई (h) होने पर उस बेलनाकार चिमनी की दीवार पर वायु-दाब (p) के कारण वायु-दाब का कुल बल (Total wind pressure of wall),

$$P = c \,.\, p \,.\, d \,.\, h \quad \text{(सूत्र)}$$

जहाँ c = वायु प्रतिरोध गुणांक = $\frac{2}{3}$ होता है।

§ 5.7 दीवारों पर जल का दाब (Water Pressure on Walls)

जल (या पानी) को रोकने के लिए बाँध (Dam) अथवा स्वीमिंग पूल की दीवारों का प्रयोग करते हैं तो जल द्वारा सम्पर्क सतहों पर जल-दाब कार्य करता है। क्योंकि सम्पर्क सतह ऊर्ध्वाधर (Vertical) होती है, अत: जल दाब क्षैतिज में कार्य करता है और दीवार या बाँध (Dam) का भार (W) ऊर्ध्वाधर (vertical) होता है।

Scanned with CamScanner

चित्र 5.17 में डैम की एक दीवार की काट समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium) के आकार की है। माना इसकी इकाई लम्बाई पर गणना करनी है। इसके बायी ओर (left side) की खड़ी दीवार (vertical wall) पर h ऊँचाई तक पानी की सम्पर्क सतह है। बाँध की दीवार की चौड़ाई ऊपर a तथा तली पर b है। अत: दीवार की इकाई लम्बाई का भार,

W = आपेक्षिक भार × आयतन

$$W = w \times (A \times l)$$

$$= (\rho \times g) \times \left[\frac{(a+b)}{2} \times H\right] \times 1$$

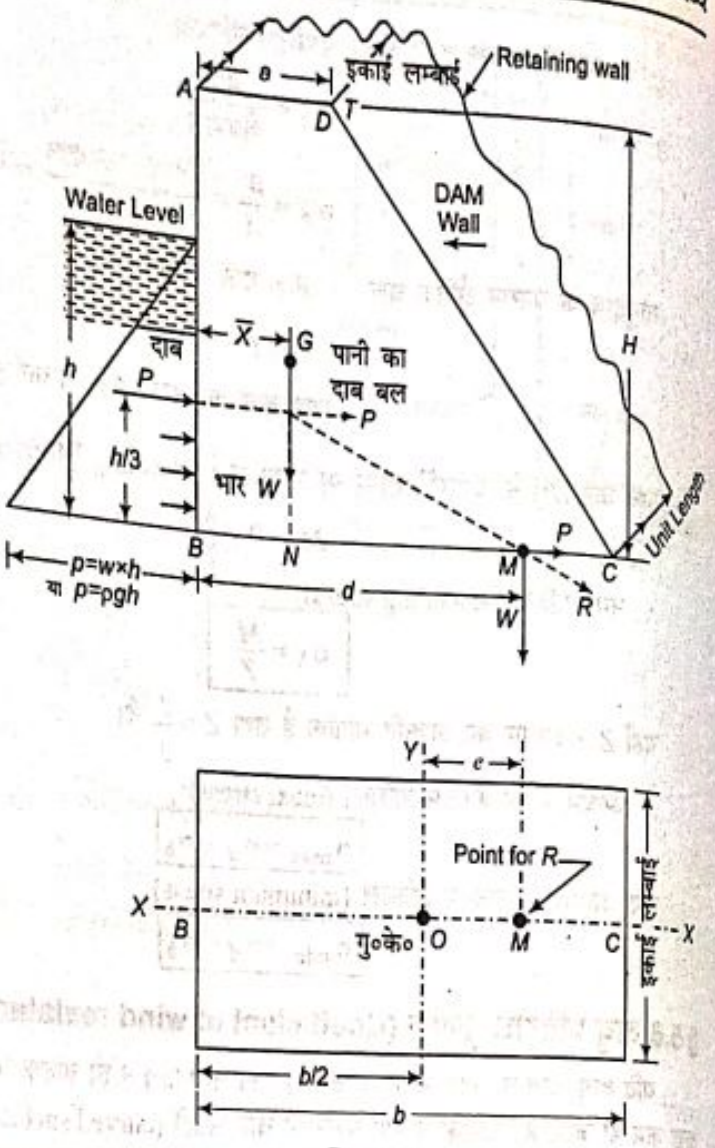
जहाँ ρ = दीवार की चिनाई का घनत्व

यह भार W दीवार के गुरुत्व केन्द्र (G) पर ऊर्ध्वाधर कार्य करेगा। इसके गुरुत्व केन्द्र (G) की दीवार से क्षैतिज दूरी $\bar{X}$ होने पर निम्न सूत्र से इसे ज्ञात करते हैं।

$$\bar{X} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3(a+b)} \quad \text{(सूत्र)}$$

हम "द्रव इन्जीनियरिंग" से जानते हैं कि द्रव (जैसे पानी) की दाब तीव्रता p, द्रव की गहराई (h) के सीधे समानुपाती होती है अर्थात् $p \times h$ या $p = wh$ या $p = \rho \times g \times h$ (सूत्र)

इस प्रकार बाँध की ऊर्ध्वाधर दीवार पर पानी के टकराव की दाब तीव्रता शून्य (zero) से तली पर wh या ($\rho \times gh$) हो जाती है जिसका परिणामी दाब बल (P), दीवार पर तली से $\frac{h}{3}$ ऊँचाई पर होगा।



चित्र 5.17

अत: पानी-दाब का बल P = औसत दाब तीव्रता × दीवार की भीगी हुई सतह का क्षेत्रफल

$\therefore$

$$P = \left(\frac{0 + wh}{2}\right) \times (h \times 1)$$

$$P = \frac{wh^2}{2} = \frac{\rho \times gh^2}{2}$$

यह बल $\frac{h}{3}$ ऊँचाई पर क्षैतिज में (Horizontal) कार्य करेगा।

माना दीवार के भार W तथा जल-दाब के बल (P) के परिणामी बल (Resultant) R की रेखा आधार को B से d दूरी पर M पर काटती है। बिन्दु M की तली पर बने आयत (Rectangle) के गु० के० से दूरी OM = उत्केन्द्रता (e) है।

कोने B पर आघूर्ण लेने पर—

(B पर घूर्णों का योग = परिणामी R का घूर्ण)

Scanned with CamScanner

$$P \times \frac{h}{3} + W \times \bar{X} = P \times 0 + W \times d$$

या $$d = \bar{X} + \left(\frac{P}{W} \times \frac{h}{3}\right)$$ से दूरी BM ज्ञात हो जाती है।

अत: आधार पर W की उत्केन्द्रता, (चित्र से)

$$e = \left(d - \frac{b}{2}\right)$$ होती है।

दीवार के आधार की काट पर आकृति मापांक (Section Modulus)

$$Z = \frac{I}{y} = \frac{\frac{1 \times b^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{b^2}{6}$$

$$\therefore \quad \boxed{Z = \frac{b^2}{6}} \qquad \text{(सूत्र)}$$

W के कारण आधार पर नमन आघूर्ण,

$$M = W \times OM$$

$$\therefore \quad \boxed{M = W \times e} \qquad \text{(सूत्र)}$$

अब W के कारण दीवार के आधार में सीधा प्रतिबल (Direct stress),

$$\sigma_d = \frac{W}{b \times 1} = \frac{W}{b} \qquad \left[\because \sigma_d = \frac{W}{\text{Area}}\right]$$

तथा नमन आघूर्ण (Bending Moment),

$$\frac{M}{I} = \frac{\sigma_b \text{ या } f}{y}$$ सूत्र से,

$$\sigma_b = \frac{M}{Z}$$

$\therefore$ काट में अधिकतम प्रतिबल (max. stress)

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b$$

$$= \frac{W}{b \times 1} + \frac{M}{Z} \qquad \text{... (I)}$$

तथा न्यूनतम प्रतिबल (minimum stress)

$$\sigma_{minimum} = \sigma_d - \sigma_b$$

$$= \frac{W}{b} - \frac{M}{Z} \qquad \text{... (II)}$$

इस प्रकार डैम की दीवार के आधार में अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल ज्ञात करते हैं।

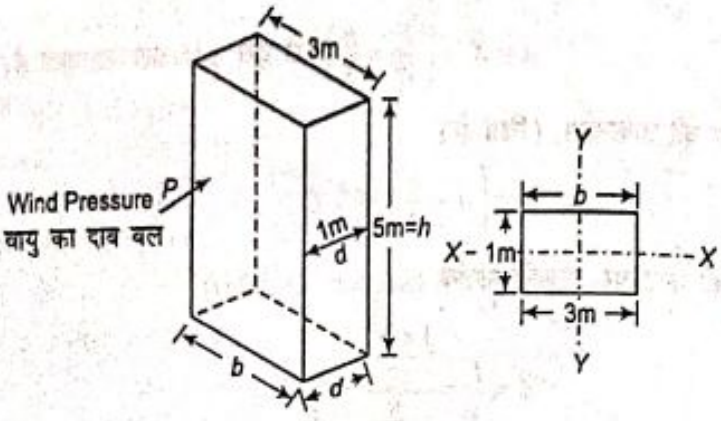
विशेष–दीवार तथा चिमनी से सम्बन्धित प्रश्न

उदाहरण 13. एक चिनाई की दीवार 5·0 m ऊँची, 3·0 m चौड़ी और 1·0 m मोटी ठोस आयताकार परिच्छेद की है। इस पर हवा का क्षैतिज दाब 1200 N/m², 3 m चौड़ी फलक पर पड़ रहा हो तो आधार पर उत्पन्न अधिकतम और न्यूनतम प्रतिबलों की तीव्रता ज्ञात कीजिये। चिनाई का घनत्व 22·4 kN/m³ (अर्थात् 2240 kg/m³) है।

[U.P. 2000, 2008]

Scanned with CamScanner

हल—चित्र 5.18 में दीवार के आधार पर सीधा संपीडन प्रतिबल (Direct stress),



चित्र 5.18

$$\sigma_d \text{ या } f_d = \rho \times h$$

$$= 22400 \times 5 \text{ N/m}^2 \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$= 112000 \text{ N/m}^2$$

दीवार पर हवा का दबाव,

$$\text{बल } (P) = \text{दाब} \times \text{क्षेत्रफल}$$

$$\therefore \quad P = 1200 \times 15$$

$$= 18000 \text{ N}$$

हवा का दबाव आधार से $\frac{H}{2} = 2{\cdot}5 \text{ m}$ ऊँचाई पर क्रिया करता हुआ माना जायेगा। अत: हवा के दबाव के कारण उत्पन्न नमन घूर्ण (B.M.), $M = P \times \frac{h}{2}$ सूत्र से

$$M = 18000 \times 2{\cdot}5 = 45000 \text{ N m}$$

आधार की आकृति मापांक (Section Modulus),

$$Z = \frac{I}{y} = \frac{1}{6} \times b \times d^2 \qquad \text{(सूत्र से)}$$

$$Z = \frac{1}{6} \times 3 \times 1^2 = \frac{1}{2} \text{ m}^3$$

अधिकतम नमन प्रतिबल (Bending Stress)

$$\sigma_b \text{ या } f_b = \frac{M}{Z} = \frac{45000}{1/2}$$

$$= \frac{45000}{1} \times 2 = 90000 \text{ N/m}^2$$

अत: अधिकतम संपीडन प्रतिबल,

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b$$

$$= 112000 + 90000$$

$$= 202000 \text{ N/m}^2$$

$$= 202 \text{ kN/m}^2 \qquad \text{उत्तर}$$

Scanned with CamScanner

एवं न्यूनतम संपीडन प्रतिबल,

$$\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b$$
$$= 112000 - 90000$$
$$= 22000\ N/m^2$$
$$= 22\ kN/m^2$$ उत्तर

उदाहरण 14. चिनाई की एक दीवार 4 मीटर चौड़ी, 1 मीटर मोटी तथा 5 मीटर ऊँची है। इसकी चौड़ाई पर 1100 पास्कल का वायु दाब कार्य करता है। यदि चिनाई का घनत्व 2240 किग्रा/मी^{3} हो तो दीवार के आधार में अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल तीव्रतायें ज्ञात करें। [U.K. 2008 (W)]

हल—हम जानते हैं कि दीवार के भार के कारण आधार में उपजा सीधा प्रतिबल (Direct stress),

$$\sigma_d \text{ या } f_d = \rho_1 gh = 2240 \times 9{\cdot}81 \times 5 = 109872\ N/m^2$$
$$= 109{\cdot}872\ kN/m^2$$

हम जानते हैं कि 1100 पास्कल $= 1100\ N/m^2$

अब वायु दाब का कुल बल, $P = p.b.h$ (∵ बल = दाब × क्षेत्रफल)
$$= 1100 \times 4 \times 5 = 22000\ N = 22\ kN$$

वायु दाब बल के कारण आधार पर नमन घूर्ण (Bending Moment),

$$M = P \times \frac{h}{2} = 22 \times \frac{5}{2} = 55\ kN\text{-}m$$

आकृति मापांक (Section Modulus),

$$Z = \frac{bd^2}{6} = \frac{4 \times 1^2}{6} = \frac{2}{3}\ m^3$$

अब अधिकतम नमन प्रतिबल,

$$\sigma_b \text{ या } f_b = \frac{M}{Z} = \frac{55 \times 3}{2} = 82{\cdot}5\ kN/m^2$$

अब अधिकतम प्रतिबल, $\sigma_{अधि०} = f_o + f_b = 109{\cdot}872 + 82{\cdot}5$
$$= 192{\cdot}372\ kN/m^2 \quad \text{(संपीडन)}$$ उत्तर

तथा न्यूनतम प्रतिबल, $\sigma_{न्यू०} = f_o - f_b = 109{\cdot}872 - 82{\cdot}5$
$$= 27{\cdot}372\ kN/m^2 \quad \text{(संपीडन)}$$ उत्तर

उदाहरण 15. चिनाई के एक स्तम्भ (pier) की ऊँचाई 4 मीटर तथा काट खोखली आयताकार है जिसकी बाह्य तथा अन्त: मापें क्रमश: 3·5 मी × 1·5 मी एवं 3 मी × 1 मी हैं। स्तम्भ के ऊपरी किनारे पर 20 kN का क्षैतिज बल काट की लम्बाई को समद्विभाजित करने वाली रेखा से गुजरने वाले ऊर्ध्व समतल में कार्य करता है। यदि चिनाई का घनत्व 2400 किग्रा/मी^{3} हो तो स्तम्भ के आधार में अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल ज्ञात कीजिए। [U.K. 2006 (S)]

हल—स्तम्भ के भार के कारण आधार में उपजा सीधा संपीडन प्रतिबल (Direct Stress)

$$\sigma_d \text{ या } f_d = \frac{W}{A} = \frac{\rho_1 gAh}{A} = \rho_1 gh = 2400 \times 9{\cdot}81 \times 4 = 94176\ N/m^2$$
$$= 94{\cdot}176\ kN/m^2$$

Scanned with CamScanner

आधार पर नमन घूर्ण (B.M.),

$$M = P \times h = 20 \times 10^3 \times 4 = 80 \times 10^3 \text{ N-m}$$

आधार का नमन अक्ष पर जड़ता घूर्ण,

$$I = \frac{1}{12}(3{\cdot}5 \times 1{\cdot}5^3 - 3 \times 1^3) = 0{\cdot}7344 \text{ m}^4$$

आकृति मापांक (Section Modulus),

$$Z = \frac{0{\cdot}7344}{1{\cdot}5/2} = 0{\cdot}979 \text{ m}^3$$

अत: अधिकतम नमन प्रतिबल,

$$\sigma_b \text{ या } f_b = \frac{M}{Z} = \frac{80 \times 10^3}{0{\cdot}979} = 81{\cdot}716 \times 10^3 \text{ N/m}^2 = 81{\cdot}716 \text{ kN/m}^2$$

अब Max. stress, $\sigma_{\text{अधि०}} = \sigma_d + \sigma_b = 94{\cdot}176 + 81{\cdot}716 = 175{\cdot}892 \text{ kN/m}^2$ (संपीडन)

Minimum stress, $\sigma_{\text{न्यू०}} = \sigma_d - \sigma_b = 94{\cdot}176 - 81{\cdot}716 = 12{\cdot}46 \text{ kN/m}^2$ (संपीडन)

उदाहरण 16. एक खोखली वृत्ताकार चिमनी के आधार पर अधिकतम एवं निम्नतम प्रतिबल ज्ञात कीजिए जबकि चिमनी की ऊँचाई 20 मीटर बाह्य तथा आन्तरिक व्यास क्रमश: 4 मीटर तथा 2 मीटर है। चिमनी पर 1 kN/m^2 की तीव्रता का वायु दाब क्षैतिज में लग रहा है। चिमनी के पदार्थ का घनत्व 22 kN/m^3 है। वायु दाब गुणांक = 2/3 मानिये।

Determine the maximum and minimum stresses at the base of a hollow circular chimney of height 20 m with external diameter 4 m and internal diameter 2 m. The chimney is subjected to a horizontal wind pressure of intensity 1 kN/m^2. The sp. wt. of the material of the chimney is 22 kN/m^3; take coefficient of wind pressure = 2/3. [U.K. 2012 (S), U.K. Special B.P. 2013]

हल—चिनाई के भार के कारण चिमनी के आधार (Base of chimney) पर सीधा प्रतिबल (Direct stress),

$$\sigma_d \text{ या } f_d = \rho_1 g h \quad (\text{जब घनत्व } \rho, \text{ kg/m}^3 \text{ में है})$$

$$= \rho_1 \times h \quad (\text{जब घनत्व } \rho, \text{ kN/m}^3 \text{ में है})$$

$$\therefore \quad \sigma_d = 22 \times 20 = 440 \text{ kN/m}^2$$

वायु दाब के कारण कुल क्षैतिज बल, $P = c\,p.D.h$ सूत्र से

∴ Horizontal force of wind pressure on outside of wall of chimney.

$$P = c \times p \times D \times h \qquad [\text{यहाँ, } D = \text{बाह्य व्यास (outer diameter) है}]$$

$$= \frac{2}{3} \times 1 \times 4 \times 20$$

$$= 53{\cdot}333 \text{ kN}$$

अब चिमनी के आधार पर नमन घूर्ण (Bending Moment),

$$M = P \times \frac{h}{2} \qquad [\because \text{बल (force) } \frac{h}{2} \text{ ऊँचाई पर कार्य करेगा}]$$

$$= 53{\cdot}333 \times \frac{20}{2} = 533{\cdot}33 \text{ kN-m}$$

∵ आकृति मापांक (Section Modulus)

Scanned with CamScanner

$$Z = \frac{I}{y} = \frac{\frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}}{\frac{D}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{32} \times \left(\frac{D^4 - d^4}{D} \right) = \frac{\pi}{32} \left(\frac{4^4 - 2^4}{4} \right) = 5{\cdot}8875 \text{ m}^3$$

∴ अधिकतम नमन प्रतिबल (max. bending stress)

σ_b या $f_b = \frac{M}{Z}$ सूत्र से

$$\sigma_b = \frac{533{\cdot}33}{5{\cdot}8875} = 90{\cdot}587 \text{ kN/m}^2$$

अत: अधिकतम प्रतिबल (max. stress),

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b$$

$$\sigma_{max} = 440 + 90{\cdot}587 \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$= 530{\cdot}587 \text{ kN/m}^2$$

तथा न्यूनतम प्रतिबल (minimum stress), उत्तर

$$\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$= 440 - 90{\cdot}587 = 349{\cdot}413 \text{ kN/m}^2 \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 17. चिनाई द्वारा निर्मित एक चिमनी का बाह्य व्यास (outer diameter) 1·2 m तथा आन्तरिक व्यास (internal dia) 0·8 m है। इसके परिच्छेद पर 125 kN का ऊर्ध्वाधर भार (Vertical Load) तथा 14 kN-m का बंकन-आघूर्ण (Bending Moment) लगा है। उसकी निर्माण-सामग्री में उत्पन्न अधिकतम एवं न्यूनतम प्रतिबलों की गणना कीजिये। [U.K. 2007 (W)]

हल—चिमनी की काट का क्षेत्रफल (area of section of chimney)

$$A = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4} = \frac{\pi (1{\cdot}2^2 - 0{\cdot}8^2)}{4} = 0{\cdot}628 \text{ m}^2$$

तथा काट का जड़त्व आघूर्ण (Moment of inertia of section)

$$I = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi (1{\cdot}2^4 - 0{\cdot}8^4)}{64} = 0{\cdot}08164 \text{ m}^4$$

∴ आकृति मापांक (Section modulus),

$$Z = \frac{I}{y} \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$Z = \frac{0{\cdot}08164}{1{\cdot}2/2} = 0{\cdot}136 \text{ m}^3$$

दिया है, नमन आघूर्ण (Bending moment), $M = 14$ kN-m है।

∴ अधिकतम नमन प्रतिबल (Max. Bending Stress),

$$\sigma_b \text{ या } f_b = \frac{M}{Z} \qquad \text{(सूत्र)}$$

∴

$$\sigma_b = \frac{14}{0{\cdot}136} = 102{\cdot}941 \text{ kN/m}^2$$

Scanned with CamScanner

अब सीधे प्रतिबल (Direct stress),

$$\sigma_d \text{ या } f_d = \frac{\text{भार } (W)}{\text{क्षेत्रफल } (A)} \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$\therefore \quad \sigma_d = \frac{125}{0{\cdot}628} = 199{\cdot}0446 \text{ kN/m}^2$$

∴ अधिकतम प्रतिबल (max. stress),

$$\sigma_{max} = (\sigma_d + \sigma_b) \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$\sigma_{max} \text{ या } f_{max} = (199{\cdot}044 + 102{\cdot}941) = 301{\cdot}98 \text{ kN/m}^2 \qquad \text{उत्तर}$$

न्यूनतम प्रतिबल (min. stress),

$$\sigma_{min} = (\sigma_d - \sigma_b) \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$\sigma_{min} \text{ या } f_{min} = (199{\cdot}044 - 102{\cdot}941) = 96{\cdot}103 \text{ kN/m}^2 \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 18. चिनाई की एक 25 m ऊँची बेलनाकार चिमनी (cylindrical chimney) के बाह्य तथा अन्त: व्यास (outer and inner dia) क्रमश: 2·5 m एवं 1 m हैं। इस पर क्षैतिज वायुदाब तीव्रता $(x)^{2/3}$ के अनुसार बदलती है जबकि x चिमनी के आधार से किसी बिन्दु की ऊँचाई है। 20 m ऊँचाई पर वायु-दाब तीव्रता 1 kPa मानिये। यदि चिनाई का भार 22 kN/m^3 एवं वायु प्रतिरोध गुणांक 0·6 हो तो चिमनी के आधार पर नमन घूर्ण एवं अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल तीव्रतायें ज्ञात कीजिए।

हल—प्रश्नानुसार,

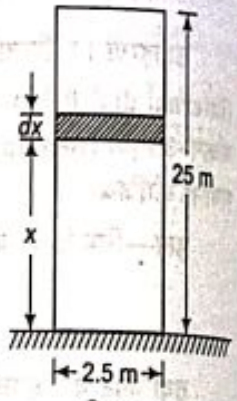
क्षैतिज वायुदाब तीव्रता, $P \propto x^{2/3}$

या $P = Kx^{2/3}$

परन्तु $x = 20 \text{ m}$ पर

$$P = 1 \text{ kPa} = 1 \text{ kN/m}^2 = 1000 \text{ N/m}^2$$

$$\therefore \quad K = \frac{1000}{(20)^{2/3}} = \frac{1000}{7{\cdot}368} = 135{\cdot}72$$



चित्र 5.19

चित्र 5.19 के अनुसार आधार से x ऊँचाई पर dx मोटाई की चिमनी की सतह की पट्टी पर विचार करने पर, वायु दाब के कारण इस पट्टी पर बल,

$$dP = c.p.D.dx = c.K.x^{2/3}.D.dx$$

$$= 0{\cdot}6 \times 135{\cdot}72 \times 2{\cdot}5\, x^{2/3}\, dx = 203{\cdot}58\, x^{2/3} dx$$

इस बल का आधार पर नमन घूर्ण

$$dM = dP\,.x = 203{\cdot}58\, x^{2/3}\,.x\,.dx$$

$$= 203{\cdot}58\, x^{5/3} dx$$

अत: सारी चिमनी के लिये आधार पर नमन घूर्ण (Bending Moment),

$$M = \int_0^{25} 203{\cdot}58\, x^{5/3}\, dx$$

$$= 203{\cdot}58 \left[\frac{3}{8}.x^{8/3}\right]_0^{25}$$

Scanned with CamScanner

$$= 203{\cdot}58 \times \frac{3}{8} \times 25 \times 25 \times 25^{2/3}$$

$$= 407941 \text{ N-m}$$

$$= 407{\cdot}941 \text{ kN-m}$$

अब आकृति मापांक (Section Modulus),

$$Z = \frac{I}{y} \quad \text{जहाँ } y = \frac{\text{बाह्य व्यास } (D)}{2} \text{ है।}$$

$$Z = \frac{\pi}{64} \times \frac{(2{\cdot}5^4 - 1^4)2}{2{\cdot}5}$$

$$= 1{\cdot}495 \text{ m}^3$$

अतः अधिकतम नमन प्रतिबल (max. bending stress),

$$\sigma_b = \frac{M}{Z} = \frac{407{\cdot}941}{1{\cdot}495} = 272{\cdot}87 \text{ kN/m}^2$$

फिर चिमनी के भार के कारण सीधा प्रतिबल (Direct stress),

$$f_d \text{ या } \sigma_d = \rho_1 g h = 22 \times 10^3 \times 25 = 550 \times 10^3 \text{ N/m}^2$$

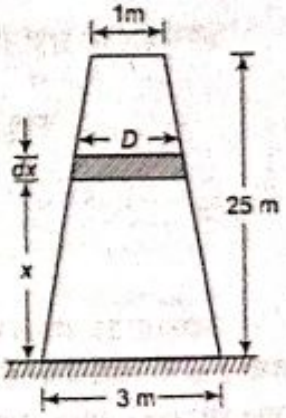
$$= 550 \text{ kN/m}^2$$

$$\therefore \quad \sigma_{\text{अधि०}} = \sigma_o + \sigma_b = 550 + 272{\cdot}87 = 822{\cdot}87 \text{ kN/m}^2 \text{ (संपीडन)}$$

तथा $$\sigma_{\text{न्यू०}} = \sigma_o - \sigma_b = 550 - 272{\cdot}87 = 277{\cdot}13 \text{ kN/m}^2 \text{ (संपीडन)}$$ उत्तर

उदाहरण 19. इस्पात की एक चिमनी की ऊँचाई 25 मीटर है। आधार पर इसका बाह्य व्यास 3 मीटर है और समान रूप से टेपरित होते हुए ऊपरी सिरे पर 1 मीटर हो जाता है। यदि प्रति वर्ग मीटर समतल सतह पर क्षैतिज वायु-दाब का मान 1800 न्यूटन/मी^{2} हो तो चिमनी के आधार पर नमन घूर्ण ज्ञात कीजिए। वायु प्रतिरोध गुणांक का मान 0·6 मानिये।

हल—चित्र 5.20 के अनुसार आधार से x ऊँचाई पर चिमनी की सतह पर dx मोटाई की एक क्षैतिज पट्टी मानिये जिसका व्यास D है।



चित्र 5.20

$\therefore$ 25 मी० ऊँचाई पर व्यास में कमी $= 3 - 1 = 2$ मीटर

$\therefore$ x मी० ऊँचाई पर व्यास में कमी $= \frac{2}{25} \times x$

अतः $$D = \left(3 - \frac{2x}{25}\right) = (3 - 0{\cdot}08x)$$

इस पट्टी पर वायु-दाब बल, $dP = c \times p \times D \times dx$

$$= 0{\cdot}6 \times 1800 (3 - 0{\cdot}08x)\, dx$$

$\therefore$ $$dP = 1080 (3 - 0{\cdot}08x)\, dx$$

अब आधार पर घूर्ण, $$dM = dP \times x = 1080 (3 - 0{\cdot}08x) \times x \times dx$$

$\therefore$ पूर्ण चिमनी के लिए आधार पर नमन घूर्ण,

$$M = \Sigma dP \times x = \int_0^{25} 1080 (3 - 0{\cdot}08x)\, x\, dx$$

$$= 1080 \left[3 \times \frac{x^2}{2} - 0{\cdot}08 \times \frac{x^3}{3}\right]_0^{25} \quad \text{(में सीमा का मान } x = 25 \text{ रखने पर)}$$

Scanned with CamScanner

$$= 1080\,[937{\cdot}5 - 416{\cdot}67]$$

$$= 562496{\cdot}4 \text{ N-m}$$

$$= 562{\cdot}5 \text{ kN-m}$$ उत्तर

उदाहरण 20. इस्पात की एक बेलनाकार चिमनी (cylindrical chimney) की ऊँचाई 25 m तथा बाह्य व्यास 2 m है। इस पर वायु दाब तीव्रता (Wind-pressure intensity), आधार से ऊँचाई (h) के वर्गमूल (Square root) के अनुसार बदलती है (अर्थात् $p \propto \sqrt{h}$) है। ऊपरी किनारे पर दाब तीव्रता का मान 250 N/m^2 समतल सतह है। यदि वायु प्रतिरोध गुणांक 0·6 हो तो चिमनी के आधार पर नमन घूर्ण (Bending Moment) ज्ञात कीजिये।

हल—माना चिमनी की तली से h ऊँचाई पर dh मोटाई की कोई पट्टी (strip) है तथा इसका व्यास D है।

दिया है, दाब तीव्रता $p \propto \sqrt{h}$

या $p = K\sqrt{h}$ ... (1)

यहाँ $p = 250 \text{ N/m}^2$ तथा $h = 25$ m है।

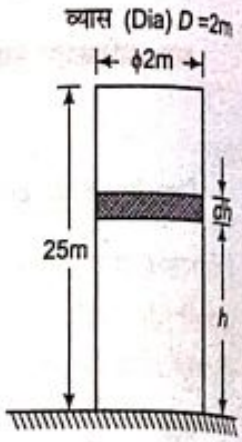
$$\therefore \quad K = \frac{250}{\sqrt{25}} = 50$$

अत: $p = 50 \times h^{1/2}$

चिमनी पर दाब बल $P = c.p.D.h$ सूत्र से

$$P = 0{\cdot}6 \times 50\sqrt{h} \times 2 \times dh = 60\, h^{1/2}\, dh$$

अत: $P = 60\, h^{1/2} dh$



चित्र 5.21

इस बल का चिमनी के आधार (Base) पर आघूर्ण (moment) लेने से—

$$\therefore \quad \text{आघूर्ण } (M) = P \times h \Rightarrow (60\, h^{1/2}\, dh) \times h$$

$$M = 60 \times h^{3/2}\, .dh$$

इस प्रकार की सभी सम्भव पट्टियों में घूर्णों का योग ही चिमनी के आधार पर नमन आघूर्ण (Bending Moment) होगा।

$$\therefore \quad \text{नमन घूर्ण (B.M.)} = 60 \times \int_0^{25} h^{3/2}\, dh = 60\left[\frac{h^{5/2}}{5/2}\right]_0^{25}$$

या $$M = 60 \times \frac{2}{5} \times (25)^{5/2} = 24 \times 5^5 = 75000 \text{ N-m}$$

$$= 75{\cdot}0 \text{ kN-m}$$ उत्तर

उदाहरण 21. समान वृत्ताकार काट की एक चिमनी की ऊँचाई 25 m है। इसके बाह्य तथा अन्त: व्यास क्रमश: 4 m तथा 2 m हैं। चिमनी पर क्षैतिज वायु-दाब का मान 1·2 kPa प्रक्षेपित क्षेत्रफल (Projected area) है। यदि चिनाई का आ० भार (Specific weight) 21 kN/m^3 हो तो चिमनी के आधार में अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये।

हल—काट का जड़त्व आघूर्ण $(I) = \dfrac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \dfrac{\pi}{64}[4^4 - 2^4] = 11{\cdot}775 \text{ m}^4$

∵ क्षैतिज वायु दाब बल, P = दाब × क्षेत्रफल (यहाँ दाब $p = 1{\cdot}2 \text{ kPa} = 1{\cdot}2 \text{ kN/m}^2$)

$$= 1{\cdot}2 \times (4 \times 25) = 120 \text{ kN}$$

आकृति मापांक $(Z) = \dfrac{I}{y} = \dfrac{11{\cdot}775}{4/2} = 5{\cdot}8875 \text{ m}^3$

Scanned with CamScanner

चिमनी के आधार पर नमन आघूर्ण (B.M.),

$$M = P \times \frac{h}{2} = 120 \times \frac{25}{2} = 1500 \text{ kN-m}$$

$\therefore$ अधिकतम नमन घूर्ण (max. bending moment), $\sigma_b = \frac{M}{Z}$ (सूत्र)

$$\sigma_b = \frac{M}{Z} = \frac{1500}{5{\cdot}8875} = 254{\cdot}78 \text{ kN/m}^2$$

सीधा प्रतिबल (Direct stress),

$$\sigma_d = P \times h = 21 \times 25 = 525 \text{ kN/m}^2$$

$\therefore$ $\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b = 525 + 254{\cdot}78 = 779{\cdot}78 \text{ kN/m}^2$ (संपीडन-compression) उत्तर

तथा न्यूनतम प्रतिबल

$$\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b$$
$$= 525 - 254{\cdot}78 = 270{\cdot}22 \text{ kN/m}^2 \text{ (संपीडन)}$$ उत्तर

उदाहरण 22. एक चिमनी के आधार पर प्रतिबलों (Stresses at the base) को ज्ञात करें। चिमनी के ऊपरी तल का आन्तरिक व्यास (internal dia. at top) = d_1 और नीचे तले पर आन्तरिक व्यास (internal dia. at base surface) = d_2 है। $d_1 < d_2$, ऊँचाई (height) = h तथा मोटाई (thickness of wall of chimney) = t है। इसके बीच में स्वयं का भार "W" तथा तली से $\frac{h}{3}$ दूरी पर कार्यकारी क्षैतिज वायु बल H (Horizontal wind force H acting at $\frac{h}{3}$ from the base) । **(U.P. 2014, CIVIL)**

हल—**Step (1) :** चिमनी के आधार पर अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल (area of cross-section at base of chimney)

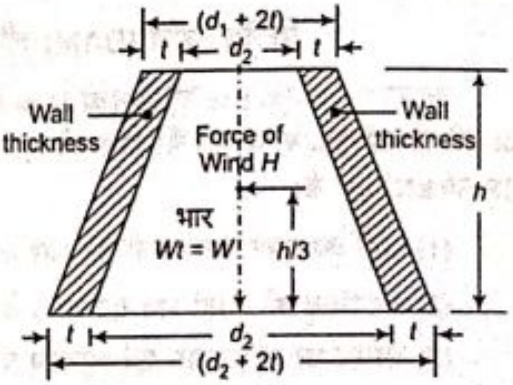
$$A_2 = \frac{\pi (d_o^2 - d_i^2)}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4}[(d_2 + 2t)^2 - d_2^2] = \frac{\pi}{4}[4t^2 + 4td_2]$$

Step (2) : चिमनी के ऊपरी तल पर अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल (area of cross-section at top of chimney)

$$A_1 = \frac{\pi}{4}[(d_1 + 2t)^2 - d_1^2] = \frac{\pi}{4}[4t^2 + 4td_1]$$

Step (3) : चिमनी के भार W के कारण आधार पर सीधे प्रतिबल (direct stress at the base due to weight, W)

$$\sigma_d = \frac{W}{A_2} \Rightarrow \frac{4W}{\pi(4t^2 + 4 + d_2)}$$



चित्र 5.22 : चिमनी (Chimney)

Step (4) : चिमनी के आधार पर नमन प्रतिबल (वायु-क्षैतिज बल H के कारण) (Bending stresses at base due to wind force (H) acting at the height of $\frac{h}{3}$ from base)

$$\sigma_b = \frac{M \times y}{I} \Rightarrow \frac{M}{Z} \text{ (सूत्र)}$$

यहाँ तली पर (at base) नमन घूर्ण (B.M.), M = बल × दूरी

$$M = H \times \frac{h}{3}$$

Scanned with CamScanner

(2) उस बिन्दु की स्थिति, जहाँ परिणामी आधार को काटता है।

माना परिणामी आधार को K बिन्दु पर काटता है।

इकाई लम्बाई की चिनाई के बाँध का भार W, आधार को मध्य में काटेगा।

$$\therefore \quad AN = \frac{b}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ m} = \bar{X}$$

बाँध का भार, W = आयतन × घनत्व अर्थात् (W = Area × length × density)

$$= (6 \times 14) \times 1 \times 25{\cdot}50 = 2142 \text{ kN}$$

बाँध के कोने A पर आघूर्ण लेने से (Taking moment about A)

$$W \times AK + P \times 0 = W \times AN + P \times \frac{h}{3}$$

या $$2142 \times AK = 2142 \times \frac{6}{2} + 720 \times 4$$

$$\therefore \quad AK = 4{\cdot}34 \text{ metre}$$

अत: उत्केन्द्रता $(e) = NK = AK - AN$

$$\therefore \quad e = 4{\cdot}34 - 3 = 1{\cdot}34 \text{ metre}$$ उत्तर

(3) आधार पर अधिकतम एवं न्यूनतम प्रतिबल—

नमन आघूर्ण $(M) = W \times e$

$$= 2142 \times 1{\cdot}34$$

$$= 2870{\cdot}28 \text{ kN-m}$$

आकृति मापांक (Section Modulus)

$$Z = \frac{1}{6} \times b \times d^2 \text{ सूत्र से}$$

$$Z = \frac{1}{6} \times 1 \times 6^2 = 6 \text{ m}^3$$

$\therefore$ नमन प्रतिबल (Bending stress)

$$\sigma_b \text{ या } f_b = \frac{M}{Z} = \frac{2870{\cdot}28}{6}$$

सीधा प्रतिबल (Direct stress),

$$\sigma_d \text{ या } f_d = \frac{W}{A} = \frac{2142}{1 \times 6} = 357 \text{ kN/m}^2$$

$\therefore$ अधिकतम प्रतिबल (max. stress)

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b \quad \text{(सूत्र)}$$

$$\sigma_{max} = 357 + 478{\cdot}38 = 835{\cdot}38 \text{ kN/m}^2 \text{ (सम्पीडन)}$$

तथा न्यूनतम प्रतिबल (minimum stress),

$$\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b \quad \text{(सूत्र)}$$

$$\sigma_{min} = 357 - 478{\cdot}38 = -121{\cdot}38 \text{ kN/m}^2$$

(– ve के कारण यह तनाव प्रकृति का है)

Scanned with CamScanner

तथा चिमनी के आधार पर काट का आकृति मापांक (Section Modulus)

$$Z = \frac{I}{y} \text{ सूत्र में}$$

$$I = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{64} = \frac{\pi}{64}[(d_2 + 2t)^4 - d_2^4]$$

$$= \frac{\pi}{64}[(d_2 + 2t)^2 - d_2^2][(d_2 + 2t)^2 + d_2^2]$$

$$= \frac{\pi}{64}[(2t)(2d_2 + 2t)][2d_2^2 + 4t^2 + 4td_2]$$

$$= \frac{\pi}{8}[t(d_2 + t)(d_2^2 + 2t^2 + 2t\,d_2)]$$

तथा $$y = \frac{\text{(Outer dia of section at base)}}{2} = \frac{d_2 + 2t}{2}$$

$\therefore$ $$Z = \frac{I}{y} \Rightarrow \frac{\pi}{4} \times \frac{t(d_2 + t)(d_2^2 + 2t^2 + 2td_2)}{(d_2 + 2t)}$$

$\therefore$ $$\sigma_b = \frac{M}{Z} \Rightarrow \frac{\text{H.h.}}{3} \times \frac{(d_2 + 2t)}{t(d_2 + t)(d_2^2 + 2t^2 + 2td_2)}$$

Step (5) : आधार पर अधिकतम व न्यूनतम प्रतिबल (max. and minimum stresses at base)

$$\sigma_{max}, \sigma_{min} = \sigma_d \pm \sigma_b$$

$$= \left[\frac{4W}{\pi(4t^2 + 4td_2)} \pm \frac{\text{H.h}}{3} \times \frac{(d_2 + 2t)}{t(d_2 + t)(d_2^2 + 2t^2 + 2td_2)}\right]$$ उत्तर

विशेष–बाँध (DAM) की दीवार पर पानी के दाब पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 23. एक 6 m चौड़ी तथा 14 m ऊँची आयताकार काट की कंक्रीट की दीवार से बने बाँध (Dam) में 12 m की ऊँचाई तक पानी भरा है। बाँध की एक मीटर लम्बाई को मानते हुए निम्न को ज्ञात कीजिये। कंक्रीट का भार 25·50 kN/m³ है।

(1) पानी का कुल दाब। पानी का भार $w = 1000$ kg/m³ या 10 kN/m³ लीजिये।

(2) उस बिन्दु को, जहाँ भार एवं पानी के दबाव का परिणामी आधार को काटता है।

(3) आधार पर अधिकतम एवं न्यूनतम प्रतिबल।

हल—दिया है—(i) बाँध की ऊँचाई $(H) = 14$ m

(ii) बाँध की चौड़ाई $(b) = 6$ m

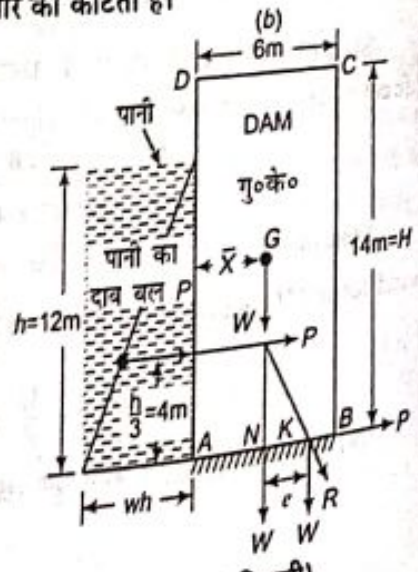
(iii) पानी की ऊँचाई $(h) = 12$ m

(iv) कंक्रीट का घनत्व $(\rho) = 25{\cdot}50$ kN/m³

(1) बाँध की 1 m लम्बाई पर कुल दाब (Total pressure)

पानी का दाब बल $P = \frac{wh^2}{2}$ सूत्र से,

$$= \frac{10 \times (12)^2}{2} = 720 \text{ kN}$$ उत्तर



चित्र 5.23 (परिणामी)

Scanned with CamScanner

(2) उस बिन्दु की स्थिति, जहाँ परिणामी आधार को काटता है।

माना परिणामी आधार को K बिन्दु पर काटता है।

इकाई लम्बाई की चिनाई के बाँध का भार W, आधार को मध्य में काटेगा।

$$\therefore \quad AN = \frac{b}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ m} = \bar{X}$$

बाँध का भार, W = आयतन × घनत्व अर्थात् (W = Area × length × density)

$$= (6 \times 14) \times 1 \times 25{\cdot}50 = 2142 \text{ kN}$$

बाँध के कोने A पर आघूर्ण लेने से (Taking moment about A)

$$W \times AK + P \times 0 = W \times AN + P \times \frac{h}{3}$$

या $$2142 \times AK = 2142 \times \frac{6}{2} + 720 \times 4$$

$$\therefore \quad AK = 4{\cdot}34 \text{ metre}$$

अत: उत्केन्द्रता $(e) = NK = AK - AN$

$$\therefore \quad e = 4{\cdot}34 - 3 = 1{\cdot}34 \text{ metre}$$

(3) आधार पर अधिकतम एवं न्यूनतम प्रतिबल— उत्तर

नमन आघूर्ण $(M) = W \times e$

$$= 2142 \times 1{\cdot}34$$

$$= 2870{\cdot}28 \text{ kN-m}$$

आकृति मापांक (Section Modulus)

$$Z = \frac{1}{6} \times b \times d^2 \text{ सूत्र से}$$

$$Z = \frac{1}{6} \times 1 \times 6^2 = 6 \text{ m}^3$$

$\therefore$ नमन प्रतिबल (Bending stress)

$$\sigma_b \text{ या } f_b = \frac{M}{Z} = \frac{2870{\cdot}28}{6}$$

सीधा प्रतिबल (Direct stress),

$$\sigma_d \text{ या } f_d = \frac{W}{A} = \frac{2142}{1 \times 6} = 357 \text{ kN/m}^2$$

$\therefore$ अधिकतम प्रतिबल (max. stress)

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b \quad \text{(सूत्र)}$$

$$\sigma_{max} = 357 + 478{\cdot}38 = 835{\cdot}38 \text{ kN/m}^2 \quad \text{(सम्पीडन)}$$

तथा न्यूनतम प्रतिबल (minimum stress),

$$\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b \quad \text{(सूत्र)}$$

$$\sigma_{min} = 357 - 478{\cdot}38 = -121{\cdot}38 \text{ kN/m}^2$$

(– ve के कारण यह तनाव प्रकृति का है)

Scanned with CamScanner

उदाहरण 24. एक समलम्ब चतुर्भुज आकार आकृति वाले मेसोनरी बाँध की ऊँचाई 4 मीटर तथा सिर पर चौड़ाई 1 मीटर तथा आधार पर चौड़ाई 3 मीटर है। यह अपने ऊर्ध्वाधर तल पर पानी को रोकता है। डैम के आधार पर अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल ज्ञात कीजिए जबकि डैम पूर्ण रूप से भरा है। पानी का विशिष्ट भार 10 kN/m^3 तथा चिनाई का विशिष्ट भार 24 kN/m^3 लीजिए। [U.K. 2012 (S), 2013 (Sp. B.P.)]

A masonry Trapezoidal dam 4 m height, 1 m wide at its top and 3 m wide at its base, retain water on its vertical face. Determine the maximum and minimum stresses at the base when the reservoir is full. Take specific weight of water as 10 kN/m^3; and that of masonry as 24 kN/m^3.

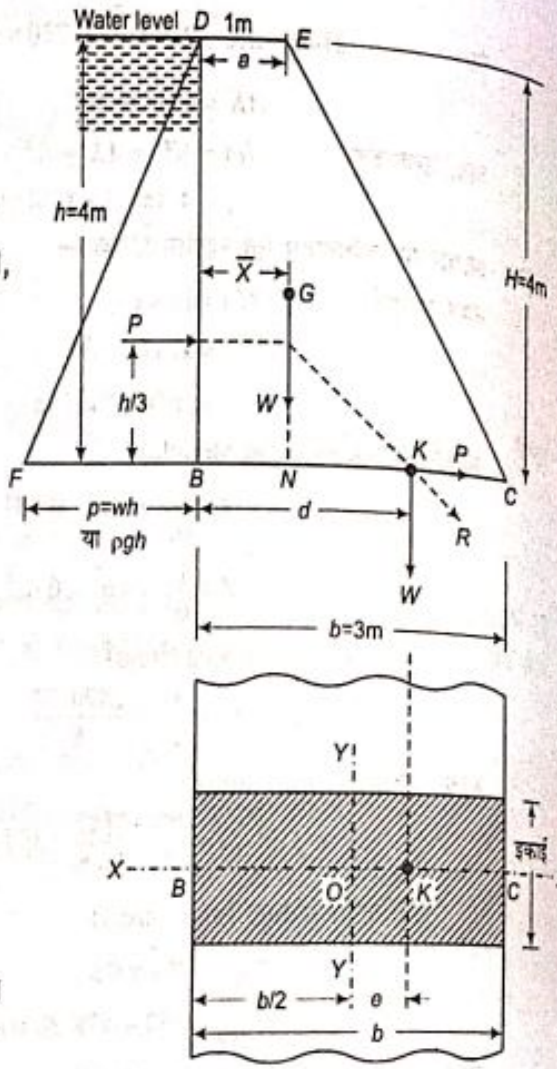
हल—प्रश्न के अनुसार चित्र 5.24 देखें।

दीवार की प्रति मीटर लम्बाई के लिए, बाँध की दीवार का भार,

$$W = (P_1 g) \times \frac{(a+b)}{2} \times H \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$= 24 \times \frac{(1+3)}{2} \times 4 \times 1$$

$$= 192 \text{ kN}$$



चित्र 5.24

भार W के क्रिया बिन्दु की खड़ी दीवार BD से दूरी,

$$\bar{X} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3(a+b)} \quad \text{सूत्र द्वारा}$$

$$= \frac{1^2 + 3^2 + (1 \times 3)}{3(1+3)} = \frac{13}{12}$$

$$= 1{\cdot}083 \text{ metre}$$

खड़ी दीवार BD पर पानी का दाब बल,

P = Mean pressure × Area

$$P = \frac{0 + wh}{2} \times (h \times 1) \Rightarrow \frac{wh^2}{2}$$

अथवा $$P = \frac{(P \times g) \times h^2}{2} \qquad \text{(सूत्र)}$$

(Force of Pressure) $$P = \frac{10 \times 4^2}{2} = 80 \text{ kN}$$

बाँध के B पर आघूर्ण लेने पर (वैरिगनॉन प्रमेय द्वारा

∴ बलों का B पर घूर्णों का योग

= परिणामी (Resultant) R के अवयवों का B पर घूर्ण

$$\therefore \quad P \times \frac{h}{3} + W \times \bar{x} = P \times 0 + W \times BK$$

$$\therefore \quad 80 \times \frac{4}{3} + 192 \times 1{\cdot}083 = 0 + 192 \times BK$$

$$\therefore \quad BK \Rightarrow d = \frac{314{\cdot}6}{192} = 1{\cdot}6385 = 1{\cdot}64 \text{ metre}$$

Scanned with CamScanner

भार W की उत्केन्द्रता (eccentricity),

$$e = BK - \frac{b}{2}$$

$$e = 1{\cdot}64 - \frac{3}{2} = 0{\cdot}14 \text{ m}$$

$\therefore$ नमन घूर्ण (Bending Moment),

$$M = W \times e = 192 \times 0{\cdot}14 = 26{\cdot}88 \text{ kN-m}$$

अब $$Z = \frac{I}{y} = \frac{\frac{1 \times b^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{1}{6} \times b^2 = \frac{1}{6} \times 3^2 = 1{\cdot}5 \text{ m}^3$$

$\therefore$ अधिकतम नमन प्रतिबल (max. bending stress),

$$f_b \text{ या } \sigma_b = \frac{M}{Z} = \frac{26{\cdot}88}{1{\cdot}5} = 17{\cdot}92 \text{ kN/m}^2$$

तथा सीधा प्रतिबल (Direct stress),

$$f_d \text{ या } \sigma_d = \frac{W}{1 \times b} \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$f_d \text{ या } \sigma_d = \frac{192}{1 \times 3} = 64 \text{ kN/m}^2$$

डैम के आधार पर अधिकतम प्रतिबल (max. stress),

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$\sigma_{max} = 64 + 17{\cdot}92 = 81{\cdot}92 \text{ kN/m}^2 \qquad \text{उत्तर}$$

तथा आधार पर न्यूनतम प्रतिबल (minimum stress),

$$\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b \qquad \text{(सूत्र)}$$

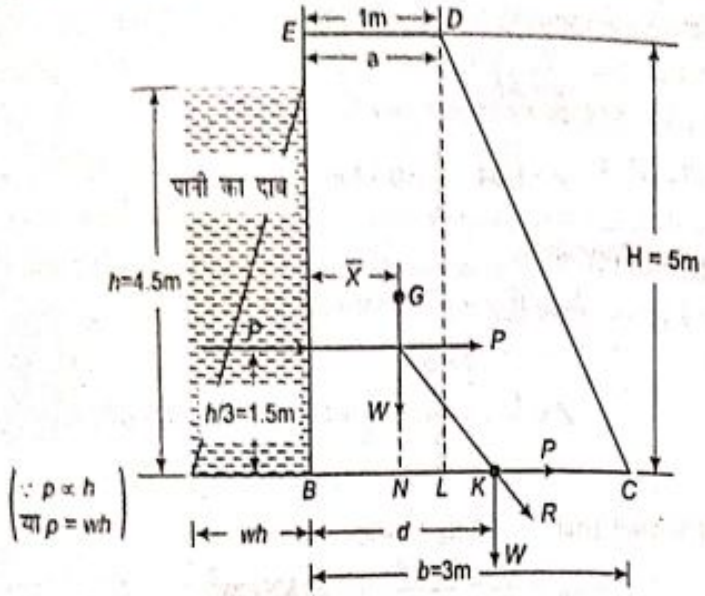
$$\sigma_{min} = 64 - 17{\cdot}92 = 46{\cdot}08 \text{ kN/m}^2 \qquad \text{उत्तर}$$

ये अधिकतम तथा न्यूनतम दोनों प्रतिबल सम्पीडन (compression) के होंगे।

उदाहरण 25. एक चिनाई बाँध 5 m ऊँचा, 1 m चौड़ा शिखर पर तथा 3·0 m चौड़ा आधार पर है। ऊर्ध्वाधर फलक की तरफ 4·5 m गहराई तक पानी भरा हुआ है। बाँध के आधार पर अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल तीव्रता ज्ञात कीजिये। यदि चिनाई तथा पानी का घनत्व क्रमश: 22·4 kN/m^3 और 10 kN/m^3 हो। [U.P. 2004]

हल—दीवार की काट चित्र 5.25 में प्रदर्शित की गई है।

Scanned with CamScanner



चित्र 5.25

दीवार की इकाई लम्बाई का भार,

$$W = \rho_1 g \times \left[\frac{(a+b)}{2} \times H \times 1\right]$$

∴ दीवार का भार, $$W = 22{\cdot}4 \times \left[\frac{(1+3)}{2} \times 5 \times 1\right] = 224\,\text{kN}$$

आधार पर सीधा प्रतिबल (Direct stress)

$$f_d \text{ या } \sigma_d = \frac{W}{A} = \frac{W}{b \times 1} = \frac{224}{3 \times 1} = 74{\cdot}66\,\text{kN/mm}^2$$

दीवार पर पानी का दबाव बल (Resultant Pressure Force on Wall)

$$P = \frac{wh^2}{2} \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$P = \frac{10 \times 4{\cdot}5^2}{2} = 101{\cdot}25\,\text{kN}$$

प्रथम विधि

दीवार की काट का गुरुत्व केन्द्र (G) की BE से दूरी निकालने के लिये D से आधार रेखा BC पर लम्ब खींचकर काट को दो भागों, एक आयत $BEDL$ तथा त्रिभुज DLC में विभक्त करने पर,

$$\bar{X} = \frac{A_1X_1 + A_2X_2}{(A_1 + A_2)}$$

$$= \frac{(5 \times 1) \times 0{\cdot}5 + \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 5\right) \times \left(1 + \frac{2}{3}\right)}{(5 \times 1) + \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 5\right)}$$

$$= \frac{2{\cdot}5 + 8{\cdot}333}{10} = \frac{10{\cdot}833}{10} = 1{\cdot}0833\,\text{m}$$

Scanned with CamScanner

द्वितीय विधि

सूत्र $$\bar{x} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3(a+b)}$$ से

$$= \frac{1 + 1 \times 3 + 9}{3(1+3)} = 1{\cdot}0833 \text{ m}$$

अब बलों के B पर घूर्णों का योग = परिणामी R के अवयवों का B पर घूर्णों का योग

$$\therefore \quad P \times \frac{h}{3} + W \times \bar{x} = P \times 0 + W \times BK$$

या $$101{\cdot}25 \times \frac{4{\cdot}5}{3} + 224 \times 1{\cdot}0833 = 224 \times BK$$

$$\therefore \quad BK = \frac{394{\cdot}5342}{224} = 1{\cdot}7613 \text{ m}$$

अब आधार के केन्द्र से परिणामी के बिन्दु K की दूरी उत्केन्द्रता (e) है।

$$\therefore \quad e = BK - \frac{b}{2} = 1{\cdot}7613 - 1{\cdot}5 = 0{\cdot}2613 \text{ m}$$

∴ नमन घूर्ण (Bending Moment),

$$M = W \times e \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$M = 224 \times 0{\cdot}2613 = 58{\cdot}5312 \text{ kN-m}$$

∵ आकृति मापांक (Section Modulus),

$$Z = \frac{I}{y} = \frac{\frac{1 \times b^3}{12}}{\frac{b}{2}} = \frac{b^2}{6} \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$\therefore \quad Z = \frac{1}{6} \times 3^2 = \frac{9}{6} = 1{\cdot}5 \text{ m}^3$$

∴ नमन प्रतिबल (bending stress),

$$f_b \text{ या } \sigma_b = \frac{M}{Z} \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$f_b \text{ या } \sigma_b = \frac{58{\cdot}53}{1{\cdot}5} = 39{\cdot}02 \text{ kN/m}^2$$

अत: आधार पर अधिकतम प्रतिबल (max. stress)

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$= 74{\cdot}66 + 39{\cdot}02 = 113{\cdot}68 \text{ kN/m}^2 \text{ (सम्पीडन-compressive)} \qquad \text{उत्तर}$$

तथा न्यूनतम प्रतिबल (minimum stress),

$$\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$= 74{\cdot}66 - 39{\cdot}02 = 35{\cdot}64 \text{ kN/m}^2 \text{ (सम्पीडन)} \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 24. चिनाई की एक दीवार की ऊँचाई 7 मीटर है और इसकी काट समलम्ब चतुर्भुजीय (Trapezoidal Quadrilateral) है जिसकी ऊपरी किनार 0·6 मी० तथा निचली 2·5 मी० चौड़ी है। इसकी एक साइड ऊर्ध्वाधर है। इसके द्वारा रोके गये पदार्थ के कारण ऊपरी किनारे पर पार्श्व दाब शून्य से निचले किनारे पर 25 कि० न्यूटन/मी^{2} तक बदलता है। यदि चिनाई का भार 24 कि० न्यूटन/मी^{3} हो तो दीवार के आधार पर अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल तीव्रतायें ज्ञात कीजिये।

Scanned with CamScanner

हल—चित्र 5.26 में दीवार पर बल दिखाये गये हैं।

दीवार की प्रति मीटर लम्बाई के लिए,

दीवार का भार,

$$W = \rho_1 g \frac{(0{\cdot}6+2{\cdot}5)}{2} \times 7 \times 1$$

$$= 24 \times 1{\cdot}55 \times 7$$

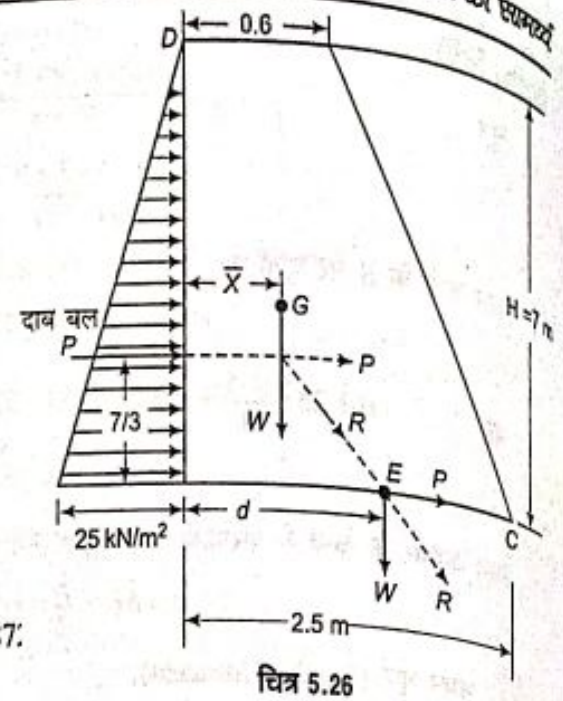
$$= 260{\cdot}4 \text{ kN}$$

प्रथम विधि से,

$$\bar{X} = \frac{a^2+b^2+ab}{3(a+b)} \quad \text{सूत्र से}$$

W के क्रिया बिन्दु की BD से दूरी,

$$\bar{X} = \frac{0{\cdot}6^2+2{\cdot}5^2+0{\cdot}6\times2{\cdot}5}{3(0{\cdot}6+2{\cdot}5)} = \frac{8{\cdot}11}{9{\cdot}3} = 0{\cdot}87.$$



चित्र 5.26

तथा दूसरी विधि से

$$\bar{x} = \frac{(0{\cdot}6\times7)\frac{0{\cdot}6}{2} + \frac{1}{2}(2{\cdot}5-0{\cdot}6)\times7\times\left[\frac{(2{\cdot}5-0{\cdot}6)}{3}+0{\cdot}6\right]}{0{\cdot}6\times7+\frac{1}{2}(2{\cdot}5-0{\cdot}6)\times7} = 0{\cdot}87 \text{ m}$$

दीवार पर पार्श्व बल, P = औसत दाब × क्षेत्रफल

$$= \frac{(0+25)}{2}\times7\times1 = 87{\cdot}5 \text{ kN}$$

अब B पर घूर्ण लेने से (चित्र के अनुसार)

बलों के B पर घूर्णों का योग = परिणामी R के अवयवों के B पर घूर्णों का योग

$$\therefore \quad P\times\frac{7}{3} + W\bar{x} = P\times0 + W\times d$$

या $$87{\cdot}5\times\frac{7}{3} + 260{\cdot}4\times0{\cdot}87 = 260{\cdot}4\times d$$

$$\therefore \quad d = \frac{204{\cdot}17+226{\cdot}55}{260{\cdot}4} = 1{\cdot}654 \text{ m}$$

$\therefore$ W की उत्केन्द्रता (eccentricity)

$$e = d - \frac{2{\cdot}5}{2} = 1{\cdot}654 - 1{\cdot}25$$

$$= 0{\cdot}404 \text{ m}$$

$\therefore$ नमन घूर्ण (B.M.), $M = W\times e = 260{\cdot}4\times0{\cdot}404$

$$= 105{\cdot}2 \text{ kN-m}$$

अब आकृति मापांक, $Z = \frac{I}{y} = \frac{1\times2{\cdot}5^3}{12}\times\frac{2}{2{\cdot}5}$ [अथवा $Z = \frac{b^2}{6}$ सूत्र]

$$= 1{\cdot}042 \text{ m}^3$$

Scanned with CamScanner

अब अधिकतम नमन प्रतिबल,

$$\sigma_b = f_b = \frac{M}{Z} = \frac{105{\cdot}2}{1{\cdot}042} = 100{\cdot}96 \text{ kN/m}^2$$

फिर सीधा प्रतिबल, $\sigma_d = f_d = \frac{W}{A} = \frac{260{\cdot}4}{1 \times 2{\cdot}5} = 104{\cdot}16 \text{ kN/m}^2$

$$\sigma_{\text{अधि०}} = f_d + f_b = 104{\cdot}16 + 100{\cdot}96 = 205{\cdot}12 \text{ kN/m}^2 \text{ (संपीडन)}$$

$$\sigma_{\text{न्यू०}} = f_d - f_b = 104{\cdot}16 - 100{\cdot}96 = 3{\cdot}2 \text{ kN/m}^2 \text{ (संपीडन)}$$ उत्तर

उदाहरण 25. एक समलम्बाकार चिनाई बाँध (Trapezoidal masonry dam) 4 m ऊँचा, शीर्ष पर 1 m चौड़ा तथा आधार पर 3 m चौड़ा है। बाँध के ऊर्ध्वाधर फलक (Vertical face) पर पानी रुका हुआ है। बाँध के आधार पर अधिकतम व न्यूनतम प्रतिबल ज्ञात करें जब—

(i) जलाशय (Reservoir) जल से भरा हुआ है, (ii) जलाशय खाली है। चिनाई का इकाई भार 20 kN/m^3 है। **[U.P. 2002, U.K. 2006]**

हल—(i) जब जलाशय जल से पूर्ण भरा है। (माना पानी का भार 10 kN/m^3 है)।

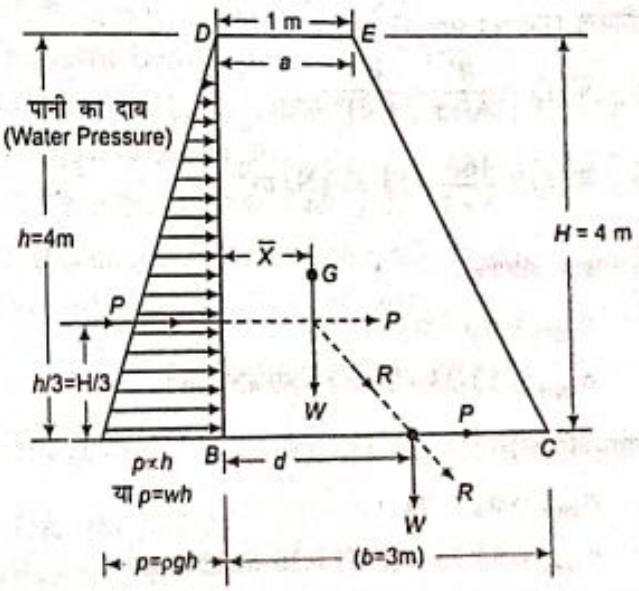
बाँध की दीवार की प्रति मीटर लम्बाई में दीवार का भार,

$$W = \rho_1 g \times \frac{(a+b)}{2} \times H \times 1$$ (सूत्र)

$$W = 20 \times \frac{(1+3)}{2} \times 4 \times 1 = 160 \text{ kN}$$

∴ भार W के क्रिया बिन्दु की BD से दूरी

$$X = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3(a+b)}$$ सूत्र से



चित्र 5.25

$$= \frac{1^2 + 3^2 + (1 \times 3)}{3(1+3)} = \frac{13}{12} = 1{\cdot}083 \text{ m}$$

Scanned with CamScanner

दीवार पर पानी दाब का परिणामी बल

$$P = \text{औसत दाब} \times \text{क्षेत्रफल}$$

$$P = \left[\frac{0+10}{2}\right] \times 4 \times 1 = 20\ \text{kN}$$

∵ B पर बलों के घूर्णों का योग = परिणामी R के अवयवों का B पर घूर्णों का योग।

$$P \times \frac{H}{3} + W.\bar{x} = P \times 0 + W \times d$$

या $$20 \times \frac{4}{3} + 160 \times 1{\cdot}083 = 160 \times d$$

या $$d = \frac{199{\cdot}95}{160} = 1{\cdot}2496 = 1{\cdot}25\ \text{metre}$$

अब $e = d \sim \frac{b}{2}$ सूत्र से,

उत्केन्द्रता (eccentricity), $e = 1{\cdot}25 \sim 1{\cdot}5$

$= 0{\cdot}25$ meter

∴ नमन घूर्ण (B.M.), $M = W \times e$ (सूत्र)

$$M = 160 \times 0{\cdot}25 = 40\ \text{kN-m}$$

$$Z = \frac{I}{y} = \frac{b^2}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1{\cdot}5\ \text{m}^3$$

∴ नमन प्रतिबल (bending stress)

$$\sigma_b = \frac{M}{Z} = \frac{40}{1{\cdot}5} = 26{\cdot}67\ \text{kN/m}^2$$

∵ आधार पर सीधा प्रतिबल (Direct stress),

$$\sigma_d \text{ या } f_d = \frac{W}{\text{Area}} = \frac{W}{b \times 1}$$ (सूत्र)

∴ $$\sigma_d \text{ या } f_d = \frac{160}{3 \times 1} = 53{\cdot}33\ \text{kN/m}^2$$

अत: अधिकतम प्रतिबल (max. stress),

$$\sigma_{max} = \sigma_d + \sigma_b$$

∴ $$\sigma_{max} = 53{\cdot}33 + 26{\cdot}67 = 80\ \text{kN/m}^2$$ (सम्पीडन) उत्तर

तथा न्यूनतम प्रतिबल (min. stress),

$$\sigma_{min} = \sigma_d - \sigma_b$$

$$\sigma_{min} = 53{\cdot}33 - 26{\cdot}67 = 26{\cdot}66\ \text{kN/m}^2$$ (सम्पीडन में) उत्तर

(ii) जब जलाशय खाली है।

अब पानी दाब बल, $P = 0$ होगा।

B पर आघूर्ण लेने से, $W.\bar{X} = w \times d$

या $$d = \bar{X} = 1{\cdot}083\ \text{metre}$$

Scanned with CamScanner

$$e = d \sim \frac{b}{2} = \frac{b}{2} - d = 1{\cdot}5 - 1{\cdot}083 = 0{\cdot}417 \text{ m}$$

$$\therefore \quad M = W \times e = 160 \times 0{\cdot}417 = 66{\cdot}72 \text{ kN-m}$$

$$\sigma_b \text{ या } f_b = \frac{M}{Z} = \frac{66{\cdot}72}{1{\cdot}5} = 44{\cdot}48 \text{ kN/m}^2$$

अधिकतम प्रतिबल $(\sigma_{max}) = \sigma_d + \sigma_b$

$= 53{\cdot}33 + 44{\cdot}48 = 97{\cdot}81 \text{ kN/m}^2$ उत्तर

न्यूनतम प्रतिबल $(\sigma_{min}) = \sigma_d - \sigma_b$

$= 53{\cdot}33 - 44{\cdot}48 = 8{\cdot}85 \text{ kN/m}^2$ उत्तर

अभ्यास (Exercises)

1. निम्न रिक्त स्थानों की पूर्ति उचित शब्दों से कीजिये—

Fill up the blanks in following statements—

(a) 'b' चौड़ाई एवं 'd' गहराई की आयताकार काट (Rectangular section) का आकृति मापांक (Section modulus) ..... होता है। **[U.K. 2012 (S), 2013 (Sp. B.P.)]**

(b) यदि पानी का आ० भार (sp. wt.) 'w' तथा ऊँचाई 'h' हो तो ऊर्ध्वाधर दीवार पर प्रति मीटर लम्बाई पर पड़ने वाला दाब (Pressure per metre length on a vertical wall) ..... होगा। **[U.K. 2012, (S), 2013 (Sp. B.P.)]**

(c) वक्र सतहों (curved surfaces) की चिमनी की दीवार के लिए वायु प्रतिरोध गुणांक (coefficient of wind resistance) ..... से कम होती है।

(d) जंजीर की कड़ियों पर ..... भार लगते हैं।

(e) उत्केन्द्रीय भार (Eccentric Load) अवयव (अथवा कॉलम) की अक्ष के ..... होते हैं।

(f) वायु प्रतिरोध गुणांक ..... सतहों पर वायु दाब बल को ज्ञात करने के लिए प्रयोग करते हैं।

(g) वक्र सतहों के लिये वायु-दाब का बल, P = ... सूत्र होता है जबकि चिमनी का व्यास d, ऊँचाई h, वायु प्रतिरोध गुणांक c तथा वायु दाब तीव्रता p है।

(h) यदि नमन प्रतिबल (bending stress) f_b तथा सीधा प्रतिबल (direct stress) f_d हो तो प्रतिबलों का उत्क्रमण (Reversal of stresses) न होने देने के लिए प्रतिबन्ध ..... सन्तुष्ट होना चाहिये।

रिक्त स्थानों के उत्तर

(a) $\frac{bd^2}{6}$, (b) $\frac{(0 + wh)}{2} \times (h \times 1) = \frac{wh^2}{2}$, (c) एक (1), (d) उत्केन्द्रीय (eccentric), (e) समान्तर (parallel), (f) वक्र (curved), (g) $c.p.d.h$, (h) $f_b \leq f_d$.

2. सत्य/असत्य (True/False) बताइए—

(a) जब कोई भार, अंग अथवा कॉलम (member or column) की अक्ष के समान्तर तथा उससे कुछ दूरी हट कर क्रिया करता है तो वह उत्केन्द्रीय भार (eccentric load) कहलाता है।

(b) किसी अवयव के अक्ष से जितनी दूरी हट कर कोई भार क्रिया करता है, वह दूरी उस भार की उत्केन्द्रता (eccentricity) 'e' कहलाती है। **[U.K. 2007 (W)]**

Scanned with CamScanner

(c) जंजीर की कड़ियों पर अक्षीय भार लगता है। [U.K. 2007 (W)]

(d) यदि पानी का आ० भार (sp. wt.) 'w' तथा ऊँचाई 'h' हो तो ऊर्ध्वाधर दीवार पर प्रति मीटर लम्बाई पर पड़ने वाला दाब, $P = \frac{wh^2}{2}$ होता है।

[U.K. 2012 (S), 2013 (Sp. B.P.)]

(e) 'b' चौड़ाई एवं 'd' गहराई की आयताकार काट का आकृति मापांक (Section modulus) $Z = \frac{bd^2}{6}$ होता है।

[U.K. 2012 (S), 2013 (Sp. B.P.)]

(f) 'd' व्यास की काट का आकृति मापांक (Section Modulus) $Z = \frac{\pi d^3}{32}$ होता है।

(g) वक्र सतहों के लिए वायु प्रतिरोध गुणांक (Coefficient of wind resistance for the curved surfaces) 'c' का मान 1 से कम होता है। [U.K. 2009 (S)]

(h) चिमनी की वक्र सतह के लिए वायु-दाब का बल, $P = c \, . \, p \, . \, d \, . \, h$ होता है, जहाँ p = दाब तीव्रता, d = चिमनी की वक्र सतह का व्यास तथा h = चिमनी की ऊँचाई है।

(i) भुजाओं $b \times d$ की आयताकार काट (Rectangular section) के गु० केन्द्र (G) से जाने वाली अक्षों पर भुजाओं के समान्तर मध्य में (Parallel to sides at middle of section) उत्केन्द्रीय बल (eccentric load) की भुजाओं की एक-तिहाई दूरी (जैसे $\frac{b}{3}$ तथा $\frac{d}{3}$) की सीमा तक हटाने पर प्रतिबलों का उत्क्रमण (reversal of stresses) नहीं होता है, इसी को माध्य तिहाई नियम (middle third rule) कहते हैं।

(j) जब किसी अनुप्रस्थ काट के एक किनारे पर प्रतिबल (+ ve) से अथवा संपीडन (compression) से कम होते हुए दूसरे किनारे पर (– ve) या तनाव (Tensile) वाला हो जाता है तो इसे प्रतिबलों का उत्क्रमण (reversal of stresses) कहते हैं।

सत्य/असत्य का उत्तर

सत्य (True)—(a), (b), (d), (e), (f), (g), (h), (i), (j)

असत्य (False)—(c)

3. उत्केन्द्रीय भार (eccentric load) से क्या तात्पर्य है? एक छोटे स्तम्भ (Short column) पर उत्केन्द्रीय भार के प्रभाव क्या होते हैं? [U.P. 2013; U.K. 2013 (S)]

4. उत्केन्द्रित भार क्या है? एक आयताकार काट के लिये उत्केन्द्रता (eccentricity) 'e' की सीमा ज्ञात कीजिये। [U.K. 2012, (S), 2013 (Sp. B.P.)]

5. (i) अक्षीय भारित (Axial Loaded) तथा उत्केन्द्रीय भारित (Eccentric loaded) स्तम्भ (column) के बीच अन्तर बताइये। [U.P. 2004]

(ii) उत्केन्द्रीय भार के प्रभावों (effects of eccentric load) को समझाइये।

6. उत्केन्द्रित भारित कुछ अंगों के उदाहरण दीजिए तथा बताइये कि उत्केन्द्रित भार से किसी अंग में किस प्रकार के प्रतिबल उत्पन्न होते हैं? प्रतिबलों के उत्क्रमण न होने का प्रतिबन्ध समझाइये।

7. उत्केन्द्रित भारण (Eccentric loading) में प्रतिबलों के उत्क्रमण (reversal of stresses) से आप क्या समझते हैं? प्रतिबल के उत्क्रमण न होने की क्या शर्त होती है? इसको प्रतिबल आरेखों (stress diagrams) की सहायता से स्पष्ट समझाइये।

8. माध्य तिहाई नियम (middle third rule) की व्याख्या कीजिये। [U.P. 2005, 2010, 2014; U.K. 2007 (W)]

9. ढलवाँ लोहे के एक छोटे स्तम्भ पर जिसका व्यास 'd' है, एक उत्केन्द्री भार (eccentric load) लगाया गया है। भार की अधिकतम उत्केन्द्रता (e) क्या होनी चाहिए जिससे इसके आधार परिच्छेद पर तनन प्रतिबल (tensile stress) न उत्पन्न हो?

[उत्तर : $e = \frac{d}{8}$ होनी चाहिये।] [U.P. 2012]

Scanned with CamScanner

10. 600 mm × 600 mm काट के एक लघु स्तम्भ (short column) पर केन्द्रीय अनुदैर्घ्य अक्ष (Centroidal longitudinal axis) से 80 mm की दूरी पर 1000 kN का एक उत्केन्द्रित बिन्दु भार (eccentric point load) लग रहा है। अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल ज्ञात करें। **[U.P. 2004]**

[उत्तर : 5 N/mm^2 सम्पीडन, 0·555 N/mm^2 सम्पीडन**]**

11. चार मीटर (4 m) लम्बाई की एक खोखली काट (Hollow section) बाहर से 300 mm × 600 mm तथा अन्दर से 250 mm × 450 mm है। इसकी 600 mm भुजा के समान्तर (Parallel) तथा केन्द्र से जाने वाली अक्ष पर केन्द्र से 200 mm की दूरी पर 1500 kN का एक भार लगा है। कॉलम में उत्पन्न अधिकतम तनाव तथा संपीडन प्रतिबल ज्ञात कीजिए। **[U.K. 2012-13 (W), 2013 (S)]**

संकेत : उदा० 1 देखें **[उत्तर :** σ_{max} = 47·925 N/mm^2 compressive, σ min = 3·48 N/mm^2, Tensile**]**

12. एक 40 mm भुजा वाली वर्गाकार काट (Square section) की छड़ को लम्बाई की दिशा में 40 kN के बल द्वारा खींचा गया है। भार की रेखा किसी एक ज्यामिति अक्ष (Centroidal Axis) से 14 mm हट जाती (deviate) है। छड़ की काट में अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल तीव्रताओं के मान तथा प्रकृति की गणना कीजिये। **[U.P. 2000; U.K. 2005]**

[उत्तर : σ_{max} = 77·5 N/mm^2 (या MPa) तनाव, σ_{min} = 27·5 N/mm^2 (सम्पीडन)**]**

13. एक खोखला गोलाकार स्तम्भ (Hollow-circular column), जिसका बाहरी व आन्तरिक व्यास (outer and internal diameters) क्रमश: 300 mm एवं 250 mm हैं, बाहरी किनारे पर 100 kN का ऊर्ध्वाधर भार (Vertical Load) वहन करता है। खण्ड में अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल तीव्रताओं के मान ज्ञात करें। (**संकेत :** उदा० 3 देखें) **[U.P. 2001; U.K. 1010 (B.P.)]**

[उत्तर : 15·56 N/mm^2, 6·3 N/mm^2**]**

14. एक ढलवाँ लोहे (C.I.) के खोखले लघु स्तम्भ पर 50 kN का भार बाहर निकले ब्रैकेट द्वारा लगाया गया है। भार, स्तम्भ की अक्ष से 300 mm की दूरी पर है। स्तम्भ का बाहरी व्यास (Outer Dia) 300 mm तथा चादर की मोटाई 25 mm है। परिच्छेद में उत्पन्न होने वाले अधिकतम और न्यूनतम प्रतिबलों के मान ज्ञात कीजिये।

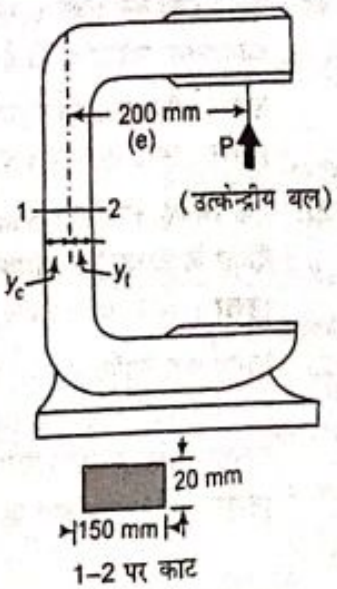
[उत्तर : 13·24 MPa संपीडन, 8·615 MPa, तनाव**]**

15. क्रेन के ऊर्ध्वाधर स्तम्भ के लिये I-काट की माप में प्रत्येक फ्लैंज की चौड़ाई 210 mm तथा I-काट की कुल गहराई 600 mm है। एक 50 kN का भार उठाते समय भार-रेखा काट के गुरुत्व केन्द्र (C.G.) से काट की गहराई 600 mm के समान्तर 3·25 m की दूरी पर है। काट में अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल तीव्रतायें (max. and min. stresses) ज्ञात कीजिये जबकि काट के लिये A = 156·21 cm^2 तथा I_{XX} = 91813 cm^4 है।

[उत्तर : 56·297 N/mm^2 compressive, 49·897 N/mm^2 (Tensile)**]**

16. चित्र 5.28 के अनुसार एक पंच मशीन के फ्रेम पर P kN का बल कार्य करता है। यदि फ्रेम के ऊर्ध्वाधर भाग में अधिकतम तनाव प्रतिबल 60 N/mm^2 हो तथा इस भाग की मोटाई 20 mm तथा चौड़ाई 150 mm हो, तो P का मान ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : P = 20 kN**]**



चित्र 5.28

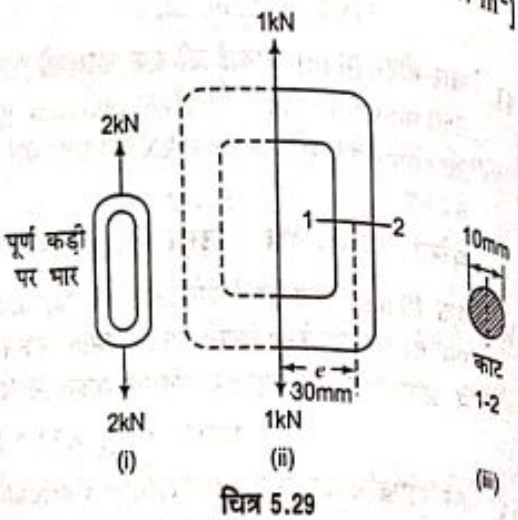
Scanned with CamScanner

17. किसी C-क्लैम्प के फ्रेम की काट 20×60 mm का आयत है। इस फ्रेम की उदासीन अक्ष (neutral axis) से स्क्रू की केन्द्र रेखा 100 mm की दूरी पर है। यदि स्क्रू पर 9·25 kN का बल हो तो फ्रेम में अधिकतम तनाव तथा संपीडन प्रतिबल ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 84·8 MN/m^2, 69·375 MN/m^2]

18. चित्र 5.29 में किसी चेन पर 2 kN का बल कार्य करता है तो इसकी कड़ी के ऊर्ध्व भाग में अधिकतम तनाव तथा संपीडन प्रतिबल ज्ञात कीजिये।

[U.P. 2004 (B.P.); U.K. 2006 (S)]

[उत्तर : 318·3125 MPa (तनाव), 292·8475 MPa (संपीडन)] नोट : [MPa = N/mm^2]

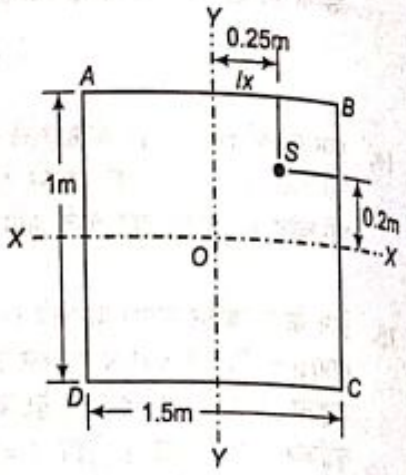


चित्र 5.29

19. चित्र 5.30 में प्रदर्शित पियर (pier) पर 450 kN का सम्पीडन भार बिन्दु S पर कार्य करता है। पियर के चारों कोनों पर प्रतिबल ज्ञात कीजिये।

[U.K. 2009 (W)]

[उत्तर : A 360 सम्पीडन, B 960 सम्पीडन, C 240 सम्पीडन, D 360 तनाव, सभी kN/m^2 में]



चित्र 5.30

20. एक चिनाई की दीवार 5·0 मी० ऊँची, 3·0 मी० चौड़ी और 1·0 मी० मोटी ठोस आयताकार परिच्छेद की है। इस पर हवा का क्षैतिज दाब 1200 न्यूटन/मी^{2}, 3 मी० चौड़ी फलक पर पड़ रहा हो तो आधार पर अधिकतम और न्यूनतम प्रतिबलों की तीव्रता ज्ञात कीजिये, यदि चिनाई का घनत्व 2240 किग्रा/मी^{3} हो। [U.P. 2000]

[उत्तर : 202 तथा 22 kN/m^2 दोनों संपीडन में]

21. एक चिनाई की दीवार 6 मी० ऊँची, 4 मी० चौड़ी एवं 1·5 मी० मोटी ठोस आयताकार परिच्छेद की है। इस पर 1500 N/m^2 मान का क्षैतिज बल 4 मी० चौड़े फलक पर लगा है। आधार पर उत्पन्न अधिकतम एवं न्यूनतम प्रतिबलों की तीव्रता ज्ञात कीजिए। चिनाई का घनत्व 22000 N/m^3 है। [U.P. 2003]

[उत्तर : 204 तथा 60 kN/m^2 (दोनों संपीडन में)]

22. एक चिनाई की दीवार 5 m ऊँची, 3 m चौड़ी और 1·5 m मोटी है। उस पर 1500 N/m^2 का वायु-दाब लगता है। दीवार के आधार पर अधिकतम और न्यूनतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये। चिनाई का घनत्व 22·4 kN/m^3 लें। [U.P. 2005]

[उत्तर : 162 तथा 62 kN/m^2]

23. चिनाई द्वारा निर्मित एक चिमनी का बाह्य व्यास 1200 mm तथा आन्तरिक व्यास 800 mm है। उसके परिच्छेद पर 125 kN का ऊर्ध्व भार तथा 14 kN-m का बंकन-आघूर्ण आरोपित है। उसकी निर्माण-सामग्री में उत्पन्न अधिकतम एवं न्यूनतम प्रतिबलों की गणना कीजिये। [U.K. 2007 (W)]

[उत्तर : 301·789 तथा 96·109 kN/m^2]

Scanned with CamScanner

24. समान वृत्ताकार काट की एक चिमनी की ऊँचाई 25 मीटर है। इसके वाह्य तथा अन्त: व्यास क्रमश: 4 मी० तथा 2 मी० हैं। चिमनी पर क्षैतिज वायु-दाब का मान 1·2 kPa प्रक्षेपित क्षेत्रफल है। यदि चिनाई का आ० भार 21 kN/m^3 हो तो चिमनी के आधार में अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : 779·6 kN/m^2, 270·4 kN/m^2, दोनों सम्पीडन में]

25. एक वर्गाकार काट की चिमनी में, जो 20 मीटर ऊँची है, 1 मीटर × 1 मीटर का द्वार बना है। चिमनी की दीवार 25 सेमी० मोटी है और इस पर हवा का क्षैतिज दबाव 2 kPa पड़ता है। अगर चिमनी की चिनाई का घनत्व 2000 किग्रा/मी^{3} हो तो चिमनी के आधार पर उत्पन्न अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये। [U.P.]

[उत्तर : 1721·66 kPa]

26. 5 m बाह्य एवं 2 m अन्त: व्यास की चिनाई की एक बेलनाकार चिमनी की ऊँचाई 20 m है। इस पर क्षैतिज वायु-दाब 1200 N/m^2 है।

यदि चिनाई का भार 22 kN/m^3 तथा वायु प्रतिरोध गुणांक $\frac{2}{3}$ हो तो चिमनी के आधार पर अधिकतम प्रतिबल ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 506·89 kN/m^2]

27. Determine the maximum and minimum stresses at the base of a hollow circular chimney of height 20 m with external diameter 4 m and internal diameter 2 m. The chimney is subjected to a horizontal wind pressure of intensity 1 kN/m^2. The sp. wt. of the material of the chimney is 22 kN/m^3; take coefficient of wind pressure = 2/3.

एक खोखली वृत्ताकार चिमनी के आधार पर अधिकतम एवं निम्नतम प्रतिबल ज्ञात कीजिए जबकि चिमनी की ऊँचाई 20 मीटर बाह्य तथा आन्तरिक व्यास क्रमश: 4 मीटर तथा 2 मीटर है। चिमनी पर 1 kN/m^2 की तीव्रता का वायु दाब लग रहा है। चिमनी के पदार्थ का घनत्व 22 kN/m^3 है। वायु दाब गुणांक $=\frac{2}{3}$ मानिये।

(संकेत : उदाहरण 16 देखें) [U.K. 2012 (S), U.K. special B.P. 2013]

[उत्तर : 530·38 kN/m^2, 349·41 kN/m^2, compressive both]

28. A masonry Trapezoidal dam 4 m height, 1 m wide at its top and 3 m wide at its base, retains water on its vertical face. Determine the maximum and minimum stresses at the base when the reservoir is full. Take specific weight of water as 10 kN/m^3; and that of masonry as 24 kN/m^3.

एक समलम्ब चतुर्भुज आकार आकृति वाले मेसोनरी बाँध की ऊँचाई 4 मीटर तथा सिर पर चौड़ाई 1 मीटर तथा आधार पर चौड़ाई 3 मीटर है। यह अपने ऊर्ध्वाधर तल पर पानी को रोकता है। डैम के आधार पर अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल ज्ञात कीजिए जबकि डैम पूर्ण रूप से भरा है। पानी का विशिष्ट भार 10 kN/m^3 तथा चिनाई का विशिष्ट भार 24 kN/m^3 लीजिए। (संकेत : उदाहरण 22 देखें) [U.K. 2012 (S), U.K. Sp. B.P. 2013]

[उत्तर : 81·92 kN/m^2, 46·08 kN/m^2; दोनों compressive]

29. एक समलम्बाकार चिनाई बाँध 4 m ऊँचा, शीर्ष पर 1 m चौड़ा तथा आधार पर 3 m चौड़ा है। बाँध के ऊर्ध्वाधर फलक पर पानी रुका हुआ है। बाँध के आधार पर अधिकतम व न्यूनतम प्रतिबल ज्ञात करें जब—

(अ) जलाशय भरा हुआ है (ब) जलाशय खाली है। चिनाई का इकाई भार 20 kN/m^3 लें। (संकेत : उदाहरण 25 देखें)

[उत्तर : (अ) 78·613 तथा 28·053 kN/m^2 (ब) 97·813 तथा 8·853 kN/m^2] [U.P. 2002]

30. एक चिनाई बाँध 5 m ऊँचा, 1 m चौड़ा शिखर पर तथा 3 m चौड़ा आधार पर है। ऊर्ध्वाधर फलक की तरफ 4·5 m गहराई तक पानी भरा हुआ है। बाँध के आधार पर अधिकतम और न्यूनतम प्रतिबल तीव्रता ज्ञात कीजिये यदि चिनाई तथा पानी का घनत्व क्रमश: 2240 kg/m^3 और 1000 kg/m^3 हो। [U.P.]

[उत्तर : 111·528, 34·968 kN/m^2; दोनों संपीडन में]

Scanned with CamScanner

31. एक समलम्बाकार (Trape zoidal) कंक्रीट के बाँध की दीवार 9 m ऊँची है तथा इसके ऊर्ध्वाधर फेस की तरफ 7 m ऊँचाई तक पानी भरा है। दीवार की काट ऊपरी सतह पर 3 m तथा निचली सतह पर 5 m चौड़ी है। आधार पर अधिकतम तथा न्यूनतम प्रतिबल तीव्रता ज्ञात कीजिये। पानी का घनत्व 10 kN/m^3 तथा कंक्रीट का घनत्व 22·4 kN/m^3 है।

[उत्तर : 209·7 kN/m^2, 112·85 kN/m^2, दोनों संपीडन]

32. चिनाई का एक बाँध 5 मी० ऊँचा तथा समलम्ब चतुर्भुजीय काट वाला है जिसकी ऊपरी किनार 1 मी तथा निचली 3 मी० चौड़ी है। इसकी पानी की ओर वाली सतह ऊर्ध्वाधर है और पानी की गहराई 4 मी० है। यदि चिनाई का घनत्व 2283·38 kg/m^3 एवं पानी का भार 10 kN/m^3 हो तो बाँध के आधार में उपजी अधिकतम एवं न्यूनतम प्रतिबल तीव्रतायें ज्ञात कीजिये।

[उत्तर : 83·48, 65·86 kN/m^2; दोनों संपीडन में]

33. एक चिनाई की दीवार 6 मी० ऊँची, 4 मी० चौड़ी एवं 1·5 मीटर मोटी ठोस आयताकार परिच्छेद की है। इस पर 1500 N/m^2 का क्षैतिज बल 4 मीटर चौड़ी फलक पर लगा है। आधार पर उत्पन्न अधिकतम एवं न्यूनतम प्रतिबलों की तीव्रता ज्ञात कीजिये। चिनाई का घनत्व 22 kN/m^3 है।

[उत्तर : 204 kN/m^2, 60 kN/m^2]

Scanned with CamScanner

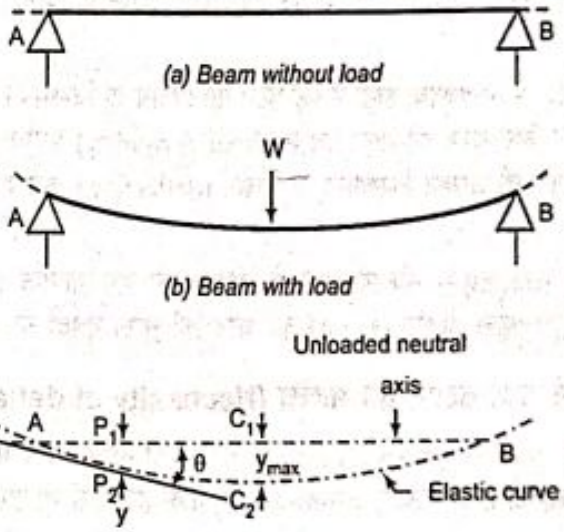
6 ढलान एवं विक्षेप या विस्थापन (SLOPE AND DEFLECTION)

§ 6.1 परिचय (Introduction)

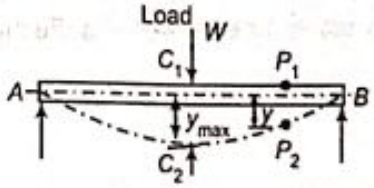
हम जानते हैं कि जब किसी धरन (beam) या एक कैन्टीलीवर पर उसकी अनुदैर्घ्य अक्ष (longitudinal axis) के लम्बवत् भार या बल लगाये जाते हैं तो उस धरन (beam) कैन्टीलीवर (cantilever) में नीचे की ओर झुकाव (bending) होता है, जिससे उसकी अनुदैर्घ्य अक्ष (longitudinal axis) अपनी मूल स्थिति (initial position) से वक्र रूप (curved shape) में विक्षेपित (deflected) हो जाती है। इसे धरन की अक्ष का वृत्त के चाप में मुड़ना अथवा वृत्तीय नमन (circular bending) कहते हैं। इसे धरनों का विरूपण (deformation of beams) भी कहते हैं

6.1.1 विक्षेप या विस्थापन तथा ढलान (Deflection and Slope)

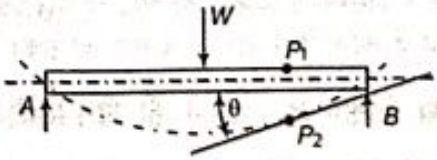
जब धरन (beam) की क्षैतिज अक्ष (horizontal axis) पर भार या बल ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर (vertically downwards) लगाते हैं तो इस दशा (condition) में धरन में नमन आघूर्ण (bending moment) उत्पन्न होता है और इस नमन आघूर्ण के कारण धरन (beam) बल के कार्य करने की दिशा में झुक जाती है और उसकी अक्ष वक्र रूप (curved shape) में हो जाती है। जैसे चित्र 6.1 में दिखाया गया है। इस स्थिति में धरन पर स्थित विभिन्न बिन्दु पहली अवस्था से ऊर्ध्व (vertical) नीचे आ जाते हैं। किसी बिन्दु की दोनों स्थितियों के बीच Vertical Distance को विक्षेप कहते हैं।



चित्र 6.1



चित्र 6.2



चित्र 6.3

निष्कर्ष (Conclusion)

(A) विक्षेप या विस्थापन (Deflection)—"धरन की अनुदैर्घ्य अक्ष (longitudinal axis of beam) पर स्थित किसी बिन्दु की, धरन पर भार लगने से पूर्व एवं पश्चात् वाली स्थितियों (P_1, P_2) के बीच ऊर्ध्वाधर दूरी (vertical distance) y को उस बिन्दु पर धरन का विक्षेप या विस्थापन (deflection) कहते हैं।"

Scanned with CamScanner

इसे mm में दर्शाते हैं। क्षैतिज अक्ष (horizontal axis) से नीचे की ओर मापा गया विक्षेप धनात्मक (+ve) तथा ऊपर की ओर मापा गया विक्षेप ऋणात्मक (–ve) माना जाता है।

Definition : "The deflection 'y' is vertical distance between two positions of a point on the elastic curve of the axis of beam and unloaded neutral axis." It is measured in mm, and denoted by 'y'. We take (+ve) for downward and (–ve) for upwards deflection from horizontal axis of beam.

(B) ढलान (Slope)—"भारित धरन (loaded beam) की विक्षेपित अवस्था (deflected form) में बने वक्र रूप के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा (tangent), क्षैतिज अक्ष से जो कोण (angle) बनाती है, उसे उस बिन्दु पर धरन का ढलान (slope) कहते हैं।" इसे θ से दर्शाते हैं। क्षैतिज से clockwise घूमकर मापा गया कोण 'θ' (+ve) तथा anticlockwise दिशा में घूमकर मापा गया कोण 'θ' को (–ve) लिया जाता है। ढलान को रेडियन में मापा जाता है तथा डिग्री में प्रदर्शित किया जा सकता है।

Definition : "Angle made (subtended) by the tangent drawn at any point of elastic curve of the axis with the unloaded neutral axis of beam, is called slope of the beam at that point." It is measured in radian and is represented by 'θ' ". Angle measured in clockwise direction with horizontal, we take (+ve) and towards anticlockwise direction, we take (–ve) for angle θ.

6.1.2 धरन की सामर्थ्य (Strength of Beam)

किसी धरल की सामर्थ्य, उसकी प्रत्येक काट पर कर्तन बल (shear force) तथा नमन आघूर्ण (bending moment) सहने की क्षमता (capacity) पर निर्भर करती है, जिसके लिए कर्तन एवं नमन प्रतिबलों (shear and bending stresses) की सीमा निर्धारित करते हैं।

उपरोक्त के साथ-साथ यह भी आवश्यक होता है कि धरन का विक्षेप या विस्थापन प्रत्यास्थता की सीमा से अधिक न हो पाये और इसे नियन्त्रित करने के लिए धरन की नमन दृढ़ता (flexural rigidity) पर्याप्त होनी चाहिये क्योंकि धरन में जितनी अधिक नमन दृढ़ता होती है, उतना ही उसका विस्थापन या विक्षेप (deflection) कम होता है, जिसके कारण धरन असफल (fail) नहीं हो पाती है।

नमन दृढ़ता (Flexural Rigidity)—किसी धरन के पदार्थ का यंग मापांक E तथा उसकी काट का जड़तात्घूर्ण (moment of inertia) I के गुणनफल अर्थात् (E × I) को धरन की नमन दृढ़ता या कड़ापन (stiffness) कहते हैं।

6.1.3 विक्षेप या विस्थापन तथा ढलान का महत्त्व (Necessity of deflection and slope)

जब धरन (beam), छतों (roofs), पुलों (bridges) तथा मशीन का आधार रूप में प्रयोग की जाती है तो उस धरन का विक्षेप निर्धारित सीमा से अधिक नहीं होना चाहिये अन्यथा उस पर टिके हुए फर्श या छत तथा पुल (bridge) आदि असफल (fail) हो सकते हैं।

मशीन के आधार रूप में प्रयोग की गई धरन में विक्षेप अधिक होने से मशीन की यथार्थता (accuracy) कम होने से वह निर्धारित कार्य करने में असमर्थ हो सकती है। अत: धरन (beams) या पुल को डिजाइन करने में deflection तथा slope का ज्ञात होना आवश्यक है ताकि फेल होने से बचाया जा सके।

§ 6.2 ढलान तथा विक्षेप ज्ञात करने की तीन विधियाँ हैं–

(i) नमन घूर्ण क्षेत्रफल विधि (Bending Moment Area Method)

(ii) दोहरा समाकलन विधि (Double Integration Method)

(iii) मैकाले विधि (Macaulay's Method)

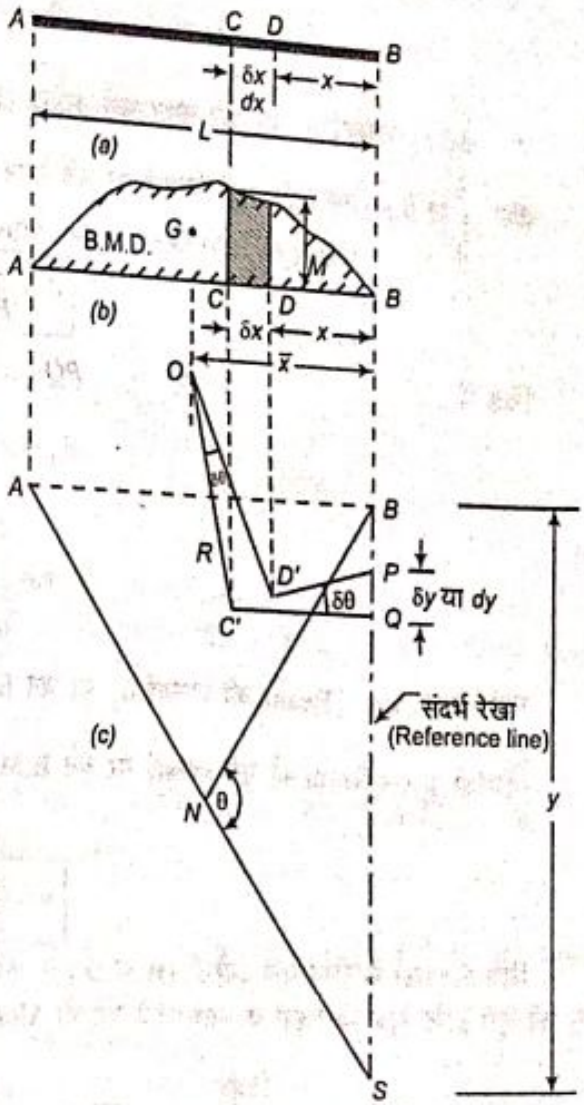
परन्तु, यहाँ सिविल के पाठ्यक्रम की सीमा के अनुसार केवल घूर्ण क्षेत्रफल विधि (moment area method) को ही दिया गया है।

Scanned with CamScanner

6.2.1 घूर्ण क्षेत्रफल विधि (Moment Area Method)

चित्र 6.4 (a) एक धरन (beam) AB है जिस पर लगे किसी भार के कारण इसका नमन घूर्ण आरेख (bending moment diagram) चित्र 6.4 (b) के अनुसार बनता है। धरन पर लगे भार के कारण यह धरन (beam) चित्र 6.4 (c) के अनुसार विक्षेपित स्थिति (deflected form) $AC'D'B$ में झुकाव में (bend) हो जाती है, जिसकी वक्रता त्रिज्या (radius of curvature) R है।

माना धरन के सिरे B से x दूरी पर इसकी बहुत कम लम्बाई CD (δ_x या dx) है। अब बिन्दु B से एक ऊर्ध्वाधर संदर्भ रेखा (vertical reference line) खींची। अब धरन के झुकाव के वक्र (bend position of beam) पर स्थिति बिन्दु C' तथा D' से स्पर्शी (tangent) खींचे जो reference line को क्रमश: P तथा Q पर काटते हैं। C' तथा D' को वक्रता केन्द्र (centre of curvature) O से मिलाने पर बीच का कोण $\angle C'OD' = \delta_\theta$ बनता है।



चित्र 6.4 (A)

यहाँ,

M = C तथा D के बीच Bending Moment

R = धरन (beam) के झुकाव की त्रिज्या (radius of bent up beam)

A = पूर्ण नमन घूर्ण आरेख का क्षेत्रफल (Area of bending moment diagram over entire spam)

$\bar{X}$ = B.M.D. के गु० के० (G) की क्षैतिज दूरी, (संदर्भ रेखा reference line से)

θ = A तथा B पर खींची गई स्पर्शी (tangent) के बीच कोण, reference line की ओर से।

(angle included between the tangents drawn at A and B and facing the reference line).

यहाँ $CD = C'D' = \delta_x$ होगा। ($\because$ δ_x बहुत ही कम लम्बाई है)

$$\therefore \quad \text{कोण } (\delta_\theta) = \frac{\text{चाप (Arc)}}{\text{त्रिज्या (Radius)}} = \frac{\delta_x}{R} \qquad \ldots \text{(i)}$$

$\because$ $\frac{M}{I} = \frac{E}{R}$ (नमन समीकरण bending equation) से

$R = \frac{EI}{M}$, यह मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\delta_\theta = \delta_x \frac{M}{EI} = \frac{M.\delta_x}{EI} \qquad \ldots \text{(ii)}$$

Scanned with CamScanner

∴ Total change of slope (angle) from A to B,

$$\theta = \frac{1}{EI}\int_0^2 M\,\delta_x$$

∵ $M\,\delta_x$ लम्बाई δ_x पर बने नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) का क्षेत्रफल।

तथा $\int_0^2 M\,\delta_x$ = धरन की पूरी लम्बाई पर बने नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) का क्षेत्रफल।

(Area of B.M.D. over the entire span)

∴ $\boxed{\theta = \frac{A}{EI}}$ सूत्र

चित्र में, $PQ = x.\delta_\theta$ [और $C'Q = x$ यहाँ लगभग है] ...(iii)

$$\delta_y = x\left(\frac{M.\delta_x}{EI}\right) = \frac{(M.\delta_x).x}{EI} \quad ...(iv)$$

∴ $$y = \int_0^2 \frac{(M.\delta_x)x}{EI} = \frac{1}{EI}\int_0^2 (M.\delta_x).x$$

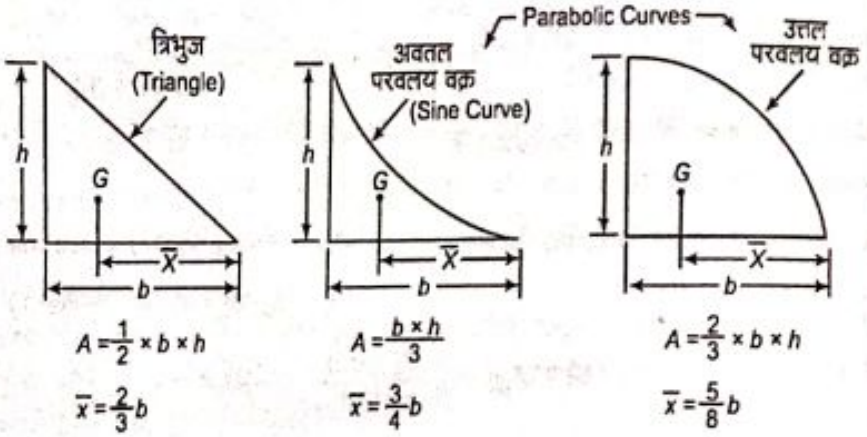
यहाँ $(M\,\delta_x).x$ = Beam की लम्बाई δ_x पर बने B.M.D. के क्षेत्रफल का Reference Line के सापेक्ष घूर्ण है।

$\int_0^2 (M.\delta_x).x$ = Beam की पूरी लम्बाई पर बने B.M.D. के क्षेत्रफल का Reference Line के सापेक्ष घूर्ण होगा।

$$= A.\bar{x}$$

∴ $\boxed{y = \frac{A.\bar{x}}{EI}}$ सूत्र

चित्र 6.4 (B) में नमन घूर्ण आरेखों (B.M.D.) के कुछ भागों के रूप दिखाये गये हैं। इनके क्षेत्रफल (A) तथा गु० के० G की दूरी $\bar{x}$ के सूत्र भी चित्रों के साथ दिये गये हैं। Moment Area Method के लिये ये सूत्र याद रखें।



चित्र 6.4 (B)

6.2.2 विक्षेप तथा ढलान का मौलिक सूत्र
(Relation between slope, Deflection and Radius of Curvature)

चित्र 6.5 में एक धरन की विक्षेपित स्थिति (bent protion) का एक छोटा भाग (small portion) AB, चाप (arc) के रूप में दिखाया गया है।

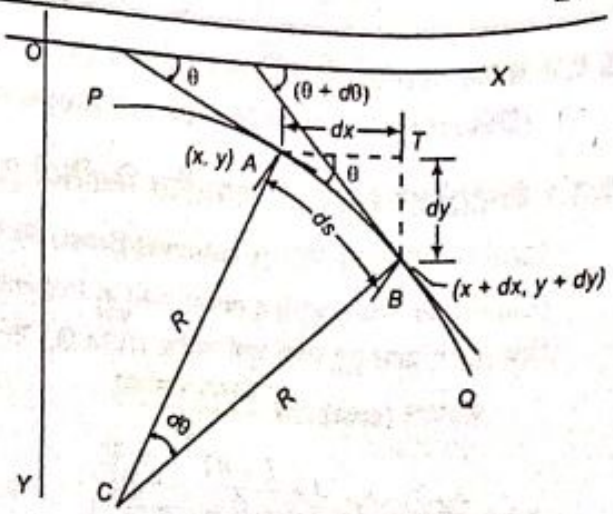
माना, ds = विक्षेपित धरन के भाग AB (चाप AB) की लम्बाई, जिसका वक्रता केन्द्र (centre of curvature) C है।

Scanned with CamScanner

चाप AB के बिन्दु A तथा B पर खींची गई स्पर्शी $o-x$ अक्ष से क्रमशः θ तथा $(\theta + d\theta)$ कोण बनाती है। इसलिए A तथा B पर वक्र के ढलान (slopes) क्रमशः θ तथा $(\theta + d\theta)$ हैं।

∵ CA तथा CB, वक्र की स्पर्श रेखाओं पर लम्ब हैं, अतः

A तथा B पर स्पर्शियों के बीच कोण = A तथा B पर लम्बों के बीच कोण $= d\theta = \angle ACB$



चित्र 6.5

$$\therefore \quad \text{कोण } (d_\theta) = \frac{\text{चाप } (ds)}{\text{त्रिज्या } (R)}$$

$$\text{या} \quad ds = R \times d\theta$$

$$\text{या} \quad ds = R \times d\theta \qquad \ldots (i)$$

माना कि बिन्दुओं A तथा B के निर्देशांक क्रमशः (x, y) तथा $(x + dx, y + dy)$ हैं।

∵ चाप AB की लम्बाई ds बहुत छोटी है अतः यह लम्बाई सरल रेखीय मानी जा सकती है, जिससे BAT समकोणीय त्रिभुज होगा।

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{dy}{dx} \text{ या } \theta = \frac{dy}{dx}$$

[∵ θ बहुत छोटा होने पर $\tan\theta = \theta$ तथा $ds = dx$ मान सकते हैं]

समीकरण (i) से $\quad \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds}$ या $\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx}$

या $\quad \frac{1}{R} = \frac{d}{dx}(\theta) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ (यहाँ समीकरण (ii से θ का मान रखा)

या $\quad \frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$ परन्तु $\frac{M}{I} = \frac{E}{R}$ से $\frac{I}{R} = \frac{M}{EI}$ होगा।

या $\quad \frac{M}{EI} = \frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2}$

या $\quad E.I.\frac{d^2y}{dx^2} = M$ (सूत्र)

यह सूत्र ढलान तथा विक्षेप का मौलिक सूत्र (basic formula) कहलाता है। इसके प्रयोग से हल करना, दोहरा समाकलन विधि (double integration method) कहलाता है।

या $\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI} \times (M)$ है, जहाँ $M = x$ दूरी पर नमनघूर्ण (B.M.) है।

(दायीं ओर से लिये गये x को (+ve) लेते हैं।)

नोट—(1) सम्बन्ध सूत्र $E.I.\frac{d^2y}{dx^2} = M$ का प्रयोग करते समय उत्तलन (Hogging) नमन-घूर्ण (B.M.) को (–ve) तथा अवतलन (Sogging) नमन-घूर्ण (B.M.) को (+ve) लिया जाता है।

(2) यह समीकरण केवल B.M. पर आधारित है। कर्तन बल (S.F.) का प्रभाव बहुत ही कम होने के कारण इसे नगण्य (Neglected) मान लिया जाता है।

(3) M (bending moment) का Hogging की स्थिति में (–ve) लेते हैं।

Scanned with CamScanner

§ 6.3 मानक दशाओं में अधिकतम विक्षेप तथा ढलान, घूर्ण-क्षेत्रफल विधि द्वारा ज्ञात करना (Determination of Maximum Slope and Deflection in Standard Cases)

6.3.1 कैन्टीलीवर धरन पर आधारित स्थितियाँ (Different cases on Cantilever)

Case I—जब प्रास धरन (Cantilever Beam) के स्वतन्त्र सिरे पर एक बिन्दु भार लगा है।

(Cantilever beam with a point load at free end) (U.P. 2013, 14)

चित्र (b) में प्राप्त हुए नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) में—

क्षेत्रफल (area) $A = \frac{\text{आधार} \times \text{ऊँचाई}}{2}$

$$A = \frac{L \times WL}{2} = \frac{WL^2}{2}$$

B.M.D के गु०के० (G) की मुक्त सिरे B से दूरी,

$$\bar{x} = \frac{2}{3} \times L$$

$$\therefore \quad \theta_B = \theta_{max} = \frac{A}{EI} \quad \text{सूत्र से}$$

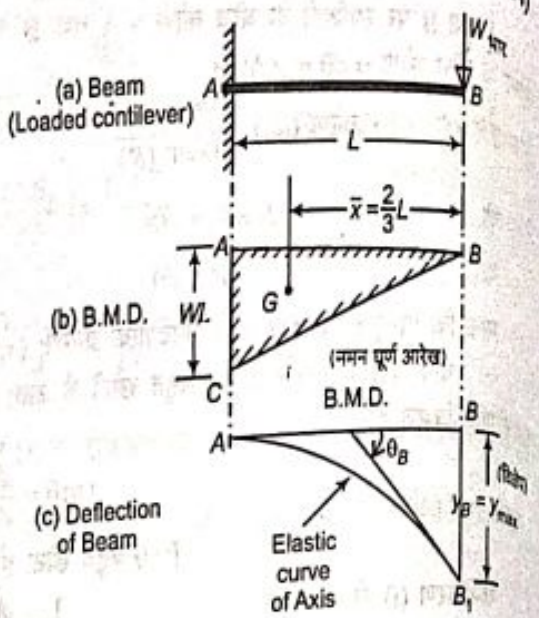
$$\boxed{\theta_B = \frac{WL^2}{2EI}} \quad \text{सूत्र}$$

मुक्त सिरे B पर अधिकतम विक्षेप (Deflection)

$$y_B = y_{max} = \frac{A\bar{x}}{EI} \quad \text{सूत्र से}$$

$$= \frac{\frac{WL^2}{2} \times \frac{2}{3}L}{EI} = \frac{WL^3}{3EI}$$

$$\therefore \quad \boxed{y_{max} \Rightarrow y_B = \frac{WL^3}{3EI}} \quad \text{सूत्र}$$



चित्र 6.6

Case II—कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे (Free End) से हटाकर किसी भी अन्य बिन्दु पर बिन्दु भार लगा है—

(Cantilever beam with a point load (W) at any point)

चित्र 6.7 (b) में नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) तथा 6.7 (c) में धरन की विक्षेपित अवस्था दिखायी गयी है। धरन (beam) बिन्दु A से C तक वक्र रूप में तथा C से B तक सरल रेखा रूप में विक्षेपित होती है।

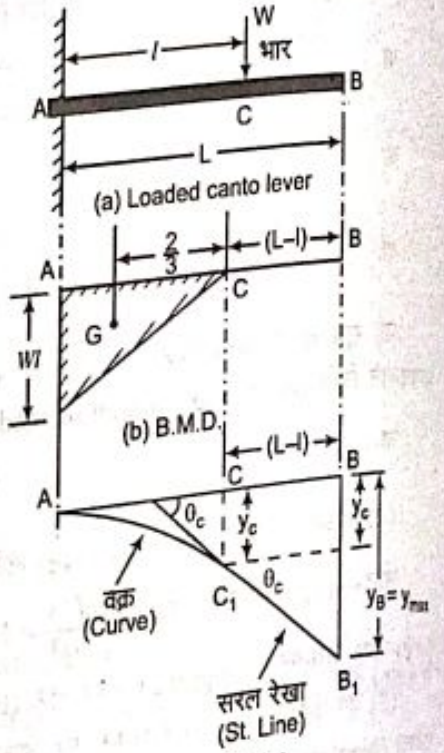
$$\therefore \tan\theta_c = \frac{y_B - y_C}{BC} \quad \text{या} \quad \theta_c = \frac{y_B - y_C}{BC}$$

या $$\therefore \quad \boxed{y_B = y_c + \theta_c \times BC}$$

अब $$y_C = \frac{A\bar{X}}{EI} \quad \text{सूत्र से}$$

यहाँ, $$A = \frac{Wl^2}{2}, \quad \bar{X} = \frac{2}{3}l,$$

$$\therefore \quad y_C = \frac{Wl^3}{3EI} \quad (\text{C पर विक्षेप})$$



चित्र 6.7

Scanned with CamScanner

अब C पर ढलान, $\theta_C = \frac{A}{EI}$ सूत्र से

$$\theta_C = \frac{Wl^2}{2EI}$$

अब $\boxed{y_B = y_C + \theta_C \times BC}$ में y_C, θ_C तथा BC के मान रखने पर

$$y_{max} = y_B = \frac{Wl^3}{3EI} + \frac{Wl^2}{2EI} \times (L - l) \quad \text{सूत्र}$$

Case III—कैन्टीलीवर धरन की सम्पूर्ण लम्बाई पर समवितरित भार (U.D.L.)

(Cantilever beam with uniformly distributed load (U.D.L.))

अधिकतम विक्षेप के लिए चित्र (b) में B.M.D. का क्षेत्रफल (area)

$$A = \frac{\text{आधार} \times \text{ऊँचाई}}{3} = \frac{b \times h}{3} \quad \text{सूत्र}$$

$$= \frac{L \times \frac{wL^2}{2}}{3} = \frac{wL^3}{6}$$

तथा गु० के० G की B से दूरी

$$\bar{X} = \left(\frac{3}{4}\right) L \quad \text{सूत्र}$$

सिरे B पर अधिकतम विक्षेप

$$y_B = y_{max} = \frac{A\bar{X}}{EI} \quad \text{सूत्र से}$$

$$y_{max} = \frac{wL^3}{6} \times \frac{3L}{4} / EI$$

$$y_{max} = \frac{wL^4}{8EI} = \frac{WL^3}{8EI} \quad \text{सूत्र}$$

W = U.D.L. का कुल भार = $w \times L$ है।

∴

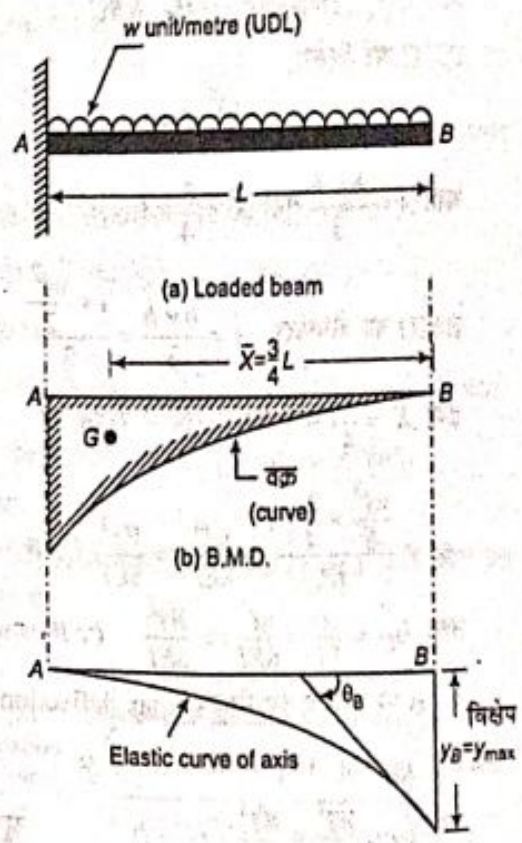
$$\boxed{y_{max} = \frac{WL^3}{8EI}} \quad \text{सूत्र}$$

तथा अधिकतम ढलान (max slope) $= \frac{A}{EI}$ सूत्र से

$$\theta_B = \frac{\frac{wL^3}{6}}{EI} = \frac{wL^3}{6EI}$$

यहाँ $W = wL$ रखने पर

$$\boxed{\theta_B = \frac{WL^2}{6EI}} \quad \text{सूत्र}$$



(c) Deflection of axis beam
(विक्षेपित अवस्था)

चित्र 6.8

Scanned with CamScanner

Case IV—कैन्टीलीवर के बद्ध सिरे से कुल लम्बाई (माना l) तक समवितरित भार (Cantilever beam loaded with U.D.L. over its some part of length from fixed end)

A से C तक के कारण Beam, curve-shape (वक्र रूप) में मुड़ेगी (bend होगी) तथा C से B तक खाली होने के कारण सरल रेखा रूप में विक्षेपित होगी।

देखें चित्र 6.9 (c)।

$$\tan\theta_c = \theta_c = \frac{y_B - y_C}{BC}$$

$$\therefore \quad y_B = y_C + \theta_C + BC \qquad \text{सूत्र}$$

$\therefore$ C पर विक्षेप,

$$y_C = \frac{A\bar{X}}{EI} \text{ (सूत्र)},$$

यहाँ $A = \frac{b \times h}{3}$ तथा $\bar{X} = \frac{3}{4} \times l$

BMD का क्षेत्रफल $A = \frac{b \times h}{3} = \frac{l \times \frac{wl^2}{2}}{3} = \frac{wl^3}{6}$

तथा $\bar{X} = \frac{3}{4}l$ मान विक्षेप सूत्र में रखने पर

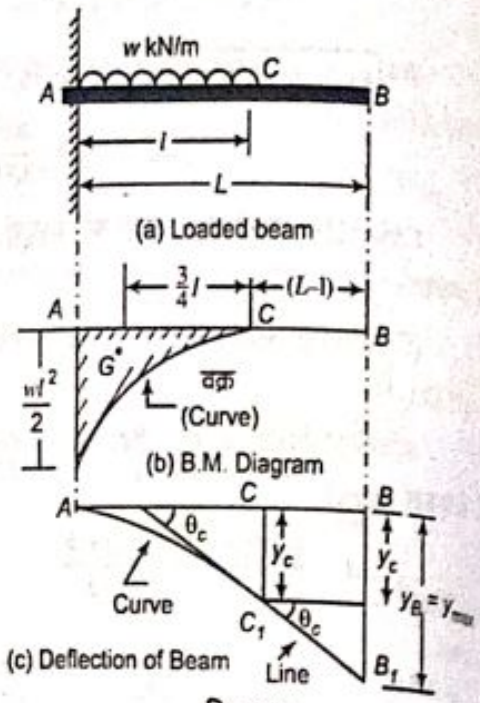
$$y_C = \frac{\frac{wl^3}{6} \times \frac{3}{4} \times l}{EI} = \frac{wl^4}{8EI} \Rightarrow \frac{Wl^3}{8EI} \quad (\because W = wl \text{ है})$$

तथा $\theta_C = \frac{A}{EI} = \frac{wl^3}{6EI} \Rightarrow \frac{Wl^2}{6EI} \quad (\because W = wl \text{ है})$

$\therefore$ B पर अधिकतम विक्षेप (max deflection at B)

$$y_B = y_C + \theta_C \times BC$$

$$y_B = \frac{Wl^3}{8EI} + \frac{Wl^2}{6EI} \times (L - l) \qquad \text{सूत्र}$$



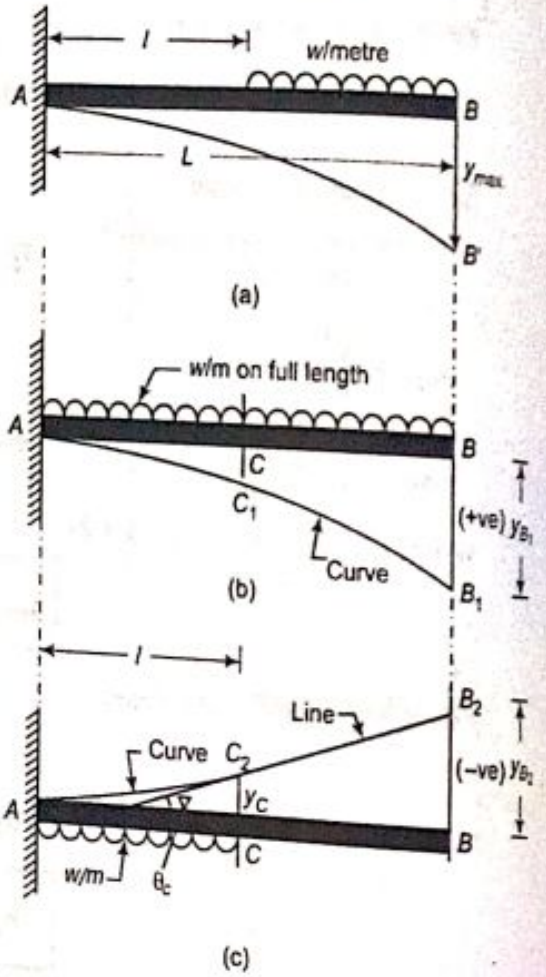
चित्र 6.9

Case V—कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे से आंशिक लम्बाई पर U.D.L. **(U.P. 2014. Mech)**

(Cantilever beam loaded with U.D.L. over its some part of length from free end)

इस दी गई स्थिति में भार होने पर सर्वप्रथम चित्र 6.10 (b) के अनुसार पूरी लम्बाई में U.D.L. समान मान का लगाकर विक्षेप (+ve) BB_1 प्राप्त करते हैं। फिर Beam के खाली भाग AC पर नीचे से उतने ही मान का U.D.L. लगाकर (चित्र C) के अनुसार (–ve) विक्षेप BB_2 ज्ञात करते हैं। अब परिणामी विक्षेप $y_B = y_{B_1} - y_{B_2}$.

चित्र 6.10 (b) में विक्षेप (deflection), (पिछले सूत्रों की सहायता से)



चित्र 6.10

Scanned with CamScanner

$$BB_1 = y_{B_1} = \frac{W_1 L^3}{8EI}$$ जहाँ ($W_1 = w \times L$ है।)

चित्र 6.10 (c) में (–ve) दिशा में विक्षेप (BB_2) ज्ञात करने के लिए

$$BB_2 = y_{B_2} = y_C + \theta_C \times BC$$

$$= \frac{W_2 l^3}{8EI} + \frac{W_2 l^2}{6EI} \times (L - l),$$ यहाँ ($W_2 = w \times l$ है)

अब परिणामी विक्षेप (Resultant Deflection) $y_B = y_{max} = y_{B_1} - y_{B_2}$ में उपरोक्त मान रखें।

$$y_B = \left(\frac{W_1 L^3}{8EI}\right) - \left[\frac{W_2 l^3}{8EI} + \frac{W_2 l^2}{6EI} \times (L - l)\right]$$ उत्तर

6.3.2 शुद्ध आलम्बित धरन (Simply Supported Beam) पर आधारित स्थितियाँ

Case I—सरल आलम्बित धरन (अथवा शुद्धालम्ब धरन) के मध्य में संकेन्द्रित भार (बिन्दु भार)

(Simply supported beam with concentrated load at centre)

बिन्दु भार (Point Load) मध्य में होने के कारण अधिकतम B.M. मध्य में $M_C = \frac{W}{2} \times \frac{L}{2} = \frac{WL}{4}$ होगा धरन (beam) का झुकाव (deflection) भी मध्य बिन्दु C पर अधिकतम होगा, जहाँ ढलान मध्य C पर शून्य ($\theta_C = 0$) होगा।

दोनों सिरों A तथा B पर ढलान (slope) $\theta_A = \theta_B = \theta_{max}$ होगा।

नोट—जिस बिन्दु पर Max. B.M. होता है, उसी बिन्दु तक दायें सिरे B से नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) के भाग का क्षेत्रफल (a) तथा इस भाग के गु० के० (G) की दूरी $\bar{X}$ ज्ञात की जाती है।

$$\therefore \quad A = \frac{\text{आधार } (b) \times \text{ऊँचाई } (h)}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{WL}{4} = \frac{WL^2}{16}$$

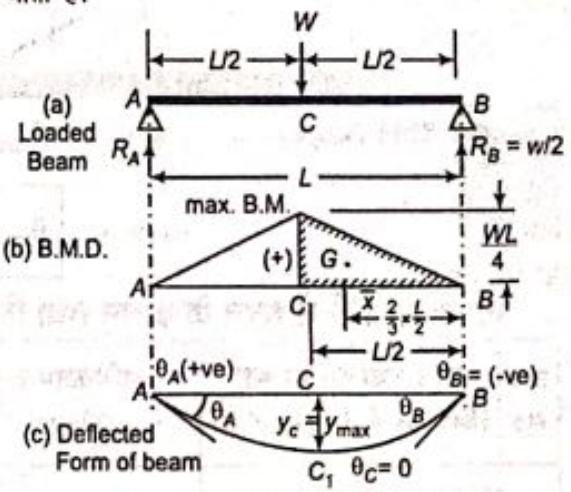
$$\bar{X} = \frac{2}{3} \times \frac{L}{2} = \frac{L}{3}$$

$$\therefore \quad y_{max} = y_c = \frac{A\bar{X}}{EI} = \frac{\frac{WL^2}{16} \times \frac{L}{3}}{EI} = \frac{WL^3}{48EI}$$

$\therefore$ अधिकतम विक्षेप (Deflection), y या $\boxed{y_{max} = \frac{WL^3}{48EI}}$

ढलान (Slope), $\theta_{max} = \frac{A}{EI} = \frac{WL^2}{16EI}$

$\therefore$ $\boxed{\theta_A = \theta_B = \theta_{max} = \frac{WL^2}{EI}}$ सूत्र



चित्र 6.11

Case II—सरल आलम्बित धरन की पूर्ण लम्बाई पर w प्रति इकाई लम्बाई का समवितरित भार

(Simply supported beam with uniformly distributed load i.e. U.D.L.) **(U.K. 2014)**

चित्र 6.12 (a), (b), (c) देखें—

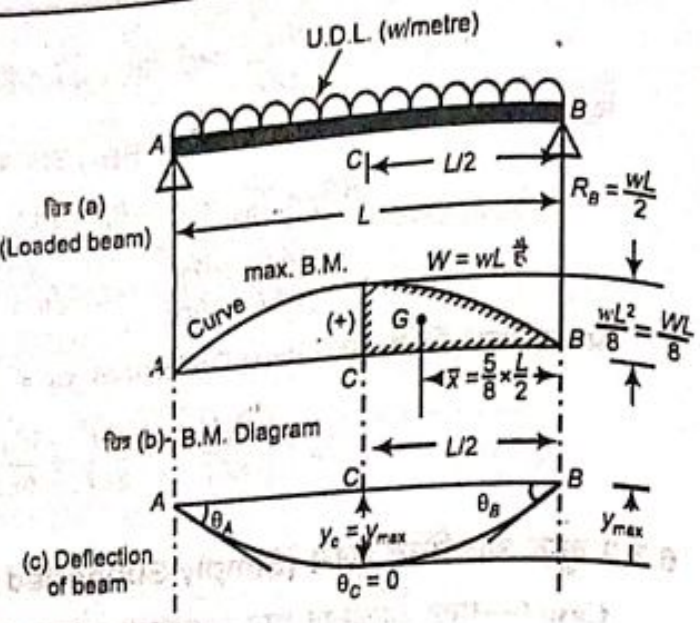
Scanned with CamScanner

यहाँ U.D.L. का मान w kN/m है तथा कुल भार $W = w \times L$ होगा। U.D.L. के कारण B.M.D. एक वक्ररूप (Parabolic Curve) में होगा। इसके केन्द्र (मध्य) में अधिकतम नमन घूर्ण (max. B.M.) $M = \frac{wL^2}{8} = \frac{WL}{8}$ है। विक्षेप (deflection) भी मध्य में $y_{max} = y_C$ अधिकतम होगा।

∵ अधिकतम B.M. का मान मध्य बिन्दु C पर है, इसीलिये क्षेत्रफल (area) A का मान भी दायें ओर से BC लम्बाई तक अधिनमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) का लेना होगा।

∴ क्षेत्रफल (area)

A = area of shaded part



चित्र 6.12

चित्र 6.12 (b) से,

$$A = \frac{2}{3} \times b \times h = \frac{2}{3} \times \frac{L}{2} \times \frac{wL^2}{8} = \frac{wL^3}{24}$$

तथा $\bar{X}$ = दायें सिरे B से गु० के० G की दूरी $= \frac{5}{8} \times \frac{L}{2}$

∴ अधिकतम विक्षेप (max deflection)

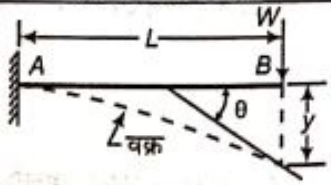
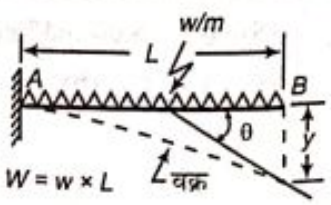
$$y_{max} = \frac{A\bar{X}}{EI} = \frac{wL^3}{24EI} \times \frac{5}{8} \times \frac{L}{2} = \frac{5}{384} \times \frac{wL^4}{EI}$$

∴ $\boxed{y_{max} = \frac{5}{384} \times \frac{wL^4}{EI}}$ या $\boxed{y_{max} = \frac{5}{384} \times \frac{WL^3}{EI}}$ सूत्र

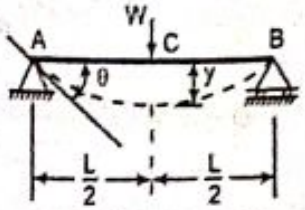
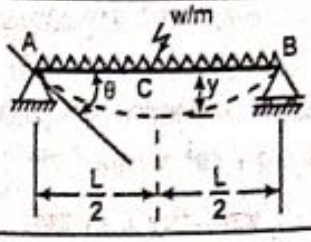
अब ढलान (slope), $\theta_{max} = \frac{A}{EI}$

$$\boxed{\theta_{max} = \theta_A = \theta_B = \frac{wL^3}{24EI} = \frac{WL^2}{24EI}}$$ सूत्र

मानक दशाओं में धरन के ढलान तथा विक्षेप के सूत्रों की सूची या लिस्ट (List of formula)

क्र० सं०	धरन तथा इस पर भार (Beams & Load on it)	अधिकतम ढलान (Slope) θ	अधिकतम विक्षेप या विस्थापन (Deflection) y	चित्र (धरन की आरम्भिक एवं अन्तिम स्थितियाँ) Beam & its deflected form
1.	कैंटीलीवर के सिरे पर संकेन्द्रित भार (Concentrated load/ point load)	$\theta_A = 0$ $\theta_B = \frac{1}{2} \times \frac{WL^2}{EI}$ (स्वतन्त्र सिरे पर)	$y_B = \frac{1}{3} \times \frac{WL^3}{EI}$ (स्वतन्त्र सिरे पर)	
2.	कैंटीलीवर पर समवितरित भार (U.D.L.)	$\theta_A = 0, W = wL$ $\theta_B = \frac{1}{6} \times \frac{w \times L^3}{EI} = \frac{WL^2}{6EI}$ (स्वतन्त्र सिरे पर) (∵ $W = w \times L$)	$y_B = \frac{1}{8} \times \frac{wL^4}{EI} = \frac{WL^3}{8EI}$ ∵ $W = w \times L$ (स्वतन्त्र सिरे पर)	

Scanned with CamScanner

3.	शुद्धालम्ब धरन के केन्द्र पर संकेन्द्रित भार/बिन्दु भार (Point Load)	$\theta_A = \theta_B = \theta_{max} = \frac{1}{16} \times \frac{WL^2}{EI}$ (प्रत्येक सिरे पर)	$y_C = \frac{1}{48} \times \frac{WL^3}{EI}$ (केन्द्र पर)	
4.	शुद्धालम्ब धरन पर समवितरित भार (U.D.L.) यहाँ U.D.L. का कुल भार $W = w \times L$	$\theta_A = \theta_B = \theta_{max} = \frac{1}{24} \times \frac{wL^3}{EI} = \frac{WL^2}{24EI}$ ($\because W = w \times L$)	$y_C = \frac{5}{384} \times \frac{wL^4}{EI}$ या $y_C = \frac{5}{384} \times \frac{WL^3}{EI}$ (केन्द्र पर)	

मुख्य उदाहरण (Important Examples)

विशेष—परास धरन (cantilever beam) पर आधारित प्रश्न।

उदाहरण 1. वर्गाकरण परिच्छेद (square section) की एक कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे पर (at free end) 35 kN का भार लगाया जाता है। इस कैन्टीलीवर धरन (cantilever beam) की विस्तृति (span) 2 m है तथा धरन के पदार्थ का प्रत्यास्थता गुणांक (E) 2×10^5 N/mm^2 है। यदि इसके मुक्त सिरे का विक्षेप (deflection at free end) 3·5 mm हो तो अनुप्रस्थ काट (section) की विमायें (dimensions) ज्ञात कीजिये। (U.P. 2000), (U.K. 2006, S)

हल—चित्र 6.13 (a), (b) तथा (c) देखें।

इसके नमन घूर्ण आरेख (BMD) का क्षेत्रफल

$$(A) = \frac{L \times WL}{2} = \frac{WL^2}{2}$$

$$\bar{X} = \frac{2}{3}L$$

माना इसकी काट (section) a भुजा का वर्ग (square) है।

$$\therefore \quad I = \frac{a \times a^3}{12} = \frac{a^4}{12}$$

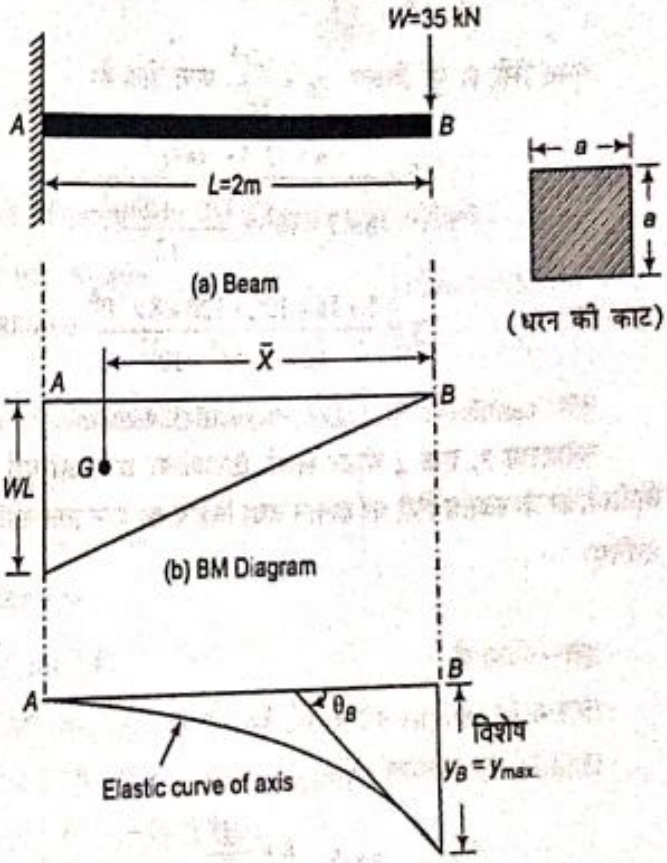
$W = 2 \times 10^5$ N/mm^2 है।

$$y_B = y_{max} = \frac{A\bar{X}}{EI}$$ सूत्र से

$$y_B = \frac{WL^3}{3EI}$$ प्राप्त होता है।

परन्तु दिया है B पर deflection $y_B = 3{\cdot}5$ mm है।

$$\therefore \; y_B = 3{\cdot}5 = \frac{(35 \times 1000) \times (2 \times 1000)^3}{3 \times 2 \times 10^5 \times a^4/12}$$



चित्र 6.13

Scanned with CamScanner

$$\therefore \quad a^4 = \frac{(35000)\times(2000)^3\times 12}{3{\cdot}5\times 3\times 2\times 10^5} = 16\times 10^8$$

या $$a = (16\times 10^8)^{1/4}$$

$$\therefore \quad a = 200 \text{ mm}$$

अत: इसकी काट 200 mm भुजा का वर्ग है। उत्तर

उदाहरण 2. 120 mm × 200 mm आकार की एक प्रास धरन (cantilever) 2·5 m लम्बी है। धरन पर कितना समवितरित भार (U.D.L.) लगाया जाये ताकि मुक्त सिरे पर 5 mm के विक्षेप (Deflection) उत्पन्न हो। $E = 2\times 10^5$ N/mm² लें। **(U.P. 2004)**

हल—चित्र 6.13 देखें।

माना Beam पर U.D.L. w kN/m का लगा है।

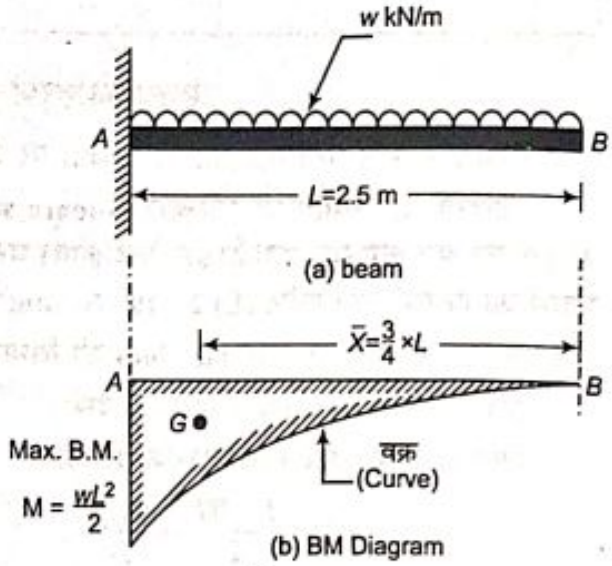
$$\therefore \quad A = \frac{b\times h}{3} = \frac{L\times \frac{wL^2}{2}}{3}$$

$$= \frac{wL^3}{6}$$

$\bar{X} = \frac{3}{4}\times L$ तथा $y_B = 5$ mm है।

$\therefore$ विक्षेप सूत्र $y_B = \frac{A\bar{X}}{EI}$ से

मुक्त सिरे B पर विक्षेप, $y_B = \frac{wL^4}{8EI}$ प्राप्त होता है।



चित्र 6.14

$$5 = \frac{w\times(2{\cdot}5\times 1000)^4}{8\times 2\times 10^5 \times \frac{120\times(200)^3}{12}}$$

या $$w = \frac{5\times 16\times 10^5\times 120\times 8\times 10^6}{12\times(2{\cdot}5)^4\times 10^{12}} = 16{\cdot}384 \text{ kN/m}$$

अत: cantilever पर U.D.L. $(w) = 16{\cdot}384$ kN/m उत्तर

उदाहरण 3. एक 2 मीटर लम्बी कैंटीलीवर धरन की पूरी लम्बाई पर 5 kN/m का समवितरित भार लगा है। कैंटीलीवर के स्वतंत्र सिरे पर ढलान तथा विक्षेप का मान ज्ञात कीजिए। धरन के लिए नमन दृढ़ता $2{\cdot}5\times 10^{12}$ N/mm² मानिए।

(U.K. 2012 S), (U.K. 2013 S.p. B.P.)

हल—दिया है $EI = 2{\cdot}5\times 10^{12}$ N-mm²

चित्र 6.14 (a), (b) तथा (c) देखें।

B.M.D. का क्षेत्रफल (Area)

$$A = \frac{b\times h}{3} = \frac{L\times \frac{wL^2}{2}}{3}$$

Scanned with CamScanner

$$A = \frac{wL^3}{6EI} \text{ तथा } \bar{X} = \frac{3}{4}L$$

विक्षेप (deflection), $y_B = \frac{A\bar{X}}{EI}$ सूत्र में मान रखने पर

$$y_B = \frac{wL^4}{8EI} \text{ प्राप्त होता है।}$$

U.D.L. का कुल भार $W = w \times L$ है।

$\therefore$ $y_B = \frac{WL^3}{8EI}$ होगा।

$\therefore$ स्वतन्त्र सिरे B पर विक्षेप

$$y_B = \frac{(5 \times 2 \times 1000) \times (2000)^3}{8 \times (2{\cdot}5 \times 10^{12})}$$

$$y_B = 4 \text{ mm}$$

उत्तर

$\therefore$ अधिकतम ढलान (slope) B पर होगा।

$\theta_B = \frac{A}{EI}$ में मान रखने पर

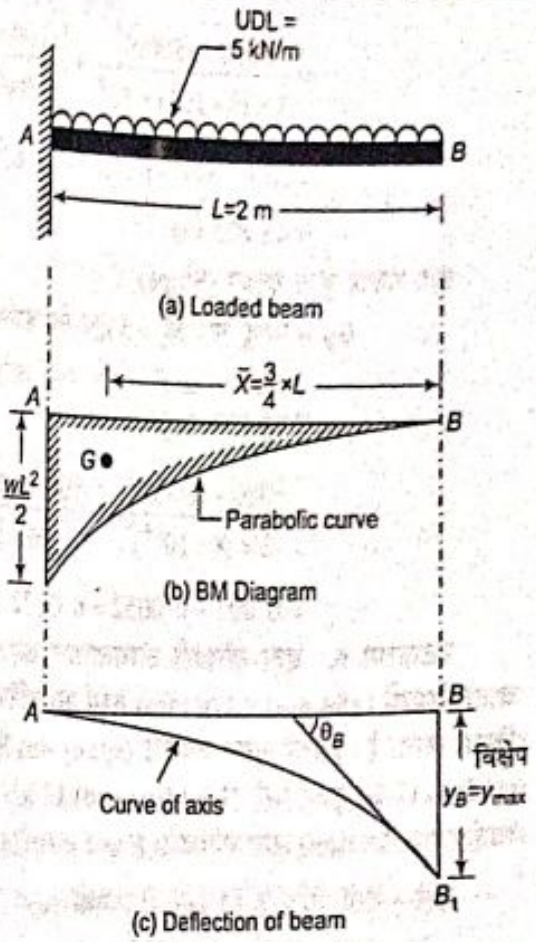
$\theta_B = \frac{wL^3}{6EI} = \frac{WL^2}{6EI}$ प्राप्त होता है।

$$\therefore \quad \theta_B = \frac{(5 \times 2 \times 1000) \times (2000)^2}{6 \times (2{\cdot}5 \times 10^{12})}$$

$$= 2{\cdot}6 \times 10^{-3} \text{ Radian}$$

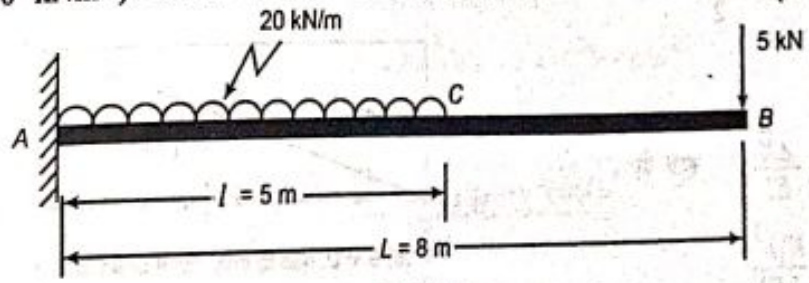
$$= 0{\cdot}0026 \text{ Radian}$$

उत्तर



चित्र 6.15

उदाहरण 4. चित्र 6.16 में दिखाई धरन के लिये अधिकतम ढाल तथा विस्थापन ज्ञात कीजिये–
$(EI = 8 \times 10^4 \text{ kNm}^2) = 8 \times 10^4 \times 10^9 = 8 \times 10^{13} \text{ N-mm}^2$. **(U.K. 2013, SP. BP)**



चित्र 6.16

हल—दिया है $EI = 8 \times 10^4 \text{kNm}^2 = 8 \times 10^{13} \text{N-mm}^2$ है।

चित्र 6.15 में दिये गये धरन (beam) के स्वतन्त्र सिरे (free end) B का कुल विक्षेप (total deflection) y_B = ($W_1 = 5\text{kN}$) के भार के कारण विक्षेप + U.D.L. के भार $W_2 = (20 \times 5)$ kN के कारण विक्षेप

$$= y_{B_1} + (y_C + \theta_C \times BC)$$

$$= \frac{W_1 L^3}{3EI} + \left[\frac{W_2 l^3}{8EI} + \frac{W_2 l^2}{6EI} \times (L - l)\right]$$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{5000 \times (8000)^3}{3 \times (8 \times 10^4) \times 10^9} + \left[\frac{(100 \times 1000) \times (5000)^3}{8 \times (8 \times 10^4) \times 10^9} + \frac{(100 \times 1000) \times (5000)^2 \times (3000)}{6 \times (8 \times 10^{13})} \right]$$

$$= 10{\cdot}67 \text{ mm} + [19{\cdot}53 + 15{\cdot}625]$$

$$= 45{\cdot}825 \text{ mm}$$ उत्तर

इसी प्रकार कुल ढलान (Slope)

θ_B = बिन्दु भार $W_1 = 5$ kN के कारण + U.D.L. के कुल भार ($W_2 = 20 \times 5$KN) के कारण

$$= \frac{W_1 L^2}{2EI} + \frac{W_2 l^2}{6EI}$$

$$= \frac{5000 \times (8000)^2}{2 \times (8 \times 10^{13})} + \frac{(100 \times 1000) \times (5000)^2}{6 \times (8 \times 10^{13})}$$

$$= 0{\cdot}002 + 0{\cdot}0052 = 0{\cdot}0072 \text{ Radian}$$ उत्तर

उदाहरण 5. एक खोखले आयताकार काट (hollow rectangular section) की धरन (Beam), जिसकी बाह्य विमायें (180 mm × 120 mm) तथा आन्तरिक विमायें (90 mm × 60 mm) है, को कैंटीलीवर के रूप में प्रयोग किया जाता है। इसकी मुक्त लम्बाई (span) 4m है तथा इसकी पूरी लम्बाई पर 600 N/m का एक समवितरित भार (U.D.L.) तथा मुक्त सिरे पर (at free end) 12 kN का Point Load लगा है। इस स्थिति में cantilever का अधिकतम विक्षेप (deflection) ज्ञात कीजिये। $E = 2 \times 10^5 \text{N/mm}^2$ है।

हल—देखें चित्र 6.17 (a), (b) तथा (c)।

काट का $I = \frac{120 \times 180^3}{12} - \frac{60 \times 90^3}{12}$

$$I = 54675000 \text{ mm}^4$$

B पर लगे बिन्दु भार $W_1 = 12$ kN के कारण BM चित्र (b) में दिखाया गया है। इसमें

$$A = \frac{L \times W_1 L}{2} = \frac{W_1 L^2}{2}$$

$$\bar{X} = \frac{2}{3} \times L$$

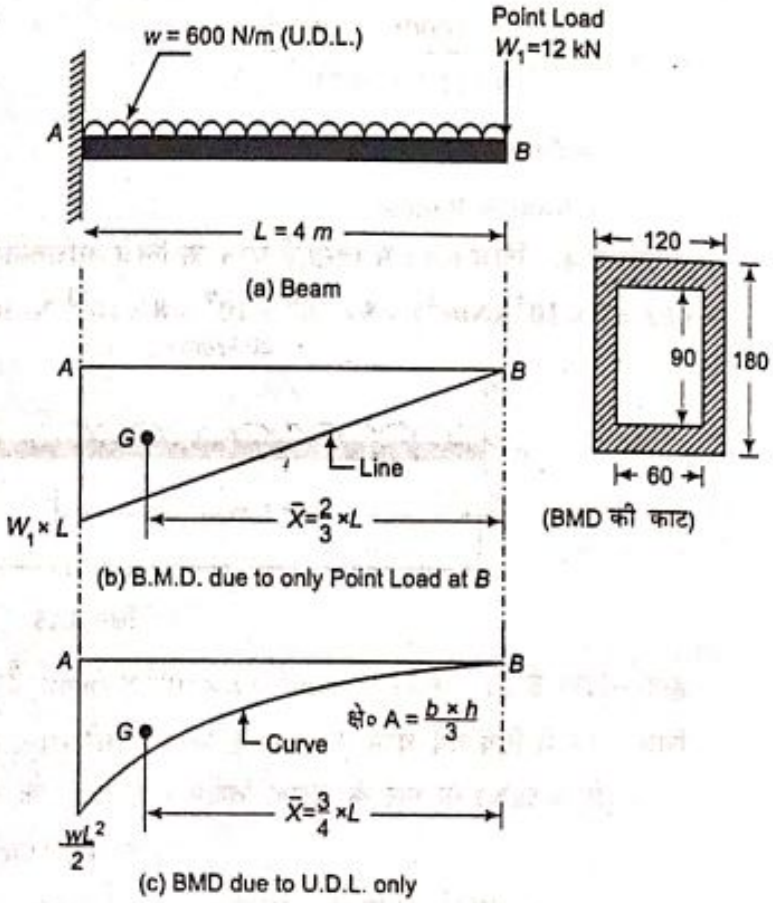
विक्षेप $y_{B_1} = \frac{A\bar{X}}{EI}$ सूत्र से

$$y_{B_1} = \frac{W_1 L^3}{3EI}$$

$$= \frac{12 \times 1000 \times (4000)^3}{3 \times 2 \times 10^5 \times (54675000)}$$

$$= 23{\cdot}41 \text{ mm}$$

अब पूरे धरन पर लगे U.D.L. के कुल भार $W_2 = 600 \times 4 = 2400$ N



चित्र 6.17

Scanned with CamScanner

के कारण Bending Moment Diagram चित्र (c) में दिया गया है। इसमें

क्षेत्रफल $$A = \frac{b \times h}{3} = \frac{L \times wL^2}{3 \times 2} = \frac{wL^3}{6} = \frac{W_2 L^2}{6} \qquad (\because W_2 = w \times L)$$

तथा $$\bar{X} = \frac{3}{4} \times b = \frac{3}{4} \times L$$

अब विक्षेप $y_{B_2} = \frac{A\bar{X}}{EI}$ सूत्र में मान रखने पर

$$= \frac{W_2 L^3}{8EI} \text{ प्राप्त होता है।}$$

$$\therefore \quad y_{B_2} = \frac{2400 \times (4000)^3}{8 \times 2 \times 10^5 \times 54675000} = 1{\cdot}756 \text{ mm}$$

∴ सिरे B पर कुल विक्षेप (Total deflection)

$$y_B = y_{B_1} + y_{B_2}$$
$$= 23{\cdot}41 + 1{\cdot}756 = 25{\cdot}167 \text{ mm}$$
$$= 25{\cdot}17 \text{ mm} \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 6. एक बिजली का ऊर्ध्वाधर खोखला बेलनाकार खम्भा (vertical hollow ciecular pole) 6m ऊँचा है। इसका एक सिरा जमीन में गड़ा है। दूसरे सिरे पर 10 kN का संकेन्द्रित भार लगा है। खम्भे (pole) का अपना भार नगण्य (Negligible) मानते हुए इस पर अधिकतम विस्थापन ज्ञात करें यदि खम्भे की काट का $I = 500 \times 10^5 \text{ mm}^4$ तथा $E = 200$ GPa है।

हल—खम्भे (Poles) भी Cantilever Beam की तरह कार्य करते हैं। अत: Cantilever के सूत्र ही प्रयोग होते हैं। यहाँ खम्भे के ऊपरी मुक्त सिरे पर विक्षेप (deflection)

$$y_B = \frac{WL^3}{3EI} \text{ सूत्र से,}$$

जहाँ $$W = 10 \text{ kN} = 10 \times 1000 \text{ N}$$
$$L = 6 \text{ m} = 6000 \text{ mm}$$
$$E = 200 \text{ GPa} = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$
$$I = 500 \times 10^4 \text{ mm}^4 = 5 \times 10^6 \text{ mm}^4$$
$$= \frac{(10 \times 1000) \times (6000)^3}{3 \times 2 \times 10^5 \times 5 \times 10^6}$$
$$y_B = 720 \text{ mm} \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 7. किसी मकान का कैंटीलीवर छज्जा (cantilever balcony) 1·2 मीटर बाहर की ओर निकला हुआ है। छज्जे पर 5 kN/m² का समवितरित भार लगा है। छज्जे की एक मीटर लम्बाई लेते हुए इसके लिये अधिकतम विस्थापन ज्ञात कीजिये। कैंटीलीवर छज्जे की प्रति मीटर लम्बाई के लिये जड़ता घूर्ण (moment of inertia) $I = 30{,}000 \text{ cm}^4$, $E = 15$ GPa। **(U.K. 2006) (U.P. 2004)**

हल—छज्जे पर कुल भार 1 m लम्बाई में

$$= 5 \times 1{\cdot}2 \times 1 = 6 \text{ kN}$$

Scanned with CamScanner

यह भार छज्जे के 1·2 m पर समान रूप से बँटा है, अत: समान रूप से बँटे भार का मान,

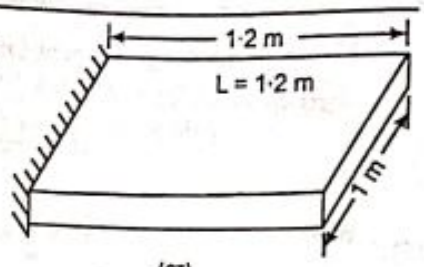
$$w = \frac{6}{1{\cdot}2} = 5 \text{ kN/m}$$

अब सूत्र से छज्जे के सिरे B पर अधिकतम विस्थापन,

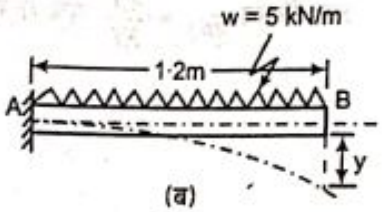
$$y = \frac{1}{8} \times \frac{wl^4}{EI} = \frac{WL^3}{8EI} \qquad \text{जहाँ } W = w \times L$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{5 \times 10^3 \times 1{\cdot}2^4}{15 \times 10^{19} \times 30000 \times 10^{-8}} = 0{\cdot}288 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$= 0{\cdot}288 \text{ m}$$



(अ)



(ब)

चित्र 6.18

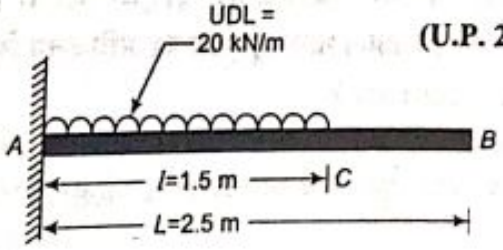
अथवा $y = \frac{wL^3}{8EI}$ सूत्र से

$$= \frac{(6 \times 1000) \times (1{\cdot}2 \times 1000)^3}{8 \times 15 \times 1000 \times 3 \times 10^8} = 0{\cdot}288 \text{ mm}$$

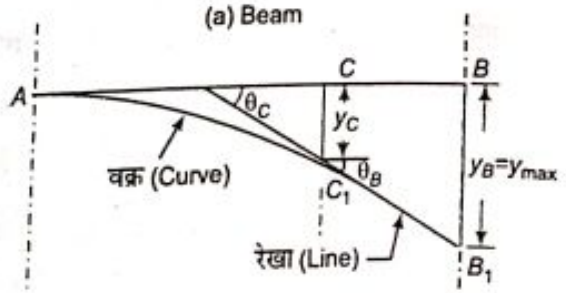
उत्तर

उदाहरण 8. एक I-काट की cantilever beam दीवार से 2·5 m बाहर निकली हुई है और इसके ऊपर धरन (beam) के स्थिर सिरे (fixed end) से 1·5 m लम्बाई तक 20 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। धरन (Beam) का अधिकतम विस्थापन (max. deflection) तथा ढलान (slope) ज्ञात कीजिये। $I = 9500 \text{ cm}^4$ तथा $E = 2 \times 10^5$ MPa है। **(U.P. 2006)**

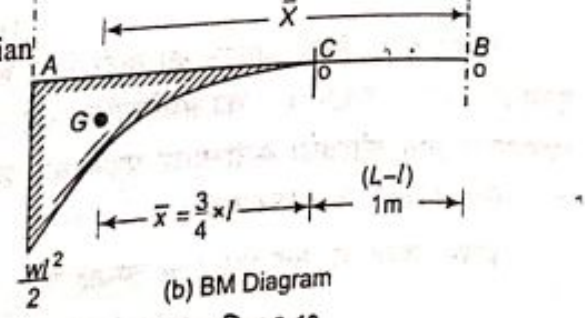
हल—प्रश्न के अनुसार Beam को चित्र 6.18 में दिखाया गया है। जिस पर लगे भार के कारण धरन का विक्षेप (deflection) चित्र 6.18 (b) में दिखाया गया है।



(a) Beam



(c) Deflection of beam



(b) BM Diagram

चित्र 6.19

जिसमें B पर विक्षेप y_B अधिकतम है तथा C पर विक्षेप $= y_C = \frac{Wl^3}{8EI}$ सूत्र से

जहाँ W = U.D.L का भार $= w \times l$ है।

$$= 20 \times 1{\cdot}5 = 30 \text{ kN}$$

धरन के विक्षेप में C से B तक वक्र न होकर सरल रेखा होगी।

$$\therefore \quad \text{ढलान } \theta_B = \theta_C = \frac{wl^3}{6EI} = \frac{Wl^2}{6EI} \text{ (सूत्र)}$$

$$= \frac{(20 \times 1{\cdot}5) \times 1000 \times (1{\cdot}5 \times 1000)^2}{6 \times 2 \times 10^5 \times 9500 \times 10^4} = 0{\cdot}000592 \text{ Radian}$$

$$= 0{\cdot}034°$$

उत्तर

∵ स्वतन्त्र सिरे B पर अधिक विक्षेप (max deflection) होगा।

$\therefore$ $y_B = y_C + \theta_C \times BC$ सूत्र में मान रखने पर,

$$= \frac{Wl^3}{8EI} + \frac{Wl^2}{6EI} \times (L - l)$$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{(30\times1000)\times(1{\cdot}5\times1000)^2}{8\times2\times10^5\times9500\times10^4} + 0{\cdot}000592\times(1\times1000)$$

$$= 1{\cdot}258 = 1{\cdot}26 \text{ mm}$$

उत्तर

Method-II

∵ दिया है $E = 2\times10^5 \text{ MPa} = 2\times10^5 \text{ N/mm}^2$

$$I = 9500 \text{ cm}^4 = 9500\times1000 \text{ mm}^4 = 95\times10^6 \text{ mm}^4$$

बद्ध सिरे (Fixed end) A पर Max. Bending Moment,

$$M_A = (wl)\times\frac{l}{2} = (20\times1{\cdot}5)\times\frac{1{\cdot}5}{2} = 22{\cdot}5 \text{ kN-m} = 22{\cdot}5\times10^6 \text{ N-mm}$$

चित्र (c) के अनुसार बने B.M.D. का क्षेत्रफल (area),

$$A = \frac{b\times h}{3} = \frac{l\times M_A}{3} = \frac{(1{\cdot}5\times1000)\times22{\cdot}5\times10^6}{3}$$

$$= 1{\cdot}125\times10^{10}$$

गु० के० (G) की दायें सिरे B से दूरी $= \frac{3}{4}\times l + (L-l)$

$$\therefore \quad \bar{X} = \frac{3}{4}\times(1{\cdot}5\times1000) + (2{\cdot}5-1{\cdot}5)\times1000 \text{ mm}$$

$$= 2125 \text{ mm}$$

अब घूर्ण क्षेत्रफल विधि (Moment area method) से—

$$y_{max} = y_B = \frac{A\bar{X}}{EI} \quad \text{(सूत्र)}$$

$$= \frac{(1{\cdot}125\times10^{10})\times2125}{2\times10^5\times95\times10^6} = 1{\cdot}258 = 1{\cdot}26 \text{ mm}$$

उत्तर

अधिकतम ढलान (slope), $\theta_B = \theta_C = \frac{A}{EI}$ (सूत्र)

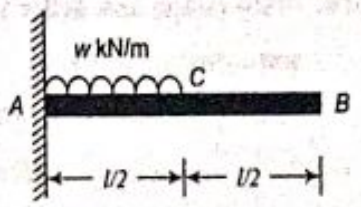
$$= \frac{1{\cdot}125\times10^{10}}{2\times10^5\times95\times10^6} = 0{\cdot}000592 \text{ radian}$$

उत्तर

उदाहरण 9. एक प्रास धरन (cantilever) की लम्बाई *l* तथा नमन दृढ़ता (flexural rigidity) *EI* है। बद्ध सिरे से आधी लम्बाई पर एक-समान बंटित भार (U.D.L.) लग रहा है। तब मुक्त सिरे (Free End) की प्रवणता तथा विक्षेप ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2008)**

हल—माना प्रश्नानुसार लम्बाई तक U.D.L., *w* kN/m का लग रहा है।

∵ अधिकतम विक्षेप तथा ढलान स्वतन्त्र सिरे *B* पर ही होगा।



चित्र 6.20

∴ $y_B = y_C + \theta_C \times BC$ सूत्र से

B पर विक्षेप $y_B = \frac{\left(w\times\frac{l}{2}\right)\times\left(\frac{l}{2}\right)^3}{8\,EI} + \frac{\left(w\times\frac{l}{2}\right)\times\left(\frac{l}{2}\right)^2}{6\,EI}\times\left(\frac{l}{2}\right)$

$$= \frac{wl^4}{16\times8\times EI} + \frac{wl^4}{16+6\,EI} = \frac{wl^4}{EI}\left[\frac{1}{128}+\frac{1}{96}\right]$$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{wl^4}{EI}\left[\frac{3+4}{384}\right] = \frac{7\,wl^4}{384}$$ उत्तर

तथा ढलान $$\theta_C = \frac{\left(w \times \frac{l}{2}\right) \times \left(\frac{l}{2}\right)^2}{6\,EI} = \frac{w \times l^3}{48\,EI}$$ उत्तर

उदाहरण 10. एक 4m लम्बे cantilever beam के मुक्त सिरे (free end) पर एक संकेन्द्रित भार (बिन्दु भार Point Load) लगा है। यदि धरन (beam) में अधिकतम ढलान (max. slope) 1·5° है तो मुक्त सिरे B पर अधिकतम विक्षेप (max. deflection) ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है, span of beam, $L = 4\text{m}$

Maximum Slope, $\theta_{max} = \theta_B = 1{\cdot}5° = 1{\cdot}5 \times \frac{\pi}{180}$

$= 0{\cdot}02618$ radian (given)

Deflection at free end (B), $y_{max} = ?$

∴ धरन की इस स्थिति में (In this case of beam)—

Max. Slope, $\theta_{max} = \frac{WL^2}{2EI}$ (सूत्र)

∴ $0{\cdot}02618 = \frac{WL^2}{2EI}$ या $\frac{WL^2}{EI} = 2 \times 0{\cdot}02618$

$= 0{\cdot}05236$

$\frac{WL^2}{EI}$ का मान विक्षेप (Deflection) के सूत्र में रखने पर,

$$y_{max} = y_B = \frac{WL^3}{3EI}$$ (सूत्र)

$$= \frac{WL^2}{EI} \times \frac{L}{3}$$

$$= 0{\cdot}05236 \times \frac{4}{3}$$

$= 0{\cdot}06981\ \text{m} = 69{\cdot}81\ \text{mm}$

∴ Deflection at free end = 69·81 mm उत्तर

उदाहरण 11. एक 2·5 m लम्बे cantilever के मुक्त सिरे (Free end) पर 25 kN का बिन्दु भार (point load) तथा बद्ध सिरे (fixed end) से 1·3 m की दूरी पर 35 kN का बिन्दु भार लगा है। मुक्त सिरे पर अधिकतम ढलान तथा विक्षेप (slope and deflection) ज्ञात करें। जबकि $E = 2 \times 10^8\ \text{kN/m}^2$ तथा $I = 1{\cdot}5 \times 10^{-4}\ \text{m}^4$ है।

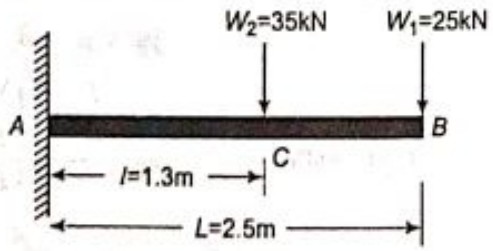
हल—चित्र 6.21 देखें।

दिया है, Beam की कुल लम्बाई $AB = L = 2{\cdot}5\ \text{m}$

$AC = l = 1{\cdot}3\ \text{m}$

भार (Load), $W_1 = 25\ \text{kN}$

$W_2 = 35\ \text{kN}$



चित्र 6.21

Scanned with CamScanner

Young's Modulus, $E = 2 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$

Moment of Inertia (M.O.I.), $I = 1{\cdot}5 \times 10^{-4} \text{ m}^4$

(1) मुक्त सिरे (Free end) B पर ढलान (slope) $\theta_B = W_1$ के कारण $\theta_1 + W_2$ के कारण θ_2

$$\therefore \quad \theta_{max} = \frac{W_1 L^2}{2EI} + \frac{W_2 l^2}{2EI} = \frac{1}{2EI}(W_1 L^2 - W_2 l^2)$$

$$= \frac{1}{2 \times 2 \times 10^8 \times 1{\cdot}5 \times 10^{-4}} \times [25 \times 2{\cdot}5^2 - 35 \times 1{\cdot}3^2]$$

या $\theta_{max} = 0{\cdot}00359$ radian उत्तर

(2) मुक्त सिरे (Free End) B पर अधिकतम विक्षेप (max. deflection)

$y_B = W_1$ के कारण विक्षेप + W_2 के कारण विक्षेप

$$= \left[\frac{W_1 L^3}{3EI}\right] + \left[\frac{W_2 l^3}{3EI} + \frac{W_2 l^2}{2EI} \times (L - l)\right]$$

यहाँ $y_{B_2} = y_C + \theta_C \times BC$

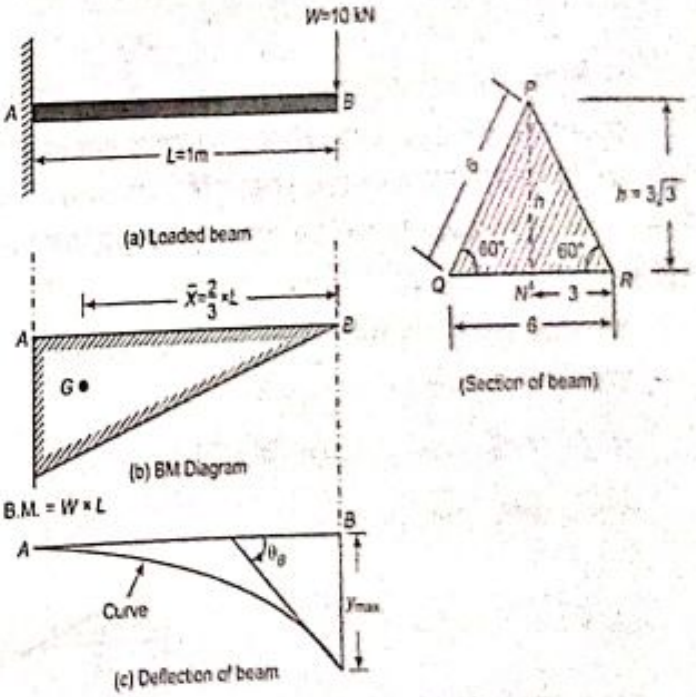
$$= \left[\frac{25 \times 2{\cdot}5^3}{3 \times 2 \times 10^8 \times 1{\cdot}5 \times 10^{-4}}\right] + \left[\frac{35 \times 1{\cdot}3^3}{3 \times 2 \times 10^8 \times 1{\cdot}5 \times 10^{-4}} + \frac{35 \times 1{\cdot}3^2 + (25 - 1{\cdot}3)}{2 \times 2 \times 10^8 \times 1{\cdot}5510^{-4}}\right]$$

$$= (0{\cdot}00434) + (0{\cdot}000854 + 0{\cdot}001183)$$

$$= 0{\cdot}006377 \text{ m} = 6{\cdot}377 \text{ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 12. एक त्रिभुजाकार परिच्छेद की कैन्टीलीवर धरन के काट की प्रत्येक भुजा 6 cm तथा धरन की लम्बाई 1 m है। त्रिभुजाकार परिच्छेद (triangular section) की एक भुजा क्षैतिज है तथा धरन के मुक्त सिरे (free end of beam) पर 10 kN का भार लगा है। कैन्टीलीवर के मुक्त सिरे का विक्षेप तथा ढलान ज्ञात कीजिये। इसके पदार्थ का $E = 200$ GPa मानिये।

हल—प्रश्न के अनुसार चित्र 6.22 देखें।



चित्र 6.22

Scanned with CamScanner

चलें $E = 200\,\text{GPa} = 2\times10^5\ \text{N/mm}^2$ है।

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{3} \text{ या } h = 3\tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$$

काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.), $I = \dfrac{b\times h^3}{36}$ सूत्र से

$$I = \frac{6\times(3\sqrt{3})^3}{36} = 23{\cdot}38\,\text{cm}^4$$

या $I = 23{\cdot}38\times10^4\ \text{mm}^4$

नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) का क्षेत्रफल (area)

$$A = \frac{L\times WL}{2} = \frac{WL^2}{2} \text{ तथा } \bar{X} = \frac{2}{3}\times L$$

∴ मुक्त सिरे B पर विक्षेप (max deflection)

$$y_{max} = \frac{A\bar{X}}{EI} = \frac{\frac{WL^2}{2}\times\frac{2}{3}L}{EI} = \frac{WL^3}{3EI}$$

$$y_{max} = y_B = \frac{(10\times1000)\times(1000)^3}{3\times2\times10^5\times23{\cdot}38\times10^4} = 71{\cdot}28\,\text{mm}$$ उत्तर

Max. slope $\theta_{max} = \theta_B = \dfrac{A}{EI} = \dfrac{WL^2}{2EI}$ (सूत्र)

$$\theta_{max} = \frac{(10\times1000)\times(1000)^2}{2\times2\times10^5\times23{\cdot}38\times10^4} = 0{\cdot}1069 \text{ Radian}$$ उत्तर

** **विशेष–शुद्धालम्ब धरन (Simply Supported Beam) पर आधारित प्रश्न**

उदाहरण 13. एक 4 m विस्तार की शुद्ध आलम्बित धरन (S.S. beam) की काट 150 mm चौड़ी तथा 250 mm गहरी है। इसके मध्य में (at middle) कितना बिन्दु भार (point load) W लगाया जाये ताकि मध्य में अधिकतम विक्षेप (max. deflection) 12 mm हो। धरन का अधिकतम ढलान (slope) भी ज्ञात करें। $E = 6\times10^6\ \text{kN/m}^2$ लीजिये।

हल—दिया है, धरन का विस्तार (Span), $L = 4\ \text{m} = 4000\ \text{mm}$

काट की चौड़ाई (width of section), $b = 150\ \text{mm}$

काट की गहराई (depth of section), $d = 250\ \text{mm}$

काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) $I = \dfrac{b\times d^3}{12}$ (सूत्र)

$$I = \frac{150\times(250)^3}{12} = 1{\cdot}953\times10^8\ \text{mm}^4$$

धरन के मध्य में विक्षेप (deflection), $y_c = y_{max} = 12\ \text{mm}$

माना केन्द्र पर W kN का Point Load लगा है।

Scanned with CamScanner

(1) अधिकतम विक्षेप (max. deflection) $y_{max} = \frac{WL^3}{48\,EI}$ (सूत्र)

$$12 = \frac{(W \times 1000) \times (4000)^3}{48 \times (6 \times 10^3) \times 1{\cdot}953 \times 10^8} \quad [\because E = 6 \times 10^6 \text{kN/m}^2$$

$$= 6 \times 10^3 \text{N/mm}^2]$$

$$W = 10{\cdot}55 \text{ kN}$$

∴ उत्तर

(2) अधिकतम ढलान (max. slope), $\theta_{max} = \frac{WL^2}{16EI}$ (सूत्र)

$$\theta_{max} = \frac{WL^2}{16EI} = \frac{(10{\cdot}55 \times 1000) \times (4000)^2}{16 \times (6 \times 10^3) \times 1{\cdot}953 \times 10^8}$$

$$= 0{\cdot}009 \text{ Radian}$$ उत्तर

उदाहरण 14. 4m के फैलाव की एक सामान्य रूप से आलम्बित धरन (a simply supported beam of span 4 m) के पूरे विस्तार (span) पर 20 kN/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है। धरन में अधिकतम विक्षेप (max. deflection) तथा ढलान (slope) की गणना करें। यहाँ $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 तथा $I = 5 \times 10^7$ mm^4 है।

(U.P. 2013)

हल—चित्र 6.22 देखें।

इस धरन (beam) का B.M. Diagram U.D.L. के कारण वक्र रूप (curved shape) में होगा (चित्र 6.22 (b)) देखें।

इसमें अधिकतम नमन घूर्ण (B.M.)

$$M = \frac{wL^2}{8} = \frac{20 \times 4^2}{8} \text{ kN-m} = 40 \times 10^6 \text{N-mm} = h \quad \text{(माना)}$$

तथा क्षेत्रफल $A = \frac{2}{3} \times b \times h$ (सूत्र) द्वारा

$$= \frac{2}{3} \times (2 \times 1000) \times 40 \times 10^6$$

$$= 5{\cdot}33 \times 10^{10}$$

गु०के० (G) की B से दूरी

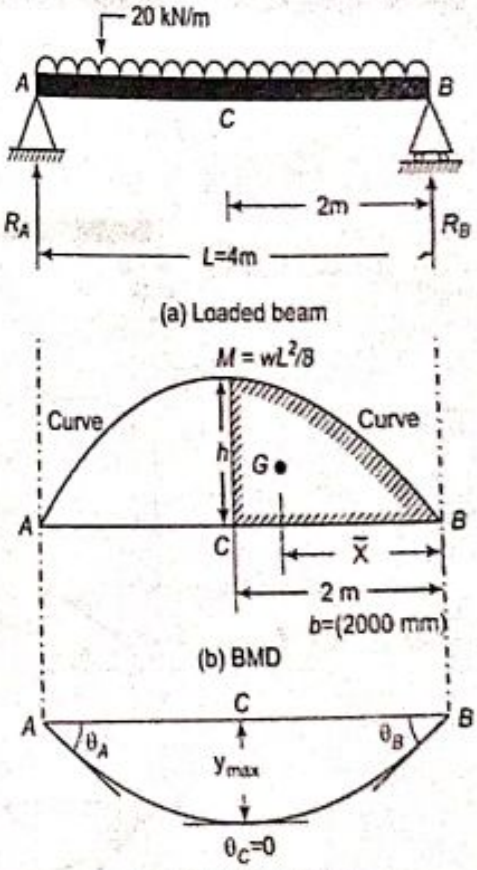
$$\bar{X} = \frac{5}{8} \times b \quad \text{(सूत्र)}$$

$$= \frac{5}{8} \times (2 \times 1000) = 1250 \text{ mm}$$

∵ विक्षेप (deflection), धरन के मध्य में अधिकतम होगा।

∴ $y_{max} = y_C = \frac{A\bar{X}}{EI}$ सूत्र से

$$= \frac{5{\cdot}33 \times 10^{10} \times 1250}{2 \times 10^5 \times 5 \times 10^7} = 6{\cdot}666 \text{ mm} = 6{\cdot}7 \text{ mm}$$ उत्तर



चित्र 6.23

Scanned with CamScanner

∵ दोनों सिरों पर ढलान (slope) समान होगा। अतः $\theta_A = \theta_B = \frac{A}{EI}$ सूत्र से

$$\theta_{max} = \theta_A = \theta_B = \frac{5 \cdot 33 \times 10^{10}}{2 \times 10^5 \times 5 \times 10^7} = 0 \cdot 00533 \text{ radian}$$

दूसरी विधि (IInd Method)— उत्तर

धरन के केन्द्र पर अधिकतम विक्षेप (max. deflection)

$$y_{max} = y_C = \frac{5}{384} \times \frac{WL^3}{EI}$$ सूत्र से,

जहाँ W = U.D.L. का भार या $W = 20 \times 4 = 80$ kN

$$\therefore \quad y_{max} = \frac{5}{384} \times \frac{(80 \times 1000) \times (4000)^3}{(2 \times 10^5) \times (5 \times 10^7)} = 6 \cdot 666 \text{ mm}$$

$$= 6 \cdot 7 \text{ mm}$$ उत्तर

के दोनों सिरों पर ढलान समान होगा तथा ढलान अधिकतम भी होगा।

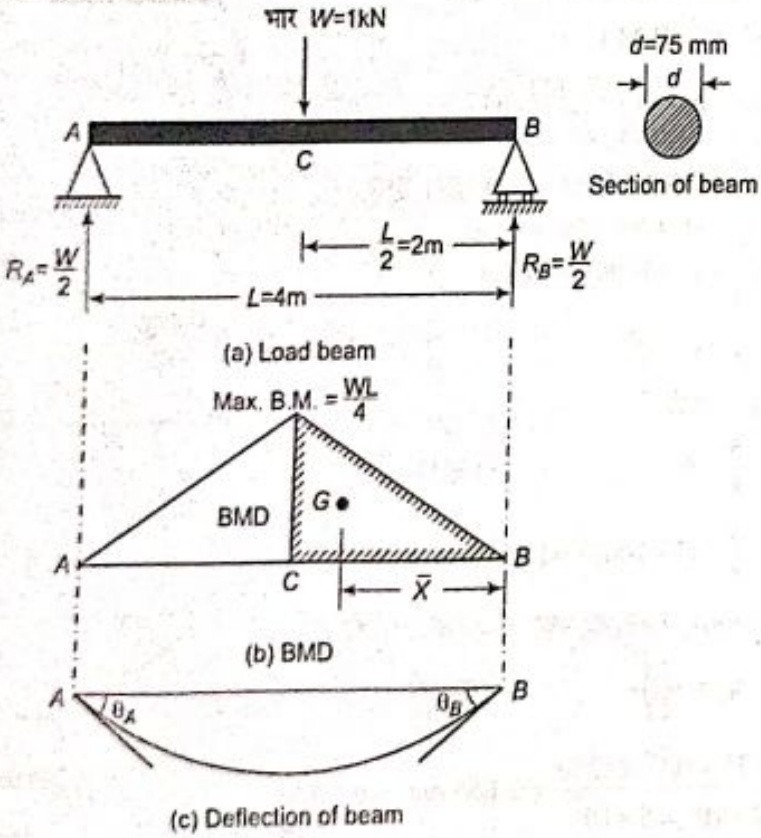
∴ ढलान (slope), $\theta_{max} = \theta_A = \theta_B = \frac{WL^2}{24EI}$ सूत्र से

$$= \frac{(80 \times 1000) \times (4000)^2}{24 \times (2 \times 10^5) \times (5 \times 10^7)} = 0 \cdot 0053 \text{ radian}$$ उत्तर

उदाहरण 15. एक 75 mm व्यास वाली वृत्ताकार परिच्छेद के धरन पर, जो सरल आधारित है तथा जिसकी लम्बाई 4 m है, उसके मध्य लम्बाई पर एक 1 kN का संकेन्द्री भार लग रहा है। आघूर्ण क्षेत्रफल विधि का प्रयोग करते हुए धरन का अधिकतम विक्षेप तथा आधारों पर प्रवणता ज्ञात कीजिए। E का मान 200×10^3 N / mm^2 मान लीजिए।

(U.P. 2006)

हल—चित्र 6.24 देखें।



चित्र 6.24

Scanned with CamScanner

धरन (beam) की काट (परिच्छेद) का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.)

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi (75)^4}{64} = 1{\cdot}55 \times 10^6$$

Beam के केन्द्र C पर अधिकतम नमन घूर्ण

$$(\text{Max. B.M.}) = \frac{W}{2} \times \frac{L}{2} = \frac{WL}{4} \text{ kN-m}$$

B.M. diagram के shaded भाग का क्षेत्रफल

$$A = \frac{\frac{L}{2} \times \frac{WL}{4}}{2} = \frac{WL^2}{16} \text{ तथा } \bar{X} = \frac{2}{3} \times \frac{L}{2} = \frac{L}{3}$$

अब नमन घूर्ण क्षेत्रफल विधि (moment area method) से धरन के केन्द्र पर अधिकतम विक्षेप (max. deflection),

$$y_{max} = \frac{A\bar{X}}{EI} \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$= \frac{\frac{WL^2}{16} \times \frac{L}{3}}{EI} = \frac{WL^3}{48EI} \qquad \text{सूत्र में मान रखने पर,}$$

$$y_{max} = \frac{(1 \times 1000) \times (4 \times 1000)^3}{48 \times (200 \times 10^3) \times 1{\cdot}55 \times 10^6} = 4{\cdot}3 \text{ mm}$$

∵ आधारों A तथा B पर प्रवणता (सिरों का ढलान) अधिकतम होगा

∴ $$\theta_{max} = \theta_A = \theta_B = \frac{A}{EI} \text{ (सूत्र)}$$

या $$\theta_{max} = \frac{WL^2}{16EI} \qquad \left(\because A = \frac{WL^2}{16} \text{ है}\right)$$

$$= \frac{(1 \times 1000) \times (4 \times 1000)^2}{16 \times (200 \times 10^3) \times 1{\cdot}55 \times 10^6} = 0{\cdot}00322 \text{ Radian}$$

उत्तर

दूसरी विधि (IInd Method)

(1) धरन पर केन्द्रीय विक्षेप (deflection) $y_C \Rightarrow y_{max} = \frac{WL^3}{48EI}$ (सूत्र)

(2) धरन के सिरों पर ढलान (slope), $\theta_A \Rightarrow \theta_B \Rightarrow \theta_{max} = \frac{WL^2}{16EI}$ (सूत्र)

इन दोनों सूत्रों में मान रखकर भी विक्षेप (deflection) तथा ढलान (slope) के मान ज्ञात किये जा सकते हैं।

उदाहरण 16. एक I-काट की धरन पर भार लगा है, जो चित्र 6.24 (a) में दर्शाया गया है। धरन के परास के केन्द्र पर विक्षेप (deflection) का मान निकालिये। I-काट की विमायें निम्नवत् हैं—

वेब (Web) तथा फ्लैन्ज (Flange) की मोटाई = 20 mm

फ्लैन्ज (Flange) की चौड़ाई = 60 mm

काट (Section) की गहराई = 80 mm

E = 200 Gpa ($= 2 \times 10^5$ N/mm^2) मानिये। **(U.K. 2004 (W))**

Scanned with CamScanner

हल—चित्र 6.25 में (a), (b), (c), (d) देखें।

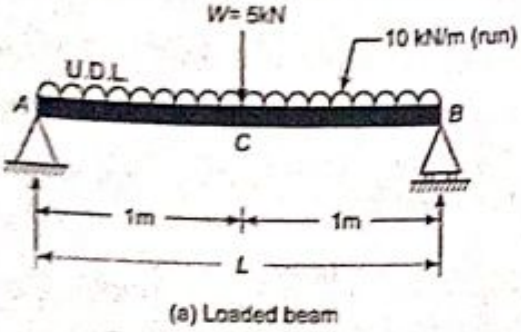
धरन की काट का जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.)

$$I_{XX} = \frac{60 \times 80^3}{12} - \frac{(60-20) \times (80-40)^3}{12}$$

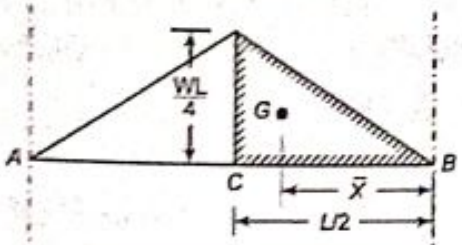
$$= \frac{60 \times 80^3}{12} - \frac{40 \times 40^3}{12}$$

$$= 2346666{\cdot}667 \text{ mm}^4$$

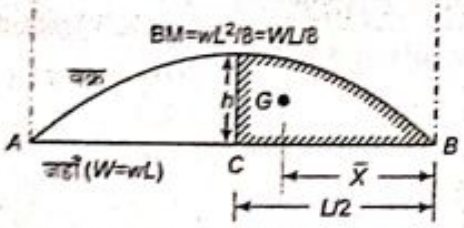
$$= 234{\cdot}67 \times 10^4 \text{ mm}^4$$



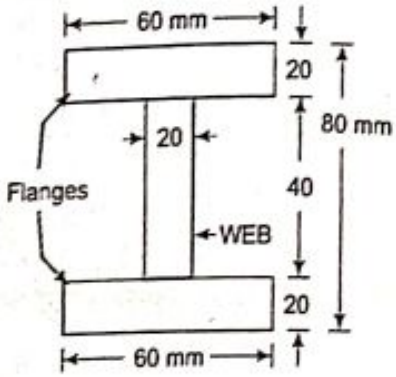
(a) Loaded beam



(b) BMD only for point load on beam



(c) BMD only for UDL on beam



(d) Section of beam

∵ U.D.L. का कुल भार (Total Load) $W = w \times L$ है।

∴ $\frac{wL^2}{8} = \frac{WL}{8}$ है।

चित्र 6.25

स्थिति Ist—माना धरन पर मध्य में केवल बिन्दु भार लगा है। तब इस स्थिति में नमन घूर्ण आरेख (B.M.D.) चित्र 6.25 (b) के अनुसार बनेगा।

∴ क्षेत्रफल (Area of shaded protion), $A = \frac{\frac{L}{2} \times \frac{WL}{4}}{2} = \frac{WL^2}{16}$

तथा $\bar{X} = \frac{2}{3} \times \frac{L}{2} = \frac{L}{3}$

Scanned with CamScanner

∴ केन्द्र पर बिन्दु भार (Point Load) W के कारण विक्षेप (deflection)

$$y_{C_1} = \frac{A\bar{X}}{EI} = \frac{\frac{WL^2}{16} \times \frac{L}{3}}{EI} = \frac{WL^3}{48EI} \quad \text{(सूत्र)}$$

$$= \frac{(5 \times 1000) \times (2 \times 1000)^3}{48 \times 2 \times 10^5 \times 234{\cdot}67 \times 10^4} = 1{\cdot}7755 \text{ mm}$$

स्थिति IInd—माना अब धरन (Beam) पर केवल समवितरित भार (U.D.L.) लगा है तब B.M.D. चित्र 6.24 (c) के अनुसार बनेगा।

∴ क्षेत्रफल (area of shaded part), $A = \frac{2}{3} \times b \times h$ सूत्र

$$A = \frac{2}{3} \times \frac{L}{2} \times \frac{WL}{8}$$ जहाँ $W = w \times L$ है।

या $$A = \frac{WL^2}{24} \text{ तथा } \bar{X} = \frac{5}{8} \times \text{base} = \frac{5}{8} \times \frac{L}{2} = \frac{5L}{16}$$

∴ U.D.L. के कारण, धरन के मध्य अधिकतम विक्षेप (deflection)

$$y_{C_2} = \frac{A\bar{X}}{EI} \text{ सूत्र में मान रखने पर}$$

$$= \frac{\frac{WL^2}{24} \times \frac{5L}{16}}{EI} = \frac{5}{384} \times \frac{WL^3}{EI} \quad \text{(सूत्र)}$$

$$= \frac{5}{384} \times \frac{(10 \times 2 \times 1000) \times (2 \times 1000)^3}{2 \times 10^5 \times 234{\cdot}67 \times 10^4} = 4{\cdot}4388 \text{ mm}$$

∴ दोनों प्रकार के भारों (loads) के कारण धरन के मध्य में कुल विक्षेप (total deflection at centre of beam)

$$y_{max} = y_{C_1} + y_{C_2} = 1{\cdot}7755 + 4{\cdot}4388 = 6{\cdot}21 \text{ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 17. एक आयताकार धरन की काट 20 cm × 12 cm तथा लम्बाई 5 m है और वह अपने सिरों पर शुद्धालम्बित है। ज्ञात कीजिये कि धरन की अधिकतम सामर्थ्य की अवस्था के लिये उसके मध्य विस्तार (span) पर कितने संकेन्द्रित भार की आवश्यकता होगी ताकि अधिकतम विस्थापन 15 mm से अधिक न होने पाये। यह भी ज्ञात कीजिये कि धरन की सम्पूर्ण लम्बाई पर कितना समवितरित भार रखा जाये जो उतना ही अधिक विस्थापन दे सके। $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$। **(U.K. 2011, S)**

हल—धरन की आयताकार काट (rectangulat section) का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.)

$$I = \frac{120 \times (200)^3}{12} = 8 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

धरन का विस्तार (span of beam), $L = 5 \text{ m} = 5000 \text{ mm}$

∵ धरन के मध्य में विस्थापन (deflection at centre) $y_{max} = 15 \text{ mm}$ (given)

माना beam के केन्द्र (centre) पर लगा संकेन्द्रित भार W kN है।

∴ $$y_{max} = \frac{WL^3}{48EI}$$ सूत्र से

$$15 = \frac{(W \times 1000) \times (5000)^3}{48 \times 2 \times 10^5 \times 8 \times 10^7} \text{ या } W = 92{\cdot}16 \text{ kN}$$ उत्तर

Scanned with CamScanner

अब दूसरी स्थिति में (IInd condition)—

अब धरन की सम्पूर्ण लम्बाई (whole length of beam) पर w kN/m का U.D.L. लगा है ताकि विक्षेप (deflection) $y_{max} = 15$ mm ही रहे।

$$\therefore \quad y_{max} = \frac{5}{384} \times \frac{WL^3}{EI} \qquad \text{सूत्र में } W = w \times L \text{ है।}$$

$$15 = \frac{5}{384} \times \frac{(W \times 1000) \times (5000)^3}{2 \times 10^5 \times 8 \times 10^7}$$

या $$W = \frac{15 \times 384 \times 2 \times 10^5 \times 8 \times 10^7}{5 \times 1000 \times (5000)^3} = 147{\cdot}456 \text{ kN}$$

उत्तर

उदाहरण 18. एक शुद्धालम्बित धरन की विस्तृति 10 m है और उस पर 160 kN का अभिकेन्द्रित भार मध्य बिन्दु पर लगा हुआ है। यदि अधिकतम फाइबर (fibre) प्रतिबल नमन के कारण 120 MPa और मध्य विस्थापन 1/400 विस्तृति से अधिक न हो तो धरन की गहराई ज्ञात कीजिये। $E = 2 \times 10^5$ N / mm^2 मानिये।

हल—दिया है, विस्तृति (span of beam) = 10 m = 10×1000 mm **(U.K. 2009, W) (U.P. 2003)**

धरन के मध्य में भार (load at centre of beam), $W = 160$ kN

$= 160 \times 1000$ N

नमन प्रतिबल (bending stress) $f_b = 120$ Mpa $= 120$ N / mm^2

धरन के मध्य में विस्थापन (deflection at centre) $y_C = \frac{1}{400} \times L$ (दिया है)

या $$y_C = \frac{1}{400} 10 \times 100 = 25 \text{ mm}$$

माना धरन की काट की गहराई (h) है।

$$y_{max} = \frac{WL^3}{48EI}$$ सूत्र से

$$25 = \frac{(160 \times 1000) \times (10 \times 1000)^3}{48 \times 2 \times 10^5 \times I} \text{ या } I = 666666666{\cdot}7$$

$$= 6{\cdot}67 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

अब नमन समीकरण (bending equation) से—

$$\frac{M}{I} = \frac{f \text{ या } \sigma}{y}$$ सूत्र में

Bending Moment $$(M) = \frac{WL}{4} = \frac{(160 \times 1000) \times (10 \times 1000)}{4}$$

या $$M = 4 \times 10^8 \text{ N-mm}$$

$$\because \quad y = \frac{\text{काट की गहराई}}{2} = \frac{h}{2} \text{ होता है।}$$

$$\therefore \quad \frac{M}{I} = \frac{f}{y} \text{ या } \frac{4 \times 10^8}{6{\cdot}67 \times 10^8} = \frac{120}{h/2}$$

या $$h = \frac{6{\cdot}67 \times 120 \times 2}{4} = 400{\cdot}2 \cong 400 \text{ mm}$$

उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 19. 4·8 m विस्तृति (span) वाली एक आयताकार काट (rectangular section) की काष्ठ धरन अपने सिरों पर शुद्धालम्बित (simply supported) है। इसकी पूरी विस्तृति (span) पर 45 kN का सम्पूर्ण समवितरित भार (U.D.L.) लगाया जाता है। धरन की चौड़ाई (b) तथा गहराई (d) के लिए अधिकतम मान निकालें यदि अधिकतम बंकन प्रतिबल (beding stress) 7·0 N/mm^2 से अधिक न होने पाये तब अधिकतम विक्षेप (deflection) 9·5 mm तक सीमित हो। काष्ठ के लिए $E = 1{\cdot}05 \times 10^4$ N/mm^2 लें। (U.K. 2008, W) (U.P. 2002)

हल—विस्तार (span), $L = 4{\cdot}8$ m $= 4800$ mm

U.D.L. का कुल भार $W = 45$ kN $= 45000$ N

नमन प्रतिबल (bending stress) $f = 7$ N/mm^2

Beam के मध्य में अधिकतम विक्षेप (deflection) $= 9{\cdot}5$ mm

$E = 1{\cdot}05 \times 10^4$ N/mm^2 है। काट की माप, $b = ?, d = ?$

अधिकतम घूर्ण (max. B.M.), $M = \frac{wL^2}{8} = \frac{WL}{8} = \frac{45000 \times (4800)}{8}$

$$M = 27 \times 10^6 \text{ N-mm}$$

$\therefore$ $I = \frac{b \times d^3}{12}$ तथा $y = \frac{d}{2}$

$\frac{M}{I} = \frac{f}{y}$ सूत्र से,

$\frac{27 \times 10^6}{I} = \frac{7}{y}$ या $I = \frac{27 \times 10^6}{7} \times y$ ... (i)

$\because$ अधिकतम विक्षेप (deflection), $= \frac{5}{384} \times \frac{WL^3}{EI}$ सूत्र से,

$$9{\cdot}5 = \frac{5}{384} \times \frac{45000 \times (4800)^3}{1{\cdot}05 \times 10^4 \times \frac{27 \times 10^6}{7} \times y}$$

या $y = \frac{5 \times 45000 \times (4800)^3 \times 7}{9{\cdot}5 \times 384 \times 1{\cdot}05 \times 10^4 \times 27 \times 10^6} = 168{\cdot}42$ mm

परन्तु $y = \frac{d}{2}$ या $d = 2y = 2 \times 168{\cdot}42 = 336{\cdot}84 = 337$ mm उत्तर

समीकरण (i) से $I = \frac{27 \times 10^6}{7} \times 168{\cdot}42 = 649620000$ mm^4

परन्तु $I = \frac{b \times d^3}{12}$

या $b = \frac{12I}{d^3} = \frac{12 \times 649620000}{(337)^3} = 203{\cdot}68 = 204$ mm उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 20. d व्यास तथा L लम्बाई की एक छड़ P बल के खिंचाव से δ बढ़ जाती है। यदि इसी छड़ को शुद्धालम्ब धरन (simply supported beam) के रूप में प्रयोग किया जाये और केन्द्र पर W भार रखा जाये तो सिद्ध कीजिये कि धरन (beam) का अधिकतम विस्थापन (deflection),

$$y = \frac{W\delta L^2}{3Pd^2}$$

हल—प्रतिबल-विकृति और यंग मांपाक वाले अध्याय से

लम्बाई में परिवर्तन, $\Delta l = \dfrac{F \times l}{A \times E}$ सूत्र में मान रखने पर

$$\delta = \frac{P \times L}{\frac{\pi d^2}{4} \times E} \text{ या } E = \frac{4PL}{\pi d^2 \times \delta}$$

अब simply supported beam के मध्य में W भार से विक्षेप (deflection at centre),

$$y_{max} = \frac{WL^3}{48EI} \text{ सूत्र से}$$

max. deflection, $$y = \frac{WL^3}{48 \times \frac{4PL}{\pi d^2 \times \delta} \times \frac{\pi d^4}{64}}$$

$$y = \frac{64 \times \pi d^2 . \delta \times WL^3}{48 \times 4PL \times \pi d^4} = \frac{W.\delta.L^2}{3Pd^2}$$

उत्तर

उदाहरण 21. 4 m विस्तार की लकड़ी की धरन की काट 10 cm चौड़ी तथा 16 cm गहरी है। इसकी पूरी लम्बाई पर 500 Kg/m (या 5 kN/m) का U.D.L. लगा है। धरन के मध्य बिन्दु पर विस्थापन (deflection) और सिरों पर ढलान (slope) की गणना करें। $E = 0{\cdot}8 \times 10^6$ kg / cm^2 है। **(U.K. 2013, S)**

हल—धरन की काट का $I = \dfrac{bd^2}{12} = \dfrac{100 \times 160^3}{12}$

या $I = 341{\cdot}33 \times 10^5$ mm^4 तथा $E = 0{\cdot}8 \times 10^5$ N / mm^2 है।

Beam पर U.D.L. का कुल भार $W - w \times L = 5 \times 4 = 20$ kN $= 20 \times 1000$ N

∴ Deflection at centre of beam, $y = \dfrac{5}{384} \times \dfrac{WL^3}{EI}$ सूत्र से

∴ विस्थापन $$(y_{max}) = \frac{5}{384} \times \frac{(20 \times 1000) \times (4000)^3}{(0{\cdot}8 \times 10^5) \times (341{\cdot}33 \times 10^5)} = 6{\cdot}1 \text{ mm}$$

उत्तर

दोनों सिरों पर ढलान (slope at the ends),

$$\theta_A = \theta_B = \frac{WL^2}{24EI} = \frac{(2 \times 10^4) \times (4000)^2}{24 \times 0{\cdot}8 \times 10^5 \times 341{\cdot}33 \times 10^5}$$

$$= 0{\cdot}00488 \text{ radian}$$

उत्तर

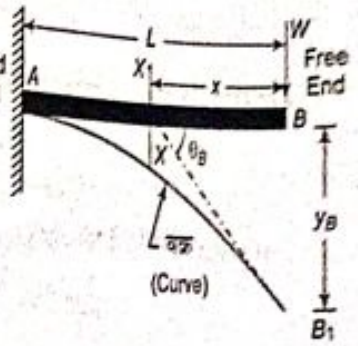
Scanned with CamScanner

§ 6.4 धरन पर भार की कुछ मानक दशाओं (Standard Cases) में दोहरे समाकलन (Double Integration) द्वारा अधिकतम विक्षेप तथा ढलान ज्ञात करना।

(Double Integration Method for Slope and Deflection)

6.4.1 Cantilever with a Point Load at its Free End

माना चित्र 6.26 में कैन्टीलीवर धरन के मुक्त (स्वतन्त्र) सिरे B पर एक बिन्दु भार W लगा है। इस धरन (beam) के स्वतन्त्र सिरे B से x दूरी पर कोई काट $(X-X)$ है। अब इस काट X पर नमन घूर्ण (B.M.)



चित्र 6.26

$$M_x = -W.x$$

[(–ve) चिन्ह (sign) clockwise moment के कारण है।]

अब
$$EI\,.\frac{d^2y}{dx^2} = -W.x \quad \ldots (i)$$

समाकलन (Integration) करने पर

$$EI.\frac{dy}{dx} = -W.\frac{x^2}{2} + c_1 \quad \ldots (ii)$$

[जहाँ c_1 = समाकलन स्थिरांक]

हम जानते हैं कि जब $x = L$ तब ढलान (slope) $\frac{dy}{dx} = 0$ है।

$$\therefore \quad 0 = -W.\frac{L^2}{2} + c_1 \text{ या } c_1 = \frac{WL^2}{2}$$

या समीकरण (ii) में मान रखने पर

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{Wx^2}{2} + \frac{WL^2}{2} \quad \ldots (iii)$$

यह ढलान समीकरण (Slope equation) है जिसके द्वारा हम किसी भी बिन्दु के लिए x का मान रखकर ढलान (slope) $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कर सकते हैं।

समीकरण (iii) का पुनः समाकलन (integration) करने पर

$$EI\,.(y) = -\frac{W}{2}\times\frac{x^3}{3} + \frac{WL^2}{2}x + c_2$$

$$(EI)\times y = -\frac{W}{6}x^3 + \frac{W}{2}L^2x + c_2 \quad \ldots (iv)$$

$\because$ जब $x = L$ है तब विक्षेप (deflection), $y = 0$ है।

$$\therefore \quad 0 = -\frac{WL^3}{6} + \frac{WL^3}{2} + c_2$$

या
$$c_2 = \frac{WL^3}{6} - \frac{WL^3}{2} \Rightarrow \frac{WL^3 - 3WL^3}{6} = -\frac{WL^3}{3}$$

समीकरण (iv) में मान रखने पर विक्षेप समीकरण (deflection equation)

$$(EI).y = -\frac{W}{6}x^3 + \frac{WL^2}{2}x - \frac{WL^3}{3} \quad \ldots (v)$$

Scanned with CamScanner

इस समीकरण (equation) में किसी भी बिन्दु के लिए x का मान रखकर धरन का उस बिन्दु पर विक्षेप (deflection) y का मान ज्ञात कर सकते हैं।

∵ हम जानते हैं कि ढलान तथा विक्षेप के अधिकतम मान स्वतन्त्र सिरे (Free End) B पर होंगे, जहाँ $x = 0$ होगा।

∴ समीकरण (iii) में $x = 0$ रखने पर, अधिकतम ढलान ($\theta_{max} \Rightarrow \theta_B$)

$$\therefore \quad (E.I.)\,\theta_B = -0 + \frac{WL^2}{2} \text{ या } \theta_B = \frac{WL^2}{2EI} \quad \text{(सूत्र)}$$

समीकरण (v) में $x = 0$ रखने पर, अधिकतम विक्षेप (max. deflection) y_B प्राप्त होगा।

$$\therefore \quad (EI)\,y_B = 0 + 0 - \frac{WL^3}{3} \text{ या } y_B = -\frac{WL^3}{3EI}$$

(–ve) sign विक्षेप नीचे की ओर (downwards) होने को दर्शाता है।

$$\therefore \quad y_{max} = y_B = \frac{WL^3}{3EI} \quad \text{(सूत्र)}$$

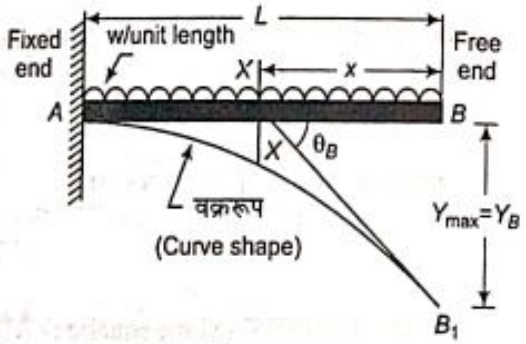
6.4.2 कैन्टीलीवर की पूरी लम्बाई पर w प्रति इकाई लम्बाई का समवितरित भार लगा है (Cantilever with a U.D.L. at its full length)

चित्र 6.27 में L लम्बाई के cantilever पर w/metre का U.D.L. लगा है। इसके सिरे B से x दूरी पर कोई काट $X-X$ । अब इस काट पर नमन आघूर्ण (B.M.)

$$M_x = -\frac{wx^2}{2}$$

(यहाँ –ve चिन्ह clockwise के कारण है)

$$\therefore \quad E.I\frac{d^2y}{dx^2} = M = -\frac{wx^2}{2}$$



चित्र 6.27

समाकलन (Integrate) करने पर

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{w}{2} \times \frac{x^3}{3} + c_1 \qquad (c_1 = \text{समाकलन स्थिरांक है})$$

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\left(\frac{w}{6}\right)x^3 + c_1 \quad \text{... (i)}$$

∵ $x = L$ के स्थान पर ढलान (slope) $\frac{dy}{dx} = 0$ होगा (बद्ध सिरे पर)।

$$\therefore \quad 0 = -\frac{w}{6}.L^3 + c_1 \text{ या } c_1 = \frac{w}{6}L^3$$

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\left(\frac{w}{6}\right) \times x^3 + \left(\frac{w}{6}\right)L^3 \quad \text{... (ii)}$$

यह ढलान समीकरण (slope equation) है। इसमें धरन (beam) के किसी भी बिन्दु के लिए x का मान रखकर ढलान $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ का मान ज्ञात कर सकते हैं।

Scanned with CamScanner

समीकरण (ii) का दोबारा समाकलन करने पर—

$$EI\,(y) = -\frac{w}{6} \times \frac{x^4}{4} + \frac{wL^3}{6}x + C_2 \qquad (C_2 = \text{स्थिरांक है})$$

$$EI\,(y) = -\left(\frac{w}{24}\right)x^4 + \left(\frac{wL^3}{6}\right)x + C_2 \qquad \text{... (iii)}$$

∵ बद्ध सिरे पर $x = L$ है, जहाँ पर विक्षेप (deflection) $y = 0$ होगा।

$$\therefore \quad 0 = -\left(\frac{w}{24}\right)L^4 + \frac{wL^4}{6} + C_2$$

या
$$C_2 = \frac{wL^4}{24} - \frac{wL^4}{6} = \frac{wL^4 - 4wL^4}{24} = -\frac{wL^4}{8}$$

समीकरण (iii) से,
$$EI\,(y) = -\left(\frac{w}{24}\right)x^4 + \left(\frac{wL^3}{6}\right)x - \frac{wL^4}{8} \qquad \text{... (iv)}$$

यह समीकरण (iv), विक्षेप समीकरण है। इसमें x के मान रखकर किसी भी बिन्दु के लिए विक्षेप (y) का मान ज्ञात कर सकते हैं।

∵ अधिकतम ढलान (slope) विक्षेप (deflection) स्वतन्त्र सिरे B पर है जिसके लिए सम्बन्धों (ii) तथा (iv) में $x = 0$ रखना होगा

$$\therefore \quad EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 + \frac{wL^3}{6} \text{ या } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{at\ B} \Rightarrow \theta_B = \frac{wL^3}{6EI} \qquad \text{(सूत्र)}$$

तथा
$$EI\,(y_{max}) = 0 + 0 - \frac{wL^4}{8} \text{ या } y_{max} = y_B = \frac{wL^4}{8EI} \qquad \text{(सूत्र)}$$

नोट—उपरोक्त दोनों सूत्रों में यदि U.D.L. का कुल भार $W = w \times L$ रखा जाये तब सूत्र निम्न हो जायेंगे।

$$\theta_B = \frac{WL^2}{6EI} \text{ तथा } y_B = \frac{WL^3}{8EI} \qquad \text{(सूत्र)}$$

6.4.3 कैन्टीलीवर के स्वतन्त्र सिरे B से हटाकर किसी अन्य बिन्दु पर बिन्दु भार लगा है (Cantilever with a point load at any Point)

चित्र 6.28 में cantilever के बद्ध सिरे A से l दूरी पर बिन्दु C पर point load W लगा है। C पर विक्षेप y_C तथा B पर विक्षेप y_B है और $\theta_B = \theta_C$ है। अत: प्राप्त हुए सूत्रों में L के स्थान पर l रखने पर,

$$\theta_C = \theta_B = \frac{wl^2}{2EI} \text{ तथा } y_C = \frac{Wl^3}{3EI}$$

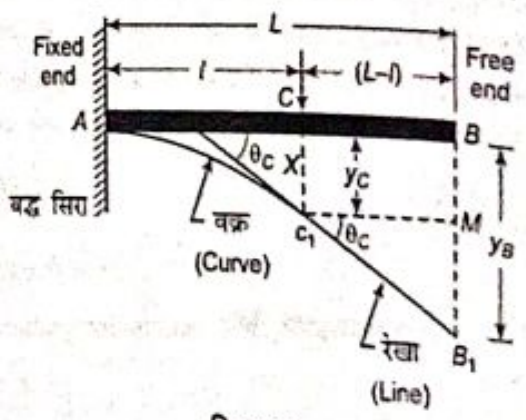
अब $\Delta C_1 M B_1$ में,

$$\tan\theta_C = \frac{MB_1}{C_1M} = \frac{(y_B - y_C)}{BC}$$

परन्तु $\tan\theta_C = \theta_C$ (कोण बहुत छोटा होने के कारण)

$$\therefore \quad y_B - y_C = \theta_C \times BC$$

या
$$y_B = y_C + \theta_C \times BC \qquad \text{(सूत्र)}$$



चित्र 6.28

Scanned with CamScanner

जहाँ $y_C = \frac{Wl^3}{3EI}$, $\theta_C = \frac{Wl^2}{2EI}$ तथा $BC = (L - l)$ है।

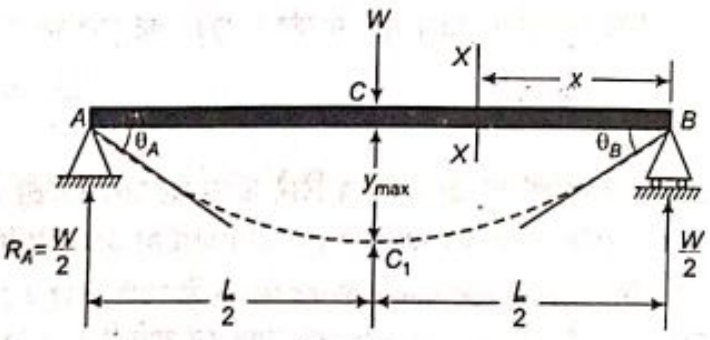
नोट—यदि Beam पर l लम्बाई तक U.D.L. लगा हो तो सूत्र $y_B = y_c + \theta_C \times BC$ में U.D.L. के सूत्रों में L के स्थान पर l रखकर y_C तथा θ_C के मान ज्ञात कर लेते हैं। अर्थात् अब $y_C = \frac{wl^4}{8EI} = \frac{Wl^3}{8EI}$ तथा $\theta_C = \frac{wl^3}{6EI} = \frac{Wl^2}{6EI}$ मान रखकर y_B ज्ञात करते हैं।

6.4.4 कैन्टीलीवर के स्वतन्त्र सिरे से कुछ दूरी तक समवितरित भार (Cantilever with U.D.L. (w/metre) at a distance BC from free end)

इस दशा में स्वतन्त्र सिरे B पर अधिकतम विक्षेप तथा ढलान ज्ञात करने के लिये सर्वप्रथम धरन की पूर्ण लम्बाई (L) पर एकसमान मान का U.D.L. लगाकार विक्षेप तथा ढलान, क्रमशः $y_{B_1} = \frac{W_1 L^3}{8EI}$ तथा ढलान $\theta_B = \frac{W_1 L^2}{6EI}$ [जहाँ $W_1 = wL$ है] ज्ञात करते हैं। इसके बाद धरन के खाली भाग $AC = l$ पर U.D.L. समान मान (w kN/m) का नीचे से ऊपर की ओर लगाते हैं, जिससे धरन का झुकाव (विक्षेप) (–ve) दिशा में ऊपर की ओर होता है। इसका मान बद्ध सिरे से l लम्बाई तक लगे U.D.L. के सूत्र, $y_{B_2} = y_C + \theta_C \times BC$ के द्वारा ज्ञात करते हैं। अर्थात् $y_{B_2} = \frac{W_2 l^3}{8EI} + \frac{W_2 l^2}{6EI} \times (L - l)$ [जहाँ $W_2 = wl$ है] सूत्र द्वारा विक्षेप ज्ञात करते हैं। फिर परिणामी विक्षेप (Resultant deflection) का मान (B पर), $y_B = y_{B_1} - y_{B_2}$ द्वारा ज्ञात हो जायेगा। इसी प्रकार परिणमी ढलान (Resultant Slope), $\theta_B = \frac{W_1 L^2}{6EI} - \frac{W_2 l^2}{6EI}$ से प्राप्त होता है।

6.4.5 एक शुद्धालम्ब धरन के मध्य में संकेन्द्रित भार (बिन्दु भार) (Simple supported Beam with a Central Point Load)

चित्र 6.29 में एक सरल आलम्बित धरन L लम्बाई की है जिसके मध्य बिन्दु C पर बिन्दु भार (Point Load) W कार्य करता है। अतः स्पष्ट है कि दोनों सिरों A तथा B पर प्रतिक्रियायें $R_A = R_B$ (आपस में समान मान $\frac{W}{2}$ की) होंगी।



चित्र 6.29

भार की इस स्थिति के कारण केन्द्र पर विक्षेप (deflection) अधिकतम तथा ढलान (slope) शून्य (zero) होगा और दोनों सिरों पर विक्षेप शून्य तथा ढलान (slope) अधिकतम और आपस में बराबर ($\theta_A = \theta_B$) परन्तु दिशा में विपरीत (एक clockwise तो दूसरा anticlockwise) होंगे। अब सिरे B से x दूरी पर स्थित काट $X - X$ पर नमन घूर्ण (Bending Moment) लेने पर,

$$M_x = R_B.x = \frac{W}{2}.x = \frac{W.x}{2}$$

[+ve due to anticlockwise moment or sagging of beam]

∴ दोहरे समाकलन विधि (double integration method) के सूत्र द्वारा

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M \Rightarrow \frac{W.x}{2} \quad \text{... (i)}$$

Scanned with CamScanner

समाकलन करने पर (Integrating above equation)

$$EI.\frac{dy}{dx}=\frac{Wx^2}{4}+C_1 \quad (C_1 \text{ समाकलन स्थिरांक है}) \qquad \text{... (ii)}$$

हम जानते हैं कि चित्र में $x=\frac{L}{2}$ दूरी पर ढलान (slope) $\frac{dy}{dx}=0$ है।

$$\therefore \quad 0=\frac{W}{4}\times\frac{L^2}{4}+C_1 \text{ या } C_1=-\frac{WL^2}{16}$$

अब c_1 का यह मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{Wx^2}{4}-\frac{WL^2}{16} \qquad \text{... (iii)}$$

यह ढलान समीकरण (slope equation) है जिसमें धरन पर किसी बिन्दु के लिए x का मान रखकर उस बिन्दु पर ढलान (slope) का मान ज्ञात कर सकते हैं। समीकरण (iii) का एक बार फिर समाकलन करने पर,

$$EI\,(y)=\frac{W}{4}\times\frac{x^3}{3}-\frac{WL^2}{16}x+C_2$$

हम चित्र से जानते हैं कि $x=0$ पर विक्षेप (deflection) $y=0$ है। अत: $C_2=0$

अब c_2 का मान रखने पर $\qquad EI\,(y)=\frac{Wx^3}{12}-\frac{WL^2}{16}x$ (यह विक्षेप समीकरण है) $\qquad$ ... (iv)

अब B पर अधिकतम ढलान के लिए समीकरण (iii) में $x=0$ रखने पर,

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right)_{at\ B}=\frac{W}{4}\times 0-\frac{WL^2}{16} \text{ या } \theta_B=-\frac{WL^2}{16EI}$$

(-ve) चिन्ह का अर्थ है, B पर खींची गयी स्पर्श रेखा, AB से anticlockwise दिशा में कोण बनाती है तथा A पर स्पर्श रेखा clockwise दिशा में कोण बनायेगी अर्थात् A पर कोण (ढलान slope) +ve होगा।

$$\therefore \quad \theta_A=\theta_B=\frac{WL^2}{16EI} \qquad \text{(सूत्र)}$$

अब अधिकतम विक्षेप के लिए समीकरण (iv) में मध्य बिन्दु C के लिए $x=\frac{L}{2}$ रखने पर,

$$EI\,(y_C)=\frac{W}{12}\times\left(\frac{L}{2}\right)^3-\frac{WL^2}{16}\times\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$=\frac{WL^3}{96}-\frac{WL^3}{32}$$

$$=\frac{WL^3-3WL^3}{96}=\frac{-2WL^3}{96}=\frac{-WL^3}{48EI}$$

(-ve) चिन्ह केवल नीचे की ओर झुकाव (विक्षेप) को दर्शाता है।

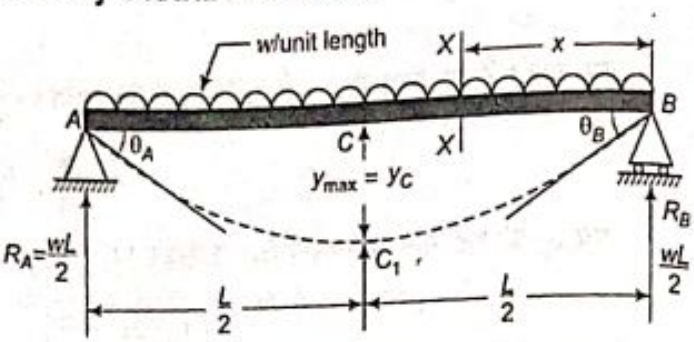
∴ अधिकतम विक्षेप (धरन के मध्य में नीचे की ओर), $y_C=\frac{WL^3}{48EI}$ (सूत्र)

Scanned with CamScanner

6.4.6 शुद्धालम्ब धरन की पूर्ण लम्बाई पर w/metre का U.D.L. है (U.P. 2009)
(Simply supported Beam with Uniformly Distributed Load)

चित्र 6.30 में विस्तार (span) L की एक सरल आलम्बित धरन (S.S. Beam) टेकों A तथा B पर टिकी है। इसमें B से x दूरी पर कोई काट $X-X$ है।

चित्र में धरन के मध्य (केन्द्र) C पर अधिकतम विक्षेप y_C है तथा C पर ढलान $\theta_C = 0$ है और सिरों (ends) A तथा B पर ढलान अधिकतम तथा समान होगा ($\theta_A = \theta_B$ होगा)। परन्तु विक्षेप $y = 0$ है।



चित्र 6.30

$$\because \quad R_A = R_B = \frac{\text{कुल भार}}{2} = \frac{w.L}{2}$$

अब काट $(X-X)$ पर नमन घूर्ण (B.M.) [Take +ve for ↱, –ve for ↲]

$$M_x = R_B \times x - w.x.\frac{x}{2} = \left(\frac{wL}{2}\right)x - \left(\frac{w}{2}\right)x^2$$

$$\therefore \quad EI\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{wL}{2}\right)x - \left(\frac{w}{2}\right)x^2$$

समाकलन करने पर,

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{wL}{2}\right)\times\frac{x^2}{2} - \left(\frac{w}{2}\right)\frac{x^3}{3} + C_1 \qquad \text{... (i)}$$

धरन (beam) के मध्य-बिन्दु C के लिए, $x = \frac{L}{2}$ पर ढलान $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ है।

$$\therefore \quad 0 = \left(\frac{wL}{2}\right)\left(\frac{L^2}{8}\right) - \left(\frac{w}{2}\right)\times\frac{L^3}{24} + C_1$$

$$\therefore \quad C_1 = \frac{wL^3}{48} - \frac{wL^3}{16} = \frac{-2wL^3}{48} = -\frac{wL^3}{24}$$

समीकरण (i) में C_1 का मान रखने पर,

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{wL}{4}\right)x^2 - \left(\frac{w}{6}\right)x^3 - \frac{wL^3}{24} \qquad \text{... (ii)}$$

यह ढलान समीकरण है। धरन में किसी बिन्दु पर धरन का ढलान देखने के लिए B से उस बिन्दु की दूरी x का मान रखकर ढलान $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करते हैं। समीकरण (ii) का फिर समाकलन करने पर

$$EI\,(y) = \left(\frac{wL}{4}\right)\frac{x^3}{3} - \left(\frac{w}{6}\right)\frac{x^4}{4} - \left(\frac{wL^3}{24}\right)x + C_2$$

परन्तु सिरे B पर $x = 0$ तथा विक्षेप $y = 0$ है। अत: $C_2 = 0$ होगा।

$$\therefore \quad EI.(y) = \left(\frac{wL}{12}\right)x^3 - \left(\frac{w}{24}\right)x^4 - \left(\frac{wL^3}{24}\right)x \qquad \text{... (iii)}$$

यह विक्षेप (deflection) समीकरण है। इस समीकरण (iii) द्वारा x के किसी मान पर धरन का विक्षेप (y) ज्ञात किया जा सकता है।

Scanned with CamScanner

अब अधिकतम ढलान के लिए समीकरण (ii) में $x=0$ रखने पर B पर ढलान

$$\theta_B = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{at\ B} = -\frac{wL^3}{24EI}$$

(–ve) चिन्ह B पर खींची गई स्पर्श रेखा का AB से बनाये गये कोण की दिशा (anticlockwise) को दर्शाता है जबकि A पर यह कोण AB से clockwise दिशा में मापा जायेगा, जो कि (+ve) होगा।

$$\therefore \quad \theta_A = \theta_B = \frac{wL^3}{24EI} \Rightarrow \frac{WL^2}{24EI}, \text{ (सूत्र) जहाँ } W = w \times L \text{ है।}$$

अब समीकरण (iii) में अधिकतम विक्षेप (max. deflection) के लिये $x = \frac{L}{2}$ रखने पर केन्द्र पर (अर्थात् मध्य में) अधिकतम विक्षेप y_C होगा।

$$\therefore \quad EI\,(y_C) = \frac{wL^4}{96} - \frac{wL^4}{384} - \frac{wL^4}{48} = \frac{4wL^4 - wL^4 - 8wL^4}{384}$$

$$\therefore \quad y_C = -\left[\frac{5}{384} \times \frac{wL^4}{EI}\right] = -\frac{5}{384} \times \frac{WL^3}{EI} \text{ सूत्र} \quad (\text{जहाँ } W = wL \text{ है})$$

(–ve) चिन्ह केवल नीचे की ओर झुकाव (या विक्षेप) को दर्शाता है।

$$\therefore \quad y_{max} = y_C = \frac{5}{384} \times \frac{wL^4}{EI} \quad \text{(सूत्र)}$$

अथवा

$$y_C = \frac{5}{384} \times \frac{WL^3}{EI} \quad \text{(सूत्र)}$$

उदाहरण 1. व्यंजक $EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$ का प्रयोग करते हुए एक प्रास धरन (cantilever) के भारण बिन्दु का (under the laod) विक्षेप (deflection) ज्ञात कीजिये। धरन की लम्बाई 2·5 m है तथा 2 kN का भार बद्ध सिरे (fixed end) से 2 m की दूरी पर लग रहा है। धरन का परिच्छेद 20 mm × 35 mm (चौड़ाई × मोटाई) का है तथा धरन के पदार्थ का प्रत्यास्थता गुणांक $(E) = 200$ GPa है। **(U.P. 2000)**

हल—चित्र 6.31 देखें। इसमें धरन की लम्बाई (span) $L = 2{\cdot}5$ m

काट की चौड़ाई $(b) = 20$ mm $= 0{\cdot}02$ mm.

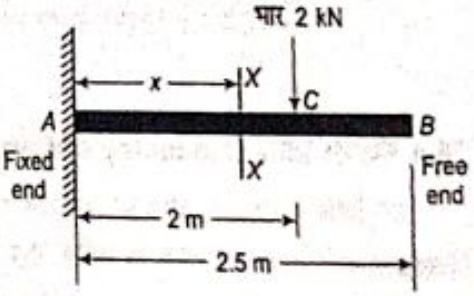
काट की मोटाई या गहराई $(d) = 35$ mm

$h = 0{\cdot}035$ metre

काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.),

$$I = \frac{b \times d^3}{12} = \frac{0{\cdot}02 \times 0{\cdot}035^3}{12}$$

या $\quad I = 7{\cdot}1458 \times 10^{-8}\ m^4$



चित्र 6.31

Young's Modulus, $\quad E = 200\ GPa = 200 \times 10^9\ N/m^2 = 2 \times 10^8\ kN/m^2$

माना बद्ध सिरे A से x दूरी पर कोई काट $(X-X)$ है। अब इस काट पर नमन घूर्ण (B.M.),

$$M_x = 2\,(2 - x) = 4 - 2x$$

अब

$$EI \times \frac{d^2y}{dx^2} = M_x = 4 - 2x \quad \text{(Double Integration Method से)}$$

Scanned with CamScanner

या $$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4x - 2\times\frac{x^2}{2} + C_1$$ (Integrate करने पर)

या $$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4x - x^2 + C_1$$ (C_1 = Integration constant)

∵ बद्ध सिरे A पर ढलान (slope) $\frac{dy}{dx} = 0$ होगा जबकि $x = 0$ है

∴ $C_1 = 0$ होगा। अब ढलान समीकरण (slope equation)

∴ $$EI \times \left(\frac{dy}{dx}\right) = (4x - x^2) \quad \text{... (i)}$$

एक बार फिर समाकलन (Integrate) करने पर,

$$EI \times (y) = 4\times\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_2$$

परन्तु बद्ध सिरे A पर $x = 0$ तो विक्षेप (deflection) $y = 0$

∴ $C_2 = 0$ होगा। अत: विक्षेप समीकरण (Deflection Equation)

$$EI \times (y) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} \quad \text{... (ii)}$$

अब भार के बिन्दु C के लिए $x = 2$ m रखने पर y_C प्राप्त होगा।

∴ $$EI\,(y_C) = 2\times 2^2 - \frac{2^3}{3}$$

$$= 2^3\left[1 - \frac{1}{3}\right] = 8\times\frac{2}{3} = \frac{16}{3} = 5{\cdot}3333$$

∴ भारण बिन्दु C पर विक्षेप, $$y_C = \frac{5{\cdot}3333}{E\times I}$$

विक्षेप, $$y_C = \frac{5{\cdot}3333}{2\times 10^8 \times 7{\cdot}1458\times 10^{-8}} = 0{\cdot}373 \text{ metre}$$

$$= 373 \text{ metre}$$ उत्तर

76.4 मैकाले विधि (Macaulay's Method for Slope and Deflection)

इस विधि में सर्वप्रथम धरन पर लगे सभी भारों के लिए एक ही समीकरण इस प्रकार बनाते हैं कि समाकलन स्थिरांक (Integration Constant) धरन के प्रत्येक भाग के लिए प्रयुक्त हो।

मैकाले (Mr W.H. Macaulay) विधि का प्रयोग करने के लिए मुख्य नियम निम्न हैं—

(Following Rules are observed while using Macaulay's Method)

(1) Beam के सबसे बायें सिरे (Extreme left) को मूल बिन्दु (origin) माना जाता है तथा बायें सिरे से x दूरी को दायीं ओर के अन्तिम भाग में मानी गई काट तक लेते हैं।

(2) समाकलन स्थिरांक c_1 प्रथम पद के साथ लिखा जाता है जो कि x के सभी मानों के लिये मान्य होता है।

(3) बायीं ओर से clockwise moment को (+ve) तथा anticlockwise moment को (–ve) लिया जाता है।

(4) $(x-a)$ जैसे पद को $\frac{(x-a)^2}{2}$ की भाँति समाकलित किया जाना चाहिये।

Scanned with CamScanner

(5) $(x-a)^2$ जैसे पद (term) को $\frac{(x-a)^3}{3}$ की भाँति समाकलित किया जाना चाहिये।

(6) C_2 को $C_1 x$ के बाद लिखा जाना चाहिए।

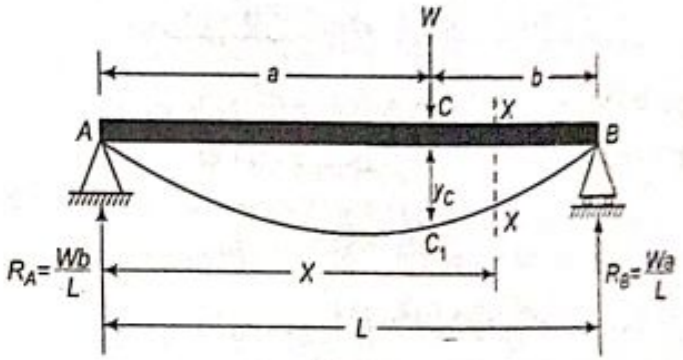
(7) आसानी के लिए deflection तथा slope ज्ञात करने के लिए समीकरण में kN तथा metre की units का प्रयोग करके घूर्ण (moment) ज्ञात करें।

इस विधि को उदाहरणों द्वारा आसानी से समझा जा सकता है।

उदाहरण 2. एक L लम्बाई की शुद्धालम्ब धरन (S.S. Beam) AB पर एक बिन्दु भार W, सिरे A से a तथा सिरे B से b दूरी पर चित्र ... के अनुसार लगा है। $a > b$ है। ज्ञात कीजिए—

(i) भार के बिन्दु C पर विक्षेप (Deflection under the load)

(ii) अधिकतम विक्षेप (max. deflection)



चित्र 6.32

हल—A पर आघूर्ण लेने पर

$$R_B \times L = W \times a \text{ या } R_B = \frac{Wa}{L}$$

$\because$ $R_A + R_B = W$ है।

$\therefore$ $$R_A = \frac{Wb}{L}$$

अब A से x दूरी पर कोई काट $X-X$ माना। मैकाले विधि द्वारा निम्न प्रकार समीकरण बनाते है—

$$M_x = EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W.b}{L}x - W(X-a)$$

ढलान के लिये समाकलन करने पर,

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{Wb}{L}.\frac{x^2}{2} + C_1 - \frac{W(x-a)^2}{2} \quad \text{... (i)}$$

विक्षेप के लिए पुनः समाकलन करने पर,

$$EI\ (y) = \frac{Wb}{L} \times \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 - \frac{W(x-a)^3}{6} \quad \text{... (ii)}$$

टेक A पर $x=0$ तब विक्षेप $y=0$

$\therefore$ $$C_2 = 0$$

टेक B पर $x = L$ तब विक्षेप (deflection) $y=0$

Scanned with CamScanner

$$\therefore \quad 0 = \frac{Wb}{L}\cdot\frac{L^3}{6} + C_1 L - \frac{W(L-a)^3}{6} \qquad [\because L-a=b]$$

$$\therefore \quad C_1 L = \frac{W(L-a)^3}{6} - \frac{WbL^2}{6} = \frac{Wb^3}{6} - \frac{WbL^2}{6}$$

$$= -\frac{Wb}{6}(L^2-b^2) \text{ या } C_1 = \frac{-Wb}{6L}(L^2-b^2)$$

(अब ढलान समीकरण), समीकरण (i) से,

$$EI\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{Wbx^2}{2L} - \frac{Wb}{6L}(L^2-b^2) - \frac{W(x-a)^2}{2} \qquad \text{... (iii)}$$

(विक्षेप समीकरण) समीकरण (ii) से,

$$EI\,(y) = \frac{Wbx^3}{6L} - \frac{Wb}{6L}(L^2-b^2)\,x - \frac{W(x-a)^3}{6} \qquad \text{... (iv)}$$

(i) धरन पर भार के बिन्दु C पर विक्षेप (Deflection under the load), y_c

विक्षेप y_c ज्ञात करने के लिए $x=a$ को विक्षेप समीकरण में रखने पर

$$EI.y_C = \frac{Wba^3}{6L} - \frac{Wb}{6L}(L^2-b^2)\,a$$

$$= -\frac{Wba}{6L}[L^2-b^2-a^2]$$

परन्तु $L=a+b$ है। अर्थात् $L^2 = a^2+b^2+2ab$ है।

$$EI.y_C = -\frac{Wba}{6L}(a^2+b^2+2ab-b^2-a^2)$$

$$= -\frac{Wa^2b^2}{3L} \qquad \text{(–ve चिन्ह नीचे की ओर विक्षेप को दर्शाता है)}$$

$$\therefore \quad y_C = -\frac{wa^2b^2}{3EI.L}$$

अथवा $$y_C = \frac{Wa^2b^2}{3EIL}$$ उत्तर

(ii) अधिकतम विक्षेप (Maximum Deflection), y_{max}

∵ अधिकतम विक्षेप के बिन्दु पर ढलान (slope) शून्य (zero) होगा।

∴ ढलान समीकरण (iii) में ढलान $\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$ रखने पर

$$0 = \frac{Wbx^2}{2L} - \frac{Wb}{6L}(L^2-b^2)$$ [Max. deflection AC भाग में होगा।

∴ Last step को छोड़े देंगे]

$$\therefore \quad x^2 = \left(\frac{L^2-b^2}{3}\right) \text{ या } x = \sqrt{\frac{(L^2-b^2)}{3}} = \sqrt{\frac{a^2+2ab}{3}}$$

Scanned with CamScanner

अब x का मान विक्षेप समीकरण (iv) में रखने पर

$$EI\,(y_{max}) = \frac{Wb}{6L}\left(\frac{L^2-b^2}{3}\right)^{3/2} - \frac{Wb}{6L}(L^2-b^2)\left(\frac{L^2-b^2}{3}\right)^{1/2}$$

$$= -\frac{Wb}{6L}(L^2-b^2)^{3/2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{(3)^{3/2}}\right]$$

$$= -\frac{wb}{6L}(L^2-b^2)^{3/2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right] = -\frac{Wb}{6L}(L^2-b^2)^{3/2} \times \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$= -\frac{Wb\,(L^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}\times L} = -\frac{Wb\,(a^2+2ab)^{3/2}}{9\sqrt{3}\times L} \qquad [\because L^2 = (a+b)^2]$$

$$\therefore \quad y_{max} = \frac{WB\,(a^2+2ab)^{3/2}}{9\sqrt{3}\,EIL}$$

उत्तर

प्रश्नावली

1. **निम्न रिक्त स्थान भरिये** (Fill up the blanks in Sentences)—

(i) कैन्टीलीवर धरन (cantilever beam) में अधिकतम विस्थापन (deflection) ..... पर होता है। **(U.K. 2012, S, 2013 B.P.)**

(ii) सरल आलम्बित धरन (simply supported beam) में अधिकतम ढलान (slope) ..... होता है।

(iii) सरल आलम्बित धरन (S.S. beam) के मध्य में बिन्दु भार लगा होने पर अधिकतम विक्षेप (deflection), धरन (beam) के ..... में होता है।

(iv) घूर्ण क्षेत्रफल विधि (moment area method) में विक्षेप (deflection) का सूत्र, y_{max} = ...तथा ढलान (slope) का सूत्र θ = ... है।

(v) ..... के गुणन को धरन की नमन दृढ़ता (flexural rigidity) कहते हैं। **(U.K. 2007, W)**

(vi) $EI \times \frac{d^2y}{dx^2} = M$, धरन के ..... तथा ..... का मौलिक सूत्र है। **(U.K. 2010, S)**

(vii) एक L लम्बाई की cantilever beam के मुक्त सिरे (free end) पर एक बिन्दु भार W का लगा होने से मुक्त सिरे पर अधिकतम विक्षेप तथा ढलान के सूत्र क्रमशः ..... तथा ..... है।

(viii) एक L लम्बाई की cantilever beam के पूर्ण विस्तार (while span) पर w kN/m का U.D.L. लगा होने से मुक्त सिरे (Free end) पर विक्षेप ..... तथा ढलान ..... है।

(ix) शुद्धालम्ब धरन (S.S. beam) की लम्बाई (L) के मध्य में संकेन्द्रित भार W लगा होने पर अधिकतम ढलान तथा विक्षेप के सूत्र क्रमशः ..... तथा ..... है। **(U.K. 2014, S)**

(x) शुद्धालम्ब धरन (S.S. beam) की पूर्ण लम्बाई (L) पर समवितरित भार (U.D.L.) w/m का लगा होने पर अधिकतम विक्षेप (deflection) तथा ढलान (slope) सूत्र ..... तथा ..... है।

रिक्त स्थानों के उत्तर

(i) स्वतन्त्र सिरे (Free End पर), (ii) टेकों (supports), (iii) मध्य (centre), (iv) $y_{max} = \frac{A\bar{X}}{EI}$, $\theta = \frac{A}{EI}$, (v) E तथा I, (vi) ढलान (slope) तथा विक्षेप (deflection) (vii) $y = \frac{WL^3}{3EI}$, $\theta = \frac{WL^2}{2EI}$ (viii) $y = \frac{wL^4}{8EI}$ या $\frac{WL^3}{8EI}$ या $\frac{WL^2}{6EI}$ (ix) $\theta = \frac{WL^2}{16EI}$, $y = \frac{WL^3}{48EI}$ (x) $y = \frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI}$ या $\frac{5}{384}\frac{WL^3}{EI}$ तथा $\theta = \frac{wL^3}{24EI}$ या $\frac{WL^2}{24EI}$ (जहाँ $W = w \times L$ है)

Scanned with CamScanner

2. किसी धरन के ढलान तथा विक्षेप (slope and deflection) को समझाइये।
(U.K. 2012 (S), U.K. 2013, Sp (B.P) (U.P. 2013, 14)
3. प्रवणता (slope) तथा विक्षेप (deflection) की घूर्ण-क्षेत्रफल विधि (moment area method) पर संक्षिप्त टिप्पणी लिखिये। **(U.P. 2008, 09)**
4. एक सरल आधारित धरन (simply supported beam) जो कि केन्द्र पर एक बिन्दु भार W वहन करती है, उसके मध्य में विक्षेप ज्ञात कीजिये। इसके सिरों (ends) पर तथा मध्य में ढलान (slope) भी ज्ञात करें।
(U.P. 2010, 13) (U.K. 2014)
5. एक सरल आधारित धरन पर, जिसकी लम्बाई 'L' तथा बंकन दृढ़ता EI है, उसकी संपूर्ण लम्बई पर एक समान वितरित भार w kN/m लगाया गया है। इसमें अधिकतम विक्षेप एवं प्रवणता का मान अवस्थिति ज्ञात करें। **(U.P. 2012, Civil)**
6. एक प्रास धरन (cantilever beam) पर जिसकी लम्बाई 'L' तथा बंकन दृढ़ता EI है, इसके मुक्त सिरे पर एक संकेन्द्री भार P लगाया गया है। इसका अधिकतम विक्षेप एवं प्रवणता ज्ञात करें। **(U.P. 2011, Mech) (U.P. 2012, 14)**
7. 5m लम्बे कैंटीलीवर (cantilever) के स्वतन्त्र सिरे (free end) पर 5 kN का संकेन्द्रित भार (concentrated load) लगा है। यदि $E = 200$ GPa तो कैंटीलीवर के स्वतन्त्र सिरे पर विस्थापन (deflection) तथा ढलान (slope) ज्ञात कीजिये। कैंटीलीवर की काट 20 cm × 30 cm है। [उत्तर : 2·315 mm, 0·0398 डिग्री]
8. एक प्रास धरन, जिसका परिच्छेद 75 mm × 100 mm आयताकार तथा लम्बाई 4 m है, पर उसके मुक्त सिरे से 1 m की दूरी पर 1 kN का संकेन्द्री भार लगाया गया है। धरन के मुक्त सिरे पर प्रवणता एवं विक्षेप का मान ज्ञात कीजिये। ($E = 200 \times 10^3 \text{N/mm}^2$ मान लीजिये)। [उत्तर : 10·8 mm, 0·206°]
9. 120 mm × 200 mm आकार की एक प्रास (cantilever) धरन 2·5 m लम्बी है। धरन पर कितना समवितरित भार लगाया जाये कि मुक्त सिरे पर 5 mm का विक्षेप उत्पन्न हो। $E = 2 \times 10^5 \text{N/mm}^2$ लें।
[उत्तर : 16·384 kN/m] **(U.P. 2004)**
10. एक कैंटीलीवर की लम्बाई 1·5 मी है। इस पर बद्ध सिरे से 0·9 मी की दूरी तक 2 कि० न्यूटन/मी का समवितरित भार लगा है। यदि खण्ड 75 मिमी × 150 मिमी गहरा हो तो मुक्त सिरे पर ढलान और विस्थापन ज्ञात कीजिये। $E = 0{\cdot}11 \times 10^5$ न्यूटन/मिमी^{2} मानिये। [उत्तर : $\theta = 1{\cdot}047 \times 10^{-3}$ rad; 1·34 mm] **(U.P.)**
11. एक समत्रिभुजाकार परिच्छेद की कैंटीलीवर धरन की भुजा 6 cm तथा लम्बाई 1 m है। इसके परिच्छेद की एक भुजा क्षैतिज है तथा धरन के मुक्त सिरे पर 10kN का भार लगा है। कैंटीलीवर के मुक्त सिरे का विक्षेप ज्ञात कीजिये। धरन के पदार्थ के लिये $E = 200$ GPa मानिये। [उत्तर : 71·28 mm] **(U.P.)**
12. एक कैंटीलीवर धरन के मुक्त सिरे पर जिसका परिच्छेद वर्गाकार है, 35 kN का भार लगाया गया है। कैंटीलीवर धरन की विस्तृति 2m तथा धरन पदार्थ का प्रत्यास्थता गुणांक $2 \times 10^5 \text{N/mm}^2$ है। यदि इसके मुक्त सिरे का विक्षेप 3·5 mm हो तो धरन के अनुप्रस्थ काट की विमाएँ ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 200 mm भुजा का वर्ग] **(U.P.)**
13. एक बिजली का ऊर्ध्वाधर खोखला बेलनाकार खम्भा 6 मीटर ऊँचा है। इसका एक सिरा जमीन में गड़ा है। दूसरे सिरे पर 10 kN का केन्द्रित भार लगा है। खम्भे का अपना भार नगण्य मानते हुए इस पर अधिकतम विस्थापन निकालिये यदि खम्भे के काट का $I = 500 \text{ cm}^4$ तथा $E = 200$ GPa है। [उत्तर : 720 mm] **(U.P.)**
14. एक आयताकार परिच्छेद वाली एल्युमिनियम की कैंटीलीवर धरन, जिसकी चौड़ाई 48 mm तथा मोटाई 36 mm है, एक समवितरित भार वहन करती है। यदि धरन में उत्पन्न अधिकतम विक्षेप का मान 1 mm से अधिक न हो तो UDL का मान ज्ञात कीजिये। वहाँ धरन की लम्बाई 3m है तथा $E = 40$ GPa मान लें। [उत्तर : 0·7373 N/m] **(U.P.)**
15. एक कैन्टीलीवर धरन की काट 120 mm चौड़ी तथा 150 mm गहरी है। धरन की लम्बाई 1·8 m है। धरन (beam) के स्वतन्त्र सिरे पर ढलान तथा विक्षेप (Slope and deflection) का मान ज्ञात कीजिये जबकि धरन के स्वतन्त्र सिरे पर 20 kN का बिन्दु भार (Point Load) लगा हो। $E = 200$ GPa लीजिये।
[उत्तर : $y_B = 5{\cdot}76$ mm, $\theta_B = 3{\cdot}3 \times 10^{-3}$ rad] **(U.P.2014)**

Scanned with CamScanner

16. एक खोखले आयताकार काट की धरन, जिसकी बाहरी माप 18 cm × 12 cm तथा आन्तरिक माप 9 cm × 6 cm है, एक कैंटीलीवर के रूप में प्रयोग की गयी है। इसकी लम्बाई 4 m तथा इसकी पूर्ण लम्बाई पर 6 kN/m का समवितरित भार (UDL) लगा है। कैंटीलीवर की अधिकतम सामर्थ्य के लिये उसके स्वतन्त्र सिरे पर विस्थापन (deflection) ज्ञात कीजिये। $E = 200$ GPa। [उत्तर : 17·56 mm] (U.P.)

17. एक खोखले आयताकार काट धरन, जिसकी बाह्य विमायें 18 × 12 cm तथा आन्तरिक विमायें 9 × 6 cm हैं, का कैंटीलीवर के रूप में प्रयोग किया जाता है। इसकी मुक्त लम्बाई 4 m है तथा इसकी पूर्ण लम्बाई 600 N/m लम्बाई का एक समवितरित भार तथा मुक्त सिरे पर 12 kN का बिन्दु भार लगा है। इन परिस्थितियों में कैंटीलीवर का अधिकतम विक्षेपण ज्ञात कीजिये। $E = 2 \times 10^5$ N / mm^2 [उत्तर : 25·17 mm] (U.P)

18. एक I काट की कैंटीलीवर धरन की विस्तृति 2·5 मी० है और उस पर 20 कि० न्यूटन/मी का समवितरित भार मुक्त सिरे (Free end) से 1·5 मी० की दूरी तक लगा है। अधिकतम विस्थापन और ढलान ज्ञात कीजिये यदि धरन की आनमनी दृढ़ता (Flexural Rigidity) $EI = 19 \times 10^6$ न्यूटन-मी^{2} है। [उत्तर : 4·745 मिमी, 0·147°] (U.P. 2006)

19. एक L लम्बाई (span) की कैन्टीलीवर AB पर स्वतन्त्र सिरे (free end) B से C तक w kN/m का U.D.L. लगा है तथा AC = l खाली है तो अधिकतम विक्षेप तथा ढलान (max. deflection and slope) ज्ञात कीजिये। [संकेत : cantilever के case V को देखें] (U.K. 2009, W)

20. एक 8 m विस्तृति (span) की कैंटीलीवर धरन (beam) पर बद्ध सिरे (fixed end) से 5 m लम्बाई तक 20 kN/m का U.D.L. तथा मुक्त सिरे (free end) पर 5 kN का बिन्दु भार (point load) लगा है तो इस धरन का अधिकतम ढलान (slope) तथा विक्षेप (deflection) ज्ञात कीजिये। जबकि $EI = 8 \times 10^4$ kN-m^2 है।

[उत्तर : $\theta_m = 0{\cdot}072$ rad, $y_{max} = 45{\cdot}825$ mm] (U.K.2013, (S)

[संकेत : उदाहरण 4 देखें]

21. एक 2 मीटर लम्बी कैंटीलीवर धरन की पूरी लम्बाई पर 5 kN/m का समवितरित भार लगा है। कैंटीलीवर के स्वतंत्र सिरे पर ढलान तथा विक्षेप का मान ज्ञात कीजिए। धरन के लिए नमन दृढ़ता $E \times I = 2{\cdot}5 \times 10^{12}$ N-mm^2 मानिए।

[उत्तर : $\theta = 0{\cdot}0026$ radian, $y_B = 4$ mm] (U.K.2012 (S), 2013 (Sp. B.P.)

** विशेष (शुद्धालम्ब धरन (Simply supported Beam) पर आधारित प्रश्न)

22. एक आयताकार काट वाली धरन (beam) 25 cm चौड़ी × 50 cm गहरी है एव 4·5 m लम्बाई पर शुद्धालम्ब है। मध्य में 200 kN का भार लगा है। धरन पर अधिकतम विस्थापन तथा अधिकतम नमन प्रतिबल निकालिये यदि $E = 20$ GPa हो।

[उत्तर : 7·29 mm, 21·6 MN / m^2] (U.P.2000)

23. एक सहज आधारित (simply supported) धरन, जिसकी लम्बाई 8 मी० है, पर 20 kN का एक बिन्दु बल मध्य पर लगा है। धरन का परिच्छेद 20 सेमी० × 40 सेमी० का है। धरन में अधिकतम विस्थापन का मान ज्ञात कीजिये यदि $E = 20 \times 10^4$ N / mm^2 है। [उत्तर : 10 mm] (U.P.2003)

24. एक आयताकार धरन (rectangular beam) की काट 18 cm × 10 cm तथा लम्बाई 5 m है और यह अपने सिरों पर शुद्धालम्बित है। ज्ञात कीजिये कि धरन की अधिकतम सामर्थ्य की अवस्था के लिये, उसके मध्य विस्तार (span) पर कितने संकेन्द्रित भार की आवश्यकता होगी ताकि अधिकतम विस्थापन 1·2 cm से अधिक न होने पाये? यह भी ज्ञात कीजिये कि धरन की सम्पूर्ण लम्बाई पर कितना समवितरित भार रखा जाये जो उतना ही अधिकतम विस्थापन दे सके। $E = 200$ GPa। [उत्तर : 44·79 kN, 71·66 kN] (U.P.2012, W)

Scanned with CamScanner

25. 4 m के फैलाव (span) की एक सामान्य रूप से आलम्बित धरन (simply supported beam) के पूरे विस्तार पर 20 kN/m का समवितरित भार (U.D.L. of 20 kN/m) लगा है। धरन में अधिकतम विक्षेप (deflection) तथा ढलान (slope) की गणना कीजिये। मान लीजिए : [$E = 2\times10^5$ N/mm^2 तथा $I = 5\times10^7$ mm^4]

[संकेत : उदाहरण-13 देखें] [उत्तर : $y = 6{\cdot}7$ mm, $\theta = 0{\cdot}00533$ radian] **(U.P.2013)**

26. एक 4 m विस्तार की लकड़ी की धरन (wooden beam of span 4 m) जो कि 100 mm चौड़ी एवं 160 mm गहरी काट (section) की है। इसकी पूरी लम्बाई पर 500 kg/m (या 5 kN/m) का समवितरित भार (U.D.L.) कार्य कर रहा है। धरन के मध्य बिन्दु (mid point) पर विस्थापन (deflection) की गणना कीजिये। $E = 0{\cdot}8\times10^6$ kg/cm^2 $= 0{\cdot}8\times10^5$ N/mm^2 लीजिए।

[उत्तर : $y = 6{\cdot}1$ mm, $\theta = 0{\cdot}00488$ radian] **(U.P.2013 (S))**

27. आयताकार काट की एक धरन की गहराई 30 cm तथा शुद्धालम्बित विस्तार 6 m है। इसमें 7·5 MN/m^2 के अधिकतम परत प्रतिबल के लिये केन्द्र पर विक्षेप ज्ञात कीजिये यदि भार केन्द्र पर लग रहा है और $E = 120$ GPa।

[उत्तर : 12·5 mm]

28. एक शुद्धालम्बित धरन की विस्तृति (span) 10 m है और उस पर 160 kN का अभिकेन्द्रित भार (बिन्दु भार) मध्य में (at centre) लगा हुआ है। यदि अधिकतम फाइबर प्रतिबल नमन के कारण (bending stress) 120 MPa है और मध्य में विस्थापन (deflection) $= \frac{1}{400}\times$ विस्तृति (span) से अधिक न हो तो धरन की गहराई (d) ज्ञात करें। $E = 2\times10^5$ N/mm^2 मानिये।

[उत्तर : 400 mm] **(U.K.2009 (w)), (U.P. 2003)**

29. एक शुद्धालम्बित धरन (simply supported beam) का विस्तार 5m है। इसके केन्द्र पर एक संकेन्द्रित भार (अर्थात् बिन्दु भार) W के लिये धरन का अधिकतम ढलान 0·5° है, तो केन्द्र पर विक्षेप ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 14·5 mm]

30. 4·8 m विस्तृति वाली एक आयताकार काट की काष्ठ धरन अपने सिरों पर शुद्धालम्बित है। इसकी पूरी विस्तृति पर 45 kN का सम्पूर्ण समवितरित भार लगाया जाता है। धरन की चौड़ाई (b) तथा गहराई (d) के लिए अधिकतम मान निकालें, यदि अधिकतम बंकन प्रतिबल 7·0 N/mm^2 से अधिक न होने पाये तो अधिकतम विक्षेप 9·5 mm तक सीमित हो। काष्ठ के लिए $E = 1{\cdot}05\times10^4$ N/mm^2 लें।

[संकेत : उदाहरण 18 देखें] [उत्तर : $b = 204$ mm, $d = 337$ mm] **(U.P.2002) (U.K. 2008, W)**

31. एक शुद्धालम्बित धरन (S.S. Beam) की पूरी लम्बाई 5 m पर 1000 N/m का समवितरित भार (U.D.L.) लगा है तथा मध्य बिन्दु पर (at middle) 2500 N का संकेन्द्रित भार (Point Load) है। तो इस धरन के मुख्य बिन्दु पर विस्थापन (Deflection) ज्ञात करें। जबकि $E = 2\times10^5$ MPa तथा $I = 25\times10^4$ cm^4 है।

[उत्तर : $y = 0{\cdot}0293$ mm] (U.K. 2014 CIVIL)

32. 2 m लम्बी नरम इस्पात (mild steel) की एक ट्यूब का बाहरी व्यास 8 cm और पदार्थ की मोटाई 0·5 cm है। यह ट्यूब अपने दोनों सिरों पर शुद्धालम्ब धारित (simply supported) है। यदि इसके मध्य में 3·5 kN का एक संकेन्द्रित भार (concentrated load) लगा हो और नरम इस्पात (mild steel) का घनत्व (density) $7{\cdot}85\times10^3$ kg/m^3 हो तो इसके केन्द्र पर विस्थापन (deflection) तथा सिरों पर ढलान (slope) ज्ञात कीजिये। $E = 200$ GPa।

[उत्तर : 3·623 mm, $0{\cdot}5446\times10^{-2}$ radian]

[संकेत : Tube का भार U.D.L. रूप में कार्य करता है। यह भार W_1 = आयतन × घनत्व = (A × L × density)
$\therefore W_1 = 181{\cdot}355$ N तथा केन्द्र पर लगा भार $W_2 = 3{\cdot}5$ kN $= 3500$ N, $I = 831609{\cdot}375$ mm^4,

$\because y_{max} = \left[\frac{5}{384}\times\frac{W_1L^3}{EI} + \frac{W_2L^3}{48EI}\right]$ and $\left[\theta = \frac{W_1L^2}{24EI} + \frac{W_2L^2}{16EI}\right]$

❑

Scanned with CamScanner

7 कॉलम तथा स्ट्रट (COLUMNS AND STRUTS)

§ 7.1 परिचय (Introduction)

मशीनों के कलपुर्जों अथवा यंत्र विन्यास (mechanism of machine), रेलवे-पुलों (railway-bridges), छतों (roofs), क्रेन्स (cranes), बिजली के टॉवर (high voltage line tower) आदि को कई छड़ों (bars/ rods) द्वारा जोड़कर बनाया जाता है। इन संरचनाओं के अंग (parts of structures) उनके अवयव या सदस्य (elements or members) कहलाते हैं और ये मुख्यत: तीन प्रकार के होते हैं—

(1) संपीडन टुकड़े अथवा ब्लॉक (Compression Blocks)

(2) कॉलम (Columns)

(3) स्ट्रट (Strut)

(1) संपीडन टुकड़ों (Compression Blocks) का वर्गीकरण—मशीनों (machines) या ढाँचों (structures or truss) आदि के वे अंग जिन पर संपीडन भार (compression load) कार्य करते हैं, संपीडन टुकड़े (compression blocks) कहलाते हैं और ये तीन प्रकार के हो सकते हैं—

(i) वे टुकड़े (blocks), जिनकी लम्बाई बहुत ही कम होती है, संपीडन अवयव (compression members) कहलाते हैं।

(ii) वे टुकड़े (blocks), जिनकी लम्बाई उनके व्यास के लगभग 30 गुने से कम होती है, छोटे कॉलम (short column) कहलाते हैं।

(iii) वे टुकड़े, जिनकी लम्बाई, उनके व्यास के लगभग 30 गुने से अधिक होती है, लम्बे कॉलम (long column) कहलाते हैं।

(2) कॉलम (Columns)—किसी ढाँचे (structure), मशीन (machine) या ट्रस (truss) का वह सदस्य (member) जो केवल ऊर्ध्वाधर स्थिति (vertical position) में ही स्थित होता है और जिस पर सदैव अक्षीय सम्पीडन भार (axial compressive load) अथवा उत्केन्द्रित भार (eccentric load) ही कार्य करें (तनाव बल या भार Tensile Loads कार्य न करें), कॉलम (column) कहलाता है।

उदाहरणार्थ, जैसे—बिल्डिंग्स में छत या फर्श को टिकाने के लिए बनाये गये खम्भे (या पिलर्स Pillars) को कॉलम कहते हैं।

"A column is a long vertical member, subjected to an axial compressive load or eccentric load and it is fixed rigidly or hinged or pin jointed at one or both ends."

(3) स्ट्रट (Strut)—किसी ढाँचे (structure), मशीन (machine) या ट्रस (truss) का वह सदस्य (member) जो ऊर्ध्वाधर (vertical) को छोड़कर अन्य किसी भी दशा में स्थित होता है और जिस पर केवल अक्षीय सम्पीडन भार या बल (Axial compressive load) ही कार्य करे, स्ट्रट (strut) कहलाता है।

उदाहरणार्थ, जैसे—पुलों या छतों की कैंचियों (trusses) में लगे वे सदस्य जिन पर केवल संपीडन भार (compressive load) आता है। इसके अतिरिक्त उदाहरणों में पिस्टन रॉड (piston rods), संयोजक दण्ड (connecting rods), फोर्जिंग मशीन में साइड-कड़ियाँ (side links in forging machine) आदि आते हैं।

"A strut is a bar or member in any position other than vertical, subjected to a compressive load and fixed rigidly or hinged or pin jointed at one or both the ends."

Scanned with CamScanner

§ 7.2 अंग का असफल (Fail) होना

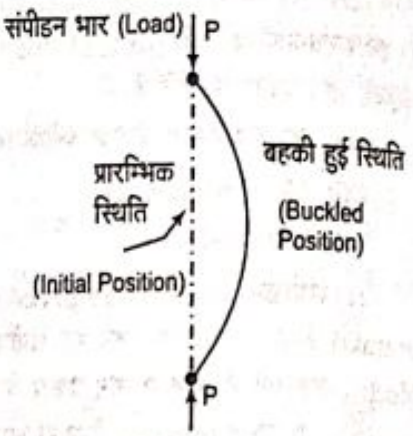
संपीडन में कोई अंग अथवा सदस्य दो प्रकार से भंग या असफल (fail) हो सकता है—

(1) सीधे ही सम्पीडन बल से कुचलकर (On crushing directly by compressive load)

(2) बहकाव या बकलिंग द्वारा (By crippling or buckling)

जब कम लम्बाई के सदस्य अथवा मशीनी अंग पर संपीडन बल लगने से उत्पन्न हुआ प्रतिबल, बल के अनुरूप बढ़ता जाता है और अन्त में एक स्थिति ऐसी आती है कि उस सदस्य (या अंग) में उत्पन्न हुआ प्रतिबल, उसके पदार्थ के भंजन प्रतिबल (crushing stress) के मान के बराबर हो जाता है तो वह सदस्य (या अंग) दबकर कुचल जाता है। इस भार को कुचलने वाला भार (crushing or collapsing load) कहते हैं।

इसके अतिरिक्त यदि सदस्य अधिक लम्बे कॉलम की भाँति है तो सम्पीडन भार लगने से वह अपनी प्रारम्भिक स्थिति से किसी एक दिशा में चित्र 7.1 के अनुसार हट जाता है अर्थात् बहक जाता है। अपनी पहली स्थिति से विस्थापित होने को ही बहकाव या बकलिंग (Buckling) कहते हैं। इस स्थिति में पदार्थ में उत्पन्न हुआ प्रतिबल, भंजन प्रतिबल (breaking stress) से कम ही रहता है, परन्तु कॉलम या स्ट्रट अपनी पूर्व स्थिति से हट जाने (अथवा विस्थापित होने) के कारण, वह निर्धारित काम करने योग्य नहीं रहता, इसीलिए वह असफल (fail) माना जाता है।



चित्र 7.1

कॉलम का बहकाव उसी दिशा में होता है, जिसमें उसकी सामर्थ्य और (कड़ापन stiffness) न्यूनतम होता है।

कॉलम के बहककर असफल होने के कारण निम्न होते हैं—

(1) कॉलम का पूर्ण रूप से सीधा न होना।

(2) पूर्ण रूप से अक्षीय भार (axial load) न लग पाना।

(3) सभी स्थानों पर समान काट (same cross-section) तथा घनत्व (density) का न होना।

(4) कॉलम का पदार्थ सर्वांगसम (homogeneous) न होना।

§ 7.3 कुछ मुख्य परिभाषायें (Important Definitions)

(1) बकलिंग भार या बहकाव भार (buckling load) या क्रान्तिक भार (critical load)—"जिस न्यूनतम भार या बल पर कोई कॉलम या सदस्य अपनी प्रारम्भिक स्थिति से किसी एक दिशा में हट (या बहक) जाता है, वह उसका बहकाव भार या बकलिंग भार (buckling load) या क्रान्तिक भार (critical load) कहलाता है।" कोलम की काट के गुरुत्वकेन्द्र (C.G.) से जाने वाली जिस अक्ष ($X-X$ अक्ष या $Y-Y$ अक्ष) पर जड़त्व आघूर्ण (moment of inertia) I_{XX} या I_{YY} न्यूनतम पाया जाता है, कॉलम उसी अक्ष की ओर बहकता है।

"The maximum limiting load at which the column tends to buckle (or lateral displacement) is called buckling or crippling load." The buckling takes place about the axis having minimum radius of gyration or least M.O.I. (in I_{XX} and I_{YY}).

(2) $$\text{सुरक्षित भार} = \frac{\text{बहकाव भार}}{\text{सुरक्षा गुणांक}}$$

It is the load to which a column is actually subjected to the buckling load. It is obtained by dividing the buckling load by a suitable factor of safety (F.O.S.), i.e.

$$\text{Safe Load} = \frac{\text{Buckling Load}}{\text{Factor of Safety}}$$

Scanned with CamScanner

(3) कॉलम की समतुल्य लम्बाई (Equivalent Length of Column)—किसी कॉलम या स्ट्रट पर बहकाव भार (buckling load) लगाने से उसकी जितनी लम्बाई में, अपनी प्रारम्भिक स्थिति से विक्षेपण (deviation) होता है अर्थात् विस्थापन (deflection) होता है, उस लम्बाई को कॉलम की समतुल्य लम्बाई (equivalent length of column) कहते हैं। इसे L से दर्शाते हैं।

"The distance between the adjacent points of inflexion curve is called equivalent length or effective length of column."

(4) न्यूनतम घूर्णन (परिभ्रमण) त्रिज्या (Least radius of gyration)—कॉलम की काट की अक्षों पर न्यूनतम जड़त्व आघूर्ण (अर्थात् I_{XX} व I_{YY} में से कम वाला मान) और कॉलम की काट के क्षेत्रफल (area) A के अनुपात के वर्गमूल को न्यूनतम घूर्णन त्रिज्या कहते हैं। इसे K से दर्शाते हैं। चूँकि हम जानते हैं कि $I_{min} = AK^2$ (सूत्र)

$$\therefore \quad K = \sqrt{I_{min} / A} \qquad \text{(सूत्र)}$$

(5) तनुता अनुपात (Slenderness Ratio)—किसी कॉलम की वास्तविक लम्बाई (actual length) या प्रभावी लम्बाई (effective length) (L) तथा उसकी अनुप्रस्थ काट के गुरुत्व केन्द्र (C.G.) पर न्यूनतम घूर्णन त्रिज्या (least radius of gyration) 'K' के अनुपात को उस कॉलम का तनुता अनुपात कहते हैं। अत:

तनुता अनुपात $$(\text{S.R.}) = \frac{L}{K} \qquad \text{(सूत्र)}$$

"It is the ratio of equivalent or unsupported length of the column to the minimum radius of gyration of the cross-section of column." It has no unit.

So, $$\text{S.R.} = \frac{l}{K} \text{ or } \frac{L}{K}$$

(6) बहकाव गुणांक या बकलिंग फैक्टर (Buckling Factor)—कॉलम की समतुल्य लम्बाई (L) तथा काट के गु०केन्द्र पर न्यूनतम घूर्णन (परिभ्रमण त्रिज्या) K के अनुपात को बहकाव गुणांक कहते हैं। अर्थात् $\text{B.F.} = \frac{L}{K}$ और स्ट्रट की दशा में अथवा कम लम्बाई के कॉलम की स्थिति में तनुता अनुपात को ही बहकाव गुणांक या बकलिंग फैक्टर कहते हैं। अत:

$$\text{B.F.} = \frac{l}{K} = \frac{L}{K}.$$

"It is the ratio of equivalent length (L) of the column to the minimum radius of gyration (K)."

So, $$\text{B.F.} = \frac{L}{K}.$$

§ 7.4 कॉलम का वर्गीकरण (Classification of Columns)

कॉलम को सरलतम रूप से प्राय: निम्न आधारों (bases) पर वर्गीकृत किया जाता है—

(1) भार की स्थिति (अथवा दशा) के आधार पर (On the basis of load condition)

(a) अक्षीय भारित (Axial Loaded) कॉलम

(b) उत्केन्द्रीय भारित (Eccentric Loaded) कॉलम।

नोट—जब कॉलम पर लगा भार उसकी अनुदैर्घ्य अक्ष (Longitudinal axis) पर कार्य करता है तो वह अक्षीय भारित कहलाता है जबकि अक्ष (axis) से हटकर कुछ दूरी पर अक्ष के समान्तर यदि भार कार्य करता है तो वह उत्केन्द्रीय भारित कॉलम कहलाता है।

(2) तनुता अनुपात के आधार पर (On the basis of Slenderness Ratio)

(a) छोटे कॉलम (Short Column)

जब तनुता अनुपात (S.R. या $\frac{L}{K}$) < 32

Scanned with CamScanner

(b) मध्यम कॉलम (Medium Column)

जब $32 <$ तनुता अनुपात (S.R. या $\frac{L}{K}$) < 120

(c) लम्बे कॉलम (Long Column)

तब तनुता अनुपात (S.R. या $\frac{L}{K}$) > 120

(3) **कॉलम की लम्बाई (l) तथा व्यास (d) में सम्बन्ध के आधार पर** (On the basis of Relation between length and diameter)

(a) छोटे कॉलम (Short Column)

जब $l < 30\,d$

(b) लम्बे कॉलम (Long Column)

जब $l > 30\,d$

(c) मध्यम (Medium Column)—जिस कॉलम की लम्बाई (l) उसके व्यास (diameter) d के 8 गुने से 30 गुने तक बदल सकती है (या vary कर सकती है)

(4) **सिरा-स्थितियों के आधार पर** (On the basis of end conditions)

(a) दोनों सिरे कब्जेदार कॉलम (Both ends are hinged or pin jointed)

(b) एक सिरा बद्ध तथा दूसरा स्वतन्त्र कॉलम (One end is fixed and other end is free column)

(c) एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार कॉलम (One end is fixed and other end is hinged column)

(d) दोनों सिरे बद्ध कॉलम (Both ends are fixed)

§ 7.5 कॉलम की सामर्थ्य (Strength of Columns)

(1) सामर्थ्य उसके तनुता अनुपात (S.R. या $\frac{L}{K}$) के मान पर निर्भर करती है। तनुता अनुपात का मान अधिक होने पर कॉलम की सम्पीडन भार सहने की सामर्थ्य (strength) कम हो जाती है तथा अपनी पूर्व स्थिति से बहकने (या विक्षेपित होने) की प्रवृत्ति (tendency) बढ़ जाती है।

(2) कॉलम की सामर्थ्य उसके सिरों की स्थिति (end conditions) पर भी निर्भर करती है।

7.5.1 आयलर सूत्र (Euler's Formula)

यह सूत्र केवल ऐसे स्ट्रट या कॉलम के लिये लागू होता है, जिसकी लम्बाई (l), उसके व्यास (diameter) d के 30 गुने से अधिक होती है। आयलर सूत्र के प्रयोग में सीधा संपीडन प्रतिबल (direct compressive stress) को नगण्य (negligible) मानते हैं और केवल नमन आघूर्ण (B.M.) के आधार पर उसके असफल (fail) होने के लिए बहकाव (या क्रान्तिक) भार के पदों में सूत्र ज्ञात करते हैं। सूत्र की सिद्धि (Derivation of formula) हमारे पाठ्यक्रम (syllabus) में नहीं है।

सिरों की स्थितियों के आधार पर बने चारों कॉलम्स के बहकाव में भंग (fail) होने के लिए समतुल्य लम्बाई (equivalent length) के पदों मे "आयलर" ने निम्न सूत्र दिया—

बहकाव भार या क्रिपलिंग भार या आयलर भार,

$$P_b \text{ या } P_{cr} \text{ या } P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad \text{(सूत्र)}$$

Scanned with CamScanner

जहाँ E = कॉलम के पदार्थ का यंग मापांक (Young's modulus)

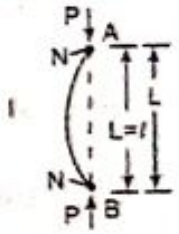
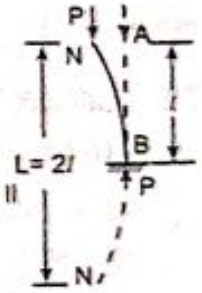
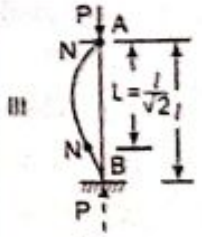
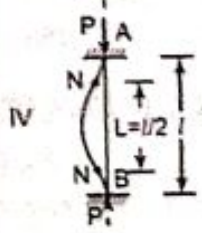
I = कॉलम की अनुप्रस्थ काट का न्यूनतम जड़त्व आघूर्ण
(Moment of Inertia, I = less value in I_{XX} and I_{YY})

L = कॉलम की समतुल्य लम्बाई (Equivalent Length)

l = कॉलम की वास्तविक लम्बाई (Actual Length)

इस आयलर सूत्र में चारों प्रकार के कॉलम की समतुल्य लम्बाई (L) का मान, सिरों की स्थिति के आधार पर तालिका के सम्बन्ध सूत्रों द्वारा वास्तविक लम्बाई (actual length) l के रूप में रखकर बहकाव भार या क्रिपलिंग भार ज्ञात करते हैं।

तालिका 7.1

क्रम संख्या	कॉलम का प्रकार (सिरों की स्थिति के आधार पर) (End conditions)	सम्बन्ध (समतुल्य लम्बाई (L) तथा वास्तविक लं० l)	आयलर सूत्र से बहकाव भार (P_c) Crippling Load	कॉलम की आरम्भिक एवं बहकी स्थिति Fig. of end conditions
1.	दोनों सिरों पर कब्जेदार कॉलम (Both ends are hinged)	$L = l$	$\frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$	 I
2.	एक सिरे पर बद्ध तथा दूसरे पर स्वतन्त्र कॉलम (One end is fixed and other is free)	$L = 2l$	$\frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$	 II
3.	एक सिरे पर बद्ध तथा दूसरे पर कब्जेदार कॉलम (One end is fixed and other is hinged)	$L = \frac{l}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}$	 III
4.	दोनों सिरों पर बद्ध कॉलम (Both ends are fixed)	$L = \frac{l}{2}$	$\frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2}$	 IV

Scanned with CamScanner

7.5.2 क्रिपलिंग प्रतिबल तथा तनुता अनुपात (Crippling stress and Slenderness Ratio)

हम जान चुके हैं कि दोनों सिरों पर कब्जेदार (hinged or pin jointed) कॉलम के लिये बहकाव भार या क्रिपलिंग भार (Euler or crippling load)

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \qquad [\because L = l \text{ होगा}]$$

यदि काट का क्षेत्रफल A है, तब न्यूनतम जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.)

$$I = AK^2$$

जहाँ K = काट के गु० केन्द्र (G) से जाने वाली अक्ष (axis) पर न्यूनतम घूर्णन त्रिज्या (least radius of gyration) है।

$$\therefore \qquad P_e = \frac{\pi^2 E (AK^2)}{l^2} = \frac{\pi^2 EA}{\left(\frac{l}{K}\right)^2}$$

अत: क्रिपलिंग प्रतिबल (crippling stress), $\sigma_e = \frac{P_e}{A}$

$$\therefore \qquad \sigma_e \text{ या } f_{cr} = \frac{P_e}{A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{K}\right)^2} \qquad \text{(सूत्र)}$$

यहाँ $\frac{l}{K}$ को ही तनुता अनुपात (slenderness ratio) कहते हैं।

प्राय: छोटे एवं मध्यम कॉलम के लिए तनुता अनुपात $\left(\frac{l}{K}\right)$ का मान 120 से कम तथा लम्बे कॉलम के लिए 120 से अधिक होता है।

7.5.3 आयलर सूत्र के लिए कॉलम के सिद्धान्त में मान्यतायें (Assumptions in Column theory for Euler's Formula) (U.K. 20013, W)

कॉलम सिद्धान्त सूत्र निम्नलिखित मान्यताओं पर आधारित हैं—

(1) कॉलम आरम्भिक अवस्था में बिल्कुल सीधा (straight) तथा समरूप होगा।

(2) सम्पीडन भार, काट के गुरुत्व केन्द्र से होकर गुजरेगा तथा अक्षीय होगा।

(3) कॉलम का पदार्थ सर्वांगसम (homogeneous) होगा।

(4) कॉलम का अपना भार नगण्य होगा।

(5) कॉलम पर भार, समानुपाती सीमा (limit of proportionality) के अन्दर लगेगा।

(6) कब्जेदार सिरे घर्षणरहित तथा बद्ध सिरे दृढ़ (rigid) होंगे।

(Pin joints are frictionless and fixed ends are perfectly rigid.)

7.6 रैंकिन-गॉर्डन सूत्र (Rankine-Gordon Formula)

हम जानते हैं कि बहकने (buckling) के आधार पर असफल (fail) होने वाले लम्बे कॉलम के लिए आयलर सूत्र प्रयोग किये जाते हैं। परन्तु मध्यम कॉलम (medium column) के भंग (या असफल fail) होने के लिए रैंकिन सूत्र प्रयोग किया जाता है।

माना यदि कॉलम के पदार्थ का अन्तिम संपीडन प्रतिबल (f_c या σ_c) है और काट का क्षेत्रफल (A) है, तब छोटे कॉलम के असफल (fail) होने के लिए क्रिपलिंग भार या बल

$$P_{cr} = f_c \times A \qquad \text{अथवा} \qquad P_{cr} = \sigma_c \times A$$

Scanned with CamScanner

इसे अधिकतम या असफल न होने की अन्तिम स्थिति में अधिकतम सम्पीडन बल (P_c) भी कहते हैं। माना यदि उसी पदार्थ के बने लम्बे कॉलम के लिए बहकाव भार P_e है तो मध्यम लम्बाई के कॉलम के भंग या असफल (fail) होने के लिए रैंकिन के अनुसार रैंकिन भार P_R को निम्न सूत्र द्वारा दर्शाया जाता है—

$$\frac{1}{P_R} = \frac{1}{P_e} + \frac{1}{P_{cr}} \quad \text{... (i)}$$

या $$\frac{1}{P_R} = \frac{P_{cr} + P_e}{P_{cr} \times P_e}$$

या $$P_R = \frac{P_{cr} \times P_e}{P_e + P_{cr}} = \frac{P_{cr}}{1 + \frac{P_{cr}}{P_e}}$$

या $$P_R = \frac{f_c \times A}{1 + \frac{f_c \times A \times (L)^2}{\pi^2 EI}} \qquad \left[\because P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}\right]$$

$$= \frac{f_c \times A}{1 + \left(\frac{f_c}{\pi^2 E}\right) \times \left(\frac{L}{K}\right)^2} \qquad [\because I = AK^2 \text{ (सूत्र)}]$$

यहाँ, $\frac{f_c}{\pi^2 E} = a$ माना, जिसे रैंकिन स्थिरांक (Rankine constant) कहते हैं।

प्रत्येक पदार्थ के लिए a का मान भिन्न होता है।

$\therefore$ $P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left(\frac{L}{K}\right)^2}$ यह रैंकिन सूत्र कहलाता है।

यहाँ $K = \sqrt{\frac{I}{A}}$ है जिसे न्यूनतम परिभ्रमण त्रिज्या (least radius of gyration) कहते हैं तथा $I = I_{XX}$ तथा I_{YY} में जो भी कम हो, को प्रयोग करते हैं।

दोनों सिरे कब्जेदार कॉलम के लिए विभिन्न पदार्थों के लिए f_c तथा a के मान तालिका 7.2 में दिये गये हैं।

पदार्थ (Material Name)	अन्तिम संपीडन प्रतिबल (Compressive stress) (MPa या MN/m^2) में	रैंकिन स्थिरांक (a) का मान $a = f_c / \pi^2 E$
नरम इस्पात (mild steel)	320	$\frac{1}{7500}$
ढलवाँ लोहा (cast iron)	550	$\frac{1}{1600}$
पिटवाँ लोहा (wrought iron)	250	$\frac{1}{9000}$
लकड़ी (strong timber)	40 से 50 तक	$\frac{1}{750}$ से $\frac{1}{2000}$ तक

Scanned with CamScanner

महत्वपूर्ण उदाहरण (Important Examples)

उदाहरण 1. आयलर सूत्र का प्रयोग करते हुए पिन लगे हुए सिरों वाले गोल स्तम्भ के लिये, जिसका अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 10 cm^2 तथा स्लैण्डरनैस अनुपात 120 हो तो बंकन भार (buckling load) की गणना कीजिये। $E = 200$ GPa **(U.K. 2004, W)**

हल—बंकन भार (Buckling Load), $P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 E(AK^2)}{l^2}$

$$\therefore \quad P_e = \frac{\pi^2 EA}{\left(\frac{l}{K}\right)^2}$$

यहाँ तनुता अनुपात (Slenderness Ratio) $= \frac{l}{K} = 120$ है।

$$\therefore \text{ बंकन भार (Buckling Load)}, \quad P_e = \frac{\pi^2 \times (2\times10^5) \times (10\times100)}{(120)^2}$$

$$\Rightarrow \quad P_e = 137077{\cdot}84 \text{ N}$$

$$= 137{\cdot}078 \text{ kN}$$

उत्तर

उदाहरण 2. एक 120 मिमी × 100 मिमी आयताकार काट एवं 1·75 मीटर लम्बे कॉलम का एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार है। कॉलम के लिए बहकाव भार का मान ज्ञात करें। कॉलम के लिए सुरक्षित भार भी ज्ञात कीजिए जबकि सुरक्षा गुणांक 5 हो, $E = 200$ GPa मानिये। **(U.K. 2012, S, 2013, Sp.BP)**

हल—प्रश्न में दी गयी आयताकार काट की मापों द्वारा, जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) का न्यूनतम मान

$$I_{min} = \frac{120\times100^3}{12} = 10^7 \text{mm}^4, \; E = 200 \text{ GPa} = 2\times10^5 \text{ N/mm}^2$$

∵ कॉलम का एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार है, अत: $L = \frac{l}{\sqrt{2}}$ होगा।

$$\therefore \quad L = \frac{1{\cdot}75\times1000}{\sqrt{2}} = 1237{\cdot}44 \text{ mm}$$

सुरक्षा गुणांक (Factor of safety), $S = 5$ है।

अत: बहकाव भार (buckling factor) अर्थात् आयलर भार,

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{ सूत्र से,}$$

$$= \frac{(3{\cdot}14)^2 \times 2\times10^5 \times10^7}{(1237{\cdot}44)^2} = 12877779{\cdot}69 \text{ N}$$

$$= 12877{\cdot}78 \text{ kN}$$

उत्तर

अब सुरक्षित भार (Safe Load),

$$= \frac{\text{आयलर भार } (P_e)}{\text{सुरक्षा गुणांक (F.S.)}}$$

$$= \frac{12877{\cdot}78}{5} = 2575{\cdot}55 \text{ kN}$$

उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 3. एक 2·5 m लम्बा आलंबन स्तम्भ (column) का व्यास 60 mm है। आलंबन स्तम्भ (supported column) का एक सिरा बद्ध (Fixed) है, जबकि दूसरा सिरा कब्जेदार (Hinged) है। Euler का सूत्र प्रयोग करते हुए तथा सुरक्षा गुणांक 3·5 लेते हुये मेम्बर (कॉलम) के लिये निरापद संपीडन भार (safe compressive load) ज्ञात कीजिये। $E = 200$ GPa है। **(U.P. 2013, Mechanical)**

हल—कॉलम की काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I), $I = \frac{\pi d^4}{64}$ सूत्र से

$$I = \frac{\pi (60)^4}{64} = 635850 \text{ mm}^4$$

∵ कॉलम का एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार है, अत:

$$L = \frac{l}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2{\cdot}5 \times 1000}{\sqrt{2}} = 1767{\cdot}767 \text{ mm}$$

∵ $E = 200 \text{ GPa} = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ तथा सुरक्षा गुणांक (F.S.) = 3·5

∴ आयलर भार (अथवा बहकाव भार या क्रान्तिक भार)

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{ सूत्र से}$$

$$= \frac{(3{\cdot}14)^2 \times 2 \times 10^5 \times 635850}{(1767{\cdot}767)^2}$$

$$= 401230{\cdot}48 \text{ N}$$

$$= 401{\cdot}23 \text{ kN}$$

अब निरापद संपीडन भार (safe compressive load)

$$= \frac{P_e}{\text{F.S.}} = \frac{401{\cdot}23}{3{\cdot}5} \text{ kN} = 114{\cdot}64 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 4. एक खोखले कास्ट आयरन कॉलम (hollow C.I. column) (एक सिरा दृढ़ता से स्थिर (fixed) तथा दूसरा सिरा हिंज्ड है) जिसका बाह्य व्यास (outer diameter) 150 mm है, में सुरक्षित कम्प्रैसिव लोड की गणना कीजिये। आन्तरिक व्यास (internal diameter) 100 mm तथा लम्बाई 10 m है। आयलर के सूत्र का प्रयोग कीजिए जिसमें सुरक्षा गुणांक (F.S. = 5 तथा $E = 95 \text{ GN/m}^2$ है। **(U.K. 2010 (W))**

हल—∵ काट का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia),

$$I = \frac{\pi (d_o^4 - d_i^4)}{64} \quad \text{(सूत्र)}$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi (150^4 - 100^4)}{64} = 19931640{\cdot}63 \text{ mm}^4$$

∵ कॉलम का एक सिरा स्थिर (fixed) तथा दूसरा कब्जेदार (hinged) है तो $L = \frac{l}{\sqrt{2}}$ (सूत्र)

$$\therefore \quad L = \frac{10 \times 1000}{\sqrt{2}} = 7071{\cdot}0678 \text{ mm}$$

$$E = 95 \text{ GN/m}^2 = 95 \times 1000 \text{ N/mm}^2 = 0{\cdot}95 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$$

∴ बहकाव भार (या आयलर भार),

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{ सूत्र से}$$

Scanned with CamScanner

$$P_e = \frac{(3{\cdot}14)^2 \times (95 \times 1000) \times (19931640{\cdot}63)}{(7071{\cdot}0678)^2}$$

$$= 373384{\cdot}2 \text{ N}$$

$$= 373{\cdot}384 \text{ kN}$$ उत्तर

अब सुरक्षित कम्प्रैसिव लोड $= \frac{P_e}{\text{F.S.}}$

$$= \frac{373{\cdot}384}{5} = 74{\cdot}677 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 5. किसी कॉलम की काट 4 cm भुजा का वर्ग है। इसकी लम्बाई 1·5 m है और एक सिरा कब्जेदार तथा दूसरा बद्ध (fixed) है। सुरक्षा गुणांक (safety factor) 2 मानकर इस पर आयलर सूत्र से अधिकतम सुरक्षात्मक भार ज्ञात कीजिये। E = 100 GPa। **(U.K. 2008, S)**

हल—कॉलम का न्यूनतम जड़ता घूर्ण,

$$I = \frac{4 \times 4^3}{12} = 21{\cdot}33 \text{ cm}^4 = 21{\cdot}33 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

अब आयलर सूत्र से, (यहाँ प्रश्न के अनुसार कॉलम के सिरों के लिए $L = \frac{l}{\sqrt{2}}$ है)

$$\text{अधिकतम आयलर भार } = P_e = \frac{2\pi^2 EI}{l^2} = \frac{2 \times \pi^2 \times 100 \times 10^9 \times 21{\cdot}33 \times 10^{-8}}{1{\cdot}5^2} = 1871{\cdot}2 \text{ N}$$

$$\text{अब सुरक्षात्मक भार} = \frac{\text{आयलर भार } (P_e)}{\text{सुरक्षा गुणांक (F.S.)}}$$

परन्तु सुरक्षा गुणांक 2 है,

इसलिये, अधिकतम सुरक्षात्मक भार $= \frac{1871{\cdot}2}{2} = 935{\cdot}6$ N उत्तर

उदाहरण 6. दो, अक्षीय भार सम्भालने वाले स्तम्भों की प्रभावी लम्बाई, निर्माण के पदार्थ एवं परिच्छेदों के क्षेत्रफल एक समान हैं, परन्तु उनमें एक का अनुप्रस्थ परिच्छेद वर्गाकार है और दूसरे का वृत्ताकार है। उनकी भार धारण करने की क्षमताओं का अनुपात ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2002)**

हल—माना कि वर्गाकार तथा वृत्ताकार स्तम्भों की भार क्षमतायें और जड़त्व आघूर्ण (MOI) क्रमशः P_s, P_c तथा I_s, I_c हैं।

तब आयलर सूत्र से, ($L = l$, सिरे कब्जेदार लेकर)

$$\frac{P_s}{P_c} = \frac{\pi^2 EI_s}{l^2} \times \frac{l^2}{\pi^2 EI_c} = \frac{I_s}{I_c} \quad \text{... (i)}$$

यदि वृत्ताकार स्तम्भ का व्यास d तथा वर्गाकार स्तम्भ के परिच्छेद की भुजा a है, तो प्रश्नानुसार

$$a^2 = \frac{\pi}{4}d^2 \quad \text{या} \quad a^4 = \frac{\pi^2}{4^2}d^4$$

तथा $$I_s = \frac{a \times a^3}{12} = \frac{a^4}{12} \quad \text{तथा} \quad I_c = \frac{\pi d^4}{64}$$

अब (1) से, $$\frac{P_s}{P_c} = \frac{a^4}{12} \times \frac{64}{\pi d^4} \quad \Rightarrow \frac{\pi^2 d^4}{16 \times 12} \times \frac{64}{\pi d^4}$$

$$\frac{P_s}{P_c} = \frac{\pi}{3}$$ उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 7. एक समरूप 1·25 m लम्बाई की गोल छड़ अपने सिरों पर शुद्धालम्ब है। इसमें 350 N के संकेन्द्रित केन्द्रीय भार से 12·5 mm का विक्षेप होता है। यदि छड़ को सिरों पर पिन द्वारा जुड़े एक स्ट्रट के रूप में प्रयोग किया जाये तो उसमें आयलर क्रिपलिंग भार की गणना कीजिये। **(U.P. 2004)**

हल—प्रश्नानुसार शुद्धालम्बित धरन में विक्षेप

$$y = \frac{Wl^3}{48\,EI} \qquad \text{या} \qquad EI = \frac{Wl^3}{48y}$$

अब पिन सिरों वाली स्ट्रट पर आयलर क्रिपलिंग भार,

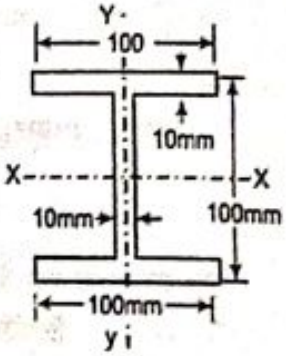
$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \qquad \text{(यहाँ } L = l \text{ है)}$$

$$= \frac{\pi^2}{l^2} \times \frac{Wl^3}{48y} = \frac{\pi^2 \times Wl}{48y} = \frac{\pi^2 \times 350 \times 1{\cdot}25}{48 \times 12{\cdot}5 \times 10^{-3}}$$

$$= 7196{\cdot}5\,\text{N} \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 8. किसी कॉलम की काट I है जो कि चित्र 7.2 में दिखाई गई है। यह कॉलम 3 सुरक्षा गुणांक पर 400 kN का भार सहार सकता है। कॉलम एक सिरे पर स्वतन्त्र तथा दूसरे पर बद्ध (fixed) हो तो उसकी लम्बाई ज्ञात कीजिये। E = 150 GPa

(U.K. 2006)



चित्र 7.2

हल—काट के लिए $$I_{XX} = \left[\frac{10 \times 10^3}{12} - \frac{9 \times 8^3}{12}\right] = \frac{1}{12}(5392)$$

$$= 449{\cdot}3\,\text{cm}^4 = 449{\cdot}3 \times 10^{-8}\,\text{m}^4$$

$$I_{YY} = \frac{1 \times 10^3}{12} + \frac{8 \times 1^3}{12} + \frac{1 \times 10^3}{12}$$

$$= 167{\cdot}33\,\text{cm}^4$$

अत: काट का न्यूनतम जड़ता घूर्ण,

$$I = I_{YY} = 167{\cdot}33 \times 10^{-8}\,\text{m}^4$$

हम जानते हैं कि सुरक्षात्मक भार $= \dfrac{\text{बहकाव भार (buckling load)}}{\text{सुरक्षा गुणांक (safety factor)}}$

बहकाव भार = सुरक्षात्मक भार × सुरक्षा गुणांक

$$= 400 \times 3 = 1200\,\text{kN} = 1200 \times 10^3\,\text{N}$$

परन्तु बहकाव भार $= P_e = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2} = \dfrac{\pi^2 EI}{4l^2}$ (जहाँ, l = कॉलम की लम्बाई)

$\because$ (एक सिरा बद्ध तथा दूसरा स्वतन्त्र कॉलम के लिये $L = 2l$ होता है)

$$E = 150\,\text{GPa} = 150 \times 10^9\,\text{N/m}^2$$

$$\therefore \quad 1200 \times 10^3 = \frac{\pi^2 \times 150 \times 10^9 \times 167{\cdot}33 \times 10^{-8}}{4 \times l^2}$$

Scanned with CamScanner

या $$l^2 = \frac{\pi^2 \times 150 \times 10^9 \times 167{\cdot}33 \times 10^{-8}}{4 \times 1200 \times 10^3} = 0{\cdot}5155$$

अत: $$l = 0{\cdot}718 \text{ m} = 718 \text{ mm}$$ उत्तर

उदाहरण 9. ढलवाँ लोहे के एक कॉलम की काट 3 cm × 4 cm का आयत है। यदि पदार्थ की अनुपाती सीमा (proportional limit) 350 MN / m² हो और $E = 220$ GPa तो कॉलम की वह न्यूनतम लम्बाई ज्ञात कीजिये जिस पर आयलर सूत्र (Euler's formula) का प्रयोग किया जा सके, तथा आयलर भार को भी ज्ञात कीजिये। कॉलम के दोनों सिरे कब्जेदार हैं।

हल—काट का न्यूनतम जड़ता घूर्ण (M.O.I.),

$$I = \frac{4 \times 3^2}{12} = 9 \text{ cm}^4 = 9 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

तथा काट का क्षेत्रफल $$A = 3 \times 4 = 12 \text{ cm}^2 = 12 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

माना कि कॉलम की लम्बाई l सेमी तथा आयलर भार P है, तब हम जानते हैं कि ($L = l$ की दशा में)

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

∴ क्रिपलिंग प्रतिबल (crippling stress),

$$\frac{P}{A} = \frac{\pi^2 EI}{Al^2}$$

अब लम्बाई के कम से कम मान के लिये,

क्रिपलिंग प्रतिबल = समानुपाती सीमा (proportional limit),

(परन्तु समानुपाती सीमा = 350 MN / m² दिया है)

∴ $$\frac{P}{A} = 350 \text{ MN / m}^2 = 350 \times 10^6 \text{ N / m}$$

∴ $$350 \times 10^6 = \frac{\pi^2 EI}{Al^2}$$

या $$l^2 = \frac{\pi^2 \times 220 \times 10^9 \times 9 \times 10^{-8}}{350 \times 10^6 \times 12 \times 10^{-4}} = 0{\cdot}46485$$

∴ $$l = 0{\cdot}6818 \text{ m}$$

अब आयलर भार का मान

$$P = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 \times 220 \times 10^9 \times 9 \times 10^{-8}}{(0{\cdot}6818)^2} = 42{\cdot}388 \times 10^3 \text{ N}$$

$$= 42{\cdot}388 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 10. एक 15 cm × 15 cm की T काट को, जिसके फ्लैंज तथा वैब की मोटाई समान रूप से 2 cm है, 4 m लम्बे स्ट्रट के रूप में प्रयोग किया जाता है जिसके दोनों सिरे कब्जेदार हैं। यदि पदार्थ के लिये यंग मापांक 2×10^5 N / mm² हो तो क्रिपलिंग भार ज्ञात कीजिये। [उत्तर : 704·653 kN] **(U.K. 2005)**

हल—प्रश्नानुसार T-काट को चित्र 7.3 में दिखाया गया है।

इसमें $$y_1 = \frac{13}{2} = 6{\cdot}5 \text{ cm}$$

Scanned with CamScanner

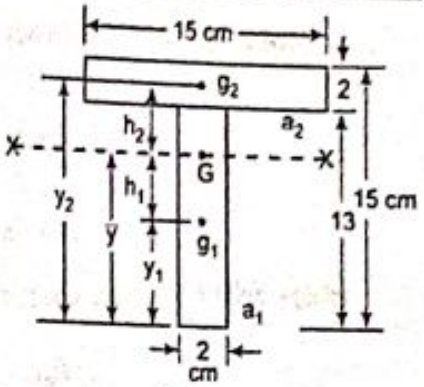
$y_2 = 15 - 1 = 14$ cm

g_1 केन्द्र वाले आयत का क्षे०, $a_1 = 2 \times 13 = 26$

g_2 केन्द्र वाले आयत का क्षे०, $a_2 = 15 \times 2 = 30$

∴ गु० केन्द्र G की ऊँचाई $\bar{y} = \dfrac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2}$

$$\bar{y} = \frac{26 \times 6{\cdot}5 + 30 \times 14}{26 + 30} = 10{\cdot}52 \text{ cm}$$



चित्र 7.3

∴ $h_1 = \bar{y} - y_1 = 10{\cdot}52 - 6{\cdot}5 = 4{\cdot}02$ cm

तथा $h_2 = y_2 - \bar{y} = 14 - 10{\cdot}52 = 3{\cdot}48$ cm

∴ $I_{XX} = [I_{X_{g_1}} + a_1 h_1^2] + [I_{X_{g_2}} + a_2 h_2^2]$ सूत्र से

$$= \left[\frac{2 \times 13^3}{12} + 26 \times 4{\cdot}02^2\right] + \left[\frac{15 \times 2^3}{12} + 30 \times 3{\cdot}48^2\right] = 1159{\cdot}65 \text{ cm}^4$$

तथा $I_{YY} = \dfrac{13 \times 2^3}{12} + \dfrac{2 \times 15^3}{12} = 571{\cdot}166 \text{ cm}^4 = 571{\cdot}167 \times 10^4 \text{ mm}^4$

∴ आयलर सूत्र में $I = I_{XX}$ तथा I_{YY} में से कम वाला मान अर्थात् $I_{YY} = 571{\cdot}167 \times 10^4$ mm^4

दोनों सिरे कब्जेदार हैं, अत: $L = l = 4$ m $= 4000$ mm

∴ क्रिपलिंग भार $P_{cr} = \dfrac{\pi^2 EI}{L^2} = \dfrac{(3{\cdot}14)^2 \times 2 \times 10^5 \times 571{\cdot}167 \times 10^4}{(4000)^2}$

$= 703934{\cdot}7692$ N

$= 703{\cdot}935$ kN $= 704$ kN उत्तर

उदाहरण 11. एक मिश्रित धातु की नलिका की लम्बाई 5 मीटर और बाहरी और आन्तरिक व्यास क्रमश: 40 mm और 25 mm हैं। उसमें पाया गया कि तनन भार 60 kN लगने पर 6·4 mm बढ़ गई। नलिका का व्याकुंचन भार ज्ञात करें जब उसे एक कॉलम के रूप में प्रयोग किया जाये जिसके दोनों सिरे कब्जेदार हों। नलिका को सुरक्षित संपीडन भार की सुरक्षा गुणांक 4 के लिए ज्ञात करें। [उत्तर : 2·573 kN, 0·643 kN] **(U.P. 2007)**

हल—दिया है नलिका (tube) के बाहरी व्यास $d_o = 40$ mm

आन्तरिक व्यास $d_i = 25$ mm

∴ $I = \dfrac{\pi (d_0^4 - d_i^4)}{64} = 106434{\cdot}96 \text{ mm}^4$

क्षेत्रफल $A = \dfrac{\pi (d_o^2 - d_i^2)}{4} = 765{\cdot}375 \text{ mm}^2$

∵ तनाव बल $(F) = 60$ kN $= 60 \times 1000$ N लगाने से लम्बाई में वृद्धि $(\Delta P) = 6{\cdot}4$ mm

अब $\Delta l = \dfrac{F \times l}{AE}$ सूत्र से

$$6{\cdot}4 = \frac{60 \times 1000 \times 5000}{765{\cdot}375 \times E} \quad \text{या} \quad E = 61244{\cdot}488 \text{ N/mm}^2$$

अब इसे strut के रूप में प्रयोग करने पर $L = l = 5$ m $= 5000$ mm

Scanned with CamScanner

∴ आयलर सूत्र से नलिका (tube) का व्याकुंचन भार, $P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ सूत्र द्वारा

$$P_e = \frac{\pi^2 \times 61244 \cdot 488 \times 106434 \cdot 96}{(5000)^2}$$

$$= 2570 \cdot 8 \text{ N} = 2 \cdot 57 \text{ kN}$$ उत्तर

सुरक्षित संपीडन भार (safe compressive load)

$$P_{safe} = \frac{\text{आयलर भार } (P_e)}{\text{सुरक्षा गुणांक (F.S.)}} = \frac{2 \cdot 57}{4} = 0 \cdot 643 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 12. जब एक समान व्यास वाली 3 मी० लम्बाई की छड़ को 2 मी० के विस्तार की एक सरल आधार वाली धरन के रूप में प्रयोग किया जाता है तथा विस्तार के मध्य-बिन्दु पर 200 N का संकेन्द्री भार लगाने पर 5 मिमी० का विक्षेप प्राप्त होता है। यदि इस छड़ को स्तम्भ के रूप में प्रयोग किया जाये, जिसका एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार हो, तब आयलर व्याकुंचन भार का मान ज्ञात कीजिए। [U.P. 2004]

हल—∵ विक्षेप $y = \frac{WL^3}{48\,EI}$ (सूत्र),

अत: $5 = \frac{200 \times (2000)^3}{48 \times E \times I}$ या $EI = \frac{16 \times 10^{11}}{240}$

अब स्तम्भ (column) रूप में, $L = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{3000}{\sqrt{2}}$ या $L^2 = 4500000 \text{ mm}$

∴ आयलर व्याकुँचन भार (Euler's Load) $P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ सूत्र से,

$$P_e = \frac{\pi^2 \times 16 \times 10^{11}}{45 \times 10^5 \times 240} = 14621 \cdot 64 \text{ N} = 14 \cdot 62 \text{ kN}$$ उत्तर

विशेष–रैंकिन सूत्र पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 13. एक ढलवाँ लोहे के बने ठोस स्तम्भ की लम्बाई 5 m तथा व्यास 15 cm है। यह नीचे के सिरे पर स्थिर बद्ध (fixed) तथा दूसरे सिरे पर मुक्त (free) है। अगर सुरक्षा गुणांक (factor of safety) 5 है तो स्तम्भ का निरापद भार (safe load) ज्ञात करें। रेंकिन सूत्र में 'a' का मान ढलवाँ लोहे के लिये $\frac{1}{1800}$ लें तथा $E = 190 \text{ GN/m}^2$। (U.K. 2005)

हल—हम जानते हैं कि स्थिरांक,

$$a = \frac{f_c}{\pi^2 E}$$ (सूत्र)

∴ $$f_c = a \times \pi^2 E$$ ... (i)

$$= \frac{1}{1800} \times \pi^2 \times 190 \times 10^3 = 1040 \cdot 735 \text{ N/mm}^2$$

$(\because E = 190 \text{ GN/m}^2 = 190 \times 10^3 \text{ N/mm}^2)$

$l = 5 \text{ m}$

Scanned with CamScanner

तब कॉलम की समतुल्य लम्बाई (equivalent length),

$$L = 2l = 2 \times 5 = 10 \text{ m} = 10 \times 1000 \text{ mm}$$

$$A = \frac{1}{4}\pi \times 15^2 = 176{\cdot}625 \text{ cm}^2 = 176{\cdot}625 \times 10^2 \text{ mm}$$

$$I = \frac{\pi \times 15^4}{64} = 2483{\cdot}79 \text{ cm}^4 = 2483{\cdot}79 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

अत: काट की न्यूनतम घूर्णन त्रिज्या (least radius of gyration),

$$K = \sqrt{\left(\frac{I}{A}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2483{\cdot}79 \times 10^4}{176{\cdot}625 \times 10^2}\right)} = 37{\cdot}5 \text{ mm}$$

अब रेंकिन सूत्र, $P_R = \dfrac{f_c \times A}{1 + a\,(L/K)^2}$ से

$$P_R = \frac{1040{\cdot}735 \times 176{\cdot}625 \times 10^2}{1 + \frac{1}{1800} \times \left(\frac{10^4}{37{\cdot}5}\right)} = 453808{\cdot}8 \text{ N} = 453{\cdot}8 \text{ kN}$$

हम जानते हैं कि,

$$\text{निरापद भार (safe load)} = \frac{\text{रेंकिन भार } (P_e)}{\text{सुरक्षा गुणांक (F.S.)}} = \frac{453{\cdot}8}{5} = 90{\cdot}76 \text{ kN}$$

उदाहरण 14. ढलवाँ लोहे के 3m लम्बे एक स्तम्भ (column) की काट का बाह्य व्यास 5 cm तथा अन्त: व्यास 2 cm है। इसका एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार (hinged) है। यदि पदार्थ का अन्तिम प्रतिबल (ultimate stress) $f_c = 560$ MPa और रेंकिन स्थिरांक $\frac{1}{1600}$ हो तो कॉलम के लिये रेंकिन भार ज्ञात कीजिये। उत्तर

(U.P. 2010 S)

हल—कॉलम की काट का क्षेत्रफल,

$$A = \frac{\pi}{4}(5^2 - 2^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} \times 21 = 16{\cdot}485 \text{ cm}^2 = 16{\cdot}485 \times 10^{-4} \text{ m}^2$$

कॉलम का न्यूनतम जड़ता घूर्ण, $I = \frac{\pi}{64}(5^4 - 2^4) = 29{\cdot}88 \text{ cm}^4 = 29{\cdot}88 \times 10^{-8} \text{ m}^4$

अब हम जानते हैं कि घूर्णन त्रिज्या (radius of gyration) K निम्न सूत्र द्वारा सम्बन्धित है—

$$I = AK^2 \qquad \text{या} \qquad K = \sqrt{\left[\frac{I}{A}\right]}$$

अत: कॉलम के लिये न्यूनतम घूर्णन त्रिज्या,

$$K = \sqrt{\left[\frac{29{\cdot}88 \times 10^{-8}}{16{\cdot}485 \times 10^{-4}}\right]} = 1{\cdot}346 \times 10^{-2} \text{ m}$$

अब रेंकिन सूत्र से, रेंकिन भार,

$$P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left[\frac{L}{K}\right]^2}$$

Scanned with CamScanner

समतुल्य लम्बाई, $L = \frac{l}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \quad P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left[\frac{l}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{K}\right]^2}$$

$$= \frac{560 \times 10^6 \times 16{\cdot}485 \times 10^{-4}}{1 + \frac{1}{1600} \times \left[\frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{1{\cdot}346 \times 10^{-2}}\right]^2} = 55780 \text{ N} = 55{\cdot}78 \text{ kN}$$

उदाहरण 15. इस्पात की एक नलिका, जिसका बाह्य व्यास तथा आन्तरिक व्यास क्रमश: 4 cm तथा 2·8 cm हैं, स्ट्रट की तरह प्रयोग होता है जिसके दोनों सिरे कब्जेदार हैं। स्ट्रट की लम्बाई निकालें, यदि आयलर (Euler) तथा रेंकिन (Rankine) के सूत्र से क्रिपलिंग भार (crippling load) का एक ही मान है। $E = 200$ GPa लें। रेंकिन सूत्र के अचर 330 MN/m^2 तथा $\frac{1}{7500}$ हैं।

हल— $d_i = 2{\cdot}8$ cm, $d_0 = 4$ cm, $f_c = 330$ MN/m^2, $a = \frac{1}{7500}$

नलिका की काट का क्षेत्रफल, $A = \frac{\pi}{4}(4^2 - 2{\cdot}8^2) = 6{\cdot}4056 \text{ cm}^2 = 6{\cdot}4056 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

काट का जड़ता घूर्ण, $I = \frac{\pi}{64}(4^4 - 2{\cdot}8^4) = 9{\cdot}54 \text{ cm}^4 = 9{\cdot}54 \times 10^{-8} \text{ m}^4$

परन्तु $AK^2 = I \quad \therefore \quad K^2 = \frac{I}{A}$

∴ घूर्णन त्रिज्या, $K = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\left(\frac{9{\cdot}54 \times 10^{-8}}{6{\cdot}4056 \times 10^{-4}}\right)} = \sqrt{(1{\cdot}49 \times 10^{-4})}$

$= 1{\cdot}22 \times 10^{-2}$m

आयलर सूत्र से क्रिपलिंग भार, $P_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

रेंकिन सूत्र से क्रिपलिंग भार, $P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left(\frac{L}{K}\right)^2}$, जहाँ l = स्ट्रट की लम्बाई = L

प्रश्न के अनुसार, $P_e = P_R$

$$\therefore \quad \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{f_c A}{1 + a\left(\frac{L}{K}\right)^2}$$

अत: $= \pi^2 \times 200 \times 10^9 \times 9{\cdot}54 \times 10^{-8}\left[1 + \frac{1}{7500} \times \frac{L^2}{1{\cdot}49 \times 10^{-4}}\right]$

Scanned with CamScanner

$$= 330 \times 10^6 \times 6{\cdot}4056 \times 10^{-4} \times L^2$$

$$\therefore \quad L^2 = 4{\cdot}3681$$

अत: $L = 2{\cdot}09 \text{ m}$

उदाहरण 16. ढलवाँ लोहे के बने एक खोखले कॉलम की लम्बाई 5 m है और वह दोनों सिरे पर बद्ध है। इस पर 300 kN का अक्षीय भार लगाना है। कॉलम के अन्त: तथा बाह्य व्यास में 8/10 का अनुपात हो तो सुरक्षा गुणांक 8 मान कर कॉलम की काट की माप ज्ञात कीजिये। $f_c = 577$ MPa तथा रेंकिन स्थिरांक, $a = 1/1600$ मानिये। उत्तर

[उत्तर : भीतरी व्यास = 144 mm, बाहरी व्यास = 180 mm]

हल—प्रश्नानुसार $l = 5 \text{ m} = 5000 \text{ mm}$, दोनों सिरे बद्ध होने पर $L = \frac{l}{2} = 2500 \text{ mm}$

$$\because \quad \text{सुरक्षा गुणांक (F.S.)} = \frac{\text{रेंकिन भार } (P_R)}{\text{सुरक्षा भार (safe load)}}$$

$$8 = \frac{P_R}{300 \times 1000 \text{ N}} \qquad \text{या} \qquad P_R = 24 \times 10^5 \text{N}$$

$\because \frac{d_i}{d_o} = \frac{8}{10}$ दिया है। अत: आन्तरिक व्यास $di = 8\,d$ (माना)

तथा बाहरी व्यास $d_o = 10\,d$

कॉलम की काट का क्षेत्रफल, $A = \frac{\pi (d_0^2 - d_i^2)}{4} = \frac{\pi}{4}[(10d)^2 - (8d)^2]$

या $A = \frac{\pi}{4} \times 36d^2 = 28{\cdot}26d^2$

तथा काट का जड़त्व आघूर्ण (MOI),

$$I = \frac{\pi}{64}[(10d)^4 - (8d)^4]$$

$$\therefore \quad I = 289{\cdot}665\,d^4 \quad \text{तथा} \quad K = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{289{\cdot}665\,d^4}{28{\cdot}26d^2}} = 3{\cdot}2d$$

$$\because \quad f_c = 577 \text{ MPa} = 577 \text{ N/mm}^2, a = \frac{1}{1600} \text{ (दिया है)}$$

$\therefore$ रेंकिन सूत्र से, $P_R = \dfrac{f_C \times A}{1 + a\left[\dfrac{L}{K}\right]^2}$

या $24 \times 10^5 = \dfrac{577 \times 28{\cdot}26\,d^2}{1 + \dfrac{1}{1600}\left[\dfrac{2500}{3{\cdot}2d}\right]^2}$

या $\left[1 + \dfrac{381{\cdot}47}{d^2}\right] = 0{\cdot}006794 \times d^2$

या $d^2 + 381{\cdot}47 = 0{\cdot}006794 \times d^4$

Scanned with CamScanner

माना $d^2 = X$ तब $\quad 0{\cdot}0068 \times X^2 - X - 381{\cdot}47 = 0$

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 0{\cdot}0068 \times (-381{\cdot}47)}}{2 \times 0{\cdot}0068} = \frac{1 \pm 3{\cdot}373}{0{\cdot}0136}$$

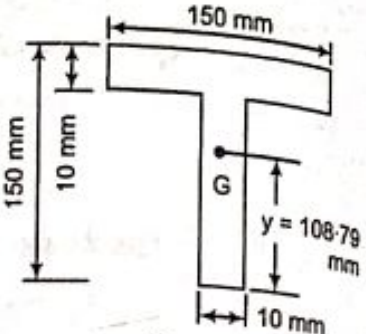
$\therefore$ $X = 321{\cdot}54$ (+ve लेने पर) $= d^2$ रखा (माने गये अनुसार)

या $d = 17{\cdot}932 = 18$ mm.

अब आन्तरिक व्यास (Internal dia) $d_i = 8d = 8 \times 18 = 144$ mm

तथा बाहरी व्यास (Outer dia) $d_o = 10d = 10 \times 18 = 180$ mm

उदाहरण 17. एक इस्पात की स्पीडांग 5 m लम्बा और इसका परिच्छेद चित्र 7.4 में दिखाया गया है। यदि दोनों सिरे आबद्ध हैं तो वह सुरक्षित भार ज्ञात कीजिए जो यह सुरक्षा गुणांक 4 के साथ वहन कर सकता है। रैंकिन सूत्र का प्रयोग कीजिए। $f_c = 330\ \text{N/mm}^2$ और रैंकिन स्थिरांक $= \frac{1}{7500}$।



चित्र 7.4

हल—उदाहरण (10) के चित्र 7.3 के अनुसार चित्र 7.4 में दिखायी गयी T-काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.),

$$I_{XX} = 6372442{\cdot}557\ \text{mm}^4$$

तथा $\quad I_{YY} = 2824166{\cdot}667\ \text{mm}^4$

$\therefore I =$ न्यूनतम जड़त्वाघूर्ण $I \Rightarrow I_{YY} = 2824166{\cdot}667\ \text{mm}^4$

जहाँ गु०के० (G) की ऊँचाई, $\bar{y} = 108{\cdot}79$ है।

T-काट का कुल क्षेत्रफल $\quad (A) = (a_1 + a_2) = 1400 + 1500 = 2900\ \text{mm}^2$

$\therefore$ घूर्णन त्रिज्या $\quad K = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{2824166{\cdot}167}{2900}} = 31{\cdot}206$ mm

$$L = \frac{l}{2} = 2{\cdot}5\ \text{m} = 2500\ \text{mm} \qquad (\because \text{both ends are fixed})$$

$\therefore$
$$P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left[\frac{L}{K}\right]^2} = \frac{330 \times 2900}{1 + \frac{1}{7500}\left[\frac{2500}{31{\cdot}206}\right]^2}$$

$$= \frac{957000}{1{\cdot}85574} = 515697{\cdot}24\ \text{N} = 515{\cdot}697\ \text{kN} = 515{\cdot}7\ \text{kN}$$

$\therefore$ सुरक्षा गुणांक (F.S.) पर सुरक्षित भार (safe load) $= \frac{P_R}{\text{F.S.}}$

$$= \frac{515{\cdot}7}{4} = 128{\cdot}92\ \text{kN}$$

उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 18. 40 mm बाह्य व्यास तथा 30 mm आन्तरिक व्यास का कम लम्बाई का एक ट्यूब 72 kN के भार पर शुद्ध सम्पीडन में असफल हो गया। 2 m लम्बाई के ऐसे ही ट्यूब को जब आबद्ध सिरों वाले एक स्ट्रट के रूप में परीक्षण किया गया तो क्रिपलिंग भार 40 kN था। यह मानते हुए कि रैंकिन सूत्र के लिये f_c का मान प्रथम परीक्षण से प्राप्त है तो इसी सूत्र में स्थिरांक 'a' का मान ज्ञात कीजिये। (U.P.)

हल—प्रश्नानुसार, $$I = \frac{\pi(d_0^4 - d_i^4)}{64} = \frac{\pi}{64}(40^4 - 30^4) = 85859{\cdot}375 \text{ mm}^4$$

$$A = \frac{\pi(d_0^2 - d_i^2)}{4} = \frac{\pi}{4}(40^2 - 30^2) = 549{\cdot}5 \text{ mm}^2$$

अन्तिम सम्पीडन भार (compressive load) $= (f_c \times A) = 72$ kN

क्रिपलिंग भार (crippling load),

$$P_R = 40 \text{ kN}$$

अब $$P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left[\frac{L}{K}\right]^2} \quad \text{जहाँ } K = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{85859{\cdot}375}{549{\cdot}5}} = 12{\cdot}5 \text{ mm}$$

तथा $L = \frac{l}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$

$\therefore$ $$40 = \frac{72}{1 + a\left[\frac{100}{12{\cdot}50}\right]^2}$$

$$1 + a\,[6400] = \frac{72}{40} = 1{\cdot}8 \quad \text{या} \quad a = \frac{1{\cdot}8 - 1}{6400} = \frac{0{\cdot}8}{6400} = \frac{1}{8000}$$

उत्तर

उदाहरण 19. एक खोखले बेलनाकार ढलवाँ लोहे के स्तम्भ के लिए यूलर का विकलांग भार ज्ञात कीजिये जिसका बाह्य व्यास 150 mm और मोटाई 20 mm हो। स्तम्भ 6·0 मी० लम्बा और उसका एक सिरा स्थिर और दूसरा कब्जेदार है। इस भार की तुलना रैंकिन के सूत्र से निकाले गये संदलन भार से रैंकिन के स्थिरांक के मान $a = 1/1600$ और $f_c = 6 \times 10^2$ न्यूटन/मिमी^{2} का उपयोग करते हुये कीजिये। $E = 0{\cdot}8 \times 10^5$ न्यूटन/मिमी^{2} मानिये।

हल—दिया है, बाहरी व्यास $d_0 = 150$ mm तथा चादर की मोटाई $= 20$ mm है। (U.P. 2000, 03)

$\therefore$ आन्तरिक व्यास $d_i = (150 - 2 \times 20) = 110$ mm

$\therefore$ क्षेत्रफल $$A = \frac{\pi(d_0^2 - d_i^2)}{4} = \frac{\pi}{4}(150^2 - 110^2) = 8164 \text{ mm}^2$$

तथा जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.), $$I = \frac{\pi}{64}(150^4 - 110^4) = 17654650 \text{ mm}^4$$

$\therefore$ घूर्णन त्रिज्या (Radius of gyration)

$$K = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{17654650}{8164}} = 46{\cdot}5 \text{ mm}$$

तथा $$L = \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \text{ m} = 4{\cdot}24264 \text{ m} = 4242{\cdot}64 \text{ mm}$$

Scanned with CamScanner

∴ इयूलर (Euler) का विकलांग भार (Buckling Load) $P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ सूत्र से,

$$P_e = \frac{(\pi)^2 \times 0{\cdot}8 \times 10^5 \times 17654650}{(4242{\cdot}64)^2} = 774419{\cdot}86 \text{ N} = 774{\cdot}42 \text{ kN}$$

अब रैंकिन सूत्र से संदलन भार (Compressive Load),

$$P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left[\frac{L}{K}\right]^2} = \frac{6 \times 10^2 \times 8164}{1 + \frac{1}{1600}\left[\frac{4242{\cdot}64}{46{\cdot}5}\right]^2}$$

$$= \frac{4898400}{6{\cdot}203} = 789682{\cdot}41 \text{ N}$$

$$= 789{\cdot}68 \text{ kN}$$

अब दोनों भारों की तुलना, $\frac{P_e}{P_R} = \frac{774{\cdot}42}{789{\cdot}68} = 0{\cdot}98$ उत्तर

उदाहरण 20. 2·5 m लम्बा एक स्टील ट्यूब स्टूट, जिसका बाह्य व्यास 40 mm तथा भीतरी व्यास 30 mm है, दोनों सिरों पर हिंजित है। इस स्टूट के लिए रैंकिन सूत्र तथा यूलर सूत्र द्वारा निकाले गये क्रिपलिंग भार की तुलना कीजिये। पराभव प्रतिबल 330 N/mm², $a = 1/7500$ और $E = 2 \times 10^5$ N/mm² मान लीजिये।

हल—क्षेत्रफल $A = \frac{\pi(40^2 - 30^2)}{4} = 549{\cdot}5 \text{ mm}^2$

$$I = \frac{\pi(40^4 - 30^4)}{64} = 85859{\cdot}375 \text{ mm}^4$$

∴ $K = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{85859{\cdot}375}{549{\cdot}5}} = 12{\cdot}5 \text{ mm}$

$f_c = 330 \text{ N/mm}^2, a = 1/7500$ तथा $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$

$L = l = 2{\cdot}5 \text{ m} = 2500 \text{ mm}$

∴ $P_R = \frac{f_c \times A}{1 + a\left[\frac{L}{K}\right]^2} = \frac{330 \times 549{\cdot}5}{1 + \frac{1}{7500}\left[\frac{2500}{12{\cdot}5}\right]^2} = \frac{181335}{6{\cdot}33}$

$$= 28646{\cdot}92 \text{ N}$$

$$= 28{\cdot}646 \text{ kN}$$

अब आयलर सूत्र से क्रिपलिंग भार

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^5 \times 85859{\cdot}375}{(2500)^2}$$

या $P_e = 27089{\cdot}25 \text{ N} = 27{\cdot}089 \text{ kN}$

क्रिपलिंग भारों की तुलना $= \frac{P_R}{P_e} = \frac{28{\cdot}646}{27{\cdot}089} = 1{\cdot}05$ उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 21. 50 mm × 50 mm वर्गाकार काट के 2·5 m लम्बे काष्ठ स्ट्रट के लिए बंकन भार की गणना कीजिये यदि इसका एक सिरा बद्ध हो और दूसरा सिग मुक्त हो, $E = 14\ kN/mm^2$। गणनाओं में आप क्या संशोधन करेंगे यदि स्ट्रट की लम्बाई 0·75 m हो तथा काष्ठ की संदलन-सामर्थ्य $f_c = 28\ N/mm^2$ है। रैंकिन स्थिरांक का मान $a = 1/200$ लीजिए। **(U.P.)**

हल—सिरों (Ends) की स्थिति के आधार पर $L = 2l = 2 \times 2{\cdot}5 = 5\ m = 5000\ mm$

$$\because \quad I = \frac{50 \times 50^3}{12} = \frac{50^4}{12}\ mm^4$$

तथा क्षेत्रफल $A = 50 \times 50\ mm^2$

$$\therefore \quad K^2 = \frac{I}{A} = \frac{\frac{50^4}{12}}{50^2} = \frac{50^2}{12} = \frac{2500}{12} = 208{\cdot}33$$

$$\therefore \text{ Buckling Load} \quad P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow \frac{\pi^2 \times 14 \times 1000 \times \frac{50^4}{12}}{(5000)^2}$$

या $P_e = 2878{\cdot}635\ N = 2{\cdot}8786\ kN$

जब स्ट्रट की लम्बाई काफी कम (0·75 m) हो जाती है और $f_c = 28\ N/mm^2$ तथा $a = \frac{1}{200}$ दिये जायें तब हमें रैंकिन सूत्र में $\frac{L}{K}$ के स्थान पर $\frac{l}{K}$ प्रयोग करना होगा। (∵ कम लम्बाई का स्ट्रट है)

$$\therefore \quad P_R = \frac{F_c \times A}{1 + a\left[\frac{L}{K}\right]^2} = \frac{28 \times 2500}{1 + \frac{1}{200}\left[\frac{l}{K}\right]^2}$$

$$= \frac{28 \times 2500}{1 + \frac{1}{200} \times \frac{(0{\cdot}75 \times 1000)^2}{208{\cdot}33}} = \frac{70000}{14{\cdot}50} = 4827{\cdot}58\ N$$

$= 4{\cdot}8276\ kN$ उत्तर

प्रश्नावली (Exercise)

1. **निम्न रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये—**

(i) आयलर सूत्र का प्रयोग एक ..... के कुचलने वाले भार को ज्ञात करने के लिए किया जाता है। **[U.P.; U.K. 2007]**

(ii) आयलर सूत्र ..... कॉलम का बकलिंग भार (buckling load) ज्ञात करने के लिए प्रयोग में लाया जाता है। **(U.P.)**

(iii) छोटा कॉलम (Short column) वह कहलाता है जिसमें तनुता अनुपात (Slenderness Ratio) ..... से कम होता है। **(U.P.)**

(iv) जिस भार पर कॉलम असफल (fail) होता है, उसे ..... भार कहते हैं। **(U.K. 2009)**

(v) कॉलम की लम्बाई तथा उसकी घूर्णन त्रिज्या (radius of gyration) के अनुपात को ..... कहते हैं। **(U.K. 2011)**

Scanned with CamScanner

(vi) वे कॉलम, जिनकी लम्बाई उनके व्यास के लगभग ..... गुने से कम होती है, छोटे कॉलम कहलाते हैं।

(vii) वे कॉलम, जिनकी लम्बाई उनके व्यास के लगभग ..... गुने से अधिक होती है, लम्बे कॉलम कहलाते हैं।

(viii) किसी ढाँचे या मशीन का किसी भी स्थिति में स्थित वह सदस्य, जिस पर अक्षीय सम्पीडन भार लगा हो, ... कहलाता है। (U.P.)

(ix) यदि केवल पदार्थ के कुचलने के कारण ही एक कॉलम भंग होता है तो उस कॉलम को ..... कहते हैं (U.P.; U.K. 2008, W)

(x) जिस कॉलम का तनुता अनुपात (S.R.) 120 से अधिक होगा, वह ..... कहलाता है। (U.K. 2012, Summer) (U.K. 2013, Sp, B.P.)

(xi) जिस कॉलम का तनुता अनुपात (S.R.) 30 से कम होगा, वह ..... कहलाता है। (U.P.)

(xii) कॉलम की सामर्थ्य (strength) ..... तथा इसके सिरा स्थितियों पर निर्भर करती है। (U.K. 2012, Summer) (U.K. 2013, Sp. B.P.)

रिक्त स्थानों के उत्तर

(i) लम्बे कॉलम (Long column), **(ii)** कॉलम (column), **(iii)** 30, **(iv)** क्रिपलिंग, **(v)** तनुता अनुपात (S.R.), **(vi)** 30, **(vii)** 30, **(viii)** स्ट्रट, **(ix)** छोटा कॉलम, **(x)** लम्बा कॉलम, **(xi)** छोटा कॉलम, **(xii)** तनुता अनुपात (Slenderness Ratio)।

2. निम्न पदों को समझाइये (Define the following)—

(i) कॉलम तथा स्ट्रट (Column and strut) (U.K. 2010 (W), 2012, 13)

(ii) बहकाव भार (Buckling load) (U.K. 2012, 13)

(iii) विभिन्न प्रकार के कॉलम (Types of column) (U.K. 2013, S, 14)

(iv) स्तम्भों के सिरों की अवस्थायें (End conditions of column) (U.P. 2013, Mech)

(v) लम्बा कॉलम (Long column) (U.P. 2013, Civil)

(vi) तनुता अनुपात (Slenderness Ratio) (U.P. 2014) U.K. 2010 (W), 2012 (S), 13, B.P., 14)

3. निम्न पदों को परिभाषित कीजिये तथा समझाइये—

(i) बहकाव भार अथवा क्रान्तिक भार (Critical load) (U.P. 2009)

(ii) बहकाव (Buckling) (U.K. 2009)

(iii) समतुल्य लम्बाई (Equivalent length) (U.K. 2014) (U.P. 2008, 09)

(iv) न्यूनतम घूर्णन त्रिज्या (Least radius of gyration) (U.P. 2009)

(v) बहकाव गुणांक (Buckling factor) (U.K. 2011, 14)

4. कॉलम तथा स्ट्रट से आप क्या समझते हैं? इनके भेद बताइये। (U.P. 2000, 09)

5. लघु, मध्यम तथा दीर्घ कॉलम से आप क्या समझते हैं? परिभाषा भी लिखिये। (U.P. 2009)

6. दीर्घ एवं लघु स्तम्भ (long & short column) में अन्तर स्पष्ट कीजिये। (U.P. 2001, 04, 06, 14)

7. कॉलम की समतुल्य लम्बाई का क्या अर्थ है? सिरे की विभिन्न अवस्था में तुल्यमान लम्बाई की तुलना कीजिये। (U.P. 2006)

8. किसी स्तम्भ के तनुता अनुपात का क्या तात्पर्य है? यह स्तम्भ के स्थायित्व को कैसे प्रभावित करता है? (U.P. 2006)

9. स्तम्भ की विभिन्न अन्त्य दशाओं (end conditions) के चित्र बनाइये तथा उनकी प्रभावी लम्बाई भी बताइये। (U.P.)

10. स्तम्भ के सिरों के संयोजन से आयलर सूत्र द्वारा व्याकुंचन भार पर क्या प्रभाव पड़ता है? विभिन्न संयोजनों के लिए तुल्यमान लम्बाई क्या होती है? (U.P. 2006)

11. किन्हीं दो सिरे की अवस्थाओं (two different end conditions) के लिए स्तम्भ की विक्षेपित ढाल (deflected slope) का चित्र बनाए तथा प्रभावी लम्बाई (effective length) लिखें। (U.P. 2014, CIVIL)

Scanned with CamScanner

12. किसी कॉलम के दोनों सिरे कब्जेदार हैं। कॉलम की काट का व्यास 5 सेमी तथा लम्बाई 3 मी० है। आयलर सूत्र की सहायता से कॉलम का बहकाव भार ज्ञात कीजिये। $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 ।

[उत्तर—$67{\cdot}288 \times 10^3$ N] **(U.P. 2002, 08)**

13. निम्नलिखित में से कौन-सा कॉलम (column) ज्यादा मजबूत होगा?

(i) कॉलम जो कि 50 सेमी० लम्बा है तथा जिसका वर्गाकार सैक्शन है और जिसकी प्रत्येक भुजा 1 सेमी० के बराबर है।

(ii) कॉलम जो कि 5 मी० लम्बा है तथा जिसका वर्गाकार सैक्शन है और जिसकी प्रत्येक भुजा 20 सेमी० के बराबर है। [उत्तर—दूसरा कॉलम ज्यादा मजबूत है।] **(U.P. 2006 S)**

14. एक स्टील स्तम्भ का व्यास 60 mm तथा लम्बाई 1 m है। स्तम्भ का निचला सिरा आबद्ध (Fixed) तथा ऊपरी सिरा मुक्त है। स्तम्भ पर आरोपित अधिकतम अक्षीय भार ज्ञात कीजिये। स्तम्भ के लिये सुरक्षा गुणांक = 4 तथा $E = 2{\cdot}1 \times 10^5$ N/mm^2 है। [उत्तर—82·4 kN] **(U.P. 2008)**

15. 25 mm बाह्य तथा 20 mm आन्तरिक व्यास के एक खोखले इस्पात नल (tube) को स्तम्भ के रूप में प्रयोग किया गया जिसकी लम्बाई 3 m है तथा दोनों सिरे कब्जेदार हैं। 'आयलर' का पंगुकारी भार ज्ञात करें यदि प्रत्यास्थता मापांक $2{\cdot}0 \times 10^5$ N/mm^2 हो। [उत्तर—2482·9 N] **(U.P. 2001, 04, 09)**

16. (i) रैंकिन एवं गार्डन का सूत्र क्या है? समझाइये।

What is Rankine and Gordon formula? Explain.

(ii) इयूलर सूत्र का प्रयोग कर एक आयताकार अनुप्रस्थ काट वाले स्तम्भ पर कितना सुरक्षित भार लगाया जा सकता है? स्तम्भ का परिच्छेद 100×120 मिमी का है, तथा इसकी लम्बाई 4 मीटर है। स्तम्भ के पदार्थ का प्रत्यास्थता मापांक 200 GPa है तथा स्तम्भ के दोनों सिरे पिनयुक्त हैं।

Find out the safe load on a rectangular section using Euler's formula. The section is 100 × 120 mm size and length is 4 m. Modulus of elasticity of column material is 200 GPa. Both the ends of column are hinged. [उत्तर—$P_e = 1233{\cdot}7$ kN] **[U.K. 2012-13 (Winter)]**

17. एक 120 मिमी × 100 मिमी आयताकार काट एवं 1·75 मीटर लम्बे कॉलम का एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार है, कॉलम के लिए बहकाव भार का मान ज्ञात करें। कॉलम के लिए सुरक्षित भार भी ज्ञात कीजिए जबकि सुरक्षा गुणांक 5 हो। $E = 200$ GPa मानिये। [उत्तर—12877·78 kN; 2575·55 kN] **[U.K. 2012 (S); 2013 (Sp. B.P.)]**

18. एक 2·5 m लम्बा स्तम्भ (column) का व्यास 60 mm है। इस स्तम्भ का एक सिरा बद्ध है जबकि दूसरा सिरा हिंज्ड है। Euler के सूत्र का प्रयोग करते हुए तथा सुरक्षा गुणांक (F.S.) 3·5 लेते हुये इस स्तम्भ के लिये निरापद संपीडन भार (Safe compressive load) ज्ञात कीजिये। $E = 200$ GPa है। [उत्तर—114·65 kN] **(U.P. 2013 Mech)**

19. 200 mm × 150 mm आयताकार परिच्छेद के एक स्तम्भ की लम्बाई 3 m है तथा इस पर अक्षीय सम्पीडन भार लगा है। इस स्तम्भ पर लगाये जाने वाले अधिकतम सुरक्षित भार का मान ज्ञात कीजिये। सुरक्षा गुणांक 5 मानिये। स्तम्भ को एक सिरे पर बद्ध तथा दूसरे पर कब्जायुक्त मानिये। $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2। आयलर सूत्र का प्रयोग करें।

[उत्तर—4·9348 MN] **(U.P.)**

20. किसी कॉलम की काट 60 mm (चौड़ाई) × 80 mm (मोटाई) है। कॉलम की लम्बाई 5 m है। कॉलम किस प्रकार का है? इसका बहकाव भार निकालिये यदि दोनों सिरे कब्जेदार हों। $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2.

[उत्तर—लम्बा कॉलम, 113·5826 kN] **(U.P.)**

21. इयूलर (Euler) सूत्र का प्रयोग का एक आयताकार अनुप्रस्थ-काट वाले स्तम्भ पर सुरक्षित कितना भार लगाया जा सकता है? इसके परिच्छेद की परिमाप 75 mm × 125 mm है तथा इसकी लम्बाई 2 m है। स्तम्भ पदार्थ का प्रत्यास्थता मापांक 2×10^5 N/mm^2 तथा स्तम्भ के दोनों सिरे पिनयुक्त हैं। [उत्तर—2168 kN] **(U.P.)**

Scanned with CamScanner

22. मृदु इस्पात के बने एक कॉलम की लम्बाई 6 m है और इसके दोनों सिरे बद्ध हैं। इसके परिच्छेद का न्यूनतम जड़ता घूर्ण 350 cm^4 है। आयलर सूत्र की सहायता से बहकाव भार ज्ञात करिये। $E = 200$ GPa है।

[उत्तर—766·857 kN] (U.P.)

23. 6 m लम्बाई के इस्पात से बने एक I-काट वाले स्तम्भ का कुचलने वाला भार ज्ञात कीजिये स्तम्भ का एक सिरा बद्ध है और दूसरा कब्जेदार है। आयलर सूत्र का प्रयोग कीजिये। $E = 200$ GPa, $I_{XX} = 28000$ cm^4, $I_{YY} = 2700$ cm^4.

[उत्तर—2·96 MN] (U.P.)

24. I-काट की 6 m लम्बी एक कड़ी (joist) 400 mm × 200 mm × 20 mm, जिसके दोनों सिरे आबद्ध हैं, एक सम्पीडांग (strut) के रूप में प्रयोग किया गया। सम्पीडांग के लिए इयूलर का विकलांग भार (crippling load) क्या होगा? $E = 2 \times 10^5$ N/mm^2 लें।

[उत्तर—638·2 kN] (U.P. 2002)

[Hint : $I_{XX} = 366{\cdot}8 \times 10^6$ mm^4 and $I_{YY} = 2{\cdot}91 \times 10^6$ mm^4]

$\therefore \quad I = I_{YY} \qquad (\because I_{YY} < I_{XX})$

25. एक 150 mm × 120 mm की T-काट को, जिसके फ्लैंज तथा वैब की मोटाई समान रूप से 20 mm है, 4 m लम्बे स्ट्रट के रूप में प्रयोग किया जाता है जिसके दोनों सिरे कब्जेदार हैं। यदि पदार्थ के लिये यंग मापांक $E = 200$ GPa हो तो क्रिपलिंग भार ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—702 kN] (U.K. 2008, S)

26. एक 4 m लम्बी ट्यूब (Hollow Tube), जिसके बाह्य तथा आन्तरिक व्यास क्रमश: 40 mm तथा 25 mm हैं, पर 60 kN के अक्षीय खिचाव भार (Tensile Load) से लम्बाई में 4·8 mm वृद्धि (extend) हो जाती है। इसे दोनों सिरों पर पिन लगे स्ट्रट रूप में प्रयोग होने पर Buckling Load ज्ञात कीजिये। सुरक्षा गुणांक (F.S.) 5 पर सुरक्षित भार (Safe Load) भी ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—4·29 kN, 0·858 kN]

विशेष–रैंकिन सूत्र पर आधारित प्रश्न

27. एक ढलवाँ लोहे के बने ठोस स्तम्भ की लम्बाई 5 m तथा व्यास 15 cm है। यह नीचे के सिरे पर स्थिर बद्ध (fixed) तथा दूसरे सिरे पर मुक्त (free) है। अगर सुरक्षा गुणांक (factor of safety) 5 है तो स्तम्भ का निरापद भार (safe load) ज्ञात करें। रैंकिन सूत्र में 'a' का मान ढलवाँ लोहे के लिये $\frac{1}{1800}$ लें तथा $E = 190$ GN/m^2 ।

[Hint : उदाहरण 12 देखें।] [उत्तर—90·7 kN] (U.K. 2005)

28. ढलवाँ लोहे के 3 m लम्बे एक स्तम्भ (column) की काट का बाह्य व्यास 5 cm तथा अन्त: व्यास 2 cm है। इसका एक सिरा बद्ध तथा दूसरा कब्जेदार (hinged) है। यदि पदार्थ का अन्तिम प्रतिबल (ultimate stress) $f_c = 560$ MPa और रैंकिन स्थिरांक $\frac{1}{1600}$ हो तो कॉलम के लिये रैंकिन भार ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—55·78 kN] (U.P. 2010 S)

29. एक खोखला C.I. column जिसका बाहरी व्यास (outer dia) 200 mm तथा चादर की मोटाई (thickness) 20 mm है, दोनों सिरों पर बद्ध (fixed at both ends) है। इस कॉलम की लम्बाई 4·5 m है। रैंकिन गार्डन सूत्र द्वारा सुरक्षित भार (safe load) ज्ञात कीजिये जबकि सुरक्षा गुणांक 4 है। रैंकिन स्थिरांक $a = \frac{1}{1600}$ तथा $\sigma_c = 550$ MN/m^2 है।

[उत्तर—0·877 MN]

30. एक खोखले स्ट्रट (Hollow strut) का बाहरी व्यास (diameter) 40 mm तथा आन्तरिक व्यास (internal dia) 30 mm है। इसके दोनों सिरे Pin jointed हैं। Euler तथा Rankine सूत्रों से crippling भारों (Loads) में अनुपात ज्ञात करें जबकि अधिकतम प्रतिबल (Yield stress) 300 MPa तथा $E = 200$ GPa तथा Rankine's constant, $a = \frac{1}{7500}$ है।

[उत्तर—0·945]

Scanned with CamScanner

31. एक Hollow cylindrical C.I. column 4 m लम्बा है तथा इसके दोनों सिरे बद्ध (fixed) हैं। कॉलम के न्यूनतम व्यास ज्ञात कीजिये, जबकि इस पर 250 kN का सुरक्षित भार (safe load) लगा है। सुरक्षा गुणांक (F.S.) 5 है। कॉलम का आन्तरिक व्यास (d), बाहरी व्यास (D) का 0·8 गुना है। प्रतिबल (stress) $\sigma_c = 550\ MN/m^2$ तथा रैंकिन सूत्र में $a = \frac{1}{1600}$ है।

[उत्तर—$D = 136$ mm, $d = 108{\cdot}8$ mm]

32. एक 2 m लम्बा ढलवाँ लोहे का खोखला पाइप, जिसका बाह्य व्यास 80 mm तथा आन्तरिक व्यास 60 mm है, एक स्तम्भ की तरह प्रयोग किया गया है। यदि इसके दोनों सिरे बद्ध हों तो रैंकिन सूत्र का प्रयोग करते हुए क्रिपलिंग भार ज्ञात करिये। $f_c = 60$ MPa है। [उत्तर—659·73 kN] **(U.P.)**

33. एक ठोस इस्पाती 6 सेमी व्यास वाली तथा 2·5 मी० लम्बी छड़ एक स्तम्भ की तरह प्रयोग की जाती है। इस पर आयलर तथा रैंकिन सूत्रों द्वारा प्राप्त पिचकाने वाले बलों की तुलना कीजिए। $E = 2\times10^5\ N/mm^2$, रैंकिन constant $\alpha = 1/7500$ तथा पराभव प्रतिबल $f_c = 315\ N/mm^2$ लीजिये। दोनों सिरे शुद्धालम्बित मानिये।

[उत्तर—1·06] **(U.P. 2001)**

34. एक 1·5 m लम्बा तथा 50 mm व्यास (diameter) की वृत्ताकार काट (circular cross-section) वाले कॉलम का एक सिरा बद्ध तथा दूसरा सिरा स्वतन्त्र है। सुरक्षा गुणांक 3 है। सुरक्षित भार ज्ञात कीजिये जबकि—

(i) रैंकिन सूत्र (Rankine's formula) का प्रयोग कीजिये, जबकि क्रिपलिंग प्रतिबल $560\ MN/m^2$ और $a = \frac{1}{1600}$

(ii) ऑयलर सूत्र का प्रयोग कीजिये जबकि $E = 120\ GN/m^2$ है।

[उत्तर : (i) 3·3 kN (ii) 13·45 kN] **[U.K. 2014 (B.P.), S]**

❑

Scanned with CamScanner

8 जड़त्व आघूर्ण (MOMENT OF INERTIA)

§ 8.1 जड़त्व (Inertia)

"वस्तुओं का वह गुण, जिसके कारण वे स्वंय अपनी अवस्था में परिवर्तन करने में असमर्थ रहती हैं, जड़त्व कहलाता है।" यह न्यूटन के गति सम्बन्धित प्रथम नियम (Newton's Ist Law of Motion) से भी स्पष्ट है कि "प्रत्येक वस्तु अपनी स्थिर अवस्था या गतिशील अवस्था मे तब तक बनी रहती है जब तक कि उस पर कोई बाह्य बल (external force) उसकी अवस्था में परिवर्तन के लिये कार्य न करे।" **वस्तुओं के इस गुण को, जिसके कारण वे स्वंय अपनी अवस्था में परिवर्तन करने में असमर्थ रहती हैं, "जड़त्व (Inertia)" कहते हैं।** वस्तु का द्रव्यमान (mass) उसके जड़त्व को माप होता है। तथा जड़त्व के कारण ही वस्तु में बाह्य बल का विरोध करने का गुण आता है।

§ 8.2 जड़ताघूर्ण या जड़त्व आघूर्ण या द्वितीय आघूर्ण (Moment of Inertia or Seconf Moment)

परिभाषा—"किसी निश्चित अक्ष के चारो ओर घूमती हुई वस्तु का वह गुण, जो उसकी वृत्तीय गति में परिवर्तन का विरोध करता है, वस्तु का घूर्णन अक्ष (Rotational Axis) के परित:जड़त्व आघूर्ण या द्वितीय आघूर्ण कहलाता है।"

विशेष महत्वपूर्ण—(1) जड़त्व आघूर्ण प्राय:ठोस वस्तु के द्रव्यमान अर्थात् संहति (mass) के आधार पर उसके द्रव्यमान के अनुसार ज्ञात करते हैं।

(2) वस्तुओं की काट (sections) के जड़त्व आघूर्ण उनके क्षेत्रफल (area) के आधार पर उनके क्षेत्रफल के अनुसार ज्ञात करते हैं।

§ 8.3 जड़त्व आघूर्ण के भौतिक महत्व (Physical Significance of Moment of Inertia)

किसी वस्तु का जड़त्व आघूर्ण, लगाये गये बाह्य बलयुग्म (couple) की प्रवृत्ति (tandency) का विरोध करता है, अर्थात् उसके द्वारा होने वाले वृत्तीय गति मे परिवर्तन का विरोध करता है। अत: बलयुग्म यदि वस्तु के कोणीय वेग में वृद्धि करने वाला है तो वस्तु का जड़त्व आघूर्ण इस वेग वृद्धि का विरोध करता है। इसी प्रकार यदि बलयुग्म कोणीय वेग में कमी करने वाला है तो वस्तु का जड़त्व आघूर्ण उसके वेग मे कमी का विरोध करता है। अत: स्पष्ट है कि जड़त्व आघूर्ण गति में परिवर्तन का विरोध करता है।

जैसे उदाहरणार्थ—किसी इन्जन का गतिपालक पहिया (fly wheel) अपने जड़त्व के कारण घूर्णन-गति में परिवर्तन का विरोध करता है। इसलिये गतिपालक पहियो (fly wheels) को बड़ा व भारी बनाया जाता है।

जड़त्व आघूर्ण का प्रयोग "पिण्डों की गतिकी (dyanamics of rigid bidies) का अध्ययन (study) करने में, पदार्थों की सामर्थ्य (strength of materials) ज्ञात करने में तथा धरनों का विक्षेप (deflection of beams) अथवा किसी कॉलम आदि का बकाव (buckling of column) को निर्धारित करने के लिये किया जाता है।"

§ 8.4 द्रव्यमान जड़त्व आघूर्ण या द्वितीय आघूर्ण (Mass Moment of Intertia or Second Moment of Mass)

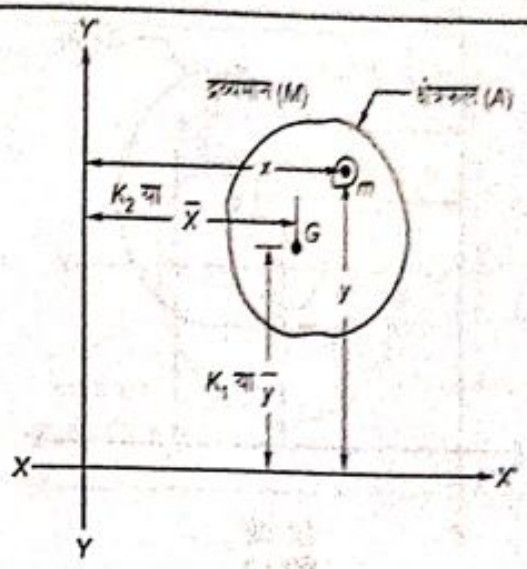
परिभाषा—"किसी अक्ष के सापेक्ष एक पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण या द्वितीय आघूर्ण उसके द्रव्यमान (mass) तथा अक्ष से उसकी दूरी (K) के वर्ग (K^2) के गुणनफल के बराबर होता है।"

अर्थात् $$\boxed{I = MK^2}$$

किसी पिण्ड का द्रव्यमान जड़त्व आघूर्ण एक निश्चित घूर्णन अक्ष (Rotation -Axis) के सापेक्ष जैसे—$(X-X)$ अक्ष पर I_{XX} द्वारा तथा $(Y-Y)$ अक्ष पर I_{YY} द्वारा और पिण्ड के गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष पर I_G या केवल I द्वारा व्यक्त करते हैं।

माना द्रव्यमान m के एक पिण्ड का $X-X$ तथा $Y-Y$ अक्षों के परित: जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है। चित्र 8.1 के सम्पूर्ण पिण्ड के द्रव्यमान (M) में से एक छोटे से द्रव्यमान (m) पर विचार करना है। माना m की दोनों अक्षों से दूरियाँ y क्रमश: x तथा हैं।

Scanned with CamScanner



चित्र 8.1

अत: परिभाषा के अनुसार, द्रव्यमान m का $X-X$ अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण $=my^2$ तथा $Y-Y$ अक्ष के सापेक्ष आघूर्ण $=mx^2$ होगा।

क्योंकि पिण्ड (body) अनेक छोटे-छोटे द्रव्यमानों (masses) से मिलकर बना होता है। अत: इस प्रकार के सभी द्रव्यमानों का $X-X$ अक्ष तथा $Y-Y$ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण,

$$I_{XX}=\Sigma my^2 \qquad \text{...(1)}$$

या $$I_{XX}=MK_1^2$$

तथा $$I_{YY}=\Sigma mx^2 \qquad \text{...(2)}$$

या $$I_{YY}=MK_2^2$$

इसका मात्रक किग्रा × मीटर^2 (kg-m^2) है। यह एक अदिश राशि (Scalar Quantity) है।

§ 8.5 परिभ्रमण त्रिज्या (Radius of Gyration)

परिभाषा (Defination)—"किसी घूर्णन अक्ष के परित: किसी पिण्ड की परिभ्रमण (अर्थात् घूर्णन) त्रिज्या (K), अक्ष से मापी गई वह दूरी है जिसके वर्ग को यदि पिण्ड के द्रव्यमान (M) से गुणा किया जाये तो गुणनफल उस अक्ष के परित: पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण (I) के बराबर होता है।"

इस प्रकार $$I=MK^2$$

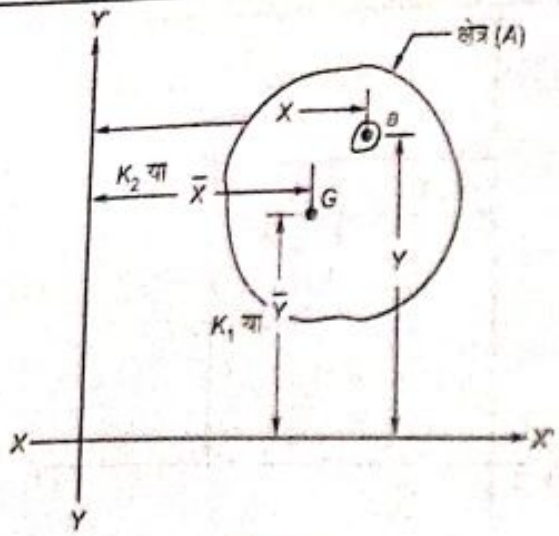
अर्थात् $$\boxed{K=\sqrt{\frac{I}{M}}} \qquad \text{(सूत्र)}$$

§ 8.6 क्षेत्रफल जड़त्व आघूर्ण या द्वितीय आघूर्ण (Area Moment of Inertia) Or (Second Moment of Area)

परिभाषा (Defination)—"किसी अक्ष के सापेक्ष (परित:) एक क्षेत्रफल का जड़त्व आघूर्ण या द्वितीय आघूर्ण, उसके क्षेत्रफल (A) तथा अक्ष से उसकी दूरी के वर्ग के गुणनफल के बराबर होता है।"

माना सम्पूर्ण क्षेत्रफल A का जड़त्व आघूर्ण उसके समतल में ही दोनों अक्षों $X-X$ तथा $Y-Y$ के परित: ज्ञात करना है। चित्र 8.2 में सम्पूर्ण क्षेत्रफल A में से एक छोटे से क्षेत्रफल 'a' पर विचार करना है। माना छोटे क्षेत्रफल a की $X-X$ तथा $Y-Y$ अक्षों से दूरियाँ चित्र के अनुसार y तथा x हैं।

Scanned with CamScanner



चित्र 8.2

अत: परिभाषा के अनुसार, क्षेत्रफल (a) का $X-X$ अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण $I = ay^2$ तथा $Y-Y$ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $= ax^2$ होगा।

क्योंकि सम्पूर्ण क्षेत्र (A), छोटे-छोटे क्षेत्रफलों से मिलकर बना होता है। अत: सम्पूर्ण क्षेत्रफल (A) का $X-X$ अक्ष तथा $Y-Y$ अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण क्रमश:

$$I_{XX} = \sum ay^2 \quad \text{...(3)}$$

$$I_{YY} = \sum ax^2 \quad \text{...(4)}$$

यदि पूर्ण क्षेत्र का प्रभाव G पर हो और इसकी अक्षों से दूरियाँ क्रमश: K_1 तथा K_2 हो तो,

$$I_{XX} = AK_1^2 \quad \text{...(5)}$$

$$I_{YY} = AK_2^2 \quad \text{...(6)}$$

अत: परिभ्रमण त्रिज्या (Radius of Gyration) को क्षेत्रफल के आधार पर निम्न प्रकार परिभाषित कर सकते हैं—

परिभ्रमण त्रिज्या—"किसी घूर्णन अक्ष के परित: किसी क्षेत्र की परिभ्रमण त्रिज्या (K) अक्ष से मापी गई वह दूरी है जिसके वर्ग को, क्षेत्र के सम्पूर्ण क्षेत्रफल (A) से गुणा किया जाये तो गुणनफल, उस अक्ष के परित: क्षेत्रफल आघूर्ण (I या I_{XX} या I_{YY}) के बराबर होता है।"

अर्थात् $$I = AK^2$$

या $$\boxed{K = \sqrt{\frac{I}{A}}}$$ सूत्र

§ 8.7 समान्तर अक्ष प्रमेय (Theorem Of Parallel Axis)

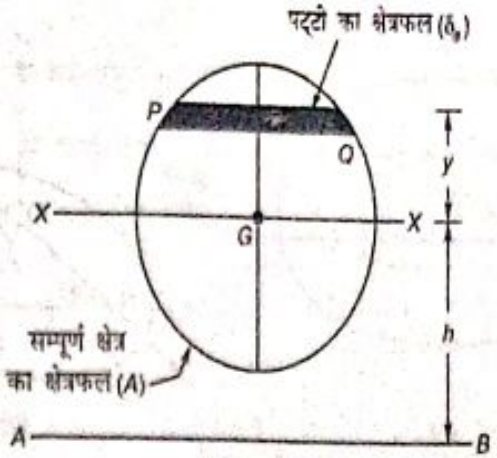
परिभाषा—इस प्रमेय के अनुसार, "यदि किसी समतल परिच्छेद के गुरुत्व केन्द्र से जाने वाले अक्ष के परित: (या अक्ष के सापेक्ष) उसके जड़त्व आघूर्ण को I_{XXG} (अथवा I_G) से प्रदर्शित किया जाये तथा इस अक्ष के समान्तर और उससे h दूरी पर रेखा AB के परित: (about AB) जड़त्व आघूर्ण को I_{AB} से प्रदर्शित किया जाये तब,

$\boxed{I_{AB} = I_{XG} + Ah^2}$ होता है।"

जहाँ A, समतल परिच्छेद का क्षेत्रफल है।

सत्यापन (Proof)—चित्र 8.3 में कोई समतल परिच्छेद दिखाया गया है। जिसका गुरुत्व केन्द्र G तथा क्षेत्रफल A है। हमें $X-X$ अक्ष के समान्तर रेखा AB पर समतल परिच्छेद का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है।

Scanned with CamScanner



चित्र 8.3

माना समतल परिच्छेद में PQ कोई छोटी सी पट्टी (small strip) है, जिसकी गुरुत्व केन्द्र (G) से दूरी y है तथा रेखा AB से दूरी $(y+h)$ है जैसा कि चित्र 8.3 में दिखाया गया है। PQ का क्षेत्रफल δ_a है तब

क्षेत्रफल δ_a का G से जाने वाले अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण

$$= \delta_a \cdot y^2$$

∴ पूरे परिच्छेद का, G से जाने वाले अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण,

$$I_{XG} = \Sigma \delta_a \cdot y^2$$

∵ क्षेत्रफल (δ_a) का AB के परित: जड़त्व आघूर्ण,

$$= \delta_a \cdot (y+h)^2$$

∴ पूरे परिच्छेद का AB के परित: जड़त्व आघूर्ण,

$$I_{AB} = \Sigma \delta_a \cdot (y+h)^2$$

$$= \Sigma \delta_a \cdot (y^2 + h^2 + 2yh)$$

$$= \Sigma \delta_a \cdot y^2 + \Sigma \delta_a \cdot h^2 + \Sigma \delta_a \cdot 2yh$$

$$= I_{XG} + h^2 \cdot \Sigma \delta_a + 2h \Sigma \delta_a \cdot y$$

$$= I_{XG} + h^2 \cdot A + 0$$

$$= I_{XG} + Ah^2$$

सत्यापित (Proved)

अत: $\boxed{I_{AB} = I_{XG} + Ah^2}$ **सूत्र**

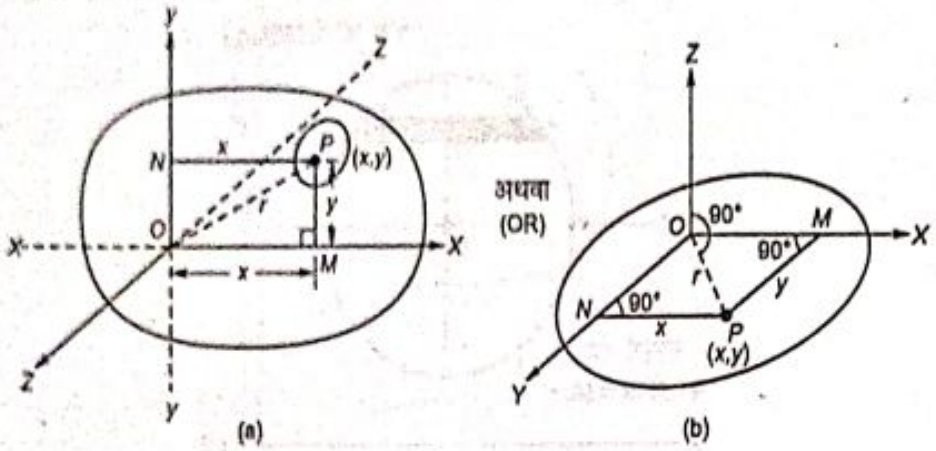
नोट— $\boxed{\Sigma \delta_a \cdot y = 0}$ यहाँ, सन्तुलन की अवस्था में क्षेत्रफलों का गुरुत्व केन्द्र से जाने वाले अक्ष के सापेक्ष आघूर्णों का बीजीय योग है, जोकि शून्य होता है।

§ 8.8 अभिलम्ब अक्ष प्रमेय (Perpendicular Axis Theorem)

परिभाषा—इस प्रमेय के अनुसार "किसी क्षेत्र (area) का, उस क्षेत्र के ही समतल में स्थित परस्पर लम्ब दो अक्षों $X-X$ तथा $Y-Y$ पर जड़त्व आघूर्णों (I_{XX} तथा I_{YY}) का योग, उन दोनों अक्षों के कटान बिन्दु से जाने वाले तथा क्षेत्र के समतल पर लम्ब अक्ष ($Z-Z$ axis) पर, उस क्षेत्र के जड़त्व आघूर्ण (I_{ZZ}) के बराबर होता है।" अर्थात्

$$\boxed{I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY}}$$

Scanned with CamScanner



चित्र 8.4

चित्र 8.4 में आपस में लम्ब (90° पर) तीन अक्षों $O-X, O-Y$ तथा $O-Z$ दिखाई गई हैं, जिसमें अक्ष $O-X$ तथा अक्ष $O-Y$ एक ही समतल में आपस में लम्बरूप हैं तथा अक्ष $O-Z$, समतल पर (अथवा $O-X$ तथा $O-Y$ के) लम्बवत् (perpendicular) हैं।

माना $P(x, y)$ पूरे क्षेत्रफल (area) का एक छोटा सा भाग है जिसका क्षेत्रफल δ_a है। माना कि P की ZOZ अक्ष (या OZ अक्ष) से लम्बवत् दूरी r है

अर्थात् $OP = r$

तब $OP^2 = OM^2 + PM^2$

या $r^2 = x^2 + y^2$ ... (1)

अब क्षेत्रफल δ_a के लिये, $I_{XX} = \delta_a \cdot y^2$

तथा $I_{YY} = \delta_a \cdot x^2$

और $I_{ZZ} = \delta_a \cdot r^2$

या $I_{ZZ} = \delta_a \cdot (x^2 + y^2)$ $(\because r^2 = x^2 + y^2)$

$= \delta_a \cdot x^2 + \delta_a \cdot y^2$

$= I_{YY} + I_{XX}$ (सत्यापित)

$\therefore$ $\boxed{I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY}}$ (सूत्र)

§ 8.9 कुछ मुख्य काटों के जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia of Some Important Sections)

8.9-(1) आयताकार काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I of Rectangular Section)—चित्र 8.5 में एक आयताकार काट दिखाई गई है जिसकी चौड़ाई b तथा ऊँचाई (अथवा गहराई) h है। इसके गुरुत्व केन्द्र G से होती हुई दो लम्ब अक्षों (axes) $X-X$ तथा $Y-Y$ को खींचते हैं।

अब $X-X$ अक्ष के समान्तर तथा इससे y दूरी पर आयत में एक मोटाई dy की पतली सी पट्टी को माना, (consider) किया।

इस पट्टी (strip) का क्षेत्रफल $= b \times dy$

$\therefore$ इस पट्टी का $X-X$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I)

= क्षेत्रफल × (दूरी)^2 सूत्र से

Scanned with CamScanner

$$= (b \times d_y) \times y^2 \quad \ldots (1)$$

अब पूरे पच्छिेद (काट) का जड़त्वाघूर्ण ज्ञात करने के लिये समीकरण (1) का काट की गहराई $\left(-\frac{h}{2}\right)$ से $\left(+\frac{h}{2}\right)$ तक के लिये समाकलन (Integration) कर प्राप्त किया जा सकता है। अत:

$$I_{XX} = \int_{-h/2}^{+h/2} b \cdot y^2 \cdot dy = b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \cdot dy$$

$$= b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{b}{3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{b}{3}\left[2 \cdot \frac{h^3}{8}\right]$$

अत: $\boxed{I_{XX} = \frac{bh^3}{12}}$ formula सूत्र

इसी प्रकार, यदि आयत का जड़त्वाघूर्ण $Y-Y$ अक्ष पर भी निकाला जाये तो उसका मान

$$I_{YY} = \frac{hb^3}{12}$$ सूत्र

अब आयत $ABCD$ का जड़ताघूर्ण, रेखा AB पर समान्तर अक्ष प्रमेय द्वारा

$$I_{AB} = I_{XX} + A\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

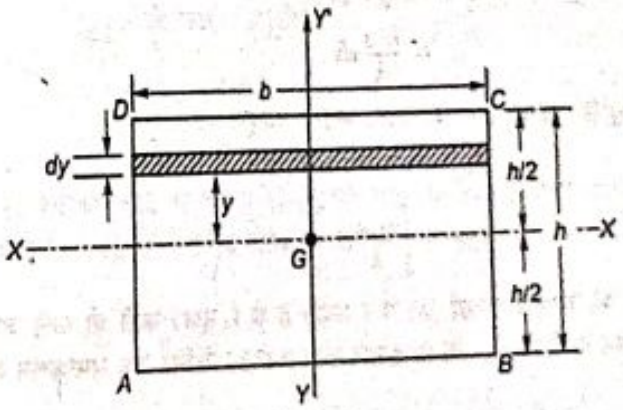
या $$I_{AB} = \frac{bh^3}{12} + (b \times h) \times \frac{h^2}{4} = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4}$$

$$\boxed{I_{AB} = \frac{bh^3}{3}}$$

इसी प्रकार आयत $ABCD$ का जड़त्व आघूर्ण भुजा AD पर,

$$I_{AD} = I_{YY} + A \times \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{hb^3}{12} + (b \times h)\left(\frac{b^2}{4}\right)$$

$\therefore$ $$\boxed{I_{AD} = \frac{hb^3}{3}}$$



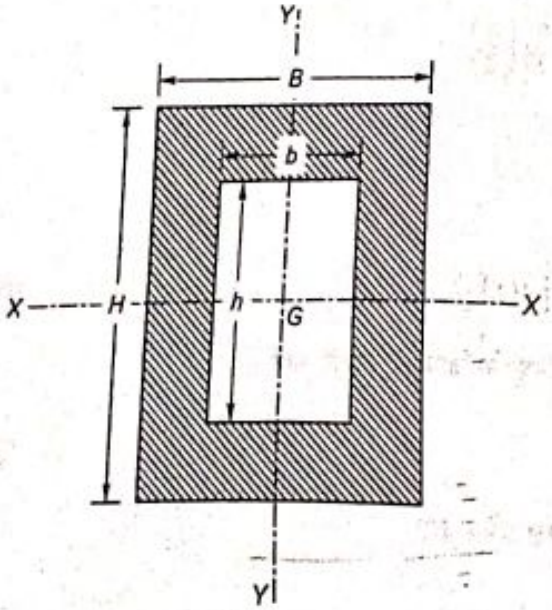
चित्र 8.5

Scanned with CamScanner

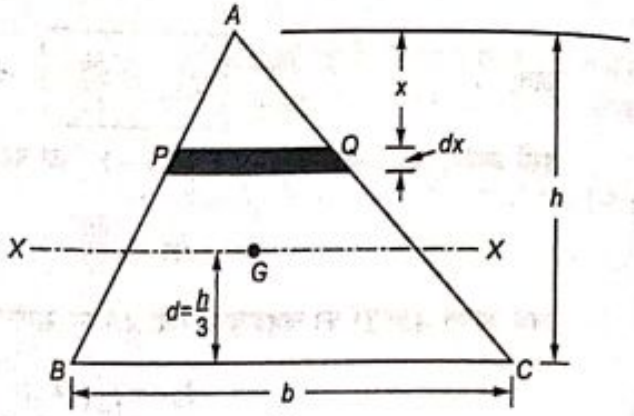
नोट—खोखले आयताकार (Hollow rectangular section) के M.O.I के लिए बाहर के बड़े आयत के जड़त्वाघूर्ण (जड़ताघूर्ण) में से अन्दर वाले छोटे आयत का जड़त्वाघूर्ण (M.O.I) को घटाकर प्राप्त करते हैं।

अर्थात् चित्र 8.6 में दिखाये गये खोखले आयत के लिये,

$$I_{XX} = \left[\frac{BXH^3}{12} - \frac{bXh^3}{12}\right]$$



चित्र 8.6



चित्र 8.7

(2) त्रिभुजाकर काट (Triangular Section)—माना चित्र 8.7 में दिखाई गई त्रिभुजाकार काट ABC का जड़त्व आघूर्ण (या जड़ताघूर्ण) ज्ञात करना है। इसमें b = त्रिभुजाकार काट का आधार तथा h = इस काट की ऊँचाई है। अब त्रिभुज के शीर्ष A से x दूरी पर dx मोटाई की एक पतली पट्टी PQ पर विचार करने पर

ज्यामिति से, समरूप त्रिभुज (similar triangles) APQ तथा ABC में,

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{x}{h}$$

$$\therefore \quad PQ = \frac{x}{h} \times BC = \frac{b \cdot x}{h}$$

$\because$ पट्टी PQ का क्षेत्रफल $= PQ \times dx$

$$= \frac{b \cdot x}{h} dx$$

अब इस पट्टी (strip) के आधार BC के परित: जड़त्व आघूर्ण

$$I_{BC} = \text{क्षेत्रफल} \times (\text{दूरी})^2$$

$$\Rightarrow \quad I_{BC} = \left[\frac{b \cdot x}{h} dx\right] \times (h - x)^2$$

$\because$ मानी गई पट्टी Δ की सम्पूर्ण ऊँचाई (h) में (अर्थात् 0 से h तक) कहीं भी मानी जा सकती हैं। अत: पूरे त्रिभुज का जड़त्व आघूर्ण (M.I) ज्ञात करने के लिये I_{BC} के प्राप्त मान को (0 से h) लिमिट तक समाकलन करने पर प्राप्त होगा। अर्थात्

Scanned with CamScanner

$$I_{BC} = \int_0^h \frac{b \cdot x}{h}(h-x)^2 \cdot dx$$

$$= \frac{b}{h}\int_0^h x(h^2 + x^2 - 2h \cdot x)\, dx$$

$$= \frac{b}{h}\left[h^2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - 2h \cdot \frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \frac{b}{h}\left[\frac{h^4}{2} + \frac{h^4}{4} - \frac{2}{3} \cdot h^4\right] = \frac{bh^3}{12}$$

$$\therefore \quad I_{BC} = \frac{bh^3}{12} \qquad \ldots (I)$$

हम जानते हैं कि त्रिभुज का गुरुत्व केन्द्र (G), इसके आधार से $\frac{h}{3}$ ऊँचाई पर होता है।

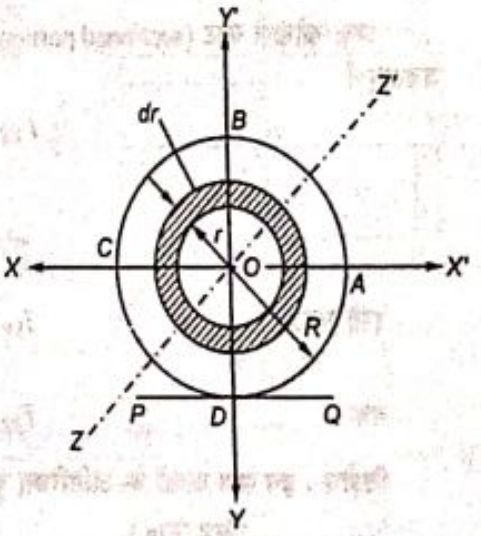
$\therefore$ ΔABC के गुरुत्व केन्द्र ($C, G \Rightarrow G$) से जाने वाली $X-X$ अक्ष पर त्रिभुजाकार काट ABC का जड़त्वाघूर्ण (M.O.I)

$$I_{XXG} = I_{BC} - Ad^2 \qquad [\because I_{XX} = I_G + Ah^2]$$

$$= \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{b \times h}{2}\right)\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{bh^3}{36}$$

$$\boxed{I_{XXG} = \frac{bh^3}{36}} \text{ formula} \qquad \ldots \text{(सूत्र)}$$

(3) वृत्ताकार काट का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia of a Circular Section)—चित्र 8.8 में R त्रिज्या का एक वृत्त $ABCD$ है। इसके केन्द्र O से होकर दो लम्ब अक्षों $X-X$ तथा $Y-Y$ खींचते हैं। अब इस वृत्त केन्द्र O से r त्रिज्या (radius) पर बहुत कम मोटाई dr की एक पट्टी (strip) को एक रिंग (ring) रूप में माना।



चित्र 8.8

अत: रिंग का क्षेत्रफल $= 2\pi r \times dr$

केन्द्र O से जाने वाली $Z-Z$ अक्ष, दोनों अक्षों, (X-अक्ष तथा Y-अक्ष अर्थात् रिंग के समतल) पर लम्ब होती है तथा $Z-Z$ अक्ष की रिंग से दूरी r है। अत: $Z-Z$ अक्ष के परित: रिंग का जड़त्व आघूर्ण,

$$I_{ZZ} = \text{क्षेत्रफल} \times (\text{दूरी})^2$$

$$= [2\pi r \times dr] \times (r)^2$$

$$= 2\pi r^3 dr$$

अब ($Z-Z$) अक्ष के परित: पूरे वृत्ताकार काट का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करने के लिये उपरोक्त प्राप्त हुए I_{ZZ} के मान को (0 से R तक) सीमा (limit) में समाकलन (integrate) करना होगा। अत:

$$I_{ZZ} = \int_0^R 2\pi r^3\, dr = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$

$$= \frac{\pi}{2}(R^4 - 0) = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi \times (D/2)^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

Scanned with CamScanner

∵ हम जानते हैं कि, $I_{XX} + I_{YY} = I_{ZZ}$ (लम्ब अक्ष प्रमेय)

तथा वृत्त दोनों अक्षों पर सममित (symmetrical) है। अत: वृत्ताकार काट के लिए, $I_{XX} = I_{YY}$ होगा।

$$\therefore \quad I_{XX} = I_{YY} = \frac{I_{ZZ}}{2} = \frac{\pi D^4}{32 \times 2}$$

$$\therefore \quad \boxed{I_{XX} = I_{YY} = \frac{\pi D^4}{64}} \quad \text{formula} \qquad \text{(सूत्र)}$$

नोट—$I_{PQ} = I_{XX} + A \times (OD)^2 = \frac{\pi D^4}{64} + \left(\frac{\pi D^2}{4}\right) \times \left(\frac{D}{2}\right)^2 = \frac{5\pi D^4}{64}$ (वृत्त को स्पर्श करती रेखा PQ पर)

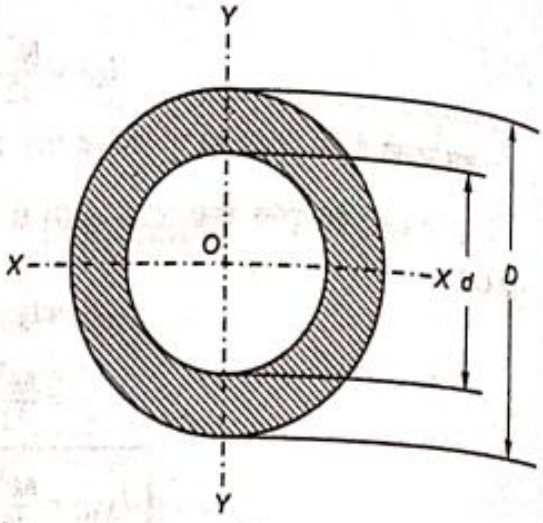
(4) खोखले वृत्ताकार काट का जड़त्व आघूर्ण (M.I of Hollow Circular Section)—चित्र 8.9 में एक खोखली वृत्ताकार काट दिखाई गई है। जिसका बाहरी व्यास (Outer Diameter) = D तथा आन्तरिक व्यास (Inner Diameter) = d है।

अब मुख्य बाहरी वृत्त (Main Outer Circle) का $X-X$ अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण,

$$I_{XX_1} = \frac{\pi D^4}{64}$$

इसी प्रकार अन्दर से काटकर निकाले गये d व्यास के वृत्त का $X-X$ अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण,

$$I_{XX_2} = \frac{\pi d^4}{64}$$



चित्र 8.9

अत: खोखले काट (sectioned portion) का $X-X$ अक्ष पर जड़ताघूर्ण

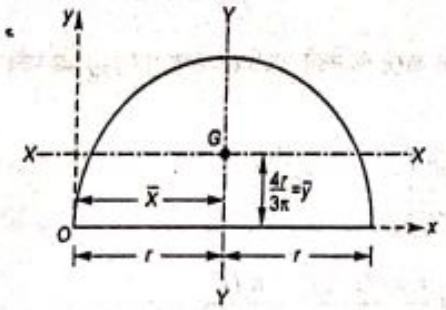
$$I_{XX} = I_{XX_1} - I_{XX_2}$$

$$= \left(\frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}\right) = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) \quad \text{formula} \qquad \text{(सूत्र)}$$

इसी प्रकार $$I_{YY} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} \qquad \text{(सूत्र)}$$

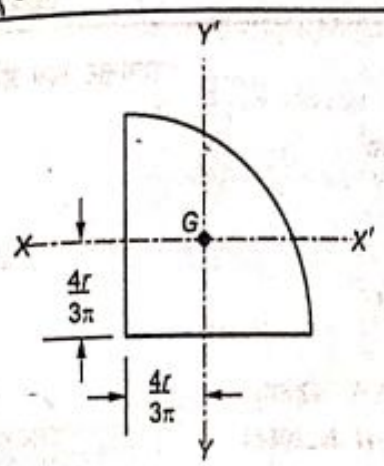
तथा $$I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32} \qquad \text{(सूत्र)}$$

विशेष : इन सब काटों के अतिरिक्त कुछ अन्य काटों के जड़त्व आघूर्ण निम्न चित्रों में प्रदर्शित हैं।

चित्र (Fig.)	गु० के० (G) की स्थिति	जड़त्व आघूर्ण
	$\bar{Y} = \frac{4r}{3\pi}$ $\bar{X} + r$ व्यास $d = 2r$	$I_{XX} = 0{\cdot}11r^4$ $I_{YY} = \frac{\pi}{8}r^4$ $I_{YY} = 0{\cdot}4\,r^4$ $I_{OX} = \frac{\pi d^4}{128}$ (on Base)

चित्र 8.10 : अर्द्धवृत्त (Semi Circle)

Scanned with CamScanner



$\left[\bar{X} = \bar{Y} = \frac{4r}{3\pi}\right]$ $\left[\begin{matrix} I_{XX} = I_{YY} \\ = 0{\cdot}055\, r^4 \end{matrix}\right]$

चित्र 8.11 : एक चौथाई वृत्त (Quarter circle)

§ 8.10 आकृति मापाँक (Modules of Section)

किसी काट में, उसके गुरुत्व केन्द्र से जाने वाली अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण (I) तथा अक्ष के काट के किनारे की अधिकतम दूरी (y) के अनुपात (ratio) को उस काट का आकृति मापाँक (modulus of section) कहते हैं, तथा Z द्वारा प्रदर्शित करते हैं। अर्थात्

$\boxed{Z = \frac{I}{y}}$ सूत्र, इसकी इकाई (मात्रक-Unit) mm^3 या m^3 प्रयोग की जाती है।

z का मान किसी धरन (beam) की सामर्थ्य (strength) को दर्शाता है।

महत्वपूर्ण उदाहरण
(Important Examples)

उदाहरण 1. किसी धरन (Beam) की काट (section) आयताकार (rectangular) है, यह चित्र 8.12 में दिखाई गई है। इस काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I) निम्न के सापेक्ष ज्ञात कीजिये—

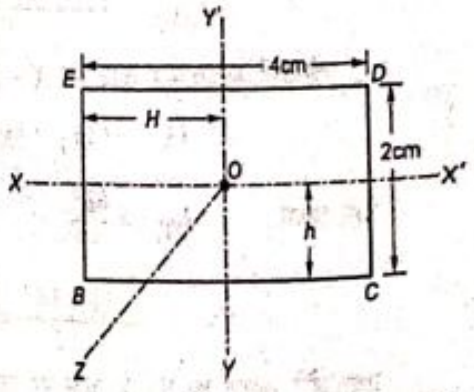
(1) $X - X$ अक्ष पर।

(2) $Y - Y$ अक्ष पर।

(3) केन्द्र से जाने वाली परन्तु काट के तल पर लम्ब अक्ष (अर्थात् OZ-अक्ष) पर।

(4) भुजा BC या भुजा DE के सापेक्ष।

(5) भुजा CD या भुजा BE के सापेक्ष।



चित्र 8.12

हल—∵ आयताकार काट में जड़त्वाघूर्ण (जड़ता घूर्ण), $I = \frac{\text{चौड़ाई} \times (\text{गहराई})^3}{12}$ (सूत्र)

(1) $I_{XX} = \frac{4 \times 2^3}{12} = \frac{8}{3}\,cm^4$ उत्तर $\left[I_{XX} = \frac{bh^3}{12}\right.$ सूत्र द्वारा]

(2) $I_{YY} = \frac{2 \times 4^3}{12} = \frac{128}{12} = \frac{32}{3}\,cm^4$ उत्तर $\left[I_{YY} = \frac{h \times b^3}{12}\right.$ सूत्र द्वारा]

(3) $I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY}$ (लम्ब अक्ष प्रमेय सूत्र द्वारा)

$\therefore \quad I_{OZ} = \frac{8}{3} + \frac{32}{3} = 13{\cdot}33\,cm^4$ उत्तर

(4) ∵ भुजा BC या भुजा DE की काट केन्द्र O से दूरी, $h = \frac{2}{2} = 1$ cm है।

Scanned with CamScanner

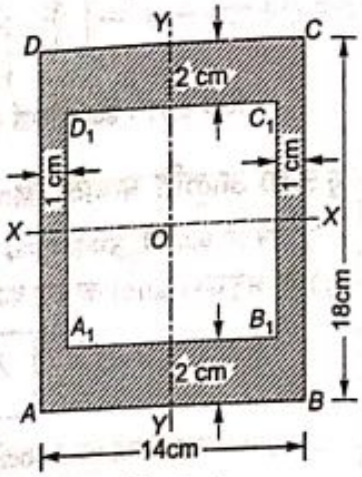
अब $I_{BC} \Rightarrow I_{DE} = I_{XX} + Ah^2$ (समान्तर अक्ष प्रमेय सूत्र द्वारा)

$= \frac{8}{3} + (4 \times 2) \times 1^2 = \frac{32}{3} = 10{\cdot}666 \text{ cm}^4$ उत्तर

(5) $I_{CD} \Rightarrow I_{BE} = I_{YY} + AH^2$

$= \frac{32}{3} + (4 \times 2) \times \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 42{\cdot}66 \text{cm}^4$ उत्तर

उदाहरण 2. चित्र 8.13 में दिखाई गई खोखली आयताकार काट का जड़ताघूर्ण (M.O.I) $X-X$ तथा $Y-Y$ अक्षों (axes) के परित: ज्ञात कीजिये। (U.K. 2006)



चित्र 8.13

हल—बड़ा आयत $ABCD$ तथा छोटा आयत $A_1 B_1 C_1 D_1$ दोनों ही अक्षों $X-X$ तथा $Y-Y$ पर सममित (symmetrical) हैं। अत: बड़े आयत $ABCD$ के $X-X$ तथा $Y-Y$ अक्षों पर जड़ताघूर्ण (M.O.I) ज्ञात करके इनमें से छोटे आयत $A_1 B_1 C_1 D_1$ के उन्हीं अक्षों पर जड़ताघूर्ण को घटाने से हमें खोखले आयत का जड़ताघूर्ण (M.O.I) प्राप्त होगा।

∵ बड़े आयत $ABCD$ का $X-X$ अक्ष पर जड़ताघूर्ण (M.O.I)

$I_{XX_1} = \frac{bh^3}{12}$ सूत्र से,

$= \frac{14 \times 18^3}{12} = 6804 \text{ cm}^4$

इसी प्रकार छोटे आयत $A_1 B_1 C_1 D_1$ का $X-X$ अक्ष पर जड़ताघूर्ण (M.O.I)

$$I_{XX_2} = \frac{(14-2) \times (18-4)^3}{12} = \frac{12 \times 14^3}{12} = 2744 \text{ cm}^4$$

∴ खोखली आयताकार काट का $X-X$ अक्ष पर जड़ताघूर्ण

$$I_{XX} = I_{XX_1} - I_{XX_2} = 6804 - 2744 = 4060 \text{ cm}^4 = 4060 \times 10^4 \text{ mm}^4$$ उत्तर

इसी प्रकार, $I_{YY_1} = \frac{hb^3}{12}$ (बड़े आयत का $Y-Y$ अक्ष पर)

$= \frac{18 \times 14^3}{12} = 4116 \text{cm}^4$

तथा छोटे आयत का $Y-Y$ अक्ष पर जड़ता घूर्ण (जड़त्व आघूर्ण)

$$I_{YY_2} = \frac{(18-4) \times (14-2)^3}{12} = \frac{14 \times 12^3}{12} = 2016 \text{ cm}^4$$

∴ खोखले काट (hollow section) का $Y-Y$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण

$$I_{YY} = I_{YY_1} - I_{YY_2} = 4116 - 2016 = 2100 \text{ cm}^4 = 2100 \times 10^4 \text{ mm}^4$$ उत्तर

उदाहरण 3. चित्र 8.14 में दिखाई गई खोखली आयताकार काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I) $X-X$ तथा $Y-Y$ अक्षों पर ज्ञात करें।

हल—दी गई काट Y-अक्ष पर सममित है, अत: हमें $\bar{Y}$ ज्ञात करना होगा जो खोखली काट के गुरुत्व केन्द्र (G) की स्थिति को बतायेगा और G पर ही $X-X$ अक्ष तथा $Y-Y$ अक्ष प्रतिच्छेद करती हुई जायेंगी।

यहाँ बड़े आयत का केन्द्र g_1, क्षेत्रफल a_1 तथा AB से ऊँचाई y_1 है तथा छोटे आयत $A_1B_1C_1D_1$ का केन्द्र g_2 क्षेत्रफल a_2 तथा g_2 की AB से ऊँचाई y_2 है।

अत: $a_1 = 100 \times 160 = 16000 \text{mm}^2$

Scanned with CamScanner

तथा $a_2 = 50 \times 75 = 3750\,mm^2$

$$y_1 = \frac{160}{2} = 800\ mm$$

तथा $$y_2 = 60 + \frac{75}{2} = 97{\cdot}5\ mm$$

गुरुत्व केन्द्र G की AB से ऊँचाई $\bar{y} = \frac{a_1 y_1 - a_2 y_2}{a_1 - a_2}$ सूत्र से,

$$\bar{y} = \frac{16000 \times 80 - 3750 \times 97{\cdot}5}{16000 - 3750}$$

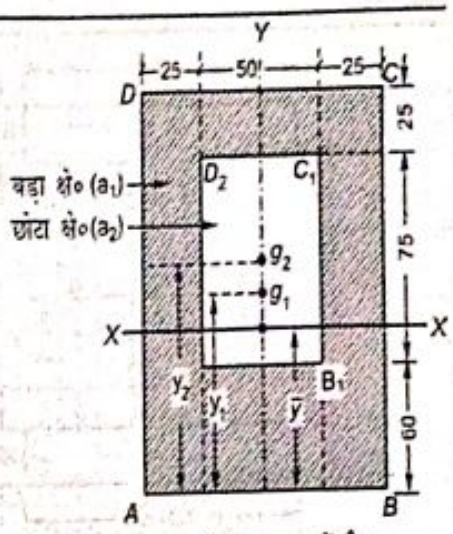
$$= \frac{914375}{12250} = 74{\cdot}643\,mm$$

अब $h_1 = g_1$ व G के बीच दूरी =

$y_1 - \bar{y} = 80 - 74{\cdot}64 = 5{\cdot}36$ mm

$h_2 = g_2$ व G के बीच दूरी =

$y_2 - \bar{y} = 97{\cdot}5 - 74{\cdot}64 = 22{\cdot}86\,mm$



सभी माप mm में हैं।

चित्र 8.14

अत: $X - X$ अक्ष पर खोखले आयताकार काट का जड़तव आघूर्ण (M.O.I)

$$I_{XX} = [I_{X_{g_1}} + a_1 h_1^2] - [I_{X_{g_2}} + a_2 h_2^2]$$

$$= \left[\frac{100 \times 160^3}{12} + 16000 \times 5{\cdot}36^2\right] - \left[\frac{50 \times 75^3}{12} + 3750 \times 22{\cdot}86^2\right]$$

$$= [34593006{\cdot}93] - [3717486]$$

$\therefore$ $I_{XX} = 30875520{\cdot}93\ mm^4$

या $I_{XX} = 3{\cdot}0875 \times 10^7\ mm^4$ उत्तर

अब $Y - Y$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण के लिये $H_1 = 0, H_2 = 0$ होगा।

$$I_{YY} = [I_{Y_{g_1}} + a_1 H_1^2] - [I_{Y_{g_2}} + a_2 H_2^2]$$

$$= \left[\frac{160 \times 100^3}{12} + 0\right] - \left[\frac{75 \times 50^3}{12} + 0\right] = 13333333{\cdot}33 - 781250$$

$I_{YY} = 12552083{\cdot}33\ mm^4 = 1{\cdot}25 \times 10^7 mm^4$ उत्तर

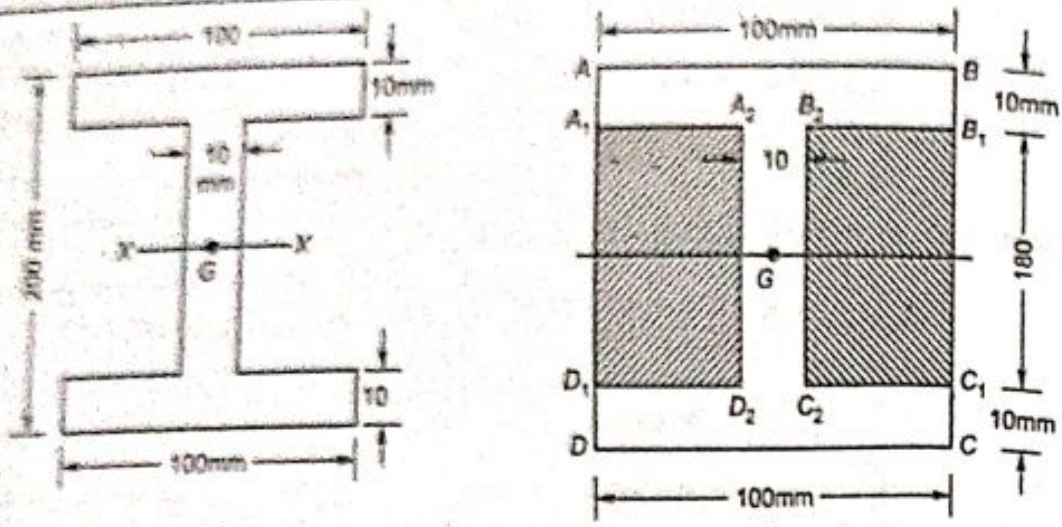
उदाहरण 4. चित्र 8.15 (a) में दिखाई गई एक I-काट का I_{XX}, I_{YY} तथा आकृति मापांक (Modulus of Section) ज्ञात कीजिये।

हल—चित्र 8.15 (b) देखें—

$\because$ दी गई I-काट (I-section), x-अक्ष (x-Axis) तथा y-अक्ष (y-Axis) दोनों के सममित (Symmetrical) है, इसलिये हमें गुरुत्व केन्द्र (C.G.) के लिये $\bar{X}$ या $\bar{Y}$ ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं है। क्योंकि गुरुत्व केन्द्र (G) कुल चौड़ाई (100 mm) तथा कुल गहराई (200 mm) के मध्य (middle) में होगा।

जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) ज्ञात करने के लिए बड़े आयत $ABCD$ के जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) में से अन्दर सिरों पर बने हैचिंग रेखाओं वाले आयतों (Rectangles) $A_1A_2D_2D_1$ तथा आयत $B_2B_1C_1C_2$ के जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.) को घटाकर प्राप्त करते हैं। जैसा कि नीचे गणना की गई है—

Scanned with CamScanner



चित्र 15

$$\bar{I}_{XX} = \left[\frac{100\times 200^3}{12} - \frac{90\times 180^3}{12}\right]$$

$$= 66666666{\cdot}67 - 43740000$$

$$= 22926666{\cdot}67\ \text{mm}^4$$

$$= 22{\cdot}92\times 10^6\ \text{mm}^4$$ उत्तर

अब $$I_{YY} = \frac{10\times 100^3}{12} + \frac{180\times 10^3}{12} + \frac{10\times 100^3}{12}$$

$$= 1681666{\cdot}667\ \text{mm}^4$$

$$= 1{\cdot}68\times 10^6\ \text{mm}^4$$ उत्तर

आकृति मापांक (Modulus of Section)

$Z = \frac{I_{XX}}{y}$ सूत्र से (जहाँ $y = \frac{\text{काट की गहराई}}{2} = \frac{200}{2} = 100$)

$$= \frac{22{\cdot}92\times 10^6}{100} = 22{\cdot}92\times 10^4\ \text{mm}^3$$ उत्तर

उदाहरण 5. चित्र 8.16 (a) में दिखाई गई I-काट (I-Section) का x-अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I. at x-axis) I_{XX} तथा y-अक्ष (y-axis) पर जड़त्व आघूर्ण (I_{YY}) ज्ञात कीजिये।

हल—चित्र 8.16 (b) में I-काट के तीनों आयताकार भागों के गुरुत्व केन्द्र (C.G.) क्रमशः g_1, g_2 तथा g_3 को प्रदर्शित कर, सबसे नीचे की रेखा से इनकी ऊँचाईयों को क्रमशः y_1, y_2 तथा y_3 को ज्ञात करते हैं तथा संयुक्त काट का गुरुत्व केन्द्र (C.G.) 'G' के लिये $\bar{y}$ ज्ञात करते हैं।

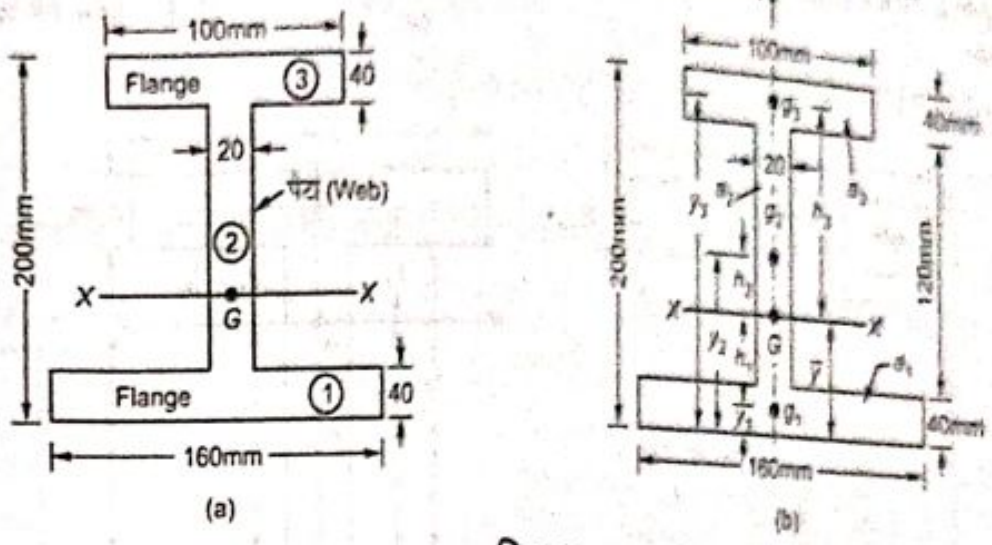
माना इनके क्षेत्रफल क्रमशः a_1, a_2 तथा a_3 हैं।

∴ (1) आयत (Rectangle) का क्षेत्रफल (area), $a_1 = 160\times 40 = 6400\ \text{mm}^2$

इसके गुरुत्व केन्द्र g_1 की ऊँचाई $(y_1) = \frac{40}{2} = 20\ \text{mm}$

(2) आयत का क्षेत्रफल (area), $a_2 = 20\times 120 = 2400\ \text{mm}^2$

Scanned with CamScanner



चित्र 8.16

इसके गुरुत्व केन्द्र g_2 की ऊँचाई $(y_2) = 40 + \frac{120}{2} = 100\,\text{mm}$

(3) आयत (Rectangle) का क्षेत्रफल (area), $a_3 = 100 \times 40 = 4000\,\text{mm}^2$

अब केन्द्र (g_3) की ऊँचाई $y_3 = 200 - 20 = 180\,\text{mm}$

$\therefore$ $\bar{y} = \frac{a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3}{a_1 + a_2 + a_3}$ सूत्र से

$$\bar{y} = \frac{(6400 \times 20) + (2400 \times 100) + (4000 \times 180)}{6400 + 2400 + 400}$$

$$= 85\,\text{mm}$$

$\therefore$ चित्र 8.16 (b) के अनुसार $h_1 = \bar{y} - y_1 = 85 - 20 = 65\,\text{mm}$

इसी प्रकार $h_2 = g_2$ तथा G के बीच दूरी (Gap) $= y_2 - \bar{y} = 100 - 85 = 15\,\text{mm}$

तथा $h_3 = g_3$ और G के बीच दूरी (Gap) $= y_3 - \bar{y} = 180 - 85 = 95\,\text{mm}$

अत: $I_{xx} = [I_{xg_1} + a_1h_1^2] + [I_{xg_2} + a_2h_2^2] + [I_{xg_3} + a_3h_3^2]$ सूत्र से

$$= \left[\frac{160 \times 40^3}{12} + (6400 \times 65^2)\right] + \left[\frac{20 \times 120^3}{12} + (2400 \times 15^2)\right] + \left[\frac{100 \times 40^3}{12} + (4000 \times 95^2)\right]$$

$$= 67946666 \cdot 67\,\text{mm}^4$$ उत्तर

अब $I_{yy} = I_{yg_1} + I_{yg_2} + I_{yg_3}$ सूत्र से

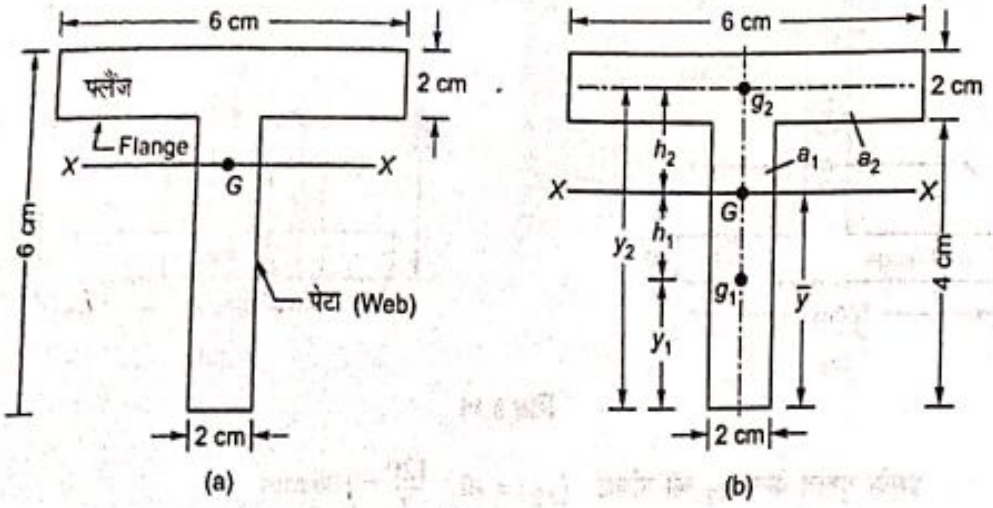
$$= \left[\frac{40 \times 160^3}{12} + \frac{120 \times 20^3}{12} + \frac{40 \times 100^3}{12}\right]$$

$$= 17066666 \cdot 67\,\text{mm}^4$$ उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 6. चित्र 8.17 (a) में दिखाई गई T-काट का $X-X$ अक्ष (axis) पर जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) ज्ञात कीजिये। (U.K. 2006, 09 W, 12 S)

हल—चित्र 8.17 (b) देखें।



चित्र 8.17

Web तथा Flange के आयत (Rectangle) के केन्द्र (centre) क्रमशः g_1 तथा g_2 की ऊचाईयाँ y_1 तथा y_2 (सबसे नीचे की रेखा से) हैं। इनके क्षेत्रफल (areas) a_2 तथा a_2 है।

∴ वैब (Web) का क्षेत्रफल (area), $a_1 = 2 \times 4 = 8\,\text{cm}^2$

तथा फ्लैंज (Flange) का क्षेत्रफल $a_2 = 6 \times 2 = 12\,\text{cm}^2$

अब नीचे के किनारे से g_1 की ऊँचाई $y_1 = \frac{4}{2} = 2\,\text{cm}$

तथा नीचे के किनारे से g_2 की ऊँचाई $y_2 = 4 + 1 = 5\,\text{cm}$

∴ $\bar{y} = \frac{a_1 y_1 + a_2 y_2}{a_1 + a_2}$ सूत्र से [∵ y-axis के symmetrical है]

$$y = \frac{8 \times 2 + 12 \times 5}{8 + 12} = \frac{16 + 60}{20} = \frac{76}{20} = 3{\cdot}8\,\text{cm}$$

$$= 38\,\text{mm}$$

अब g_1 व G के बीच दूरी (Gap), $h_1 = \bar{y} - y_1$

$$= 3{\cdot}8 - 2 = 1{\cdot}8\,\text{cm}$$

तथा g_2 व G के बीच दूरी (Gap), $h_2 = y_2 - \bar{y}$

$$= 5 - 3{\cdot}8 = 1{\cdot}2\,\text{cm}$$

∴ $(X-X)$ axis पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I. at $X-X$ axis)

$$I_{xx} = [I_{xg_1} + a_1 h_1^2] + [I_{xg_2} + a_2 h_2^2]$$

$$= \left[\frac{2 \times 4^3}{12} + 8 \times 1{\cdot}8^2\right] + \left[\frac{6 \times 2^3}{12} + 12 \times 1{\cdot}2^2\right]$$

$$= 57{\cdot}8666\,\text{cm}^4 = 578666{\cdot}66\,\text{mm}^4 = 5{\cdot}78 \times 10^5\,\text{mm}^4$$ उत्तर

Scanned with CamScanner

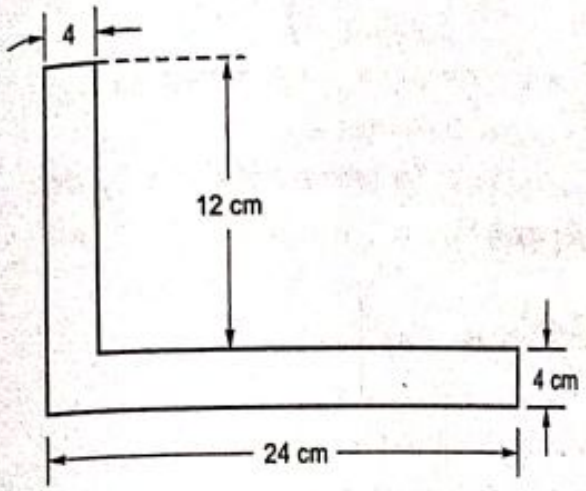
नोट—यदि हमें y-axix पर भी जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) अर्थात् I_{yy} ज्ञात करना हो तो निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं—

$I_{yy} = I_{yg1} + I_{yg2}$ सूत्र से

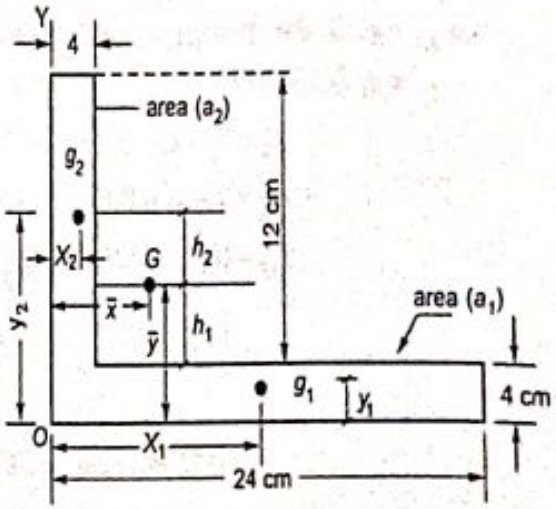
$$I_{yy} = \frac{4 \times 2^3}{12} + \frac{2 \times 6^3}{12} = 38{\cdot}66666\,\text{cm}^4$$

$$= 38{\cdot}66 \times 10^4\ \text{mm}^4$$ उत्तर

उदाहरण 7. चित्र 8.18 (a) में दिखाई गई काट (section) का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिये। **(U.K. 2012 W)**



चित्र 8.18 (a)



चित्र 8.18 (b)

हल—केन्द्र g_1 वाले आयत (Rectangle) का क्षेत्रफल $(a_1) = 24 \times 4 = 96\,\text{cm}^2$

केन्द्र g_2 वाले आयत (Rectangle) का क्षेत्रफल $(a_2) = 12 \times 4 = 48\,\text{cm}^2$

यदि बिन्दु O से जाने वाली x-axis से g_1 तथा g_2 की दूरियाँ क्रमशः y_1 व y_2 हैं।

तब $y_1 = \frac{4}{2} = 2\,\text{cm}$ तथा $y_2 = 4 + \frac{12}{2} = 4 + 6 = 10\,\text{cm}$

इसी प्रकार y-axis से g_1 व g_2 की दूरियाँ क्रमशः x_1 तथा x_2 हैं।

तब $x_1 = \frac{24}{2} = 12\,\text{cm}$ तथा $x_2 = \frac{4}{2} = 2\,\text{cm}$ होगा।

∵ दी गई काट न तो x-axis के और न ही y-axis के सममित (symmetrical) है, अतः $\bar{X}$ तथा $\bar{Y}$ दोनों ज्ञात करने होंगे।

∴ $$\bar{X} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2}{a_1 + a_2} = \frac{(96 \times 12) + (48 \times 2)}{(96 + 48)} = \frac{1248}{144} = 8{\cdot}6666\,\text{cm}$$

$$= 86{\cdot}67\,\text{mm}$$

$$\bar{Y} = \frac{a_1y_1 + a_2y_2}{a_1 + a_2} = \frac{(96 \times 2) + (48 \times 10)}{(96 + 48)} = \frac{672}{144} = 4{\cdot}6666\,\text{cm}$$

$$= 46{\cdot}67\,\text{mm}$$

अब g_1 व G के बीच उर्ध्वाधर (vertical) दूरी h_1 है और

g_2 व G के बीच उर्ध्वाधर (vertical) दूरी h_2 तब

$$h_1 = \bar{y} - y_1 = 4{\cdot}67 - 2 = 2{\cdot}67\,\text{cm}$$

$$h_2 = y_2 - \bar{y} = 10 - 4{\cdot}67 = 5{\cdot}33\,\text{cm}$$

Scanned with CamScanner

$$\therefore \quad I_{xx} = [I_{xg_1} + a_1 h_1^2] + [I_{xg_2} + a_2 h_2^2]$$

$$= \left[\frac{24 \times 4^3}{12} + 96 \times 2{\cdot}67^2\right] + \left[\frac{4 \times 12^3}{12} + 48 \times 5{\cdot}33^2\right]$$

$$= 2752{\cdot}0016 = 2752\,\text{cm}^4$$

$$= 2752 \times 10^4\ \text{mm}^4$$ उत्तर

अब g_1 व G के बीच क्षैतिज (Horizontal) दूरी H_1 है और,

g_2 व G के बीच क्षैतिज (Horizontal) दूरी H_2 है तब

$$H_1 = x_1 - \bar{x} = 12 - 8{\cdot}67 = 3{\cdot}33\,\text{cm}$$

$$H_2 = \bar{x} - x_2 = 8{\cdot}67 - 2 = 6{\cdot}67\,\text{cm}$$

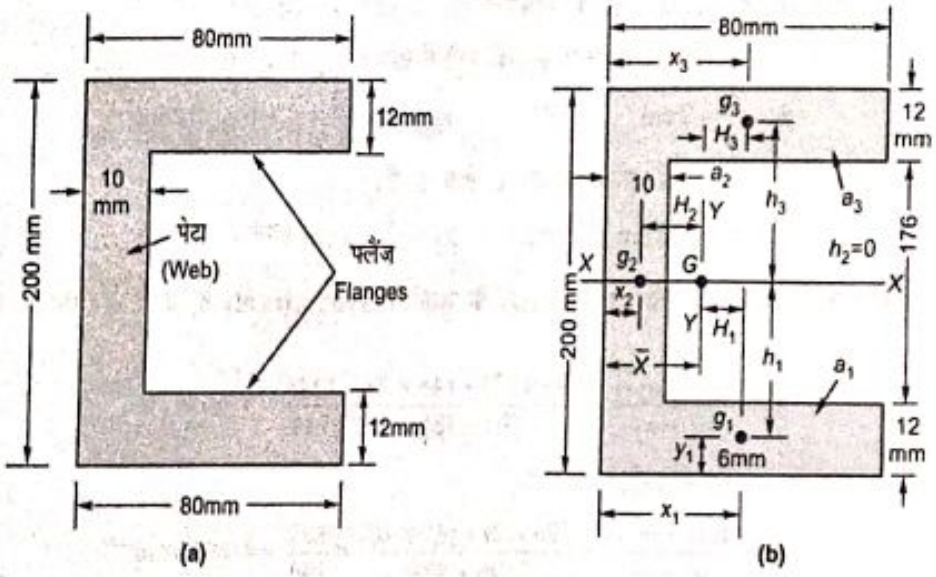
$$\therefore \quad I_{yy} = [I_{yg_1} + a_1 H_1^2] + [I_{yg_2} + a_2 H_2^2] \text{ सूत्र से}$$

$$= \left[\frac{4 \times 24^3}{12} + 96 \times 3{\cdot}33^2\right] + \left[\frac{12 \times 4^3}{12} + 48 \times 6{\cdot}67^2\right]$$

$$= 7872{\cdot}0016\,\text{cm}^4 \Rightarrow 7872\,\text{cm}^4$$

$$= 7872 \times 10^4\ \text{mm}^4 \Rightarrow 78{\cdot}72 \times 10^6\ \text{mm}^4$$ उत्तर

उदाहरण 8. चित्र 8.19 (a) में दिखाये गए C-काट (चैनल सैक्शनों) का जड़तव आघूर्ण (M.O.I.) x-अक्ष तथा y-अक्ष पर ज्ञात करो। (Find I_{XX} & I_{YY} of given channel section in Fig. 8.19)



चित्र 8.19

हल—चित्र 8.19 (b) देखें।

चित्र में दी गई C-काट, x-axis के सममित (symmetrical) है अत: गुरुत्व केन्द्र (C.G.) की स्थिति के लिए केवल $\bar{X}$ ज्ञात करेंगे।

$$\therefore \quad \bar{X} = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3}{a_1 + a_2 + a_3} \text{ से C.G. की स्थिति ज्ञात होगी।}$$

Scanned with CamScanner

यहाँ $x_1 = \frac{80}{2} = 40\text{ mm} = x_3$ तथा $x_2 = \frac{10}{2} = 5\text{ mm}$

तथा $a_1 = a_3 = 80 \times 12 = 960\text{ mm}^2$

$a_2 = 10 \times 176 = 1760\text{ mm}^2$

$$\therefore \quad \bar{X} = \frac{(960 \times 40) + (1760 \times 5) + (960 \times 40)}{960 + 1760 + 960} = \frac{85600}{3680}$$

$$\bar{X} = 23{\cdot}26\text{ mm}$$

I_{XX} ज्ञात करने के लिए g_1 व G के बीच उर्ध्वाधर (Vertical) दूरी

$h_1 = 100 - 6 = 94$ mm, $h_2 = 0$ (g_2 व G के बीच Vertically गैप)

तथा g_3 व G के बीच ऊर्ध्वाधर दूरी (Vertical Gap) $h_3 = h_1 = 100 - 6 = 94$ mm

अब $I_{xx} = [I_{xg_1} + a_1h_1^2] + [I_{xg_2} + a_2h_2^2] + [I_{xg_3} + a_3h_3^2]$ सूत्र से

$$= \left[\frac{80 \times 12^3}{12} + 960 \times 94^2\right] + \left[\frac{10 \times 176^3}{12} + 0\right] + \left[\frac{80 \times 12^3}{12} + 960 \times 94^2\right]$$

$$= [8494080] \times 2 + [4543146{\cdot}667]$$

$$= 21531306{\cdot}67\text{ mm}^4$$

उत्तर

I_{YY} ज्ञात करने के लिए g_1 व G के बीच क्षैतिज दूरी (Horizontal Gap) H_1 तथा g_2 व G के बीच क्षैतिज दूरी H_2 और g_3 व G के बीच क्षैतिज दूरी (Horizontal Gap) H_3 हैं, को ज्ञात करना होगा।

$$\therefore \quad H_1 = X_1 - \bar{X}$$

$$= 40 - 23{\cdot}26 = 16{\cdot}74\text{ cm}$$

$$H_2 = \bar{X} - X_2$$

$$= 23{\cdot}26 - 5 = 18{\cdot}26\text{ cm}$$

$$H_3 = X_3 - \bar{X}$$

$$= 40 - 23{\cdot}26 = 16{\cdot}74\text{ cm}$$

$$\therefore \quad I_{yy} = [I_{yg_1} + a_1H_1^2] + [I_{yg_2} + a_2H_2^2] + [I_{yg_3} + a_3H_3^2]$$ सूत्र से

$$= \left[\frac{12 \times 80^3}{12} + 960 \times 16{\cdot}74^2\right] + \left[\frac{176 \times 10^3}{12} + 1760 \times 18{\cdot}26^2\right] + \left[\frac{12 \times 80^3}{12} + 960 \times 16{\cdot}74^2\right]$$

$$= (781018{\cdot}496) + (14666{\cdot}6667) + (781018{\cdot}496)$$

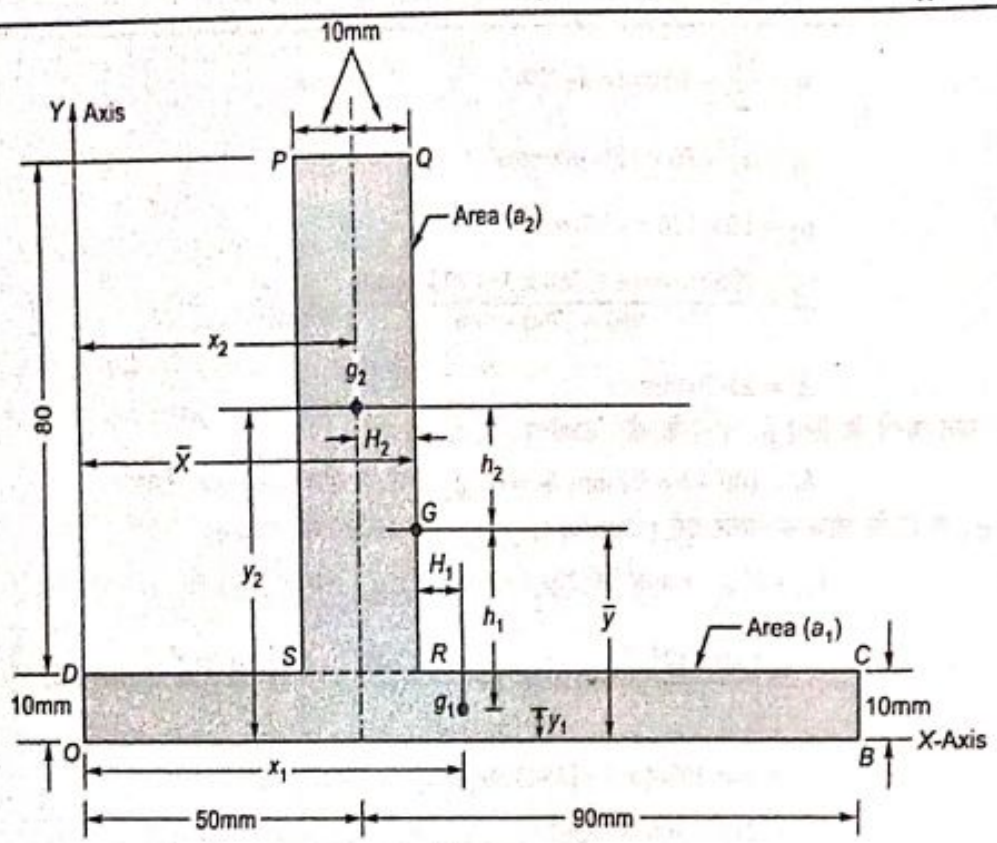
$$= 1576703{\cdot}659\text{ mm}^4$$

उत्तर

उदाहरण 9. चित्र 8.20 में दो L-काट (Angle Section) का संयोजन (combination) दिखया गया है। संयोजन का जड़तव आघूर्ण (Moment of Inertia) I_{XX} तथा I_{YY} के मान उसके केन्द्रक (centroid) के परित: ज्ञात कीजिये।

हल—चित्र 8.20 के अनुसार इस काट को दो भागों में विभाजित (divide) किया (जैसे आयत (Rectangle) *OBCD* तथा आयत *PQRS*)

Scanned with CamScanner



चित्र 8.20

इन दोनों आयतों के केन्द्रक (centroid) क्रमशः g_1 तथा g_2 हैं और इनकी y-axis तथा x-axis से दूरियाँ क्रमशः x_1 व x_2 तथा y_1 व y_2 हैं।

$$x_1 = \frac{50+90}{2} = \frac{140}{2} = 70\,\text{mm} \text{ तथा } x_2 = 50\,\text{mm}$$

$$y_1 = \frac{10}{2} = 5\,\text{mm} \qquad \text{तथा } y_2 = 10 + \frac{80}{2} = 50\,\text{mm}$$

आयत (Rectangle) $OBCD$ का क्षेत्रफल (area) $a_1 = 140 \times 10 = 1400\,\text{mm}^2$

आयत (Rectangle) $PQRS$ का क्षेत्रफल (area) $a_2 = 20 \times 80 = 1600\,\text{mm}^2$

∵ यह संयुक्त काट (Combined Section) x-axis और y-axis में से किसी के भी सममित (symmetrical) नहीं है, अतः हमें $\bar{X}$ तथा $\bar{Y}$ दोनों ही ज्ञात करने होंगे।

$$\therefore \qquad \bar{X} = \frac{a_1x_1 + a_2x_2}{a_1 + a_2} = \frac{(1400 \times 70) + (1600 \times 50)}{(1400 + 1600)} = 59{\cdot}33\,\text{mm}$$

$$\text{तथा} \qquad \bar{Y} = \frac{a_1y_1 + a_2y_2}{a_1 + a_2} = \frac{(1400 \times 5) + (1600 \times 50)}{(1400 + 1600)} = 29\,\text{mm}$$

अब g_1 व G की अक्षों (axes) के बीच दूरी (Gap) h_1 तथा H_1 हैं और g_2 व G की अक्षों (axes) के बीच दमरी (Gap) h_2 तथा H_2 है।

$$\therefore \qquad h_1 = \bar{y} - y_1 \text{ (चित्र से)}$$

$$= 29 - 5 = 24\,\text{mm}$$

$$H_1 = x_1 - \bar{x} \text{ (चित्र से)}$$

$$= 70 - 59{\cdot}33 = 10{\cdot}67\,\text{mm}$$

Scanned with CamScanner

इसी प्रकार $h_2 = y_2 - \bar{y}$(चित्र से)

$= 50 - 29 = 21\,\text{mm}$

$H_2 = \bar{x} - x_2$ (चित्र से)

$= 59{\cdot}33 - 50 = 9{\cdot}33\,\text{mm}$

अब $I_{XX} = [I_{xg1} + a_1 h_1^2] + [I_{xg2} + a_2 h_2^2]$ (समान्तर अक्ष प्रमेय सूत्र से)

$$= \left[\frac{140 \times 10^3}{12} + 1400 \times 24^2\right] + \left[\frac{20 \times 80^3}{12} + 1600 \times 21^2\right]$$

$= 818066{\cdot}6667 + 1558933{\cdot}333$

∴ $I_{XX} = 2377000\,\text{mm}^4$ उत्तर

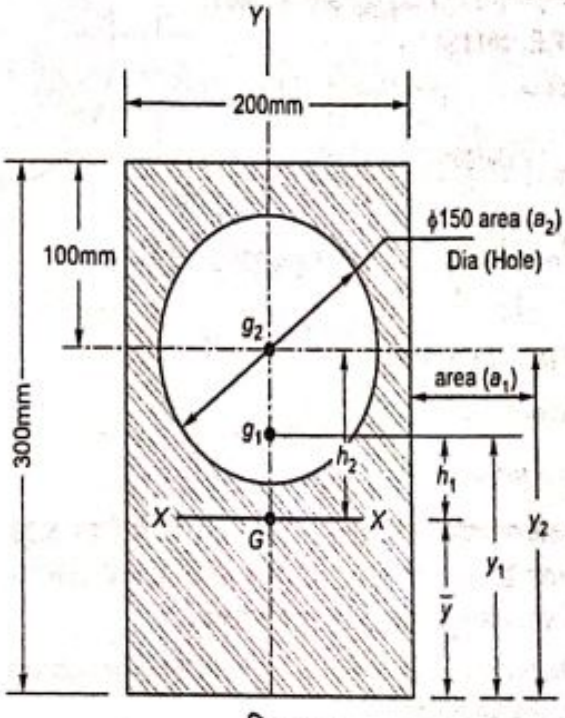
इसी प्रकार $I_{YY} = [I_{yg1} + a_1 H_1^2] + [I_{yg2} + a_2 H_2^2]$ (समान्तर अक्ष प्रमेय सूत्र से)

$$= \left[\frac{10 \times 140^3}{12} + 1400 \times 10{\cdot}67^2\right] + \left[\frac{80 \times 20^3}{12} + 1600 \times 9{\cdot}33^2\right]$$

$= 2446055{\cdot}127 + 192611{\cdot}5733$

$= 2638666{\cdot}7\,\text{mm}^4$ उत्तर

उदाहरण 10. चित्र 8.21 में दिखाई गई छिद्र वाली काट (Hollow-section) का केन्द्रक (centroid) (G) ज्ञात कर इससे जाने वाली ($X - X$) axis पर जड़ताघूर्ण (M.O.I.) अर्थात् I_{XX} ज्ञात कीजिये।



चित्र 8.21

हल—(देखें चित्र 8.21) आयताकार भाग (Rectangular Part) का केन्द्रक (centroid) g_1, क्षेत्रफल (area) a_1 तथा नीचे के सिरे से ऊँचाई y_1 है। छिद्र (Hole) का केन्द्र g_2, क्षेत्रफल (a_2) तथा नीचे के सिरे से ऊँचाई y_2 है। आयताकार भाग से छिद्र (Hole) काटने के बाद शेष बचे भाग का गुरुत्व केन्द्र (C.G.) "G" है। इसी बिन्दु G से ($X - X$) अक्ष खींची जायेगी।

Scanned with CamScanner

आयत का क्षेत्रफल (area), $a_1 = 300 \times 200 = 60000\ mm^2$

काटे गये छिद्र का क्षेत्रफल (area) $a_2 = \frac{\pi (150)^2}{4} = 17662 \cdot 5\ mm^2$

g_1 की ऊँचाई $y_1 = \frac{300}{2} = 150\ mm$

g_2 की ऊँचाई $y_2 = (300 - 100) = 200\ mm$

∴ केन्द्र G की ऊँचाई $\bar{y} = \frac{a_1 y_1 - a_2 y_2}{a_1 - a_2}$ सूत्र से (यहाँ काटे गये भाग के लिये (–ve) लेते हैं।)

∴ $$\bar{y} = \frac{6000 \times 150 - 17662 \cdot 5 \times 200}{(60000 - 17662 \cdot 5)} = 129 \cdot 14$$

अब G से जाने वाली $(X-X)$ axis से g_1 की दूरी $(h_1) = y_1 - \bar{y} = 20 \cdot 86\ mm$

तथा G से जाने वाली $(X-X)$ अक्ष से g_2 की दूरी $(h_2) = y_2 - \bar{y} = 70 \cdot 86\ mm$

$$I_{XX} = [I_{xg_1} + a_1 h_1^2] + [I_{xg_2} + a_2 h_2^2] \text{ सूत्र द्वारा}$$

$$= \left[\frac{200 \times 300^3}{12} + 60000 \times 20 \cdot 86^2\right] + \left[\frac{\pi (150)^4}{64} + 17662 \cdot 5 \times 70 \cdot 86^2\right]$$

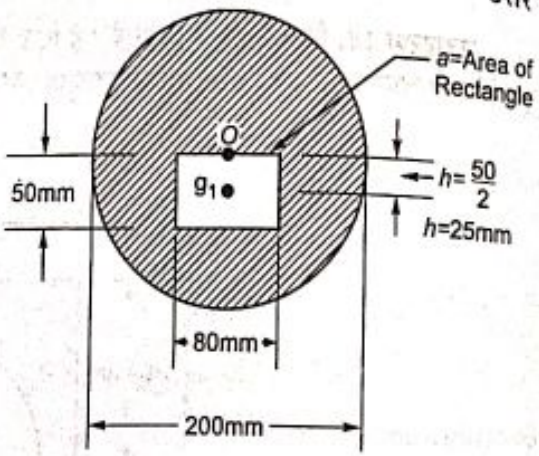
$$= (476108376) + (113523768 \cdot 8) = 362584607 \cdot 2$$

$$= 362 \cdot 585 \times 10^6\ mm^4$$

उत्तर

उदाहरण 11. चित्र 8.22 में दिखाई गई छाया दार (shaded) काट को वृत्त (circle) के केन्द्र O से जाने वाली क्षैतिज अक्ष (Horizontal axis) पर जड़ताघूर्ण (M.O.I.), I_{XX} ज्ञात कीजिये।

(U.K. B.T.E. 2011S)



चित्र 8.22

हल—चित्र 8.22 में देखिये—

$$I_{XX} = \frac{\pi D^4}{64} - [I_{xg_1} + ah^2]$$

$$= \frac{\pi (200)^4}{64} - \left[\frac{80 \times 50^3}{12} + (80 \times 50) \times 25^2\right]$$

$$= (78500000) - (3333333 \cdot 33)$$

$$= 75166666 \cdot 67\ mm^4$$

$$= 75 \cdot 1667 \times 10^6\ mm^4$$

उत्तर

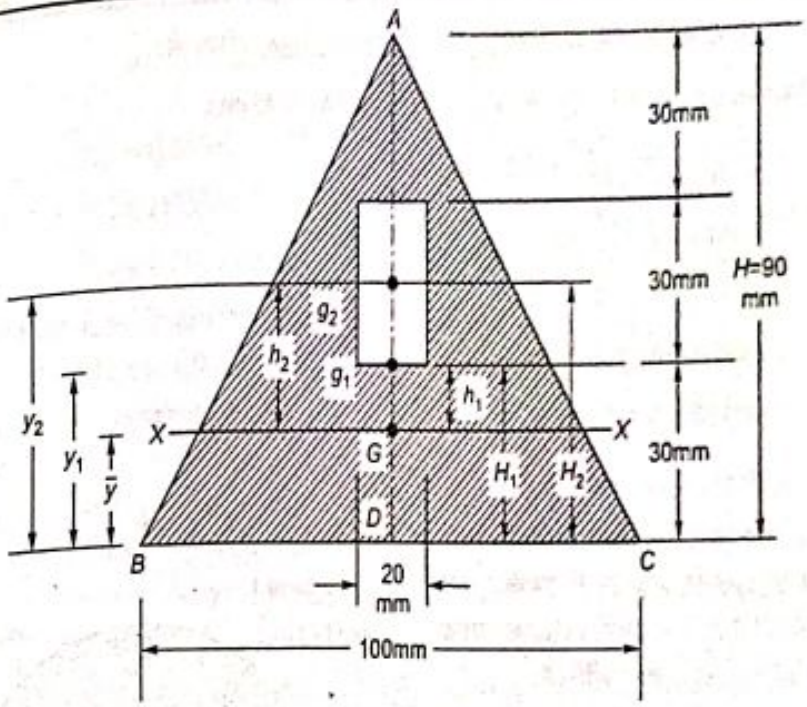
उदाहरण 12. एक त्रिभुजाकार काट (Triangular Section) में से चित्र 8.23 के अनुसार आयताकार छिद्र (Rectangular Hole) किया गया है। गुरुत्व केन्द्र (C.G.) जाने वाली $X-X$ axis पर जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) तथा आधार BC पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) ज्ञात कीजिये।

हल—चित्र 8.23 में दी गई काट (section) $Y-Y$ axis पर सममित (symmetrical) है। अत: गुरुत्व केन्द्र (C.G.), y-axis पर होगा। जिसके लिये $\bar{y}$ ज्ञात करना होगा।

∵ ΔABC का गुरुत्व केन्द्र (C.G.) g_1, क्षेत्रफल (area) a_1 तथा BC से ऊँचाई y_1 है तथा आयत (Rectangle) का गुरुत्व केन्द्र g_2, क्षेत्रफल a_2 तथा BC से ऊँचाई y_2 है।

∴ क्षेत्रफल (ΔABC), $a_1 = \frac{\text{आधार} \times \text{ऊँचाई}}{2}$ सूत्र से

Scanned with CamScanner



चित्र 8.23

$$a_1 = \frac{100 \times 90}{2} = 4500\,\text{mm}^2$$

आयत (Rectangle) का क्षेत्रफल $a_2 = 20 \times 30 = 600\,\text{mm}^2$

आधार BC से g_1 की ऊँचाई $y_1 = \frac{1}{3} \times H = \frac{1}{3} \times 90 = 30\,\text{mm}$

तथा आधार BC से g_2 की ऊँचाई $y_2 = 30 + \frac{30}{2} = 30 + 15 = 45\,\text{mm}$

$$\therefore \quad \bar{y} = \frac{a_1 y_1 - a_2 y_2}{a_1 - a_2} = \frac{4500 \times 30 - 600 \times 45}{4500 - 600}$$

$$= \frac{1080}{39} = 27{\cdot}69\,mm \Rightarrow 27{\cdot}7\,\text{mm}$$

अब G से जाने वाली $X-X$ अक्ष से g_1 व g_2 ऊर्ध्वाधर दूरियाँ क्रमशः

$h_1 = y_1 - \bar{y}$ तथा $h_2 = y_2 - \bar{y}$

$\therefore \quad h_1 = 30 - 27{\cdot}7$ तथा $h_2 = 45 - 27{\cdot}7$

$= 2{\cdot}3\,\text{mm}$ तथा $= 17{\cdot}3\,\text{mm}$

$$\therefore \quad I_{XX} = [I_{xg_1} + a_1 h_1^2] - [I_{xg_2} + a_2 h_2^2]$$

$$= \left[\frac{100 \times 90^3}{36} + 4500 \times 2{\cdot}3^2\right] - \left[\frac{20 \times 30^3}{12} + 600 \times 17{\cdot}3^2\right]$$

$$= (2048805) - (224574) = 1824231\,\text{mm}^4$$

$$= 182{\cdot}42 \times 10^4\,\text{mm}^4$$

उत्तर

$\because$ ΔABC के आधार BC पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) $= \frac{b \times H^3}{12}$ सूत्र है।

Scanned with CamScanner

$\therefore$ Δ के गुरुत्व केन्द्र (g_1) की BC से दूरी $H_1 = 30\,mm$ (चित्र से)

तथा आयत (Rectangle) के केन्द्र (g_2) की BC से दूरी $H_2 = y_2 = 45\,mm$

$\therefore$ $I_{BC} = [I_{xg1}^{\text{tri at BC}}] - [I_{xg2}^{\text{Rect}} + a_2 H_2^2]$

$$= \left[\frac{100 \times 90^3}{12}\right] - \left[\frac{20 \times 30^3}{12} + 600 \times 45^2\right]$$

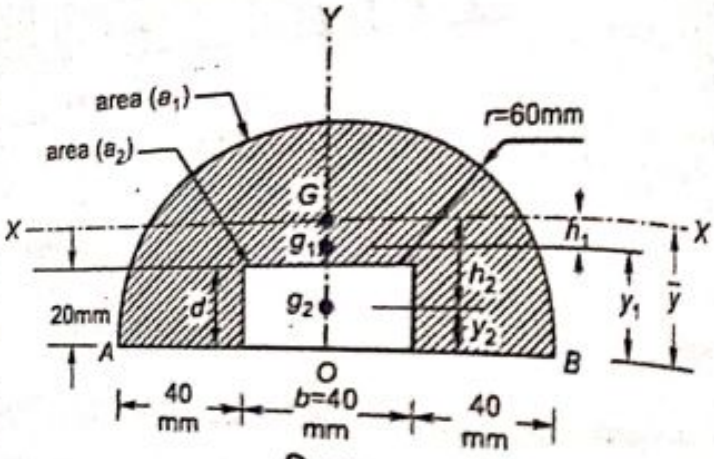
$$= [6075000] - [1260000]$$

$$= 4815000\,mm^4$$

$$= 481{\cdot}5 \times 10^4\,mm^4$$

उत्तर

उदाहरण 13. चित्र 8.24 में एक धरन की काट (cross-section of Beam) दिखाई गई है। इसके गुरुत्व केन्द्र (C.G.) से जाने वाली $X - X$ अक्ष (axis) पर जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) ज्ञात कीजिये।



चित्र 8.24

हल—चित्र 8.24 में दी गई काट $Y - Y$ अक्ष (axis) के सममित (symmetrical) है, अत: $\bar{y}$ ज्ञात करना होगा। अब अर्द्धवृत्त (semicircle) का केन्द्र g_1, क्षेत्रफल (a_1) तथा $Og_1 = y_1$ है। तथा आयत (Rectangle) का केन्द्र g_2, क्षेत्रफल (area) a_2 तथा $Og_2 = y_2$ है। शेष बचे भाग का गुरुत्व केन्द्र (C.G.) G है जिसकी O से दूरी $OG = \bar{y}$ है।

$\therefore$ अर्द्धवृत्त (Semicircle) के लिए, $a_1 = \dfrac{\pi r^2}{2} = \dfrac{\pi (60)^2}{2} = 5652\,mm^2$

$Og_1 = y_1 = \dfrac{4r}{3\pi}$ सूत्र से

$\therefore$ $y_1 = \dfrac{4 \times 60}{3 \times 3{\cdot}14} = 25{\cdot}4777 = 25{\cdot}5\,mm$

आयत (Rectangle) का क्षेत्रफल (area), $a_2 = 40 \times 20 = 800\,mm^2$

तथा $Og_2 = y_2 = \dfrac{20}{2} = 10\,mm$

$\therefore$ $\bar{y} = \dfrac{a_1 y_1 - a_2 y_2}{a_1 - a_2} = \dfrac{5652 \times 25{\cdot}5 - 800 \times 10}{5652 - 800}$

$$= \frac{136126}{4852} = 28\,mm$$

$$h_1 = g_1 G = \bar{y} - y_1 = 28 - 25{\cdot}5 = 2{\cdot}5$$

$$h_2 = g_2 G = \bar{y} - y_2 = 28 - 10 = 18\,mm$$

$\therefore$ $I_{XXG} = [I_{xg1}^{\text{S.circle}} + a_1 h_1^2] - [I_{xg2}^{\text{Rect}} + a_2 h_2^2]$

$$= [0{\cdot}11 r^4 + a_1 h_1^2] - \left[\frac{bd^3}{12} + a_2 h_2^2\right]$$

Scanned with CamScanner

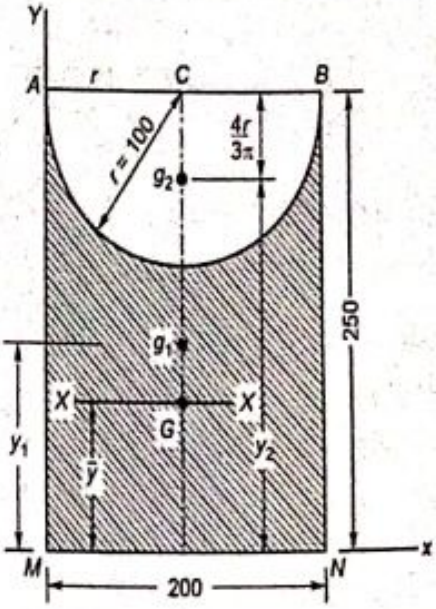
$$= [0{\cdot}11 \times 60^4 + 5652 \times 2{\cdot}5^2] - \left[\frac{40 \times 20^3}{12} + 800 \times 18^2\right]$$

$$= (1460925) - (285866{\cdot}66)$$

$$= 1175058{\cdot}34 \text{ mm}^4$$

$$= 1{\cdot}175 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 1{\cdot}2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$ उत्तर

उदाहरण 14. चित्र 8.25 में छाँयादार भाग (Shaded Area) का गुरुत्व केन्द्र (C.G.) ज्ञात करो तथा छाँयादार भाग (Hatched Area) का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) आधार *MN* के परित: (about *MN*) ज्ञात कीजिये।



चित्र 8.25

हल—चित्र 8.25 में आयत (Rectangle) *ABNM* में से *AB* को व्यास (Diameter) लेकर एक अर्द्धवृत्त (Semicircle) काटा गया है। अब शेष बचे छायादार भाग (Hatched Area) का गुरुत्व केन्द्र (C.G.) की स्थिति ज्ञात करके *MN* पर जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है।

यहाँ आयत (Rectangle) का केन्द्र (centre) g_1, क्षेत्रफल (area) a_1 तथा *MN* से ऊँचाई y_1 है तथा अर्द्धवृत (Semicircle) का गुरुत्व केन्द्र (Centre of gravity) g_2 (जो *AB* से $\frac{4r}{3\pi}$ दूरी पर सूत्र द्वारा होगा।) इसका क्षेत्रफल (area) a_2 तथा *MN* से ऊँचाई y_2 है।

∴ क्षेत्रफल $a_1 = 200 \times 250 = 50{,}000 \text{ mm}^2$ (+ve)

क्षेत्रफल (area) $a_2 = \frac{\pi (100)^2}{2} = 15707{\cdot}96$ (–ve)

(यह भाग काटा गया है)

MN से g_1 की ऊँचाई $y_1 = \frac{250}{2} = 125 \text{ mm}$

MN से g_2 की ऊँचाई $y_2 = \left(250 - \frac{4r}{3\pi}\right) = \left(250 - \frac{4 \times 100}{3 \times 3{\cdot}14}\right) = 207{\cdot}54 \text{ mm}$

∴ $$y = \frac{a_1 y_1 - a_2 y_2}{a_1 - a_2} = \frac{(50000 \times 125 - 15707{\cdot}96 \times 207{\cdot}54)}{(50000 - 15707{\cdot}96)}$$

$$= \frac{2989969{\cdot}982}{34292{\cdot}04} = 87{\cdot}19 \text{ mm}$$ उत्तर

I_{MN} = आयत (Rectangle) का *MN* के परित: जड़त्व-आघूर्ण –
अर्द्धवृत (Semicircle) का *MN* के परित: जड़त्व आघूर्ण

$= [I_{xg_1} + a_1 y_1^2] - [I_{xg_2} + a_2 y_2^2]$, (जहाँ *MN* से g_1 व g_2 की दूरियाँ y_1 व y_2 हैं।)

$$= \left[\frac{200 \times 250^3}{12} + 50000 \times 125^2\right] - [0{\cdot}11 \times (100)^4 + 15707{\cdot}96 \times 207{\cdot}54^2]$$

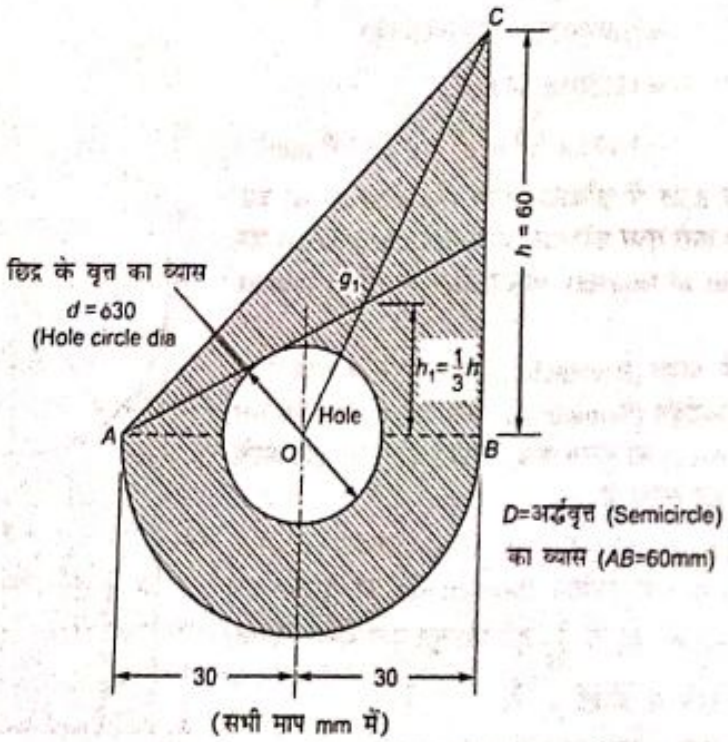
$$= (1041666667) - (687586630)$$

$$= 354080037 \text{ mm}^4$$

$$= 3{\cdot}54 \times 10^8 \text{ mm}^4$$ उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 15. चित्र 8.26 में दिखाये गये पटल (lamina) का छिद्र (Hole) के केन्द्र (Centre) O से जाने वाली अक्ष (axis) AB के परित: (about the axis AB) जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) ज्ञात कीजिये।



चित्र 8.26

हल—माना I_{XX_1}, I_{XX_2} तथा I_{XX_3} क्रमश: त्रिभुज (Triangle) ABC, अर्द्धवृत (Semi Circle) तथा वृत्ताकार छिद्र (Circular Hole) के जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertial) AB, के परित: है।

$\therefore$ $I_{XX} = I_{XX_1} + I_{XX_2} - I_{XX_3}$ होगा।

यहाँ $$I_{XX_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{60 \times 60^3}{12} = 1080000 \text{ mm}^4$$

$$I_{XX_2} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi D^4}{64} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi (60)^4}{64} = 317925 \text{ mm}^4$$

तथा $$I_{XX_3} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi (30)^4}{64} = 39740 \cdot 625 \text{ mm}^4$$

$\therefore$ AB पर $$I_{XX} = I_{XX_1} + I_{XX_2} - I_{XX_3}$$

$$= 1080000 + 317925 - 39740 \cdot 625$$

$$= 1358184 \cdot 375 \text{ mm}^4 = 13 \cdot 58 \times 10^5 \text{ mm}^4$$ उत्तर

दूसरी विधि (IInd Method)

ΔABC के गुरुत्व केन्द्र (C.G.) अर्थात् g_1 पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.)

$$I_{Xg_1} = \frac{bh^3}{36} = \frac{60 \times (60)^3}{36} = 360000 \text{ mm}^4$$

अब ΔABC का AB पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I. about AB)

Scanned with CamScanner

$$I_{XX_1} = [I_{Xg_1} + a_1 h_1^2] \qquad (\text{जहाँ } a_1 = \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल है।}$$

तथा h_1 = केन्द्र g_1 की AB से दूरी है।)

$$= 360000 + \frac{60 \times 60}{2} \times \left(\frac{1}{3} \times 60\right)^2$$

$$= 360000 + 720000 = 1080000$$

अर्द्धवृत (Semi circle) का AB अक्ष (axis) पर जड़त्वाघूर्ण (M.O.I.)

$$I_{XX_2} = 0{\cdot}11 \times (30)^4 + \frac{\pi (60)^2}{8} \times \left(\frac{4 \times 30}{3\pi}\right)^2$$

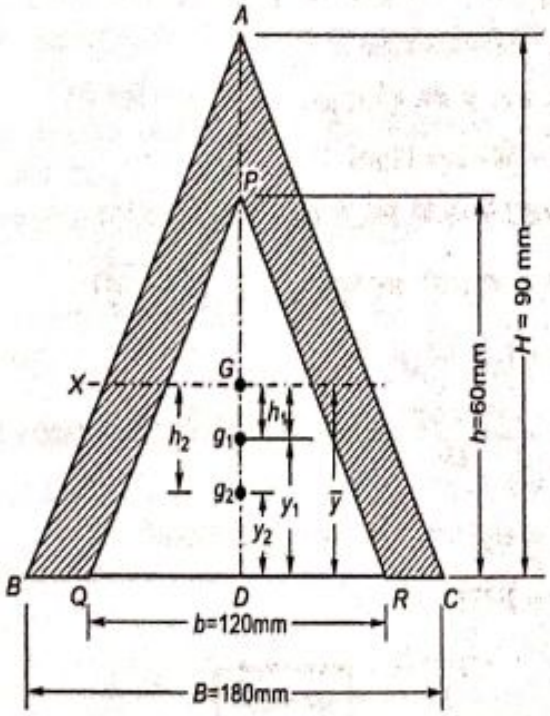
$$= 318399{\cdot}3631$$

$$I_{XX_3} = \frac{\pi (30)^4}{64} = 39740{\cdot}625 \qquad (\text{वृत्ताकार छिद्र का})$$

$$I_{XX} = I_{XX_1} + I_{XX_2} - I_{XX_3}$$

$$= 1358658{\cdot}738\ \text{mm}^4 = 13{\cdot}58 \times 10^5\ \text{mm}^4 \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 16. चित्र 8.27 में एक खोखली त्रिभुजाकार काट (Hollow Triangular Section) दिखाया गया है। जो y-axis के सममित (Symmetrical) है। (i) इसके आधार (Base) BC पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) ज्ञात कीजिये।



चित्र 8.27

(ii) इसके गुरुत्व केन्द्र (C.G.) G से जाने वाली क्षैतिज अक्ष पर भी जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) I_G ज्ञात कीजिये।

हल—∵ हम जानते हैं कि आधार भुजा पर त्रिभुज का

$$\text{जड़त्व-आघूर्ण} = \frac{\text{चौड़ाई (Width)} \times \text{ऊँचाई (height)}^3}{12} \quad \text{सूत्र}$$

$\therefore$ I_{BC} = बड़े Δ का BC पर M.O.I. – छोटे Δ का आधार भुजा पर M.O.I.

Scanned with CamScanner

$$= \frac{B \times H^3}{12} - \frac{b \times h^3}{12}$$

$$= \frac{180 \times 90^3}{12} - \frac{120 \times 60^3}{12} = 10{\cdot}935 \times 10^6 - 2{\cdot}16 \times 10^6$$

$$= 8775000 = 8{\cdot}775 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

उत्तर

(ii) ∵ a_1 = बड़े Δ का क्षेत्रफल $= \frac{180 \times 90}{2} = 8100 \text{ mm}^2$

a_2 = छोटे Δ का क्षेत्रफल $= \frac{120 \times 60}{2} = 3600 \text{ mm}^2$

आधार BC से बड़े Δ के केन्द्र g_1 की ऊँचाई $y_1 = \frac{1}{3} \times 90 = 30 \text{ mm}$

आधार BC से छोटे Δ के गुरुत्व केन्द्र g_2 की ऊँचाई $y_2 = \frac{1}{3} \times 60 = 20 \text{ mm}$

BC से गुरुत्व केन्द्र (G) की ऊँचाई $\bar{y} = \frac{a_1 y_1 - a_2 y_2}{a_1 - a_2} = \frac{8100 \times 30 - 3600 \times 20}{8100 - 3600}$

∴ $\bar{y} = 38 \text{ mm}$

∴ g_1 व G के बीच दूरी (Gap) $h_1 = \bar{y} - y_1$ (चित्र से)

$h_1 = 38 - 30 = 8 \text{ mm}$

तथा g_2 व G के बीच दूरी (Gap) $h_2 = \bar{y} - y_2$ (चित्र से)

$h_2 = 38 - 20 = 18 \text{ mm}$

∴ बड़े Δ ABC का G की अक्ष पर $I_{XX_1} = [I_{Xg_1} + a_1 h_1^2]$

तथा छोटे Δ PQR का G की अक्ष पर $I_{XX_2} = [I_{Xg_2} + a_2 h_2^2]$

∴ खोखले Δ का $I_{XX} = I_{XX_1} - I_{XX_2}$

$$I_{XX} = \left[\frac{180 \times 90^3}{36} + 8100 \times 8^2\right] - \left[\frac{120 \times 60^3}{36} + 3600 \times 18^2\right]$$

$$= 4163400 - 1886400 = 2277000 \text{ mm}^4$$

$$= 2{\cdot}277 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

उत्तर

प्रश्नावली

1. निम्न रिक्त स्थान भरो (Fill in the blanks)—

(a) किसी अक्ष (axis) के सापेक्ष एक छोटे पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) उसके द्रव्यमान (mass) तथा अक्ष से दूरी के ..... के गुणनफल के बराबर होता है।

(b) समान्तर अक्ष प्रमेय (Parallel axis theorem) के अनुसार—

$I_{XX} = I_G + A.x$..... (उत्तराखण्ड 2010-S)

(c) अभिलम्ब अक्ष प्रमेय (Perpendicular Axis Theorem) के अनुसार—

I_{ZZ} = ...+..... (उत्तराखण्ड 2009-S)

Scanned with CamScanner

(d) अभिलम्ब अक्ष प्रमेय (Perpendicular Axis Theorem) का उपयोग ..... के जड़त्व आघूर्ण प्राप्त करने के लिये किया जाता है। **(U.K. 2011-S)**

(Theorem of perpendicular axis is used in obtaining the moment of inertia of ..... lamina.)

(e) किसी काट का जड़त्व आघूर्ण (I) तथा काट के गुरुत्व केन्द्र (G) से अधिकतम दूरी वाले किनारे (परत) की दूरी (y) के अनुपात को ..... कहते हैं।

(f) एक आयताकार काट की आकृति मापांक (Modulus of section) ..... होता है जबकि b चौड़ाई एवं d आयताकार काट की गहराई हो। **(U.K. 2011-S)**

(g) एक d व्यास (Diameter d) के वृत्त (circle) का आकृति मापांक (section modulus) ..... होता है। **(U.K. 2010-W)**

(h) एक खोखले वृत्ताकार तल (Hollow Circular Lamina) का बाहरी व्यास (Outer diameter) D तथा आन्तरिक व्यास (Internal diameter) d है तब $I_{XX} = I_{YY} =$ ..... होता है।

(i) एक खोखले आयताकार की बाहर से चौड़ाई (B) और गहराई D है तथा अन्दर से चौड़ाई b और गहराई d है तो चौड़ाई के समान्तर वाली $X - X$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण $I_{XX} =$ ..... होता है।

(j) किसी त्रिभुजाकार आकृति (Triangular Section) जिसका आधार (b) तथा ऊँचाई (h) है, की उसके केन्द्र (centroid) से जाने वाले अक्ष (axis), जो आधार के समानान्तर है, के परित: जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.), $I_{XX} =$ ..... होता है।

(k) एक त्रिभुजाकार काट (Triangular Section) का आधार (b) तथा ऊँचाई (h) है। इसके आधार भुजा पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) $I_{Base} =$ ..... होता है।

(l) एक अर्द्धवृत्तीय काट (Semi Circular Section) के गुरुत्व केन्द्र (G) से जाने वाली अक्ष (axis) पर $I_{GXX} =$ ..... होता है।

(m) एक अर्द्धवृत्तीय पटल (Semi Circular Lamina) के आधार के व्यास (Diameter of base) d पर जड़त्व आघूर्ण $I_{BASE} =$ ..... होता है।

(n) वृत्त के एक चौथाई भाग (Quarter Part of Circle i.e. Quadrant) के गुरुत्व केन्द्र (G) से जाने वाली अक्षों (axes) पर $I_{XX} = I_{YY} =$ ..... होता है।

(p) जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.) का मात्रक (Unit) ..... होता है।

(q) आकृति मापांक की इकाई ..... होती हैं। **(यू०के० 2014, S)**

रिक्त स्थानों के उत्तर

(a) वर्ग (Square) (b) h^2 (c) $I_{XX} + I_{YY}$ (d) वर्गाकार पटल (Square Lamina)

(e) आकृति मापाँक (Section Modulus) (f) $\frac{I}{y} = \frac{bd^2}{6}$ (g) $\frac{I}{y} = \frac{\pi d^3}{32}$ (h) $\frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$

(i) $I_{XX} = \left(\frac{BD^3}{12} - \frac{bd^3}{12}\right)$ (j) $\frac{b \times h^3}{36}$ (k) $\frac{b \times h^3}{12}$ (l) $0{\cdot}11 \times r^4$

(m) $\frac{1}{2} \times \frac{\pi d^4}{64} \Rightarrow \frac{\pi d^4}{128}$ (n) $0{\cdot}055\, r^4$ (p) $(mm)^4$ या m^4 (q) $(mm)^3$ या m^3

2. जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) तथा द्वितीय आघूर्ण क्षेत्रफल को परिभाषित कीजिये। **(उ० प्र० 2014)**

3. आकृति मापांक (Section Modulus) को परिभाषित कीजिये तथा इसका मात्रक बताइये।
संकेत—$Z = \frac{I}{y}$

4. परिभ्रमण त्रिज्या (Radius of gyration) को समझाइये तथा मात्रक बताइये। **(यू०के० 2014, S) (उ० प्र० 2014)**
संकेत—$K = \sqrt{\frac{I}{A}}$ सूत्र

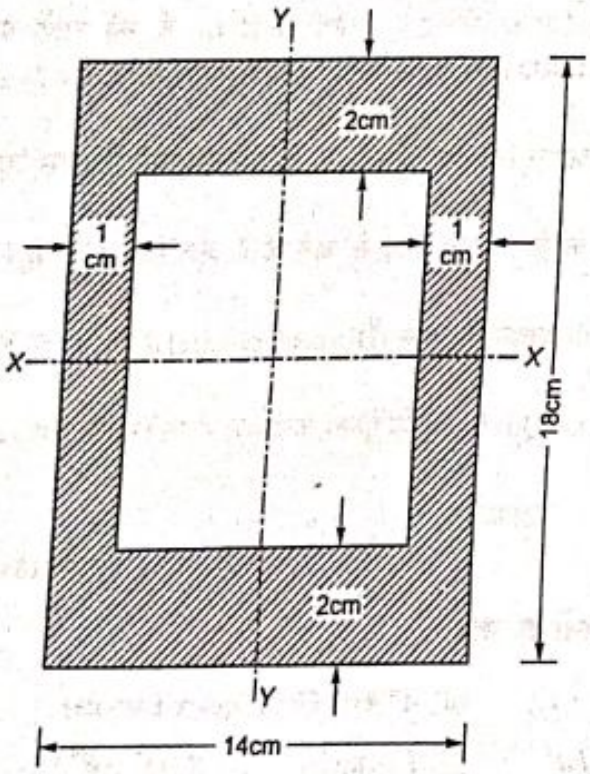
Scanned with CamScanner

5. समानान्तर अक्ष प्रमेय (Parallel Axis Theorem) को लिखिए तथा चित्र सहित सिद्ध कीजिए कि $I_{XX} = I_{GG} + Ah^2$ सूत्र
(U.K. 2009-W; 11-S, 2014-S)

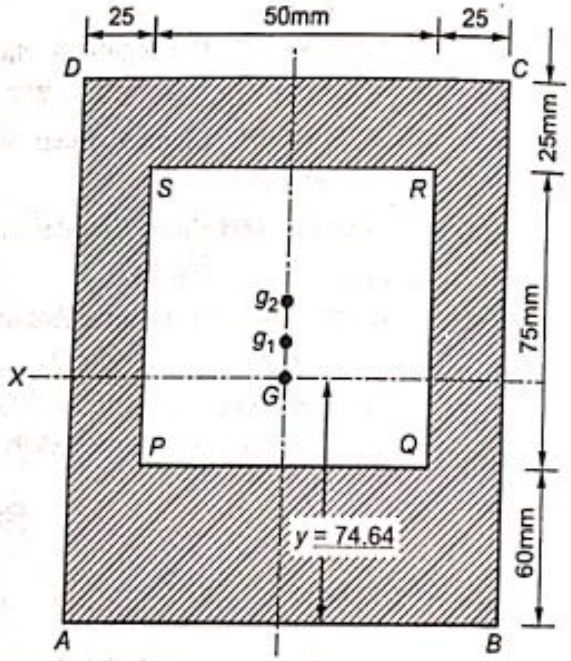
6. अभिलम्ब अक्ष प्रमेय (Perpendicular Axis Theorem) को परिभाषित कीजिये तथा सिद्ध कीजिये—
$$I_{ZZ} = I_{XX} + I_{YY}$$ (U.K. 2008-S; 12-W; 13-W)
जहाँ, $I_{ZZ} = Z-Z$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I. about $Z-Z$ axis)
$I_{XX} = X-X$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I. about $X-X$ axis)
$I_{YY} = Y-Y$ अक्ष पर जड़त्व आघूर्ण (M.O.I. about $Y-Y$ axis)

7. समान्तर अथा अभिलम्ब अक्ष प्रमेयों (Theorems of Parallel & Perpendicular axes) को केवल परिभाषित कीजिये तथा सूत्र लिखिये।

8. चित्र 8.28 में दिखाई गई खोखली आयताकार काट (Hollow Rectangular Section) का जड़त्व आघूर्ण I_{XX} तथा I_{YY} कीजिये। (U.K. 2005-S)
उत्तर—$I_{XX} = 4060\,\text{cm}^4$ तथा $I_{YY} = 2100\text{cm}^4$



चित्र 8.28



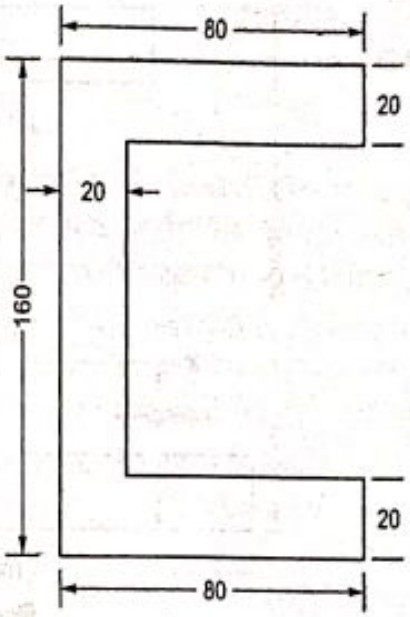
चित्र 8.29

9. चित्र 8.29 में दिखाई गई खोखली आयताकार काट (Hollow Rectangular Section) के गुरुत्व केन्द्र से जाने वाली $X-X$ axis पर जड़त्व आघूर्ण I_{XX} ज्ञात कीजिये। जबकि काट के निचले किनारे AB से गुरुत्व केन्द्र G की ऊँचाई 74·64 mm है।
[संकेत—AB से g_1 की ऊँचाई $y_1 = 80\,\text{mm}$
AB से g_2 की ऊँचाई $y_2 = 97{\cdot}5\,\text{mm}$
अब g_1 व G के बीच दूरी (gap) $\Rightarrow h_1 = y_1 - \bar{y}$
तथा g_2 व G के बीच दूरी $h_2 = y_2 - \bar{y}$
$I_{XX} = [I_{Xg_1} + a_1h_1^2] - [I_{Xg_2} + a_2h_2^2]$
$= 34219093{\cdot}33 - 3717486$
$= 30501607{\cdot}33\text{mm}^4 \Rightarrow 30{\cdot}5 \times 10^6\ \text{mm}^4$] उत्तर

Scanned with CamScanner

10. चित्र 8.30 में दिखाई गई चैनल काट (channel section) का $\bar{X}, \bar{Y}, I_{XX}$ तथा I_{YY} ज्ञात कीजिये। **(U.K. 2012-S)**

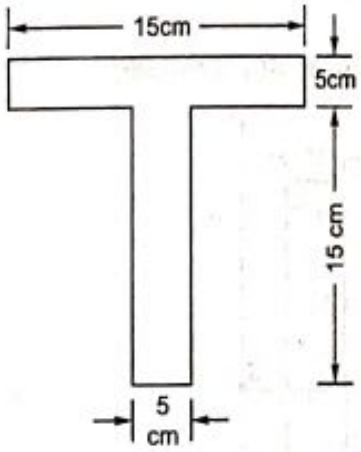
उत्तर—$\bar{X} = 27{\cdot}14$ mm, $\bar{Y} = 80$ mm, $I_{XX} = 18{\cdot}666 \times 10^6$ mm^4 तथा $I_{YY} = 3{\cdot}021 \times 10^6$ mm^4



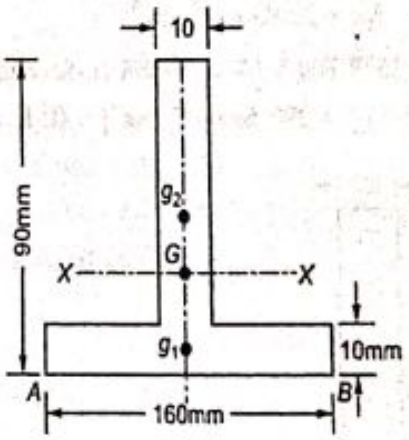
चित्र 8.30

11. चित्र 8.31 में दिखाई गई T-काट (T-Section) का, उसके गुरुत्व केन्द्र (C.G.) से जाने वाली $X - X$ अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण I_{XX} ज्ञात कीजिये। I_{YY} भी ज्ञात कीजिये। **(U.K. 2008-S, 09-W, 10-W)**

उत्तर—$I_{XX} = 5312{\cdot}5 \times 10^4$ mm^4, $I_{YY} = 1562{\cdot}5 \times 10^4$ mm^4



चित्र 8.31



चित्र 8.32

12. चित्र 8.32 में दिखाई गई उल्टी टी-काट (Inverted T-Section) का उसके गुरुत्व केन्द्र (G) से होकर जाने वाली $X - X$ अक्ष के परित: (about the centroidal $X - X$ axis) जड़त्व-आघूर्ण (Moment of Inertia) ज्ञात कीजिये।

(U.K. 2011-S)

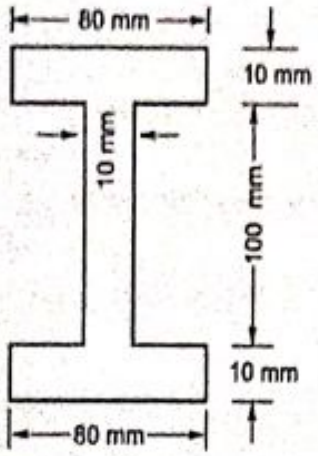
[उत्तर—$I_{XX} = 1520000$ mm$^4 = 15{\cdot}2 \times 10^5$ mm^4]

Scanned with CamScanner

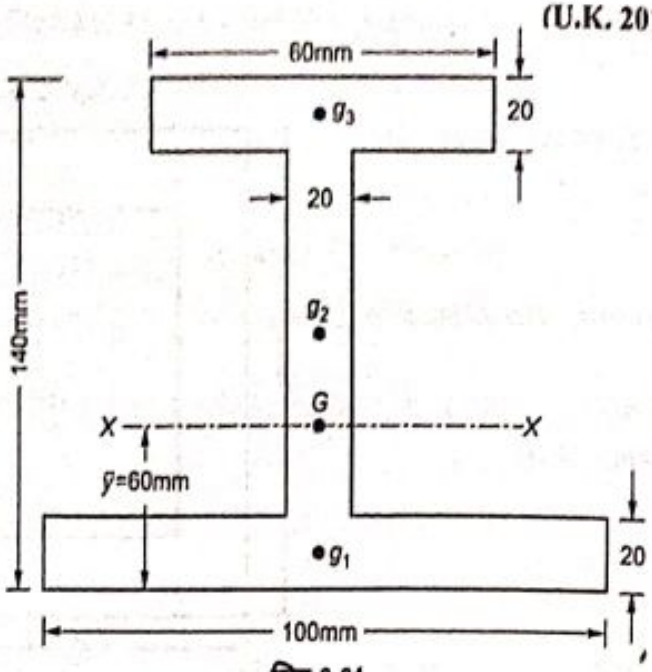
13. चित्र 8.33 में दिखाये गये I-काट के गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाली अक्षों के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (I_{XX} तथा I_{YY}) ज्ञात कीजिये। **(U.K. 2013-S)**

उत्तर— $I_{XX} = 5{\cdot}686 \times 10^6$ mm^4

$I_{YY} = 8{\cdot}6166 \times 10^5$ mm^4



चित्र 8.33



चित्र 8.34

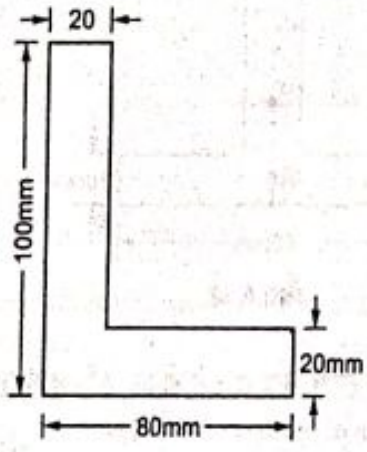
14. चित्र 8.34 में दिखाई गई I-काट (I-Section) का $X-X$ अक्ष के परित: (about the $X-X$ axis) जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) ज्ञात कीजिये। इसका गुरुत्व केन्द्र (C.G.) निचले किनारे से 60 mm की दूरी पर है। I_{YY} भी ज्ञात कीजिये।

उत्तर— $I_{XX} = 12{\cdot}853 \times 10^6$ mm^4

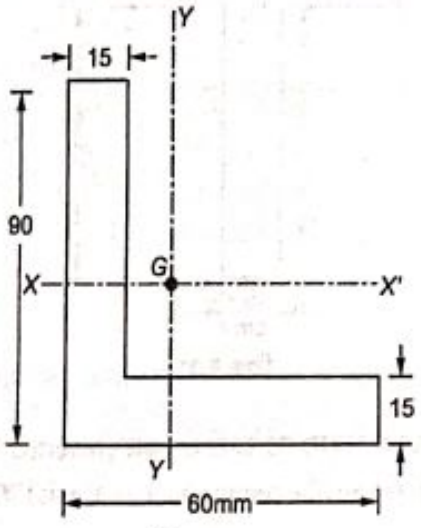
$I_{YY} = 20{\cdot}93 \times 10^5$ mm^4

15. चित्र 8.35 में दिखाये गये L-परिच्छेद (L-Section) का $X-X$ axis के परित जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करो।

[**उत्तर**— $I_{XX} = 290{\cdot}66 \times 10^4$ mm^4] **(U.K. 2013-S)**



चित्र 8.35



चित्र 8.36

16. चित्र 8.36 में दिखाई गई L-काट (L-Section) के गुरुत्व केन्द्र (G) से जाने वाली अक्षों (axes) पर I_{XX} तथा I_{YY} ज्ञात कीजिये।

उत्तर— $\bar{X} = 17{\cdot}5$ cm, $\bar{Y} = 32{\cdot}5$ cm, $I_{XX} = 797343{\cdot}75$ cm^4 तथा $I_{YY} = 1303593{\cdot}8$ cm^4

❑

Scanned with CamScanner

9 ट्रसों या कैंचियों का विश्लेषण
(ANALYSIS OF TRUSSES OR FRAMES)

§ 9.1. परिचय (Introduction)

1. धरन (Beams)—**"समान अनुप्रस्थ काट (Cross Section) वाली छड़ (Bar) को उस स्थिति में धरन (Beam) कहते हैं जब उस पर लगने वाले भार या बल उसकी अनुदैर्ध्य अक्ष (Longitudinal Axis) के लम्बरूप कार्य करते हैं अथवा वे छड़ की लम्बाई की अक्ष से गुजरने वाले ऊर्ध्वाधर समतल (Vertical Plane) में होते हैं।"**

धरन की लम्बाई काट की मापों की तुलना में बहुत अधिक होती है। धरन में काट की गहराई, काट की चौड़ाई से अधिक रखने पर अधिक सामर्थ्यवान होती है। धरन का उपयोग पुलों या छतों में भारों को वहन करने के लिये किया जाता है। छतों में प्रयोग की जाने वाली कड़ियाँ धरन के प्रमुख उदाहरण हैं। धरन पर लगाया गया भार उसकी टेकों पर स्थानान्तरित हो जाता है।

2. कैंची या ढाँचे की संकल्पना (Concept of a Truss or Frame)—इंजीनियरिंग क्षेत्र में भारों को सहारना एक अति महत्वपूर्ण कार्य होता है। छोटे अवकाशों (Openings) के लिए धरनों या छड़ों का प्रयोग छतों को सहारने के लिए किया जाता है। कुछ परिस्थितियों में भारों को बड़े-बड़े अवकाशों (Openings) पर सहारने की आवश्यकता पड़ती है; जैसे—नदी या नहर पर पुल, फैक्ट्री या बड़े-बड़े हॉल की छत तथा ऊँचाई पर उच्च वोल्टता के तार ले जाने के लिए खम्भे आदि। अत: इन परिस्थितियों में धरनों का प्रयोग न करके ढाँचों (Frames) या कैंचियों (Trusses) का प्रयोग किया जाता है। जैसे ट्रस की सहायता से रेलवे पुलों, फैक्ट्रियों की छतों, बड़े हॉल की छतों, क्रेनों तथा रेलवे शेड्स आदि में इनका प्रयोग किया जाता है।

3. ढाँचा (Frame)—अनेक सीधी छड़ों को सिरों पर पिनों या रिवेटों से जोड़कर बनायी गयी संरचना (Structure) को ढाँचा (Frame) कहते हैं। जैसे—किसी मशीन में ढाँचा उसके चल अंगों (Moving Parts) को सहारता है।

4. कैंची (Truss)—अनेक सीधी छड़ों को सिरों पर पिनों, रिवेटों या नट-बोल्टों की सहायता से एक दूसरे के साथ जोड़कर त्रिभुजाकार आकृतियों में बनायी गयी ढाँचा संरचना (Structure) को कैंची कहते हैं। ढाँचा या कैंची की प्रत्येक छड़ को उसका अवयव (Member) कहते हैं। इनका उपयोग फैक्ट्री या बड़े हॉल (Hall) की छतों, रेलवे पुलों, हाई वोल्टेज लाइन टावर में अधिकतर होता है।

A structure which is formed by the assembling of straight and rigid bars jointed together at their ends in triangular shapes, is called truss/frame. It is used in roads, railway bridge & Towers.

5. तान (Tie), कॉलम (Column) तथा स्ट्रट (Strut)—किसी ढाँचे या कैंची के जोडों (Joints) पर लगे भार (Loads) उसके अवयवों (Members) पर अपना प्रभाव (Effect) दो प्रकार से डाल सकते हैं—

(i) तनाव बल (Tensile Force) के रूप में।

(ii) सम्पीडन बल (Compressive Force) के रूप में।

(i) तान अंग (Tie Rod)—जब किसी सदस्य (Member) पर तनाव बल लगता है तो उस सदस्य को तान (Tie) कहते हैं। अर्थात् प्रत्येक तान छड़ खिंचाव (Pull) में होती है।

(ii) कॉलम (Clumn)—किसी ट्रस (Truss) का वह सदस्य जो ऊर्ध्वाधर स्थिति में स्थित होता है तथा उस पर अक्षीय सम्पीडन भार (Axial Compressive Load) या उत्केन्दित भार (Eccentric Load) कार्य करते हैं, को कॉलम (Column) कहते हैं।

(iii) स्ट्रट (Strut)—किसी ट्रस (Truss) का वह सदस्य जो ऊर्ध्वाधर स्थिति में स्थित न होकर अन्य किसी स्थिति में स्थिति होता है एवं उस पर कार्य करने वाले भार केवल अक्षीय सम्पीडन भार होते है, को स्ट्रट (Strut) कहते हैं।

§ 9.2. धरन या कैंची की टेकों के प्रकार (Types of Supports of the Beam or Truss)

धरन की टेकें (Supports) मुख्य रूप से तीन प्रकार की होती है—

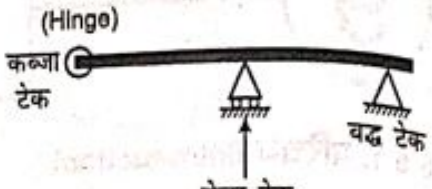
(1) सरल या रोलर टेक (Simple or Roller Support),

(2) कब्जेदार या पिन-टेक (Hinged or Pin Support),

Scanned with CamScanner

(3) आबद्ध टेक (Fixed Support or Built-in Support)।

(1) सरल या रोलर टेक (Simple or Roller Support)—सरल टेक (Simple or Free Support) की स्थिति में धरन या कैंची (Truss) के दोनों सिरो को चित्र के अनुसार दो दीवारो या अन्य स्तम्भो की ऊपरी चपटी सतह पर सहारा जाता है। इसे चपटी टेक (Flat Support) भी कहते हैं।



चित्र 9.1

रोलर टेक, चित्र 9.1 के अनुसार एक समतल सतह ऊपरी चपटी समह पर सहारा जाता है। इसे चपटी टेक (Flat Surface) और उस पर रखे रोलर (Roller) से बनायी जाती है। रोलर टेक क्षैतिज बलो के लिये कोई भी प्रतिक्रिया उत्पन्न नहीं करती है और न ही संरचना (Structure) को अक्षीय (Longitudinal) दिशा में सरकने से रोकती है। रोलर की प्रतिक्रियायें सदैव धरन (Beam) की अक्ष के लम्ब-रूप होती है, चाहे भार किसी भी कोण पर अवनत (Inclined) लगे हो।

(2) कब्जेदार या पिन टेक (Hinged or Pin Support)—कब्जेदार टेक एक कब्जे (Hinge) की तरह होती है। देखें चित्र 9.1 इस प्रकार की टेक किसी भी दिशा में प्रतिक्रिया दे सकती है। इस टेक पर प्रतिक्रिया (Reaction) के कार्य करने की दिशा धरन पर लगे भारो की स्थिति पर निर्भर करती है, अर्थात् किसी कोण पर तिरछे (Inclined) भार लगे होने पर प्रतिक्रिया भी क्षैतिज से अवनत या तिरछी होती है तथा अक्ष के लम्ब-रूप भार लगे होने पर प्रतिक्रिया भी ऊर्ध्वाधर होती हैं। कब्जेदार टेक पर धरन केवल घूम सकती है परन्तु दायें-बायें सरक नहीं सकती और न ही ऊपर उठ सकती है।

(3) आबद्ध टेक (Fixed Support)—यदि किसी धरन के एक सिरे A को या दोनों सिरों A तथा B को किसी दीवार या स्तम्भ में बद्ध (Fixed or Built up) किया जाये तो सिरों की टेकों को आबद्ध टेक (Fixed Support) कहते हैं। यह टेक धरन पर किसी भी दिशा में लगे बलों को सहन कर सकती है बद्ध टेक पर प्रतिक्रिया के कार्य करने की दिशा कब्जेदार टेक की भाँति धरन पर लगे भारों की स्थिति पर निर्भर करती है, अर्थात् प्रतिक्रियायें किसी भी दिशा में हो सकती हैं।

§ 9.5. ढाँचों का वर्गीकरण (Classification of Frames)

सभी ढाँचों को निम्न प्रकार विभाजित किया गया है—

(1) पूर्ण ढाँचा या ट्रस (Perfect Frame or Truss)—जिस ढाँचे (Frame) या कैंची (Truss) में केवल उतने ही सदस्य हों जितने कि उसके द्वारा सफलतापूर्वक (बिना असफल हुए) भार (Load) को उठाने के लिये आवश्यक होते हैं, उसे पूर्ण ढाँचा (Perfect Frame) कहते हैं। पूर्ण ढाँचा या पूर्ण ट्रस होने के लिए निम्न सूत्र अवश्य सन्तुष्ट होना चाहिये—

$$\boxed{\text{“}N = 2J - 3\text{”}}$$ सूत्र

जहाँ N = ढाँचे या ट्रस में सदस्यों की संख्या,

तथा J = ढाँचे या ट्रस में जोड़ों की संख्या है।

बाह्य बल या भार (Load) लगाने से पूर्ण ढाँचे या ट्रस के आकार में परिवर्तन नहीं होता है अर्थात् वह असफल (Fail) नहीं होता है।

Perfect Frame—The structure is said to be perfect if the number of the members is just sufficient to prevent its distortion of shape when it is subjected to external loads,

A perfect frame satisfies the following formula

$$\boxed{m \text{ or } N = 2J - 3}$$

Where m or N = Number of members in the truss

J = Number of Joints

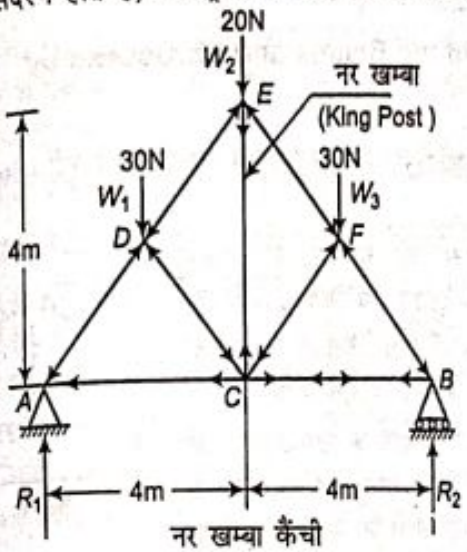
नर खम्बा कैंची (King Post Truss) तथा मादा खम्बा कैंची (Queen Post Truss) भी पूर्ण ढाँचा (Perfect Frame) के अन्तर्गत आते हैं जिन्हें चित्रों 9.2 व 9.3 में दर्शाया गया है।

चित्र के अनुसार इन ट्रसों में, $J = 6$ तथा $N = 9$ है।

Scanned with CamScanner

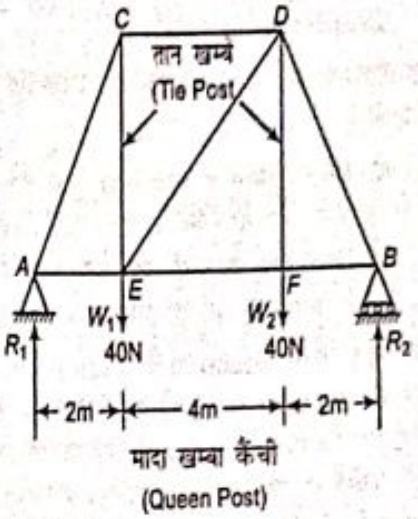
अत: सूत्र $N = 2J - 3$ में मान रखने पर यह सम्बन्ध सूत्र सन्तुष्ट होता है। इसीलिए ये पूर्ण ट्रस (Perfect Frame) के अन्तर्गत आते हैं।

नर खम्बा कैंची (King Post Truss) तथा मादा खम्बा कैंची (Queen Post Truss)—जिस कैंची के मध्य में कोई एक ऊर्ध्वाधर सदस्य (Vertical Member) होता है, उस ट्रस को **नर खम्बा कैंची** कहते हैं तथा जिस ट्रस (Truss) में दो ऊर्ध्वाधर तान (Tie) सदस्य होते हैं, उस ट्रस को **मादा खम्बा कैंची** कहते हैं। दोनों प्रकार के ट्रस चित्र 9.2 व 9.3 में दर्शाये गये हैं।



नर खम्बा कैंची
(King Post Truss)

चित्र 9.2



मादा खम्बा कैंची
(Queen Post)

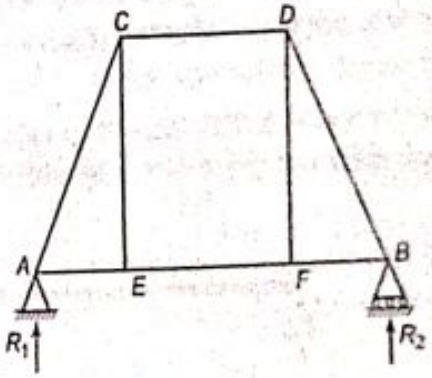
चित्र 9.3

(2) अपूर्ण ढाँचा या ट्रस (Imperfect Frame or Truss)— जिस ढाँचे या ट्रस में उसके अवयवों (Members) की संख्या उसे स्थायी सन्तुलन में रखने के लिये आवश्यक सदस्यों या अवयवों की संख्या से कम या अधिक होती है तो उसे अपूर्ण ढाँचा या ट्रस कहते हैं। यह दो प्रकार की होती हैं—

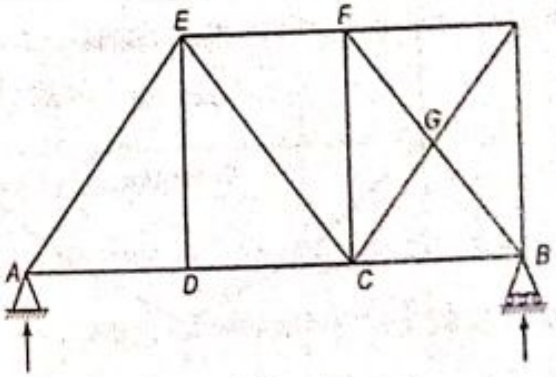
(i) **अभाव ढाँचा या ट्रस (Deficient Frame or Truss)**—यदि किसी ढाँचे या ट्रस में सदस्यों की संख्या, उसे सन्तुलन में रखने के लिये आवश्यक सदस्यों की संख्या से कम होती है तो उसे अभाव ढाँचा कहते हैं। इस प्रकार के ढाँचों में N का मान $(2J - 3)$ से कम होता है। अभाव ढाँचे पर भार लगाने से उसके आकार में परिवर्तन हो जाता है अर्थात् वह असफल (Fail) हो जाता है। देखें चित्र (9.4)।

Imperfect or Deficient Frame—A Structure is said to be imperfect, if the number of the members is less than that required for a perfect frame. So it will be as per, m or $N < (2J - 3)$ condition.

(ii) **अतिरिक्त ढाँचा या ट्रस (Redundant Frame or Truss)**—यदि किसी ढाँचे या ट्रस में सदस्यों की संख्या उसे सन्तुलन में रखने के लिये आवश्यक सदस्यों की संख्या में अधिक होती है तो उसे



चित्र 9.4 अपूर्ण ढाँचा
(Imperfect Frame)



चित्र 9.5 अतिरिक्त ढाँचा (ट्रस)
(Redundant Frame/Truss)

Scanned with CamScanner

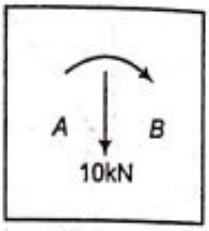
अतिरिक्त ढाँचा (Reduandant Frame) कहते हैं। इस प्रकार के ढाँचों में N का मान $(2J - 3)$ से अधिक होता है अर्थात् सम्बन्ध सूत्र सन्तुष्ट नहीं होता। देखें चित्र (9.5)।

Redundant Frame—A structure is said to be redundant frame, if the number of the members is more than that required for a perfect frame. So it will be as per, m or $N > (2J - 3)$ condition.

9.4. ग्राफीय विधि द्वारा धरनों तथा कैंचियों में प्रतिक्रियायें ज्ञात करना (Determination of Reactions at the Supports of the Beams and Thrussess by Graphical Method)

यह प्रतिक्रिया ज्ञात करने की एक अति सरल एंव क्रमबद्ध (Systematic) विधि है। यह विधि निम्नलिखित पदों (Steps) में पूर्ण की जाती है

(1) बो-संकेत (Bow's Notaion) : बो-संकेत के अनुसार, किसी बल या भार को उसकी क्रिया-रेखा के दोनों ओर के स्थनों के नाम देकर अंकित करते हैं; जैसे—दर्शाये गये चित्र 9.6 में बल 10 kN ↓ की क्रिया-रेखा के बायीं तथा दायीं ओर के स्थानों के नाम A और B लिखकर दक्षिणावर्त (Clockwise) के क्रम (Serial) से नाम पढ़कर उसे AB नाम से पुकारते हैं एवं अंकित करते हैं।

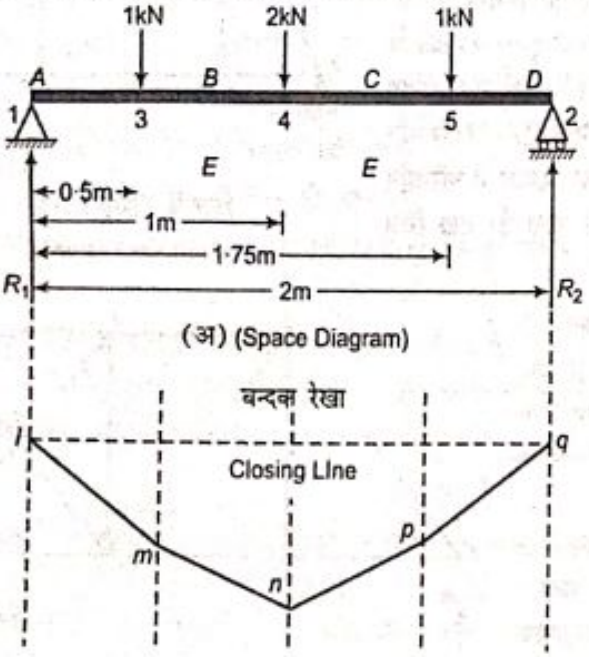


चित्र 9.6

अत: किसी धरन (Beam) या कैंची (Truss) पर लगे बलों के बीच के स्थानों के नाम उनके चारों ओर दक्षिणावर्त (Clockwise) घुमते हुए लिखते हैं और प्रत्येक बल के क्रिया-बिन्दु पर तथा ट्रस के प्रत्येक जोड़ पर दक्षिणावर्त (Clockwise) घूमकर ही नाम पढ़ते हैं। इस प्रकार बलों के संकेतन द्वारा नाम लिखना तथा पढ़ना बो-संकेत कहलाता है। चित्र 9.7 तथा चित्र 9.8 में क्रमश: धरन तथा कैंची के चित्रों में बो-नोटेशन के आधार पर बलों के बीच के स्थानों के नाम प्रदर्शित किये गये हैं।

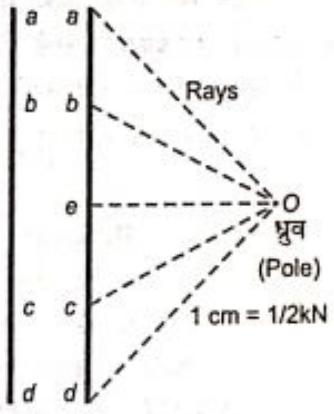
धरन के चित्र 9.7 (अ) में दिये गये पहले बल 1 kN को बो-नोटेशन के आधार पर AB द्वारा, दूसरे बल 2kN को BC द्वारा, तीसरे बल 1 kN को CD द्वारा तथा टेक D की प्रतिक्रिया R_2 को DE द्वारा पढ़ा जायेगा। याद रहे **"प्रत्येक बल या प्रतिक्रिया बिन्दु पर नाम पढ़ने के लिये दक्षिणावर्त (Clockwise) घूमकर ही नाम पढ़ते हैं तथा बल की क्रिया-रेखा के ओर के अक्षर उस बल के नाम में सम्मिलित किये जाते हैं।**

(2) स्थान आरेख (Space Diagram) : कोई उचित पैमाना मानकर धरन या कैंची (Beam or Truss) को ड्राइंग यन्त्रों से शुद्ध आकार में बनाते हैं तथा इन पर लगे बलों को प्रश्न में दी गयी दिशाओं में दर्शाते हैं। यह चित्र ही धरन या कैंची का स्थान आरेख



(अ) (Space Diagram)

(द) (Funicular Polygon)



(ब) (Luad Line) (स) (Polar Diagram)

चित्र 9.7 (अ)-(द)

Scanned with CamScanner

(Space Diagram) कहलाता है। चित्र 9.7 (अ) तथा चित्र 9.8 (अ) में क्रमश: धरन तथा कैंची के स्थान आरेख दिखाये गये हैं, जिनमें बो-नोटेशन के आधार पर ज्ञात बलों के बीच के स्थानों के नाम प्रदर्शित किये गये हैं।

(3) भार रेखा (Load Line): स्थान आरेख बनाने के पश्चात् धरन या ट्रस पर ज्ञात बलों के लिये माने गये उचित पैमाने पर रेखायें, बलों की दिशाओं में खींचते हैं तथा बो-नोटेशन के आधार पर उनके नाम प्रदर्शित करते हैं। इस प्रकार प्राप्त रेखा को भार रेखा (Load Line) कहते हैं।

चित्र 9.7 (ब) में एक दी गयी धरन पर लगे भारों के लिये भार रेखा दिखायी गयी है। इसमें प्रथम ज्ञात बल 1 kN को बल की ही दिशा में एक रेखा *ab* द्वारा, दूसरे बल 2 kN को रेखा *bc* द्वारा तथा तीसरे बल 1 kN को रेखा *cd* द्वारा मान तथा दिशा में एक ही रेखा द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

इसी प्रकार चित्र 9.8 (ब) में ट्रस के लिए भार रेखा दर्शायी गयी है।

उदाहरण 2 में दिये गये ट्रस के लिये यह विधि विस्तार से समझायी गयी है।

(4) ध्रुव तथा ध्रुवीय आरेख (Pole and Polar Diagram) : भार रेखा खींचने के पश्चात् इस रेखा के दायीं ओर लगभग मध्य में किसी उपयुक्त स्थान पर कोई बिन्दु *O* लेते हैं। इसी बिन्दु *O* को ध्रुव (Pole) कहते हैं। भार रेखा के सभी बिन्दुओं को, ध्रुव *O* से सरल रेखाओं द्वारा मिलाने पर प्राप्त चित्र, ध्रुवीय आरेख (Polar Diagram) कहलाता है। ध्रुव ऐसी स्थिति पर लेना चाहिये ताकि उसे भार रेखा के बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखायें बहुत छोटे कोण पर न हों। (लगभग भार रेखा की आधी लम्बाई की दूरी पर बिन्दु *O* को अंकित करना उचित रहता है)।

(5) रज्जु बहुभुज (Funicular Polygon) या शृंखली बहुभुज (Link Polygon) : चूँकि रोलर टेक की प्रतिक्रिया सदैव ऊपर की ओर होती है तथा सभी ज्ञात बल भी ऊर्ध्वाधर होने के कारण दूसरी टेक (बद्ध या कब्जेदार) की प्रतिक्रिया भी ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर होगी।

अत: स्थानीय आरेख (Space Diagram) पर सभी बलों तथा प्रतिक्रियाओं की क्रिया-रेखाओं को ऊपर या नीचे की ओर बिन्दुदार (Dotted) रेखाओं द्वारा बढ़ाते हैं। अब इन रेखाओं को काटती हुई ध्रुवीय आरेख (Polar Diagram) की सभी रेखाओं के समान्तर रेखायें खींचते हैं। जैसे—धरन के चित्र 9.7 में ध्रुवीय आरेख की पहली रेखा *Oa* के समान्तर, रेखा *lm*, पहले दो बलों से खींची गयी रेखाओं (प्रतिक्रिया R_1 तथा 1 kN के बल की रेखाओं) के बीच खींचते हैं।

इसी प्रकार *Ob* के समान्तर रेखा *mn*, *Oc* के समान्तर रेखा *np* तथा *Od* के समान्तर रेखा *pq* खींचते हैं अर्थात् धरन पर लगे भारों या प्रतिक्रियाओं की ऊर्ध्वाधर रेखाओं के खींचने से चार gap बनते हैं और ध्रुव *O* को मिलाने वाली रेखायें भी चार ही हैं, अत: प्रत्येक gap में एक-एक रेखा क्रमानुसार खींचते जाते हैं।

अब प्रथम बिन्दु *l* को अन्तिम बिन्दु *q* से मिलाते हैं और इस मिलाने वाली रेखा को बन्दक रेखा (Closing Line) कहते हैं, चूँकि इस रेखा से बहुभुज (Polygon) बन्द होता है। इस प्रकार प्राप्त चित्र को रज्जू बहुभज (Funicular Polygon) या लिंक पॉलिगन कहते हैं।

(6) प्रतिक्रियायें ज्ञात करना : इस बन्दक रेखा के समान एक रेखा ध्रुव *O* से होती हुई खींचकर भार रेखा (Load Line) पर बिन्दु *e* प्राप्त होता है। यह बिन्दु *e*, धरन की दोनों टेकों के बीच के स्थान (Space) के नाम *E* के लिये प्राप्त होता है। टेक 1 पर प्रतिक्रिया R_1 को बो-नोटेशन के आधार पर *EA* (जोड़ 1 पर दक्षिणावर्त घूमकर नाम *EA* है) पढ़ा जायेगा तथा जोड़ 2 पर प्रतिक्रिया R_2 को *DE* नाम से पढ़ा जायेगा। अत: R_1 (*EA*) के लिये भार रेखा में *ea* ↑ लम्बाई मापकर (भार रेखा के लिये माने गये पैमाने $\left(1\text{ cm} = \frac{1}{2}\text{kN}\right)$ द्वारा इस लम्बाई का मान kN में प्राप्त करते हैं; जैसे—

$$R_1 = ea = 3{\cdot}8 \text{ सेमी} = 3{\cdot}8 \times \frac{1}{2} = 1{\cdot}9\text{ kN}$$

इसी प्रकार टेक 2 की प्रतिक्रिया R_2 (*DE*) के लिये *de*↑ लम्बाई मापकर (पैमाने $1\text{cm} = \frac{1}{2}\text{kN}$ द्वारा) इस लम्बाई के मान kN में प्राप्त करते हैं। जैसे, $R_2 = de = 4{\cdot}2$ सेमी० $= 4{\cdot}2 \times \frac{1}{2} = 2{\cdot}1\text{kN}$ प्राप्त करते हैं। यही प्रतिक्रियाओं के मान हैं तथा इनकी दिशा ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर है।

Scanned with CamScanner

उदाहरण 1. एक, एक-समान धरन (1-2) की लम्बाई 2 मीटर है। यह धरन अपने सिरों 1 तथा 2 पर टिकी हुई (Supported) है। इस धरन पर 1 kN, 2 kN और 1 kN के संकेन्द्रित भार (Point Loads) टेक 1 से क्रमशः 0.5 m, 1 m और 1.75 m की दूरियों पर लगे हैं। धरन के सिरों 1 तथा 2 पर उत्पन्न प्रतिक्रियाओं R_1 तथा R_2 की दूरियों पर लगे हैं। धरन के सिरों 1 तथा 2 पर उत्पन्न प्रतिक्रियाओं R_1 तथा R_2 के मान ज्ञात कीजिये।

हल— इस उदाहरण को ग्राफीय विधि में बो-नोटेशन के आधार पर हल किया गया है। चित्र क्रमानुसार 9.7 के (अ), (ब), (स) तथा (द) बनाने के बाद

टेक (1) की प्रतिक्रिया,

$$R_1(EA) = ea\uparrow = 3{\cdot}8 \text{ सेमी०}$$

$$= 3{\cdot}8 \times \frac{1}{2} \text{ kN} = 1{\cdot}9 \text{ kN}$$

टेक (2) की प्रतिक्रिया,

$$R_2(DE) = ea\uparrow = 4{\cdot}2 \text{ सेमी०}$$

$$= 4{\cdot}2 \times \frac{1}{2} \text{ kN} = 2{\cdot}1 \text{ kN}$$

उदाहरण 2. चित्र 9.8 (अ) में दर्शाये गये नर खम्बा कैंची (King Post Truss) के सदस्यों में बलों का परिमाण तथा प्रकृति (Nature) ज्ञात कीजिये।

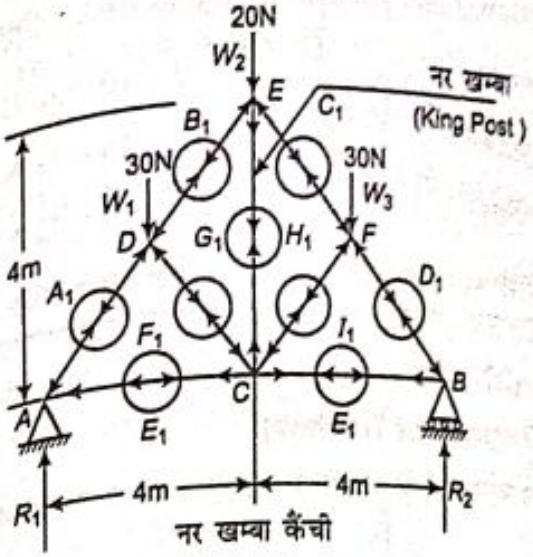
हल—बो के नोटेशन विधि : सर्वप्रथम King Post Truss के चित्र को ड्राइंग यंत्रों द्वारा मापकर बनाते हैं। इसके पश्चात् ट्रस के जोड़ों पर लगे भारों या बलों के बीच के स्थानों के नाम बो संकेत (Bow's Notation) के अनुसार $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1$ तथा I_1 लिखते हैं। अब कोई उचित पैमाना मानकर (जैसे 1 cm. = 10 N) ज्ञात भारों $W_1 = 30\text{N}, W_2 = 20\text{N}$ $W_3 = 30\text{N}$ को क्रमशः $a_1 b_1$, $b_1 c_1$ तथा $c_1 d_1$ द्वारा मान तथा दिशा में भार रेखा (Load Line) में प्रदर्शित करते हैं। अब कोई बिन्दु 'O' ध्रुव (Pole) को भार रेखा के दायीं ओर लेकर इसे भार रखा के बिन्दुओं a_1, b_1, c_1, d_1 आदि से मिलाते हैं। (देखें चित्र 9.8 ब) में भार रेखा के दायीं ओर का भाग। इस चित्र को ध्रुवीय आरेख (Polar Diagram) कहते हैं। अब कैंची (Truss) के रेखा चित्र (Space Diagram) में बलों की रेखाओं को नीचे बढ़ाते हैं। इनमें R_1 तथा W_1 की रेखा को काटती हुई एक रेखा lm, oa_1 के समान्तर खींचते हैं, फिर m से दूसरी रेखा mn, ob_1 के समान्तर खींचते हैं, जो W_2 की रेखा को n पर काटती है। अब oc_1 के समान्तर एक रेखा np से खींचते हैं, जो W_3 की रेखा को p पर काटती है। अन्त में od के समान्तर एक रेखा pq खींचते हैं जो R_2 की रेखा को q पर काटती है। अब lq को मिलाने पर प्राप्त चित्र को रज्जू बहुभुज (Funcicular Polygon) कहते हैं। इस बहुभुज को बन्द करने वाली रेखा lq को **बन्दक रेखा** (Closing line) कहते हैं। देखें चित्र 9.8 (द)।

अब ध्रुव (Pole) o से गुजरती हुई एक रेखा oe_1, बन्दक रेखा lq के समान्तर खींचते हैं। इस प्रकार भार रेखा में प्राप्त बिन्दु e_1 से ट्रस की टेकों पर प्रतिक्रियायें $R_1 = e_1 a_1\uparrow$ तथा $R_2 = d_1 e_1\uparrow$ के मान तथा दिशा ज्ञात होते हैं। यदि प्रतिक्रियाओं के मान हम घूर्ण द्वारा ज्ञात करते हैं, तब रज्जू बहुभुज (Funicular Polygon) नहीं खींचना पड़ेगा तथा दायीं ओर की एक प्रतिक्रिया R_2 के मान को भार रेखा पर (माने गये स्केल द्वारा) काटकर बिन्दु e_1 प्राप्त हो जायेगा।

जिस जोड़ पर केवल दो अज्ञात सदस्य हों उस जोड़ पर नाम Clockwise घूमकर पढ़ते हैं। जैसे चित्र 9.8 (अ) में टेक A पर सदस्य AD का नाम A_1F_1 तथा सदस्य AC का नाम F_1E_1 पढ़ते हैं तथा तालिका में लिखते हैं। अब इन्हीं सदस्यों के समान्तर रेखायें खींचकर भार रेखा के बायीं ओर प्रतिच्छेद बिन्दु f_1 को प्राप्त करते हैं। (क्योंकि F दोनों सदस्यों के नामों में आता है।)

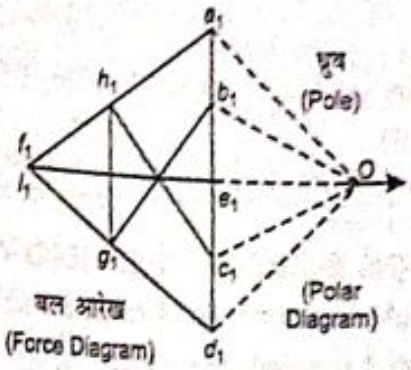
अब नाम A_1F_1 के अनुसार A_1 से F_1 की ओर बल या प्रतिबल आरेख (Force Diagram) में a_1 से f_1 दिशा देखकर इसी दिशा में जोड़ A पर AD सदस्य में तीर लगाते हैं। फिर इसके विपरीत AD के दूसरे सिरे D पर तीर लगाते हैं और इन दोनों के विपरीत दिशा में तीर AD सदस्य के बीच में चित्र के अनुसार लगाते हैं। जो संपीडन (Compression) को दर्शाता है। इसी प्रकार F_1E_1 नाम के अनुसार F_1 की ओर बल आरेख में दिशा f_1 से e_1 देखकर ट्रस के रेखाचित्र के जोड़ A पर तीर, सदस्य AC में लगाकार इसके विपरीत दिशा में तीर AC के सिरे C पर लगाते हैं फिर इन दोनों तीरों के विपरीत दिशा में तीर AC के बीच में चित्र के अनुसार लगाते हैं जो तनाव बल को दर्शाता है। अब इन दोनों सदस्यों AD तथा AC में बलों के मान ज्ञात करने के लिए (भार रेखा के साथ बने)

Scanned with CamScanner



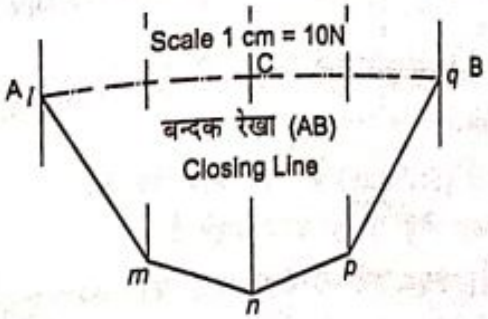
नर खम्बा कैंची
(King Post Truss)

(अ)



a_1 से d_1 तक ऊर्ध्वाधर रेखा
हो भार (Load Line) है।

(ब)/(स)



रज्जू बहुभुज
(Funicular Polygon)

(द)

चित्र 9.8

बल आरेख में क्रमश; $a_1 f_1$ तथा $f_1 e_1$ लम्बाइयों को नापकर माने गये पैमाने (1 cm = 10 N) द्वारा बलों के मान ज्ञात करते हैं। पुनः यही क्रिया दो अज्ञात सदस्यों वाले जोड़ों (D, E, F तथा B) पर दोहराते हैं तथा क्रमानुसार दक्षिणावर्त (Clockwise) घूमकर नाम पढ़ते हैं तथा तालिका में लिखते हैं और भार रेखा के साथ बल आरेख को उपरोक्त विधि द्वारा पूरा करते हैं। प्राप्त हुए इस आरेख की लम्बाइयों को नापकर माने गये पैमाने द्वारा ट्रस के प्रत्येक सदस्य में बल ज्ञात करते हैं। इस प्रकार परिणाम तालिका-1 के अनुसार King Post Truss के सभी सदस्यों में बल तथा इसकी प्रकृति ज्ञात हो जाती है।

परिणाम तालिका (Result Table–1)

क्र० स०	सदस्यों के नाम (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों का परिमाण kN में (Scale 1 cm = 10 N)
1.	A_1 F_1 (AD)	संपीडन	$5.8 \times 10 = 58$ N
2.	F_1 E_1 (AC)	तनाव	$4 \times 10 = 40$ N
3.	B_1 G_1 (DE)	संपीडन	$3.6 \times 10 = 36$ N
4.	G_1 F_1 (DC)	संपीडन	$2.3 \times 10 = 23$ N

Scanned with CamScanner

5.	$C_1\ H_1\ (EF)$	संपीडन	$3.6 \times 10 = 36$ N
6.	$H_1\ G_1\ (EC)$	तनाव	$3 \times 10 = 30$ N
7.	$D_1\ I_1\ (FB)$	संपीडन	$5.8 \times 10 = 58$ N
8.	$I_1\ H_1\ (FC)$	संपीडन	$2.3 \times 10 = 23$ N
9.	$E_1\ I_1\ (BC)$	तनाव	$4 \times 10 = 40$ N

§ 9.5. ट्रसों के विश्लेषण एवं बल आरेख की मान्यतायें
(Assumptions for Analysis and Force Diagram of Trusses)

वास्तव में ये मान्यतायें पूर्ण रूप से लागू नहीं होती फिर भी इन मान्यताओं के आधार पर ट्रस के अवयवों में बलों का विश्लेषण करना सरल हो जाता है। ये मान्यतायें निम्न प्रकार हैं—

(1) ट्रस की प्रत्येक छड़ उसका अवयव (Member) होती है।

(2) ट्रस के सभी अवयव दृढ़ (Rigid) होते हैं। अत: बाह्य बलों के प्रभाव में ट्रस के रूप व आकार (Shape & Size) में कोई परिवर्तन नहीं होता।

(3) ट्रस के सभी सदस्य या अवयव, पिन, नट-बोल्ट या कब्जे या वेल्ड द्वारा जुड़े (Pin Jointed or Hinged) होते हैं तथा प्रत्येक जोड़ चिकने तथा घर्षण-रहित (Frictionless) होते हैं।

(4) ट्रस में केवल उतने ही सदस्य हैं जितने कि उसकी स्थिरता (Stability) के लिये आवश्यक हैं।

(5) ट्रस पर लगने वाले सभी बाह्य बल या भार उनसे सम्बन्धित जोड़ों पर ही कार्य करते हैं।

(6) ट्रस के सदस्यों का भार नगण्य (Negligible) माना जाता है। अन्यथा इन्हें भी जोड़ों पर ही कार्य करता हुआ माना जाता है।

(7) ट्रस पर लगने वाले सभी बल या भार तथा ट्रस (Truss) के सभी सदस्य (Members) एक ही समतल (Plane) में होते हैं।

(8) प्रत्येक जोड़ पर लगे बल संगामी (Concurrent) होते हैं जो सन्तुलन के लिये बन्द बहुभुज (Closed Polygon) नियम का पालन करते हैं।

विशेष : किसी ट्रस के सदसयों या अवयवों (Members) में बल तथा उनकी प्रकृति (Nature) ज्ञात करने की प्रमुख विधियाँ

(1) ग्राफीय विधि : इसमें बो का संकेत (Bow's Notation) विधि प्रयोग की जाती है।

(2) काट विधि (Section Method)।

(3) वियोजन (Resolution) या जोड़ विधि (Joint Method) ।

(1) ट्रस के सदस्यों (Member) में बल या प्रतिबल ज्ञात करने की ग्राफीय (Graphical) विधि का संक्षिप्त वर्णन: सर्वप्रथम दिये गये ट्रस का चित्र पैमाने एवं चाँदे की सहयता से मापकर सही आकृति में बनाते हैं। इसके पश्चात ट्रस की एकबद्ध टेक (दो टेकों पर टिकी हुई शुद्धालम्बित ट्रस होने की स्थिति में) पर घूर्ण लेकर रोलर टेक की प्रतिक्रिया ज्ञात करते हैं। अब बो के संकेत के अनुसार बलों के बीच के स्थानों के नाम लिखकर किसी उचित पैमाने पर भार रेखा (Load Line) खींचते हैं। तत्पश्चात् ट्रस के जिस जोड़ पर केवल दो ही अवयव (Members) अज्ञात हैं, पर दक्षिणावर्त (Clockwise) घूमकर नाम पढ़ते हैं तथा इन दोनों सदस्यों के समान्तर रेखायें खींचकर प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त करते हैं जिसका नाम वह अक्षर लिखते हैं जो दोनों सदस्यों के नामों में Common होता है। इस प्रकार ट्रस के सभी अवयवों (Members) के समान्तर रेखायें खींचकर भार रेखा के साथ बल आरेख (Force Diagram) बनाया जाता है, जिसमें प्राप्त रेखाओं की लम्बाइयों को मापकर भार रेखा (Load Line) के पैमाने द्वारा

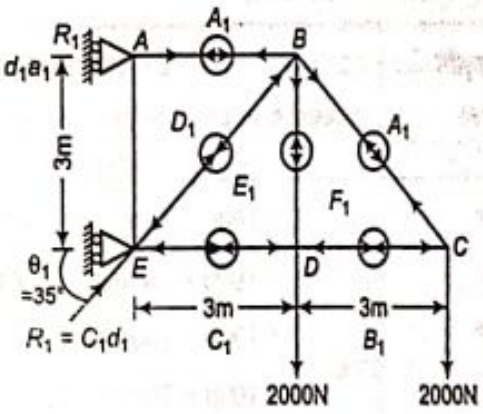
Scanned with CamScanner

बलों में परिवर्तित कर ट्रस के प्रत्येक अवयव (Member) में बल एवं उसकी प्रकृति ज्ञात की जाती है। इसका विस्तार से वर्णन उदाहरण सहित पीछे किया जा चुका है।

विशेष : ट्रसों पर महत्त्वपूर्ण उदाहरण

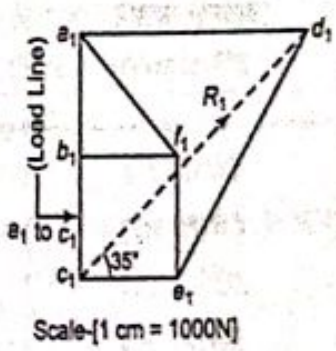
उदाहरण 3. चित्र 9.9 (अ) में दर्शायी गयी ट्रस (Truss) के सभी सदस्यों (Members) में बल तथा उनकी प्रकृति (Nature) ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2005)**

हल : ग्राफ विधि द्वारा ट्रस के सदस्यों में बल ज्ञात करना : सर्वप्रथम दिये गये ट्रस का चित्र ड्राइंग यन्त्रों द्वारा मापकर सही आकृति में बनाते हैं तथा बलों को दिये गये मान तथा दिशा में दर्शाते हैं। यह स्थान आरेख (Space-diagram) कहलाता है। अब बो के नोटेशन के अनुसार बलों के बीच के स्थानों के नाम ट्रस के चारों ओर दक्षिणावर्त घूमते हुए क्रमश: A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 तथा F_1 चित्र 9.9 (ब) के अनुसार लिखते हैं। जोड़ों के नाम A, B, C, D, E प्रश्न के चित्र में दिये होते हैं।



(अ) (Space Diagram)

चित्र 9.9 (अ)



Scale-[1 cm = 1000N]

(ब) (Force Diagram)

चित्र 9.9 (ब)

कोई उचित पैमाना (Scale) जैसे [1 cm = 1000 N] मानकर ट्रस पर दिये गये भारों के लिये एक भार रेखा (Load Line) भारों की दिशा में खींचते हैं। इसके पश्चात् दिये गये ट्रस के स्वतन्त्र सिरे की ओर जिस मोड़ पर केवल दो ही अवयव (Members) एक जोड़ पर जुड़े हों (जैसे—जोड़ C पर) तो ऐसे जोड़ पर ही दक्षिणावर्त घूमकर ट्रस के अज्ञात सदस्यों के नाम पढ़ते हैं; जैसे—जोड़ C पर नाम $B_1\ F_1$ (CD सदस्य का नाम) तथा नाम $F_1\ A_1$ (CB सदस्य का नाम) पढ़ते हैं। अब भार रेखा के साथ, इन दोनों सदस्यों के समान्तर रेखायें खींचने पर प्रतिच्छेद बिन्दु F_1 प्राप्त होता है, चूँकि F_1 दोनों सदस्यों के नामों में आता है।

नाम $B_1\ F_1$ में, B_1 से F_1 की ओर (बल आरेख के चित्र में b_1 से f_1 की ओर) दिशा देखकर इसी दिशा में तीर को ट्रस के चित्र में जोड़ C के निकट लगाते हैं (चूँकि C पर ही सदस्यों के नाम पढ़े गये थे)। अब इसके विपरीत दूसरा तीर ⊖ सदस्य के दूसरे सिरे D पर लगाते हैं। अब इन दोनों तीरों के विपरीत तीरों को एक गोल घेरे में बन्द करके उस सदस्य के बीच में ⊖ लगाते हैं। यह प्रतीक (Symbol) सम्पीडन को दर्शाता है। चूँकि जोड़ C पर ही दूसरे सदस्य CB में बल का नाम $F_1\ A_1$ है, अत: F_1 से A_1 की दिशा के लिये बल आरेख में f_1 से a_1 की ओर दिशा में तीर इसी के समान्तर वाले सदस्य में जोड़ C के निकट लगाते हैं। फिर इसे विपरीत ⊕ दूसरे सिरे B के निकट लगाते हैं। अब इस सदस्य के सिरों पर लगे चारों के विपरीत तीर सदस्य के बीच में गोल घेरे के अन्दर ⊕ लगाते हैं। यह संकेत (Symbol) **तनाव बल** (Tensile Force) को दर्शाता है।

इसके बाद हम देखते हैं कि जोड़ D पर दो सदस्य DE तथा DB, अज्ञात बल वाले हैं। अत: इन्हीं के समान्तर रखायें बल आरेख में खींचकर $c_1\ e_1$ तथा $e_1\ f_1$ का प्रतिच्छेद बिन्दु e_1 प्राप्त करते हैं। अब c_1 से e_1 तथा e_1 से f_1 दिशा में तीर इन्हीं रेखाओं के समान्तर वाले सदस्यों में जोड़ D के निकट लगाते हैं (चूँकि जोड़ D पर ही नाम पढ़ा था)। फिर इन लगाये गये तीरों के विपरीत दिशा में तीर, सदस्य के दूसरे सिरे पर लगाते हैं और सिरों पर लगे तीरों के विपरीत दिशा में तीर सदस्यों के बीच में गोल घेरे में लगाते हैं जिससे स्थान आरेख के अनुसार सम्पीडन तथा तनाव बल प्राप्त होते हैं।

Scanned with CamScanner

अब जोड़ B पर दो अन्य सदस्य BE तथा BA अज्ञात बल वाले है। अत: इन्हीं के समान्तर रेखायें बल या प्रतिबल आरेख में खींचकर $c_1 d_1$ तथा $d_1 a_1$ का प्रतिच्छेद बिन्दु d_1 प्राप्त करते हैं। पुन: तीर c_1 से d_1 की ओर तथा d_1 से a_1 की ओर इन्हीं के समान्तर वाले सदस्यों मे जोड़ B के निकट लगाते हैं तथा दूसरे सिरों पर इन तीरों के विपरीत दिशा में तीर लगाते हैं। इन सदस्यों के बीच में तीरों को सिरों पर लगे तीरों के विपरीत दिशा में गोल घेरे के अन्दर लगाते हैं। स्थान आरेख (Space Diagram) के अनुसार इन सदस्यों में क्रमश: सम्पीडन (Compression) तथा तनाव (Tension) बल प्राप्त होते हैं। इस प्रकार बल या प्रतिबल आरेख पूर्ण हो जाता है।

अब प्राप्त हुए इस आरेख (Force Diagram) की भुजाओं की लम्बाइयों को नापकर माने गये पैमाने द्वारा ट्रस के प्रत्येक सदस्य में बल ज्ञात करते हैं। इस प्रकार परिणाम तालिका-2 के अनुसार दिये गये ट्रस के सभी सदस्यों में बल तथा उनकी प्रकृति (Nature) ज्ञात हो जाती है।

परिणाम तालिका (Result Table–2)

क्र० स०	सदस्यों के नाम (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों का परिमाण kN (Length in cm × Scale) (Scale 1 cm = 1000 N)
1.	$CD\,(B_1\ F_1)$	संपीडन	$2 \times 1000 = 2000\ \text{N} = 2\ \text{kN}$
2.	$CB\,(F_1\ A_1)$	तनाव	$2.8 \times 1000 = 2800\ \text{N} = 2.8\ \text{kN}$
3.	$DE\,(C_1\ E_1)$	संपीडन	$2 \times 1000 = 2000\ \text{N} = 2\ \text{kN}$
4.	$DB\,(E_1\ F_1)$	तनाव	$2 \times 1000 = 2000\ \text{N} = 2\ \text{kN}$
5.	$BE\,(E_1\ D_1)$	संपीडन	$5.65 \times 1000 = 5650\ \text{N} = 5.65\ \text{kN}$
6.	$BA\,(D_1\ A_1)$	तनाव	$6 \times 1000 = 6000\ \text{N} = 6\ \text{kN}$

यदि प्रतिक्रियायें भी ज्ञात करनी हों तो इन्हें निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं:

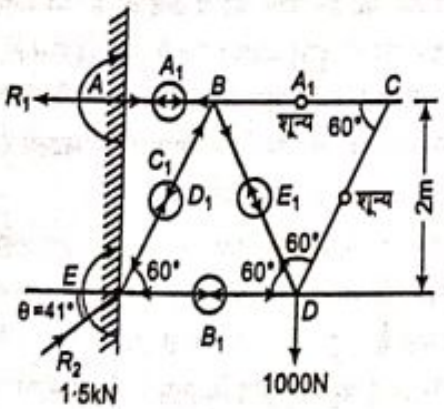
(1) जोड़ E पर प्रतिक्रिया, $R_1 = c_1 d_1 = 7{\cdot}0 \times 1000\ \text{N}$

$= 7000\ \text{N} = 7\ \text{kN}$ उत्तर

इस प्रतिक्रिया का क्षैतिज से कोण $\theta_1 = 35°$

(2) जोड़ A पर प्रतिक्रिया, $R_2 = d_1 a_1 \times \text{Scale} = 6 \times 1000\ \text{kN}$

यह प्रतिक्रिया क्षैतिज दिशा में है। $= 6000\ \text{N} = 6\ \text{kN}$ उत्तर



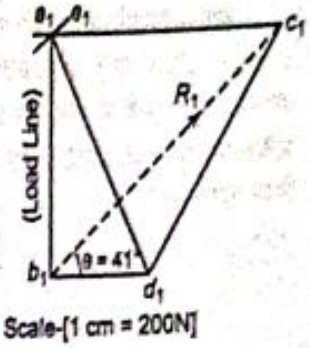
(अ) (Space Diagram)

चित्र 9.6 (अ)

Scanned with CamScanner

उदाहरण 4. चित्र 9.6 (अ) में दीवार में बद्ध (Fixed) एक कैंची (Truss) दर्शायी गयी है। दीवार पर प्रतिक्रियायें तथा सभी अवयवों में बलों के मान एवं प्रकृति ज्ञात कीजिये। (U.P. 2004)

हल : सर्वप्रथम कैंची का चित्र 9.6 (ब) ड्राइंग यन्त्रों में दिये गये कोणों के अनुसार नापकर शुद्ध आकार में बनाकर, बो के नोटेशन के अनुसार नाम रखकर, किसी उचित पैमाने पर एक भार रेखा $a_1 b_1$ (भार 1000 N के लिये) खींचते हैं तथा ट्रस के सदस्यों के समान्तर रेखायें खींचकर प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त करते हैं और बल आरेख (Force Diagram) को पिछले उदाहरणों में बतायी गयी विधि के अनुसार पूर्ण करते हैं। इसमें प्राप्त हुई लम्बाइयों को माने गये पैमाने द्वारा बदलकर बलों के मान ज्ञात करते हैं। ट्रस के सभी सदस्यों में बल एवं प्रकृति तालिका (Result Table-3) के अनुसार प्राप्त होते हैं।



Scale-[1 cm = 200N]

(ब) (Force Diagram)

चित्र 9.6 (ब)

परिणाम तालिका (Result Table–3)

क्र० स०	सदस्यों के नाम (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों का परिमाण M या kN (Scale 1 cm = 200 N माना)
1.	$CD\,(A_1E_1)$	—	Zero (शून्य)
2.	$CB\,(E_1A_1)$	—	Zero (शून्य)
3.	$DE\,(B_1D_1)$	संपीडन	$b_1 d_1$ × scale per cm (1cm = 200 N माना) $2.9 \times 200 = 580\ N = 0.58\ kN$
4.	$DB\,(D_1E_1)$	तनाव	$d_1 e_1$ × Scale per cm $5.8 \times 200 = 1160\ N = 1.16\ kN$
5.	$BE\,(D_1C_1)$	संपीडन	$d_1 c_1$ × Scale per cm $5.8 \times 200 = 1160\ N = 1.16\ kN$
6.	$BA\,(C_1A_1)$	तनाव	$c_1 a_1$ × Scale per cm $5.8 \times 200 = 1160\ N = 1.16\ kN$

जोड़ E पर प्रतिक्रिया $R_2 = \vec{b_1 c_1}$ लम्बाई × Scale per cm

$\therefore$ $R_2 = 7.5 \times 200 = 1500\ N = 1.5\ kN$ उत्तर

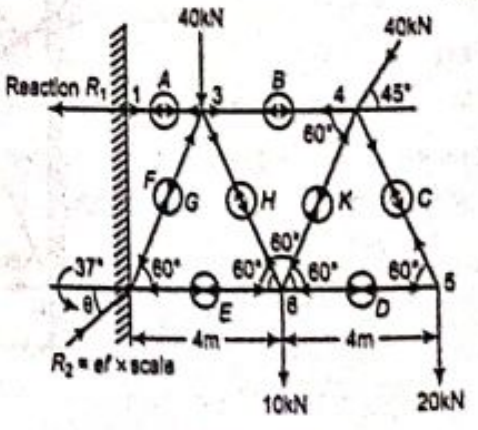
यह प्रतिकिया R_2 क्षैतिज से कोण $\theta = 41°$ पर होगी। उत्तर

जोड़ A पर प्रतिक्रिया $R_1 = \vec{c_1 a_1}$ लम्बाई × Scale per cm

$= 5.8 \times 200 = 1160\ N = 1.16\ kN$

$\therefore$ जोड़ A पर प्रतिक्रिया क्षैतिज दिशा में, $R_1 = 1{\cdot}16 kN$ होगी। उत्तर

उदाहरण 5. चित्र 9.7 (अ) में दर्शाये गये कैन्टीलीवर ट्रस के सभी सदस्यों में बल एवं प्रकृति तथा दीवार पर प्रतिक्रियायें ज्ञात कीजिये।

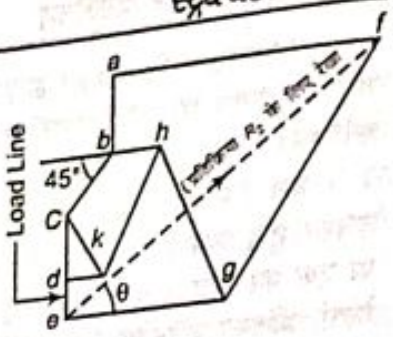


(अ) (Space Diagram)

चित्र 9.7 (अ)

Scanned with CamScanner

हल—पिछले उदाहरणों की भाँति स्थान आरेख तथा भार रेखा (माने गये पैमाने 1 cm = 10 kN पर) खींचिये तथा समान्तर रेखायें खींचकर बल आरेख बनाइये जिसके आधार पर सदस्यों मे बल एवं प्रकृति तालिका–3 के अनुसार प्राप्त होगी। जोड़ी 2 पर प्रतिक्रिया $R_2 = ef$ (जोड़ 2 पर Clockwise घूमकर नाम पढ़ने पर) होगी। इसका मान निम्न होगा—



(ब) (Force Diagram)

चित्र 9.7 (ब)

$$R_2 = ef \times \text{Scale kN}$$
$$= 16.3 \times 10 \text{ kN}$$
$$= 163 \text{ kN} \quad \text{उत्तर}$$

क्षैतिज से कोण $\theta = 37°$ उत्तर

जोड़ 1 पर प्रतिक्रिया $R_1 = fa$

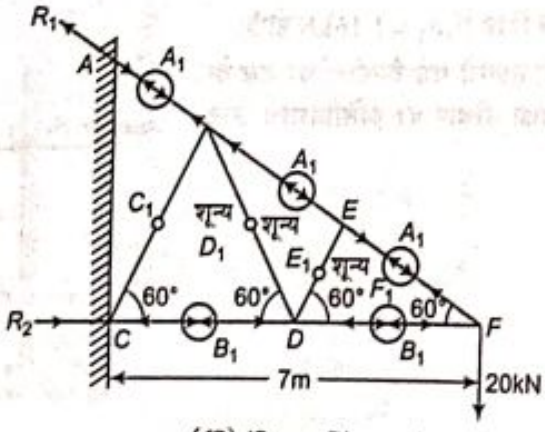
$R_1 = fa$ लम्बाई × Scale = 10·2 सेमी × 10 = 102 kN

= अवयव (1 – 3) में तनाव के समान = 102 kN

परिणाम तालिका (Result Table–4)

क्र० सं०	सदस्यों के मान (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों का परिमाण kN में (Scale 1 cm = 5 kN)	
1.	5→ 6 (*DK*)	सम्पीडन	*dk* × Scale per cm in kN	1.2 × 10 kN = 12 kN
2.	5 – 4 (*KC*)	तनाव	*kc* × Scale per cm in kN	2.3 × 10 kN = 23 kN
3.	4 – 6 (*KH*)	सम्पीडन	*kh* × Scale per cm in kN	5.6 × 10 kN = 56 kN
4.	4 – 3 (*HB*)	तनाव	*hb* × Scale per cm in kN	1.2 × 10 kN = 12 kN
5.	6→ 2 (*EG*)	सम्पीडन	*eg* × Scale per cm in kN	7.3 × 10 kN = 73 kN
6.	6 – 3 (*GH*)	तनाव	*gh* × Scale per cm in kN	6.7 × 10 kN = 67 kN
7.	3 – 2 (*GF*)	सम्पीडन	*gf* × Scale per cm in kN	11.4 × 10kN = 114 kN
8.	3 – 1(*FA*)	तनाव	*fa* × Scale per cm in kN	10.2 × 10 kN = 102 kN

उदाहरण 6. चित्र 9.8 (अ) में दिखायी गयी ट्रस के सभी सदस्यों में बल एवं प्रकृति तथा दीवार के *A* व *C* बिन्दुओं पर प्रतिक्रियायें ज्ञात करो।

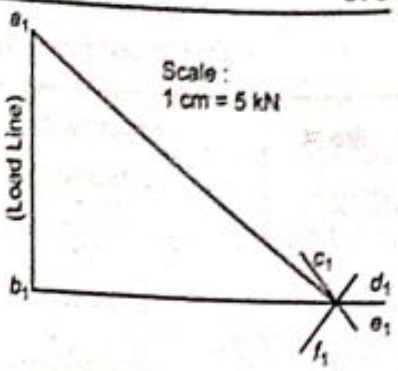


(अ) (Space Diagram)

चित्र 9.8 (अ)

Scanned with CamScanner

हल–पिछले उदाहरणों की भाँति ट्रस का रेखाचित्र बनाकर, भार रेखा खींचिये तथा समान्तर रेखायें खींचकर बल आरेख चित्र 9.8 (ब) के अनुसार पूरा कीजिये। बल आरेख में प्राप्त लम्बाईयों को Scale (1 cm = 5 kN) द्वारा बलों में बदलकर तालिका–5 के अनुसार प्रत्येक सदस्य में बल एवं प्रकृति प्राप्त होती है।



(ब) (Force Diagram)

चित्र 9.8 (ब)

परिणाम तालिका (Result Table–5)

क्र० सं०	सदस्यों के मान (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों का परिमाण kN में (Scale 1 cm = 5 kN)
1.	$FD\ (B_1F_1)$	सम्पीडन	$b_1f_1 \times$ Scale in KN = 6.9×5 kN = 34.5 kN
2.	$FE\ (F_1A_1)$	तनाव	$f_1a_1 \times$ Scale in kN = 8×5 kN = 40 kN
3.	$ED\ (F_1E_1)$	—	f_1 तथा e_1 एक ही बिन्दु पर हैं अत: f_1e_1 लम्बाई शून्य है। इसलिए बल भी शून्य है।
4.	$EB\ (E_1A_1)$	तनाव	$e_1\ a_1$ लम्बाई Scale in kN = 8×5 kN = 40 kN
5.	$DC\ (B_1D_1)$	सम्पीडन	$b_1\ d_1$ लम्बाई × Scale in kN = 6.9×5 kN = 34.5 kN
6.	$DB\ (D_1E_1)$	—	d_1 तथा e_1 एक ही बिन्दु पर हैं अत: d_1 से e_1 लम्बाई शून्य है। इसलिए बल शून्य है।
7.	$BC\ (D_1C_1)$	—	d_1 तथा c_1 एक ही बिन्दु पर हैं इसीलिए सदस्य BC में बल शून्य है।
8.	$BA\ (C_1A_1)$	तनाव	$c_1\ a_1$ लम्बाई × Scale in kN = 8×5 kN = 40 kN

प्रतिक्रिया $R_1 = AB$ में तनाव

$= c_1\ a_1$ लम्बाई × Scale = 8×5 kN = 40 kN

प्रतिक्रिया $R_2 = CD$ में सम्पीडन बल

$= b_1\ d_1$ लम्बाई × Scale = 6.9×5 kN = 34.5 kN उत्तर

उदाहरण 7. चित्र 9.9 (अ) में दिखायी ट्रस के अवयवों में बलों का मान तथा प्रकृति ज्ञात कीजिये।

हल– चित्र 9.9 (अ) के अनुसार किसी उचित पैमाने पर ट्रस का स्थान आरेख बनाते हैं। फिर चित्र 9.9 (ब), (स) तथा (द) के अनुसार क्रमश: ध्रुवीय आरेख, रज्जु बहुभुज तथा प्रतिबल आरेख बनाकर प्रतिक्रियाओं R_1 तथा R_2 के मान तथा विभिन्न अवयवों में बल तालिका–7 के अनुसार प्राप्त करते हैं।

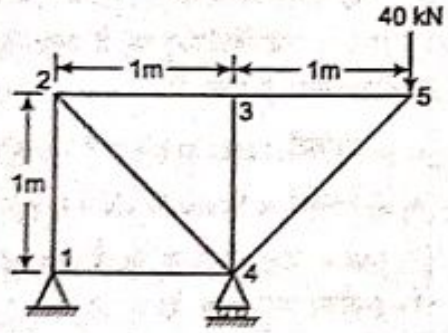
R_1 = 40kN, ऊर्ध्वाधर नीचे ↓

R_2 = 80 kN, ऊर्ध्वाधर ऊपर ↑

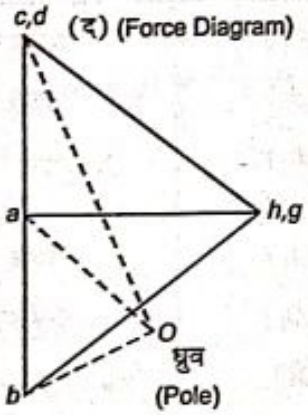
Scanned with CamScanner

परिणाम तालिका (Result Table–7)

क्र० सं.	सदस्यों के मान (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों का परिमाण kN में (Scale 1 cm = 5 kN)
1.	1—2	तनाव	$ad = 40\,kN$
2.	1—4	तनाव	$dc = 0$
3.	2—3	—	$ag = 39\,N$
4.	2—4	सम्पीडन	$gd = 56.5\,kN$
5.	3—5	तनाव	$ah = 39\,kN$
6.	3—4	—	$hg = 0$
7.	5—4	सम्पीडन	$bh = 56.5\,kN$

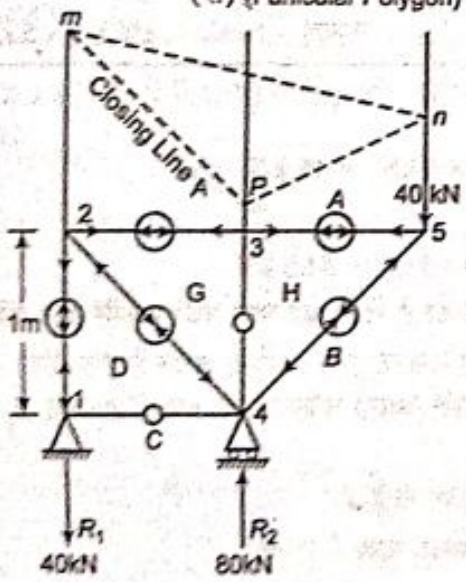


(अ) (Space Diagram)



(ब) (Polar Diagram)

(स) (Funicular Polygon)



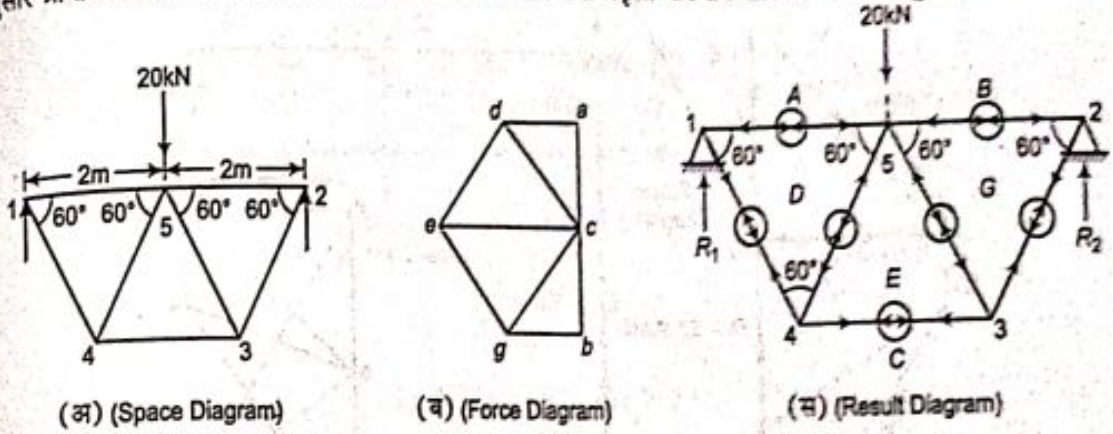
चित्र 9.9 (अ)-(द)

Scanned with CamScanner

उदाहरण 8. चित्र 9.10 (अ) में दी हुई ट्रस के अवयवों में बलों के मान तथा प्रकृति ज्ञात कीजिये।

हल–चित्र 9.10 (अ) के अनुसार सर्वप्रथम किसी उपयुक्त पैमाने पर ट्रस का स्थान आरेख बनाते हैं।

हम जानते हैं कि भार तथा ट्रस की सममिति से ट्रस के दोनों सिरों 1 तथा 2 प्रतिक्रियायें समान होंगी अर्थात् प्रत्येक 10 kN की होगी। फिर भार रेखा *ab* किसी उपयुक्त पैमाने, (जैसे 1 cm = 5 kN) पर खींचकर प्रतिबल या बल आरेख चित्र 9.10 (ब) के अनुसार प्राप्त करते हैं जिससे विभिन्न अवयवों में बलों के मान तथा प्रकृति परिणाम तालिका–8 के अनुसार प्राप्त होते हैं—



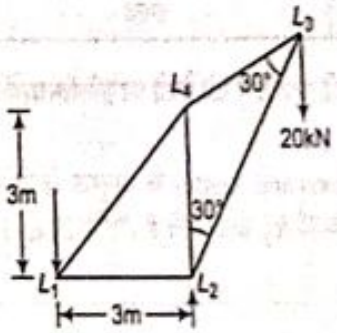
(अ) (Space Diagram) (ब) (Force Diagram) (स) (Result Diagram)

चित्र 9.10

परिणाम तालिका (Result Table–8)

क्र० सं०	सदस्यों के मान (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों का परिणाम kN में (Scale 1 cm = 5 kN)
1.	*AD* (1→ 5)	सम्पीडन	5.5 kN
2.	*DC* (1→ 4)	तनाव	11 kN
3.	*DE* (4→ 5)	सम्पीडन	11 kN
4.	*EC* (4→ 3)	तनाव	11 kN
5.	*EG* (3→ 5)	सम्पीडन	11 kN
6.	*GC* (3→ 2)	तनाव	11 kN
7.	*GB* (2→ 5)	सम्पीडन	5.5 kN

उदाहरण 9. चित्र 9.11 (अ) में दिखायें गये क्रेन शीर्ष पर 20 kN का भार लगा है। फ्रेम के अवयवों पर बल ज्ञात कीजिये।

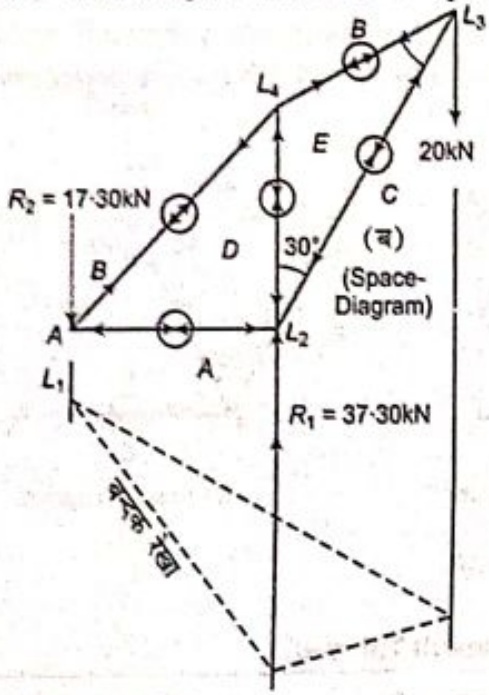


(अ) (Given Crane)

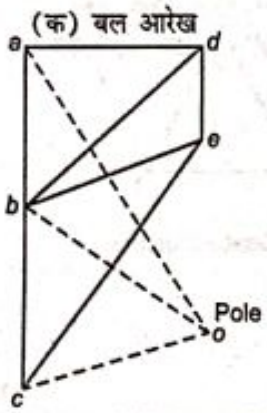
चित्र 9.11 (अ)

Scanned with CamScanner

हल—चित्र 9.11 (ब) के अनुसार किसी उपयुक्त पैमाने पर फ्रेम का स्थान आरेख बनाते हैं। फिर चित्र 9.11 (स), (द) तथा (क) के अनुसार क्रमशः ध्रुवीय आरेख, रज्जु बहुभुज तथा बल आरेख बनाकर प्रतिक्रिया R_1 तथा R_2 के मान तथा विभिन्न अवयवों में बलों के मान तथा प्रकृतिया तालिका–9 के अनुसार प्राप्त होते हैं।



(द) (Funicular Polygon)



(स) (Polar Diagram)

चित्र 9.11 (ब, स, द)

$R_1 = 37.30$ kN, $R_2 = 17.30$ kN

परिणाम तालिका (Result Table–8)

क्र० सं०	सदस्यों के मान (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों का परिमाण kN में (Scale 1 cm = 5 kN)
1.	$(L_3 - L_2)$	सम्पीडन	$ce = 34.7$ kN
2.	$(L_3 - L_4)$	तनाव	$eb = 20$ kN
3.	$(L_2 - L_1)$	सम्पीडन	$ad = 17.5$ kN
4.	$(L_2 - L_4)$	सम्पीडन	$de = 7.5$ kN
5.	$(L_1 - L_4)$	तनाव	$bd = 24.75$ kN

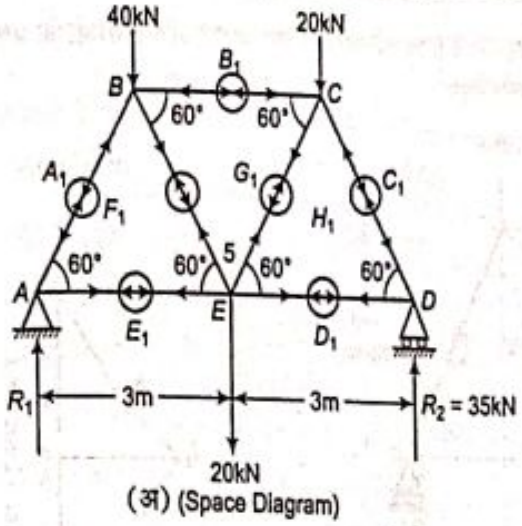
उदाहरण 10. चित्र 9.12 (अ) में दर्शायी गयी ट्रस की टेकों पर प्रतिक्रियायें तथा इसके सभी सदस्यों में बलों की प्रकृति एवं परिमाण ज्ञात कीजिये। **(U.K. 2013 (S), U.P. 2010)**

हल–दी गई मापों तथा कोणों (Dimensions and Angle) के अनुसार कैंची (Truss) का चित्र बनाकर बलों को दर्शाते हैं तथा बद्ध टेक A पर घूर्ण लेकर टेक D की प्रतिक्रिया R_2 ज्ञात करते हैं (ताकि Polar Diagrams and Funicular Polygon आदि न बनाने पड़ें)।

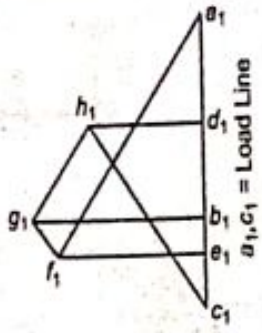
अब टेक A पर घूर्ण लेने पर,

$$6 \times R_2 = 40 \times \frac{3}{2} + 20 \times 3 + 20 \times \left(3 + \frac{3}{2}\right)$$

Scanned with CamScanner



(अ) (Space Diagram)



(ब) (Force Diagram)

चित्र 9.12

$$6 \times R_2 = 60 + 60 + 90 = 210$$

$$\therefore \quad R_2 = \frac{210}{6} = 35 \text{ kN}$$ उत्तर

तथा A पर प्रतिक्रिया

$$R_1 = (40 + 20 + 20) - R_2$$

$$= 80 - R_2 = 80 - 35 = 45 \text{ kN}$$

अब बो के नोटेशन के अनुसार बलों के बीच के स्थानों के नाम रखकर और एक उचित पैमाना (Scale), 1 cm = 10 kN मानकर एक भार रेखा खींचते हैं (जैसे 40 kN के लिये a_1b_1, 20 kN के लिये b_1c_1, प्रतिक्रिया $R_2\uparrow$ के लिये c_1d_1 ऊपर की ओर तथा E पर लगे बल 20 kN के लिये d_1e_1 नीचे की ओर)।

अब ट्रस के जोड़ों A, B, C तथा D आदि पर बारी-बारी से नाम पढ़कर तथा सदस्यों के समान्तर रेखायें खींचकर बल आरेख (Force Diagram) पिछले उदाहरणों की भाँति पूरा करते हैं; जैसे चित्र—में दर्शाया गया है। ट्रस के सदस्यों (Members) में बलों के परिमाण एवं प्रकृति परिणाम तालिका-10 के अनुसार प्राप्त होते हैं।

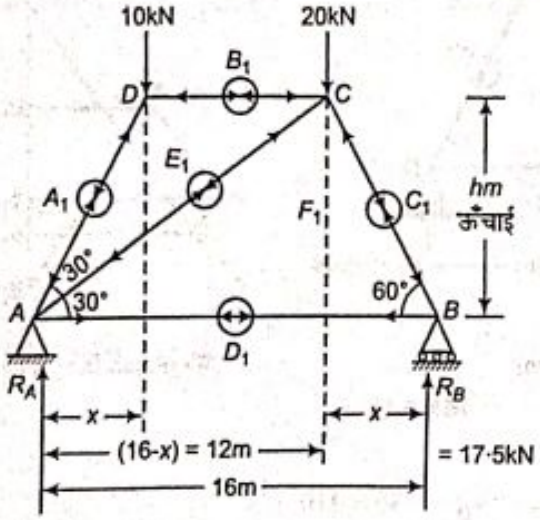
परिणाम तालिका (Result Table–10)

क्र० सं०	सदस्यों के नाम (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों का परिमाण (Scale 1 cm = 10 kN)
1.	AB (A_1F_1)	सम्पीडन	$a_1f_1 \times$ Scale per cm $= 5{\cdot}2 \times 10 = 52$ kN
2.	AE (F_1E_1)	तनाव	$f_1e_1 \times$ Scale per cm $= 2{\cdot}6 \times 10 = 26$ kN
3.	BC (B_1G_1)	सम्पीडन	$b_1g_1 \times$ Scale per cm $= 2{\cdot}9 \times 10 = 29$ kN
4.	BE (G_1F_1)	तनाव	$g_1f_1 \times$ Scale per cm $= 0{\cdot}6 \times 10 = 6$ kN
5.	CD (C_1H_1)	सम्पीडन	$c_1h_1 \times$ Scale per cm $= 4 \times 10 = 40$ kN
6.	CE (H_1G_1)	तनाव	$h_1g_1 \times$ Scale per cm $= 1{\cdot}8 \times 10 = 18$ kN
7.	DE (D_1H_1)	तनाव	$d_1h_1 \times$ Scale per cm $= 2 \times 10 = 20$ kN

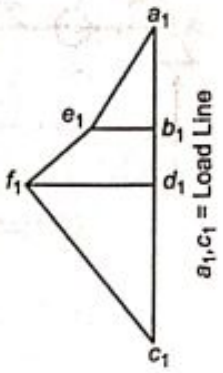
Note : क्षैतिज (Horizontal) सदस्यों के नाम के दोनों अक्षर एक ही क्षैतिज रेखा में होने चाहियें (देखें बल आरेख)। यह समान्तर रेखायें सही खींची जाने की पहचान है।

Scanned with CamScanner

**उदाहरण 11. चित्र 9.13 (अ) में दर्शाये गये ट्रस के आधारों A तथा B पर प्रतिक्रियाओं के मान ज्ञात कीजिये। ट्रस के सदस्यों में बल तथा उनकी प्रकृति भी ज्ञात कीजिए। (U.P. 2003, 08)



(अ) Space Diagram



(ब) Force Diagram

चित्र 9.13

उत्तर : चित्र के अनुसार,

$$\tan 60° = \frac{h}{x}$$

या $$h = x\sqrt{3}$$

तथा $$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(16-x)}$$

या $$h = \frac{16-x}{\sqrt{3}}$$

h के मानों को समान रखने पर,

$$x\sqrt{3} = \frac{16-x}{\sqrt{3}}$$

या $$4x = 16$$

या $$x = 4m$$

अब A पर घूर्ण लेने पर,

$$16R_B = 10\times 4 + 20\times 12$$

$$= 40 + 240 = 280$$

$$R_B = \frac{280}{16} = \mathbf{17{\cdot}5\ kN}$$ उत्तर

तथा $$R_A = (10+20) - 17{\cdot}5 = \mathbf{12{\cdot}5\ kN}$$ उत्तर

अब बो-संकेत (Bow's Notation) के अनुसार ट्रस के जोड़ों पर लगे बलों के बीच के स्थानों के नाम रखते हैं (जैसे चित्र में दर्शाया गया है)। [भार रेखा के लिए माना 1 cm = 5 kN]

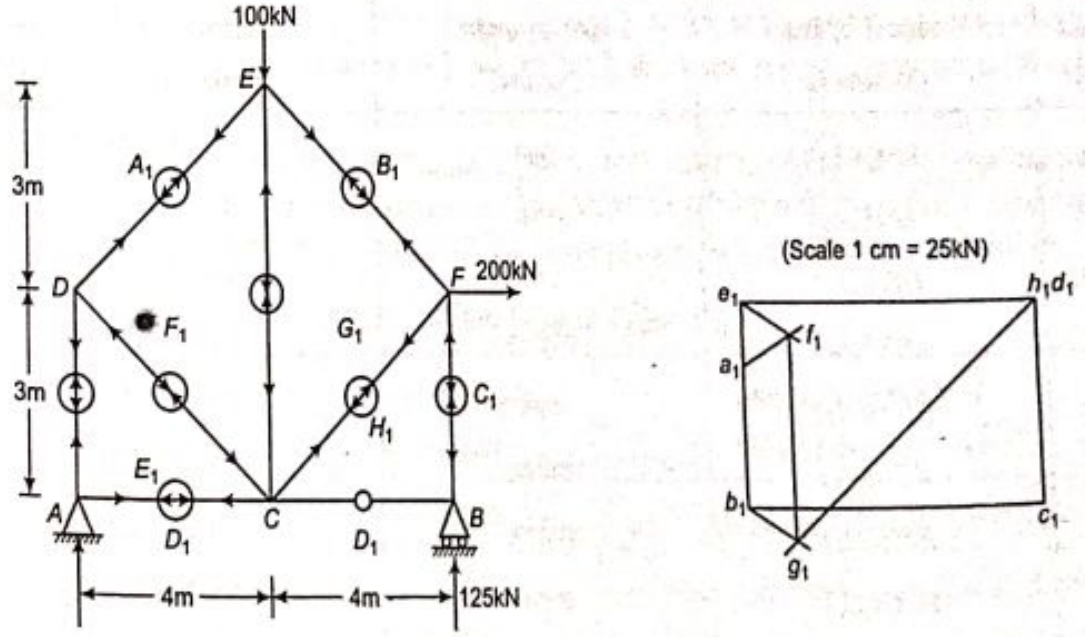
Scanned with CamScanner

परिणाम तालिका (Result Table–11)

क्र० सं०	सदस्यों के नाम (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों का परिमाण (Scale 1 cm = 5 kN)
1.	D_1F_1 (BA)	तनाव	$17 \cdot 5/\sqrt{3} = 10$
2.	F_1C_1 (BC)	संपीडन	$35/\sqrt{3}$ kN = 20
3.	F_1E_1 (CA)	संपीडन	5 kN
4.	E_1B_1 (CD)	संपीडन	$10/\sqrt{3} = 5 \cdot 8$ kN = 6 kN
5.	A_1E_1 (AD)	संपीडन	$\frac{20}{\sqrt{3}}$ kN = 11·5 = 12 kN

विधि : सर्व प्रथम किसी उचित पैमाने पर (जैसे यहाँ माना 1 cm = 5 kN) ट्रस के जोड़ों पर लगे बलों के लिए एक भार रेखा खींचते हैं जिस पर बिन्दु a_1, b_1, c_1 तथा d_1 क्रमश: भारों की दिशाओं में चलकर प्राप्त होते हैं। अब ट्रस की जिस टेक पर केवल दो ही सदस्य अज्ञात मिलते हैं (जैसे B पर), उस टेक B पर दक्षिणावर्त (Clockwise) घूमकर नाम पढ़ते हैं। ये नाम जोड़ों सहित परिणाम तालिका (Result Table) में लिखते हैं। इसके पश्चात् इन सदस्यों के समान्तर रेखायें भार रेखा के बिन्दुओं से खींचते हैं तो बल आरेख में बिन्दु f_1 प्राप्त होता है जो D_1F_1 तथा F_1, C_1 नामों में Common है। पुन: नाम D_1F_1 के अनुसार बल आरेख में d_1 से बायीं ओर चलने पर f_1 प्राप्त होता है। अत: ट्रस के जोड़ B पर BA सदस्य में बायीं ओर तीर लगाते हैं। अब इसके विपरीत दूसरे सिरे A पर दायीं ओर तीर लगाते हैं। इन सिरों पर लगे तीरों के विपरीत दिशा में सदस्य के बीच में तीर लगाने पर तनाव प्रदर्शित होता है। इसी प्रकार BC छड़ का नाम F_1C_1 पढ़ा जायेगा तथा बल आरेख में इसके समान्तर खींची गई रेखा में f_1 से C_1 की ओर दिशा के अनुसार ट्रस के स्थानीय आरेख (Space-Diagram) में जोड़ B पर तीर लगाते हैं। इसके विपरीत दिशा में जोड़ C पर तीर लगाकर इस सदस्य के बीच में उनके विपरीत दिशाओं में तीर लगाते हैं, जिससे सम्पीडन का चिह्न प्राप्त होता है। परिणाम तालिका में पहले दो कॉलम्स में मान इस प्रकार प्राप्त होते जाते हैं। बल आरेख की लम्बाइयों को भार रेखा के पैमाने द्वारा बलों के मानों में बदलकर तालिका का तीसरा कॉलम भी पूर्ण करते हैं।

उदाहरण 12. चित्र 9.14 (अ) में दिखाये गये ट्रस के सदस्यों में बल ज्ञात कीजिये।



(अ) (Space Diagram) (ब) (Force Diagram)

चित्र 9.14

Scanned with CamScanner

हल : सर्वप्रथम ट्रस का चित्र ड्राइंग यन्त्रों से नापकर शुद्ध मापों में बनाकर जोड़ E तथा F पर दिये गये बलों को दी गयी दिशाओं में दिखाते हैं। चूँकि रोलर टेक की प्रतिक्रिया सदैव ऊर्ध्वाधर (Vertical) ऊपर की ओर होती है अत: टेक A पर घूर्ण लेकर टेक B की प्रतिक्रिया R_2 निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं। **(घूर्ण लेकर प्रतिक्रिया R_2 ज्ञात करने से यह लाभ है कि ध्रुवीय आरेख (Polar Diagram) तथा रज्जू बहुभुज (Funicular Polygon) आदि नहीं बनाने पड़ेंगे।)**

$$R_2 \times 8 = 100 \times 3 + 200 \times 3 = 1000 \text{ kN}$$

या
$$R_2 = \frac{1000}{8} = 125 \text{ kN}$$

अब एक पैमाना (1 cm = 25 kN) मानकर भारों की दिशा में भार रेखा, 100 kN के लिये a_1b_1, 200 kN के लिये b_1c_1 और R_2 के लिये c_1d_1 चित्रानुसार खींचते हैं। अब टेक A पर दो अज्ञात अवयव AD तथा AC हैं (जिनके नाम A_1E_1 तथा E_1D_1 हैं) इनके समान्तर रेखायें भार रेखा के बिन्दुओ से खींचकर प्रतिच्छेद बिन्दु E_1 प्राप्त करते हैं। अब AD में जोड़ A के पास a_1 से e_1 की दिशा में तीर लगाकर इसके विपरीत AD के दूसरे सिरे पर तीर लगाते हैं और इन दोनों तीरों के विपरीत तीर AD अवयव (या सदस्य) के बीच में लगाते हैं तो यह संकेत तनाव को दर्शाता है। अवयव AC में भी e_1 से d_1 की ओर तीर लटकाकर दूसरे सिरे पर इसके विपरीत दिशा में तीर लगाते हैं और अवयव AC के बीच में तीरों को इनके विपरीत दिशा में लगाने से तनाव का चिहन आता है। इसी प्रकार जोड़ D पर मिलने वाले अवयवों $DE(A_1F_1)$ तथा $DC(F_1E_1)$ के समान्तर रेखायें a_1 तथा e_1 से खींचकर प्रतिच्छेद बिन्दु F_1 प्राप्त करते हैं और ऊपरोक्त बतायी गयी विधि द्वारा तीर लगाकर बलों की प्रकृति (Nature) ज्ञात करते हैं। इसके बाद जोड़ E पर मिलने वाले अज्ञात बलों वाले अवयवों $EF(B_1G_1)$ तथा $EC(G_1F_1)$ के समान्तर रेखायें खींचकर प्रतिच्छेद बिन्दु g_1 प्राप्त करते हैं तथा b_1 से g_1 की ओर दिशा भार रेखा के चित्र में देखकर जोड़ E के पास तीर अवयव EF में लगाते हैं और इसके विपरीत चिहन दूसरे सिरे F के पास और दोनों के विपरीत चिहन अवयव के बीच में लगाते हैं।

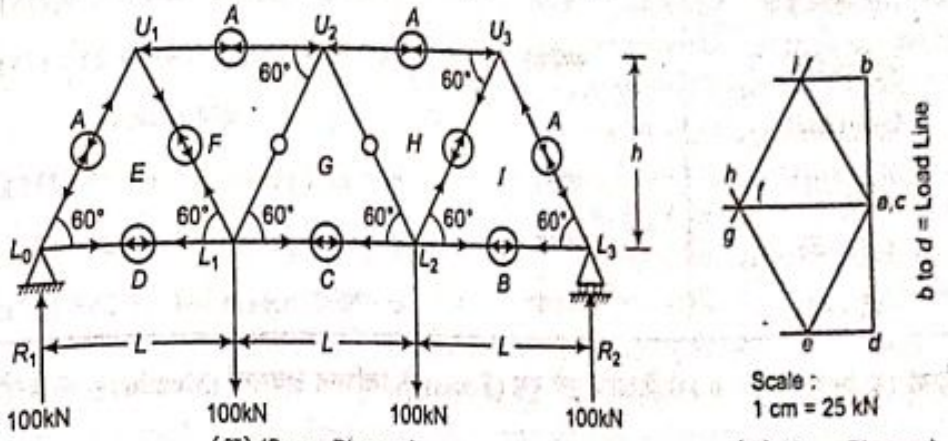
इस प्रकार इस अवयव में तनाव का संकेत प्राप्त होता है। इसी प्रकार EC सदस्य के लिये g_1 से f_1 की ओर तीर E के पास लगाकर इसके विपरीत चिहन दूसरे सिरे C के पास लगाते हैं और दोनों के विपरीत चिहन बीच में लगाते हैं जो सम्पीडन को दर्शाता है। अब जोड़ F पर दो अज्ञात बलों वाले सदस्य FB तथा FC हैं जिनमें बलों के नाम (C_1H_1 तथा H_1G_1) हैं। इन्हीं के समान्तर रेखायें भार रेखा के बिन्दुओं c_1 तथा g_1 से खींचकर प्रतिच्छेद बिन्दु h_1 प्राप्त करते हैं तथा ऊपर बतायी गयी विधि द्वारा तीर लगाकर क्रमश: सम्पीडन तथा तनाव प्राप्त होता है। अब जोड़ B पर BC सदस्य का नाम D_1H_1 है और इनके बिन्दु d_1 व h_1 एक ही बिन्दु पर हैं अत: इस सदस्य में बल शून्य होगा।

परिणाम तालिका (Result Table–12)

क्र० सं०	सदस्यों के नाम (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों का परिमाण kN में (Scale 1 cm = 25 kN)
1.	$AD(A_1E_1)$	तनाव	$1 \times 25 = 25$ kN
2.	$AC(E_1D_1)$	तनाव	$8 \times 25 = 200$ kN
3.	$DE(A_1F_1)$	तनाव	$0{\cdot}8 \times 25 = 20$ kN
4.	$DC(F_1E_1)$	सम्पीडन	$0{\cdot}8 \times 25 = 20$ kN
5.	$EF\ (B_1G_1)$	तनाव	$0{\cdot}8 \times 25 = 20$ kN
6.	$EC(G_1F_1)$	सम्पीडन	$5 \times 25 = 125$ kN
7.	$FB(C_1H_1)$	सम्पीडन	$5 \times 25 = 125$ kN
8.	$FC(H_1G_1)$	तनाव	$9{\cdot}2 \times 25 = 230$ kN
9.	$BC(D_1H_1)$	—	शून्य (Zero)

Scanned with CamScanner

*उदाहरण 13. चित्र 9.15 (अ) में दर्शायी गयी कैंची (Truss) की टेकों पर प्रतिक्रियायें तथा सभी अवयवों में बलों के मान (परिणाम) एवं प्रकृति (Forces and Their Nature) ज्ञात कीजिये।



(अ) (Space Diagram)

Scale :
1 cm = 25 kN

(ब) (Force Diagram)

चित्र 9.15

हल : सर्वप्रथम दिये गये ट्रस के चित्र को ड्राइंग यन्त्रों से मापकर शुद्ध आकार में बनाते हैं तथा जोड़ L_1 व L_2 पर भार-बलों (Loads) एवं टेकों की प्रतिक्रियाओं को दर्शाते हैं। ट्रस की बद्ध टेक L_0 पर घूर्ण लेकर रोलर टेक L_3 की प्रतिक्रिया R_2 को ज्ञात करते हैं। (घूर्ण लेकर प्रतिक्रिया ज्ञात करने से Polar Diagram and Funicular Polygon आदि नहीं बनाने पड़ते हैं)।

अब टेक L_0 पर घूर्ण लेने पर,

$$3L \times R_2 = 100 \times L + 100 \times 2L = 300 \times L$$

या $$R_2 = 100\,\text{kN}$$

और प्रतिक्रिया $$R_1 = 200 - 100 = 100\,\text{kN}$$

अब बो-नोटेशन के अनुसार बलों के बीच के स्थानों के नाम चित्र के अनुसार रखकर और एक उचित पैमाना (1 cm = 25 kN) मानकर एक भार रेखा (Load Line) खींचते हैं। जैसे प्रतिक्रिया $R_2 = 100\,\text{kN}\uparrow$ का नाम जोड़ L_3 पर दक्षिणावर्त घूमकर AB है अत: इसके लिये a से b ऊपर की ओर 100 kN के लिये रेखा खींचते हैं फिर L_2 पर नीचे की ओर लगे भार 100 kN के लिये नाम BC है अत: b से c नीचे की ओर रेखा L_2 पर लगे भार के लिये है। फिर L_1 पर नीचे की ओर लगे भार 100 kN का नाम CD है अत: इसके लिये भार रेखा C से d नीचे की ओर खींचते हैं। जब दोनों टेकों के बीच के सभी अक्षर भार रेखा पर आ जायें तो समझना चाहिये कि भार रेखा पूर्ण हो चुकी है।

इसके पश्चात् इसके दो अज्ञात बलों वाले जोड़ों L_0, U_1, L_1, U_2, U_3 तथा L_3 आदि पर बारी-बारी से नाम पढ़कर तथा सदस्यों के समान्तर रेखायें खींचकर बल आरेख (Force Diagram) पिछले उदाहरणों की भाँति पूर्ण करते हैं। यह चित्र में दर्शाया गया है। ट्रस के सदस्यों में बलों के परिमाण एवं उनकी प्रकृति परिणाम तालिका (Result Table-13) के अनुसार प्राप्त होते हैं।

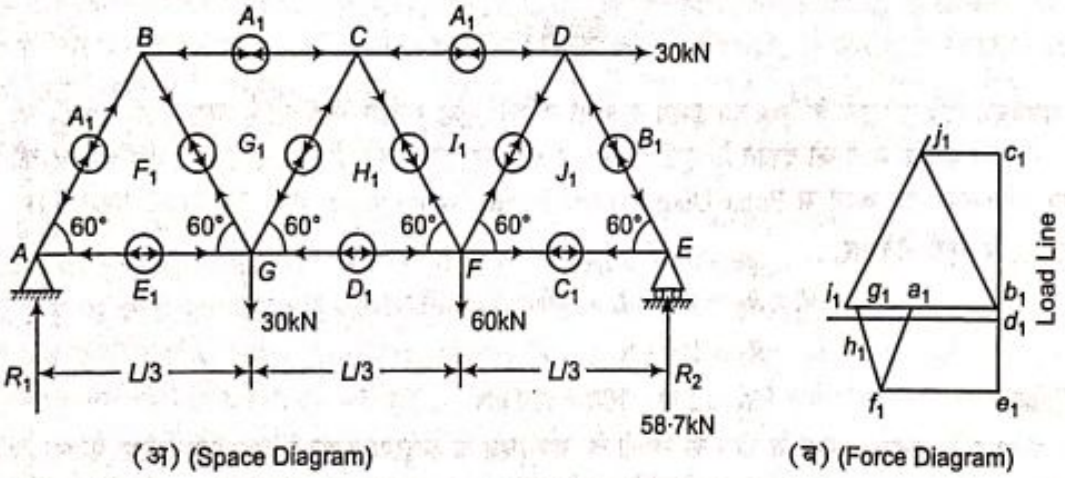
परिणाम तालिका (Result Table–13)

क्र० सं०	सदस्यों के नाम (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों का परिमाण kN में (Scale 1 cm = 25 kN)
1.	$L_0U_1(AE)$	सम्पीडन	$ae \times$ Scale per cm $= 4{\cdot}6 \times 25 = 115\,\text{kN}$
2.	$L_0L_1(ED)$	तनाव	$ed \times$ Scale per cm $= 2{\cdot}3 \times 25 = 57{\cdot}5\,\text{kN}$
3.	$U_1U_2(AF)$	सम्पीडन	$af \times$ Scale per cm $= 4{\cdot}6 \times 25 = 115\,\text{kN}$
4.	$U_1L_1(FE)$	तनाव	$fe \times$ Scale per cm $= 4{\cdot}6 \times 25 = 115\,\text{kN}$

Scanned with CamScanner

5.	$L_1U_2(FG)$	—	शून्य (Zero)
6.	$L_1L_2(GC)$	तनाव	$gc \times$ Scale per cm $= 4 \cdot 6 \times 25 = 115$ kN
7.	$U_2U_3(AH)$	सम्पीडन	$ah \times$ Scale per cm $= 4 \cdot 6 \times 25 = 115$ kN
8.	$U_2L_2(HG)$	—	शून्य (Zero)
9.	$L_2U_3(HI)$	तनाव	$hi \times$ Scale per cm $= 4 \cdot 6 \times 25 = 115$ kN
10.	$L_2L_3(IB)$	तनाव	$ib \times$ Scale per cm $= 2 \cdot 3 \times 25 = 57 \cdot 5$ kN
11.	$U_3L_3(AI)$	सम्पीडन	$ai \times$ Scale per cm $= 4 \cdot 6 \times 25 = 115$ kN

****उदाहरण 14. चित्र 9.16 (अ) में दिखाये गये ट्रस (Truss) के विभिन्न अवयवों (Members) के बलों को ज्ञात कीजिए।**



(अ) (Space Diagram) (ब) (Force Diagram)

चित्र 9.16

हल : सर्वप्रथम दिये गये ट्रस का चित्र उचित पैमाने पर शुद्धता से नापकर बनाते हैं। यह ट्रस का स्थान-आरेख (Space Diagram) होता है।

माना ट्रस की Roller Support पर प्रतिक्रिया R_2 है। अब बद्ध टेक (Fixed Support), A पर आघूर्ण लेकर R_2 का मान ज्ञात करते हैं, जिसमें ट्रस के त्रिभुज की ऊँचाई $= \frac{a\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{L}{3}\right).\frac{\sqrt{3}}{2}$ (माध्यिका है)

$$R_2 \times \left(3 \times \frac{L}{3}\right) = 30 \times \left(\frac{L}{3}\right) + 60 \times \left(2 \times \frac{L}{3}\right) + 30 \times \frac{\left(\frac{L}{3}\right)\sqrt{3}}{2}$$

$$R_2 \times 1 = 10 + 40 + 5\sqrt{3} = 50 + 5\sqrt{3} = 58 \cdot 66 \text{ kN}$$

$$\therefore \quad R_2 = 58 \cdot 7 \text{ kN}$$

इसके पश्चात् ट्रस के जोड़ों पर लगे बलों के बीच के स्थानों के नाम, बो-संकेत (Bow's Notation) के अनुसार, लिखते हैं (जैसे—चित्र में दर्शाया गया है)।

भार रेखा के लिए पैमाना : अब माना 1 cm = 10 kN लेकर ट्रस के जोड़ों पर लगे भारों (या बलों) के लिये एक भार रेखा खींचते हैं जिस पर बिन्दु a_1, b_1, c_1, d_1 तथा e_1 क्रमशः भारों की दिशाओं में चलकर प्राप्त होते हैं (जैसे $\vec{a_1b_1} = 30$ kN क्षैतिज बल दायें ओर के लिये, $b_1c_1\uparrow$ = प्रतिक्रिया R_2 के मान 78·7kN के लिए, $c_1d_1\downarrow = F$ पर नीचे की ओर लगे 60 kN बल के लिये तथा $d_1e_1\downarrow = G$ पर नीचे की ओर लगे 30 kN बल के लिये है)। ट्रस की दोनों टेकों के बीच रखे नाम C_1, D_1 तथा E_1 के संगत बिन्दु c_1, d_1, e_1 भार रेखा में आने पर यह भार रेखा पूर्ण मानी जाती है।

Scanned with CamScanner

अब, ट्रस की जिस टेक पर केवल दो ही सदस्य अज्ञात मिलते हैं (जैसे A या E पर), ऐसी किसी एक टेक A पर दक्षिणावर्त घूमकर नाम पढ़ते हैं और ये नाम, जोड़ों सहित परिणाम तालिका (Result Table) में लिखते हैं। इसके पश्चात् इन सदस्यों (Members) के समान्तर रेखायें, भार रेखा के बिन्दुओं से खींचते हैं जिससे बल आरेख में बिन्दु f_1 प्राप्त होता है। (चूँकि यह स्थान के नाम F_1 के लिये है जो कि A_1F_1 तथा F_1E_1 नामों में उभयनिष्ठ (Common) है। AB के नाम A_1F_1 के अनुसार बल आरेख में a_1 से f_1 की ओर की दिशा है अत: जोड़ A पर इसी दिशा में तीर लगाते हैं। फिर इसके विपरीत दूसरे सिरे B पर तीर लगाते हैं और अन्त में सिरों पर लगे इन दोनों तीरों के विपरीत बीच में तीरों को लगाते हैं तथा इन्हें एक वृत्त के अन्दर बन्द कर देते हैं। इसी प्रकार AG सदस्य के नाम F_1E_1 के अनुसार बल आरेख में f_1 से e_1 की दिशा मिलती है अत: इसके समान्तर वाले सदस्य AG में इसी दिशा में तीर जोड़ A के निकट लगाते हैं तथा दूसरे सिरे पर इसके विपरीत दिशा में तीर लगाते हैं और दोनों तीरों की दिशाओं के विपरीत दिशाओं में तीर बीच में लाकर वृत्त को बन्द करते हैं। a_1f_1 तथा f_1e_1 लम्बाइयों को भार रेखा के पैमाने द्वारा गुणा करके बलों के मान kN में प्राप्त करते हैं। इस प्रकार AB तथा AG सदस्यों में बल एवं उनकी प्रकृति (Nature) ज्ञात हो जाती है।

अब जोड़ B पर सदस्यों BC तथा BG में बल ज्ञात करने के लिये इनके समान्तर रेखायें खींचकर A_1G_1 तथा G_1F_1 के नामों में Common अक्षर G_1 के लिये बिन्दु g_1 प्राप्त होता है। इसके पश्चात् A_1G_1 नाम के अनुसार a_1 से g_1 की दिशा देखकर BC सदस्य में तीर उसी दिशाओं में लगाते हैं तथा दूसरे सिरे पर तीर इसके विपरीत और बीच में दोनों की विपरीत दिशाओं में तीर लगाते हैं। G_1F_1 के लिये g_1 से f_1 की दिशा में तीर, BG सदस्य में नाम पढ़े जाने वाले जोड़ B पर, लगाते हैं। इसके विपरीत दिशा से तीर इस सदस्य के दूसरे सिरे पर तथा दोनों के विपरीत दिशा में सदस्य के बीच में लगाते हैं।

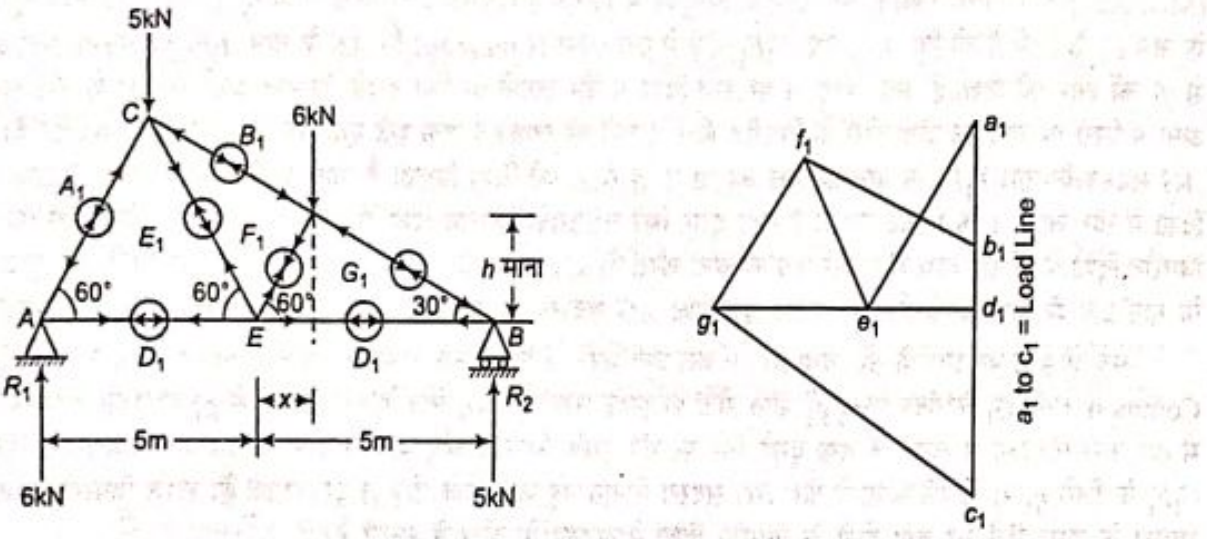
इस प्रकार बारी-बारी से दो अज्ञात सदस्यों वाले जोड़ों पर नाम पढ़कर तथा उनके समान्तर रेखायें खींचकर तीर लगाने की उपरोक्त बतायी गयी प्रक्रिया के अनुसार तीर लगाकर सभी अवयवों में बल एवं उनकी प्रकृति परिणाम तालिका (Result Table)-14 के अनुसार प्राप्त करते हैं।

परिणाम तालिका (Result Table–14)

क्र० सं०	सदस्यों के नाम (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों का परिमाण kN में (Scale 1 cm = 10 kN)
1.	$AB(A_1F_1)$	सम्पीडन	3·6 × 10 = 36 kN
2.	$AG(F_1E_1)$	तनाव	4·8 × 10 = 48 kN
3.	$BC(A_1G_1)$	सम्पीडन	3·6 × 10 = 36 kN
4.	$BG(G_1F_1)$	तनाव	3·6 × 10 = 36 kN
5.	$GC(G_1H_1)$	सम्पीडन	0·2 × 10 = 2 kN
6.	$GF(H_1D_1)$	तनाव	6·7 × 10 = 67 kN
7.	$CD(A_1I_1)$	सम्पीडन	3·8 × 10 = 38 kN
8.	$CF(I_1H_1)$	तनाव	0·2 × 10 = 2 kN
9.	$FD(I_1J_1)$	तनाव	6·8 × 10 = 68 kN
10.	$FE(J_1C_1)$	तनाव	3·4 × 10 = 34 kN
11.	$ED(J_1B_1)$	सम्पीडन	6·8 × 10 = 68 kN

Scanned with CamScanner

**उदाहरण 15. चित्र 9.17 (अ) में दर्शायी गयी ट्रस के सभी अवयवों (Members) में बलों के मान एवं प्रकृति (Forces and Nature) ज्ञात कीजिये। (U.P. 2002)



(अ) (Space Diagram) (ब) (Force Diagram)

चित्र 9.35

हल : दी गयी ट्रस का, ड्राइंग यन्त्रों की सहायता से, वास्तविक रूप में रेखाचित्र (Space Diagram) बनाते हैं। अब ट्रस के जोड़ों पर लगे बलों या भारों तथा टेकों पर प्रतिक्रियाओं के बीच के स्थानों के नाम क्रमश: $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1$ आदि बो-नोटेशन के अनुसार लिखते हैं।

ध्रुवीय आरेख (Polar Diagram) तथा रज्जु बहुभुज (Funicular Polygon) खींचने के कार्यों से बचने के लिये, बद्ध टेक A पर घूर्ण लेकर, रोलर टेक B की प्रतिक्रिया R_2 का मान ज्ञात करेंगे।

$$\because \quad \tan 60° = \frac{h}{x}$$

$$\text{या} \quad \sqrt{3} = \frac{h}{x}$$

$$\text{या} \quad h = x\sqrt{3}$$

$$\text{तथा} \quad \tan 30° = \frac{h}{(5-x)}$$

$$\text{या} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(5-x)}$$

$$\text{या} \quad h = \frac{5-x}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad x\sqrt{3} = \frac{5-x}{\sqrt{3}}$$

$$\text{या} \quad 4 \times x = 5$$

$$\text{या} \quad x = 1{\cdot}25 \text{ मीटर}$$

अब A पर घूर्ण लेने पर,

$$10 \times R_2 = 5 \times \frac{5}{2} + 6 \times (5 + 1{\cdot}25)$$

$$= 12{\cdot}5 + 37{\cdot}5 = 50$$

$$\text{या} \quad R_2 = 5 \text{ kN}$$ यह टेक B की प्रतिक्रिया है।

Scanned with CamScanner

∴ प्रतिक्रिया $R_1 = (5+6) - R_2 = 11 - 5 = 6\,kN$

$R_1 = 6\,kN$

अब एक उचित पैमाना (1 cm = 1 kN) मानकर एक भार रेखा (Load Line), $a_1b_1\downarrow$, $b_1c_1\downarrow$ तथा $c_1d_1\uparrow$ चित्र के अनुसार खींचते हैं जो भारों की दिशाओं में खींची जाती है।

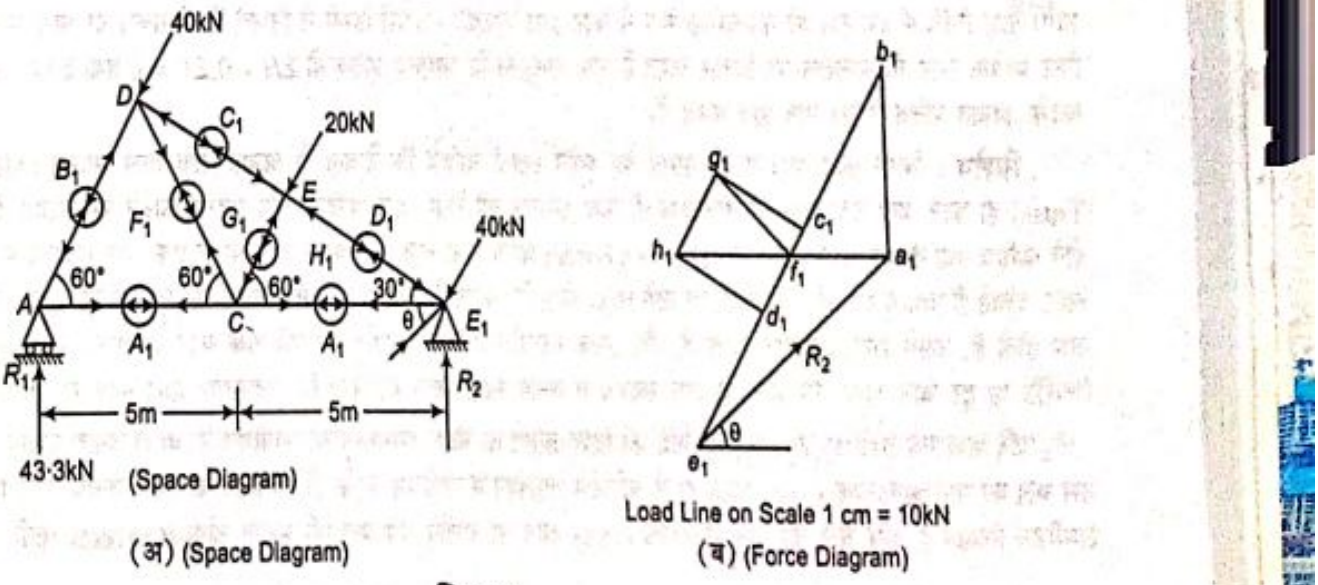
इसके पश्चात् टेक A पर इसके दो अज्ञात सदस्यों $AC(A_1E_1)$ तथा $AE(E_1D_1)$ के समान्तर रेखायें खींचकर प्रतिच्छेद बिन्दु e_1 प्राप्त करते हैं। अब बल आरेख के चित्र की रेखा a_1e_1 से e_1 की दिशा देखकर टेक A के निकट तीर उसी दिशा में लगाते हैं। फिर इसके विपरीत दिशा में दूसरे सिरे C पर तीर लगाकर सदस्य के बीच में सिरों पर लगे तीरों के विपरीत दिशा में तीर लगाते हैं तो यह सम्पीडन है। इस लम्बाई a_1e_1 को नापकर पैमाने द्वारा बल का मान ज्ञात करते हैं।

इसी प्रकार जोड़ पर लगे हुए दो अज्ञात बलों वाले सदस्यों $CD(B_1F_1)$ तथा $CD(F_1E_1)$ के समान्तर रेखायें बल आरेख में खींचकर f_1 प्राप्त करते हैं तथा b_1 से f_1 की दिशा में तीर तथा f_1 से e_1 की दिशा में तीर जोड़ C के निकट लगाते हैं तथा इन सदस्यों में बलों के मान उपरोक्त विधि द्वारा ज्ञात करते हैं। इसी प्रकार जोड़ D तथा B पर भी सदस्यों के नाम पढ़कर तथा समान्तर रेखायें खींचकर ट्रस के सभी सदस्यों में बलों के मान उपरोक्त विधि द्वारा ज्ञात करते हैं जो परिणाम तालिका-15 के अनुसार प्राप्त होते हैं।

परिणाम तालिका (Result Table–15)

क्र० सं०	सदस्यों के नाम (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों का परिमाण kN में (Scale 1 cm = 1 kN)
1.	$AC(A_1E_1)$	सम्पीडन	$a_1e_1 \times$ Scale per cm $= 6{\cdot}9 \times 1 = 6{\cdot}9\,kN = 7\,kN$
2.	$AE(E_1D_1)$	तनाव	$e_1d_1 \times$ Scale per cm $= 3{\cdot}5 \times 1 = 3{\cdot}5\,kN$
3.	$CE(F_1E_1)$	सम्पीडन	$b_1f_1 \times$ Scale per cm $= 7 \times 1 = 7\,kN$
4.	$CE((F_1E_1)$	तनाव	$f_1e_1 \times$ Scale per cm $= 5{\cdot}2 \times 1 = 5{\cdot}2\,kN$
5.	$DB(C_1G_1)$	सम्पीडन	$c_1g_1 \times$ Scale per cm $= 10 \times 1 = 10\,kN$
6.	$DE(G_1F_1)$	सम्पीडन	$g_1f_1 \times$ Scale per cm $= 5{\cdot}2 \times 1 = 5{\cdot}2\,kN$
7.	$BE(D_1G_1)$	तनाव	$d_1g_1 \times$ Scale per cm $= 8{\cdot}6 \times 1 = 8{\cdot}6\,kN$

उदाहरण 16. चित्र 9.18 (अ) में दर्शाये गये ट्रस (Truss) के सदस्यों में बल एवं उनकी प्रकृति ज्ञात कीजिये।



(अ) (Space Diagram) (ब) (Force Diagram)

चित्र 9.18

Scanned with CamScanner

हल : ट्रस का रेखाचित्र सही आकार में मापकर बनाते है तथा बलों को दी गयी दिशाओं में दर्शाते हैं। रोलर टेक A की प्रतिक्रिया R_1 ऊपर की ओर होगी। बद्ध टेक B पर घूर्ण लेकर टेक A पर प्रतिक्रिया R_1 ज्ञात करते हैं।

$$10R_1 = 40 \times BD + 20 \times BE + 40 \times 0$$
$$= 40 \times AB \cos 30° + 20 \times BC \cos 30° + 0$$
$$= 40 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$R_1 = 20\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 25\sqrt{3} = 43{\cdot}3\,\text{kN}$$

अब बो-नोटेशन के आधार पर ट्रस के जोड़ों पर लगे बलों के बीच के स्थानों के नाम तथा सभी त्रिभुजाकार भागों के नाम रखकर किसी उचित पैमाने पर भार रेखा (Load Line) खींचते हैं तथा ट्रस के सदस्यों के समान्तर रेखायें खींचकर बल आरेख पिछले उदाहरणों के अनुसार पूर्ण करते हैं जिससे परिणाम तालिका-16 के अनुसार बलों के मान एवं उनकी प्रकृति (Nature) ज्ञात हो जाती है।

परिणाम तालिका (Result Table–16)

क्र० सं०	सदस्यों के नाम (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों का परिमाण kN में (Scale 1 cm = 10 kN)
1.	$AD(BF)$	सम्पीडन	$bf \times$ Scale per cm in kN $= 5 \times 10 = 50$ kN
2.	$AC(FA)$	तनाव	$fa \times$ Scale per cm in kN $= 2{\cdot}6 \times 10 = 26$ kN
3.	$DE(CG)$	सम्पीडन	$cg \times$ Scale per cm in kN $= 1{\cdot}6 \times 10 = 16$ kN
4.	$DC(GF)$	तनाव	$gf \times$ Scale per cm in kN $= 1{\cdot}9 \times 10 = 19$ kN
5.	$EB(DH)$	सम्पीडन	$dh \times$ Scale per cm in kN $= 1{\cdot}6 \times 10 = 16$ kN
6.	$EC(HG)$	सम्पीडन	$hg \times$ Scale per cm in kN $= 2 \times 10 = 20$ kN
7.	$BC(AH)$	तनाव	$ah \times$ Scale per cm in kN $= 4{\cdot}5 \times 10 = 45$ kN

2. काट विधि (Method of Section)

इस विधि में हम पूर्ण ढाँचे या कैंची (Flame or Truss) को सन्तुलन में मानते हैं, अत: इसके काटे गये भाग भी सन्तुलन में होंगे। काट विधि में हम ट्रस को काल्पनिक रूप से काट द्वारा काटकर (ऊपरी हिस्से से निचले हिस्से तक) दो भागों में बाँट देते हैं। फिर प्रत्येक काट के सन्तुलन पर विचार करते हैं तथा सन्तुलन के सामान्य प्रतिबन्धों $\Sigma H = 0, \Sigma V = 0$ तथा $\Sigma M = 0$ का प्रयोग करके अज्ञात प्रतिबलों का मान ज्ञात करते हैं।

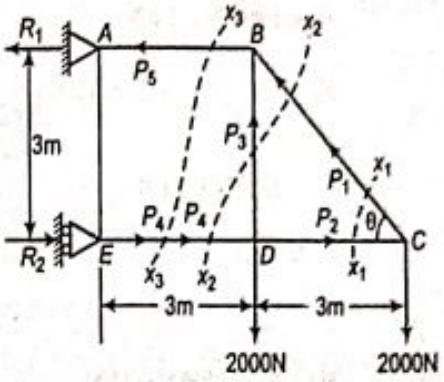
विशेष : किसी काट द्वारा काटते समय यह ध्यान रखना चाहिये कि केवल दो अज्ञात बलों वाले सदस्य (Members of Truss) ही काटे जायें तथा ऊपर से नीचे तक ही काट समतल की रेखा आनी चाहिये। तीन सदस्य काटने पर अज्ञात दो ही सदस्य होने चाहियें तथा तीसरा सदस्य ज्ञात बल (Known Force) वाला होना चाहिये। सैक्शन की रेखा के एक ओर सदस्यों में बल P_1, P_2 आदि दर्शाते हैं तथा दूसरी ओर के जोड़ो पर लगे बलों को प्रयोग करते हैं। सदस्य में लगाये गये जिस तीर की नोक काट की रेखा की ओर होती है, उसमें सम्पीडन माना जाता है और इसके विपरीत होने पर अर्थात् तीर की नोक काट समतल (Section Line) से विपरीत या दूर जाने वाला तीर होने पर उस सदस्य में तनाव माना जाता है, जैसा कि उदाहरणों द्वारा स्पष्ट हो जायेगा।

यदि माने गये बलों P_1, P_2, P_3, P_4 आदि की दिशा तनाव के बदले सम्पीडन या सम्पीडन के बदले तनाव दर्शाया गया हो तो उस बल का मान ऋणात्मक (–ve) आता हो तो परिणाम तालिका में संशोधन करके ही सम्पीडन के बदले तनाव या तनाव के बदले सम्पीडन लिखते हैं और बल का मान धनात्मक (+ve) आने पर दर्शाये गये बल की प्रकृति ठीक (Correct) मानी जाती है तब

Scanned with CamScanner

परिणाम तालिका में कोई परिवर्तन नहीं करते। सैक्सन की रेखा जिन सदस्यों को काटती हुई जाती है, उन सदस्यों में बलों तथा जोड़ों पर लगे बलों को ही प्रयोग करके गणना करते हैं।

उदाहरण 17. चित्र 9.19 में दर्शाये गये ट्रस (Truss) के सभी सदस्यों में बल एवं उनकी प्रकृति (Nature) ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2000, 09)**



चित्र 9.19

हल : ट्रस के दो ही अज्ञात बलों वाले सदस्यों *CD* तथा *CB* को काट, $x_1 - x_1$ से काटा जाना चाहिये जैसा चित्र में दर्शाया गया है। इस काट समतल की रेखा $(x_1 - x_1)$ के बायीं ओर बलों P_1 तथा P_2 को दर्शाते हैं तथा तिरछे वाले बल P_1 के समकोणिक घटक बल करके काट रेखा (Section Line) के दायीं ओर के बलों को प्रयोग करते हैं; जैसे—

$(X_1 - X_1)$ काट के लिये, $\Sigma V = 0$ से

$$P_1 \sin\theta = 2000\,\text{N}$$

$$P_1 \times \frac{3}{3\sqrt{2}} = 2000$$

या

$$P_1 = 2000 \times \sqrt{2}$$

$$= 2828{\cdot}4\,\text{N} = 2{\cdot}828\,\text{kN}$$

अत: ***BC* में तनाव बल**

$$P_1 = 2{\cdot}828\,\text{kN}$$ **उत्तर**

$\Sigma H = 0$ प्रतिबन्ध से,

$$P_2 = P_1 \cos\theta = 2000 \times \sqrt{2} \times \frac{3}{3\sqrt{2}}$$

या

$$= 2000\,\text{N} = 2\,\text{kN}$$

अत: ***CD* में सम्पीडन बल**

$$P_2 = 2\,\text{kN}$$ **उत्तर**

$(X_2 - X_2)$ काट भी दो ही अज्ञात बलों वाले सदस्यों *DE* तथा *DB* को काटती है। तीसरे सदस्य *BC* में बल ज्ञात हो चुका है।

$(X_2 - X_2)$ काट के लिये, $\Sigma V = 0$ से,

$$P_3 + P_1 \sin\theta = 2000 + 2000$$

Scanned with CamScanner

$$P_3 + 2000 \times \sqrt{2} \times \frac{3}{3\sqrt{2}} = 4000$$

या $P_3 = 4000 - 2000 = 2000\,\text{N}$

∴ *BD* में तनाव बल $P_3 = 2000\,\text{N} = 2\,\text{kN}$ उत्तर

$\Sigma H = 0$ से, $P_4 = P_1 \cos\theta = 2000 \times \sqrt{2} \times \frac{3}{3\sqrt{2}}$

या $= 2000\,\text{N} = 2\,\text{kN}$

अत: *ED* में सम्पीडन बल $P_4 = 2\,\text{kN}$ उत्तर

$(x_3 - x_3)$ काट के लिये,

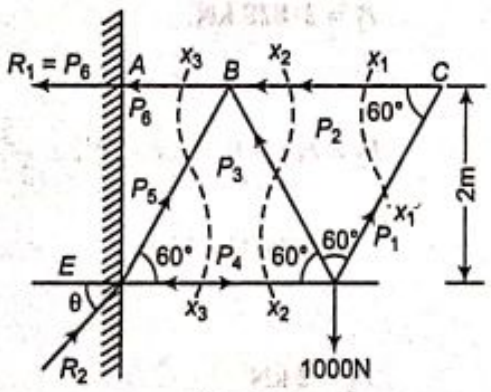
$\Sigma H = 0$ से, $P_5 = P_4 = 2000\,\text{N} = 1\,\text{kN}$

∴ *AB* में तनाव बल = 2 kN उत्तर

परिणाम तालिका (Result Table–17)

क्र० सं०	सदस्यों के नाम (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों का परिमाण (Force in N or kN)
1.	*BC*	तनाव	$P_1 = 2828{\cdot}4\,\text{N} = 2{\cdot}828\,\text{kN}$
2.	*CD*	सम्पीडन	$P_2 = 2000\,\text{N} = 2\,\text{kN}$
3.	*BD*	तनाव	$P_3 = 2000\,\text{N} = 2\,\text{kN}$
4.	*DE*	सम्पीडन	$P_4 = 2000\,\text{N} = 2\,\text{kN}$
5.	*AB*	तनाव	$P_5 = 2000\,\text{N} = 2\,\text{kN}$

उदाहरण 18. चित्र 9.20 दीवार में बद्ध (Fixed) एक कैंची (Truss) दर्शायी गयी है। दीवार पर प्रतिक्रियायें तथा सभी अवयवों में बलों की प्रकृति तथा परिमाण ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2004)**



चित्र 9.20

हल : $(X_1 - X_1)$ काट के लिये,

$\Sigma V = 0$ से, $P_1 \sin 60° = 0$

Scanned with CamScanner

या

$\Sigma H = 0$ से, $P_1 = 0$

या $P_2 = P_1 \cos 60° + 0$

$P_2 = 0$

अत: सदस्यों CD तथा CB में बल क्रमश: P_1 तथा P_2 के मान शून्य हैं।

$(X_2 - X_2)$ काट के लिये,

$\Sigma V = 0$ से,

$P_3 \sin 60° = 1000\,\text{N}$

या

$$P_3 = \frac{1000}{\sin 60°} = \frac{2000}{\sqrt{3}} = 1154{\cdot}7\,\text{N}$$

$\Sigma H = 0$ से,

$$P_4 = P_3 \cos 60° + P_2$$

$$= \frac{2000}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} + 0 = \frac{1000}{\sqrt{3}} = 577{\cdot}35\,\text{N}$$

अत: सदस्य BD में तनाव बल तथा ED में सम्पीडन बल

$P_3 = 1154{\cdot}7\,\text{N}$

$P_4 = 577{\cdot}35\,\text{N}$ उत्तर

$(X_3 - X_3)$ काट के लिये—

$\Sigma V = 0$ से,

$P_5 \sin 60° = 1000\,\text{N}$

या

$$P_5 = \frac{2000}{\sqrt{3}} = 1154{\cdot}70\,\text{N}$$

$\Sigma H = 0$ से,

$$P_6 = P_5 \cos 60° + P_4$$

$$= \frac{2000}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} + \frac{1000}{\sqrt{3}} = \frac{2000}{\sqrt{3}} = 1154{\cdot}70\,\text{N}$$

अत: ट्रस के सदस्य BE में सम्पीडन बल, $P_5 = 1154{\cdot}7\,\text{N}$

तथा AB में तनाव बल $P_6 = 1154{\cdot}7\,\text{N}$ उत्तर

परिणाम तालिका (Result Table–18)

क्र० सं०	सदस्यों के नाम (Name)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों के परिमाण (Forces in N or kN)
1.	CD	—	P_1 = शून्य (Zero)
2.	CB	—	P_2 = शून्य (Zero)
3.	BD या DB	तनाव	$P_3 = 1154{\cdot}7\,\text{N} = 1{\cdot}155\,\text{kN}$
4.	DE या ED	सम्पीडन	$P_4 = 577{\cdot}35\,\text{N} = 0{\cdot}58\,\text{kN}$
5.	BE	सम्पीडन	$P_5 = 1154{\cdot}7\,\text{N} = 1{\cdot}155\,\text{kN}$
6.	AB या BA	तनाव	$P_6 = 1154{\cdot}7\,\text{N} = 1{\cdot}155\,\text{kN}$

Scanned with CamScanner

प्रतिक्रियायें ज्ञात करना :

छड़ AB में तनाव बल P_6 के कारण A पर प्रतिक्रिया होगी जो उसी के बराबर मान की तथा उसके विपरीत दिशा में कार्य करेगी।

अत: $R_1 = P_6 = 1154 \cdot 7\,N$ या $1 \cdot 155\,kN$ **उत्तर**

E पर प्रतिक्रिया, सम्पीडन बलों P_4 तथा P_5 के कारण होगी।

∴ प्रतिक्रिया $R_2 = \sqrt{\{P_4^2 + P_5^2 + 2P_4 \times P_5 \cos 60°\}}$

$$= \sqrt{\{(577 \cdot 35)^2 + (1154 \cdot 7)^2 + 2 \times 577 \cdot 35 \times 1154 \cdot 7 \times \frac{1}{2}\}}$$

$$= \sqrt{(2333331 \cdot 158)} = 1527 \cdot 52\,N$$

∴ $R_2 = 1 \cdot 53\,kN$ **उत्तर**

यदि प्रतिक्रिया R_2 का क्षैतिज से कोण θ है तो $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + \cos\alpha}$ सूत्र से,

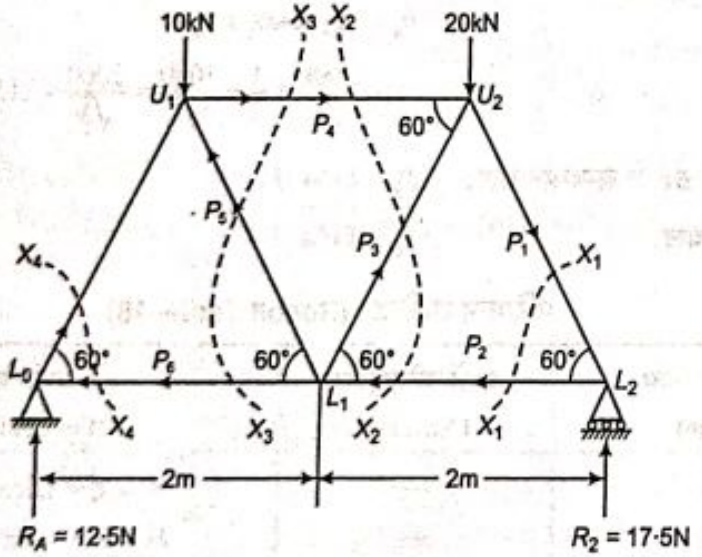
$$\tan\theta = \frac{P_5 \sin 60°}{P_4 + P_5 \cos 60°}$$

$$= \frac{1154 \cdot 7 \times 0 \cdot 86602}{577 \cdot 35 + 1154 \cdot 7 \times 0 \cdot 5} = \frac{999 \cdot 999}{1154 \cdot 7} = 0 \cdot 866025$$

या $\theta = \tan^{-1}(0 \cdot 866025) = 40 \cdot 89° = 41°$

अत: E पर प्रतिक्रिया $R_2 = 1527 \cdot 5N = 1 \cdot 53\,kN$ है तथा इसका क्षैतिज से झुकाव कोण $41°$ है। **उत्तर**

उदाहरण 19. चित्र 9.21 में दिखाये गये भारित ट्रस (Loaded Truss) के सभी अवयवों में बलों के परिमाण एवं प्रकृति तथा आधारों पर प्रतिक्रियायें ज्ञात कीजिये। **(U.K. 2013, U.P. 2003, 08)**



चित्र 9.21

हल :

$R_1 + R_2 = 10 + 20 = 30\,N$

L_0 पर घूर्ण लेने पर, $4R_2 = 10 \times 1 + 20 \times 3 = 70\,N$

या $R_2 = \frac{70}{4} = 17 \cdot 5\,N$

∴ $R_1 = 30 - R_2 = 30 - 17 \cdot 5 = 12 \cdot 5\,N$

Scanned with CamScanner

सर्वप्रथम अज्ञात बलों वाले दो अवयवों U_2L_2 तथा L_1L_2 को काट (Section) $(X_1 - X_1)$ से काटने पर, (जबकि इनमें बल क्रमशः P_1 सम्पीडन तथा P_2 तनाव के माने गये हैं)

$\Sigma V = 0$ से, $P_1 \sin 60° = R_2$ या $P_1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 17{\cdot}5$

या $P_1 = \frac{35}{\sqrt{3}} = 20{\cdot}20726\,\text{N}$

$\Sigma H = 0$ से, $P_2 = P_1 \cos 60 = \frac{35}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{17{\cdot}5}{\sqrt{3}} = 10{\cdot}1036\,\text{N}$

अतः अवयव U_2L_2 में सम्पीडन बल $P_1 = 20{\cdot}20726\,\text{N}$
तथा अवयव L_1L_2 में तनाव बल $P_2 = 10{\cdot}1036\,\text{N}$ उत्तर

$\Sigma V = 0$ से, $P_3 \sin 60° + R_2 = 20\,\text{N}$

या $P_3 = \frac{20 - 17{\cdot}5}{\sin 60°} = \frac{2{\cdot}5 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2{\cdot}88675\,\text{N}$

$\Sigma H = 0$ से, $P_4 + P_3 \cos 60° = P_2$

या $P_4 = 10{\cdot}1036 - 2{\cdot}88675 \times \frac{1}{2} = 8{\cdot}66022\,\text{N}$

अतः L_1U_2 में सम्पीडन बल $P_3 = 2{\cdot}88675\,\text{N}$
तथा U_1U_2 में सम्पीडन बल $P_4 = 8{\cdot}66022\,\text{N}$ उत्तर

जब दो अज्ञात बलों वाले अवयवों (members) U_1L_1 तथा L_0L_1 में बल क्रमशः P_5 (तनाव) तथा P_6 (तनाव) के माने तथा $(X_3 - X_3)$ काट (Section) के आधार पर,

$\Sigma V = 0$ से, $P_5 \sin 60° + R_2 = 20$

या $P_5 = \frac{20 - 17{\cdot}5}{\sin 60°} = \frac{2{\cdot}5 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2{\cdot}88675\,\text{N}$

$\Sigma H = 0$ से, $P_6 + P_5 \cos 60° = P_4$

$P_6 + 2{\cdot}88675 \times \frac{1}{2} = 8{\cdot}66022\,\text{N}$

या $P_6 = 8{\cdot}66022 - 1{\cdot}443375 = 7{\cdot}21685\,\text{N}$

अतः U_1L_1 में तनाव बल $P_5 = 28{\cdot}88675\,\text{N}$
तथा L_0L_1 में तनाव बल $P_6 = 7{\cdot}21685\,\text{N}$ उत्तर

$(X_4 - X_4)$ काट के लिए, $P_7 \sin 60° + R_2 = 10 + 20$

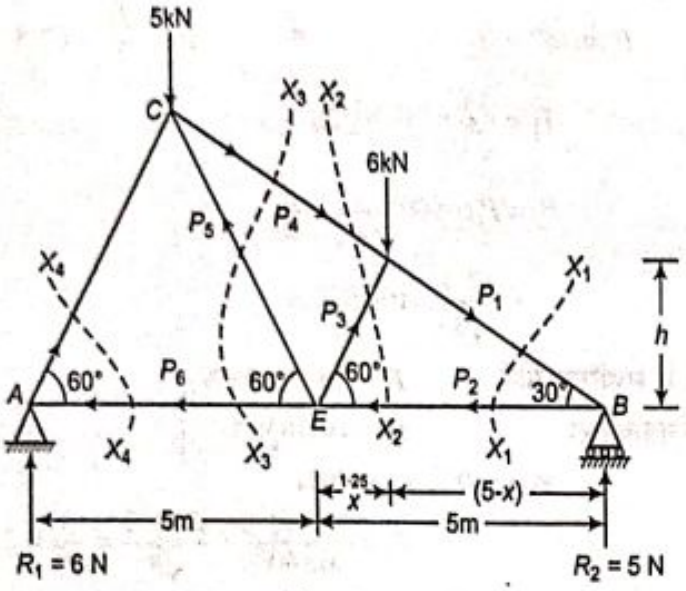
$P_7 \sin 60° = 30 - 17{\cdot}5 = 12{\cdot}5\,\text{N}$

$P_7 = \frac{12{\cdot}5}{\sin 60°} = \frac{12{\cdot}5 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{25}{\sqrt{3}} = 14{\cdot}43376\,\text{N}$

अतः अवयव L_0U_1 में सम्पीडन बल $P_7 = 14{\cdot}43376\,\text{N}$ है। उत्तर

Scanned with CamScanner

उदाहरण 20. चित्र 9.12 में एक 10 m विस्तृति (Span) वाले भारित ट्रस (Loaded Truss) को दिखाया गया है। आधार की प्रतिक्रियायें एवं विभिन्न अवयवों में बलों का मान ज्ञात कीजिये।



चित्र 9.22

हल : टेक A पर घूर्ण लेने के लिए बल 6 kN की क्षैतिज दूरी के लिए x ज्ञात करना होगा।

$$\therefore \quad \tan 60 = \sqrt{3} = \frac{h}{x} \quad \text{या} \quad h = x\sqrt{3}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{(5-x)} \quad \text{या} \quad h = \frac{5-x}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad h = x\sqrt{3} = \frac{5-x}{\sqrt{3}} \quad \text{या} \quad 4x = 5$$

$$\text{या} \quad x = \frac{5}{4} = 1{\cdot}25 \text{ m}$$

अब A पर घूर्ण लेने पर,

$$10 \times R_2 = 5 \times \frac{5}{2} + 6 \times (5 + 1{\cdot}25) = 50$$

$$\text{या} \quad R_2 = \frac{50}{10} = 5 \text{ kN} \qquad \text{उत्तर}$$

$$\text{अत:} \quad R_1 = (5+6) - R_2 = 11 - R_2 = 11 - 5 = 6 \text{ kN} \qquad \text{उत्तर}$$

दो अज्ञात बलों वाले अवयवों (Members) BD तथा BE को $(X_1 - X_1)$ काट द्वारा काटने पर (जबकि बल क्रमश: P_1 सम्पीडन तथा P_2 तनाव के हैं)।

$\Sigma V = 0$ से, $\quad P_1 \sin 30° = R_2 \quad$ या $\quad P_1 = \dfrac{5}{\sin 30°} = 10 \text{ kN}$ (सम्पीडन बल)

$\Sigma H = 0$ से, $\quad P_2 = P_1 \cos 30° = 10 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ kN}$

$$\text{या} \quad P_2 = 8{\cdot}66 \text{ kN} \text{ (तनाव बल)}$$

अत: अवयव BD में सम्पीडन बल $P_1 = 10$ kN
तथा अवयव BE में तनाव बल $= P_2 = 8{\cdot}66$ kN — उत्तर

दो, अज्ञात बल (Unknown Force) वाले सदस्यों CD तथा DE को काटते हुए काट की रेखा (Section Line) $(X_2 - X_2)$ के लिये (जबकि CD तथा DE में बल क्रमश: P_4 एवं P_3 दोनों सम्पीडन के माने गये हैं)।

Scanned with CamScanner

$\Sigma V = 0$ से, $P_3 \sin 60° + R_2 = P_4 \sin 30° + 6$

या $P_3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 = P_4 \times \frac{1}{2} + 6$

या $P_3\sqrt{3} - P_4 = 2$

या $P_4 = (\sqrt{3}P_3 - 2)$ ...(i)

$\Sigma H = 0$ से, $P_3 \cos 60° + P_4 \cos 30° = P_2$

या $P_3 \times \frac{1}{2} + P_4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8{\cdot}66$

या $P_3 + P_4 \times \sqrt{3} = 17{\cdot}32$

या $P_3 + (\sqrt{3}P_3 - 2)\sqrt{3} = 17{\cdot}32$

या $P_3(1+3) - 2\sqrt{3} = 17{\cdot}32$

या $P_3 = \frac{17{\cdot}32 \times 2\sqrt{3}}{4} = 5{\cdot}196\,\text{kN} = 5{\cdot}2\,\text{kN}$

∴ समीकरण (i) से, $P_4 = \sqrt{3} \times 5{\cdot}2 - 2 = 6{\cdot}999 = 7\,\text{kN}$

अत: अवयव *ED* में सम्पीडन बल $P_3 = 5{\cdot}2$ kN
तथा अवयव *CD* में सम्पीडन बल $P_4 = 7$ kN उत्तर

अज्ञात बलों वाले अवयवों *CE* तथा *AE* को काटते हुए खींची गयी काट $(X_3 - X_3)$ के लिये गणना (जबकि इन अवयवों में बल क्रमश: P_5 तथा P_6 है और ये बल तनाव के माने गये हैं)।

$\Sigma V = 0$ से, $P_5 \sin 60° + R_2 = P_4 \sin 30° + 6$

या $P_5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 = 7 \times \frac{1}{2} + 6$

या $P_5 = \frac{(1+3{\cdot}5) \times 2}{\sqrt{3}} = 5{\cdot}196\,\text{kN} = 5{\cdot}2\,\text{kN}$

$\Sigma H = 0$ से, $P_6 + P_5 \cos 60° = P_4 \cos 30°$

या $P_6 + 5{\cdot}2 \times \frac{1}{2} = 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

या $P_6 = 3462\,\text{kN} = 3{\cdot}5\,\text{kN}$

अत: अवयव *CE* में तनाव बल $P_5 = 5{\cdot}2$ kN
तथा अवयव *AE* में तनाव बल $P_6 = 3{\cdot}5$ kN उत्तर

अज्ञात बल वाले सदस्य *AC* में सम्पीडन बल P_7 के लिये माना काट $(X_4 - X_4)$ है।

∴ $\Sigma V = 0$ से, $P_7 \sin 60° + R_2 = 5 + 6$

या $P_7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 5 = 11$

या $P_7 = \frac{6 \times 2}{\sqrt{3}} = 6{\cdot}928\,\text{kN} = 7\,\text{kN}$

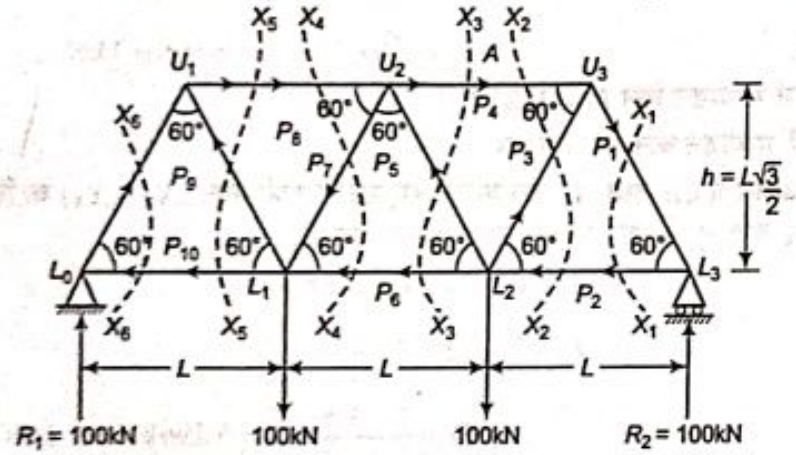
अत: अवयव *AC* में सम्पीडन बल $P_7 = 7$kN उत्तर

Scanned with CamScanner

परिणाम तालिका (Result Table–19)

क्र० सं०	सदस्यों के नाम (Name)	बलों की प्रकृति (Nature)	बल का परिमाण kN में (Force in N or kN)
1.	BD	सम्पीडन	$P_1 = 10\,kN$
2.	BE	तनाव	$P_2 = 8{\cdot}66\,kN$
3.	ED	सम्पीडन	$P_3 = 5{\cdot}2\,kN$
4.	CD	सम्पीडन	$P_4 = 7\,kN$
5.	CE	तनाव	$P_5 = 5{\cdot}2\,kN$
6.	AE	तनाव	$P_6 = 3{\cdot}5\,kN$
7.	AC	सम्पीडन	$P_7 = 7\,kN$

उदाहरण 21. चित्र 9.23 में दिखाये गये ट्रस के सभी अवयवों में बलों की प्रकृति तथा परिमाण ज्ञात कीजिये।



चित्र 9.23

हल : ट्रस के त्रिभुजाकार भागों की ऊँचाई h = समबाहु Δ की माध्यिका $= \frac{L\sqrt{3}}{2}$ बद्ध टेक L_0 पर घूर्ण लेने पर,

$$R_2 \times 3L = 100 \times L + 100 \times 2L = 300\,L$$

या $$R_2 = 100\,kN$$

$\therefore$ $$R_1 = 200 - R_2 = 200 - 100 = 100\,kN$$

$\therefore$ $$R_1 = 100\,kN$$

दो अज्ञात सदस्यों U_3L_3 में सम्पीडन बल P_1 तथा L_2L_3 में तनाव बल P_2 मानने पर, काट $(X_1 - X_1)$ के लिये,

$\Sigma V = 0$ से, $$P_1 \sin 60^\circ = R_2 = 100$$

या $$P_1 = \frac{200}{\sqrt{3}} = 115{\cdot}47\,kN$$

$\Sigma H = 0$ से, $$P_2 = P_1 \cos 60 = \frac{200}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{100}{\sqrt{3}} = 57{\cdot}735\,kN$$

अत: U_3L_3 में सम्पीडन बल $P_1 = 115{\cdot}47\,kN$
तथा L_2L_3 में तनाव बल $P_2 = 57{\cdot}735\,kN$ उत्तर

Scanned with CamScanner

दो अज्ञात सदस्यों (Members) L_2U_3 तथा U_2U_3 को काटते हुए काट रेखा (Section Line) $(X_2 - X_2)$ के लिये,

$\Sigma V = 0$ से, $P_3 \sin 60° = R_2 = 100\,\text{kN}$

या $P_3 = \frac{200}{\sqrt{3}} = 115{\cdot}47\,\text{kN}$

$\Sigma H = 0$ से, $P_4 = P_3 \cos 60° + P_2 = \frac{200}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} + \frac{100}{\sqrt{3}} = \frac{200}{\sqrt{3}} = 115{\cdot}47\,\text{kN}$

अत: U_2L_3 में सम्पीडन बल $P_3 = 115{\cdot}47\,\text{kN}$
तथा L_2L_3 में तनाव बल $P_4 = 115{\cdot}47\,\text{kN}$ उत्तर

दो अज्ञात सदस्यों U_2L_2 में बल P_5 तथा L_1L_2 में बल P_6 को ज्ञात करने के लिये काट $(X_3 - X_3)$ के आधार पर,

$\Sigma V = 0$ से, $P_5 \sin 60° + R_2 = 100$

या $P_5 \sin 60° = 100 - R_2 = 0$

या $P_5 = 0$

अत: U_2L_2 में बल P_5 का मान शून्य (zero) है। उत्तर

$\Sigma H = 0$ से, $P_6 + P_5 \cos 60° = P_4$

या $P_6 = P_4 = 115{\cdot}47\,\text{kN}$ उत्तर

अत: L_1L_2 में तनाव बल $P_6 = 115{\cdot}47\,\text{kN}$ उत्तर

अब दो अज्ञात बलों वाले सदस्यों L_1U_2 तथा U_1U_2 में बलों P_7 तथा P_8 को ज्ञात करने के लिये काट $(X_4 - X_4)$ के आधार पर,

$\Sigma V = 0$ से, $P_7 \sin 60° + 100 = R_2$

या $P_7 \sin 60° = 0$ $(\because R_2 = 100)$

या $P_7 = 0$

$\Sigma H = 0$ से, $P_8 = P_7 \cos 60° + P_6 = 0 + 115{\cdot}47$

या $P_8 = 115{\cdot}47\,\text{kN}$

अत: L_1U_2 में बल $P_7 = 0$ तथा U_1U_2 में सम्पीडन बल $P_8 = 115{\cdot}47\,\text{kN}$ है। उत्तर

अब दो अज्ञात सदस्यों U_1U_1 तथा L_0L_1 में बल P_9 तथा P_{10} होने पर काट $(X_5 - X_5)$ के लिये,

$\Sigma V = 0$ से, $P_9 \sin 60° + R_2 = 100 + 100$

या $P_9 = \frac{100}{\sin 60°} = \frac{200}{\sqrt{3}} = 115{\cdot}47\,\text{kN}$

$\Sigma H = 0$ से, $P_{10} + P_9 \cos 60° = P_8$

या $P_{10} + \frac{200}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = 115{\cdot}47$

या $P_{10} = 115{\cdot}47 - \frac{100}{\sqrt{3}} = 57{\cdot}735\,\text{kN}$

अत: L_1L_1 में तनाव बल $P_9 = 115{\cdot}47\,\text{kN}$
तथा L_0L_1 में तनाव बल $P_{10} = 57{\cdot}735\,\text{kN}$ उत्तर

$(X_6 - X_6)$ काट के लिये, (जबकि L_0U_1 में सम्पीडन बल P_{11} है)

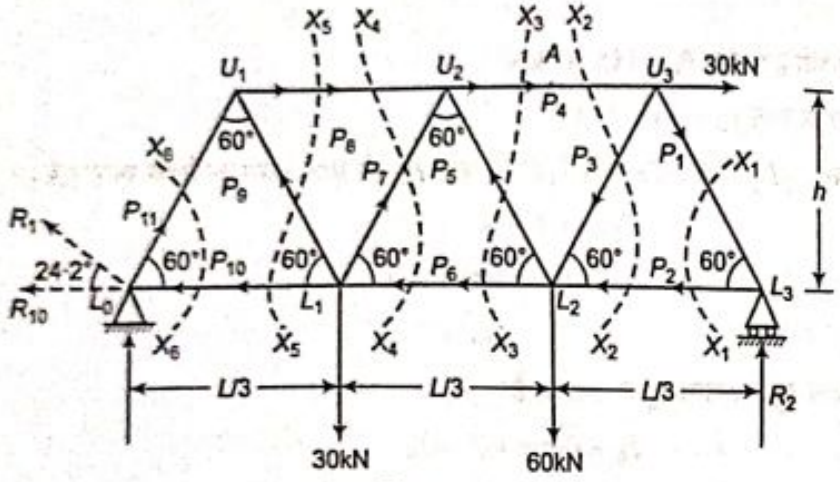
Scanned with CamScanner

$\Sigma V = 0$ से, $\quad P_{11}\sin 60° + R_2 = 100 + 100$

या $\quad P_{11} = \dfrac{100}{\sin 60°} = \dfrac{200}{\sqrt{3}} = 115{\cdot}47\,\text{kN}$

अत: L_0U_1 में सम्पीडन बल $P_{11} = 115{\cdot}47$

उदाहरण 22. चित्र 9.24 में दिखाये गये ट्रस (Truss) के सभी अवयवों (Members) में बलों को ज्ञात करो। उत्तर



चित्र 9.24

हल : प्रत्येक त्रिभुज समबाहु (Equilateral) है। अत: ऊँचाई h त्रिभुज की माध्यिका (Median) होगी।

अत: $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ सूत्र से

$\therefore \quad h = \dfrac{(L/3)\times\sqrt{3}}{2} = \dfrac{L}{2\sqrt{3}}$

अब टेक L_0 पर घूर्ण लेकर रोलर टेक L_3 की प्रतिक्रिया R_2 ज्ञात करने पर,

$$R_2 \times 3 \times \frac{L}{3} = 30 \times h + 30 \times \frac{L}{3} + 60 \times 2 \times \frac{L}{3}$$

या $\quad R_2 = 30 \times \dfrac{1}{2\sqrt{3}} + 30 \times \dfrac{1}{3} + 60 \times 2 \times \dfrac{1}{3}$

$$= \frac{15}{\sqrt{3}} + 10 + 40 = \frac{15 + 50\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 58{\cdot}66\,\text{kN}$$

अत: रोलर टेक L_3 की प्रतिक्रिया $R_2 = 58{\cdot}7\,\text{kN}$

अब अज्ञात बलों वाले दो सदस्यों L_2L_3 तथा U_3L_3 को काटने वाले $(X_1 - X_1)$ काट के लिये (जबकि इन सदस्यों में बल P_1 तथा P_2 क्रमश: तनाव और सम्पीडन के हैं) :

$\Sigma V = 0$ से, $\quad P_1\sin 60° = R_2 = 58{\cdot}7$

या $\quad P_1 = \dfrac{58{\cdot}7}{\sin 60°} = \dfrac{2 \times 58{\cdot}7}{\sqrt{3}} = 67{\cdot}78\,\text{kN}$

यह मान (+ ve) आने पर ज्ञात होता है कि बल P_1 की मानी गयी प्रकृति सही है अर्थात् संपीडन है।

$\Sigma H = 0$ से, $\quad P_2 = P_1\cos 60° = \dfrac{2 \times 58{\cdot}7}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{2} = 33{\cdot}89\,\text{kN}$

यह मान भी (+ ve) है अत: बल P_2 की मानी गयी प्रकृति (तनाव की) सही है।

Scanned with CamScanner

∴ सदस्य U_3L_3 में सम्पीडन बल $P_1 = 67{\cdot}78\ \text{kN} = 68\ \text{kN}$
तथा सदस्य L_2L_3 में तनाव बल $P_2 = 33{\cdot}89\ \text{kN} = 34\ \text{kN}$ उत्तर

अब अज्ञात बलों वाले दो सदस्यों L_2U_3 तथा U_2U_3 को काटते हुए $(X_2 - X_2)$ काट के लिये (जबकि बल P_3 तनाव का तथा सम्पीडन का माना गया है) :

$\Sigma V = 0$ से, $P_3 \sin 60° = R_2 = 58{\cdot}7\,\text{kN}$

या $$P_3 = \frac{58{\cdot}7}{\sin 60°} = \frac{58{\cdot}7 \times 2}{\sqrt{3}} = 67{\cdot}78\,\text{kN}$$

यह मान (+ ve) होने के कारण P_3 की मानी गयी दिशा (तनाव की) सही है।

$\Sigma H = 0$ से, $$P_4 + 30 = P_3 \cos 60° + P_2$$

$$P_4 + 30 = 67{\cdot}78 \times \frac{1}{2} + 33{\cdot}89 = 67{\cdot}78$$

$$P_4 = 67{\cdot}78 - 30 = 37{\cdot}78\,\text{kN}$$

∴ सदस्य L_2U_2 में तनाव बल $P_3 = 67{\cdot}78\ \text{kN} = 68\ \text{kN}$
तथा सदस्य U_2L_3 में सम्पीडन बल $P_4 = 37{\cdot}78\ \text{kN} = 38\ \text{kN}$ उत्तर

अब अज्ञात बलों वाले दो अवयवों L_1L_2 को $(X_3 - X_3)$ काट से काटने पर (जबकि इन सदस्यों में बल क्रमशः P_6 तथा P_5 दोनों तनाव के माने गए हैं)

$\Sigma V = 0$ से, $P_5 \sin 60° + R_2 = 60$

$$P_5 \sin 60° = 60 - 58{\cdot}7 = 1{\cdot}3$$

या $$P_5 = \frac{1{\cdot}3}{\sin 60°} = 1{\cdot}50\,\text{kN}$$

यह मान (+ ve) आने के कारण ज्ञात होता है कि U_2L_2 में बल की प्रकृति तनाव की सही है।

$\Sigma H = 0$ से, $P_6 + P_5 \cos 60° = P_4 + 30$

$$P_6 + 1{\cdot}5 \times \frac{1}{2} = 37{\cdot}78 + 30$$

$$P_6 + 0{\cdot}75 = 67.78$$

या $$P_6 = 67{\cdot}03\,\text{kN}$$

यह मान (+ ve) आने के कारण ज्ञात होता है कि L_1L_2 में बल की मानी गयी तनाव की प्रकृति सही है।

अतः अवयव U_2L_2 में तनाव बल $P_5 = 1{\cdot}5\ \text{kN}$
तथा अवयव L_1L_2 में तनाव बल $P_6 = 67{\cdot}03\ \text{kN}$ उत्तर

अब दो अज्ञात अवयवों U_1U_2 तथा L_1L_2 को काट $(X_4 - X_4)$ से काटने पर (जबकि इन अवयवों में बल क्रमशः P_2 तथा P_8 हैं जिनकी प्रकृति क्रमशः सम्पीडन एवं सम्पीडन की है)

$\Sigma V = 0$ से, $P_7 \sin 60° + R_2 = 60$

$$P_7 = \frac{60 - 58{\cdot}7}{\sin 60°} = 1{\cdot}50\,\text{kN}$$

(+ ve) चिह्न से ज्ञात होता है कि L_1U_2 में बल P_7 की दर्शायी गयी प्रकृति (Nature) सम्पीडन (Compression) की सही है।

$\Sigma H = 0$ से, $P_8 + 30 + P_7 \cos 60° = P_6$

∴ $$P_8 = P_6 - 30 P_7 \cos 60°$$

$$= 67{\cdot}03 - 30 - 1{\cdot}5 \times \frac{1}{2} = 36{\cdot}28\,\text{kN}$$

Scanned with CamScanner

अत: U_1U_2 अवयव में भी बल P_8 की दर्शायी गयी प्रकृति, सम्पीडन की सही है।

$\therefore$ L_1U_2 में सम्पीडन बल $P_7 = 1{\cdot}5\,\text{kN}$

तथा U_1U_2 में सम्पीडन बल $P_8 = 36{\cdot}28\,\text{kN}$ — उत्तर

अज्ञात बलों वाले दो सदस्यों U_1L_1 तथा L_0L_1 को काटते हुए गुजरने वाली काट (Section) $(X_5 - X_5)$ के लिये (जबकि इनमें बल क्रमश: P_9 तथा P_{10} हैं जो कि दोनों ही तनाव के मानने पर)

$\Sigma V = 0$ से, $P_9 \sin 60° + R_2 = 30 + 60$

$$P_9 = \frac{90 - R_1}{\sin 60°} = \frac{90 - 58{\cdot}7}{\sqrt{3}/2} = 36{\cdot}14\,\text{kN}$$

$\Sigma H = 0$ से, $P_{10} + P_9 \cos 60° = P_8 + 30$

$$P_{10} + 36{\cdot}14 \times \frac{1}{2} = 36{\cdot}28 + 30$$

$$P_{10} = 66{\cdot}28 - 18{\cdot}07 = 48{\cdot}21\,\text{kN}$$

या

अत: U_1L_1 में तनाव बल $P_9 = 36{\cdot}14\,\text{kN}$

तथा L_0L_1 में तनाव बल $P_{10} = 48{\cdot}21\,\text{kN}$ — उत्तर

अब L_0U_1 के लिये (X_6X_6) काट से काटने पर,

$\Sigma V = 0$ से, $P_{11} \sin 60° + R_2 = 30 + 60$

या

$$P_{11} = \frac{90 - R_2}{\sin 60°}$$

$$= \frac{90 - 58{\cdot}7}{\sin 60°} = \frac{31{\cdot}3 \times 2}{\sqrt{3}} = 36{\cdot}14\,\text{kN}$$

$\therefore$ L_0U_1 में सम्पीडन बल $P_{11} = 36{\cdot}14\,\text{kN}$ — उत्तर

परिणाम तालिका (Result Table–20)

क्र० सं०	अवयवों के नाम (Name)	बलों की प्रकृति (Nature)	बलों के परिमाण kN में (Force in kN)
1.	U_3L_3	सम्पीडन	$P_1 = 67{\cdot}78\,\text{kN} = 68\,\text{kN}$
2.	L_2L_3	तनाव	$P_2 = 33{\cdot}89\,\text{kN} = 34\,\text{kN}$
3.	L_2U_3	तनाव	$P_3 = 67{\cdot}78\,\text{kN} = 68\,\text{kN}$
4.	L_2U_3	सम्पीडन	$P_4 = 37{\cdot}78\,\text{kN} = 38\,\text{kN}$
5.	U_2L_2	तनाव	$P_5 = 1{\cdot}5\,\text{kN}$
6.	L_1L_2	तनाव	$P_6 = 67{\cdot}03\,\text{kN} = 67\,\text{kN}$
7.	L_1U_2	सम्पीडन	$P_7 = 1{\cdot}5\,\text{kN}$
8.	U_1U_2	सम्पीडन	$P_8 = 36{\cdot}28\,\text{kN} = 36{\cdot}3\,\text{kN}$
9.	U_1L_1	तनाव	$P_9 = 36{\cdot}14\,\text{kN} = 36\,\text{kN}$
10.	L_0L_1	तनाव	$P_{10} = 48{\cdot}21\,\text{kN} = 48\,\text{kN}$
11.	L_0U_1	सम्पीडन	$P_{11} = 36{\cdot}14\,\text{kN} = 36\,\text{kN}$

Scanned with CamScanner

प्रतिक्रिया R_2 के लिये, सूत्र $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$ से,

यहाँ $P = P_{10} = 48{\cdot}2\,\text{kN}$ तथा $Q = P_{11} = 36{\cdot}14\,\text{kN}$

$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\therefore \quad R_2 = \sqrt{\{(48{\cdot}2)^2 + (36{\cdot}14)^2 + 2\times 48{\cdot}2\times 36{\cdot}14\times\cos 120^\circ\}}$$

$$= \sqrt{\{2323{\cdot}24 + 1306{\cdot}1 - 1741{\cdot}95\}}$$

$$= \sqrt{\{1885{\cdot}392\}} = 43{\cdot}42\,\text{kN} \qquad \text{उत्तर}$$

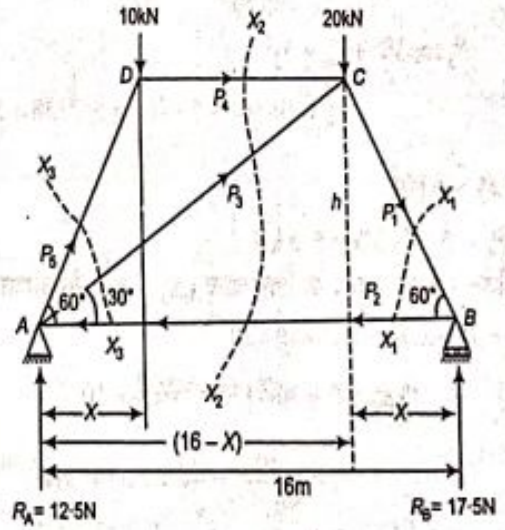
प्रतिक्रिया R_2 का क्षैतिज से कोण θ होने पर,

सूत्र $$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} = \frac{36{\cdot}14\sin 120^\circ}{48{\cdot}2 + 36{\cdot}14\times\cos 120^\circ}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{31{\cdot}298}{77{\cdot}62} = 0{\cdot}4032$$

$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1}(0{\cdot}4032) = 24{\cdot}4^\circ \qquad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 23. चित्र 9.25 में दिखाये गये ट्रस के आधारों पर प्रतिक्रियाओं के मान तथा ट्रस के सभी सदस्यों (Members) में बलों के मान तथा उनकी प्रकृति ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2003; U.K. 2013 S)**



चित्र 9.25

हल : $\tan 60^\circ = \sqrt{3} = \dfrac{h}{x}$ या $h = x\sqrt{3}$

तथा $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{(16-x)}$ या $h = \dfrac{16-x}{\sqrt{3}}$

h के दोनों मानों को समान रखने पर,

$$x\sqrt{3} = \frac{16-x}{\sqrt{3}} \quad \text{या} \quad x = 4\,\text{m}$$

अब A पर घूर्ण लेने पर,

$$16\times R_B = 10\times x + 20\times(16-x)$$

$$= 10\times 4 + 20\times 12 = 40 + 240 = 280$$

या $$R_B = \frac{280}{16} = 17{\cdot}5 \qquad \text{उत्तर}$$

तथा $$R_A = (20+10) - R_B = 30 - 17{\cdot}5 = 12{\cdot}5\,\text{kN} \qquad \text{उत्तर}$$

Scanned with CamScanner

दो अज्ञात बलों वाले सदस्यों BC में सम्पीडन बल P_1 तथा AB में तनाव बल P_2 माना तथा इनसे होकर जाने वाली काट $(X_1 - X_1)$ के लिये,

$\Sigma V = 0$ से, $\quad P_1 \sin 60° = R_B = 17{\cdot}5\,\text{kN}$

या $\quad P_1 = \dfrac{17{\cdot}5}{\sin 60°}$

या $\quad P_1 = \dfrac{35}{\sqrt{3}} = 20{\cdot}20725\,\text{kN}$

$\Sigma H = 0$ से, $\quad P_2 = P_1 \cos 60° = \dfrac{35}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{17{\cdot}5}{\sqrt{3}} = 10{\cdot}10363\,\text{kN}$

अत: BC में सम्पीडन बल $P_1 = 20{\cdot}207\,\text{kN}$
तथा AB में तनाव बल $P_2 = 10{\cdot}104\,\text{kN}$ } उत्तर

दो अज्ञात बलों वाले सदस्यों AC तथा AD को काटते हुए काट $(X_2 - X_2)$ के आधार पर,

$\Sigma V = 0$ से, $\quad P_3 \sin 30° + R_B = 20\,\text{kN}$

या $\quad P_3 = \dfrac{20 - R_B}{\sin 30°} = \dfrac{(20 - 17{\cdot}5)}{1/2} = 2{\cdot}5 \times 2 = 5\,\text{kN}$

$\Sigma H = 0$ से, $\quad P_3 \cos 30° + P_4 = P_2$

या $\quad P_4 = 10{\cdot}104 - 5 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5{\cdot}7738 = 5{\cdot}774\,\text{kN}$ उत्तर

अत: AC में सम्पीडन बल $P_3 = 5\,\text{kN}$
तथा CD में सम्पीडन बल $P_4 = 5{\cdot}774\,\text{kN} = 5{\cdot}8\,\text{kN}$ } उत्तर

अब अज्ञात बल P_5 (सम्पीडन) वाले सदस्य के लिये काट $(X_3 - X_3)$ के आधार पर,

$$P_5 \sin 60° + P_3 \sin 30° + R_B = 10 + 20$$

या $\quad P_5 \sin 60° = 30 - 17{\cdot}5 - 5 \times \dfrac{1}{2} = 10$

$\therefore \quad P_5 = \dfrac{10}{\sin 60°} = \dfrac{20}{\sqrt{3}} = 11{\cdot}547\,\text{kN}$

अत: AD सदस्य में सम्पीडन बल $\quad P_5 = 11{\cdot}55\,\text{kN}$ उत्तर

उदाहरण 24. चित्र 9.26 (अ) में दिखायी गयी ट्रस के अवयव BD, CD तथा CE में बलों का मान तथा प्रकृति ज्ञात कीजिये।

हल : काट विधि का प्रयोग करने पर,

प्रश्न में दिये गये अवयवों के लिये हमें चित्र में $X_1 - X_1$ तथा $X_2 - X_2$ दो काटों पर विचार करना होगा। रोलर टेक P पर प्रतिक्रिया R_P ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर होगी जबकि Q पर प्रतिक्रिया की दिशा ज्ञात नहीं है। इसीलिये Q पर घूर्ण लेना होगा।

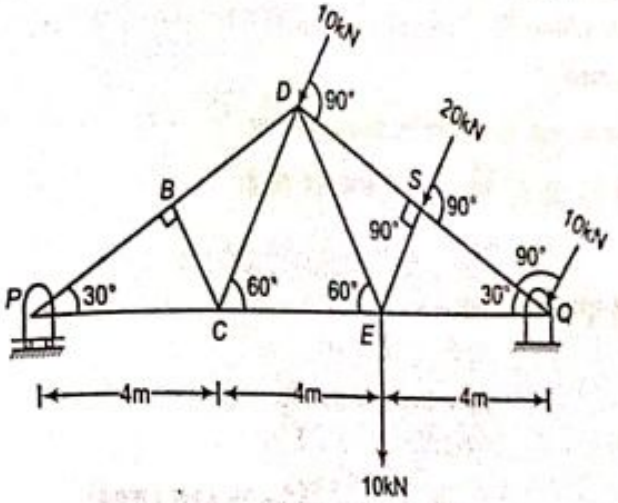
अब ΔEQS में, $\quad \cos 30° = \dfrac{SQ}{4}$

या $\quad SQ = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\,\text{m} = BP$

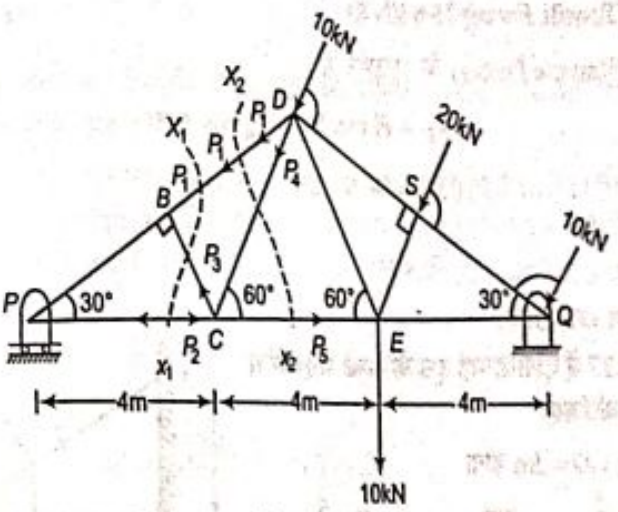
परन्तु $\quad SE = BC = \sqrt{\{4^2 - (2\sqrt{3})^2\}} = 2\,\text{m}$

इसी प्रकर, $\quad DQ = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\,\text{m} = DP$

Scanned with CamScanner



चित्र 9.26 (अ)



चित्र 9.26 (ब)

अब सभी बलों के घूर्ण Q पर लेने पर,

$$R_P \times 12 = 10 \times 4\sqrt{3} + 20 \times 2\sqrt{3} + 10 \times 4$$

या $$R_P = 14{\cdot}9\,\text{kN}$$

काट $(X_1 - X_1)$ के लिये,

इस काट के बायीं ओर के भाग के सन्तुलन पर विचार करने पर,

इस भाग पर बाहर से R_P, P_1, P_2 तथा P_3 बल कार्य कर रहे हैं।

अब C पर घूर्ण लेने से,

$$R_P \times 4 = P_1 \times 2$$

$$\therefore \quad P_1 = \frac{14{\cdot}9 \times 4}{2} = 29{\cdot}8\,\text{kN (सम्पीडन)}$$

अत: ***BD* में सम्पीडन बल 29·8 kN है।** उत्तर

पुन: P पर घूर्ण लेने से,

$$R_P \times 0 + P_1 \times 0 + P_2 \times 0 = P_3 \times 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad P_3 = 0$$

Scanned with CamScanner

अत: BC में बल शून्य (Zero) है।

काट $(X_2 - X_2)$ के लिये,

इस काट से बायीं ओर के भाग के सन्तुलन पर विचार करने पर,

इस भाग पर बाहर से R_P, P_1, P_4 तथा P_5 बल कार्य कर रहे हैं।

D पर घूर्ण लेने से,

P_5 की D से लम्बवत् दूरी $= 6\tan 30° = 6\times\frac{1}{\sqrt{3}}$ है।

$$\therefore \quad R_P \times 6 = P_5 \times 6 \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad P_5 = \frac{14{\cdot}9 \times 6\sqrt{3}}{6} = 25{\cdot}8\,\text{kN (तनाव)}$$

अत: CE में तनाव (Tensile Force) 25·8 kN है। उत्तर

अब ऊर्ध्वाधर बलों (Verticle Forces) के सन्तुलन से,

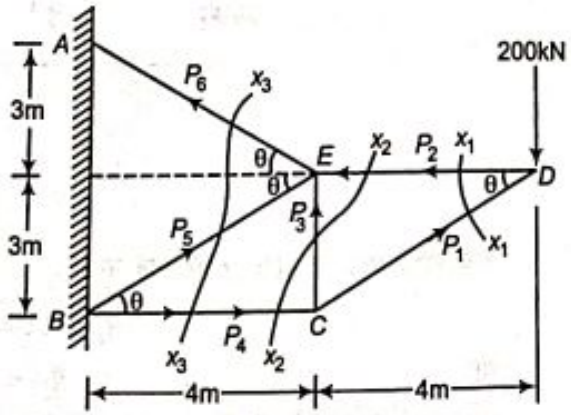
$$\therefore \quad R_P = P_1\cos 60° + P_4\cos 30°$$

$$\text{या} \quad P_4\sqrt{3}/2 = 14{\cdot}9 - 29{\cdot}8\times\frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore \quad P_4 = 0$$

अत: CD में बल शून्य (Zero) है। उत्तर

उदाहरण 25. चित्र 9.27 में दर्शायी गई ट्रस के सभी सदस्यों में बल व उनकी प्रकृति ज्ञात कीजिए।



चित्र 9.27

हल– $\because AE = BE = CD = 5\text{m}$ होगा

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{3}{5} \quad \text{तथा} \quad \cos\theta = \frac{4}{5}$$

काट $(x_1 - x_1)$ के लिये—

तथा CD में सम्पीडन बल P_1 तथा ED में तनाव बल P_2 है।

$\therefore \Sigma V = 0$ से, $\quad P_1\sin\theta = 200$

$\therefore CD$ में सम्पीडन बल,

$$P_1 = \frac{200}{\sin\theta} = \frac{1000}{3} = 333.33\ \text{kN}$$ उत्तर

$\Sigma H = 0$ से, $\quad P_2 = P_1\cos\theta = \frac{1000}{3}\times\frac{4}{5} = \frac{800}{3} = 266.67\ \text{kN}$ उत्तर

$(x_2 - x_2)$ काट के लिये— $\Sigma V = 0$ से, $\quad P_3 = 200\,\text{kN}$

$\Sigma H = 0$ से, $\quad P_4 = P_2 = \frac{800}{3} = 266.67\ \text{kN}$ (BC में तनाव)

$(x_3 - x_3)$ काट के लिये—

$\Sigma V = 0$ से, $\quad P_5\sin\theta + P_6\sin\theta = 200$

$$\therefore \quad P_5 + P_6 = \frac{200}{\sin\theta} = \frac{1000}{3}$$

Scanned with CamScanner

या $$P_5 = \frac{1000}{3} - P_6 \quad \ldots(i)$$

$\Sigma H = 0$ से, $$P_6 \cos\theta = P_5 \cos\theta + P_4$$

$$\therefore \quad P_6 \times \frac{4}{5} = \left(\frac{1000}{3} - P_6\right)\cos\theta + \frac{800}{3}$$

$$\therefore \quad P_6\left[\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\right] = \left(\frac{1000}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{800}{3}\right) = \frac{1600}{3}$$

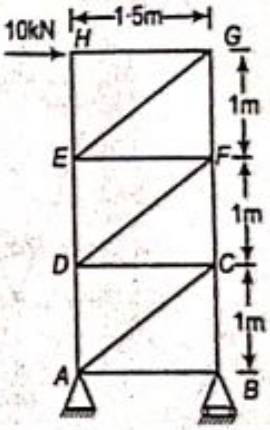
या $$P_6 = \frac{1600}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{1000}{3}$$

अब समी० (i) से, $$P_5 = \frac{1000}{3} - \frac{1000}{3} = 0$$

अत: BE में सम्पीडन बल $P_5 = 0$ अर्थात् किसी प्रकार का बल नहीं है।

तथा AE में तनाव बल, $$P_6 = \frac{1000}{3} = 333.33 \text{ kN}$$ उत्तर

उदाहरण 26. चित्र 9.28 (अ) में दर्शाये गये ट्रस के सदस्यों (Memebrs) ED, DF तथा FC में बल तथा उनकी प्रकृति ज्ञात कीजिये।



चित्र 9.28 (अ)

हल : जिन सदस्यों में बल ज्ञात करना है, उनसे होता हुआ एक काट समतल $(x-x)$ चित्र 9.28 (ब) के अनुसार प्रदर्शित कीजिये। इन तीनों सदस्यों में जो सदस्य तिरछा (जैसे DF) है, के सिरों D तथा F पर बारी-बारी से आघूर्ण लकर बलों को ज्ञात करते हैं, फिर $\Sigma H = 0$ स्थिति प्रयोग करते हैं।

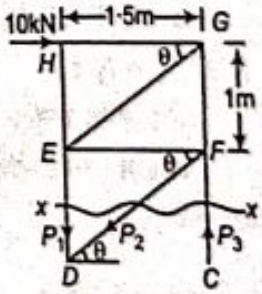
माना ED में बल P_1, DF में बल P_2 तथा FC में बल P_3 है, जिन्हें चित्र 9.28 (ब) में प्रदर्शित किया है।

∵ समकोण Δ से, $$DF = \sqrt{1^2 + 1.5^2} = 1.8 \text{ m है।}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{1}{18} = 0{\cdot}55 \quad \text{तथा} \quad \cos\theta = 0{\cdot}833 \text{ होगा}$$

जोड़ D पर आघूर्ण (ट्रस में काट रेखा से ऊपरी भाग पर बलों के लिये)

$$P_3 \times 1.5 = 10 \times 2 \quad \text{या बल} \quad P_3 = \frac{20}{1.5} = 13.33 \text{ kN}$$



चित्र 9.29 (ब)

(Compression)

जोड़ F पर आघूर्ण लेने पर, $P_1 \times 1{\cdot}5 = 10 \times 1$

∴ सदस्य (Member) ED में तनाव बल, $$P_1 = \frac{10}{15} = 6{\cdot}67 \text{ kN (Tensile)}$$

$\Sigma H = 0$ से, $$P_3 \cos\theta = 10$$

$$P_2 = \frac{10}{\cos\theta} = \frac{10}{0{\cdot}833} = 12 \text{ kN}$$

∴ DF में तनाव बल, $$P_2 = 12 \text{ kN (Telsile)}$$ उत्तर

3. जोड़ विधि या बल वियोजन विधि (Method of Joints)

इस विधि में सर्वप्रथम टेकों (Supports) की प्रतिक्रियायें ज्ञात करते हैं। इसके बाद ट्रस के प्रत्येक जोड़ को अलग करके इनका मुक्त आरेख (Free Body Diagram) खींचते हैं।

Scanned with CamScanner

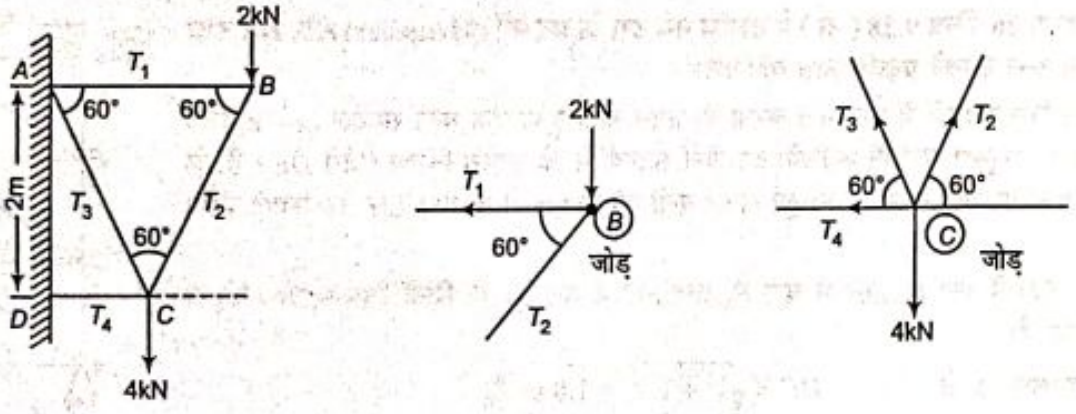
अब विश्लेषण के लिये एक ऐसे जोड़ (Joint) का चुनाव करते हैं जिस पर दो से अधिक अज्ञात बल न लगे हों और ये अज्ञात बल एक ही दिशा में भी न हों।

इसके पश्चात् इस विधि द्वारा कैंची (Truss) या ढाँचे (Frame) के सदस्यों में प्रतिबल ज्ञात करने के लिये हम ट्रस या ढाँचे के प्रत्येक जोड़ को स्थिर तथा सन्तुलन (Equilibrium) में मानते हैं। अब प्रत्येक जोड़ के सन्तुलन के लिये स्थिति विज्ञान के निम्न सन्तुलन प्रतिबन्धों

$\Sigma X = 0$ या $\Sigma H = 0$ तथा $\Sigma Y = 0$ या $\Sigma V = 0$

का प्रयोग करके जोड़ पर लगे दो अज्ञात बलों के मान ज्ञात करते हैं। आरम्भ में प्रत्येक अवयव में हमेशा तनाव बल (Tensile Force) $P_1, P_2, P_3, \ldots$ आदि को मानते हैं और यदि गणना में इनका मान ऋणात्मक (–ve) आता है तो माना हुआ बल विपरीत प्रकृति का, अर्थात् सम्पीडन बल (Compressive Force) होता है। तनाव बल (Tensile Force) के लिये धनात्मक (+ve) तथा सम्पीडन बल (Compressive Force) के लिये ऋणात्मक (–ve) चिह्न का प्रयोग करते हैं। यही क्रिया बारी-बारी से आवश्यक अन्य जोड़ों के लिये अपनाते हैं।

उदाहरण 27. चित्र 9.30 (अ) में दिखाये गये ट्रस के सभी अवयवों में बल ज्ञात कीजिये। (U.K. 2013, B.P.) (U.K. 2012 (S), U.K. 2013 (S.P.B.P.)



चित्र 9.30

हल : यह कैन्टीलीवर के प्रकार की ट्रस है।

माना (दी गयी कैन्टीलीवर ट्रस के) सभी अवयवों AB, BC, CA तथा CD में तनाव बल (Tensile Force) क्रमशः T_1, T_2, T_3 व T_4 है।

जोड़ B के सन्तुलन पर विचार करने पर,

जोड़ B : चूँकि जोड़ B पर तीन बल लग रहे हैं जिसमें से एक ज्ञात तथा दो अज्ञात है अतः सन्तुलन के सामान्य प्रतिबन्धों में $\Sigma H = 0$ से,

$$T_1 + T_2 \cos 60° = 0 \quad \therefore \quad T_1 = -T_2 \cos 60°$$

पुनः $\Sigma V = 0$ से,

$$2 + T_2 \sin 60° = 0 \quad \therefore \quad T_2 = -\frac{2}{\sin 60°} = -\frac{4}{\sqrt{3}} \text{ kN}$$

अतः $T_2 = -\frac{4}{\sqrt{3}}$ kN सम्पीडन का बल है। [∵ चिह्न ऋणात्मक (–ve) है] उत्तर

तथा $T_1 = -T_2 \cos 60° = -\left(\frac{-4}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ kN तनाव बल [∵ चिह्न धनात्मक (+ve) है] उत्तर

जोड़ C : जोड़ C पर चार बल लग रहें हैं जिनमें से दो ज्ञात तथा दो अज्ञात हैं। सन्तुलन के सामान्य प्रतिबन्धों में $\Sigma H = 0$ से,

Scanned with CamScanner

$$T_4 + T_3\cos 60^\circ = T_2\cos 60^\circ$$

या $$T_4 + T_3\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

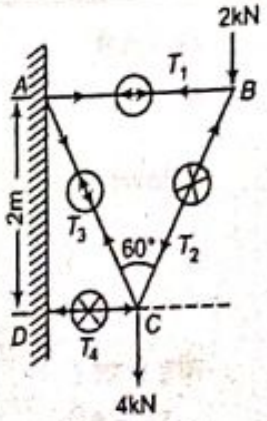
या $$T_4 + \frac{T_3}{2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \ldots (i)$$

तथा $\Sigma V = 0$ से, $T_2\sin 60^\circ + T_3\sin 60^\circ = 4$ kN

या $$\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + T_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4$$

या $$T_3 = \frac{4+2}{\sqrt{3}/2} = \frac{6\times 2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} \text{ kN (तनाव बल)} \quad \text{उत्तर}$$

या $$T_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{12}{2\sqrt{3}} = \frac{-4-12}{2\sqrt{3}} = -\frac{8}{\sqrt{3}} \text{ kN} \quad \text{उत्तर}$$



चित्र 9.30 (द)

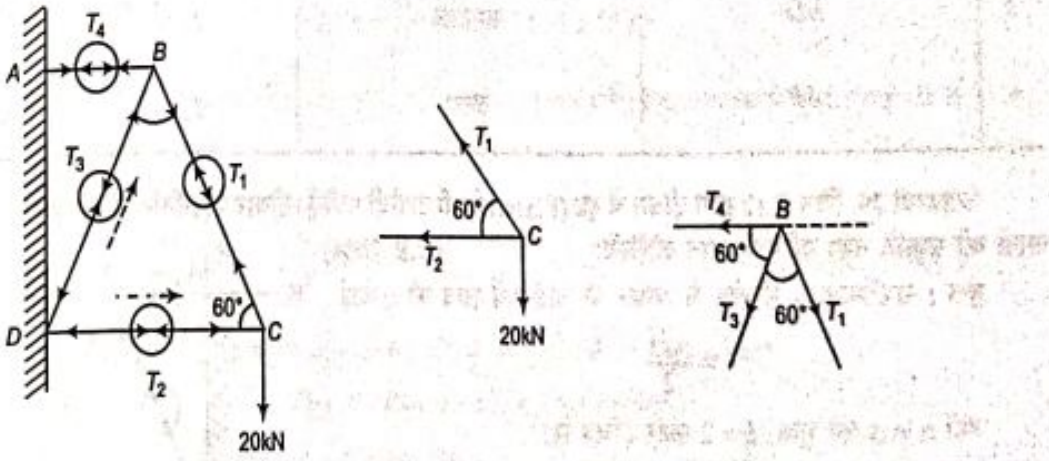
ऋण (−) चिह्न यह प्रकट करता है कि यह सम्पीडन बल है।.

ट्रस के अवयवों में लगने वाले बलों की सही प्रकृति चित्र 9.30 (द) में दिखायी गयी है।

परिणाम तालिका (Result Table–21)

क्र० सं०	ट्रस में अवयव (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बल का परिमाण (Force in kN)
1.	*AB*	तनाव बल	$T_1 = 2/\sqrt{3} = 1{\cdot}155$ kN
2.	*BC*	सम्पीडन बल	$T_2 = 4/\sqrt{3} = 2{\cdot}309$ kN
3.	*CA*	तनाव बल	$T_3 = 12/\sqrt{3} = 6{\cdot}928$ kN
4.	*CD*	सम्पीडन बल	$T_4 = 8/\sqrt{3} = 4{\cdot}619$ kN

उदाहरण 28. चित्र 9.31 (अ) में एक संरचना दर्शायी गयी है, जिस पर 20 kN का अनुप्रस्थ भार लगा है। इसके प्रत्येक अवयव में बल का परिमाण एवं प्रकृति ज्ञात कीजिये। आप आलेखी अथवा वैश्लेषिक विधि में से कोई भी एक विधि प्रयोग कर सकते हैं।



(अ) (ब) (स)

चित्र 9.31

हल : वैश्लेषिक विधि : माना अवयवों में तनाव प्रतिबल या बल क्रमशः T_1, T_2, T_3 तथा T_4 है।

जोड़ C पर :

$\Sigma H = 0$ से, $$T_1\cos 60^\circ + T_2 = 0 \quad \ldots (i)$$

Scanned with CamScanner

$\Sigma V = 0$ से, $T_1 \sin 60° = 20$

या $T_1 = \dfrac{20}{\sin 60°} = \dfrac{20 \times 2}{\sqrt{3}} = \dfrac{40}{\sqrt{3}} = 23{\cdot}1\text{kN}$ (तनाव बल) उत्तर

समीकरण (i) से,

$T_2 = -T_1 \cos 60° = -\dfrac{40}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{2} = -\dfrac{20}{\sqrt{3}}$ (सम्पीडन बल)

$T_2 = -11{\cdot}55\text{kN}$ (सम्पीडन बल)

जोड़ B पर :

$\Sigma H = 0$ से, $T_4 + T_3 \cos 60° = T_1 \cos 60°$ ... (ii)

तथा $\Sigma V = 0$ से, $T_3 \sin 60° + T_1 \sin 60° = 0$

या $T_3 = -\dfrac{T_1 \sin 60°}{\sin 60°} = -T_1 = -\dfrac{40}{\sqrt{3}} = -23{\cdot}1\text{kN}$ (सम्पीडन)

समीकरण (ii) से,

$T_4 = T_1 \cos 60° - T_3 \cos 60°$ या $T_4 = \dfrac{40}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{40}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{40}{\sqrt{3}}$

$= 23{\cdot}1\text{ kN}$ तनाव उत्तर

परिणाम तालिका (Result Table–22)

क्र० सं०	ट्रस में अवयव (Members)	बलों की प्रकृति (Nature)	बल का परिमाण kN में (Force in kN)
1.	BC	तनाव	$T_1 = \dfrac{40}{\sqrt{3}} = 23{\cdot}09\text{kN}$
2.	CD	सम्पीडन	$T_2 = \dfrac{20}{\sqrt{3}} = 11{\cdot}55\text{kN}$
3.	BD	सम्पीडन	$T_3 = \dfrac{40}{\sqrt{3}} = 23{\cdot}09\text{kN}$
4.	AB	तनाव	$T_4 = \dfrac{40}{\sqrt{3}} = 23{\cdot}09\text{kN}$

उदाहरण 29. चित्र 9.32 द्वारा दीवार में दृढ (Fixed) कैंची दर्शायी गयी है। दीवार पर प्रतिक्रियायें तथा सभी अवयवों में बलों की प्रकृति तथा परिमाण ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2004)**

हल : समत्रिबाहु Δ में शीर्ष से आधार पर डाले गये लम्ब की लम्बाई

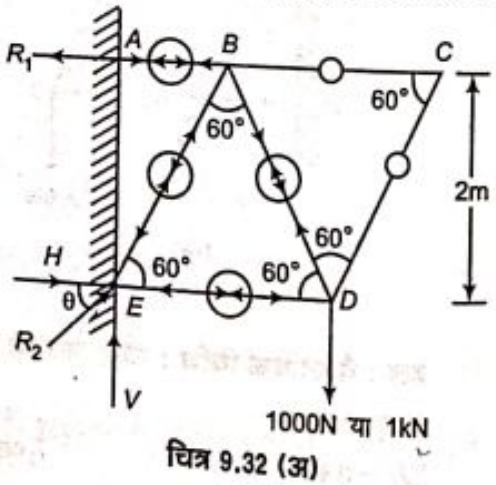
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

जहाँ $\alpha = \Delta$ की भुजा, $h = 2$ मीटर (चित्र से)

अत: $2 = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

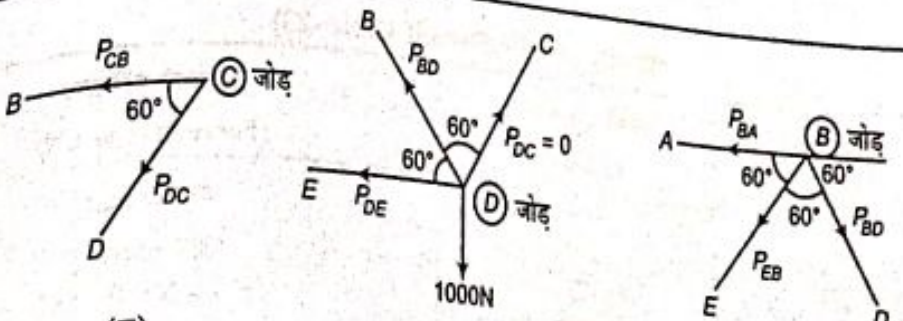
$\therefore$ भुजा $ED = \alpha = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$ मीटर

E के परित: आघूर्ण लेने पर, ($\Sigma M = 0$ से),



चित्र 9.32 (अ)

Scanned with CamScanner



चित्र 9.32 (ब)-(द)

$$R_1 \times AE = 1000 \times ED$$

या $$R_1 \times 2 = 1000 \times \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad R_1 = \frac{1000 \times 4/\sqrt{3}}{2}$$

$$= 1154 \cdot 7\,\text{N}$$

उत्तर

$\Sigma Y = 0$ से, R_2 का ऊर्ध्वाधर घटक बल $V = 1000\,\text{N}$

$\Sigma X = 0$ से, R_2 का क्षैतिज घटक बल $H = R_1 = 1154 \cdot 7\,\text{N}$

$$R_2 = \sqrt{[(1154 \cdot 7)^2 + (1000)^2]} = 1527 \cdot 5\,\text{N}$$

उत्तर

तथा $$\tan\theta = \frac{1000}{1154 \cdot 7} = 0 \cdot 8660 \text{ या } \theta = 41° \text{ (लगभग)}$$

जोड़ C पर : $P_{DC} \sin 60° = 0$ या $P_{DC} = 0$ ($\therefore CD$ में बल का मान शून्य है)

$P_{CB} + P_{DC} \cos 60° = 0$ या $P_{CB} = 0$ ($\therefore BC$ में बल का मान शून्य है)

जोड़ D पर : $\Sigma V = 0$ से, $P_{BD} \sin 60° + P_{DC} \sin 60° = 1000\,\text{N}$

या $$P_{BD} \sin 60° = 1000\,\text{N}$$

या $$P_{BD} = \frac{2000}{\sqrt{3}} = 1154 \cdot 7\,\text{N} = 1 \cdot 15\,\text{kN}$$

$\therefore$ BD में बल $= P_{BD} = 1 \cdot 15\,\text{kN}$ (+ve) है, अत: अवयव में बल तनाव का है

$\Sigma H = 0$ से, $P_{ED} + P_{BD} \cos 60° = 0$

या $$P_{ED} = -P_{BD} \cos 60°$$

या $$P_{ED} = -\frac{2000}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = -\frac{1000}{\sqrt{3}} = -577 \cdot 35\,\text{N}$$ (–ve) चिह्न सम्पीडन को प्रदर्शित करता है

जोड़ B पर : $\Sigma V = 0$ से, $P_{EB} \sin 60° + P_{ED} \sin 60° = 0$ या $P_{EB} \sin 60° = -P_{BD} \sin 60°$

या $$P_{EB} = -P_{BD} = -1154 \cdot 7\,\text{N}$$ (सम्पीडन)

$\Sigma H = 0$ से, $P_{BA} + P_{EB} \cos 60° = P_{BD} \cos 60°$

$\therefore$ AB में बल $$P_{AB} = -\left(-\frac{2000}{\sqrt{3}} \times \frac{L}{2}\right) + \frac{2000}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = 1154 \cdot 35\,\text{N (+)ve}$$

$$= 1 \cdot 15\,\text{kN (तनाव)}$$

Scanned with CamScanner

परिणाम तालिका (Result Table–23)

क्र० सं०	अवयवों के नाम	बलों की प्रकृति (Nature)	बल का परिमाण (Force in N or kN)
1.	*BC*	—	शून्य (Zero)
2.	*CD*	—	शून्य (Zero)
3.	*ED*	सम्पीडन	577·4 N = 0·58 kN
4.	*BD*	तनाव	1154·7 N = 1·15 kN
5.	*AB*	तनाव	1154·7 N = 1·15 kN
6.	*BE*	सम्पीडन	1154·7 N = 1·15 kN

अभ्यास

1. निम्न रिक्त स्थानों में उपयुक्त शब्द भरिये—

(i) एक समान अनुप्रस्थ काट वाली एक ऐसी छड़ को धरन कहते हैं, जिस पर कार्य करने वाले सभी बल, भार या बल युग्म छड़ की ..... से गुजरने वाले समतल में होते हैं।

(ii) त्रिभुजाकार आकृतियों में जोड़कर बनाई गई, ढाँचा संरचना को ..... कहते हैं।

(iii) दो से अधिक सीधी छड़ों को उनके सिरों पर कब्जों (Hinges) द्वारा जोड़कर बनाई गई संरचना (Structure) को ..... कहते हैं।

(iv) कैंची (Truss) के दो उपयोग लिखिये।

(1) ..... (2) .....

(v) धरन (Beam) के तीन उपयोग लिखिये—

(1) ..... (2) ..... (3) .....

(vi) जिस धरन (Beam) या कैंची का एक सिरा दीवार आदि में बद्ध तथा दूसरा सिरा स्वतन्त्र (Free) होता है, उसे ..... धरन या कैंची कहते हैं।

(vii) जिस धरन या कैंची का एक सिरा प्राय: कब्जेदार टेक पर तथा दूसरा सिरा रोलर टेक पर सहारा जाता है, उसे ..... धरन या कैंची कहते हैं।

(viii) अपने दोनों सिरों पर बद्ध धरन को ..... धरन कहते हैं।

(ix) टेक से एक ओर बाहर निकली धरन को ..... कहते हैं।

(x) पूर्ण ढाँचे के लिये प्रतिबन्ध ..... सन्तुष्ट होना चाहिये।
जहाँ N = ट्रस में सदस्यों की संख्या तथा J = जोड़ों की संख्या है।

(xi) अपूर्ण ढाँचा (Deficient Frame) में सदस्यों की संख्या (N) ढाँचे को सन्तुलल में रखने के लिये आवयक सदस्यों की संख्या से ..... होती है।

(xii) अतिरिक्त ढाँचा (Redundant Frame) में सदस्यों की संख्या (N), ढाँचे सन्तुलन में रखने के लिये आवश्यक सदस्यों की संख्या से ..... होती है।

(xiii) रोलर टेक पर प्रतिक्रिया सदैव ..... पर लम्ब दिशा में होती हैं।

(xiv) ढाँचे (Frame) का जो सदस्य (Member) तनाव बल के अधीन होता है, उसे ..... कहते हैं।

(xv) ढाँचे (या Truss) का जो सदस्य, सम्पीडन बल के अधीन होता है, उसे ..... कहते हैं।

Scanned with CamScanner

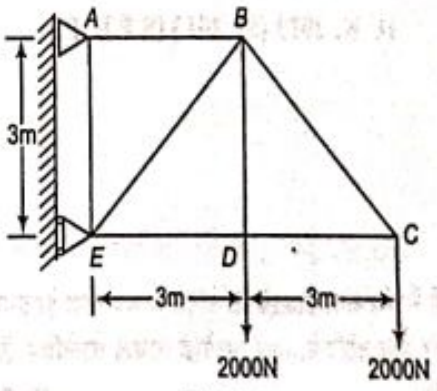
उपरोक्त प्रश्न के उत्तर

(i) अक्ष (Axis), (ii) कैंची (Truss), (iii) ढाँचा (Frame), (iv) (i) पुलों में (ii) बड़े हॉल की छतों में, (v) (i) छत या फर्श की कड़ियों में, (ii) मशीनों के आधार (Base) में, (iii) ढाँचे (ट्रस) में, (vi) कैन्टलीवर, (vii) शुद्धालम्ब (या सरल आलम्बित), (viii) आबद्ध (Fixed), (ix) एक ओर ओवर हंग घरन (One Side Over-hung Beam), (x) "$N = 2J - 3$", (xi) कम ($\because N < 2J - 3$), (xii) अधिक ($\because N > 2J - 3$), (xiii) उसके समतल, (xiv) टाईबार (या तान छड़), (xv) स्ट्रट (Strut)।

2. घरन (Beam) किसे कहते हैं? ये कितने प्रकार की होती हैं? प्रत्येक को सचित्र समझाइये। **(U.P. 2003)**
3. घर (Beam) पर भार (Load) कितने प्रकार से लगाये जा सकते हैं? प्रत्येक प्रकार के भार को समझाइये।
4. घरन या कैंची (Beam and Truss) की टेकें (Supports) कितने प्रकार की होती हैं? समझाइये कि बद्ध टेक तथा रोलर टेक (Roller Support) पर प्रतिक्रियायें किस प्रकार की होती हैं?
5. घरन के स्पष्ट विस्तार (Clear Span) तथा प्रभावी विस्तार (Effective Span) से आप क्या समझते हैं?
6. घरन ढाँचा (Frame) तथा कैंची (Truss) से आप क्या समझते हैं? **(U.P. 2003)**
7. तान (Tie) तथा थाम या सम्पीडन अंग (Sruct) को समझाइये। **(U.P. 2013)**
8. घरनों (Beams) तथा कैंचियों (Trusses) के भैतिक महत्त्व एवं उपयोग बताइये।
9. अभाव ढाँचा तथा अतिरिक्त ढाँचा (Deficient Frame and Redundant Frame) में अन्तर बताइये। **(U.K. 2012-S)**
10. बो (Bow's) के नोटेशन तथा फनिकुलर आरेख को समझाइये। **(U.P. 2011, 13)**
11. रज्जु बहुभुज (Funicular Polygon), पोलर डायग्राम तथा स्थान आरेख को समझाइये। **(U.P. 2008)**
12. कैंची (Truss) से आप क्या समझते हैं? बताइये कि एक घूर्ण ढाँचा (Perfect Frame) से आपका क्या तात्पर्य है?

विशेष : ट्रस के सदस्यों में बल एवं प्रकृति ज्ञात करने पर आधारित प्रश्न

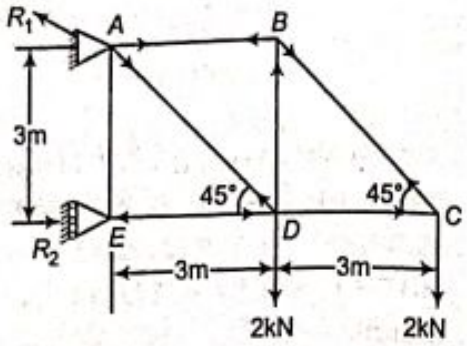
13. चित्र 9.33 में दर्शाये गये ट्रस के सभी अवयवों में बलों को ज्ञान कीजिये। **(U.P. 2000)**



चित्र 9.33

Scanned with CamScanner

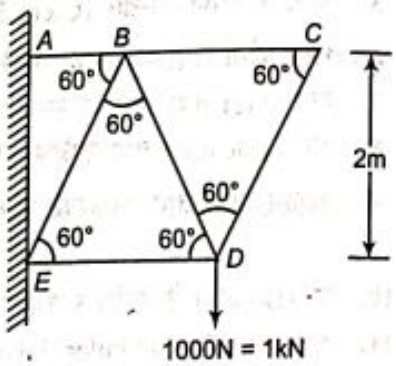
14. चित्र 9.34 मे ट्रस के सभी अवयवो में बलों का परिमाण तथा प्रकृति ज्ञात करें और A तथा E पर प्रतिक्रियायें भी निकाले। **(U.P. 2005)**



चित्र 9.34

[उत्तर—$(A-B)$ तनाव 20 kN, $(B-C)$ तनाव 28.3 kN,
$(C-D)$ सम्पीडन 20kN, $(B-D)$ सम्पीडन 20 kN,
$(A-D)$ तनाव 28.3kN, $(D-E)$ सम्पीडन 60kN,
$R_1 = 44.5$ kN, $R_2 = 60$kN]

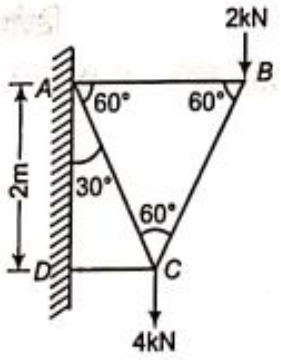
15. चित्र 9.35 द्वारा दीवार में दृढ (Fixed) एक कैंची दर्शायी गयी है। दीवार पर प्रतिक्रियायें तथा सभी अवयव में बलों की प्रकृति तथा परिमाण ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2004)**



चित्र 9.35

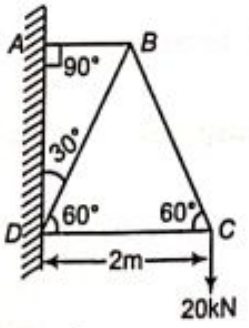
[उत्तर—AB तनाव 1154.7N, BC शून्य
CD शून्य, DE सम्पीडन 577.35 N,
BD तनाव 1154.7N, BE सम्पीडन 1154.6 N
तथा प्रतिक्रियायें $R_A = 1154 \cdot 7$ N (क्षैतिज),
$R_{EH} = 1154 \cdot 7$ N, $R_{EV} = 1000$N]

16. चित्र 9.36 में दर्शाये गये ट्रस के अवयवों पर बल एवं उनकी प्रकृति ज्ञात करें।
[उत्तर—AB में $2/\sqrt{3}$ kN तनाव, BC में $4/\sqrt{3}$kN सम्पीडन,
AC में $12/\sqrt{3}$ kN तनाव, CD में $8/\sqrt{3}$kN सम्पीडन]
(U.K. 2012 (S), 2013 (S.P.B .P.)



चित्र 9.36

17. चित्र 9.37 में एक संरचना दर्शायी गयी है, जिस पर 20kN का अनुप्रस्थ भार लगा है। इसके प्रत्येक अवयव में बल का परिमाण एवं प्रकृति ज्ञात कीजिये। आप आलेखी अथवा वैश्लेषिक विधि में से कोई भी विधि का प्रयोग कर सकते हैं। **(U.P. 2004)**



चित्र 9.37

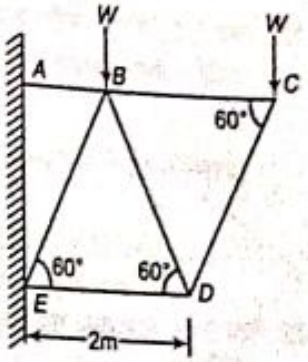
[उत्तर—$CD = 11547$ kN सम्पीडन, $BC = 23.0945$ kN तनाव,
$BD = 23.095$ kN सम्पीडन, $AB = 23.095$ kN तनाव]

Scanned with CamScanner

18. चित्र 9.38 में दर्शाये गये ट्रस के BE अवयव में बल एवं प्रकृति एवं दीवार पर प्रतिक्रिया ज्ञात करें।

[उत्तर—BE में बल = 2.3 W सम्पीडन

A पर प्रतिक्रिया = 2.3 W, E पर प्रतिक्रिया = 3.06 W]



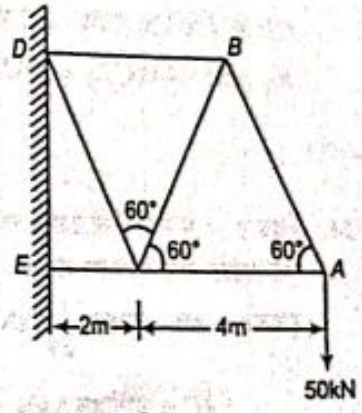
चित्र 9.38

19. चित्र 9.39 में दर्शाये गये ट्रस में बलों का परिणाम एवं उनकी दिशा में ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—AB = 57.73 kN तनाव, AC = 28.86 kN सम्पीडन,

BC = 57.73 kN सम्पीडन, BD = 57.73. kN तनाव,

CD = 57.73 kN तनाव, CE = 86.60 kN सम्पीडन]

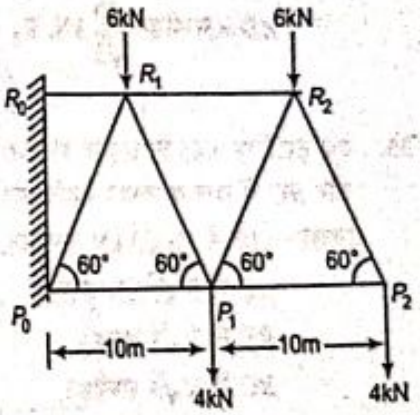


चित्र 9.39

20. चित्र 9.40 में दिखायी गयी ट्रस के सदस्यों में बल एवं प्रकृति तथा जोड़ P व R_0 पर प्रतिक्रियायें ज्ञात कीजिये। (U.P. 2006)

[उत्तर—उदाहरण 8 देखें एवं इसे हल करें।]

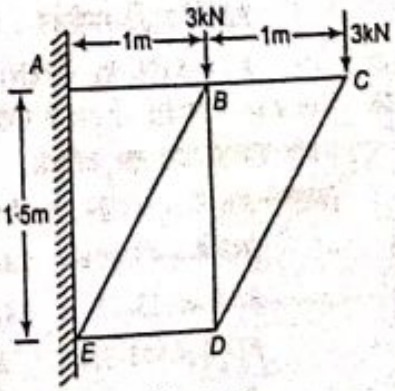
$\left[R_0 = \frac{48}{\sqrt{3}} \text{ kN}, P_0 = 38{\cdot}0436 \text{ kN}\right]$



चित्र 9.40

21. चित्र 9.41 में दर्शाये गये ढाँचे की टेकों पर प्रतिक्रिया तथा अवयवों (Members) AB, BE तथा ED में बल एवं उनकी प्रकृति ज्ञात कीजिये।

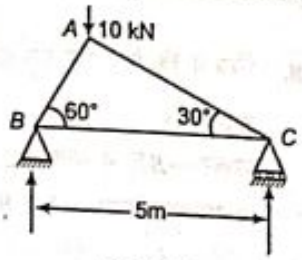
[उत्तर—AB = 8·6 kN (T), BE = 2kN (T), ED = 2 kN (Comp.)]



चित्र 9.41

Scanned with CamScanner

22. चित्र 9.42 में एक भारित शुद्धालम्बित ट्रस (Simply Supported Truss) दिखाई गई है। इसके सभी सदस्यों में बल तथा उनकी प्रकृति ज्ञात करें। **(U.K. 2012-S, 2013 S.P.B.P.)**



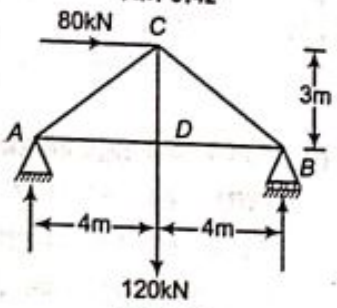
चित्र 9.42

[उत्तर—AB में संपीडन $= \frac{15}{\sqrt{3}} = 8{\cdot}66$ kN

BC में तनाव $= 5\sqrt{3}/2 = 4{\cdot}33$ N

AC में संपीडन $= 5$ kN]

23. चित्र 9.43 में दिखयी गयी ट्रस के सभी सदस्यों में बल तथा उनकी प्रकृति (Nature) ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2001)**



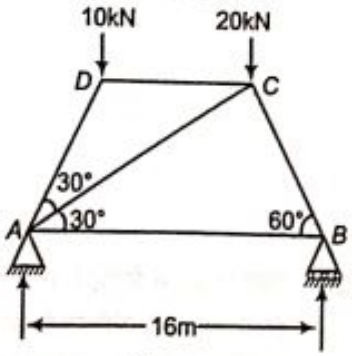
चित्र 9.43

[उत्तर—AC में 50 kN संपीडन, AD में 120 kN तनाव,

CD में 120 kN तनाव, BC में 150 kN संपीडन, BD में 120 kN तनाव,

$R_A = 85{\cdot}44$ kN, $R_B = 90$ kN, क्षैतिज से कोण $\theta = 20{\cdot}56°$]

24. चित्र 9.44 में एक कैंची दर्शायी गयी है। टेकों पर प्रतिक्रियायें एवं उसके अवयवों में बलों की प्रकृति तथा परिमाण का मान ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2003, 08)**



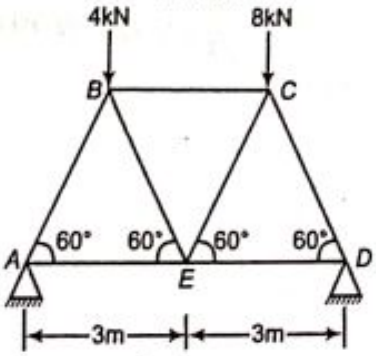
चित्र 9.44

[उत्तर—AB = तनाव $\frac{17{\cdot}5}{\sqrt{3}}$ kN, BC = सम्पीडन $\frac{35}{\sqrt{3}}$ kN,

AC = सम्पीडन 5 kN, CD = सम्पीडन $\frac{10}{\sqrt{3}}$ kN,

AD = सम्पीडन $\frac{20}{\sqrt{3}}$ kN, $R_A = 12{\cdot}5$ kN↑, $R_B = 17{\cdot}5$ kN↑]

25. एक ट्रस चित्र 9.45 के अनुसार भार वहन करती है। ट्रस के अवयवों AB, BE, AE और BC में बल व उनकी प्रकृति ज्ञात कीजिये। **(U.P. 2010)**



चित्र 9.45

[उत्तर—AB में $10/\sqrt{3}$ kN सम्पीडन, BE में $2/\sqrt{3}$ kN सम्पीडन,

AE में $5/\sqrt{3}$ kN तनाव,

BE में $2/\sqrt{3}$ तनाव,

BC में $6/\sqrt{3}$ सम्पीडन,

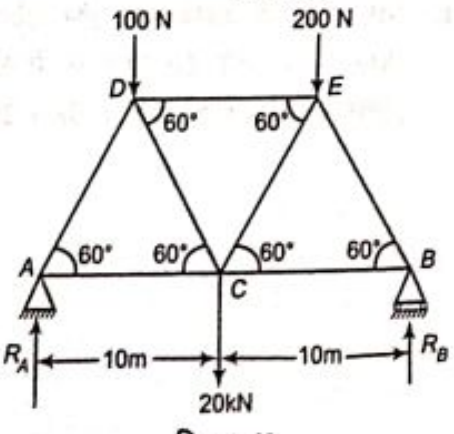
CD में $14/\sqrt{3}$ सम्पीडन,

CE में $2/\sqrt{3}$ kN सम्पीडन,

ED में $7/\sqrt{3}$ सम्पीडन,

$R_A = 5$ kN, $R_B = 7$ kN]

26. चित्र 9.46 में दिखाई गई ट्रस के सभी सदस्यों में उत्पन्न प्रतिक्रिया बलों की प्रकृति एवं परिमाण ज्ञात कीजिये। **(U.K. 2013-S)**



चित्र 9.46

[उत्तर—BE में $= -11{\cdot}74$ kN, $DC = +9{\cdot}78$ kN

BC में $= +5{\cdot}87$ kN, $AC = +7{\cdot}64$ kN

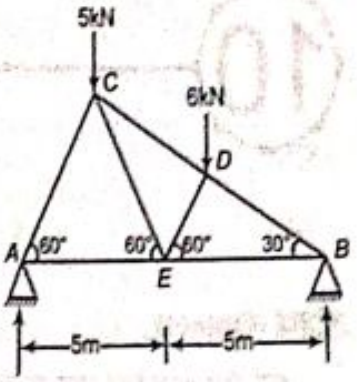
Ec में $= +13{\cdot}32$, $AD = -11{\cdot}40$ kN

ED में $= +13{\cdot}32$ kN, $R_A = 9{\cdot}875$ kN

$R_B = 10{\cdot}175$ kN]

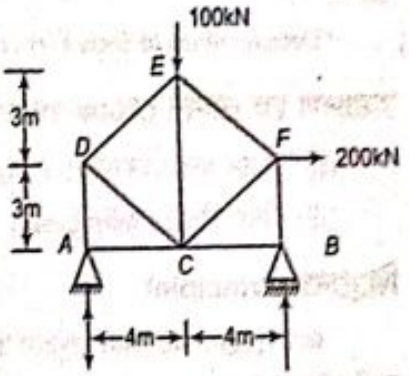
Scanned with CamScanner

27. चित्र 9.47 में एक कैंची दर्शायी गयी है जिस पर अनुप्रस्थ भार लगे हैं। किसी भी एक विधि द्वारा इसके प्रत्येक अवयव में बल का परिमाण एवं प्रकृति ज्ञात कीजिये।



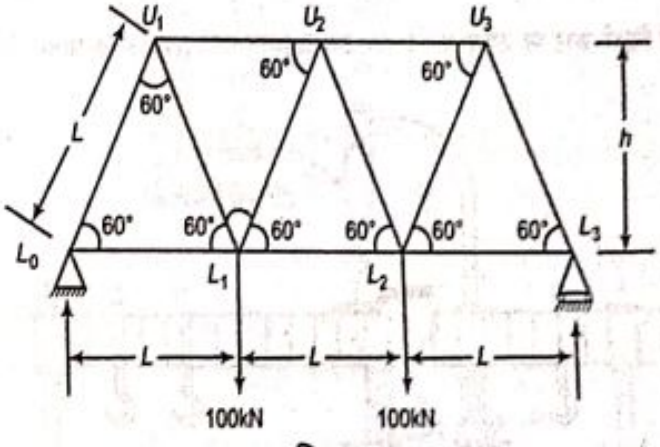
चित्र 9.47

28. चित्र 9.48 में दर्शायी गयी ट्रस के सदस्यों में बलों की प्रकृति एवं परिमाण ज्ञात कीजिये।



चित्र 9.48

29. चित्र 9.49 में एक कैंची दर्शायी गयी है। प्रतिक्रियायें एवं अवयवों U_1U_2 तथा L_1U_2 में बलों की प्रकृति तथा परिमाण ज्ञात कीजिये।

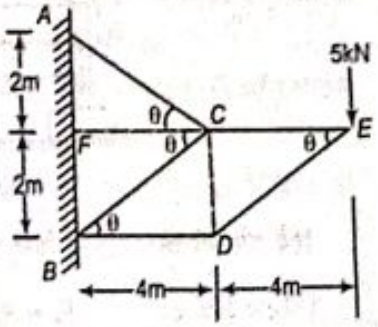


चित्र 9.49

[उत्तर—प्रतिक्रिया प्रत्येक 100 kN, 115·5 kN सम्पीडन तथा शून्य]

30. चित्र 9.50 में दिखाये गये ट्रस के सदस्यों *CE*, *CD* तथा *BD* में बल एवं उनकी प्रकृति ज्ञात कीजिये।

[उत्तर—*CE* में 10 kN का तनाव बल,
CD में 5 kN का सम्पीडन बल,
BD में 10 kN का तनाव बल]



चित्र 9.50 ❑

Scanned with CamScanner

10 प्रयोगात्मक भाग (EXPERIMENTS)

प्रयोग-1
(Experiment-1)

उद्देश्य (Object)

एक शुद्ध आलम्बित घरन पर लगे बिन्दु भारों के स्थान पर घरन की विभिन्न काटों पर कर्तन बल (Shear Force) ज्ञात करना।

"Determination of Shear Force at different sections on a simply supported beam under the point loads."

उपकरण एवं सामान (Apparatus/items)

(i) कर्तन बल उपकरण (S.F. Apparatus) (ii) विभिन्न भार एवं हैंगर (Loads with hangers)

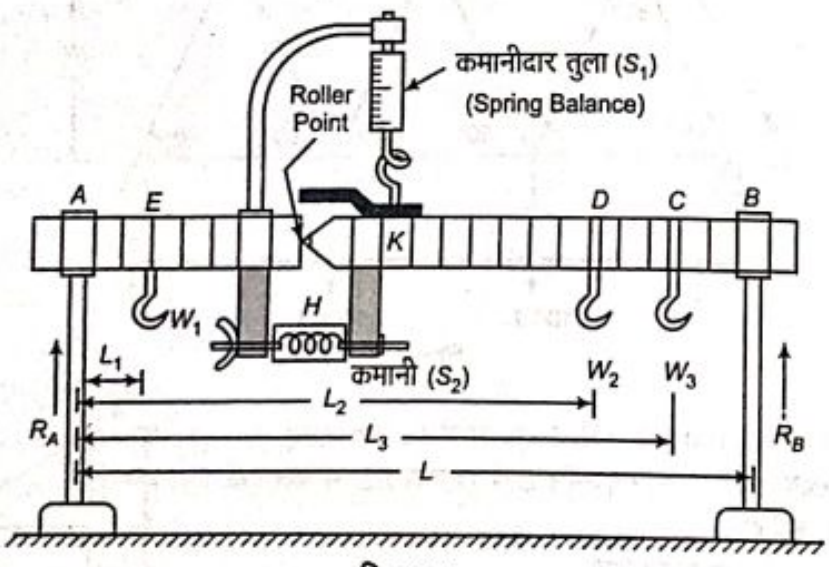
(iii) स्प्रिट लेवल (Spirit Level) (iv) मीटर पैमाना (Meter Scale)

सिद्धान्त (Principle)

"घरन (beam) की किसी अनुप्रस्थ काट (section) पर कर्तन बल (shear force) का मान, उस काट के दायीं ओर या बायीं ओर लगने वाले अक्ष के लम्बवत् अर्थात् ऊर्ध्वाधर बलों का बीजगणितीय योग (Algebraic Sum) के बराबर होता है।" इसे kN या N या Kg_f में प्रदर्शित करते हैं।

प्राय: दायीं ओर से गणना करने पर ऊपर की ओर (↑) लगे बलों को (+ve) तथा नीचे की ओर (↓) लगे बलों को (–ve) लेते हैं।

इस प्रकार घरन की किसी काट पर उपजा कर्तन बल, उस अनुप्रस्थ काट (cross-section) पर घरन को काटने (कर्तन) का प्रयास करता है।



चित्र 10.1

दिये गये परिच्छेद (रोलर बिन्दु Roller Point) H पर कर्तन बल,

(Shear Force), $F_h = R_B - W_3 - W_2$ (From Right Hand Side) $\overset{(+)}{\uparrow}\ \underset{(-)}{\downarrow}$

अथवा (Or) $F_h = W_1 - R_A$ (From Left Hand Side) $\downarrow_{(+)}\ \uparrow_{(-)}$

Scanned with CamScanner

टेकों की प्रतिक्रियायें ज्ञात करना (चित्र 10-1) के अनुसार—

A पर आघूर्ण लेने से, $R_B \times L = W_1 \times L_1 + W_2 \times L_2 + W_3 + L_3$

$$\therefore \quad R_B = \frac{W_1L_1 \times W_2L_2 \times W_3L_3}{L} \qquad \text{(सूत्र)}$$

$$\therefore \quad R_A = (\text{कुल भार}) - R_B \Rightarrow (W_1 + W_2 + W_3) - R_B \qquad \text{(सूत्र)}$$

रोलर (Roller) H पर प्रयोगात्मक कर्तन बल (Instrumental S.F.)

F_h' = [भार लटकाने के बाद स्प्रिंग तुला का पाठ्यांक (S_2) – भार लगाने से पहले (without load) स्प्रिंग तुला का पाठ्यांक (S_1)]

अब धरन के भार या बल लगे बिन्दुओं पर कर्तन बल

टेक B पर कर्तन बल (S.F. at B) $\Rightarrow F_B = R_B$ प्रतिक्रिया (Reaction)

कर्तन बल का यह मान बिन्दु C के ठीक पहले तक रहेगा अर्थात्

S.F. just before $\quad C \Rightarrow \vec{F_C} = R_B$

अब बिन्दु C पर कर्तन बल (S.F. at C) $\Rightarrow F_C = (R_B - W_3)$

कर्तन बल का यह मान बिन्दु D के ठीक पहले तक रहेगा अर्थात्

S.F. just before $\quad D = \vec{F_D} = (R_B - W_3)$

अब बिन्दु D पर कर्तन बल (S.F. at D) $\Rightarrow F_D = (R_B - W_3 - W_2)$

कर्तन बल का यह मान बिन्दु D से बिन्दु E पर ठीक पहुँचने तक होगा अर्थात्

S.F. at Roller Point $\quad H \Rightarrow F_H = (R_B - W_3 - W_2)$

S.F. just before $\quad E \Rightarrow \vec{F_E} = (R_B - W_3 - W_2)$

अब बिन्दु E पर कर्तन बल (S.F. at E) $\Rightarrow F_E = (R_B - W_3 - W_2 - W_1)$

कर्तन बल का यह मान A से ठीक पहले तक होगा अर्थात्

S.F. just before $\quad A \Rightarrow \vec{F_A} = R_B - W_3 - W_2 - W_1 = R_B - (\text{Total Load})$

अब A पर कर्तन बल (S.F. at A) $\Rightarrow F_A = R_B - (W_1 + W_2 + W_3) + R_A$

$= 0$ (R_A का मान रखने पर (S.F.) शून्य होगा)

विधि (Procedure)

(1) सर्वप्रथम धरन (Beam) को स्प्रिंग तुला पर लगे ढिबरी (Nut) को घुमाकर तथा स्प्रिट लेवल की सहायता से क्षैतिज (Horizontal) करते हैं और तुला का प्रथम पाठ्यांक (reading) S_1 नोट करते हैं।

(2) धरन के विभिन्न बिन्दुओं C, D तथा E पर भार क्रमशः W_1, W_2 तथा W_3 लगाकर धरने को पहले की भाँति क्षैतिज कर स्प्रिंग तुला का दूसरा पाठ्यांक (IInd Reading) S_2 नोट करते हैं।

(3) धरन पर लगे भारों की एक सिरे A से दूरियाँ L_1, L_2 व L_3 नोट करते हैं और दोनों टेकों A तथा B के बीच की दूरी L नोट करते हैं।

(4) सूत्रों की सहायता से प्रतिक्रियायें R_A तथा R_B के मान ज्ञात करते हैं।

(5) अब सूत्र $F_h = R_B - W_3 - W_2$ अथवा $F_h = W_1 - R_A$ द्वारा Rollar Point H पर कर्तन बल (Shear force) F_h ज्ञात करते हैं। (चिन्ह प्रणाली के प्रयोग द्वारा)

Scanned with CamScanner

(6) Roller Point H पर ही कर्तन बल (S.F.), स्प्रिंग तुला के लिये गये दोनों पाठ्यांकों (Readings) S_1 व S_2 को घटाकर (अर्थात् अन्तर द्वारा) ज्ञात करते हैं।

(7) दोनों प्रकार से प्राप्त हुए कर्तन बलों (Shear forces) F_h तथा F_h' की तुलना करते हैं तथा प्रतिशत त्रुटि ज्ञात करते हैं और सभी त्रुटियों से औसत प्रतिशत त्रुटि ज्ञात करते हैं। जैसे % Error $= \frac{F_h \sim F'_h}{F_h} \times 100\%$ (सूत्र)

(8) भारों W_1, W_2 तथा W_3 के मानों को बदल-बदलकर पूरे प्रयोग को कम से कम तीन बार दोहराते हैं।

प्रेक्षण (Observations)

(1) टेकों के बीच दूरी L = ... cm या mm

(2) बिना भार लगाये स्प्रिंग तुला (Spring Balance) का पाठ्यांक (Reading of balance) S_1 = ... kg या N

(3) प्रेक्षण तालिका (Observation Table)

क्रम संख्या	धरन (beam) पर लगाये गये भार kg या N में			भारों की टेक A से दूरियाँ cm या mm में			टेकों की प्रतिक्रियायें kg या N में		भार लगाने के बाद तुला का पाठ्यांक S_2	उपकरण द्वारा प्राप्त कर्तन बल $F_h' = (S_2 - S_1)$	गणना द्वारा कर्तन बल $F_h = W_1 - R_A$	प्रतिशत त्रुटि (E)
	W_1	W_2	W_3	L_1	L_2	L_3	R_A	R_B				
Set 1st												
Set 2nd												
Set 3rd												

गणनायें (Calculations)

For Reading of Ist Set :

$$R_B = \left[\frac{W_1L_1 + W_2L_2 + W_3L_3}{L}\right] = \text{..... N में}$$

$$R_A = (W_1 + W_2 + W_3) - R_B = \text{..... N}$$

$$F_1 \text{ या } F_h = R_B \sim W_3 = \text{..... N}$$

$$F_2 \text{ या } F_h' = (S_2 - S_1) = \text{..... N}$$

कर्तन बल (S.F.) में प्रतिशत त्रुटि (% error) $= \frac{F_1 - F_2}{F_1} \times 100\% =$ .....

नोट—इस प्रकार प्रत्येक Set के प्रेक्षण (Reading) के लिए गणना करें।

अब कर्तन बल (S.F.) में औसत % त्रुटि $= \frac{E_1 + E_2 + E_3}{3} =$ .....%

परिणाम (Result)

(1) अनुप्रस्थ काट H पर कर्तन बल में औसत प्रतिशत त्रुटि = ... %

(2) प्रत्येक भार/बल के बिन्दुओं पर कर्तन बल को गणना में दिखाया गया है।

Scanned with CamScanner

सावधानियाँ (Precautions)

(1) धरन पर भार धीरे से और बिना झटके के लगाया जाना चाहिये।
(2) धरन पर भार स्प्रिंग तुला तथा धरन की प्रत्यास्थता की सीमा अथवा उसकी क्षमता से अधिक नहीं होने चाहियें।
(3) स्प्रिंग तुला दोषरहित (Non defective) होना चाहिए।
(4) धरन की क्षैतिजता को चैक करने के लिए स्प्रिट लेवल का प्रयोग करना चाहिए।
(5) स्प्रिंग तुला की Readings सही (Correct) नोट करनी चाहियें।

प्रयोग-2
(Experiment-2)

उद्देश्य (Object)

एक शुद्धालम्ब धरन (Simply supported beam) पर लगे बिन्दु भारों के स्थान पर धरन की विभिन्न काटों पर नमन घूर्ण (Bending Moment) ज्ञात करना।

"Determination of Bending Moment at different sections on a simply supported beam under different loading"

उपकरण एवं सामान (Apparatus/items)

(i) नमन घूर्ण उपकरण (Bending Moment Apparatus)
(ii) विभिन्न भार तथा हैंगर (Loads with hangers)
(iii) स्प्रिट लेवल (Spirit Level)
(iv) मीटर पैमाना (Meter Scale)

सिद्धान्त (Principle)

"धरन (beam) की किसी काट पर नमन आघूर्ण (Bending Moment) का मान, उस काट के दायीं ओर या बायीं ओर लगे बलों का उस काट पर आघूर्णों के बीजगणितीय योग (Algebraic Sum) के बराबर होता है।" इसे kN-m या N-mm या Kg-cm में प्रदर्शित किया जाता है।

नमन आघूर्ण ज्ञात करने की विधि (Method)

सर्वप्रथम उपकरण पर लगी स्प्रिंग तुला (Spring Balance) पर लगे समंजक नट (Adjusting Nut) को घुमाकर तथा स्प्रिट लेवल की सहायता से धरन को क्षैतिज (Horizontal) करते हैं। फिर तुला का पाठ्यांक (Reading) S_1 नोट करते हैं। अब धरन पर हैंगर द्वारा भार लगाने के बाद Adjusting Nut को घुमाकर धरन को क्षैतिज करके स्प्रिंग तुला का पाठ्यांक (Reading) S_2 नोट करते हैं तथा टेक A तथा B से कब्जे (Hinge) H की दूरियाँ क्रमशः L_A तथा L_B और स्प्रिंग तुला में बल की धरन (Beam) की अक्ष (Axis) से दूरी d नोट करते हैं।

(i) उपकरण द्वारा, कब्जे (Hinge) H पर नमन आघूर्ण (Bending Moment)

M_1 = स्प्रिंग तुला में बल × दूरी (धरन की अक्ष से)

$M_1 = (S_2 - S_1) \times d =$ ..... N-mm ... (i)

(ii) गणना द्वारा कब्जे H पर नमन आघूर्ण (Bending Moment)

$M_2 = R_A \times L_A =$ ..... N-mm (बायीं ओर से) ... (ii)

अथवा $M_2 = R_B \times L_B - (W_1 \times L_1 + W_2 \times L_2 + W_3 \times L_3) =$ ..... N-mm (दायीं ओर से)

Scanned with CamScanner

जहाँ टेकों की प्रतिक्रियायें R_A तथा R_B हैं तथा धरन पर लगे भारों W_1, W_2 तथा W_3 की कब्जे H से दूरियाँ क्रमशः L_1, L_2 तथा L_3 हैं।

अब प्रतिक्रियायें ज्ञात करने के लिये,

$$R_A + R_B = \text{कुल भार} \Rightarrow W_1 + W_2 + W_3$$

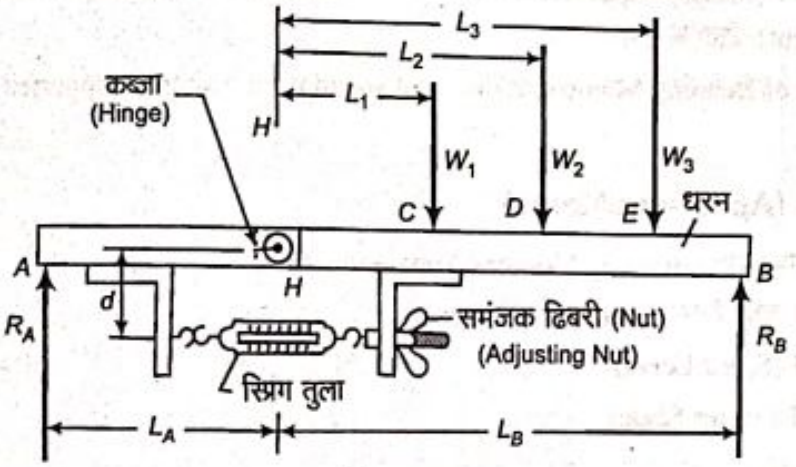
A पर घूर्ण लेने से,

$$R_B \times (L_A + L_B) = W_1 \times AC + W_2 \times AD + W_3 \times AE$$

$$\therefore \quad R_B = \frac{W_1 \times AC + W_2 \times AD + W_3 \times AE}{(L_A + L_B)} = \ldots\ldots\ldots \text{(N) में}$$

अतः $$R_A = (W_1 + W_2 + W_3) - R_B = \ldots\ldots\ldots \text{(N) में}$$

प्रयोग में प्रतिशत त्रुटि $(\%\ \text{error}) = \frac{M_2 - M_1}{M_2} \times 100\% = \ldots\ldots\ldots\%$



चित्र 10.2

अब धरन पर लगे भारों के मान क्रमशः W_1, W_2, W_3 को बदलकर प्रयोग को 2 या 3 बार दोहराते हैं।

प्रेक्षण (Observations)

(A) नमन आघूर्ण (B.M.) के लिए—चित्र 10.2 में देखें

$L_A = \ldots.$ mm, $L_B = \ldots.$ mm, $d = \ldots.$ mm

$L_1 = \ldots.$ mm, $L_2 = \ldots.$ mm तथा $L_3 = \ldots.$ mm

धरन पर बिना भार लटकाये तुला (Balance) का पाठ्यांक (Reading) $S_1 = \ldots.$ N में।

क्रमांक Sl.No.	धरन पर लगाये गये भार N में			भार लगाने के बाद तुला का पाठ्यांक (S_2)	स्प्रिंग तुला में बल ($S_2 - S_1$)	प्रयोग उपकरण द्वारा B.M. (M_1) $= (S_2 - S_1)\, d$	गणना द्वारा (H) पर नमन घूर्ण (B.M. $M_2 = R_A \times L_A$	प्रतिशत त्रुटि (error) $= \frac{M_2 - M_1}{M_2} \times 100\%$
	W_1	W_2	W_3					

Scanned with CamScanner

गणनायें (Calculations)

(A) सिद्धान्त में दिये गये सूत्रों द्वारा—

I सैट से, M_1 = ...N-mm, M_2 = ...N-mm, % त्रुटि = ...%

II सैट से, M_1 = ...N-mm, M_2 = ...N-mm, % त्रुटि = ...%

III सैट से, M_1 = ...N-mm, M_2 = ...N-mm, % त्रुटि = ...%

% Error, 10% से 15 % के बीच होती है।

(B) धरन (beam) पर लगे भार या बलों के क्रिया बिन्दुओं पर नमन आघूर्ण की गणना करना—

प्रतिक्रिया $R_B = \dfrac{W_1 \times AC + W_2 \times AD + W_3 \times AE}{(L_A + L_B)}$ यहाँ विस्तार (Span of beam) $L = (L_A + L_B)$ है।

= ..... N में

फिर $R_A = (W_1 + W_2 + W_3) - R_B$ = ... N में

अब B पर नमन घूर्ण (B.M. at B) $\Rightarrow$ $M_B = 0$

E पर नमन घूर्ण (B.M. at E) $\Rightarrow$ $M_E = R_B \times BE$

D पर नमन घूर्ण (B.M. at D) $\Rightarrow$ $M_D = R_B \times BD - W_3 \times DE$

C पर नमन घूर्ण (B.M. at C) $\Rightarrow$ $M_C = R_B \times BC - W_3 \times CE - W_2 \times CD$

कब्जे H पर नमन घूर्ण (B.M. at H) $\Rightarrow$ $M_H = R_B \times BH - W_3 \times EH - W_2 \times DH - W_1 \times CH$

$\therefore$ H पर सैद्धान्तिक नमन घूर्ण, $M_H = M_2 = R_B \times L_B - W_3 \times L_3 - W_2 \times L_2 - W_1 \times L_1$

तथा A पर नमन घूर्ण (B.M. at A) $\Rightarrow M_A = 0$

परिणाम (Result)

(1) प्रतिशत त्रुटि = ... % (यह प्रतिशत त्रुटि 10 से 15 % के बीच है)

(2) प्रत्येक भार/बल के बिन्दुओं पर नमन आघूर्ण (B.M.) गणना में प्रदर्शित है।

सावधानियाँ (Precautions)

(1) धरन को क्षुरधारों (Knife Edges) पर ठीक स्थिति में आलम्बित (Supported) होना चाहिये।

(2) धरन के साथ भारों का बिन्दु सम्पर्क होना चाहिये।

(3) हिन्ज पर घर्षण न्यूनतम होना चाहिये। इसके लिये हिन्ज का स्नेहन अवश्य करना चाहिये।

(4) हिन्ज बिन्दु (Hinge Point) से सभी दूरियाँ शुद्धता से मापी जानी चाहियें।

(5) हिन्ज के केन्द्र की स्प्रिंग तुला की अक्ष से दूरी d सावधानी से मापी जानी चाहिये।

(6) स्प्रिंग तुला की पाठ्यांक लेते समय धरन को ठीक प्रकार से क्षैतिज स्थिति में होना चाहिये।

Scanned with CamScanner

प्रयोग-3
(Experiment No-3)

उद्देश्य (Object)

नरम इस्पात/मृदु इस्पात (Mild Steel) का पराभव प्रतिबल (Yield Stress), अन्तिम तनाव प्रतिबल (Ultimate Tensile Stress), नमूने में प्रतिशत दैर्घ्य वृद्धि (Percentage Elongation of the Specimen), अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल में प्रतिशत सिकुड़न (Percentage Contraction or Reduction in Area), यंग मापांक/प्रत्यास्थता गुणांक (Young's Modulus) का मान ज्ञात करना तथा प्रतिबल-विकृति ग्राफ (Stress-Strain Diagram) खींचना।

To conduct a tensile test on a mild steel specimen and to determine the following—

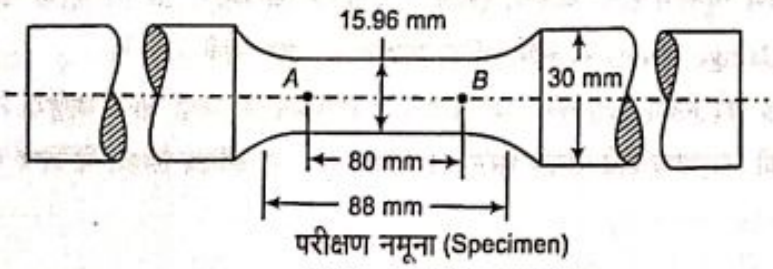
(i) Yield Strength/Stress
(ii) Ultimate Strength/Stress
(iii) Percentage Elongation
(iv) Percentage Reduction in Area
(v) Value of Young's Modulus of Elasticity
(vi) Ploting of Stress-Strain Diagram

उपकरण (Material and Equipment)

(i) यूनिवर्सल परीक्षण मशीन (U.T.M.)
(ii) Mild Steel का नमूना (Specimen)
(iii) स्क्रू गेज/ Screw Gauge तथा वर्नियर कैलीपर्स (Vernier Callipers)
(iv) ग्राफ पेपर (Graph Paper)
(v) लम्बाई मापक पैमाना (Ruler/Scale)

तनाव परीक्षण नमूना (Tensile Test Specimen)

इस नमूने (Specimen) को चित्र 9.3 में दिखाया गया है। इसके दोनों सिरे क्रॉस हैडों पर पकड़ने के लिये बड़े व्यास (लगभग 30 mm) के बनाये जाते हैं। परीक्षण लम्बाई (testing length) 80 mm तथा इस परीक्षण लम्बाई में व्यास (diamter) 15·96 mm रखा जाता है, जिससे परीक्षण काट का क्षेत्रफल 200 mm^2 होता है, इससे गणना में सुविधा रहती है। नमूने (Specimen) में परीक्षण लम्बाई को केन्द्र पंच (Centre Punch) द्वारा निशान लगाकर A से B तक इस दूरी को निर्धारित किया गया है। AB के बीच लम्बाई को गेज-लम्बाई (Gauge Length) कहते हैं।

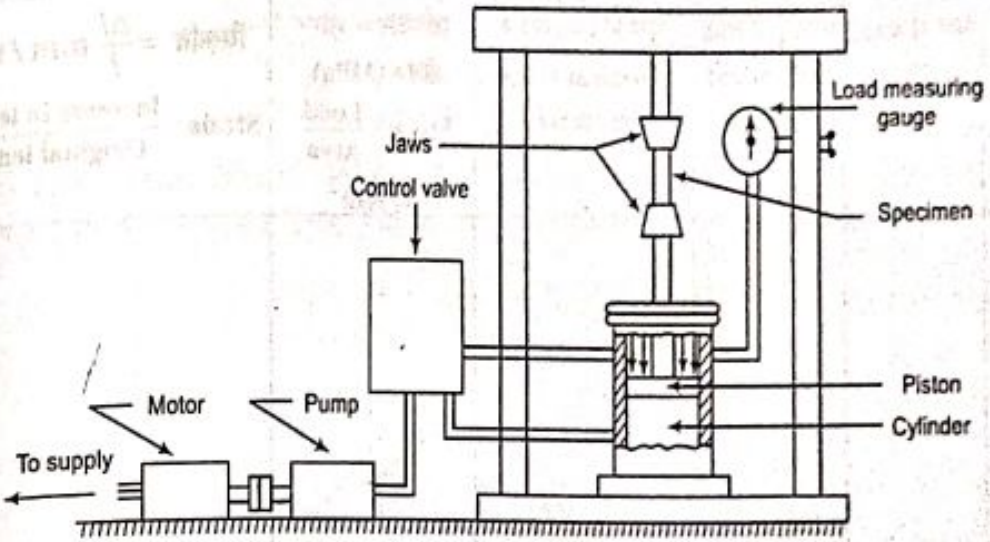


परीक्षण नमूना (Specimen)

चित्र 10.3

Scanned with CamScanner

इस परीक्षण के लिये तनाव परीक्षण मशीन (Tensile Testing Machine) को चित्र 10.4 में दिखाया गया है।



चित्र 10.4 : Tensile testing machine

विधि (Method)

नमूने (Specimen) को मशीन के क्रॉस हैडों के बीच जबड़ों (Jaws) में दृढ़तापूर्वक जकड़ा (Gripped) जाता है। फिर मशीन की दैर्घ्यमापी (extensometer) को नमूने पर लगा देते हैं। इसके बाद मशीन द्वारा धीरे-धीरे तनाव बल लगाया जाता है जिसका मान मशीन के भार-सूचक गेज (Load Measuring Gauge) द्वारा प्रदर्शित होता है। परीक्षण में नमूने की होने वाली लम्बाई में वृद्धि को दैर्घ्यमापी (Extensometer) द्वारा मापा जाता है। मशीन पर ग्राफ-युक्ति (Graph plotting device) द्वारा नमूने के टूटने तक ग्राफ प्राप्त किया जाता है। मशीन पर तनाव बल बढ़ाते जाने से, पहले तो नमूने की लम्बाई में वृद्धि होती जाती है और अन्त में नमूना टूट जाता है। नमूना टूटने पर अन्तिम भार को नोट कर लेते हैं। इसके पश्चात् मशीन को डिस्चार्ज (Discharge) करके नमूने को निकाल लेते हैं।

अब नमूने के टूटे हुए दोनों टुकड़ों को ठीक मिलाकर गेज बिन्दुओं के बीच की दूरी मापते हैं। इसके अतिरिक्त नमूने के टूटे हुए स्थान पर उसका व्यास भी मापते हैं जिसके द्वारा टूटने के स्थान पर नमूने की काट का क्षेत्रफल, $A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$ सूत्र से ज्ञात करते हैं।

प्रेक्षण (Observations)

(1) नमूने की मूल मापें (Original dimensions of Specimen)—

लम्बाई (Length) L_1 = ... mm

व्यास (Diameter) d_1 = ... mm

क्षेत्रफल (Area) A_1 = ... mm^2

(2) अन्तिम मापें (Final Dimensions)—

लम्बाई (L_2) = ... mm

व्यास (d_2) = ... mm

क्षेत्रफल (A_2) = ... mm^2

(3) पराभव बिन्दु पर भार, (W_1) = ... kN

(4) नमूने के टूटने पर अन्तिम भार, (W_2) = ... kN

Scanned with CamScanner

(5) तालिका (Table)

S.No.	भार (Load) (N)	लम्बाई में वृद्धि (Extension) Δl (mm)	मूल गेज - लम्बाई (Original gauge length) (l)	प्रतिबल = भार/क्षेत्र० (MPa) Stress = $\frac{\text{Load}}{\text{Area}}$ N/mm^2	विकृति $= \frac{\Delta l}{l}$ mm / mm Strain = $\frac{\text{Increase in length}}{\text{Original length}}$
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
7.					

गणना (Calculations)

(i) पराभव प्रतिबल (Yield Stress or Yield Strength)

$$= \frac{\text{पराभंव भार (Yield Load)}}{\text{काट का क्षेत्रफल, Original area of section}} = \frac{W_1}{A_1} = \text{..... } N/mm^2 \text{ (या MPa)}$$

(ii) अन्तिम तनाव प्रतिबल (Ultimate Tensile Stress) or

$$\text{Ultimate Strength} = \frac{\text{अन्तिम तनाव भार (Final Tensile Load)}}{\text{काट का क्षेत्रफल (Original area of section)}} = \frac{W_2}{A_1} = \text{..... MPa}$$

(iii) प्रतिशत लम्बाई में वृद्धि (% Elongation)

$$= \frac{\text{अन्तिम लम्बाई } (L_2) - \text{ प्रारम्भिक लम्बाई } (L_1)}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई } (L_1)} \times 100\%$$

$$= \frac{\text{Final Length (at fracture) } (L_2) - \text{Original Length } (L_1)}{\text{Original Length } (L_1)}$$

$$= \left(\frac{L_2 - L_1}{L_1}\right) \times 100 = \text{.....}\%$$

(iv) प्रतिशत सिकुड़न (% Contraction or Reduction in Area)

$$= \frac{\text{काट का प्रारम्भिक क्षेत्रफल } - \text{ काट का अन्तिम क्षेत्रफल}}{\text{काट का प्रारम्भिक क्षेत्रफल}}$$

$$= \frac{\text{Original Area } - \text{ Area at Fracture}}{\text{Original Area}}$$

$$= \left(\frac{A_1 - A_2}{A_1}\right) \times 100 = \text{....}\%$$

Scanned with CamScanner

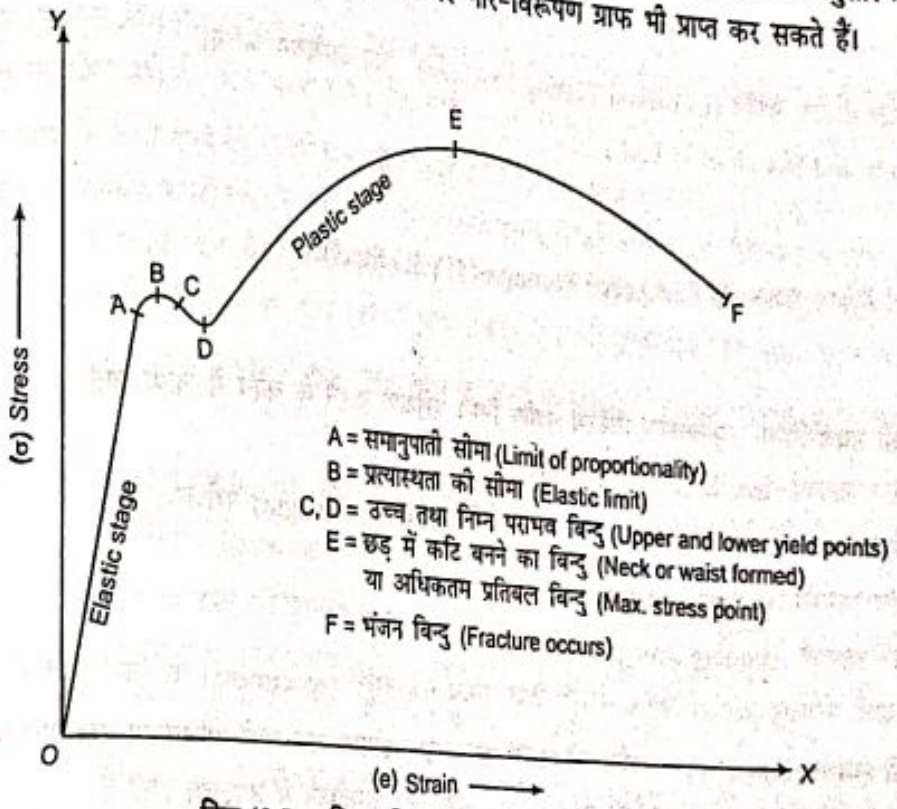
(v) प्रत्यास्थता गुणांक या यंग मापांक (Young's Modulus)

$$E = \frac{\text{प्रत्यास्थता की सीमा के अन्दर प्रतिबल (Stress below Proportionality Limit)}}{\text{अनुरूप विकृति (Corresponding Strain)}}$$

$$= \frac{\sigma}{e} = \ldots N/mm^2 \text{ (या MPa)}$$

(vi) Observation Table की सहायता से प्रतिबल-विकृति ग्राफ खींचने पर चित्र 10.5 के अनुसार प्राप्त होता है।

नोट—मशीन के ग्राफ यन्त्र विन्यास द्वारा रिकार्डर पर भार-विरूपण ग्राफ भी प्राप्त कर सकते हैं।



चित्र 10.5 : प्रतिबल-विकृति ग्राफ (Stress-strain curve)

परिणाम (Result)

(i) पराभव बिन्दु पर प्रतिबल (Stress at Yield Point) = ...N/mm^2 (या MPa)

(ii) अन्तिम तनाव प्रतिबल (Ultimate Tensile Stress) = ...N/mm^2 या MPa

(iii) प्रत्यास्थता गुणांक (यंग मापांक) (Young's Modulus) = ...N/mm^2 या MPa

(iv) प्रतिशत दैर्घ्य वृद्धि (% Elongation) = ...%

(v) प्रतिशत सिकुड़न (% Reduction) = ...%

सावधानियाँ (Precautions)

(1) परीक्षण से पहले मशीन की कार्य-प्रणाली की जाँच कर लेनी चाहिये।

(2) नमूने (Specimen) को जबड़ों (Jaws) में दृढ़तापूर्वक पकड़ा जाना चाहिये ताकि नमूना जबड़े से slip न हो।

(3) भार का मान धीरे-धीरे बढ़ाना चाहिये।

(4) मशीन की भार क्षमता (Load Capacity) से अधिक भार नहीं लगाना चाहिये।

Scanned with CamScanner

(5) परीक्षण समाप्त होने पर मशीन के हस्त पहिये (Hand Wheel) को (–ve) चिन्ह की ओर घुमाना चाहिये ताकि Hydraulic System का तेल (Oil), टैंक में वापस चला जाये।

(6) नमूना टूटने के बाद व्यास (d_2) तथा लम्बाई (L_2) सावधानीपूर्वक शुद्धता से (accurately) मापनी चाहिये।

प्रयोग-4
(Experiment No-4)

उद्देश्य

"यूनिवर्सल टैस्टिंग मशीन (Universal Testing Machine)" का अध्ययन करना।

(To Study and Sketch of U.T.M.)

उपकरण

यूनिवर्सल टैस्टिंग मशीन (U.T.M.) (For Testing of HYSD Steel)।

अध्ययन

मशीन की उपयोगिता—यूनिवर्सल टैस्टिंग मशीन निम्न परीक्षण करने के कार्य में लायी जाती है—

(1) तनाव सामर्थ्य (tensile strength) परीक्षण,

(2) सम्पीडन (compression) या अवभंजन सामर्थ्य (Crushing strength) परीक्षण,

(3) कर्तन सामर्थ्य (shearing strength) परीक्षण, तथा

(4) नमन सामर्थ्य (bending strength) परीक्षण।

उपरोक्त सभी परीक्षण (tests) विशेष रूप से तैयार किये गये नमूनों (specimens) पर किये जाते हैं।

मशीन की क्षमता (Capacity)—मशीन की क्षमता उसके द्वारा लगाये जाने वाले अधिकतम बल द्वारा प्रकट की जाती है। साधारणतया ये मशीनें 200 kN, 400 kN तथा 1 MN आदि की क्षमताओं में उपलब्ध होती हैं।

सिद्धान्त

ये मशीनें गियर या द्रव प्रणाली (hydraulic system) पर कार्य करने वाली होती हैं।

विवरण

यूनिवर्सल परीक्षण मशीन में निम्न दो मुख्य भाग होते हैं—

(A) पकड़ने, भार लगाने तथा परीक्षण करने वाला भाग
(Gripping, loading and testing part)

(B) नियन्त्रण भाग या लगे भार को मापने वाला भाग
(Control panel or applied load measuring part)

ये दोनों भाग द्रविक क्रिया के लिये पाइपों तथा विद्युत क्रिया के लिये केबलों द्वारा परस्पर सम्बन्धित होते हैं।

(A) पकड़ने, भार लगाने तथा परीक्षण करने वाला भाग

इस भाग में निम्नलिखित प्रमुख युक्तियाँ होती हैं—

Scanned with CamScanner

(1) **आधार** (Base)—इसमें मुख्य रूप से एक सिलिण्डर तथा एक पिस्टन होते हैं। पिस्टन का ऊपरी भाग एक निम्न क्रॉस हैड (lower cross head) या सम्पीडन क्रॉस हैड (compression cross head) से जुड़ा होता है, चित्र 10.6 के अनुसार। जब सिलिण्डर में दाब पर द्रव भेजा जाता है तो पिस्टन ऊपर उठता है और इससे जुड़ा सम्पीडन क्रॉस हैड भी ऊपर उठता है। आधार में एक विद्युत मोटर का भी प्रबन्ध होता है जो गियरों तथा चेन की सहायता से दो घुमाऊ तथा कॉलम प्रकार की स्पिडलों को घुमा सकती है। ये स्पिडलें चूड़ीदार होती हैं। स्पिडलों के घूमने से बीच वाला समंजनशील क्रॉस हैड ऊपर-नीचे चलता है।

(2) **क्रॉस हैड** (Cross head)—मशीन में तीन क्रॉस हैड होते हैं—ऊपरी क्रॉस हैड, निम्न या निचला क्रॉस हैड तथा बीच वाला समंजनशील क्रॉस हैड। ऊपरी तथा निचले क्रॉस हैड दो स्तम्भों द्वारा आपस में दृढ़ता से जुड़े होते हैं और पिस्टन द्वारा एक साथ गतिशील होते हैं। बीच वाला क्रॉस हैड सभी प्रकार के परीक्षणों के अन्तर्गत स्थिर रहता है।

तनाव परीक्षण के लिये नमूने को ऊपरी तथा बीच वाले क्रॉस हैड पर बाँधकर ऊपरी क्रॉस हैड को ऊपर चलाकर तनाव बल लगाया जाता है। क्योंकि ऊपरी तथा निचला क्रॉस हैड परस्पर दृढ़ता से जुड़े होते हैं, इसलिये जब सिलिण्डर में द्रव भेजकर निचला क्रॉस हैड ऊपर उठाया जाता है तो ऊपरी क्रॉस हैड को तनाव क्रॉस हैड भी कहते हैं। सम्पीडन परीक्षण के लिये नमूने को निचले तथा बीच वाले क्रॉस हैड के बीच रखकर निचले क्रॉस हैड को ऊपर उठा कर दाब बल लगाया जाता है।

बीच वाला क्रॉस हैड, सम्पीडन स्थान तथा तनाव स्थान को नमूने के साइज के अनुसार घटाकर या बढ़ाकर समंजित करने के काम आता है।

सम्पीडन क्रॉस हैड के ऊपरी तल पर सम्पीडन प्लेट लगी होती है जिस पर सम्पीडन परीक्षण के नमूने को रखा जाता है या नमन परीक्षण में नमन संलाग (bending attachment) लगायी जा सकती है।

ऊपरी क्रॉस हैड में तनाव नमूने को पकड़ने के लिये जबड़ों का प्रबन्ध होता है। ये जबड़े एक हस्त-पहिये की सहायता से आगे-पीछे करके विभिन्न साइज के नमूने पकड़े जाते हैं। जबड़े स्वत: न खुल सकें, इसके लिये क्लैम्प-लीवर भी लगा होता है। क्रिया के अन्तर्गत नमूने को जबड़ों में फिसलने से रोकने के लिये जबड़ों पर दाँत कटे रहते हैं।

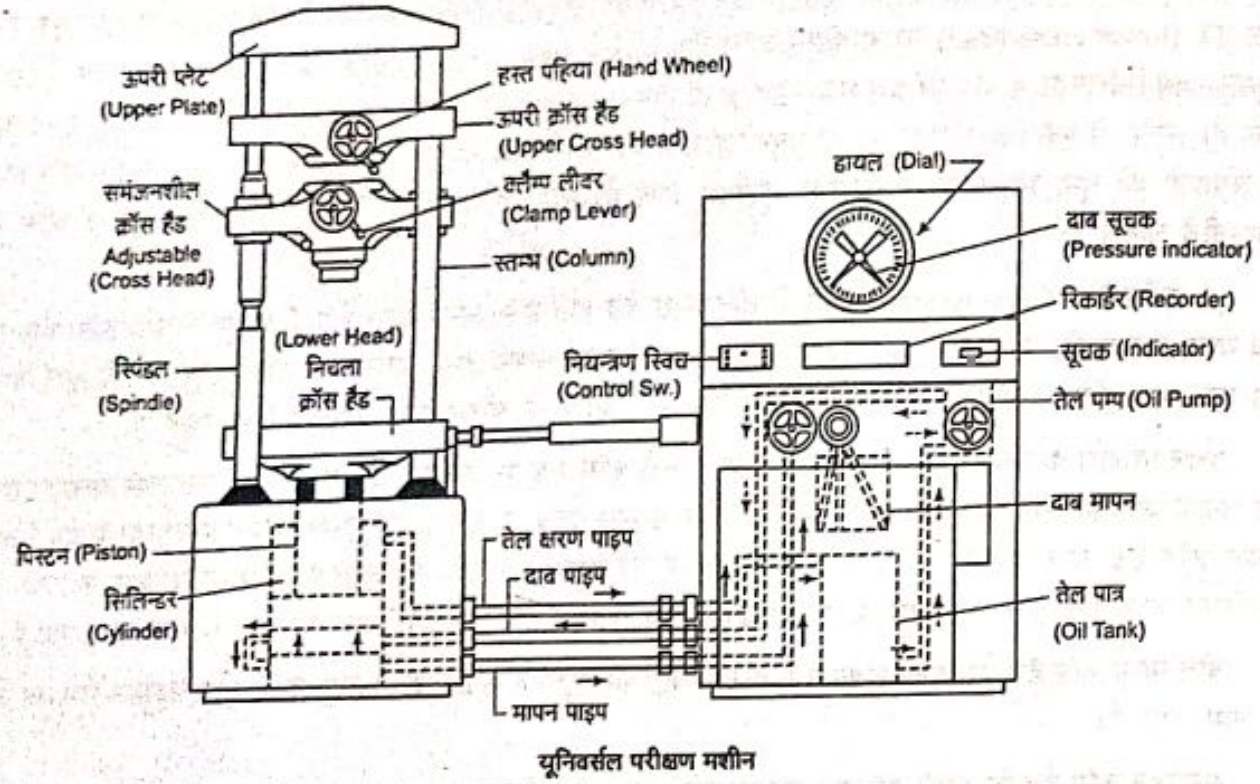
बीच वाले क्रॉस हैड पर, तनाव परीक्षण के लिये जबड़ों तथा सम्पीडन परीक्षण के लिये नमन-औजार-ब्लॉक को लगाने का प्रबन्ध होता है।

(3) **ऊपरी प्लेट**—यह मशीन के ऊपरी भाग पर होती है और स्तम्भों तथा स्पिडलों को सहारती तथा गाइड करती है। मशीन के स्थानान्तरण के लिये इस प्लेट में एक केन्द्रीय छिद्र होता है। इसे **गाइड-क्रॉस-हैड** कहते हैं।

वृद्धि मापन तथा पारेषण युक्ति
(Extension measuring and transmitting device)

यह युक्ति मशीन के दायें स्तम्भ में लगी होती है। इसमें एक पैमाना होता है जो स्तम्भ के साथ ही ऊर्ध्वाधर चलता है। समंजनशील क्रॉस हैड पर दायीं ओर एक सूचक (pointer) लगा होता है जो पैमाने का विस्थापन प्रदर्शित करता है और इसी से नमूने की लम्बाई में परिवर्तन का पता चलता है।

Scanned with CamScanner



यूनिवर्सल परीक्षण मशीन

चित्र 10.6 : यूनिवर्सल परीक्षण मशीन (U.T.M.)

(B) नियन्त्रण भाग

इसमें निम्न प्रमुख भाग होते हैं—

(1) द्रविक प्रणाली (Hydraulic system)

(2) रिकार्डर (Recorder)

(3) डाइनेमोमीटर (Dynamometer)

(1) **द्रविक प्रणाली** (Hydraulic system)—द्रविक प्रणाली के निम्नलिखित मुख्य अवयव होते हैं—

(a) उच्च दाब पम्प (high pressure pump)

(b) विद्युत मोटर (electric motor)

(c) समंजन युक्ति (adjusting device)

(d) तेल पात्र (oil container)

इसे उच्च-दाब पम्प विद्युत मोटर द्वारा चलाया जाता है। पम्प एक नियन्त्रण छड़ द्वारा समंजन युक्ति से जुड़ा रहता है। इसमें एक हस्त पहिया होता है जो सूक्ष्म समंजन के लिये चिन्हांकित होता है। समंजन-युक्ति से एक विसर्जन-वाल्व भी सम्बन्धित होता है जो परीक्षण के उपरान्त सिलिण्डर का तेल वापस तेल-पात्र में भेजता है।

U.T.M. में द्रविक प्रणाली, कार्यकारी सिलिण्डर से तीन पाइपों द्वारा सम्बन्धित होती है—(i) दाब पाइप (pressure pipe), (ii) मापन पाइप (measuring pipe) तथा (iii) तेल क्षरण पाइप (oil leakage pipe)। दाब पाइप के माध्यम से उच्च दाब पम्प द्वारा दबाया गया तेल कार्यकारी सिलिण्डर में पहुँचता है। इस प्रकार तेल के दाब से पिस्टन ऊपर उठता है। पिस्टन तथा सिलिण्डर की दीवार में घर्षण कम करने के लिये मशीन की क्रिया के समय उसमें से तेल टपकता है। यह टपका हुआ तेल सिलिण्डर के ऊपरी भाग में एक पम्प द्वारा चूषित कर लिया जाता है। इस प्रकार चूषित तेल क्षरण-पाइप के माध्यम से तेल-पात्र में पहुँचता है।

Scanned with CamScanner

(2) **रिकार्डर** (Recorder)—इस युक्ति की सहायता से परीक्षण के अन्तर्गत भार तथा विरूपण (load and deformation) में ग्राफ खिंचता है। परीक्षण क्रॉस हैड के विस्थापन द्वारा घर्षण-दण्ड तथा रोलर की सहायता से रिकार्डर चलता है। रिकार्डर के कागज पर पैन द्वारा आरेख खिंचता है। यह पैन एक लीवर से जुड़ा होता है जो कि डायल-गेज की प्रेक्षण (reading) को रिकार्डर पर पारेषित (transmit) करता है।

(3) **डाइनेमोमीटर** (Dynamometer)—इसमें प्रमुख अवयव—एक तीन छड़ डाइनेमोमीटर, डायल गेज तथा भार मापन परास (load measuring range) का संवरक (selector) हैं। सिलिण्डर के क्रियाकारी दाब पर तेल, मापन पाइप के माध्यम से डाइनेमोमीटर के संवरक पिस्टन पर पहुँचता है। इस प्रकार मापन पिस्टन उठता है और मरोड़ छड़ (torsion bar) आदि की सहायता से डायल गेज की स्पिंडल को विस्थापित करता है। स्पिंडल के विस्थापन से डायल गेज का भार सूचक विस्थापित होकर डायल गेज पर भार को प्रदर्शित करता है।

(4) **U.T.M. पर कार्य करने के लिए कुछ सावधानियाँ** (Precautions for U.T.M.)—

(1) U.T.M. पर प्रयोग करने से पहले मशीन की क्रियाविधि भली-भाँति समझ लेना चाहिये।

(2) मशीन चालू (Start) करने से पहले डायल-पैमाने का ज्ञान कर लेना चाहिये।

(3) प्रायोगिक नमूने पर गेज लम्बाई के चिन्ह (जैसे 88 mm की दूरी पर निशान) सावधानीपूर्वक लगाने चाहियें।

(4) परीक्षण नमूने को जबड़ों के बीच मजबूती से पकड़ना चाहिये।

(5) मशीन के लीवर द्वारा भार (Load) का मान धीरे-धीरे बढ़ाना चाहिये।

(6) परीक्षण पूरा होने के बाद मशीन के Hand wheel को (–ve) की ओर घुमाना चाहिये ताकि द्रवीय प्रणाली (Hydraulic system) का द्रव या तेल (oil) टैंक में वापस चला जाये।

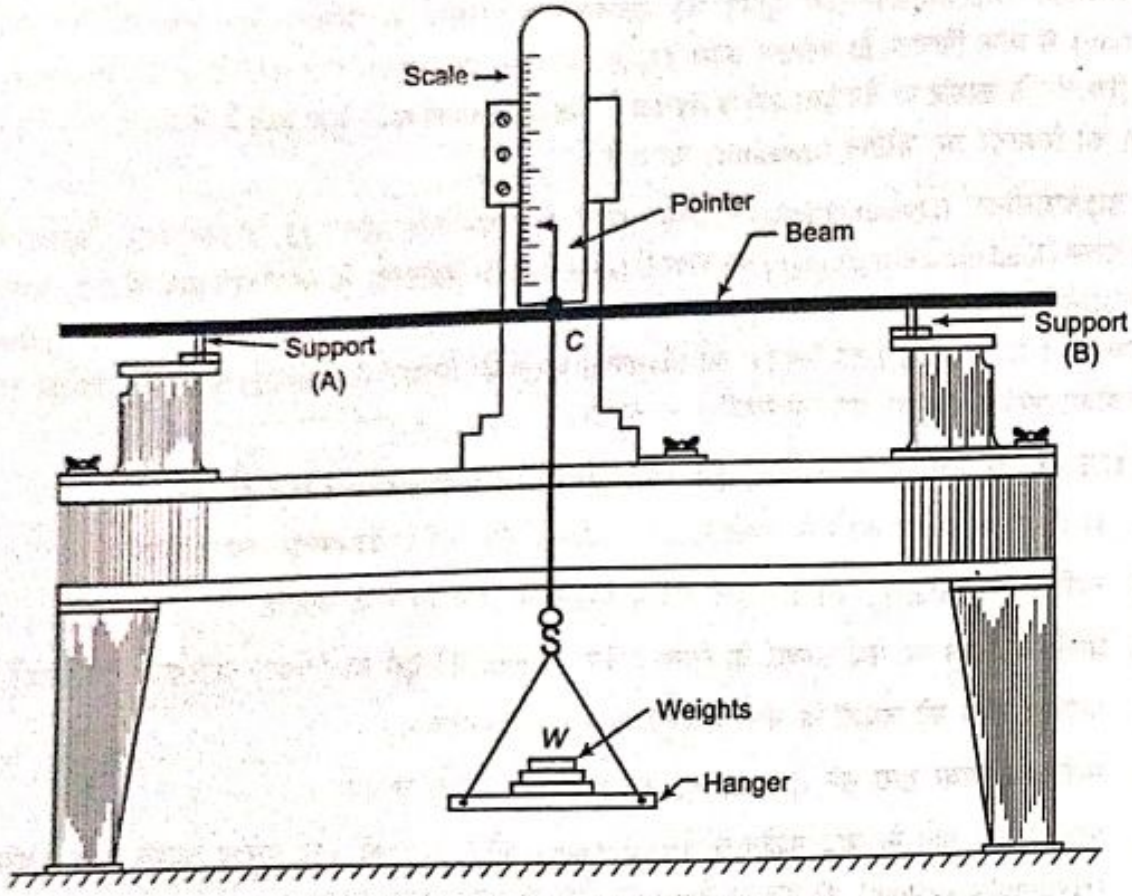
प्रयोग-5
(Experiment-5)

उद्देश्य (Object)

एक शुद्ध आलम्ब धरन (Simply supported beam) के मध्य-बिन्दु अथवा मध्य तिहाई भाग के बिन्दु पर एक संकेन्द्रित भार (Point load) लगाकर धरन का अधिकतम विक्षेप (max. deflection) तथा धरन के पदार्थ (स्टील या लकड़ी) का प्रत्यास्थता गुणांक '*E*' ज्ञात करना।

"Determination of **max. deflection and Young's modulus of elasticity** by deflection apparatus."

Scanned with CamScanner



चित्र 10.7 : Deflection of beam apparatus

उपकरण (Apparatus)

(i) धरन का विस्थापन उपकरण (Deflection of beam apparatus),

(ii) हैंगर सहित भार,

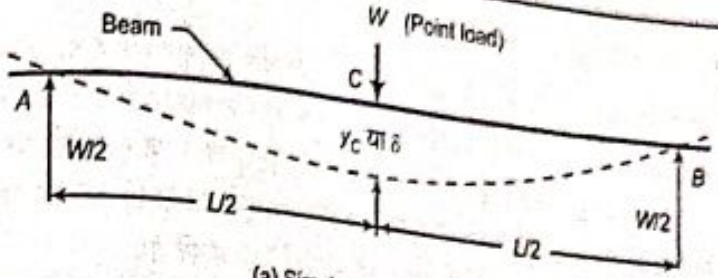
(iii) विस्थापन मापन युक्ति (Device for measuring deflection),

(iv) मीटर पैमाना (Meter scale) आदि।

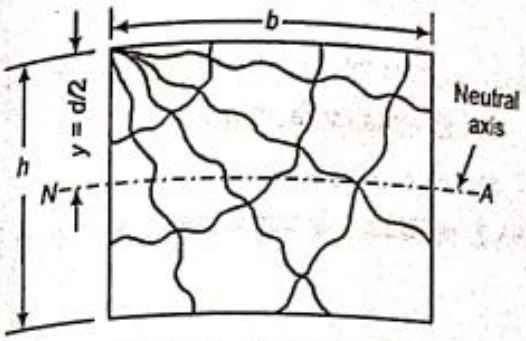
सिद्धान्त एवं सूत्र (Principle and Formula)

हम जानते हैं कि जब एक सरल आलम्बित धरन (Simply supported beam) के मध्य में बिन्दु भार (W) लगाया जाता है तो अधिकतम विक्षेप धरन के मध्य-बिन्दु C पर होता है। अत: धरन के मध्य में विक्षेप (Deflection at centre)

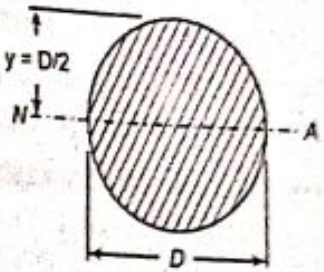
Scanned with CamScanner



(a) Simply supported beam

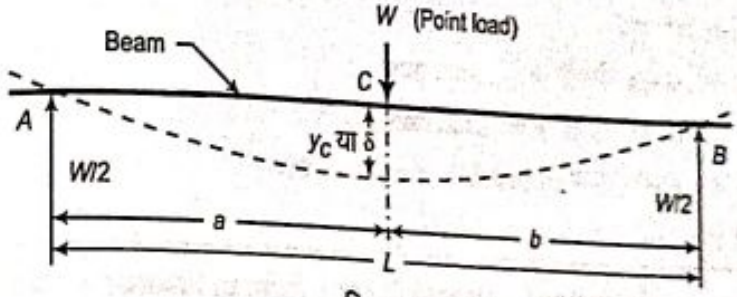


(b) Rectangular beam



(c) Steel round bar

चित्र 10.8



चित्र 10.9

$$y_c \text{ या } \delta = \frac{WL^3}{48EI} \qquad \text{(सूत्र)}$$

∴ धरन के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक (Young's Modulus of Elasticity),

$$E = \frac{WL^3}{48\, I.\delta}\ \text{N/mm}^2 \qquad \ldots (1)$$

जहाँ L = टेकों के बीच धरन की लम्बाई (mm में)

तथा I = धरन की अनुप्रस्थ काट का जड़त्व आघूर्ण (M.O.I.)

(i) $I = \dfrac{\pi d^4}{64}$ (mm^4 में), [यदि धरन की काट d व्यास की वृत्ताकार है]

(ii) $I = \dfrac{b \times h^3}{12}$ (mm^4 में), [यदि धरन की काट b चौड़ाई व h गहराई की आयताकार है]

Scanned with CamScanner

विधि (Procedure)

(i) यदि धरन आयताकार काट वाली है जैसे चित्र 10.8 (b), तो तीन या चार स्थानों पर उसकी चौड़ाई तथा गहराई मापकर औसत (mean) चौड़ाई b तथा औसत गहराई (h) के मान ज्ञात करते हैं और यदि धरन (beam) की काट वृत्ताकार काट (Circular section) की है [जैसे चित्र 10.8 (c)] तो 3 या 4 स्थानों पर उसका व्यास मापकर औसत व्यास (mean dia) d ज्ञात करते हैं जिनसे जड़त्व-आघूर्ण (M.O.I.) 'I' का मान ज्ञात करते हैं।

(ii) क्षुरधार टेकों (Knife edge supports) के बीच की लम्बाई (L) मापते हैं।

(iii) अब हैंगर को धरन की लम्बाई के बीच में रखकर विक्षेप मापन युक्ति के संकेतक (Pointer) का प्रथम पाठ्यांक (Ist Reading) नोट करते हैं।

(iv) हैंगर (Hanger) पर भार W रखकर संकेतक (Pointer) का दूसरा पाठ्यांक (IInd Reading) लेते हैं।

(v) दोनों पाठ्यांकों (Readings) का अन्तर लेने पर प्राप्त मान ही अधिकतम विक्षेप (δ) होता है।

(vi) विक्षेप δ का मान सूत्र-1 में रखकर E का मान ज्ञात करते हैं।

(vii) भार W के मान बदल-बदलकर δ के 4 या 5 प्रेक्षण लेते हैं तथा प्रत्येक δ के मान से प्राप्त E के मानों का औसत मान ज्ञात करते हैं।

प्रेक्षण (Observations)

(i) टेकों के बीच धरन की लम्बाई L = ... mm.

(ii) धरन की काट की माप

(1) धरन की औसत चौड़ाई, b = ... mm

(2) धरन की औसत गहराई, h = ... mm

(3) धरन का औसत व्यास (mean dia), d = ... mm

(iii) तालिका (Table)—

क्रमांक (Sl. No.)	धरन पर भार (Load) W (N में)	विक्षेप संकेतक का प्रथम पाठ्यांक δ_1	भार रखने के बाद संकेतक का दूसरा पाठ्यांक δ_2	विक्षेप या विस्थापन (Deflection) $\delta = (\delta_2 - \delta_1)$	यंग प्रत्यास्थता गुणांक $E = \frac{WL^3}{48\, I \times \delta}$ (N/mm^2)
1.					
2.					
3.					
4.					

गणना (Calculations)

$$I = \frac{b \times h^3}{12} = \text{..... mm}^4 \text{ (आयताकार के लिये)}$$

तथा $$I = \frac{\pi d^4}{64} = \text{..... mm}^4 \quad \text{(वृत्ताकार में)}$$

Scanned with CamScanner

$$E = \frac{WL^3}{48\,I\delta} = \text{..... N/mm}^2$$

$$E \text{ का औसत मान } = \frac{E_1 + E_2 + E_3 + E_4}{4} = \text{..... N/mm}^2$$

परिणाम (Result)

विभिन्न भारों (Loads) पर विस्थापन (Deflection) तथा E के मान तालिका में दर्शाये गये हैं तथा E का औसत मान = ... N/mm^2 है।

सावधानियाँ (Precautions)

(i) धरन पर भार उसकी प्रत्यास्थता की सीमा में ही लगाना चाहिये।

(ii) हैंगर पर भार धीरे-धीरे रखने व उतारने चाहियें।

(iii) संकेतक (Pointer) या डायल गेज का पाठ्यांक शुद्धता से लेना चाहिये।

(iv) प्रयुक्त धरन एक समान काट (Uniform section) की होनी चाहिये।

प्रयोग-6 (Experiment No-6)

उद्देश्य (Object)

ज्ञात मान के मरोड़ घूर्ण (Torque) के लिये मरोड़-उपकरण (Torsion Apparatus) द्वारा दृढ़ता गुणांक (Modulus of Rigidity) "C" या "G" ज्ञात करना।

"Determination of modulus of rigidity "C or G" of material by torsion apparatus."

सिद्धान्त (Principle)

जब किसी तार (Wire) के एक सिरे को बद्ध (Fixed) करके इसके दूसरे सिरे पर एक बलाघूर्ण (Torque) 'T' लगाया जाये या तार को दोनों सिरों पर बराबर एवं विपरीत दिशा में बलयुग्मों (Couples) द्वारा ऐंठा जाये तो तार में यह दशा (स्थिति) मरोड़ (Torsion) कहलाती है। इसके लिए मरोड़ समीकरण (Torsion Equation) निम्न है—

$$\frac{T}{J} = \frac{G\theta}{l} = \frac{q}{R} \quad \text{या} \quad \frac{T}{J} = \frac{C\theta}{l} = \frac{\tau}{R}$$

दृढ़ता गुणांक, C या $G = \dfrac{T \times l}{J \times \theta}$ (सूत्र)

यहाँ "मरोड़ कोण (θ), शाफ्ट या छड़ की काट में परिधि पर स्थित किसी बिन्दु की मरोड़ से पहले तथा मरोड़ के बाद की स्थितियों से केन्द्र पर बना कोण होता है।" मरोड़ कोण (θ) को रेडियन (Radian) में प्रदर्शित किया जाता है जिसे डिग्री में बदला जा सकता है (π रेडियन = 180°)।

सूत्र में, T = अधिकतम मरोड़ घूर्ण या बलाघूर्ण (Torque) N-mm में है।

J = तार की अनुप्रस्थ काट का ध्रुवीय जड़त्व आघूर्ण (Polar Moment of Inertia) = $\dfrac{\pi d^4}{32}$,

यहाँ d = तार का व्यास है।

l = तार की परीक्षण लम्बाई (Testing Length of Wire)

C या G = तार के पदार्थ का कर्तन मापांक (Modulus of Rigidity) N/mm^2 में।

तथा $G = \dfrac{\text{Shear Stress } (q)}{\text{Shear Strain } (\phi)}$

Scanned with CamScanner

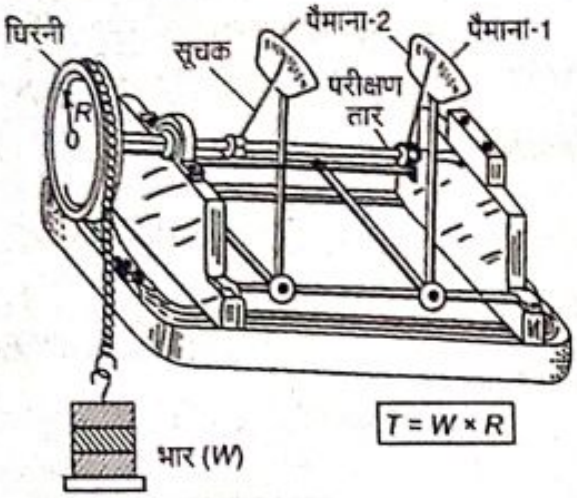
क्योंकि एक परीक्षण तार के लिए l, J तथा G स्थिर होंगे। अत: मरोड़ कोण θ, मरोड़-घूर्ण T के सीधे अनुपात में होगा। अब यदि प्रत्यास्थता की सीमा के अन्दर T तथा θ के विभिन्न मानों में ग्राफ खींचा जाये तो वह एक सरल रेखा होगी।

विवरण (Description)

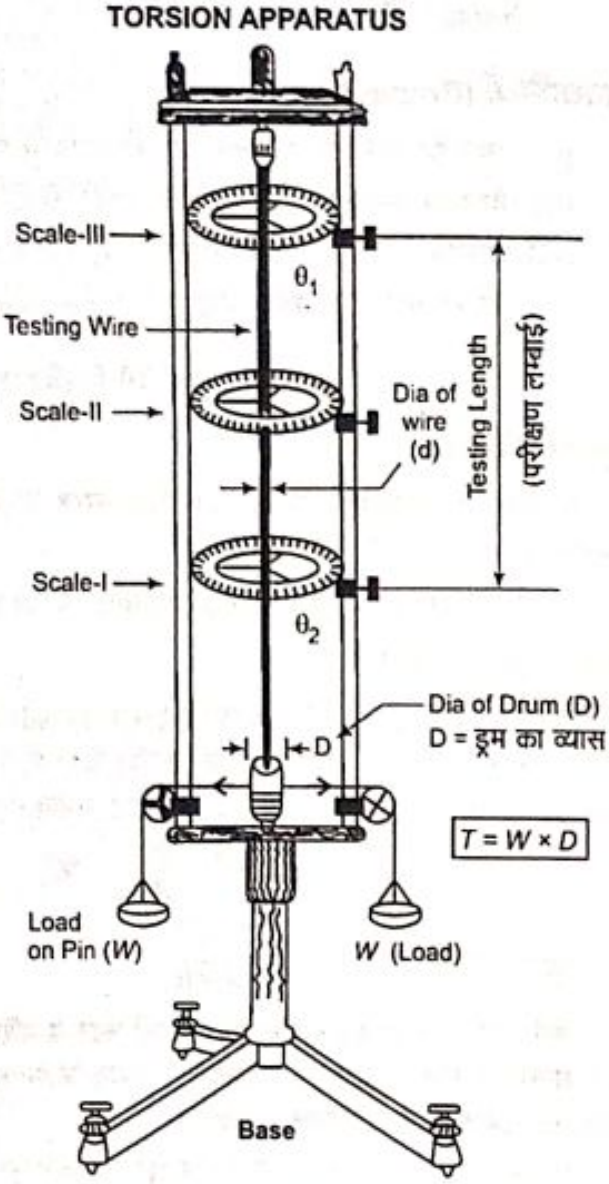
तारों (अथवा छड़ों) के मरोड़ कोण परीक्षण के लिए प्रयोग में लाया जाने वाला उपकरण दो प्रकार का होता है—

(1) क्षैतिज तार (या छड़) लगी मरोड़ परीक्षण मशीन/ चित्र 6

(2) ऊर्ध्वाधर तार (या छड़) लगी मरोड़ मशीन/ चित्र 7



चित्र 10.10 : क्षैतिज तार मरोड़ परीक्षण मशीन
(Horizontal Wire Torsion Apparatus)



चित्र 10.11 : Vertical Wire Torsion Apparatus

परीक्षण तार को एक सिरे पर दृढ़ता से पकड़कर स्थिर किया जाता है तथा दूसरे सिरे पर घिरनी (Pulley) (अथवा ड्रम) लगी रहती है जो सुगमता से घूम सकती है। इस घिरनी को एक रस्से द्वारा भार लटकाकर घुमाया जाता है। तार की परीक्षण लम्बाई के दोनों सिरों पर तार के मरोड़ कोण (Angle of Twist) θ, इन स्थानों पर लगे पैमाने तथा सूचक (Pointer) के द्वारा ज्ञात कर लिये जाते हैं। घिरनी पर भिन्न-भिन्न मानों के भार लगाकर तार के मरोड़ कोण नोट करते रहते हैं। यदि घिरनी की त्रिज्या (Radius) R है तो प्रत्येक भार (W) के लिये मरोड़ घूर्ण (Twisting Moment), $T = W \times R$ से ज्ञात किया जाता है।

Scanned with CamScanner

अब तार के दोनों सिरों पर मरोड़ कोण के मानों को घटाकर, तार के मरोड़ घूर्ण (T) के लिये, मरोड़ कोण (θ) को रेडियन में ज्ञात किया जाता है। अब प्राप्त हुए भिन्न-भिन्न मरोड़ आघूर्ण (T) के मानों तथा मरोड़ कोण (θ) के मानों के लिये ग्राफ खींचने पर सरल रेखा प्राप्त होती है। ग्राफ की सहायता से तार के पदार्थ का कर्तन मापांक (Modulus of Rigidity) तथा समानुपाती सीमा (Proportional Limit) ज्ञात की जाती है। ग्राफ में θ को x-axis पर तथा T को y-axis पर लिया जाता है।

तार का मरोड़ आघूर्ण (Torque), $T = W \times R$ N-mm में (Horizontal Wire Torsion Apparatus में)

जहाँ, W = घिरनी पर स्पर्शरेखीय लटका भार N में

R = घिरनी की त्रिज्या (radius) mm में है।

नोट—Vertical Wire Torsion Apparatus में ड्रम पर लिपटी डोरी के सिरे विपरीत दिशा में बल लगाकर बलयुग्म (Couple) बनाते हैं। अत: बलाघूर्ण (Torque), $\boxed{T = W \times l}$ होता है।

विधि (Method)

(1) परीक्षण तार लगी मशीन की घिरनी (Pulley) पर भार रखते जाते हैं तथा उनके संगत दोनों पैमानों पर मरोड़ कोण (θ) नोट करते जाते हैं। θ के डिग्री के मान को रेडियन में बदलते हैं। ($180° = \pi = 3{\cdot}14$ रेडियन)

(2) तालिका में T तथा θ के मानों को लिखते रहते हैं।

(3) T तथा उसके संगत θ के मानों में (x-अक्ष पर θ तथा y-अक्ष पर T को दर्शाते हुए) ग्राफ खींचते हैं जो एक सरल रेखा प्राप्त होती है।

(4) W के मान बदलकर पाठ्यांकों के अन्य सैट भी लिये जा सकते हैं।

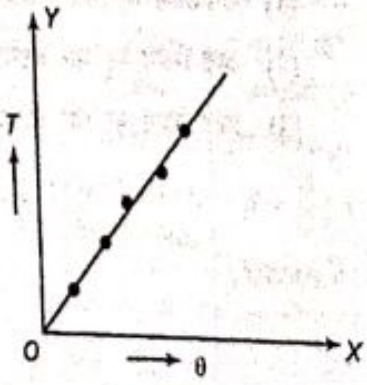
प्रेक्षण (Observations)

तालिका

क्रम संख्या	घिरनी (पुली) पर स्पर्शी भार W (N में)	मरोड़ आघूर्ण $T = W \times R$ N-mm	पैमाना-1 θ_1 रेडियन में	पैमाना-2 θ_2 रेडियन में	l लम्बाई में मरोड़ कोण $\theta = \theta_2 - \theta_1$ रेडियन (rad)	दृढ़ता गुणांक $G = \frac{T \times l}{J \times \theta}$
1.						
2.						
3.						
4.						

परिणाम (Result)

तालिका में मरोड़-आघूर्ण (T) के भिन्न-भिन्न मानों के लिये मरोड़ कोण (θ) के संगत मान प्राप्त होते हैं। मरोड़ घूर्ण T तथा मरोड़ कोण θ में खींचा गया ग्राफ लगभग सरल-रेखा प्राप्त होता है (चित्र 8 की भाँति)।



चित्र 10.12 : ग्राफ

सावधानियाँ (Precautions)

(1) पुली पर भार बिना झटके के रखने चाहियें।

(2) भार प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर ही रखे जाने चाहियें जिससे तार में स्थायी विरूपण न हो।

(3) पुली पर भार रखने के कुछ समय बाद ही मरोड़ कोण के लिये पाठ्यांक लेने चाहियें।

(4) परीक्षण तार सीधी तथा एक समान मोटाई की होनी चाहिये।

Scanned with CamScanner

प्रयोग-7 (Experiment No-7)

उद्देश्य (Object)

कुण्डलीदार (helical or coil) स्प्रिंग की सामर्थ्य या कड़ेपन (stiffness) तथा विस्थापन (deflection) का मान ज्ञात करना तथा भार और खिंचाव में ग्राफ खींचना।

"Determination of **stiffness/deflection of a helical spring.**"

उपकरण (Apparatus / Items)

(i) स्प्रिंग परीक्षण उपकरण,

(ii) परीक्षण स्प्रिंग,

(iii) हैंगर सहित भार, तथा

(iv) मीटर पैमाना।

सिद्धान्त (Principle)

किसी स्प्रिंग पर प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर लगाया गया भार उसमें उपजे विस्थापन (deflection) के समानुपाती होता है।

स्प्रिंग की सामर्थ्य को उसका कड़ापन (stiffness) भी कहते हैं। स्प्रिंग की सामर्थ्य को उसमें इकाई विस्थापन के लिये आवश्यक भार द्वारा प्रकट करते हैं।

अत: स्प्रिंग की सामर्थ्य या कड़ापन, $S = \dfrac{\text{लगाया गया भार}}{\text{उपजा विस्थापन}} = \dfrac{W}{\delta}\ \text{N/mm}$

कुण्डलीदार स्प्रिंग उपकरण

ये दो प्रकार के होते हैं—

(a) **कुण्डलीदार संपीडन स्प्रिंग उपकरण**—यह उपकरण चित्र 10.13 (a) में दिखाया गया है।

(b) **कुण्डलीदार तनाव स्प्रिंग उपकरण**—यह उपकरण चित्र 10.13 (b) में दिखाया गया है। दोनों ही उपकरणों में स्प्रिंग पर भार लगाने तथा विस्थापन मापने का प्रबन्ध होता है।

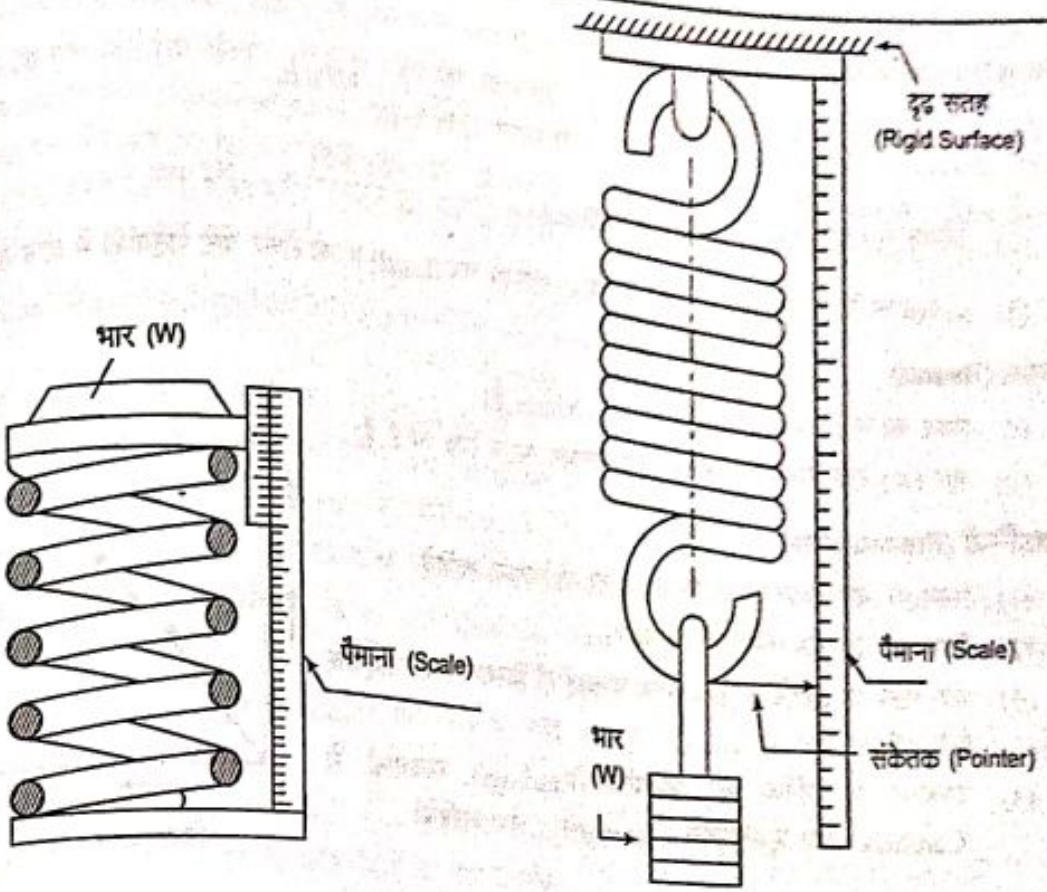
विधि (Method)

(1) उपकरण में परीक्षण स्प्रिंग (सम्पीडन या तनाव स्प्रिंग) रखते हैं।

(2) अब स्प्रिंग पर भार बढ़ाते जाते हैं और संगत विस्थापन नोट करते जाते हैं।

(3) फिर स्प्रिंग पर भार घटाते जाते हैं और संगत विस्थापन नोट करते जाते हैं।

Scanned with CamScanner



(a) कुण्डलीदार संपीडन स्प्रिंग
(Coiled Compression Spring)

(b) कुण्डलीदार तनाव स्प्रिंग
(Coiled Tension Spring)

चित्र 10.13 : कुण्डलीदार स्प्रिंग उपकरण (Helical coiled spring Apparatus)

प्रेक्षण (Observations)

(i) उपकरण में लगे वर्नियर कैलिपर की अल्पतम माप (Least Count) = ... mm

(ii) स्प्रिंग उपकरण में बिना भार लटकाये प्रारम्भिक पाठ्यांक
Initial Reading (Without Loading), δ_0 = ...mm

(iii) तालिका (Table)

क्रम संख्या (S.No.)	भार बढ़ाते समय पाठ्यांक (Load Increasing)		भार घटाते समय (Load Decreasing)		औसत विक्षेप Mean Deflection $\delta_3 = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$	वास्तविक विक्षेप Actual Deflection $\delta = \delta_3 - \delta_0$	कड़ापन या सामर्थ्य (Stiffness) $S = \frac{W}{\delta}$ (N/mm) में
	भार (Load) (W) N में ↓	स्प्रिंग में विक्षेप (Deflection) $\delta_1 \downarrow$	भार (Loads) W N में ↑	स्प्रिंग में विक्षेप (Deflection) $\delta_2 \uparrow$			
1.							
2.							
3.							
4.							

Scanned with CamScanner

गणना (Calculations)

(1) प्रत्येक पाठ्यांक से प्राप्त कड़ापन $(S) = \dfrac{\text{स्प्रिंग पर भार } (W)}{\text{विस्थापन (विक्षेप) } (\delta)}$ N/mm

(2) औसत कड़ापन (Mean/ Average Stiffness) $= \dfrac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{4} = \ldots\ldots$ N/mm

(3) x-अक्ष पर विस्थापन (Deflection) δ तथा y-अक्ष पर भार (Load) W को लेकर चारों पाठ्यांकों में ग्राफ खींचते हैं।

परिणाम (Result)

(i) स्प्रिंग का कड़ापन (Stiffness), $S = \ldots\ldots$ N/mm है।

(ii) भार (W) तथा विस्थापन (δ) में ग्राफ लगभग सरल रेखा आती है।

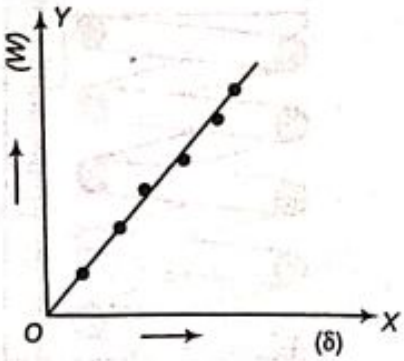
सावधानियाँ (Precautions)

(1) स्प्रिंग पर भार प्रत्यास्थता सीमा के अन्दर ही लगाना चाहिये।

(2) स्प्रिंग पर भार धीरे-धीरे रखें या उतारें।

(3) भार रखने या उतारने के कुछ समय पश्चात् ही विस्थापन का पाठ्यांक लेनी चाहिये।

(4) उपकरण के वर्नियर का पाठ्यांक (Readings) सावधानी से (Carefully) तथा शुद्धतापूर्वक (Accurately) लेना चाहिये।



चित्र 10.14 : ग्राफ

प्रयोग-8 (Experiment No-8)

उद्देश्य (Object)

किसी धातु के दिये गये नमूने का कठोरता परीक्षण (Hardness Test) करना तथा ब्रिनेल कठोरता संख्या (Brinell Hardness Number), रॉकवैल कठोरता संख्या (Rockwell Hardness Number) तथा विकर्स कठोरता (Vicker's Hardness) ज्ञात करना।

(Determination of hardness of metal Plate (Specimen) by Rock well, Brinell hardness testing M/c)

उपकरण (Apparatus)

परीक्षण नमूना (Test Specimen), ब्रिनेल कठोरता/ रॉकवैल कठोरता परीक्षण मशीन, उपयुक्त दन्तुर (Indentor) तथा उपयुक्त निहाई (Anvil) आदि।

सिद्धान्त एवं विवरण (Theory and Description)

कठोरता (Hardness)—किसी पदार्थ का वह गुण, जो खुरचे जाने (Scratching), घिसने (Abrasion), काटने (Cutting), मशीनन (Machining) तथा अन्त:प्रवेश (जैसे गड्ढा पड़ने) (Penetration) का विरोध करता है, कठोरता कहलाता है।

सिद्धान्त (Theory)

कठोरता मापने के लिये बॉल (Ball) या हीरा-शंकुनुमा (Conical) एक दन्तुर (Indentor) को धातु की प्लेट (Metallic Plate) पर किसी मानक बल (as per required force) से धँसाया (अर्थात् अन्त:प्रवेश) जाता है। फिर परीक्षण प्लेट में दन्तुर (indentor) के धँसने की माप (measurement of penetration) के विपरीत किसी निर्धारित संख्या द्वारा उस पदार्थ (या धातु) की कठोरता प्रदर्शित की जाती है। यही संख्या उस पदार्थ की कठोरता संख्या (hardness number) कहलाती

Scanned with CamScanner

है। इस आधार पर स्पष्ट होता है कि पदार्थ या धातु की प्लेट में गड्ढा पड़ना (अन्तर्वेशन) जितना अधिक होता है, उतना ही वह पदार्थ (या धातु) कम कठोर होता है और उसकी कठोरता संख्या (Hardness Number) भी उतनी ही कम होती है।

(1) ब्रिनेल कठोरता संख्या (B.H.N.)—ब्रिनेल कठोरता संख्या (B.H.N.) ज्ञात करने के लिये D व्यास की कठोरीकृत इस्पात-बॉल (hardened steel ball) को निर्धारित भार P के प्रभाव में पदार्थ या धातु-प्लेट की सतह में धँसाते हैं। सामान्यतया भार का मान 30000 N तथा बॉल का व्यास 10 mm प्रयोग किया जाता है। मृदु अलौह धातुओं के लिये 5000 N का भार प्रयोग करते हैं। पदार्थ की सतह में बॉल द्वारा बने गड्ढे का व्यास d नोट करके निम्न सूत्र की सहायता से गणना द्वारा ब्रिनेल कठोरता संख्या ज्ञात कर लेते हैं—

$$\text{Brinell Hardness Number (B.H.N.)} = \frac{2P}{\pi D[D - \sqrt{(D^2 - d^2)}]}$$

यहाँ, P = लगाया गया दीर्घ भार (Major Load) N में

D = दन्तुर (Indentor) का व्यास (diameter) mm में

d = अन्तर्वेशन (Indentation) का व्यास mm में

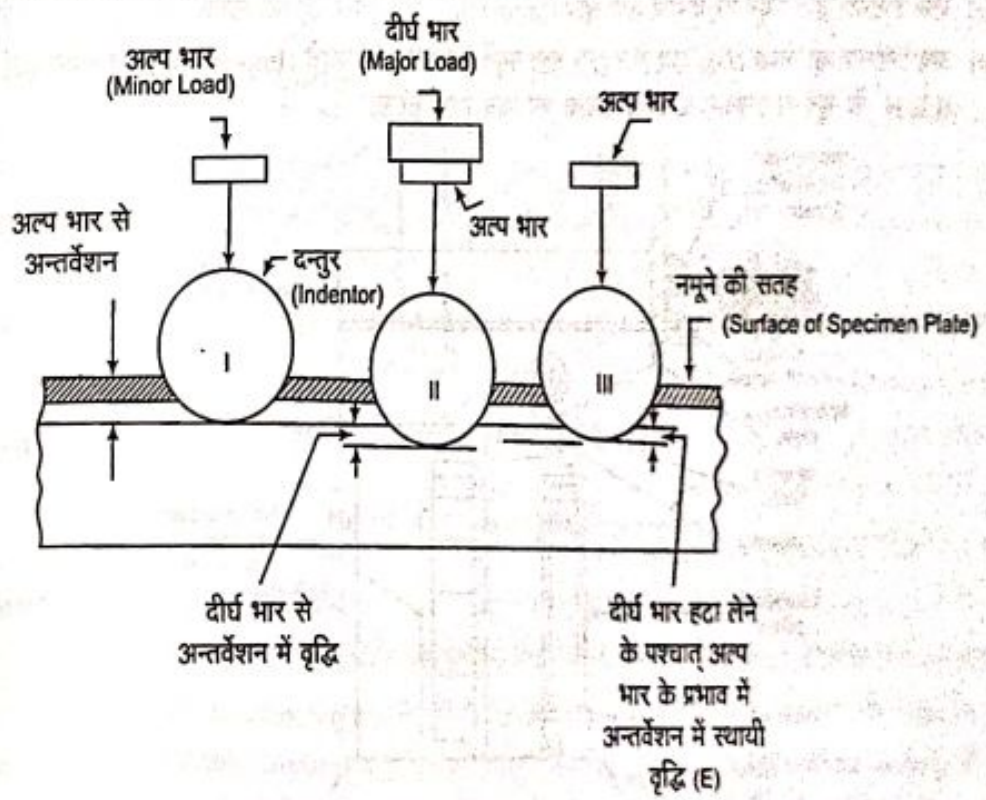
अर्थात् d = इन्डेन्टर द्वारा नमूने की सतह पर बनाई गयी छाप (Impression) का व्यास (diameter) mm में।

(2) रॉकवैल कठोरता संख्या (Rockwell Hardness Number)—(चित्र 10.15 के संदर्भ में) रॉकवैल कठोरता संख्या (R.H.N.) $B = 130 - E$ (B-पैमाने पर)

यहाँ, E = दीर्घ भार (Major Load) हटा लेने के बाद लघु भार (Minor Load) के प्रभाव में अन्तर्वेशन (Penitration) में स्थायी वृद्धि है।

रॉकवैल कठोरता संख्या (R.H.N.) $C = 100 - E$ (C-पैमाने पर)

यहाँ भी E का मान पहले की भाँति पैमाने पर पढ़ा जायेगा।



चित्र 10.15

B पैमाना (लाल)—इस पैमाने के लिये अल्प भार (minor load) 100 N, दीर्घ भार (major load) 900 N अर्थात् कुल भार 1000 N तथा 1·5875 mm व्यास की इस्पात-बॉल को दन्तुर के रूप में प्रयोग करते हैं।

Scanned with CamScanner

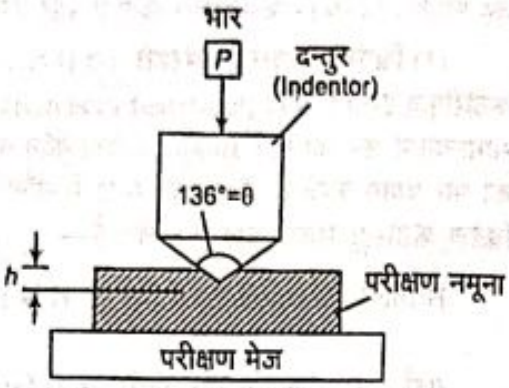
C पैमाना (काला)—इस पैमाने के लिये अल्प भार 100 N, दीर्घ भार 1400 N अर्थात् कुल भार 1500 N तथा डायमण्ड शंकु दन्तुर का प्रयोग करते हैं।

अल्प भार (minor load) का प्रयोग, परीक्षण नमूने की सतह पर किसी भी प्रकार के अपूर्णता (imperfection) के प्रभाव को समाप्त करने के लिये किया जाता है।

(3) वीकर्स कठोरता संख्या (VHN) निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जाती है—

$$VHN = 1{\cdot}8544P / L^2 \text{ (देखें चित्र 10.16)}$$

यहाँ, P = लगाया गया मानक भार N में तथा L = आयताकार अन्तर्वेशन के विकर्ण की लम्बाई।



चित्र 10.16 : विकर्स कठोरता परीक्षण

कठोरता परीक्षण विधियाँ
(Methods for Hardness Testing)

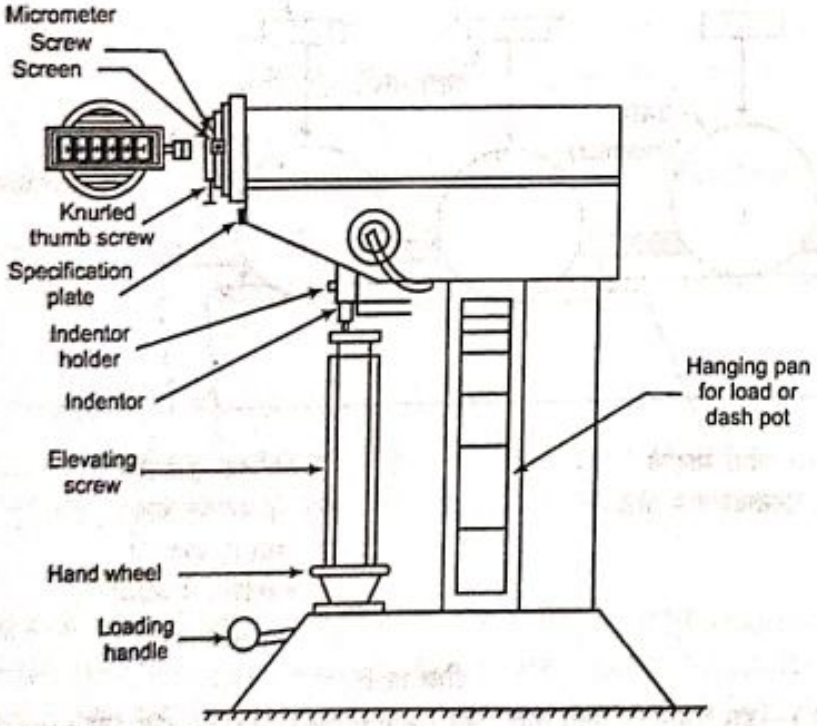
(I) ब्रिनेल कठोरता परीक्षण की विधि

(i) नमूने के आकार के अनुसार निहाई (anvil) को ब्रिनेल कठोरता परीक्षण मशीन पर लगाते हैं।

(ii) मानक आकार की कठोरीकृत बॉल के दन्तुर (Indentor) द्वारा नमूने की सतह पर धीरे-धीरे दीर्घ भार (Major Load) P के दाब को एक निश्चित समय तक लगाते हैं।

(iii) बॉल इन्डेन्टर द्वारा नमूने पर बनायी गयी छाप (Impression) का व्यास 'd' को माइक्रोस्कोप द्वारा मापते हैं।

(iv) अब इन्डेन्टर का व्यास (D), दाब बल (P) तथा नमूने की सतह पर गड्ढे (Impression) का व्यास (d) के मान B.H.N. के सूत्र में रखकर कठोरता संख्या का मान ज्ञात करना।



चित्र 10.17 : Brinell hardness tester

Scanned with CamScanner

(2) रॉकवैल कठोरता परीक्षण की विधि

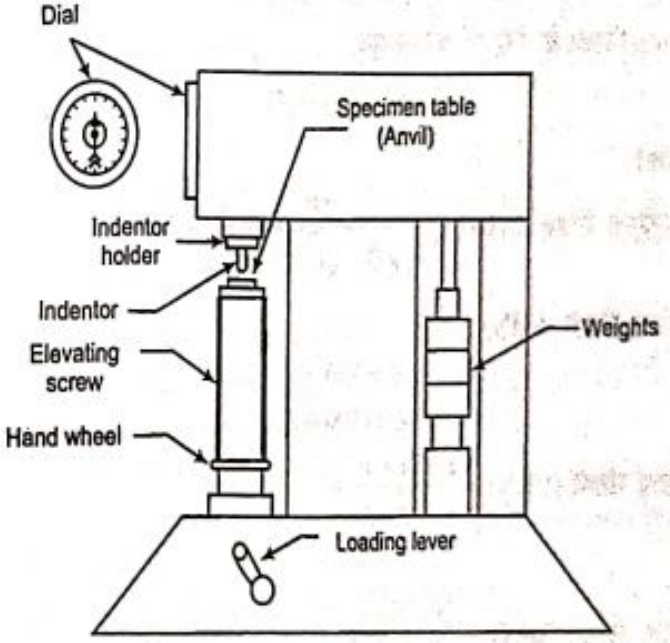
(i) नमूने के आकार के अनुसार निहाई को रॉकवैल कठोरता परीक्षण मशीन पर लगाकर उपयुक्त इन्डेन्टर (डायमण्ड कोन या स्टील बॉल) को फिट करते हैं।

(ii) चालक हैण्ड व्हील को अपनी ओर खींचने पर मशीन के डायल पर छोटा सूचक 10 (या 0) प्रदर्शित करता है। इसी समय मुख्य सूचक काले पैमाने (Scale) पर '0' तथा लाल स्केल पर '30' सूचित करता है। यदि ऐसा नहीं होता है तो डायल को आवश्यकता के अनुसार घुमाकर उसी प्रकार सैट कर देते हैं।

(iii) अब नमूने को निहाई पर रखकर चालक हैण्डल (Hand Wheel) को घुमाकर चकती को नमूने सहित इतना ऊपर उठाते हैं कि इन्डेन्टर से नमूने की सतह पर सम्पर्क हो जाये। इस प्रकार नमूने को तब तक ऊपर उठाते हैं जब तक कि छोटा सूचक डायल पर '3' प्रदर्शित करे और मुख्य सूचक सैट स्थिति में (अर्थात् स्केल-C पर शून्य तथा स्केल-B पर 30) छोटे सूचक के सम्पाती (coincidental) हो जाये। इस अनुसार सैट करने से 100 N का अल्प भार (Minor Load) स्वयं ही लगने लगता है।

(iv) इसके बाद चालक-हैंडल को दूर की ओर धकेलकर तुरन्त ही दीर्घ भार (Major Load) लगाते हैं। यह भार लगाने पर जैसे-जैसे इन्डेन्टर नमूने में प्रवेश करता है सूचक घूमने लगता है और जब अन्तर्वेशन (Penetration) पूर्ण हो जाता है तब सूचक स्थिर हो जाता है और इसके स्थिर होते ही तुरन्त चालक हैण्डल को अपनी ओर खींचते हैं जिससे दीर्घ भार हट जाता है तथा B तथा C पैमाने पर पाठ्यांक पढ़ लेते हैं।

(v) अन्त में निहाई को नीचे लाकर नमूने को हटा लेते हैं।



चित्र 10.18 : Rockwell hardness tester

(3) विकर्स कठोरता परीक्षण की विधि

(i) सर्वप्रथम नमूने को निहाई पर रखकर स्क्रू प्रणाली द्वारा निहाई (anvil) को इन्डेन्टर के स्पर्श होने तक उठाते हैं।

(ii) चालक लीवर (Starting Lever) डायमण्ड पिरामिड इन्डेन्टर पर धीरे-धीरे भार (P) को बढ़ाते हैं।

(iii) इन्डेन्टर का निशान (Impression) प्राप्त करने के बाद फुट लीवर द्वारा मशीन को Reset करते हैं।

(iv) नमूने-प्लेट को निकालने के बाद माइक्रोस्कोप द्वारा इन्डेन्टर के निशान का व्यास (अर्थात् विकर्णों की लम्बाई 0·001 mm की शुद्धता तक) मापते हैं।

Scanned with CamScanner

(v) अब दिये गये सूत्र V.H.N. $= \frac{2P\sin\frac{\theta}{2}}{L^2}$ में $\theta = 136°$ रखने पर,

$$\text{V.H.N.} = \frac{1{\cdot}854 \times P}{L^2}$$

∴ सूत्र द्वारा विकर्स कठोरता संख्या ज्ञात करते हैं।

प्रेक्षण (Observations)

(1) ब्रिनेल कठोरता संख्या (BHN) के लिये

भार, $P =$ .....N

दन्तुर का व्यास, $D =$ .....mm

अन्तर्वेशन का व्यास, $d =$ .....mm

(2) रॉकवैल कठोरता संख्या (RHN) के लिये

$E =$ .....

(3) विकर्स कठोरता संख्या (VHN) के लिये

लगाया गया भार, $P =$ .....N

दन्तुर (Indentor) निशान के विकर्णों की लम्बाई,

$L =$ .....mm

गणनायें (Calculations)

(1) ब्रिनेल की कठोरता संख्या (BHN) $= \frac{2P}{\pi D[D - \sqrt{(D^2 - d^2)}]} =$ .....

(2) रॉकवैल कठोरता संख्या (RHN)

$B = 130 - E =$ .....

$C = 100 - E =$ .....

तथा

(3) विकर्स कठोरता संख्या (VHN) $= \frac{1{\cdot}854 \times P}{L^2} =$ .....

परिणाम (Result)

(1) ब्रिनेल कठोरता संख्या (BHN) = ...

(2) रॉकवैल कठोरता संख्या (RHN) = ...

(3) विकर्स कठोरता संख्या (VHN) = ...

सावधानियाँ (Precautions)

(1) परीक्षण से पहले मशीन की यथार्थता चैक कर लेनी चाहिये।

(2) नमूने के किनारों के निकट परीक्षण नहीं किया जाना चाहिये।

(3) भार को धीरे-धीरे लगाना चाहिये।

(4) नमूने की मोटाई अन्तर्वेशन की गहराई से 10 गुना अधिक होनी चाहिये।

(5) नमूने की चौड़ाई अन्तर्वेशन के व्यास के तीन गुने से अधिक होनी चाहिये।

Scanned with CamScanner

(6) सही परिणामों के लिये कमरे का तापमान 20°C के लगभग होना चाहिये।

(7) कम्पन उत्पन्न करने वाली किसी भी मशीन से कठोरता परीक्षण मशीन पर्याप्त दूरी पर होनी चाहिये।

(8) नमूने की सतह स्वच्छ तथा समतल होनी चाहिये।

प्रयोग-9 (Experiment No-9)

उद्देश्य (Object)

रॉकवैल (Rockwell) कठोरता परीक्षण मशीन का चित्र सहित अध्ययन करना।

(To Study the Rock Well Hardness Tesing M/c)

उपकरण (Apparatus)

रॉकवैल कठोरता परीक्षण मशीन।

अध्ययन

निम्न दो प्रकार से पदार्थों की कठोरता परीक्षण को वर्गीकृत किया जाता है—

(1) अन्तर्वेशन परीक्षण (Indentation test)

(2) खरोंच परीक्षण (Scratch test)

रॉकवैल कठोरता परीक्षण मशीन एक अन्तर्वेशन परीक्षण प्रकार की मशीन है।

रॉकवैल कठोरता परीक्षण मशीन के मुख्य भाग निम्न होते हैं—

(1) मानक मापों एवं आकार का दन्तुर (indentor),

(2) भार लगाने की युक्ति तथा

(3) दन्तुर से बने गड्ढे या निशान (impression) को मापने की युक्ति।

मशीन का विवरण

मशीन के आधार में बॉल-बियरिंग का एक हस्त पहिया (Hand wheel) लगा होता है। हस्त पहिये पर हैंडल लगे होते हैं जिनकी सहायता से इसे घुमाया जा सकता है। हस्त पहिया घुमाने से वर्गाकार चूड़ी वाला एक स्क्रू ऊपर या नीचे चलता है। स्क्रू के ऊपरी किनारे पर परीक्षण नमूने की टेबल या निहाई (anvil) लगी होती है।

टेबल के ठीक ऊपर मशीन के छज्जे नुमा आगे निकले भाग अर्थात् प्रक्षेपित (projected) भाग में अन्तर्वेशन प्रणाली (indenting system) लगी रहती है। इस प्रणाली में एक दन्तुर-होल्डर (indentor holder) होता है जिसमें पेंच की सहायता से उपयुक्त दन्तुर लगाया जाता है।

दन्तुर होल्डर को दबाने के लिये मशीन के ऊपरी भाग में लीवर-प्रबन्ध होता है। मशीन के दायीं ओर मुख्य लीवर से एक निलम्बन दण्ड (suspension rod) लटकी रहती है। इस दण्ड पर 400, 500 और 600 N के समानुपाती बाट लटकाये जा सकते हैं। ये बाट ऐसे अनुपात में होते हैं कि इन्हें लटकाने पर उतना ही भार दन्तुर (indentor) पर कार्य करता है। बाटों का भार मुख्य लीवर के द्वारा दन्तुर पर पारेषित होता है।

लीवर के पिछले किनारे पर डैश पॉट (dash pot) लगा होता है जो दन्तुर के नीचे आते समय कुशन (cushion) का काम करता है। डैश पॉट में तेल भरा रहता है। डैश-पॉट पर एक वाल्व स्क्रू या नियामक (regulator) लगा रहता है जिसकी सहायता से दन्तुर के नीचे आने का समय सैट किया जा सकता है।.

मशीन के सामने वाले भाग के ऊपर एक डायल चिमटे पर डायल-गेज लगी रहती है। इस डायल-गेज पर सीधे ही रॉकवैल कठोरता संख्या HRC या HRB को क्रमशः काले और लाल पैमाने पर पढ़ा जा सकता है।

HRC का अर्थ है—Rockwell hardness measured on scale-C तथा HRB का अर्थ है—Rockwell hardness measured on scale-B.

Scanned with CamScanner

मुख्य लीवर के साथ एक चालक हैंडल भी लगा होता है जिसकी सहायता से दन्तुर पर भार लगाना या हटाना तथा नियन्त्रित करना किया जाता है।

दन्तुर (Indentor)

मशीन पर दो प्रकार के दन्तुर प्रयोग किये जाते हैं—

(i) हीरा-शंकु दन्तुर (diamond cone indentor)

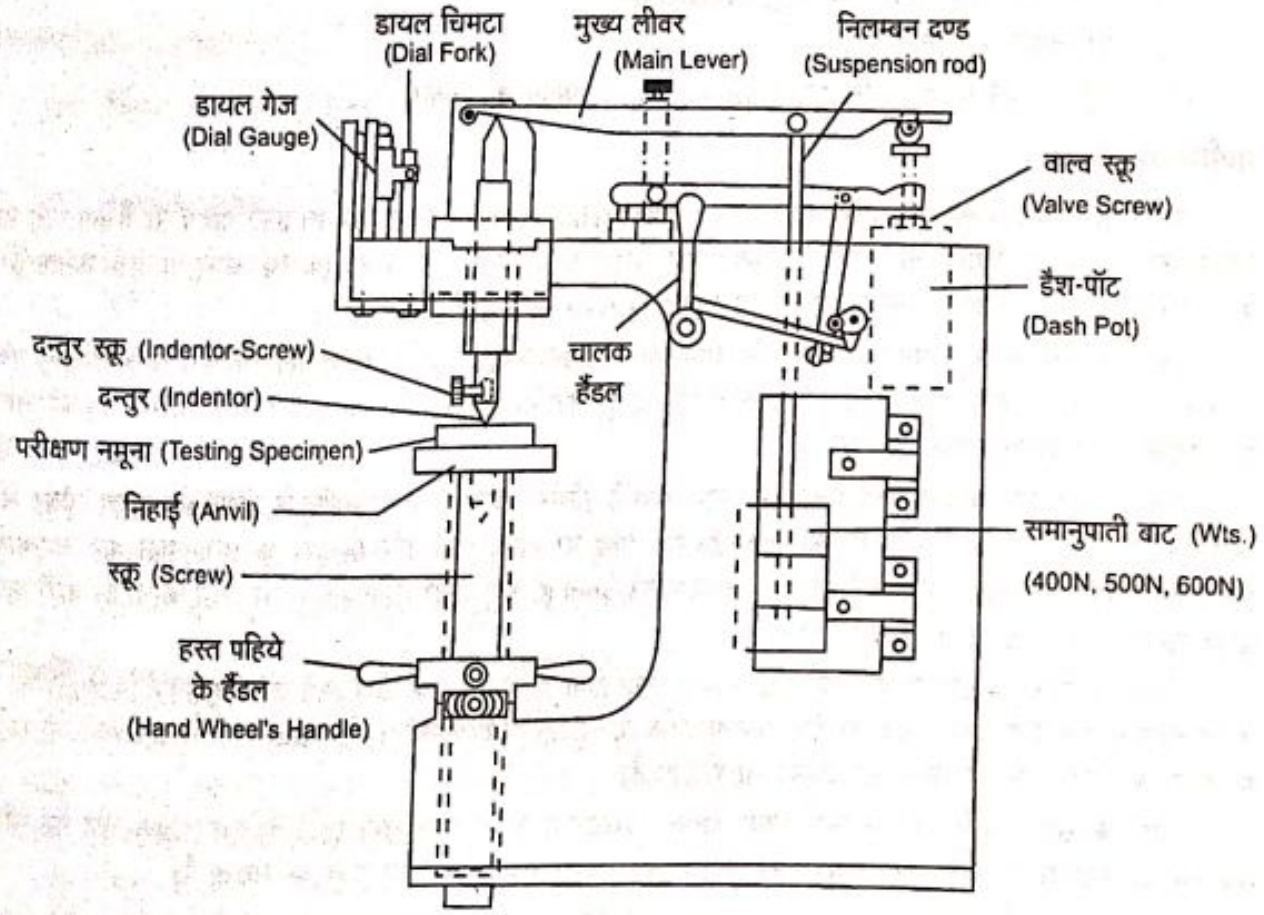
(ii) इस्पात-बॉल दन्तुर (steel ball indentor)

(i) हीरा-शंकु दन्तुर (diamond cone indentor)—यह दन्तु हीरे का शंकु आकार में बना होता है जिसका शीर्ष नोकदार तथा गोल होता है। कठोर इस्पात के कठोरता परीक्षण के लिये इसके साथ 1500 N भार प्रयोग करते हैं और काले पैमाने पर पाठ्यांक लेते हैं जिसे HRC से प्रदर्शित करते हैं। 120° के शंकु कोण वाले ब्रेल के साथ 100 N अल्प भार (minor load) प्रयोग करते हैं।

(ii) इस्पात-बॉल दन्तुर—निम्न तथा मध्यम कार्बन इस्पात (low and medium carbon steel) के लिये 2·5 mm व्यास की इस्पात बॉल 1000 N भार के साथ प्रयोग करते हैं। इसके लिये लाल पैमाने पर पाठ्यांक पढ़ते हैं और 100 N का अल्प भार प्रयोग करते हैं।

मृदु (soft) पदार्थों की कठोरता परीक्षण के लिये 2·7 से 3 mm की बॉल का प्रयोग करते हैं। इस विधि से अलौह धातु पदार्थों का भी कठोरता परीक्षण किया जा सकता है।

नाइट्राइटिड इस्पात, सेफ्टी रेजर तथा पतली चादरों आदि की कठोरता ज्ञात करने के लिये इस प्रबन्ध में 150, 300 तथा 450 N के भार प्रयोग करते हैं। नाइट्राइटिड इस्पात के लिये 1·5875 mm व्यास की इस्पात बॉल का प्रयोग करते हैं।



चित्र 10.19 : रॉकवैल कठोरता परीक्षण मशीन (Rockwell Hardness Testing Machine)

Scanned with CamScanner

निहाइयाँ (Anvils)

विभिन्न परिस्थितियों में निम्न प्रकार की निहाइयाँ प्रयोग की जाती हैं—

(i) भारी तथा चपटे या असमान सतह वाले या पतली पट्टी के लिये—स्पॉट निहाई (spot anvil),

(ii) चपटे नमूनों के लिये—62·5 mm व्यास की निहाई, तथा

(iii) बेलनाकार आकृति के नमूनों के लिये—वी-खाँचा निहाई।

इस मशीन को चित्र 10.19 में दिखाया गया है।

नोट—आजकल रॉकवैल कठोरता परीक्षण मशीन में विद्युत-मोटर चालित यन्त्र-विन्यास का भी प्रयोग करते हैं जिसमें परीक्षण की सामान्य अवधि (4 सेकण्ड) या त्वरित अवधि (2 सेकण्ड) का चक्र स्वत: ही पूरा हो जाता है।

प्रयोग-10 (Experiment No-10)
(Impact Strength of Steel)

उद्देश्य (Object)

आइजोड इम्पैक्ट टैस्टिंग मशीन (Izode Impact Testing Mechine) द्वारा पदार्थों (जैसे—इस्पात Steel, एल्युमीनियम -Al) की धक्का सहन क्षमता (Impact Strength) निम्न परीक्षणों द्वारा ज्ञात करना (To Perform impact test on "Izod Impact Testing M/c)—

(i) IZODE-Test

(ii) Charpy Test

उपकरण (Material and Equipment)

(i) आइजोड इम्पैक्ट टैस्टिंग मशीन

(ii) वर्नियर कैलिपर

(iii) मीटर-पैमाना (Metre Scale)

(iv) परीक्षण नमूने—

(a) Steel Specimen, 75 mm × 10 mm × 10 mm (Izode Test)

(b) Steel Specimen, 55 mm × 10 mm × 10 mm (Charpy Test).

सिद्धान्त (Principle)

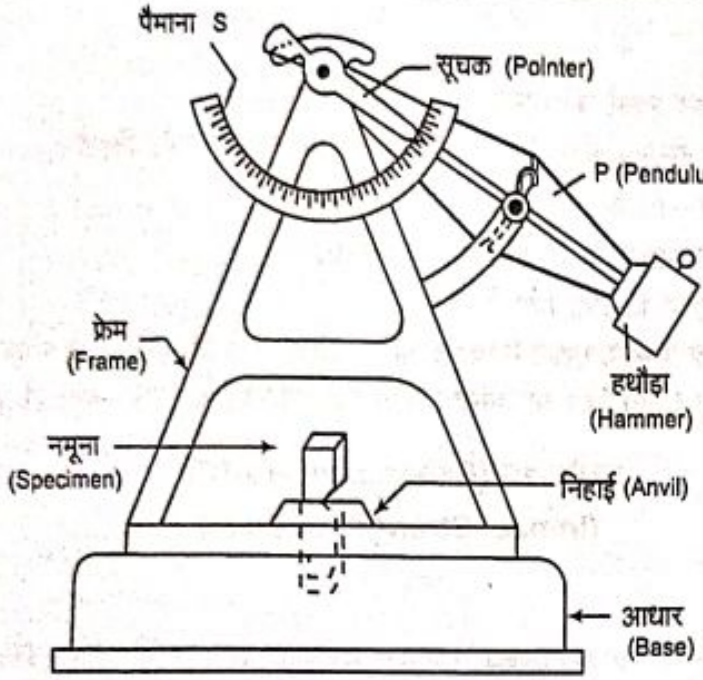
"किसी पदार्थ की धक्का या झटके सहन क्षमता (Impact Strength or Shocks-Resistance), उस पदार्थ के मानक मापों के नमूने (Standard Specimen) को तोड़ने के लिए आवश्यक खर्च हुई ऊर्जा द्वारा प्रदर्शित होती है।"

"An impact test signifies, toughness property of the material that is ability of material to absorb energy during plastic deformation."

आइजोड-परीक्षण मशीन विवरण (Details of Izode's Testing Machine)

यह मशीन चित्र 10.20 में प्रदर्शित की गयी है। इस मशीन में A के आकार के दो फ्रेम होते हैं जिनके बीच में एक पैंडुलम P दोलन कर सकता है। इस पैंडुलम की गति के साथ एक सूचक (Indicator) भी वृत्तीय पैमाने (Circular Scale) S पर चलकर रुकता है। इसके वृत्तीय पैमाने पर किग्रा-मी० (kg-m) या न्यूटन-मीटर (N-m) में चिन्ह अंकित होते हैं। झूलते हुए पैंडुलम को रोकने के लिये इस मशीन पर हस्त-लीवर ब्रेक (Hand Lever Brake) का भी प्रबन्ध होता है।

Scanned with CamScanner



चित्र 10.20 : आइजोड संघटन परीक्षण मशीन

मशीन के आधार (Base) में लगी निहाई (Anvil) *A* में नमूने (Specimen) को उपयुक्त स्थिति में (नमूने पर बने *V*-खाँचा से कम लम्बाई वाला सिरा निहाई से ऊपर तथा अधिक लम्बाई वाला सिरा निहाई के अन्दर रखते हुए) पकड़ाकर (Fixed up the Specimen) पैंडुलम के प्रहार द्वारा तोड़ा जाता है। नमूने को असफल (Fail) करने अथवा तोड़ने के बाद पैंडुलम झूलता हुआ दूसरी ओर पहुँच जाता है। तोड़ने के बाद पैंडुलम में शेष ऊर्जा (Energy) पैमाने (Scale) पर सूचक द्वारा प्रदर्शित होती है, जिसे नोट कर लेते हैं। इस प्रकार तोड़ने से पहले तथा बाद में पैंडुलम की ऊर्जाओं की रीडिंग्स का अन्तर ही नमूना तोड़ने में खर्च हुई ऊर्जा को प्रदर्शित करता है।

परीक्षण नमूने

इस मशीन पर धक्का परीक्षण (Impact Strength Test) के लिये दो प्रकार के नमूने प्रयोग किये जाते हैं—

(a) आइजोड-परीक्षण नमूना (Izode Test Specimen)

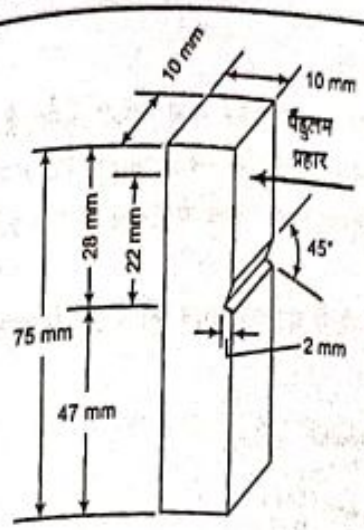
(b) शार्पी-परीक्षण नमूना (Charpy Test Specimen)

(a) आइजोड-परीक्षण नमूना (Izode Specimen)—यह नमूना (Specimen) चित्र 10.21 (a) के अनुसार 75 mm लम्बा तथा 10 mm भुजा के वर्ग की काट वाला या 10 mm व्यास वाले वृत्ताकार काट वाला होता है। नमूने के एक सिरे से 28 mm की दूरी पर एक *V*-खाँचा (*V*-Notch) बना होता है जिसकी गहराई 2 mm तथा कोण 45° रखा जाता है। नमूने को, पैंडुलम के आने की ओर खाँचा रखते हुए खाँचे से 28 mm की कम लम्बाई वाला भाग निहाई से बाहर ऊपर की ओर निकालकर निहाई में पकड़ते हैं ताकि पैंडुलम खाँचे से 22 mm की दूरी पर नमूने पर प्रहार करे।

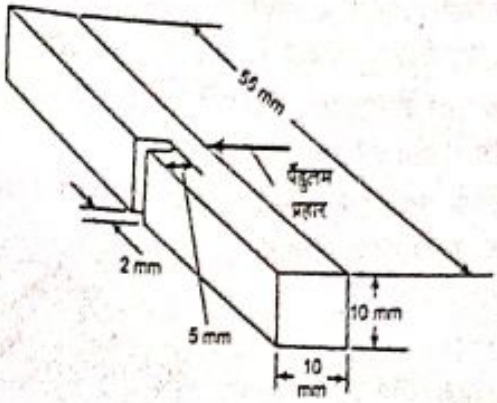
(b) शार्पी-परीक्षण नमूना (Charpy Specimen)—चित्र 10.21 (b) के अनुसार यह नमूना 55 mm लम्बा तथा 10 mm भुजा के वर्ग की काट वाला होता है। इसके बीच में 2 mm गहरा तथा 45° के कोण वाला *V*-खाँचा बना होता है। यदि खाँचा U के आकार में बनाया जाये तो इसकी गहराई 5 mm तथा चौड़ाई 2 mm रखते हैं।

परीक्षण के लिये शार्पी नमूने को दो निहाइयों के बीच में इस प्रकार रखा जाता है कि खाँचा बीचों-बीच रहे और पैंडुलम का प्रहार खाँचे के कट के विपरीत समतल पर खाँचे की सीध में हो। निहाइयों के बीच की दूरी 40 mm रखी जाती है।

Scanned with CamScanner

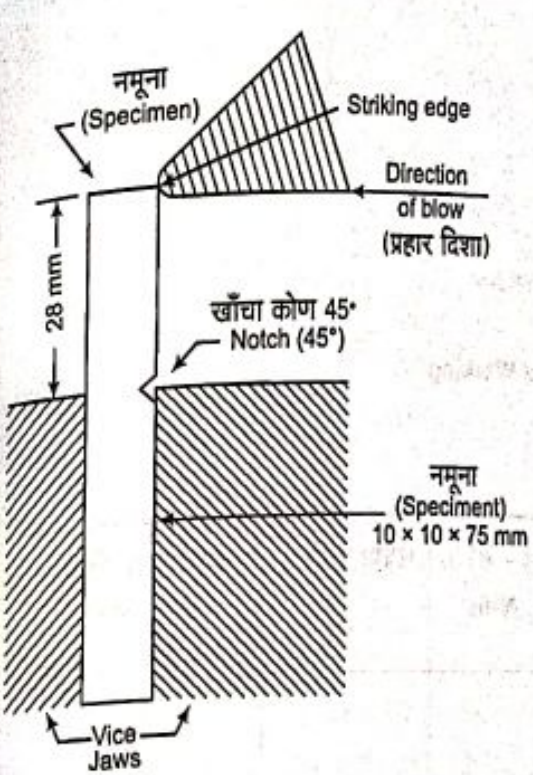


(a) आइजोड नमूना (Izode-specimen)

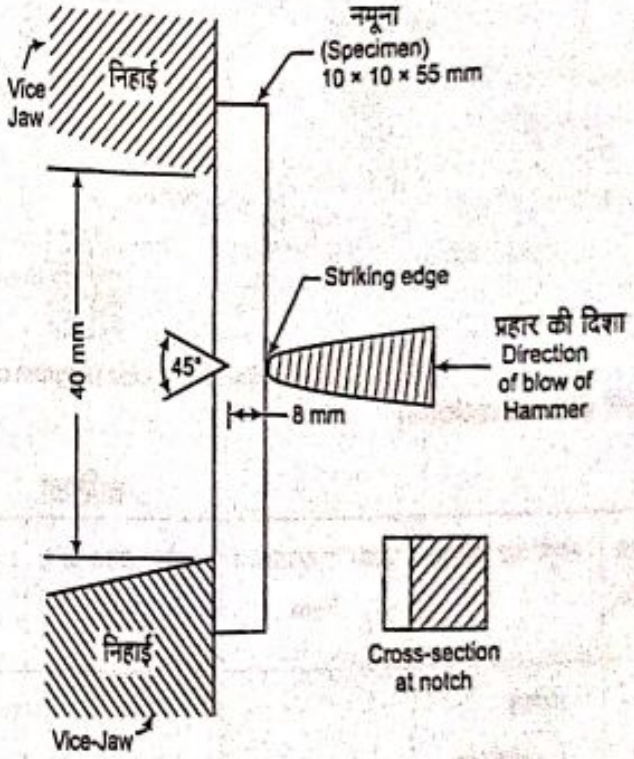


(b) शार्पी नमूना (Charpy specimen)

चित्र 10.21



(a) Izode test



(b) Charpy test

चित्र 10.22

विधि (Procedure)

(1) मानक मापों (Standard Size) का नमूना लेकर वर्नियर कैलिपर या अन्य यंत्र द्वारा मापों को चैक करते हैं।
(2) निहाई (Anvil) पर नमूना पकड़ने के लिये पकड़न युक्ति (Device) लगाते हैं।
(3) पैंडुलम के हथौड़े पर प्रहार नोज (Striking Nose) लगाते हैं।
(4) पैंडुलम-हैमर को दायीं ओर ऊपर उठाकर लैच की सहायता से ऊपर ही रोककर पकड़ लेते हैं।
(5) नमूने को निहाई पर रखकर पकड़ते हैं।
(6) मशीन के ऊर्जा मापक पैमाने (Scale) पर संकेतक (Pointer) से स्थैतिक ऊर्जा का प्रथम पाठ्यांक (Reading) नोट करते हैं।

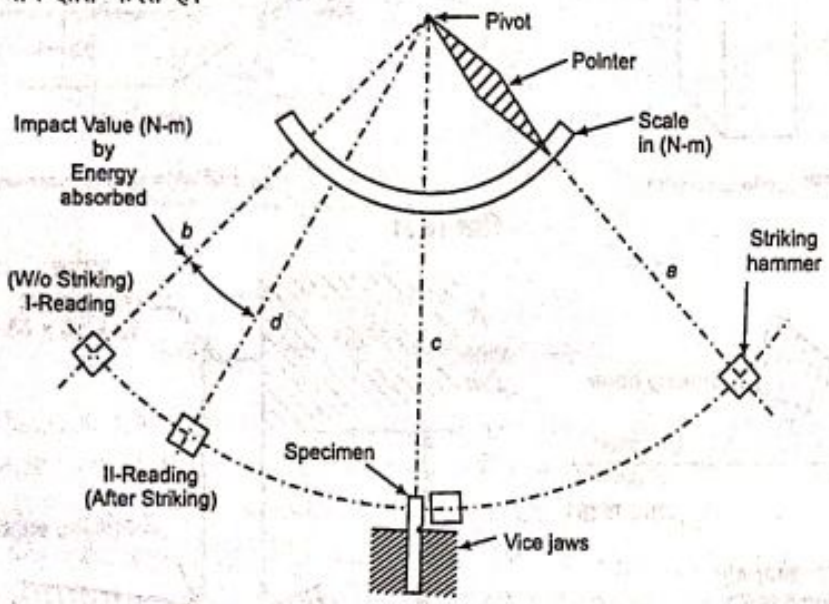
Scanned with CamScanner

(7) अब पैंडुलम को रिलीज-लीवर (Release Lever) द्वारा छोड़ते हैं।

(8) जब पैंडुलम, नमूने को तोड़ता हुआ दूसरी ओर अधिकतम ऊँचाई पर पहुँचकर नीचे वापस आता है तो ब्रेक लगाकार पैंडुलम को रोक देते हैं और संकेतक (Pointer) का दूसरा पाठ्यांक (Reading) नोट कर लेते हैं।

(9) बिना नमूने के यही क्रिया दोहराते हैं और पहले की भाँति दोनों पाठ्यांकों का अन्तर मशीन की घर्षण हानि अथवा घर्षण में खर्च हुई ऊर्जा को दर्शाता है।

(10) घर्षण में खर्च हुई ऊर्जा को खाली हथौड़े को गिराने में खर्च ऊर्जा में से घटाकर नमूने को तोड़ने में खर्च हुई शुद्ध ऊर्जा का मान ज्ञात करते हैं।



चित्र 10.23 : Line Diagram of Working

प्रेक्षण (Observations)

तालिका

क्रम सं०	नमूने का पदार्थ	प्रथम पाठ्यांक A N-m	द्वितीय पाठ्यांक B N-m	$(A-B)$ in N-m	घर्षण हानि C	नमूने द्वारा शोषित शुद्ध ऊर्जा $(A-B-C)$ N-m
1.	इस्पात					P_1
2.	ऐल्युमिनियम					P_2

परिणाम (Result)

धक्का सहन की क्षमतायें निम्न प्रकार हैं—

इस्पात P_1 = ...N-m, तथा एल्युमीनियम P_2 = ...N-m.

सावधानियाँ (Precautions)

(1) नमूना, मानकों के अनुसार ही यथार्थ साइज का होना चाहिये (शुद्धतापूर्वक मापें, मापकर चैक करना चाहिये)।

(2) नमूने को उपयुक्त स्थिति में दृढ़तापूर्वक ही निहाई पर बाँधना चाहिये।

(3) पैंडुलम की क्रिया के समय उसके सामने या पीछे कभी खड़े नहीं होना चाहिये।

(4) प्रथम पाठ्यांक लेते समय पैंडुलम स्थिर स्थिति में होना चाहिये।

Scanned with CamScanner

प्रयोग संख्या 11

(A) उद्देश्य (Object)

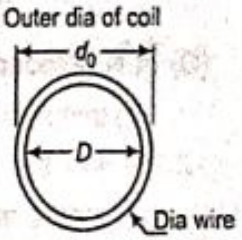
एक कुंडलीदार स्प्रिंग (helical coil spring) के विभिन्न प्राचाल (parameters) ज्ञात करना।

(B) उपकरण (Apparatus)

(i) कुण्डलीदार तनाव स्प्रिंग, (ii) कुण्डलीदार संपीडन स्प्रिंग, (iii) स्प्रिंग परीक्षण उपकरण, (iv) विभिन्न भार हैंगर सहित, (v) वर्नियर कैलिपर, (vi) स्क्रूगेज तथा (vii) मीटर पैमाना।

(C) सिद्धान्त तथा विवरण (Theory and Details)

एक कुण्डलीदार तनाव स्प्रिंग तथा एक कुण्डलीदार संपीडन स्प्रिंग के प्रमुख प्राचाल (Parameters) निम्न हैं—



चित्र 10.24

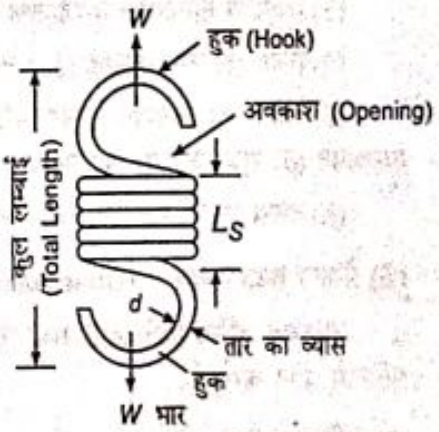
(i) स्प्रिंग तार का व्यास (Diameter of Wire of Spring) (d)—जिस तार को मोड़कर स्प्रिंग बनाया गया है उसके व्यास को स्प्रिंग तार का व्यास कहते हैं। इसे d से प्रदर्शित करते हैं।

(ii) कुण्डली का औसत या माध्य व्यास (Mean diameter of coil) (D)—कुण्डली के तार की अनुप्रस्थ काटों के केन्द्रों के बीच मापा गया व्यास कुण्डली का माध्य या औसत व्यास D कहलाता है। कुण्डली के बाह्य व्यास d_0 में से तार का अर्द्धव्यास दोनों तरफ घटाने पर औसत व्यास प्राप्त होता है।

$$D = d_0 - d/2 - d/2 = (d_0 - d)$$

(iii) कुण्डलियों की संख्या (N)—संपीडन स्प्रिंगों में सिरों पर प्लेटों को जोड़ने के लिए स्प्रिंग की कुण्डली चपटी बना दी जाती है। वास्तव में स्प्रिंग में कुण्डलियों की जो संख्या क्रियाशील रहती है, उसे स्प्रिंग में कुण्डलियों की संख्या कहते हैं। इसे N से दर्शाते हैं।

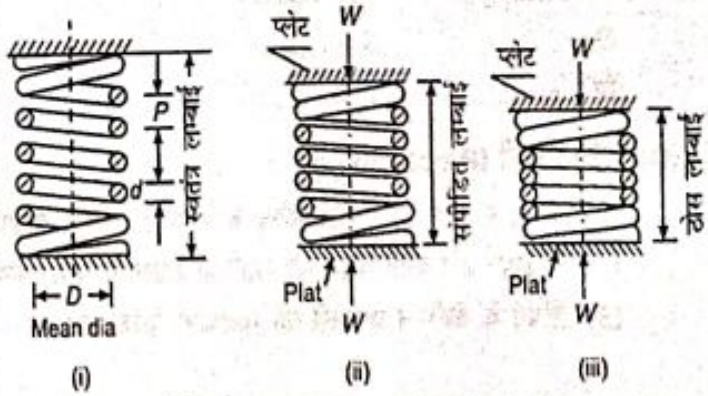
(iv) स्प्रिंग इन्डेक्स (Spring Index) (C)—स्प्रिंग कुण्डली के माध्य व्यास (D) तथा तार के व्यास (d) के अनुपात को स्प्रिंग इन्डेक्स (C) कहते हैं। अत: स्प्रिंग इंडेक्स $C = \frac{D}{d}$



चित्र 10.25 : Tention Spring

(v) स्प्रिंग का कड़ापन (Stiffness of Spring) (S)—स्प्रिंग के एकांक विस्थापन (δ) के लिए आवश्यक भार को कड़ापन या स्प्रिंग रेट कहते हैं। यदि W भार लगाने से स्प्रिंग में विस्थापन δ होता है तक कड़ापन $S = \frac{W}{\delta}$

(vi) स्प्रिंग की ठोस लम्बाई (Solid Length of Spring) L_S—संपीडन स्प्रिंग को पूरा दबा देने से उसकी सभी कुण्डलियाँ पास-पास आ कर मिल जाती हैं, जिससे और अधिक सम्पीडित होनी बन्द हो जाती हैं। इस



चित्र 10.26 : Compression Spring

अवस्था में स्प्रिंग को ठोस (solid) कहा जाता है। एक स्प्रिंग में तार का व्यास 'd' तथा कुण्डलियों की कुल संख्या N हो तो स्प्रिंग की ठोस लम्बाई $\boxed{L_S = N \times d}$ सूत्र

(vii) स्प्रिंग की स्वतंत्र लम्बाई (Free Length of spring)—संपीडन स्प्रिंग के लिए उसकी स्वतंत्र लम्बाई, $L_f = L_w + \delta$

जहाँ, L_w = भार W के प्रभाव में स्प्रिंग की संपीडित लम्बाई

δ = भार W के लिए स्प्रिंग का विस्थापन (deflection)

स्प्रिंग की स्वतन्त्र लम्बाई को निम्न प्रकार भी प्रदर्शित किया जा सकता है।

L_F = ठोस लम्बाई + अधिकतम संपीडन + कुण्डलियों के मध्य अवकाश

$$= L_S + \delta_{max} + (n-1) \times 1 \text{ mm}$$

(D) विधि (Procedure)

(1) प्रयोगशाला में उपलब्ध स्प्रिंगों को कम से कम तीन अलग-अलग जगह व्यास मापकर तार का औसत व्यास 'd' ज्ञात करते हैं।

(2) उपरोक्त की भाँति कम से कम तीन बार कुण्डली का बाह्य व्यास d_0 ज्ञात करके औसत बाह्य व्यास प्राप्त करते हैं। फिर उसमें से तार का व्यास घटाकर कुण्डली का माध्य व्यास ज्ञात करते हैं।

अर्थात् $D = d_0 - d$

(3) स्प्रिंग में क्रियाशील कुण्डलियों की संख्या (N) ज्ञात करते हैं।

(4) स्प्रिंग की ठोस लम्बाई (L_S) तथा स्वतंत्र लम्बाई (L_f) नापते हैं।

(5) स्प्रिंग का कड़ापन, स्प्रिंग परीक्षण उपकरण पर ज्ञात करते हैं। जैसे कड़ापन (S) = लगाया भार (W) / विस्थापन (δ) सूत्र। कड़ापन का मात्रक N/mm प्रयोग करते हैं।

(6) तनाव स्प्रिंगों में, दोनों तरफ बने हुकों का विस्थापन भी गणना में शामिल करते हैं।

(E) प्रेक्षण तथा गणनायें (Observation and Calculations)

उपरोक्त वर्णित विधि द्वारा सभी प्राचालों के लिए प्रेक्षण नोट करते हैं तथा आवश्यकतानुसार गणना करके वाँछित परिणाम प्राप्त करते हैं।

(F) परिणाम (Result)

प्रायोगिक स्प्रिंग के विभिन्न प्राचाल निम्न प्रकार प्राप्त हुए—

d = ... d_0 = ...

D = ... S = ...

पिच p = ... L_s = ...

(G) सावधानियाँ (Precautions)

(1) स्प्रिंग पर भार प्रत्यास्थता सीमा के भीतर ही लगाना चाहिए।

(2) कड़ापन ज्ञात करते समय भार रखने या उतारने के कुछ समय पश्चात् ही विस्थापन का पाठ्यांक लेना चाहिए।

(3) स्प्रिंग के विभिन्न प्राचालों को सावधानी-पूर्वक नोट करना चाहिए।

❑

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner