SYLLABUS

APPLIED PHYSICS-I

(Common to All Engineering Courses)

Rationale :

Engineering Physics includes the study of a diversified topics related to the world around us. It aims to give an understanding of this world both by observation and by prediction of the way in which objects behave. Concrete knowledge of physical laws, analysis and applications in various fields of engineering and technology are given prominence in this course content.

Note : Tachers should give examples of engineering/technology applications of various concepts and principles in each topic so that students are able to learn and appreciate these concepts and principles. In all contents, SI units should be followed.

LEARNING OUTCOMES

After undergoing this course, the students must be able to :

- Identify the use of S.I. system of measurement with accuracy and how it is used in engineering.
- Represent physical quantities as scalars and vectors, applying the physical laws and concept of linear and circular motion in everyday life.
- Solve difficult problems (walking of man, horse and cart problem, flying of bird/aircraft, etc.)
- Analyse and design banking of roads/railway tracks and apply conservation of momentum principle to explain rocket propulsion, recoil of gun etc.
- Derive work, power and energy relationship and solve problems about work and power.
- Define work, energy and power and their units.
- Describe conservation of energy and its applications.
- Understand the concept of rotational motion of a rigid body and its applications.
- Apply the physical laws and concepts of gravity, its variation with longitude and latitude and its uses in space satellite etc.
- Understand the concept of elasticity, surface tension, pressure and the laws governing movement of fluids.
- Express physical work in term of heat and temperature; Measure temperature in various processes on different scales (Celsius, Kelvin, Fahrenheit etc.)
- Distinguish between conduction, convection and radiation, identify the different methods for reducing heat losses.
- Understand the laws of thermodynamics, Carnot cycle and their applications.

DETAILED CONTENTS

1. Units and Dimensions *(10 Periods)*

1.1 Need of Measurement in engineering and science, units of physical quantities-fundamental and derived units, systems of units (FPS, CGS and SI units).

1.2 Dimensions and dimensional formulae of physical quantities.

1.3 Principle of homogeneity of dimensions.

1.4 Dimensional equations and their applications, conversion of numerical values of physical quantities from one system of units into another, checking the correctness of physical equations and deriving relations among various physical quantities.

1.5 Limitations of dimensional analysis

1.6 Error in measurement, accuracy and precision of instruments, random and systematic errors, absolute error, relative error and percentage error. Estimation of probable errors in the results of measurement (combination of errors in addition, subtraction, multiplication, division and powers), rules for representing significant figures in calculation.

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

1.7 Application of units and dimensions in measuring length, diameter, circumference, volume, surface area etc. of metallic and non-metallic blocks, wires, pipes etc. (at least two each).

2. Force and Motion *(10 Periods)*

2.1 *Scalar and vector quantities-examples, representation of vector, types of vectors.*

2.2 *Addition and Subtraction of Vectors, Triangle and Parallelogram law (Statement only), Scalar and Vector Product.*

2.3 *Resolution of Vectors and its application to lawn roller.*

2.4 *Force, Momentum, Statement and Derivation of conservation of linear momentum, its applications such as recoil of gun.*

2.5 *Impulse and its Applications*

2.6 *Circular motion (Uniform and Non-uniform), definition of angular displacement, angular velocity, angular acceleration, frequency, time period.*

2.7 *Relation between linear and angular velocity, linear acceleration and angular acceleration (related numerical).*

2.8 *Central force, Expression and Applications of Centripetal and centrifugal forces with examples such as banking of roads and bending of cyclist, principle of centrifuge.*

2.9 *Application of various forces in lifts, cranes, large steam engines and turbines.*

3. Work, Power and Energy *(10 Periods)*

3.1 *Work and its units, examples of zero work, positive work and negative work, conservative and non-conservative force.*

3.2 *Friction : Modern concept, types, laws of limiting friction, Coefficient of friction and its Engineering Applications.*

3.3 *Work done in moving an object on horizontal and inclined plane for rough and plane surfaces with its applications.*

3.4 *Energy and its units : Kinetic energy and potential energy with examples and their derivation, work energy theorem.*

3.5 *Principle of conservation of mechanical energy for freely falling bodies, examples of transformation of energy.*

3.6 *Power and its units, calculation of power in numerical problems.*

3.7 *Application of friction in brake system of moving vehicles, bicycle, scooter, car, trains etc.*

4. Rotational Motion *(10 Periods)*

4.1 *Concept of translatory and rotatory motions with examples*

4.2 *Definition of torque with examples*

4.3 *Angular momentum, Conservation of angular momentum (quantitative) and its examples*

4.4 *Moment of inertia and its physical significance, radius of gyration for rigid body, Theorems of parallel and perpendicular axes (statements only), moment of inertia of rod, disc, ring and sphere (hollow and solid) (Formulae only). Concept of Flywheel.*

4.5 *Rotational kinetic energy, Rolling of sphere on the slant plane.*

4.6 *Comparison of linear motion and rotational motion.*

4.7 *Application of rotational motions in transport vehicles, and machines.*

5. Motion of Planets and Satellites *(08 Periods)*

5.1 *Gravitational force, Kepler's law of planetary motion,*

5.2 *Acceleration due to gravity and its variation,*

5.3 *Gravitational Potential and Gravitational potential energy,*

5.4 *Motion of satellite, orbital velocity and time period of satellite, total energy and Binding energy of a satellite, Escape energy and escape velocity,*

AK TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

5.5 *Types of satellites, Geo-stationary satellite, semi-synchronous, polar satellite (concept only) and their uses in science and technology,*

5.6 *Concept of Black Holes.*

6. Properties of Matter

(12 Periods)

6.1 *Elasticity : Definition of stress and strain, different types of moduli of elasticity, Hooke's law, significance of stress-strain curve.*

6.2 *Pressure : Definition, its units, atmospheric pressure, gauge pressure, absolute pressure, Fortin's Barometer and its applications*

6.3 *Surface tension : Concept, its units, angle of contact, Capillary action and determination of surface tension from capillary rise method, applications of surface tension, effect of temperature and impurty on surface tension.*

6.4 *Viscosity and coefficient of viscosity : Terminal velocity, Stoke's law and effect of temperature on viscosity, application in hydraulic systems.*

6.5 *Concept of fluid motion, stream line and turbulent flow, Reynold's number, Equation of continuity, Bernoulli's Theorems and their applications.*

7. Heat and Thermodynamics

(10 Periods)

7.1 *Difference between heat and temperature*

7.2 *Modes of transfer of heat (Conduction, convection and radiation with examples)*

7.3 *Different scales of temperature and their relationship*

7.4 *Expansion of solids, liquids and gases, coefficient of linear, surface and cubical expansions and relation amongst them.*

7.5 *Heat conduction in a metal rod, Temperature gradient, Concepts of Co-efficient of thermal conductivity, Uses and effects of Heat conduction in Daily life.*

7.6 *Isothermal and Adibatic process.*

7.7 *Zeroth, First and second law of thermodynamics, Heat engine (concept only), Carnot cycle.*

7.8 *Application of various systems of thermometry in refrigeration and air-conditioning etc.*

LIST OF PRACTICALS (To perform minimum six experiments)

1. To find radius of wire and its volume and the maximum permissible error in these quantities by using both vernier calipers and screw guage.
2. To find the value of acceleration due to gravity on the surface of earth by using a smple pendulum.
3. To determine the Radius of curvature of (i) convex mirror, (ii) concave mirror by spherometer.
4. To verify parallelogram law of forces.
5. To study conservation of energy of a ball of cylinder rolling down an inclined plane.
6. To find the Moment of inertia of a flywheel about its axis of rotation.
7. To dermine the atmospheric pressure at a place using Fortin's Barometer.
8. To determine the viscosity of glycerin by Stoke's method.
9. To determine the coefficient of linear expansion of a metal rod.
10. To determine force constant of spring using Hooks law.

AKS TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

विषय सूची

1. मात्रक एवं विमायें
(Units and Dimensions) 1-62

2. बल एवं गति
(Force and Motion) 63-119

3. कार्य, शक्ति एवं ऊर्जा
(Work, Power and Energy) 120-157

4. घूर्णन गति
(Rotational Motion) 158-199

5. ग्रहों एवं उपग्रहों की गतियाँ
(Motion of Planets and Satellites) 200-229

6. द्रव्य गुण
(Properties of Matter) 230-294

7. ऊष्मा एवं गतिकी
(Heat and Thermodynamics) 295-363

- प्रयोगात्मक भाग
(Practical Section) 364-413

AKO TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

कतिपय अवधेयात्मक तथ्य
(SOME CONSIDERABLE FACTS)

(क) ग्रीक वर्णमाला (The Greek Alphabet)

एल्फ़ा (Alpha)	A	α	आइटा (Iota)	I	ι	रो (Rho)	P	ρ
बीटा (Beta)	B	β	कप्पा (Kappa)	K	κ	सिग्मा (Sigma)	Σ	σ
गैमा (Gamma)	Γ	γ	लैम्ब्डा (Lambda)	Λ	λ	टॉउ (Tau)	T	τ
डेल्टा (Delta)	Δ	δ	म्यू (Mu)	M	μ	अपसाइलोन (Upsilon)	Y	υ
एपसाइलोन (Epsilon)	E	ε	न्यू (Nu)	N	ν	फ़ाइ (Phi)	Φ	ϕ, φ
ज़ीटा (Zeta)	Z	ζ	ज़ाइ (Xi)	Ξ	ξ	काइ (Chi)	X	χ
ईटा (Eta)	H	η	ऑमिक्रॉन (Omicron)	O	o	साइ (Psi)	Ψ	ψ
थ़ीटा (Theta)	Θ	θ	पाइ (Pi)	Π	π	ओमेगा (Omega)	Ω	ω

(ख) कुछ महत्वपूर्ण नियतांक (Some Important Constants)

नाम (Name)	प्रतीक (Symbol)	मान (Value)
प्रकाश की निर्वात में चाल (Speed of light in vacuum)	c	$2{\cdot}9979\times10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
इलेक्ट्रॉन का आवेश (Charge of electron)	e	$1{\cdot}602\times10^{-19}\ \mathrm{C}$
गुरुत्वाकर्षण नियतांक (Gravitational constant)	G	$6{\cdot}673\times10^{-11}\ \mathrm{N\,m^{2}\,kg^{-2}}$
प्लांक नियतांक (Planck constant)	h	$6{\cdot}626\times10^{-34}\ \mathrm{J\,s}$
बोल्ट्ज़मैन नियतांक (Boltzmann constant)	k	$1{\cdot}381\times10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}}$
एवोगेद्रो संख्या (Avogadro number)	N_A	$6{\cdot}022\times10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
सार्वत्रिक गैस नियतांक (Universal gas constant)	R	$8{\cdot}314\ \mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$
इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान (Mass of electron)	m_e	$9{\cdot}110\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$
न्यूट्रॉन का द्रव्यमान (Mass of neutron)	m_n	$1{\cdot}675\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$
प्रोटॉन का द्रव्यमान (Mass of proton)	m_p	$1{\cdot}673\times10^{-27}\ \mathrm{kg}$
इलेक्ट्रॉन आवेश एवं द्रव्यमान अनुपात (Electron-charge to mass ratio)	e/m	$1{\cdot}759\times10^{11}\ \mathrm{C/kg}$
फैराडे नियतांक (Faraday constant)	F	$9{\cdot}648\times10^{4}\ \mathrm{C/mol}$
रिड्बर्ग़ नियतांक (Rydberg constant)	R	$1{\cdot}097\times10^{7}\ \mathrm{m^{-1}}$
बोर त्रिज्या (Bohr radius)	a_0	$5{\cdot}292\times10^{-11}\ \mathrm{m}$
स्टीफेन-बोल्ट्ज़मैन नियतांक (Stefan-Boltzmann constant)	σ	$5{\cdot}670\times10^{-8}\ \mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
वीन का नियतांक (Wien's Constant)	b	$2{\cdot}898\times10^{-3}\ \mathrm{m\,K}$
निर्वात की विद्युतशीलता (Permittivity of free space)	ε_0	$8{\cdot}854\times10^{-12}\ \mathrm{C^{2}\,N^{-1}\,m^{-2}}$
	$1/4\pi\varepsilon_0$	$8{\cdot}987\times10^{9}\ \mathrm{N\,m^{2}C^{-2}}$
निर्वात की चुम्बकशीलता (Permeability of free space)	μ_0	$4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{T\,m\,A^{-1}}$
		$\cong 1{\cdot}257\times10^{-6}\ \mathrm{Wb\ A^{-1}m^{-1}}$

AKS TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

धारा का एकांक वैद्युत चुम्बकीय मात्रक (1 emu of current)		3×10^{10} esu of current = 10 ampere
विभव का एकांक वैद्युत चुम्बकीय मात्रक (1 emu of potential)		10^{-8} volt
विभव का एकांक वैद्युत स्थैतिक मात्रक (1 esu of potential)		300 volt
ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक (Mechanical equivalent of heat)	J	$4\cdot186\ \text{J cal}^{-1}$
प्रमाणिक वायुमण्डलीय दाब (Standard atmospheric pressure)	1 atm	$1\cdot013\times10^{5}$ Pa
परम शून्य ताप (Absolute zero temperature)	0 K	$-273\cdot15\ ^\circ\text{C}$
इलेक्ट्रॉन विभव (Electron volt)	1 eV	$1\cdot602\times10^{-19}$ J
सकल परमाण्विक द्रव्यमान मात्रक (Unified Atomic mass unit)	1 amu या 1 u	$1\cdot661\times10^{-27}$ kg
स्थिर इलेक्ट्रॉन ऊर्जा (Electron rest energy)	mc^2	0·511 MeV
1 u तुल्यांक ऊर्जा (Energy equivalent to 1 u)	$1uc^2$	931·5 MeV
0°C तथा 1 atm पर आदर्श गैस का आयतन (Volume of ideal gas at 0°C and 1 atm)	V	$22\cdot4\ \text{L mol}^{-1}$
गुरुत्वीय त्वरण (भूमध्य रेखा समुद्र तल पर) [Acceleration due to gravity (sea level, at equator)]	g	$9\cdot80665\ \text{m s}^{-2}$
$(\log_e x)$		$2\cdot3026\log_{10}x$

(ग) गणित के कुछ आवश्यक सूत्र
(SOME IMPORTANT FORMULAE OF MATHEMATICS)

गणित के ज्ञान के बिना भौतिकी का अध्ययन अत्यन्त कठिन है। भौतिकी की भाषा गणित है (Mathematics is the Language of Physics) लेकिन गणित स्वयं में भौतिकी नहीं है। अत: भौतिकी का अध्ययन करने के लिए गणित की विभिन्न शाखाओं के कुछ मुख्य नियमों (सूत्रों) का ज्ञान होना आवश्यक है।

A. बीजगणित (ALGEBRA)

1. द्विघात समीकरण एवं इसका हल (Quadratic equation and its solution)

किसी बीजगणितीय समीकरण में चर x की अधिकतम घात दो होने पर समीकरण को द्विघातीय समीकरण कहते हैं। उदाहरण के लिए—

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \ldots (1)$$

द्विघातीय समीकरण को हल करने पर चर के दो मान प्राप्त होते हैं—

श्रीधराचार्य विधि द्वारा द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का हल निम्न सूत्र से ज्ञात होता है—

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

[जहाँ $a=x^2$ का गुणांक, $b=x$ का गुणांक तथा $c=$ अचर पद है।]

इस हल से x के दो मान (माना, α और β) प्राप्त होते हैं जिन्हें समीकरण के मूल (roots) कहते हैं।

जहाँ
$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \ldots (2)$$

तथा
$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \ldots (3)$$

मुख्य बिन्दु (Some important points)

1. यदि $b^2-4ac>0$, तो मूल वास्तविक, असमान (real, unequal) होंगे।
2. यदि $b^2-4ac=0$, तो मूल वास्तविक, बराबर (real, equal) होंगे।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

3. यदि $b^2-4ac<0$, तो मूल काल्पनिक तथा असमान (imaginary, unequal) होंगे।
4. यदि $b^2-4ac=$ पूर्ण वर्ग संख्या तो मूल वास्तविक तथा परिमेय (real, unequal and rational) होंगे।
5. $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$
6. $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

2. क्रमगुणित (Factorial)

किसी पूर्ण संख्या $n, (n=0,1,2,3,.....)$ के लिए

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3).....3\cdot2\cdot1$$

$${}^nP_n = n! \qquad {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

जहाँ ${}^nP_r$, n वस्तुओं में से r वस्तुएँ चुनने की विधियों की संख्या है।

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

{ ${}^nC_r, n$ वस्तुओं में से r वस्तुओं के संचयों की संख्या है।

महत्वपूर्ण बिन्दु (Important points)

1. $0! = 1$
2. $r\cdot {}^nC_r = {}^nP_r$
3. ${}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!}$

   ${}^nC_0 = {}^nC_n = 1$
4. ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$
5. ${}^nC_x = {}^nC_y$

$\Rightarrow x+y=n$

3. द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem)

(i) द्विपद प्रमेय (घन पूर्णांक)

Binomial Theorem (for postive integer)

जब n एक धन पूर्णांक है तथा x व a कोई दो पद हैं तब

$$(x+a)^n = {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}a + {}^nC_2x^{n-2}a^2 + ... + {}^nC_rx^{n-r}a^r + ... {}^nC_na^n$$

जहाँ ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

(ii) द्विपद प्रमेय (कोई घातांक)

Binomial theorem (for any index)

यदि n भिन्नात्मक अथवा ऋणात्मक (Fractional or negative) हो तो, $|x|<1$ के लिए

(a) $(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+.....+\frac{n(n-1)(n-2).....(n-r+1)}{r!}x^r+.....\infty$

(b) $(1-x)^n = 1-nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+.....\infty$

ऐसी श्रेणी का प्रसार अनन्त तक होता है।

(c) यदि $|x| << 1$, तो x की उच्च घात वाले पद नगण्य होते हैं।

अत: $(1+x)^n = 1+nx$

तथा $(1-x)^n = 1-nx$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(d) $(x+a)^n$ का प्रसार ज्ञात करने के लिए, जहाँ n धनात्मक पूर्णांक नहीं है।

$$(x+a)^n = x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n, \text{ जबकि } a<x \qquad \left[\therefore \left|\frac{a}{n}\right|<1\right]$$

$$(x+a)^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n, \text{ जबकि } x<a\left[\therefore \left|\frac{x}{n}\right|<1\right]$$

के रूप में लिखकर सूत्र $(1+x)^n$ से विस्तार किया जा सकता है।

3. चरघातांकी श्रेणी (Exponential Series)

असम्मेय संख्या (Transcedental number) e का मान निम्न श्रेणी द्वारा दिया जाता है—

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to 0}(1+n)^{1/n}$$
$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots\infty$$
$$=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots\infty$$
$$=2\cdot 718 \text{ (लगभग)}$$

चरघातांकी श्रेणी—x के किसी मान के लिए, निम्न समीकरण में दायें पक्ष की श्रेणी को चरघातांकी श्रेणी कहते हैं।

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\infty$$

तथा $$e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\infty$$

यदि $x<<1$ तब $e^x=1+x$ तथा $e^{-x}=1-x$

4. लघुगणकीय श्रेणी (Logarithmic series)

(i) $\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\infty$

(ii) $\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots\infty$

यदि $x<<1$, तब $\log_e(1+x)=x$ तथा $\log_e(1-x)=-x$

लघुगणक के कुछ मुख्य सूत्र—

(i) $\log mn=\log m+\log n$ (ii) $\log\frac{m}{n}=\log m-\log n$

(iii) $\log m^n=n\log m$ (iv) $\log_e m=2\cdot 3026\log_{10} m$

B. त्रिकोणमिति (TRIGONOMETRY)

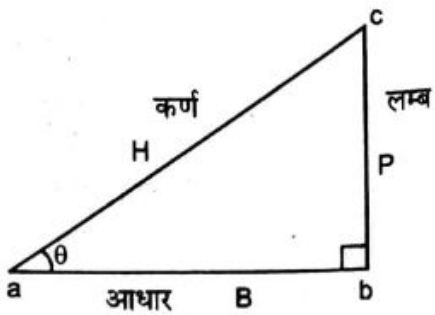
(a) महत्वपूर्ण त्रिकोणमितीय सम्बन्ध—

समकोण त्रिभुज abc (चित्र 1) में $P\rightarrow$ लम्ब की लम्बाई, $B\rightarrow$ आधार की लम्बाई, $H\rightarrow$ कर्ण की लम्बाई तथा $H^2=P^2+B^2$

$$\sin\theta=\frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}=\frac{P}{H}=\frac{\text{Side opposite to }\theta}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos\theta=\frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}=\frac{B}{H}=\frac{\text{Side adjacent to }\theta}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\theta=\frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}=\frac{P}{B}=\frac{\text{Side opposite to }\theta}{\text{Side adjacent to }\theta}$$



चित्र 1

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{H}{P} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Side opposite to } \theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{H}{B} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Side adjacent to } \theta}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{B}{P} = \frac{\text{Side adjacent to } \theta}{\text{Side opposite to } \theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{P}{H}}{\frac{B}{H}} = \frac{P}{B}$$

(b)

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

$$\text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$

(c)

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

(d)

$$\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\sin C - \sin D = 2\sin\left(\frac{C-D}{2}\right)\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C - \cos D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{D-C}{2}\right)$$

(e)

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$$

$$2\cos A\cos B = \cos(A-B) + \cos(A+B)$$

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

(f)

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

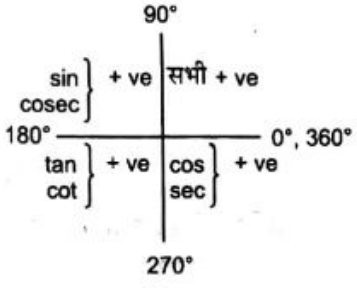
$$= 1 - 2\sin^2 A = 2\cos^2 A - 1$$

$$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$$

$$\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$$



चित्र 2

(g)

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta, \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\sin(90°-\theta) = \cos\theta, \qquad \cos(90°-\theta) = \sin\theta$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$\sin(90°+\theta)=\cos\theta$, $\quad \cos(90°+\theta)=-\sin\theta$

$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$, $\quad \cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

$\sin(180°+\theta)=-\sin\theta$, $\quad \cos(180°+\theta)=-\cos\theta$

$\sin(360°\pm\theta)=\pm\sin\theta$, $\quad \cos(360°\pm\theta)=\cos\theta$

कुछ मानक कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों (Trigonometric ratios) के मान

कोण → पद ↓	$0°$ 0^c	$30°$ $\frac{\pi^c}{6}$	$45°$ $\frac{\pi^c}{4}$	$60°$ $\frac{\pi^c}{3}$	$90°$ $\frac{\pi^c}{2}$	$120°$ $\frac{2\pi^c}{3}$	$135°$ $\frac{3\pi^c}{4}$	$150°$ $\frac{5\pi^c}{6}$	$180°$ π^c	$270°$ $\frac{3\pi^c}{2}$	$360°$ $2\pi^c$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\infty$	0

(h) चित्र 3 में प्रदर्शित किसी भी त्रिभुज में निम्न सम्बन्ध होते हैं—

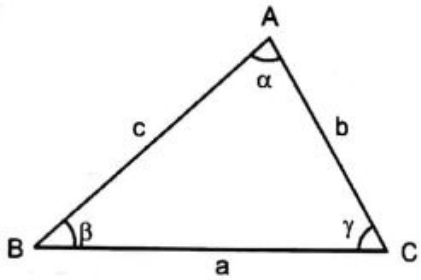
$$\alpha+\beta+\gamma=180°$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

कोज्या (Cosine) का नियम $\quad b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

ज्या (Sine) का नियम $\quad \frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$



चित्र 3

(i) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\infty$ [यहाँ x रेडियन में है तथा $-\infty<x<\infty$]

यदि $x<<1$ तब $\sin x\approx x$

(j) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\infty$ [यहाँ x रेडियन में है तथा $-\infty<x<\infty$]

यदि $x<<1$ तब $\cos x\approx 1$]

(k) $\tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\ldots\infty$ [यहाँ x रेडियन में है तथा $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$]

यदि $x<<1$ तब $\tan x\approx x\approx\sin x$

C. अवकलन गणित (DIFFERENTIAL CALCULUS)

(i) नियतांक अथवा अचर (Constant)—वे राशियाँ हैं जिनका मान नियत अथवा अपरिवर्ती होता है; जिन्हें बहुधा—a, b, k, e, r आदि से निरूपित किया जाता है।

(ii) चर अथवा परिवर्ती राशि (Variable quantities)—वे राशियाँ हैं जिनका मान परिवर्तित होता है अर्थात् जिनके विभिन्न मान होते हैं। परिवर्ती राशि को प्रदर्शित करने के लिए x, y, z आदि का प्रयोग किया जाता है।

(iii) फलन (Function)—यदि x के किसी एक मान के लिए परिवर्ती y का एक ही निश्चित मान हो तो y को x का फलन कहते हैं (y is a function of x) और इसे $y=f(x)$ रूप में प्रदर्शित करते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरणार्थ—समीकरण $y=x^3+x^2+1$ में,

यदि $x=1$ तो $y=1^3+1^2+1=3$

यदि $x=2$ तो $y=2^3+2^2+1=13$

अत: y, x का फलन है।

अवकलन (Differentiation)

माना $y=f(x)$ ... (1)

यदि x का मान बदलकर $(x+\Delta x)$ कर दिया जाये तो y का मान भी बदल जायेगा। माना y का मान $y+\Delta y$ हो जाता है तब—

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x) \quad \text{... (2)}$$

$$\therefore \quad y+\Delta y-y=f(x+\Delta x)-f(x) \quad \text{[समीकरण (2) - (1)]}$$

अथवा $$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x) \quad \text{... (3)}$$

दोनों ओर Δx से भाग देने पर—

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \text{... (4)}$$

जहाँ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, x के साथ y का मान बदलने की औसत दर है जबकि x का मान x से $x+\Delta x$ किया जाता है। दोनों ओर सीमा (limit) लगाने पर जहाँ $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \text{... (5)}$$

गणितीय दृष्टि से $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ को $\frac{dy}{dx}$ लिखा जाता है तथा इसे x के सापेक्ष y का अवकलन गुणांक (differentiation or derivative of y with respect to x—differential coefficient) कहते हैं।

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \quad \text{... (6)}$$

अर्थात् किसी चर के सापेक्ष किसी **फलन के अवकलन** का तात्पर्य **उस फलन के मान का चर के मान के सापेक्ष बदलने की तात्क्षणिक दर** (instantaneous rate) **से है।**

अवकलन गणित के कुछ सिद्धान्त

1. यदि c एक नियतांक है तो $\frac{d}{dx}(c)=0$
2. यदि $y=cu$ जहाँ c एक नियतांक तथा u, चर x का फलन है तब $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(cu)=c\frac{du}{dx}$
3. यदि $y=u\pm v$ जहाँ u एवं v चर x के भिन्न-भिन्न फलन हैं तब $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(u\pm v)=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}$
4. यदि $y=uv$ जहाँ u एवं v चर x के भिन्न-भिन्न फलन हैं तब $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$
5. यदि $y=\frac{u}{v}$ तब $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
6. यदि y चर u का फलन तथा u चर x का फलन हो तब $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ इसे प्रतिस्थापन द्वारा अवकलन (differentiation by substitution) कहते हैं।
7. यदि $y=u^n$ अर्थात् $y=f(u)$ और u चर x का फलन है तब

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}u^n.\frac{du}{dx}=nu^{n-1}.\frac{du}{dx}$$

● बिन्दु 2 तथा 3 को रैखिक गुण कहते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

8. अवकलन गणित के कुछ मुख्य सूत्र—

(i) $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ (ii) $\frac{d}{dx}x = 1$

(iii) $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ (iv) $\frac{d}{dx}\sin wx = w\cos wx$

(v) $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ (vi) $\frac{d}{dx}\cos wx = -w\sin wx$

(vii) $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$ (viii) $\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$

(ix) $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x$ (x) $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x\cot x$

(xi) $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (xii) $\frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(xiii) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$ (xiv) $\frac{d}{dx}\cot^{-1}x = -\frac{1}{1+x^2}$

(xv) $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ (xvi) $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1}x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

(xvii) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ (xviii) $\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$

(xix) $\frac{d}{dx}a^x = a^x\log_e a$ (xx) $\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}$

(xxi) $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\log_e a$

9. फलन $y=f(x)$ के उच्चिष्ठ (maximum) तथा निम्निष्ठ (minimum) मानों को ज्ञात करना

इसके लिए निम्न नियम का प्रयोग करते हैं—

माना $y=f(x)$ कोई फलन है।

1. फलन का x के सापेक्ष अवकलन कर $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात करते हैं। उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ के लिए आवश्यक प्रतिबंध $\frac{dy}{dx}=0$ होता है। अत: $\frac{dy}{dx}=0$ रखकर इस समीकरण के वास्तविक मूल α,β आदि का मान ज्ञात करते हैं। α,β को क्रांतिक बिंदु कहते हैं।
2. पुन: अवकलन कर $\frac{d^2y}{dx^2}$ ज्ञात करते हैं। यदि ज्ञात मूलों (α या β आदि) का मान इसमें रखने पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ऋणात्मक आता है तो सम्बन्धित (α या β आदि) के इस मान के लिए फलन $y=f(x)$ उच्चिष्ठ है और धनात्मक आता है तो फलन निम्निष्ठ होगा।

D. समाकलन गणित (INTEGRAL CALCULUS)

समाकलन अवकलन का व्युत्क्रम प्रक्रम (integration is inverse of differntiation) है। यदि फलन $f(x)$ का x के सापेक्ष अवकल गुणांक $f'(x)$ हो, तो $f'(x)$ का x के सापेक्ष समाकलन $f(x)$ होता है। प्रतीकात्मक रूप से (symbolically) इसे इस प्रकार लिखा जाता है—

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$$

तथा $$\int f'(x)dx = f(x)$$ (जहाँ चिह्न $\int$ समाकलन प्रदर्शित करता है)

$\int f'(x)\,dx$ को $f'(x)$ का x के सापेक्ष अनिश्चित समाकलन (indefinite integral) कहते हैं जिसका सही रूप इस प्रकार होता है—

$$\int f'(x)\,dx = f(x)+C$$

यहाँ C एक स्वेच्छ नियतांक है जिसे **समाकलन नियतांक** (constant of integration) कहते हैं।

विशेष—नियतांक C का अवकलन शून्य होता है अर्थात् $\frac{d}{dx}[f(x)+C]=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$ समाकलन का तात्पर्य योग (summation) से है

निश्चित समाकलन (Definite integral)—जब किसी फलन को निम्नतर सीमा (lower limit) तथा उच्चतर सीमा (upper limit) के बीच समाकलित (integrate) किया जाता है तब वह **निश्चित समाकलन** कहलाता है। यदि,

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

तब $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ (एक अनिश्चित समाकलन है)

यदि चर x की निम्नतर तथा उच्चतर सीमाएँ a तथा b हैं तब—

$$\int_a^b f'(x)\,dx = [f(x) + c]_a^b = \{f(b) + c\} - \{f(a) + c\} = f(b) - f(a)$$

एक निश्चित समाकलन है। इसमें समाकलन नियतांक का प्रयोग नहीं किया जाता है।

1. समाकलन (Integration) के मानक सूत्र—

(i) $\int 1\,dx = x$

(ii) $\int C\,u\,dx = C\int u\,dx$ (जहाँ C एक नियतांक तथा $u = f(x)$ है।)

(iii) $\int (u+v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$ (u और v चर x के फलन हैं)

(iv) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ जहाँ $n \neq -1$ तथा अन्य कोई भी +ve या -ve संख्या है।

(v) $\int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}\,dx = \log_e x$

(vi) $\int \sin x\,dx = -\cos x$ तथा $\int \sin wx\,dx = -\frac{\cos wx}{w}$

(vii) $\int \cos x\,dx = \sin x$ तथा $\int \cos wx\,dx = \frac{\sin wx}{w}$

(viii) $\int \text{cosec}^2 x\,dx = -\cot x$

(ix) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$

(x) $\int \text{cosec}\,x \cot x\,dx = -\text{cosec}\,x$

(xi) $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x$

(xii) $\int e^x dx = e^x$

(xiii) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a}$

(xiv) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x$

(xv) $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \cos^{-1} x$

(xvi) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x$

2. मूल सूत्रों के विस्तृत रूप—

(i) $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)}$ [जबकि $n \neq -1$]

[**संकेत**—माना $ax + b = t$

$\because$ $a\,dx = dt$ $\therefore$ $dx = \frac{dt}{a}$

$\therefore$ $\int (ax+b)^n\,dx = \int t^n \cdot \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$]

(ii) $\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx = -\frac{1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}}$

अथवा $\int (ax+b)^{-n}\,dx = \frac{(ax+b)^{-n+1}}{(-n+1)a}$ यदि $n \neq 1$

(iii) $\int \frac{1}{(ax+b)}\,dx = \frac{1}{a}\log_e (ax+b)$

(iv) $\int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a} e^{ax+b}$

(v) $\int a^{px+q}\,dx = \frac{1}{p}\frac{a^{px+q}}{\log_e a}$

(vi) $\int \sin (ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos (ax+b)$

(vii) $\int \cos (ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sin (ax+b)$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(viii) $\int \sec^2 (ax + b)\, dx = \frac{1}{a} \tan (ax + b)$

(ix) $\int \text{cosec}^2 (ax + b)\, dx = -\frac{1}{a} \cot (ax + b)$

(x) $\int \sec (ax + b) \tan (ax + b)\, dx = \frac{1}{a} \sec (ax + b)$

(xi) $\int \text{cosec} (ax + b) \cot (ax + b)\, dx = -\frac{1}{a} \text{cosec} (ax + b)$

(घ) लघुगणक तथा उसका उपयोग (Logarithm and its Application)

लघुगणक गणित की वह विधि है जिसकी सहायता से लम्बी तथा जटिल गुणा तथा भाग के स्थान पर साधारण जोड़ने व घटाने से राशियों का परिकलन (calculation) बहुत ही कम समय में हो जाता है। भिन्नात्मक घात वाली राशियों का परिकलन तो केवल लघुगणक की सहायता से ही किया जा सकता है। दूसरे, इसके द्वारा परिकलन में त्रुटि की सम्भावना भी कम रहती है।

परिभाषा—किसी दिये हुये आधार (base) के सापेक्ष किसी संख्या का लघुगणक उस संख्या के बराबर होता है, जिसे आधार पर घात के रूप में लगाने से वह मूल संख्या ही प्राप्त हो जाती है।

उदाहरणार्थ—$a^y = b$ में y वह घातांक है जिसे आधार a पर लगाकर संख्या b के बराबर मान प्राप्त किया गया है। अत: लघुगणक की परिभाषा से, y आधार a पर b का लघुगणक है, अर्थात् $y = \log_a b$ । इसी प्रकार,

यदि $2^3 = 8$ तो $3 = \log_2 8$

यदि $10^2 = 100$ तो $2 = \log_{10} 100$

व्यवहार में आधार सदैव 10 लिया जाता है, अत: $\log_{10} 100 = 2$ के स्थान पर केवल $\log 100 = 2$ लिख सकते हैं।

लघुगणक सारणी द्वारा परिकलन करने के लिए निम्न मूल सिद्धान्तों का उपयोग किया जाता है—

(1) किसी भी आधार पर 1 का लघुगणक शून्य होता है—यदि a कोई वास्तविक निश्चित राशि है तो $a^0 = 1$, अत: परिभाषा के अनुसार, $\log_a 1 = 0$.

(2) किसी राशि का उसी आधार पर लघुगणक 1 होता है—हम जानते हैं कि $a^1 = a$, अत: परिभाषा के अनुसार,

$$\log_a a = 1$$

(3) दो या दो से अधिक राशियों के गुणनफल का लघुगणक, उसी आधार पर प्रत्येक राशि के लघुगणकों के योगफल के बराबर होता है। दूसरे शब्दों में,

$$\log_a (m \times n) = \log_a m + \log_a n$$

(4) किसी भिन्न (fraction) का लघुगणक, उसी आधार पर उस भिन्न के अंश के लघुगणक में से हर का लघुगणक घटाने पर प्राप्त होता है, अर्थात्

$$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

(5) किसी आधार पर किसी भी घात वाली राशि का लघुगणक, घात को उसी आधार पर राशि के लघुगणक से गुणा करने पर प्राप्त होता है, अर्थात्

$$\log_a m^n = n \log_a m$$

उदाहरणार्थ, यदि $x = P^n$

तब $\log_a x = n \log_a P$

ऐसे लघुगणक जिनका आधार 10 होता है 'साधारण लघुगणक' (common logarithm) कहलाते हैं। प्रचलित लघुगणक सारणी 10 को ही आधार मानकर बनायी गयी है।

किसी संख्या का लघुगणक ज्ञात करना—जिस प्रकार किसी संख्या के दो भाग होते हैं—एक दशमलव बिन्दु से पहले और एक बाद में, उसी प्रकार प्रत्येक संख्या के लघुगणक के भी दो भाग होते हैं। दशमलव से पहले का भाग **पूर्णांश** (characteristic) तथा दशमलव के बाद का **अपूर्णांश** (mantissa) कहलाता है। पूर्णांश के मान धनात्मक व ऋणात्मक दोनों हो सकते हैं, जबकि अपूर्णांश का मान केवल धनात्मक ही होता है। उदाहरणार्थ $\log_{10} 25 = 1 \cdot 3979$ में पूर्णांश 1 है, और अपूर्णांश 3979 है। इस प्रकार किसी संख्या का लघुगणक ज्ञात करने के लिए उसका पूर्णांश और अपूर्णांश अलग-अलग ज्ञात किए जाते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

पूर्णांश ज्ञात करना—जिस संख्या का लघुगणक ज्ञात करना है, यदि उसमें दशमलव से पहले कुछ अंक हैं, तो पूर्णांश इन अंकों की संख्या से 1 (एक) कम होता है। उदाहरणार्थ 2487, 248·7, 24·87, 2·487 संख्याओं के लघुगणक का पूर्णांश क्रमशः 3, 2, 1, 0 होगा। इस प्रकार पूर्णांश धनात्मक होगा।

यदि दी गई संख्या दशमलव बिन्दु से ही आरम्भ होती है, तो लघुगणक का पूर्णांश दशमलव के बाद आने वाली शून्यों की संख्या (number of zeros) से एक अधिक होगा। इस प्रकार का पूर्णांश ऋणात्मक होता है तथा इसे पूर्णांश पर बार लगाकर प्रदर्शित किया जाता है। उदाहरणार्थ, 0·2487, 0·02487, 0·002487, 0·0002487, 0·00002487 संख्याओं के लघुगणक के पूर्णांश $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$ तथा $\bar{5}$ होंगे।

अपूर्णांश ज्ञात करना—किसी संख्या के लघुगणक का अपूर्णांश लघुगणक सारणी की सहायता से ज्ञात किया जाता है। इस परिशिष्ट के अन्त में चार अंकों की लघुगणक सारणी दी गई है। यदि कुछ संख्याओं के सार्थक अंक एक ही क्रम में होते हैं, तो उनके लघुगणक का अपूर्णांश समान होता है। इस प्रकार किसी संख्या में दशमलव बिन्दु की स्थिति उस संख्या के लघुगणक के अपूर्णांश पर कोई प्रभाव नहीं डालती है।

उदाहरणार्थ—2487, 248·7, 2·487, 0·002487 संख्याओं का अपूर्णांश समान ही होता है।

लघुगणक सारणी में प्रथम ऊर्ध्वाधर स्तम्भ से संख्या के प्रथम दो अंक प्राप्त होते हैं। इसके पश्चात् 0 से 9 तक के स्तम्भों की श्रेणी संख्या का तृतीय अंक तथा 1 से 9 तक के स्तम्भों की दूसरी श्रेणी से चतुर्थ अंक प्राप्त होता है। चारों अंकों के संगत मानों से संख्या के लघुगणक का अपूर्णांश प्राप्त हो जाता है। गान लो, हमें 0·2487 के लघुगणक का अपूर्णांश ज्ञात करना है। सबसे पहले सारणी में, प्रथम ऊर्ध्वाधर स्तम्भ में 24 संख्या देखते हैं। फिर इस संख्या के सामने वाली क्षैतिज रेखा पर आठवें स्तम्भ का मान देखते हैं, यह मान 3945 आता है। अब 1 से 9 तक की दूसरी श्रेणी चतुर्थ अंक 7 के स्तम्भ में 24 के सामने वाली रेखा में ही लिखा मान पढ़ लेते हैं, यह मान 12 आता है। इस मान 12 को प्रथम मान 3945 में जोड़ देते हैं और इस प्रकार 3957 प्राप्त कर लेते हैं। इस संख्या के सबसे पहले दशमलव बिन्दु लगा देते हैं जिससे अपूर्णांश 0·3957 प्राप्त हो जाता है।

इस प्रकार पूर्णांश और अपूर्णांश ज्ञात करने के पश्चात् संख्या का लघुगणक लिख लेते हैं।

अब दी गई संख्या का लघुगणक = पूर्णांश + अपूर्णांश

$$\therefore \quad \log 2487 = 3\cdot3957$$
$$\log 2\cdot487 = 0\cdot3957$$
$$\log 0\cdot2487 = \bar{1}\cdot3957$$
$$\log 0\cdot02487 = \bar{2}\cdot3957$$

इसी प्रकार अन्य संख्याओं के लघुगणक ज्ञात करते हैं।

प्रतिलघुगणक (Antilogarithm)

किसी संख्या के लघुगणक का प्रतिलघुगणक वह संख्या स्वयं होती है। इस प्रकार, यदि $\log 248\cdot7 = 2\cdot3957$ तो Antilog $2\cdot3957 = 248\cdot7$, लघुगणक सारणियों की भांति प्रतिलघुगणक सारणियों का भी प्रयोग किया जाता है। ये भी परिशिष्ट के अन्त में दी गयी है।

प्रतिलघुगणक ज्ञात करना

प्रतिलघुगणक ज्ञात करने के लिए पहले लघुगणक के अपूर्णांश से प्रतिलघुगणक सारणी में देखकर संख्या के सार्थक अंकों को ज्ञात कर लेते हैं। इस सारणी को भी उसी प्रकार देखते हैं जैसे लघुगणक ज्ञात करने में करते हैं। सार्थक अंकों में दशमलव की स्थिति पूर्णांश को देखकर लगायी जाती है।

मान लीजिए कि हमें 2·3957 का प्रतिलघुगणक ज्ञात करना है। इसका अपूर्णांक 0·3957 है। अब सारणी के प्रथम ऊर्ध्वाधर स्तम्भ में 0·39 के सामने 0 से 9 वाली श्रेणी में तृतीय अंक 5 के स्तम्भ में लिखा मान 2483 पढ़ लेते हैं। इसके पश्चात् 1 से 9 वाली मध्यमान-अन्तर वाली श्रेणी में चतुर्थ अंक 7 के नीचे लिखे मान को (0·81 की सीध में) पढ़कर पहले मान में जोड़ देते हैं।

इस प्रकार, संख्या के सार्थक अंक प्राप्त हो जाते हैं। 2483 में चतुर्थ अंक के स्तम्भ के मान 4 को जोड़ने पर संख्या के सार्थक अंकों का मान 2487 ज्ञात हो जाता है। अब सार्थक अंकों में दशमलव बिन्दु लगाने के लिए लघुगणक के पूर्णांश पर विचार करते हैं। यदि पूर्णांश धनात्मक होता है तो पूर्णांश में 1 जोड़कर प्राप्त अंकों की संख्या के पश्चात् सार्थक अंकों में बायीं से दायीं ओर दशमलव बिन्दु लगा देते हैं। उपरोक्त उदाहरण में पूर्णांश 2 है; इसलिए दशमलव बिन्दु की स्थिति सार्थक अंकों में 2 + 1 = 3 अंकों के पश्चात् आएगी। इस प्रकार दी गई संख्या का प्रतिलघुगणक 248·7 होगा।

अर्थात् $\quad \text{antilog } 2\cdot3957 = 248\cdot7$

इसी प्रकार, $\quad \text{antilog } 1\cdot3957 = 24\cdot87$

$\quad \text{antilog } 0\cdot3957 = 2\cdot487$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$\text{antilog } 3\cdot3957 = 2487\cdot0$$

$$\text{antilog } 4\cdot3957 = 24870\cdot0$$

यदि पूर्णांश ऋणात्मक है तो दशमलव बिन्दु की स्थिति सार्थक अंकों के बाईं ओर होगी तथा दशमलव बिन्दु और सार्थक अंकों के बीच शून्यों की संख्या पूर्णांश के मान से एक कम होगी। इसमें दशमलव से पहले कोई अंक नहीं आता है।

उदाहरणार्थ $\text{antilog } \bar{1}\cdot3957 = 0\cdot2487$

$$\text{antilog } \bar{2}\cdot3957 = 0\cdot02487$$

$$\text{antilog } \bar{3}\cdot3957 = 0\cdot002487$$

टिप्पणी—जब लघुगणक से प्रतिलघुगणक ज्ञात किया जाता है तो अपूर्णांश धनात्मक होना चाहिए। यदि अपूर्णांश धनात्मक नहीं होता है तो उसका प्रतिलघुगणक ज्ञात करना असम्भव हो जाता है। अत: ऋणात्मक अपूर्णांश में एक जोड़कर या एक घटाकर उसे धनात्मक बना लेते हैं। उदाहरणार्थ—यदि किसी परिकलन में लघुगणक का मान $-2\cdot5647$ प्राप्त होता है, तो उसे धनात्मक बनाने के लिए निम्न क्रिया करते हैं—

$$\begin{aligned}-2\cdot5647 &= -2-0\cdot5647\\ &= -2+1-1-0\cdot5647\\ &= -2-1+(1-0\cdot5647)\\ &= -3+0\cdot4353 = \bar{3}\cdot4353\end{aligned}$$

अब $\bar{3}\cdot4353$ का लघुगणक ज्ञात कर लेते हैं।

लघुगणक द्वारा गणना में जोड़ने, घटाने, गुणा तथा भाग की ऋणात्मक पूर्णांश (बार) पर क्रिया

यह क्रिया निम्न उदाहरणों से स्पष्ट हो जाएगी—

जोड़ना—

(i)
$$\begin{array}{r} 3\cdot5434\\ \bar{8}\cdot3463\\ \hline \bar{5}\cdot8897\end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} 8\cdot5433\\ \bar{3}\cdot2463\\ \hline 5\cdot7896\end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{r} 8\cdot3462\\ \bar{5}\cdot2461\\ 7\cdot1064\\ \bar{2}\cdot3042\\ \hline 9\cdot0029\end{array}$$

घटाना—

(i)
$$\begin{array}{r} 8\cdot5643\\ \bar{2}\cdot3453\\ \hline 10\cdot2190\end{array}$$

(ii)
$$\begin{array}{r} \bar{8}\cdot5643\\ \bar{2}\cdot3463\\ \hline \bar{6}\cdot2180\end{array}$$

(iii)
$$\begin{array}{r} 8\cdot5646\\ \bar{2}\cdot8352\\ \hline 9\cdot7294\end{array}$$

गुणा—

(i) $2\cdot4892\times 2 = 4\cdot9784$

(ii) $\bar{8}\cdot8642\times 9 = (\bar{8}\times 9)+(0\cdot8642\times 9) = (\overline{72})+(7\cdot7778) = \overline{65}\cdot7778$

भाग—

(i) $\dfrac{\bar{6}\cdot3429}{3} = \bar{2}\cdot1143$

(ii) $\dfrac{\bar{8}\cdot2468}{4} = \bar{2}\cdot0617$

(iii) $\dfrac{\bar{5}\cdot2392}{3} = \dfrac{\bar{6}+1\cdot2392}{3} = \bar{2}+0\cdot4130$

लघुगणक से परिकलन करने की पूर्ण क्रिया निम्न उदाहरण में समझायी गई है—

उदाहरण 1. सरल लोलक द्वारा गुरुत्वीय त्वरण 'g' का मान ज्ञात करते समय प्राप्त निम्न प्रेक्षणों से गुरुत्वीय त्वरण 'g' का मान लघुगणक विधि द्वारा ज्ञात कीजिए—

सरल लोलक की प्रभावी लम्बाई $l = 161\cdot10$ सेमी

आवर्तकाल $T = 2\cdot55$ सेकण्ड

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

परिकलन— $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

वर्ग एवं पक्षान्तर करने के पश्चात्

गुरुत्वीय त्वरण $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$ सेमी/सेकण्ड^2

$$= 4 \times \left(\frac{22}{7}\right)^2 \times \frac{161 \cdot 10}{(2 \cdot 55)^2}$$

$$= \frac{4 \times (22)^2 \times 161 \cdot 10}{(7)^2 \times (2 \cdot 55)^2}$$

लघुगणक सारणी

अंश (Numerator)

$\log 4 = 0 \cdot 6021$

$2\log 22 = 2\,(1 \cdot 3424)$

$= 2 \cdot 6848$

$\log 161 \cdot 10 = 2 \cdot 2071$

योग $= 5 \cdot 4940$

हर (Denominator)

$2\log 7$

$= 2\log\,(0 \cdot 8451) = 1 \cdot 6902$

$= 2\log 2 \cdot 55$

$= 2(0 \cdot 4065) = 0 \cdot 8130$

योग $= 2 \cdot 5032$

अंश में से हर को घटाने पर,

$5 \cdot 4940$

$-\,2 \cdot 5032$

$2 \cdot 9908$

अब प्रतिलघुगणक सारणी से

$2 \cdot 9908$ का प्रतिलघुगणक $= 979 \cdot 0$

∴ **गुरुत्वीय त्वरण $g = 979 \cdot 0$ सेमी/सेकेण्ड^2**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Chapter 1 मात्रक एवं विमायें (Units and Dimensions)

SYLLABUS

1.1 *Need of Measurement in engineering and science, units of physical quantities-fundamental and derived units, systems of units (FPS, CGS and SI units).*

1.2 *Dimensions and dimensional formulae of physical quantities.*

1.3 *Principle of homogeneity of dimensions.*

1.4 *Dimensional equations and their applications, conversion of numerical values of physical quantities from one system of units into another, checking the correctness of physical equations and deriving relations among various physical quantities.*

1.5 *Limitations of dimensional analysis*

1.6 *Error in measurement, accuracy and precision of instruments, random and systematic errors, relative error, and percentage error, Estimation of probable errors in the results of measurement (combination of errors in addition, subtraction, multiplication, division and powers), rules for representing significant figures in calculation.*

1.7 *Application of units and dimensions in measuring length, diameter, circumference, volume, surface area etc. of metallic and non-metallic blocks, wires, pipes etc. (at least two each).*

---

§ 1.1 भौतिकी का परिचय (Introduction of Physics)

आज से करीब पाँच सौ वर्ष पूर्व मानव जाति का विश्वास था कि उनका जीवनयापन स्थिर आकाशीय पिण्ड "पृथ्वी" पर हो रहा है जो स्वयं ब्रह्माण्ड के केन्द्र पर स्थित है। सौर परिवार (Solar system) के बाहर की दुनिया सभी के लिए रहस्यपूर्ण थी। अणुओं तथा परमाणुओं के अवयवी कणों "Submicroscopic domain of atoms and molecules" से लोग अनभिज्ञ थे।

प्रकृति एवं प्राकृतिक घटनाओं के सन्दर्भ में कोई स्थापित नियम नहीं था, परन्तु मनुष्य प्रकृति में घटित हो रही घटनाओं के सम्बन्ध में सम्पूर्ण ज्ञान प्राप्त करने के लिए सदैव तत्पर था। उसने प्रकृति में घटित होने वाली घटनाओं का सम्यक् अवलोकन (Observation) किया तथा तद्नुरूप उन्नत जीवन की अभिलाषा में "क्रमानुसार व्यवहार" का "अनुभव"(Experience) पीढ़ी दर पीढ़ी "ज्ञान" (Knowledge) के रूप में हस्तान्तरित करता गया। प्रत्येक पीढ़ी ने प्राप्त ज्ञान में अपने नये अनुभवों तथा अन्वेषणों (Research) के तथ्यों को जोड़ा, जिससे समय के साथ-साथ लोगों के ज्ञान-भंडार में वृद्धि होती गयी। शिक्षाविदों तथा वैज्ञानिकों ने अपने आस-पास घटित हो रही घटनाओं के सम्बन्ध में संचित ज्ञान भंडार से प्रकृति के गूढ़ रहस्यों के नियम स्थापित किये।

"प्राकृतिक अथवा मानवरचित घटित घटनाओं के तथ्यों का सुसंगठित, स्पष्ट, क्रमबद्ध ज्ञान ही विज्ञान है।"

"Science is the systematic study of facts, events and happenings of natural as well as manmade origin."

वास्तव में "विज्ञान" (Science) शब्द की उत्पत्ति लैटिन शब्द "Scientia" से हुई है जिसका अर्थ है "जानना" (To know) तथा "भौतिकी" (Physics) ग्रीक शब्द "Physikos" है जिसका अर्थ है "प्रकृति" (Nature), इस प्रकार

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

''भौतिकी विज्ञान की वह शाखा है जिसके अन्तर्गत हम प्रकृति तथा प्राकृतिक घटनाओं का क्रमबद्ध अध्ययन करते हैं।''

''Physics is the branch of science, which deals with the study of the nature and natural phenomena.''

भौतिकी का सम्बन्ध इस ब्रह्माण्ड (Universe) की कार्य-प्रणाली से है अर्थात् ''द्रव्य''(Matter) तथा ''ऊर्जा''(Energy) एवं इनके अन्तर्सम्बन्धों (Inter-relations) के अध्ययन से है।

भौतिकी, विज्ञान की सबसे विशाल एवं विस्तृत शाखा है, अत: सुगमता हेतु इसका सम्पूर्ण अध्ययन निम्न शाखाओं में विभाजित करके किया जाता है—

(1) सामान्य भौतिकी (General Physics)—इसमें द्रव्य के सामान्य गुण तथा बल के अधीन गति अथवा विराम अवस्था, गुरुत्वाकर्षण, द्रव यान्त्रिकी आदि का अध्ययन किया जाता है।

(2) स्थिर वैद्युतिकी तथा विद्युत (Electrostatics and Electricity)—इसमें स्थिर आवेशों, प्रेरण तथा गतिमान आवेशों के गुणों, अभिलक्षणों आदि का अध्ययन किया जाता है।

(3) इलेक्ट्रॉनिकी (Electronics)—इलेक्ट्रॉन तथा कोटर, तापायन, निर्वात बल्ब में तापायनिक उत्सर्जन, अर्द्धचालक पदार्थ, प्रवर्धक, दोलित्र, IC's आदि का अध्ययन किया जाता है।

(4) प्रकाशिकी (Optics)—इसमें प्रकाशिक स्रोतों, प्रकाश संचरण माध्यमों, लेसर, मेसर, अपवर्तनांक तथा अपवर्तन, परावर्तन तथा ध्रुवण आदि का अध्ययन किया जाता है।

(5) ऊष्मा तथा ऊष्मागतिकी (Heat and Thermodynamics)—इसमें ऊष्मा ऊर्जा, ताप तथा ऊष्मा ऊर्जा स्थानान्तरण विधियों, पदार्थों की ऊष्मा चालकता गुणांक, ऊष्मागतिकी के नियमों आदि का अध्ययन किया जाता है।

(6) ध्वनि (Sound)—इसमें माध्यम में उत्पन्न विक्षोभ, यान्त्रिक तरंगों के प्रकार, उनका माध्यम में संचरण, परावर्तन, ध्वनि तरंगों के गुणों, ध्वनिकता, भवन ध्वनिकी इत्यादि का अध्ययन किया जाता है।

(7) नाभिकीय भौतिकी (Nuclear Physics)—इसमें अणुओं, परमाणुओं तथा अन्य अवयवी कणों तथा उनके अन्तर्सम्बन्धों एवं नाभिकीय ऊर्जा, रेडियोएक्टिविटी इत्यादि का अध्ययन किया जाता है।

(8) क्वांटम यांत्रिकी (Quantum Mechanics)—इसमें प्रकाश ऊर्जा कणों, प्रकाश वैद्युत प्रभाव, प्रकाश कणों के संचरण तथा अन्य अभिलक्षणों का अध्ययन किया जाता है।

(9) सापेक्षता का सिद्धान्त (Theory of Relativity)—इस सिद्धान्त के द्वारा स्थिर तथा गतिमान वस्तुओं के मध्य सम्बन्ध का अध्ययन किया जाता है।

(10) सममिति का सिद्धान्त (Theory of Symmetry)—इसमें सूक्ष्मतम स्तर पर अथवा अखिल विस्तारित ब्रह्माण्ड की स्थितियों पर सममितता का सिद्धान्त लागू कर प्रकृति अथवा प्राकृतिक घटनाओं आदि का अध्ययन किया जाता है।

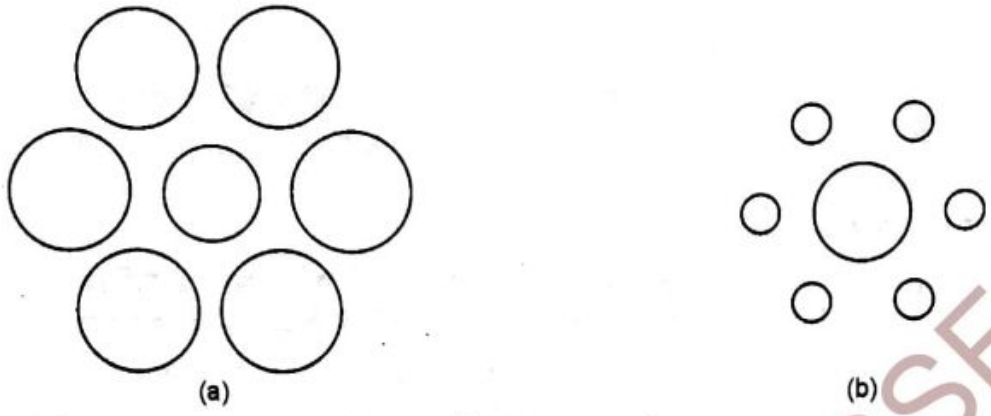
§ 1.2 विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी में मापन की आवश्यकता (Need of Measurement in Engineering and Science)

द्रव्य (Matter) तथा ऊर्जा (Energy) का सम्पूर्ण अध्ययन वैज्ञानिक आधार की क्रियाविधि है, निर्विवादित रूप से यह ज्ञान ज्ञानेन्द्रियों (Senses) द्वारा ही प्राप्त होता है, परन्तु यहाँ प्रश्न उठता है कि क्या हम अपनी ज्ञानेन्द्रियों पर भरोसा कर सकते हैं? अर्थात् क्या मात्र ज्ञानेन्द्रियों द्वारा प्राप्त सूचना शुद्ध (Accurate) हो सकती है? अधिकांश बार इसका उत्तर होगा–नहीं। निम्न उदाहरणों से हम इस तथ्य को समझ सकते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

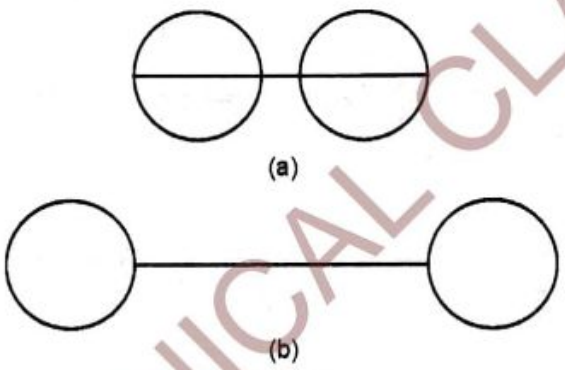
Scanned with CamScanner

उदाहरण 1 : चित्र 1.1(a) तथा (b) में कौन-सा केन्द्रीय वृत्त बड़ा है?



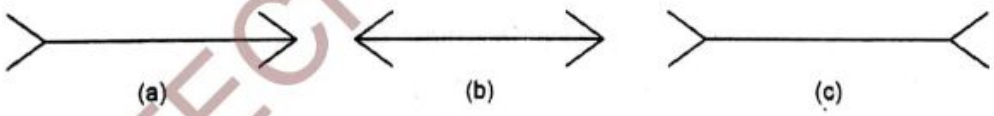
चित्र 1.1

उदाहरण 2 : चित्र 1.2 (a) तथा (b) में कौन-सी सरल रेखा बड़ी है?



चित्र 1.2

उदाहरण 3 : निम्न तीन सरल रेखाओं को लम्बाई के बढ़ते क्रम में व्यवस्थित करें।



चित्र 1.3

उपरोक्त सभी उदाहरणों में पूछे गये प्रत्येक प्रश्न का उत्तर है—सभी बराबर हैं।*

स्पष्ट है कि हमारी ज्ञानेन्द्रियाँ परिस्थितियों से प्रभावित हो जाती हैं, अत: यथार्थ (Accurate) सूचना प्राप्त करने के लिए हम मात्र ज्ञानेन्द्रियों पर भरोसा नहीं कर सकते, साथ ही किसी तथ्य को सामान्य वर्णनात्मक तरीके से बिना अंकों की सहायता के बताना पर्याप्त नहीं माना जा सकता है अर्थात् यथार्थ सूचना केवल मापन से ही प्राप्त की जा सकती है। अत:

''भौतिकी मापन का विज्ञान है।''

''Physics is a science of measurements.''

उदाहरण के लिए किसी स्थिर पिण्ड में गति उत्पन्न करने के लिए उस पर बल लगाना आवश्यक है। पिण्ड पर आरोपित बल पिण्ड में त्वरण उत्पन्न करेगा परन्तु पिण्ड में कितना त्वरण उत्पन्न होगा, इस तथ्य की सही जानकारी प्राप्त करना तभी सम्भव है जब पिण्ड का द्रव्यमान एवं पिण्ड पर लगाये गये बल का परिमाण ज्ञात हो।

* उपरोक्त तीनों उदाहरण दृष्टि भ्रम (Optical illusion) के उदाहरण हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 1.3 भौतिक राशियाँ (Physical Quantities)

''कोई भी मापी जा सकने वाली राशि भौतिक राशि कहलाती है।''
''Any measurable entity is known as Physical Quantity.''

अर्थात् भौतिकी के अन्तर्गत जिन पदों का अध्ययन किया जाता है उन्हें भौतिक राशियाँ कहते हैं, जैसे द्रव्यमान, लम्बाई, समय, ताप, विस्थापन, वेग, बल, त्वरण, कार्य, शक्ति, ऊर्जा, प्रतिरोध, धारा, विभव, प्रदीपन तीव्रता, आवेश, यंग-मापांक, श्यानता आदि।

भौतिक राशियाँ दो प्रकार की होती हैं—

(1) मूल राशियाँ (Fundamental Quantities)—**''स्वेच्छा से चुनी गईं वे भौतिक राशियाँ, जिनकी सहायता से अन्य भौतिक राशियाँ व्यक्त की जाती हैं, मूल राशियाँ कहलाती हैं।'' जैसे**—लम्बाई, द्रव्यमान, समय आदि।

मूल राशियों को प्रदर्शित करने के लिए जो मात्रक प्रयोग में लाये जाते हैं उन्हें **''मूल मात्रक''** कहते हैं।

(2) व्युत्पन्न राशियाँ (Derived Quantities)—**''वे भौतिक राशियाँ जो मूल राशियों की सहायता से व्यक्त की जाती हैं, व्युत्पन्न राशियाँ कहलाती हैं।'' जैसे**—क्षेत्रफल, वेग, घनत्व आदि।

व्युत्पन्न राशियों को प्रदर्शित करने के लिए जो मात्रक प्रयोग में लाये जाते हैं उन्हें **''व्युत्पन्न मात्रक''** कहते हैं।

§ 1.4 मापन (Measurement)

''किसी भौतिक राशि के परिमाण को अंकों में व्यक्त करना मापन कहलाता है। मापन एक तुलनात्मक विधि है।''
(Measurement is a process of comparison)।

1.4.1 मात्रक (Unit)

जिस भौतिक राशि को मापना होता है उस राशि के एक निश्चित परिमाण को हम मानक मान लेते हैं जिसे एक नाम दे देते हैं। यह ''मानक'' उस राशि का ''मात्रक'' कहलाता है। अर्थात्—

''किसी राशि का मात्रक एक स्वेच्छापूर्वक निश्चित की गयी उसी प्रकृति की एक राशि है जिसके पदों में उसी प्रकृति की अन्य राशियों का मान व्यक्त किया जाता है।''

मात्रक दो प्रकार के होते हैं—

(1) मूल मात्रक (Fundamental Unit)—**''वे मात्रक जो अन्य किसी मात्रक पर निर्भर नहीं करते अर्थात् पूर्ण रूप से स्वतन्त्र होते हैं-मूल मात्रक कहलाते हैं।''** जैसे—मीटर, किलोग्राम, सेकण्ड आदि।

प्रकृति के सभी राशियों की माप को मूलत: पारस्परिक रूप से स्वतन्त्र सात राशियों के पदों में व्यक्त किया जा सकता है इन्हें मूल राशियाँ (Fundamental quantities) कहते हैं।

(2) व्युत्पन्न मात्रक (Derived Units)—**''वे मात्रक जो मूल मात्रकों के पदों में प्राप्त किये जाते हैं- व्युत्पन्न मात्रक कहलाते हैं।''** जैसे—वेग का मात्रक मीटर/सेकण्ड, बल का मात्रक किलोग्राम-मीटर/सेकण्ड^2, आयतन का मात्रक मीटर^3 आदि।

1.4.2 मापन का सिद्धान्त (Principle of Measurement)

मापी जाने वाली राशि की उसके मात्रक से तुलना करने को ही **''मापन''** (measurement) कहते हैं। अर्थात् किसी राशि के मापन के समय यह देखा जाता है कि चुना गया मानक मापी जाने वाली राशि में कितनी बार शामिल है या मापी जाने वाली राशि चुने गये मानक से कितने गुना बड़ी है अथवा छोटी है—यही मापन का सिद्धान्त है।

किसी राशि की माप को व्यक्त करने के लिए निम्नलिखित दो आवश्यकतायें (requirements) होती हैं—

(1) मात्रक (Unit) |**u**|—जिसमें वह भौतिक राशि मापी जानी है।

(2) संख्यात्मक मान (Numerical Value) **n**—यह मापी जाने वाली भौतिक राशि के ''परिमाण'' (Magnitude) को दर्शाता है अर्थात् यह बताता है कि मापी जाने वाली राशि में चुना गया मात्रक कितनी बार शामिल है। यह एक शुद्ध संख्या (Pure number) होता है।

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण के लिए यदि किसी दीवार की लम्बाई 8 मीटर है तो इसका अर्थ यह है कि वस्तु (दीवार) की लम्बाई मापने का मात्रक मीटर है तथा यह वस्तु (दीवार) की लम्बाई में 8 बार शामिल है।

अत: **यदि X कोई भौतिक राशि है जिसका संख्यात्मक मान n तथा संगत मात्रक $|u|$ है, तो**

$$X = n \times |u| \qquad ...(1)$$

उल्लिखित उदाहरण में यदि लम्बाई का मात्रक सेमी (सेन्टीमीटर) हो तो इसी वस्तु (दीवार) की लम्बाई 800 सेमी होगी। इससे स्पष्ट है कि किसी भौतिक राशि का मात्रक जितना छोटा होता जाता है, इसका संगत संख्यात्मक मान उतना ही बढ़ता जाता है। अर्थात्—

"किसी भौतिक राशि का संख्यात्मक मान उसके मात्रक के व्युत्क्रमानुपाती होता है।"

समीकरण (1) से $$n \propto \frac{1}{|u|}$$

अर्थात् **"किसी भौतिक राशि का संख्यात्मक मान एवं उसके संगत मात्रक का गुणनफल सदैव नियत रहता है।"**

यदि किसी भौतिक राशि X के संख्यात्मक मान दो अलग-अलग मात्रकों $|u_1|$ तथा $|u_2|$ में क्रमश: n_1 तथा n_2 हों, तो

$$X = n_1 |u_1| = n_2 |u_2| \qquad ...(2)$$

§ 1.5 मात्रक के चयन में ध्यान रखने योग्य तथ्य (Guiding Principles for the Choice of Unit)

किसी भौतिक राशि के मात्रक का चयन करते समय निम्न तथ्यों का ध्यान रखना चाहिए—

(1) चयनित मात्रक की मान्यता अन्तर्राष्ट्रीय स्तर (International level) पर होनी चाहिए।

(2) चयनित मात्रक सरलता से एवं पूर्ण रूप से परिभाषित (definite and well defined) होने योग्य एवं उचित आकार (Proper size) का होना चाहिए।

(3) प्रत्येक स्थान पर उसका प्रतिरूप सरलता से बनाया जा सके (easily reproducible)।

(4) समय तथा स्थान के साथ परिवर्तनशील नहीं होना चाहिए।

(5) चयनित मात्रक पर भौतिक स्थितियों (ताप, दाब आदि) के परिवर्तन का प्रभाव नहीं पड़ना चाहिए।

(6) एक ही प्रकृति के कई मात्रकों (जैसे—समय मापने के लिए सेकण्ड, मिनट, घण्टा आदि) के मध्य उचित सम्बन्ध ज्ञात होना चाहिए।

(7) चयनित मात्रक सुलभता से उपलब्ध (easily accessible) होना चाहिए।

§ 1.6 मात्रकों की विभिन्न पद्धतियाँ (Different Systems of Units)

भौतिक राशियों के मापन में मूल मात्रकों के आधार पर निम्नलिखित पद्धतियाँ प्रयोग में लायी जाती हैं—

क्र० सं० (S. No.)	मात्रक पद्धति (System of unit)	लम्बाई का मात्रक (Unit of length)	द्रव्यमान का मात्रक (Unit of mass)	समय का मात्रक (Unit of time)
1.	फुट पाउन्ड सेकण्ड पद्धति (FPS System)	फुट (foot)	पाउण्ड (pound)	सेकण्ड (second)
2.	सेन्टीमीटर ग्राम सेकण्ड पद्धति (CGS System)	सेन्टीमीटर (centimetre)	ग्राम (gramme)	सेकण्ड (second)
3.	मीटर किलोग्राम सेकण्ड पद्धति (MKS System)	मीटर (metre)	किलोग्राम (kilogramme)	सेकण्ड (second)
4.	अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति (SI System)	यह MKS system का ही संशोधित एवं परिवर्धित रूप है जिसका उल्लेख अगले परिच्छेद में है।		

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 1.7 अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति (SI System)

सन् 1960 में General Conference of Weights and Measures नामक अन्तर्राष्ट्रीय संस्था ने भार व माप की सामान्य गोष्ठी में MKS पद्धति के प्रवर्धित रूप **अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति** (International System) का अनुमोदन किया। इस पद्धति में सात मूल राशियों (Fundamental Quantities) के सात मूल मात्रक (Fundamental Units) तथा दो पूरक मूल राशियों (Supplementary Fundamental Quantities) के दो पूरक मूल मात्रक (Supplementary Fundamental Units) होते हैं। शेष राशियाँ व्युत्पन्न राशियाँ (Derived Quantities) तथा उनके मात्रक व्युत्पन्न मात्रक (Derived Units) होते हैं।

इस पद्धति में सभी भौतिक राशियों का मात्रक लिखा जा सकता है। सात मूल तथा दो पूरक मूल राशियों के मूल मात्रक, मात्रकों के संकेत तथा मात्रकों के विमीय प्रतीक इस प्रकार हैं—

मूल राशियाँ एवं उनके मात्रक
(Fundamental Quantities and their Units)

क्र० सं० (S. No.)	मूल राशियाँ (Fundamental Quantities)	मूल मात्रक (Fundamental Units)	मात्रकों के संकेत (Symbols of Units)	मात्रकों के विमीय प्रतीक (Dimensional Symbol of Units)
1.	लम्बाई (Length)	मीटर (metre)	m	L
2.	द्रव्यमान (Mass)	किलोग्राम (kilogramme)	kg	M
3.	समय (Time)	सेकण्ड (second)	s	T
4.	विद्युत धारा (Electric Current)	ऐम्पियर (ampere)	A	i
5.	ताप (Temperature)	केल्विन (kelvin) या डिग्री सेल्सियस (degree of celsius)	K या °C	Θ या θ
6.	ज्योति तीव्रता (Luminous Intensity)	केण्डिला (candela)	Cd	I
7.	पदार्थ की मात्रा (Amount of Substance)	मोल (mole)	mol	n

पूरक मूल राशियाँ एवं उनके मात्रक
(Supplementary Fundamental Quantities and their Units)

1.	समतलीय कोण (Plane angle)	रेडियन (Radian)	rad	विमाहीन राशि
2.	घन कोण (Solid angle)	स्टेरेडियन (Steradian)	sr	विमाहीन राशि

§ 1.8 मात्रकों को व्यक्त करते समय सावधानियाँ (Precautions while writing Units)

(1) छात्र बहुधा द्रव्यमान के मात्रक ग्राम— g को gm लिखते हैं जो कि गलत है; उदाहरणत: 250 ग्राम को 250 g लिखना चाहिए न कि 250 gm ।

(2) मात्रकों को बहुवचन में नहीं लिखते हैं, जैसे बीस किलोग्राम को 20 kg लिखते हैं न कि 20 kgs, 800 मीटर को 800 m लिखते हैं न कि 800 ms ।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(3) मात्रकों के संकेतों के बाद फुल स्टॉप (.) नहीं लगाते हैं, जैसे मीटर को m लिखते हैं न कि m., किलोग्राम को kg लिखते हैं न कि kg.।

(4) यदि मात्रक वैज्ञानिक के नाम पर हो जैसे न्यूटन, वॉट, जूल इत्यादि तो संक्षेप में अंग्रेजी के बड़े अक्षर (Capital letter) में लिखते हैं, जैसे न्यूटन को N से, वॉट को W से तथा जूल को J से तथा यदि पूरा नाम लिखना हो तो अंग्रेजी के छोटे अक्षर (Small letter) से लिखते हैं, जैसे न्यूटन को newton, वॉट को watt तथा जूल को joule से।

(5) मात्रकों को केवल एक ही स्ट्रोक से व्यक्त करते हैं कई स्ट्रोकों से नहीं, जैसे त्वरण के मात्रक मीटर प्रति सेकण्ड^2 को ms^{-2} या m/s^2 से व्यक्त करते हैं न कि m/s/s से।

(6) यदि भौतिक राशि सदिश नहीं है तो मात्रकों को मोटे अक्षर (Bold letter) में नहीं लिखते हैं और न ही उनके ऊपर कोई रेखा खींचते हैं, जैसे—द्रव्यमान के मात्रक किलोग्राम को kg से व्यक्त करते हैं न कि **kg** या $\overline{kg}$ से।

(7) आवश्यकता न होने पर मात्रकों के ऊपर कभी बिन्दु नहीं लगाते हैं। किसी भी मात्रक के ऊपर लगाया गया बिन्दु उस राशि का अवकलन (Differentiation) किया जाना प्रकट करता है। जैसे लम्बाई के मात्रक मीटर को m से व्यक्त करते हैं न कि $\dot{m}$ से या $\ddot{m}$ से।

(8) प्रायोगिक कार्यों हेतु कुछ अन्य मात्रकों जैसे carat, degree of angle, hectare, kilometre per hour, litre, tonne, quintal आदि का भी प्रयोग किया जाता है।

(9) SI पद्धति में ऊष्मा के मात्रक कैलोरी के स्थान पर जूल (joule), ताप के सेन्टीग्रेड के स्थान पर सेल्सियस (celsius), आवृत्ति के मात्रक कम्पन प्रति सेकण्ड के स्थान पर हर्ट्ज (hertz-Hz) तथा ज्योति-तीव्रता के मात्रक केण्डिल के स्थान पर कैण्डिला (Candela-Cd) का प्रयोग किया जाता है।

§ 1.9 SI पद्धति में मूल राशियों एवं उनके मूल मात्रकों की परिभाषायें (Definitions of Fundamental Quantities and their Units in SI System)

1.9.1 लम्बाई का मापन (Measurement of Length)

''आकाश में किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच की दूरी अथवा अलगाव को लम्बाई कहते हैं।''

''Length is related to distance between any two points or the separation between two points in space.''

मीट्रिक प्रणाली में लम्बाई का मात्रक **मीटर** (metre) है।

मीटर (Metre)

''लम्बाई अथवा दूरी का मात्रक मीटर है।''

1971 में फ्रांस में जब मापन सम्बन्धी मीट्रिक प्रणाली (Metric system) प्रस्तावित की गयी तब मीटर की परिभाषा निम्नवत् मानी गयी थी :

''एक मीटर, पेरिस से गुजरने वाले पृथ्वी के मेरीडियन क्वाडरेन्ट का 1/(10,000,000)वाँ भाग होता है।''

''One metre was intended to be one ten-millionth of the earth's meridian quadrant passing through Paris.''

परन्तु परिभाषा की अव्यावहारिकता के कारण मीटर की इस परिभाषा को अन्य आधारों से भी परिभाषित किया गया। सन् 1793 में मीटर को निम्न प्रकार परिभाषित किया गया था—

''एक मीटर लम्बाई पेरिस में स्थित वेट्स एण्ड मेजर्स (Weights and measures) के अन्तर्राष्ट्रीय संग्रहालय में रखी हुई प्लेटिनम-इरीडियम (90% प्लेटिनम तथा 10% इरीडियम) के मिश्र धातु की छड़ पर बने दो चिह्नों के बीच की दूरी है जबकि छड़ का ताप 0°C है।''

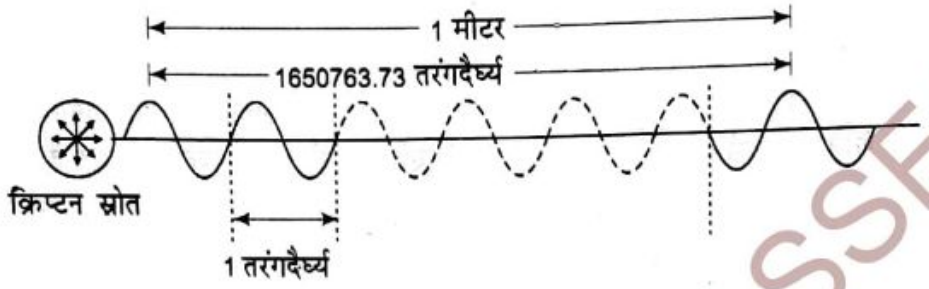
इस छड़ को Metre des archives कहते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

चूँकि यह मानक मीटर कभी भी नष्ट हो सकता था और इसके प्रयोग से अन्तर्राष्ट्रीय व्यापार (International Trade) में व्यावहारिक विसंगतियाँ भी उत्पन्न हो रही थीं, अत: मीटर की परिभाषा को सन् 1967 में परमाणवीय पैमाने (Atomic Scale) को आधार लेते हुए प्रतिस्थापित कर दिया गया—

''निर्वात में शुद्ध क्रिप्टन-86 (Kr^{86}) के परमाणु में तथा $2p^{10}$ तथा $5d^5$ ऊर्जा स्तरों के मध्य संक्रमण के फलस्वरूप उत्सर्जित नारंगी रंग के प्रकाश के 1650763·73 तरंगदैर्घ्य की लम्बाई एक मीटर के बराबर होती है।''



चित्र 1.4

एक अन्य परिभाषा के अनुसार—

''कैडमियम (Cadmium) के स्पेक्ट्रम (Spectrum) में लाल तरंग के 1553164 · 1 तरंगदैर्घ्य की लम्बाई एक मीटर के बराबर होती है।''

माह अक्टूबर 1983 में जनरल क्रांफ्रेंस ऑन वेट्स एण्ड मेजर्स की सभा में लम्बाई के SI मात्रक मीटर को निम्नानुसार परिभाषित किया गया—

''निर्वात में प्रकाश द्वारा $1/(2 \cdot 99\ 792\ 458 \times 10^8)$ सेकण्ड में चली गयी दूरी एक मीटर कहलाती है।''

लम्बाई के अन्य मात्रक (Other Units of Length)

(1) फर्मी (Fermi) (प्रतीक fm)—परमाणु के नाभिक की त्रिज्या के स्तर की लम्बाई फर्मी के पदों मे व्यक्त की जाती है। इसे ''फेमेटोमीटर'' भी कहते हैं।

$$1 \text{ फर्मी} = 10^{-15} \text{ मीटर}$$

(2) ऐंग्स्ट्रांम यूनिट (Angstrom Unit) (प्रतीक Å)—छोटी लम्बाई जैसे तरंगदैर्घ्य की माप को ऐंग्स्ट्रांम यूनिट के पदों में व्यक्त किया जाता है।

$$1 \text{ ऐंग्स्ट्रांम } (Å) = 10^{-10} \text{ मीटर}$$

(3) खगोलीय मात्रक (Astronomical Unit) (प्रतीक au या ua)—पृथ्वी के केन्द्र से सूर्य के केन्द्र तक की औसत दूरी को खगोलीय मात्रक कहते हैं।

$$1 \text{ खगोलीय मात्रक} = 1{\cdot}496 \times 10^{11} \text{ मीटर}$$

(वास्तविक मान 149,597, 870, 700 m)

(4) प्रकाश वर्ष (Light year) (प्रतीक ly)—**''निर्वात में प्रकाश द्वारा 1 वर्ष में चली गयी दूरी को प्रकाश वर्ष कहते हैं।''**

इस मात्रक का प्रयोग खगोलीय पिण्डों के मध्य बड़ी दूरियों को व्यक्त करने में किया जाता है।

$$1 \text{ प्रकाश वर्ष} = 9{\cdot}463 \times 10^{15} \text{ मीटर}$$

(5) पैरालेक्टिक सेकण्ड (Parallactic Second) (प्रतीक Par sec)—यह दूरी अथवा लम्बाई मापने का सबसे बड़ा मात्रक है। खगोलीय पिण्डों के मध्य अत्यधिक बड़ी दूरियों के माप को पारसेक में व्यक्त करते हैं।

AKG TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

"किसी रेखा पर स्थित एक ऐस्ट्रोनॉमिकल यूनिट लम्बाई ($1 \cdot 496 \times 10^{11}$ मीटर) की एक चाप (Arc) यदि रेखा के उद्गम बिन्दु पर 1 सेकण्ड का कोण अन्तरित करे तो रेखा के उद्गम एवं चाप के मध्य की दूरी 1 पारसेक कहलाती है।"

चित्रानुसार, $\text{त्रिज्या} = \frac{\text{चाप}}{\text{कोण}} \quad \left(\because \ \text{कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} \right)$

अथवा $R = \frac{l}{\theta}$

अथवा $1 \text{ पारसेक} = \frac{1 \cdot 496 \times 10^{11} \text{ मीटर}}{1 \text{ सेकण्ड}^*}$

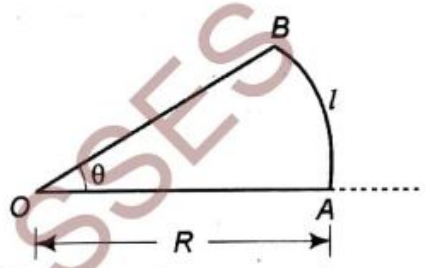
$$= \frac{1 \cdot 496 \times 10^{11}}{\left(\frac{1}{3600}\right) \times \left(\frac{\pi}{180}\right)} \text{ m}$$

$$= 30 \cdot 857 \times 10^{15} \text{ m}$$

$$= 3 \cdot 26156 \times 9 \cdot 463 \times 10^{15} \text{ m}$$

$$= 3 \cdot 26156 \text{ ly (प्रकाश वर्ष)}$$

$$= 30 \cdot 9 \text{ ट्रिलियन किलोमीटर}$$



R = त्रिज्या = 1 पारसेक
l = 1 खगोलीय मात्रक
θ = 1 सेकण्ड

चित्र 1.5

1.9.2 द्रव्यमान का मापन (Measurement of Mass)

"द्रव्यमान पदार्थ का मौलिक गुण है। इसका मान पिण्ड में सन्निहित द्रव्य की मात्रा का संख्यात्मक मान है।"

सामान्यतया इस पर ताप, दाब अथवा ऊँचाई के परिवर्तन का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

"Mass is a basic property of matter. It is a measure of the quantity of matter contained in the body which does not vary with temperature, pressure or altitude of the body in space."

मीट्रिक प्रणाली में द्रव्यमान का मात्रक किलोग्राम है।

किलोग्राम (Kilogramme)

"पेरिस के अन्तर्राष्ट्रीय माप-तौल संस्थान में रखे प्लेटिनम-इरीडियम मिश्र धातु के बेलन के द्रव्यमान को 1 किलोग्राम माना गया है जिसका व्यास 39 मिमी तथा ऊँचाई 39 मिमी है।"

साधारण व्यवहार में पाया जाता है कि **"सामान्य वायुमण्डलीय दाब एवं 4 °C ताप पर 1 लीटर शुद्ध जल का द्रव्यमान 1 किलोग्राम होता है।"**

शुद्धता के लिए परमाणवीय पैमाने (Atomic Scale) को आधार लेते हुए 1 किलोग्राम को निम्न प्रकार परिभाषित किया गया है—

"1 किलोग्राम, कार्बन-12 ($_6C^{12}$) के $5 \cdot 0188 \times 10^{25}$ परमाणुओं के द्रव्यमान के तुल्य होता है।"

द्रव्यमान के अन्य मात्रक (Other Units of mass)

(1) क्विन्टल (Quintal)

$$1 \text{ क्विन्टल} = 100 \text{ किलोग्राम} = 10^2 \text{ किलोग्राम}$$

(2) मीट्रिक टन (Metric tonne)

$$1 \text{ मीट्रिक टन} = 10 \text{ क्विन्टल} = 10 \times 100 \text{ किलोग्राम} = 10^3 \text{ किलोग्राम}$$

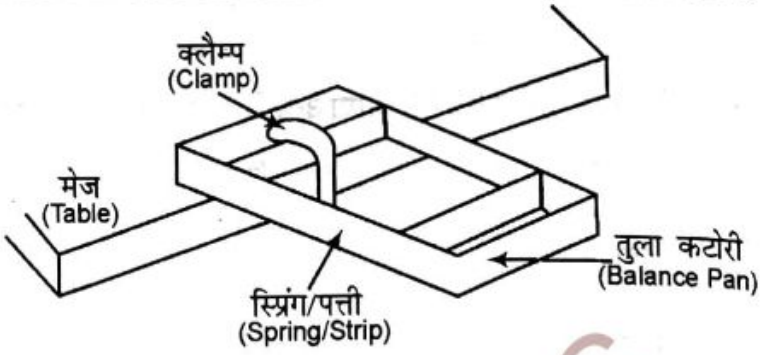
* इसे arcsec या arc का 1 सेकण्ड भी कहते हैं। विस्तृत विवरण हेतु अनुच्छेद 1.10 देखें।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

विज्ञान में किसी पिण्ड के द्रव्यमान को दो रूप में प्राप्त किया जाता है—(i) जड़त्वीय द्रव्यमान (ii) गुरुत्वीय द्रव्यमान

यद्यपि किसी एक पिण्ड के लिए प्रयोगों/मापन से प्राप्त दोनों प्रकार के द्रव्यमानों का संख्यात्मक मान समान होता है।

(1) जड़त्वीय द्रव्यमान (Inertial Mass)— किसी पिण्ड के जड़त्वीय द्रव्यमान की माप जड़त्वीय तुला से की जाती है जो जड़त्व के सिद्धान्त पर कार्य करता है।



जड़त्वीय तुला
(An Inertial Balance)

चित्र 1.6

यह एक गतिक मापन (dynamic measurement) होता है—अर्थात् शुद्ध मापन तभी सम्भव है जब तुला का दण्ड (निकाय) गतिमान हो।

मापन हेतु सर्वप्रथम तुला का अंशांकन करते हैं इसके लिए ज्ञात द्रव्यमान वाले दो पिण्डों के द्वारा अलग-अलग किसी दिये गये नियत समय (t) में तुला दण्ड द्वारा क्षैतिज तल में किये गये कम्पनों की कुल संख्या के अनुपात को प्राप्त कर आवर्तकाल (T) ज्ञात करते हैं तथा T^2 एवं द्रव्यमान के मध्य ग्राफ खींचते हैं। अब जिस पिण्ड का द्रव्यमान ज्ञात करना होता है उसके लिए पुन: यही प्रक्रिया दोहरा कर T का मान ज्ञात कर लेते हैं तथा पूर्व से प्राप्त अंशांकित ग्राफ पर अंत:क्षेप (interpolation) के आधार पर पिण्ड का जड़त्वीय द्रव्यमान ज्ञात कर लेते हैं। किसी पिण्ड का जड़त्वीय द्रव्यमान, गुरुत्वीय बल की अनुपस्थिति में भी ज्ञात किया जा सकता है।

(2) गुरुत्वीय द्रव्यमान (Gravitational Mass)—किसी पिण्ड के गुरुत्वीय द्रव्यमान की माप सामान्य तुला (common balance) या तीन-छड़ तुला (Triple-beam balance) के द्वारा की जाती है। यह स्थैतिक मापन (static measurement) होता है—अर्थात्, शुद्ध मापन तभी संभव है जब तुला एवं उसका दण्ड (सम्पूर्ण निकाय) स्थिर हो।

ऐसे सामान्य तुला (Common balance) या भौतिक तुला (Physical balance) में दो कटोरियाँ (Pans) एक दण्ड (Beam) के सिरों पर टंगी होती हैं। एक कटोरी में मापी जाने वाली वस्तु रखकर दूसरी कटोरी में **मानक भार** (Standard Weight) दण्ड की संतुलन की स्थिति तक रखते जाते हैं—

''मापे जाने वाले वस्तु एवं मानक भार पर जब लगने वाला गुरुत्वीय बल समान हो जाता है तो तुला संतुलित कही जाती है। इस दशा में वस्तु का द्रव्यमान वस्तु के भार के अनुपात में पढ़ा जाता है।''

''In a common or physical balance, the gravitational force on the object and the standard weight are balanced and the mass of the object is read as it is proportional to its weight.''

''किसी पिण्ड का भार ($W = mg$) उसके गुरुत्वीय द्रव्यमान के समानुपाती होता है।''

"The weight ($W = mg$) of a body is proportional to its gravitational mass."

सामान्यतया, द्रव्यमान एवं भार समानार्थी शब्द प्रतीत होते हैं परन्तु वैज्ञानिक दृष्टिकोण से यह भिन्न-भिन्न भौतिक राशियाँ हैं। द्रव्यमान एक अदिश राशि तथा भार एक सदिश राशि है।

किसी वस्तु का भार पृथ्वी द्वारा उस पर लगाया गया गुरुत्वीय खिंचाव बल है जिसे न्यूटन में मापते हैं।

1.9.3 समय का मापन (Measurement of Time)

अनन्त विस्तारित ब्रह्माण्ड के अध्ययन हेतु समस्त आकाश को चार ज्यामितीय अक्षों (Four Geometrical axes) में बाँट देते हैं जिनमें तीन अक्ष अथवा आयाम लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई अथवा गहराई से और चौथा आयाम समय से सम्बन्धित होता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

वैज्ञानिक **सर आइजक न्यूटन** के अनुसार, आकाश (Space) और समय (Time) दोनों का अस्तित्व अलग-अलग है परन्तु वैज्ञानिक **आइन्सटीन** के सापेक्षवाद के सिद्धान्त और वैज्ञानिक **एच० मिन्कोस्की** (H. Minkowski) के आकाशीय ज्यामिति के अनुसार अनन्त विस्तारित आकाश एवं समय आपस में गुँथे हुए (Entwined) हैं।

एच० मिन्कोस्की के अनुसार—**''एक घटना को चार आयामों के सतत्ता की ज्यामिति में एक बिन्दु कहते हैं।''**

''An event is identified by a word point in a four-dimensional continuum.''

इस आधार पर **''अनन्त आकाश का एक ऐसा आयाम जो दो अन्यथा समरूप घटनाओं को एक ही बिन्दु पर घटित होने देता है, के मध्य-अन्तराल को समय कहते हैं।''**

''A dimension that enables two otherwise identical events that occur at the same point in space to be distinguished. The interval between two such events is known as time.''

सामान्य शब्दों में, **''किन्हीं दो घटनाओं के मध्य अन्तराल को समय कहते हैं।''**

मीट्रिक प्रणाली में समय का मात्रक **सेकण्ड** (second) है।

सेकण्ड (Second)

''पृथ्वी द्वारा अपने अक्ष पर एक पूर्ण घूर्णन में लिये गये समय को सौर दिन कहते हैं।''

''The time taken by the earth to complete one rotation about its own axis is called solar day.''

चूँकि पृथ्वी तथा सूर्य के मध्य दूरी, पृथ्वी द्वारा सूर्य के चारों ओर परिक्रमण (Revolution) के कारण सदैव बदलती रहती है जिसके परिणामस्वरूप पृथ्वी का घूर्णन काल भी प्रभावित होता है। अत: **''सभी सौर दिनों की अवधि समान नहीं होती है''** वे घटते-बढ़ते रहते हैं। अत: सम्पूर्ण वर्ष के सौर दिनों की अवधि का माध्य निकाल लिया जाता है जिसे **माध्य सौर दिन** (Mean solar day) कहते हैं।

''माध्य सौर दिन के 86400वें भाग को 1 सेकण्ड कहते हैं।''

अर्थात्, 1 माध्य सौर दिन = 24 घण्टे

$= 24 \times 60 \times 60$ सेकण्ड

$= 86400$ सेकण्ड

अत: $1 \text{ सेकण्ड} = \frac{1 \text{माध्य सौर दिन}}{86400}$

1 सेकण्ड के इस मान को सन् 1967 में अन्तर्राष्ट्रीय विज्ञान सम्मेलन में **सायन वर्ष** (Tropical year) 1900 द्वारा निर्धारित किया गया।

समय के मानक सेकण्ड के मान को शुद्ध रूप से व्यक्त करने के लिए परमाण्वीय पैमाने (Atomic scale) के आधार पर निम्न प्रकार परिभाषित किया गया है—

''एक सेकण्ड वह समय है जिसमें परमाणु घड़ी (Atomic Clock) में सीजियम परमाणु 9,192,631,770 कम्पन करता है।''

वास्तव में ''1 सेकण्ड, सीजियम-133 परमाणु के ग्राउण्ड स्टेट में हाइपरफाइन ऊर्जा स्तरों के मध्य संक्रमण के कारण उत्सर्जित 9,192,631,770 विकिरणों का समय अन्तराल है।''

''One second is equal to the duration of 9,192,631,770 periods of the radiation corresponding to the transition between two hyperfine levels of ground state of the caesium-133.''

समय के अन्य मात्रक (Other units of Time)

(1) सोलर दिन (Solar day)—पृथ्वी का अपने अक्ष पर एक पूर्ण घूर्णन का समय सोलर दिन कहलाता है। यह सदैव घटता-बढ़ता रहता है—गणनानुसार 1 सोलर वर्ष = औसत 365·25 सोलर दिन।

AVG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: $$1 \text{ औसत सोलर दिन} = \frac{1 \text{ सोलर वर्ष}}{365 \cdot 25}$$

प्रत्येक सोलर वर्ष में 0 · 25 सोलर दिन की बढ़ोत्तरी 4 वर्षों बाद वार्षिक कलेण्डर में 1 दिन के अन्तर के बराबर प्राप्त होती है, जिसे उस वर्ष फरवरी माह में शामिल किया जाता है जिससे फरवरी 29 दिन की एवं वह वर्ष 366 दिन का होता है। इस वर्ष को **लीप इअर** (Leap year) कहते हैं।

(2) चन्द्र माह (Lunar Month)—जितने समय में चन्द्रमा, पृथ्वी के चारों ओर एक परिक्रमा कर लेता है उसे **चन्द्र माह** कहते हैं।

$$1 \text{ चन्द्र माह} = 27 \cdot 3 \text{ दिन}$$

(3) कलेण्डर माह (Calendar month)—

$$1 \text{ माह} = 30 \text{ अथवा } 31 \text{ दिन}$$

(4) वर्ष (Year)—पृथ्वी, सूर्य के चारों ओर जितने समय में एक पूर्ण चक्कर लगाती है उसे **एक वर्ष** कहते हैं।

अत: $$1 \text{ वर्ष} = 365 \text{ दिन या } 366 \text{ दिन (Leap Year)}$$

(5) दशक (Decade)—दस वर्षों का समय

$$1 \text{ दशक} = 10 \text{ वर्ष}$$

(6) शताब्दी (Century)—100 वर्षों का समय

$$1 \text{ शताब्दी} = 100 \text{ वर्ष}$$

''यांत्रिकी पर आधारित उपरोक्त तीन मापनों की प्रणाली को MKS प्रणाली कहते हैं।''

1.9.4 विद्युत धारा का मापन (Measurement of Electric current)

विद्युत धारा (Electric current)—किसी बन्द विद्युत परिपथ में—

''आवेश (q) प्रवाह की समय (t) दर को विद्युत धारा (i) की तीव्रता कहते हैं।'' सामान्यतया इसे केवल **विद्युत धारा** भी कहा जाता है।

अर्थात् $$i = \frac{q}{t} \quad \text{... (3)}$$

विद्युत धारा का मात्रक ऐम्पियर है।

ऐम्पियर (ampere) (प्रतीक-A)

''यदि निर्वात में स्थित अनन्त लम्बाई के दो समान्तर चालकों के बीच की दूरी 1 मीटर हो तथा उनमें समान तीव्रता की विद्युत धारायें प्रवाहित करने पर चालकों की प्रति मीटर लम्बाई पर 2×10^{-7} न्यूटन का पारस्परिक बल (आकर्षण अथवा प्रतिकर्षण) उत्पन्न हो, तो चालकों में प्रवाहित धारा का मान 1 ऐम्पियर होता है।''

चित्रानुसार, प्रत्येक तार द्वारा एक-दूसरे पर आरोपित बल यदि $F = 2 \times 10^{-7}$ N / m हो तो प्रवाहित धारा **1 ऐम्पियर** कहलायेगी।

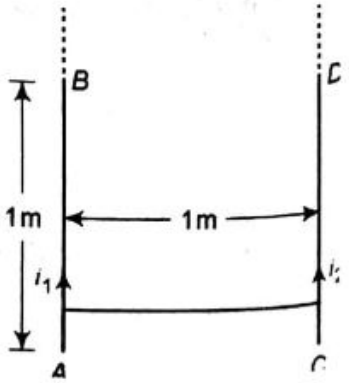
विद्युत धारा के मात्रक ऐम्पियर तथा आवेश के मात्रक कूलॉम में सम्बन्ध निम्नवत् है—

''यदि किसी चालक में 1 ऐम्पियर की धारा 1 सेकण्ड तक प्रवाहित हो तो चालक से होकर प्रवाहित आवेश की मात्रा 1 कूलॉम (coulomb) होती है,'' अत:

$$1 \text{ कूलॉम} = 1 \text{ ऐम्पियर} \times 1 \text{ सेकण्ड}$$

अथवा $$1 \text{ ऐम्पियर} = \frac{1 \text{ कूलॉम}}{1 \text{ सेकण्ड}}$$

$$= 1 \text{ कूलॉम / सेकण्ड}$$



चित्र 1.7

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

उदाहरण 4 : एक चालक में 0·48 ऐम्पियर धारा 15 सेकण्ड तक प्रवाहित की जाती है। चालक से होकर इस समयान्तराल में गुजरने वाले मुक्त इलेक्ट्रॉनों की संख्या की गणना कीजिए। (इलेक्ट्रॉन का आवेश = $1·6\times10^{-19}$ कूलॉम)

हल—चालक से होकर 15 सेकण्ड में प्रवाहित आवेश

$$q = i \times t$$

$$= 0·48 \text{ ऐम्पियर} \times 15 \text{ सेकण्ड}$$

$$= 0·48 \times 15 \text{ कूलॉम}$$

∴ चालक से होकर गुजरने वाले इलेक्ट्रॉनों की संख्या

$$= \frac{\text{प्रवाहित आवेश}}{\text{एक इलेक्ट्रॉन का आवेश}}$$

$$= \frac{0·48\times15 \text{ कूलॉम}}{1·6\times10^{-19} \text{ कूलॉम}}$$

$$= 4·5\times10^{19}$$

''उपरोक्त चार मात्रकों पर आधारित मात्रक पद्धति को मीटर किलोग्राम सेकण्ड ऐम्पियर पद्धति (MKSA System of units) कहते हैं।''

1.9.5 ताप का मापन (Measurement of Temperature)

ताप (Temperature)—ताप के लिए आवश्यक **ऊष्मा** (Heat) एक प्रकार की ऊर्जा है जिसका मात्रक **कैलोरी** (Calorie) है तथा **''ताप** (Temperature) **किसी वस्तु के ठण्डेपन अथवा गर्माहट की माप है।''**

''Temperature is the measurement of degree of hotness or coldness of the body.''

वास्तव में जब कोई वस्तु **तापीय साम्यावस्था** (Thermal equilibrium state) में नहीं होती है तो या तो वह वस्तु अन्य वस्तुओं के सापेक्ष ठण्डी रहती है अथवा गर्म, अर्थात् उस वस्तु में अन्य तापीय साम्य वस्तुओं के सापेक्ष या तो ऊष्मा ऊर्जा कम होती है या अधिक।

ऊष्मागतिकी (Thermodynamics) में ताप का व्यावहारिक मात्रक **डिग्री** (degree) तथा SI मात्रक **केल्विन** (kelvin-K) है। व्यवहार में **डिग्री सेल्सियस** (°celsius-°C) का प्रयोग करते हैं।

सेल्सियस पैमाना (Celsius scale)*—यह ताप मापक्रम पैमाना डिग्री सेल्सियस में अंशांकित होता है।

डिग्री सेल्सियस (degree celsius)—**''प्रमाणिक वायुमण्डलीय दाब (76 cm of Hg) पर शुद्ध बर्फ के गलनांक (Melting point) एवं शुद्ध पानी के क्वथनांक (Boiling point) के तापों के अन्तर के (1/100)वें भाग को एक डिग्री सेल्सियस (1°C) कहते हैं।''**

सन् 1954 में कुछ व्यावहारिक कठिनाइयों के कारण पिघलती बर्फ के स्थान पर **जल का त्रिक् बिन्दु** (Triple point of water) को मानक ताप माना गया।

''जल का त्रिक् बिन्दु, जल की वह अवस्था है जिसमें पदार्थ की तीनों अवस्थायें-ठोस, द्रव, गैस क्रमशः बर्फ, जल एवं जल वाष्प के रूप में परस्पर संतुलन में रहकर एक साथ उपस्थित रहते हैं।''

---

* This scale was formally known as the centigrade scale, the name was officially changed in 1948 to avoid confusion with a hundredth part of a grade. It is named after the Swedish astronomer Anders Celsius (1701-44), who devised the inverted form of this scale (ice point 100°, steam point 0°) in 1742.

• **Hypsometer :** A device for calibrating thermometers at the boiling point of water. As the boiling point depends on the atmospheric pressure, which in turn depends on the height above sea level, the apparatus can be used to measure height above sea level.

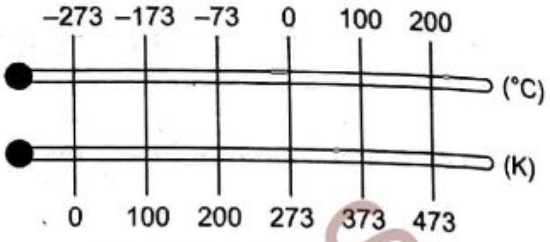
AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

इस बिन्दु पर जल का मानक ताप 273 · 16 K अथवा 0 · 01°C होता है। अर्थात्

$$0{\cdot}01\,^{\circ}C = (273{\cdot}15 + 0{\cdot}01)\,K$$

परम अथवा केल्विन पैमाना (Absolute or Kelvin scale)—लार्ड केल्विन (William Thomson Kelvin; 1824-1907) ने ताप मापक्रम का ऐसा पैमाना बनाया जो पदार्थों के तापीय गुण पर निर्भर नहीं था।



चित्र 1.8

चूँकि **''किसी पदार्थ का ताप उस पदार्थ के समस्त अणुओं की गतिज ऊर्जा का औसत मान होता है,''** अत: लार्ड केल्विन के अनुसार, **''वह न्यूनतम ताप जिस पर किसी पदार्थ के समस्त अणुओं की गति रुक जाती है अर्थात् गतिज ऊर्जा शून्य हो जाती है उसे परम शून्य या शून्य केल्विन (Zero Kelvin) ताप कहते हैं।''**

इसका मान – 273·15°C या – 459·67°F तुल्यांक होता है। इसे K से निरूपित करते हैं K के पूर्व ° (degree) नहीं लिखते हैं।

ताप मापन के अन्य मात्रक **फारेनहाइट** (Fahrenheit-F), **रियूमर** (Reaumur-R) तथा **रैन्काइन** (Rankine-Ra) है।

सभी मानक मात्रकों में अन्तर्सम्बन्ध इस प्रकार है—

$$\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9} = \frac{K-273}{5} = \frac{R}{4} = \frac{Ra-492}{9} \quad \text{... (4)}$$

1.9.6 ज्योति तीव्रता का मापन (Measurement of Luminous Intensity)

ज्योति तीव्रता (Luminous Intensity)—**''किसी प्रकाश स्त्रोत से एकांक समय में एकांक घन कोण से उत्सर्जित प्रकाश ऊर्जा की मात्रा को उस प्रकाश स्त्रोत की ज्योति तीव्रता कहते हैं।''**

ज्योति तीव्रता का मात्रक **कैण्डिला** (Candela) है।

कैण्डिला (Candela)—**''$1{\cdot}01325 \times 10^5$ न्यूटन प्रति वर्ग मीटर अथवा 101325 पास्कल दाब तथा प्लेटिनम के गलनांक (2012 K) पर किसी आदर्श कृष्णिका (Ideal black body) के $\frac{1}{6{,}00{,}000}$ वर्ग मीटर क्षेत्रफल से लम्बवत दिशा में उत्सर्जित विकिरण की मात्रा 1 कैण्डिला के बराबर होती है।''**

''SI unit of luminous intensity—candela, equal to the luminous intensity in the perpendicular direction of the ideal black body radiation from an area of 1/600,000 square metre at the temperature of melting Platinum under a pressure of 101325 pascals or $1{\cdot}01325 \times 10^5$ newton per square metre.''

1.9.7 पदार्थ की मात्रा का मापन (Measurement of Amount of Substance)

किसी पदार्थ की मात्रा के मापन का मात्रक **मोल** (mole) है, इसका प्रतीक mol है। प्राय: गैस का द्रव्यमान मोल में लिया जाता है।

''1 मोल किसी पदार्थ की वह मात्रा (quantitative amount) है जिसमें उस पदार्थ के अवयवी कणों (अणु, परमाणु, आयन अथवा इलेक्ट्रॉन—जबकि पदार्थ एक परमाणुक हो) (entities molecules or atoms if substance is monoatomic) की संख्या 12 ग्राम शुद्ध कार्बन में परमाणुओं की संख्या के बराबर हो। प्रयोगों द्वारा 12 ग्राम शुद्ध कार्बन में परमाणुओं की संख्या $6{\cdot}022045 \times 10^{23}$ प्राप्त होती है, इसे एवोगेड्रो स्थिरांक (Avogadro's Constant) कहते हैं तथा N_A से प्रदर्शित करते हैं।''

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

"It is equal to the amount of substance that contains as many elementary units as there are atoms in 0·012 kg of carbon-12. The elementary units may be atoms, molecules, ions, radicals, electrons etc. and must be specified, it is also known as Avogadro's constant and denoted by N_A."

मोल को व्यक्त करने की एक विधि और है—

"किसी पदार्थ का 1 मोल (1 mole) वह द्रव्यमान है जो उस पदार्थ के ग्राम में व्यक्त अणु-भार के बराबर होता है।"

1 mole of a compound has a mass equal to its relative molecular mass expressed in grams."

उदाहरणत: नाइट्रोजन (अणु-भार 28) के 28 किग्रा द्रव्यमान को नाइट्रोजन का **1 किग्रा मोल** तथा नाइट्रोजन के 28 ग्राम द्रव्यमान को उसका **1 ग्राम मोल** कहते हैं। इसी प्रकार ऑक्सीजन (O_2) का अणुभार 32 है, अत: ऑक्सीजन का 1 किग्रा मोल ऑक्सीजन के 32 किग्रा द्रव्यमान के बराबर होगा।

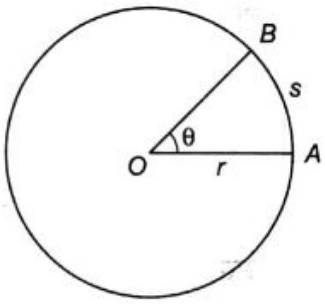
§ 1.10 पूरक मूल राशियाँ, उनकी परिभाषायें तथा उनके मात्रक (Definitions of Supplementary Fundamental Quantities and their Units)

पूरक मूल राशियाँ दो हैं—

(1) समतलीय कोण (Angle in a plane)—यह भौतिक राशि **द्विआयामी** (Two dimensional) अथवा **एक तलीय कोण** (angle in a plane) है।

इसका मात्रक **रेडियन** (Radian) है, इसे rad से अथवा प्रतीक ^{c} से प्रदर्शित करते हैं।

रेडियन (Radian)*—**"किसी वृत्त के केन्द्र पर उसके चाप द्वारा अन्तरित कोण समतल कोण (Plane angle) अथवा एक तलीय कोण (angle in a plane) कहलाता है।"**



चित्र 1.9

चित्र 1.9 में एक तलीय कोण θ प्रदर्शित किया गया है।

$$\text{एक तलीय कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$$

$$\theta = \frac{s}{r} \text{ रेडियन} \quad \text{... (5)}$$

यदि चाप की लम्बाई (s) वृत्त की त्रिज्या (r) के बराबर हो तो अन्तरित कोण का मान 1 रेडियन (1^c) होता है।

यदि चाप की लम्बाई वृत्त की परिधि के बराबर हो तो वृत्त की परिधि के द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अन्तरित कोण का मान

$$\theta° = \frac{2\pi r}{r} \text{ रेडियन}$$

$$\theta° = 2\pi \ ^c$$

यहाँ θ° का मान 360° है, अत:

$$2\pi^c = 360°$$

या $$\pi^c = 180°$$

या $$\left(\frac{22}{7}\right)^c = 180°$$

अत: $$1^c = \frac{180° \times 7}{22}$$

$$= 57 \cdot 27272° = 57 \cdot 273°$$

$$= 57° 16' 38''$$

* 1995 से समतलीय कोण के मात्रक रेडियन को SI व्युत्पन्न मात्रक माना जाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

क्योंकि $1 \text{ पूर्ण चक्कर} = 360°$

अत: $$1° = \frac{1 \text{पूर्ण चक्कर}}{360°}$$

यदि 1° को पुन: 60 भागों में बाँटा जाए तो प्रत्येक 1 भाग 1 मिनट (1′) या आर्क का 1 मिनट (A minute of arc–MOA) कहलाता है, अर्थात्

$$1' = \frac{1°}{60}$$

या $$1° = 60' \quad \text{(चाप मिनट)}$$

यदि 1′ को पुन: 60 भागों में बाँटा जाए तो प्रत्येक 1 भाग 1 सेकण्ड (1″) या आर्क का 1 सेकण्ड (A second of arc) कहलाता है, अर्थात्

$$1'' = \frac{1'}{60}$$

या $$1' \equiv 60'' \quad \text{(चाप सेकण्ड)}$$

या $$1'' = \frac{(1°/60)}{60}$$

$$1'' = \frac{1°}{3600}$$

या $$1° = 3600''$$

अत: $$1'' = \left(\frac{1}{3600}\right) \times \left(\frac{\pi}{180}\right)^c$$

इस मात्रक का सर्वाधिक प्रयोग खगोलशास्त्र, प्रकाशिकी तथा आप्टोमेट्री तथा नेवीगेशन में किया जाता है।

(2) घन कोण (Solid angle) (Ω)—यह भौतिक राशि **त्रिआयामी कोण** (Three dimensional angle) है। इसका मात्रक **स्टेरेडियन** (steradian) है जिसे **sr** से प्रदर्शित करते हैं।

स्टेरेडियन (Steradian)

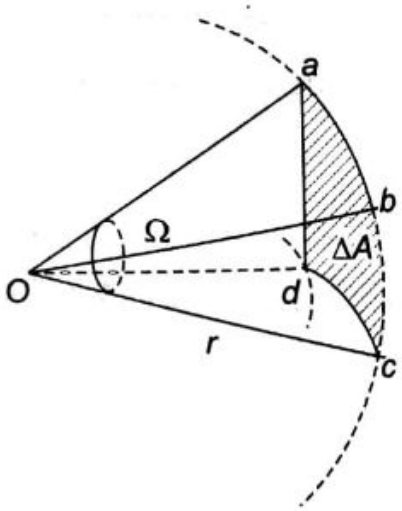
"किसी गोले के पृष्ठ के किसी भाग द्वारा गोले के केन्द्र पर अन्तरित कोण, घन कोण कहलाता है।"

किसी गोले के लिए "**घन कोण (ओमेगा—Ω)** का मान पृष्ठ के क्षेत्रफल (ΔA) तथा गोले की त्रिज्या के वर्ग (r^2) के अनुपात के बराबर होता है।"

चित्र 1.10 के अनुसार,

$$\text{घन कोण} = \frac{\text{पृष्ठ क्षेत्रफल}}{(\text{त्रिज्या})^2} \text{ स्टेरेडियन}$$

$$\Omega = \frac{\Delta A}{r^2} \text{ sr} \qquad \text{... (6)}$$



चित्र 1.10

§ 1.11 मात्रकों के प्रमुख उपसर्ग (Important Prefixes of Units)

विभिन्न पूर्वलग्नकों (Prefixes) को मूल राशियों के मात्रकों के पहले लगाकर उनके अन्य मात्रक बनाये गये हैं जो इस प्रकार हैं—

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

क्र० सं० (S.No.)	उपसर्ग (Prefix)	संकेत (Symbol)	तुल्यांक जिससे मात्रक को गुणा करते हैं (Equivalent figure to be multiplied)	अंग्रेजी पुकार नाम (English name in Practice)
1.	याक्टो (yocto)	y	10^{-24}	septillionth
2.	जिप्टो (zepto)	z	10^{-21}	sexitillionth
3.	आटो (atto)	a	10^{-18}	quintillionth
4.	फेम्टो (femto)	f	10^{-15}	quadrillionth
5.	पिको (pico)	p	10^{-12}	trillionth
6.	नैनो (nano)	n	10^{-9}	billionth
7.	माइक्रो (micro)	μ	10^{-6}	millionth
8.	मिली (milli)	m	10^{-3}	thousandth
9.	सेन्टी (centi)	c	10^{-2}	hundredth
10.	डेसी (deci)	d	10^{-1}	tenth
11.	इकाई (unit)	इकाई का प्रतीक चिह्न	10^{0}	one
12.	डेका (deca)	da	10^{1}	ten
13.	हेक्टो (hecto)	h	10^{2}	hundred
14.	किलो (kilo)	k	10^{3}	thousand
15.	मेगा (Mega)	M	10^{6}	million
16.	गीगा (Giga)	G	10^{9}	billion
17.	टेरा (Tera)	T	10^{12}	trillion
18.	पेटा (Peta)	P	10^{15}	quadrillion
19.	इक्सा (Exa)	E	10^{18}	quintillion
20.	जीटा (Zetta)	Z	10^{21}	sextillion
21.	योटो (Yotto)	Y	10^{24}	septillion

त्रुटि से बचने के लिए पूर्वलग्नकों (Prefixes) के मान को कभी भी आपस में सीधे गुणा अथवा भाग नहीं करना चाहिए। ऐसा करने के लिए सर्वप्रथम उन्हें स्थापित मानकों (Non-prefixed standard form) में बदल कर तभी गणना करनी चाहिए।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 5 : $5\ mV \times 5\ mA = 25\ m^2W$ यह उत्तर गलत है, सही हल इस प्रकार होगा—

$$= 5\,mV \times 5mA$$
$$= 5\times10^{-3}\ V \times 5\times10^{-3}\ A$$
$$= 25\times10^{-6}\ W$$

अथवा $= 25\,\mu W$

अथवा $= 0.25\ mW$

§ 1.12 भौतिक राशियों की विमायें एवं विमीय सूत्र (Dimensions and Dimensional Formulae of Physical Quantities)

भौतिकी में मूल राशियों के अतिरिक्त अन्य सभी भौतिक राशियों (व्युत्पन्न राशियों) को मूल राशियों के पदों में व्यक्त किया जाता है। इसके लिए मूल राशियों जैसे द्रव्यमान, लम्बाई, समय, ताप, विद्युत धारा, ज्योति-तीव्रता तथा पदार्थ की मात्रा को क्रमश: विमा प्रतीकों [M], [L], [T], [θ], [A], [I] तथा [n] से प्रदर्शित करते हैं। इन्हें **विमीय प्रतीक** (dimensional symbol) कहते हैं।

व्युत्पन्न राशि को मूल राशियों द्वारा व्यक्त करने के लिए उनके मूल राशियों के विमीय प्रतीकों पर समुचित **घातें** (Powers) लगाकर उनके **गुणनफल** (Product) के रूप में लिखते हैं। जैसे—

$$\text{वेग} = \frac{\text{विस्थापन}}{\text{समय}}$$
$$= \frac{\text{दूरी की विमा}}{\text{समय की विमा}} = \frac{[L]}{[T]} = [LT^{-1}]$$
$$= [M^0LT^{-1}]$$

(आयत का) क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= लम्बाई की विमा × लम्बाई की विमा

$= [L]\times[L] = [L^2]$

$= [M^0L^2T^0]$

इसी प्रकार संवेग = द्रव्यमान × वेग

= द्रव्यमान की विमा × वेग की विमा

$= [M]\times[LT^{-1}]$

$= [MLT^{-1}]$

यहाँ $[M^0LT^{-1}]$, $[M^0L^2T^0]$ तथा $[MLT^{-1}]$ क्रमश: वेग, क्षेत्रफल, संवेग के **विमीय सूत्र** (dimensional formula) हैं तथा M, L, T पर लगी घातें इन भौतिक राशियों की विमायें हैं। अत:

''किसी भौतिक राशि (व्युत्पन्न) की विमायें वे घातें (Powers) हैं जिन्हें उस भौतिक राशि को मूल मात्रकों के पदों में व्यक्त करने के लिए मूल राशियों पर लगायी जाती हैं।''

1.12.1 विमीय सूत्र (Dimensional Formula)

''किसी भौतिक राशि (व्युत्पन्न) का विमीय सूत्र (dimensional formula) वह व्यंजक (expression) है जो यह दर्शाता है कि उस भौतिक राशि में कौन-कौन सी मूल राशि किस प्रकार शामिल हैं।''

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

जैसे घनत्व का विमीय सूत्र $[ML^{-3}T^0]$ तथा त्वरण का $[M^0LT^{-2}]$ है।

विमीय सूत्र मूल मात्रकों तथा व्युत्पन्न मात्रकों के मध्य सम्बन्ध बताता है।

परिपाटी के अनुसार भौतिक राशियों की विमाओं को M, L तथा T के पदों में तथा बड़े कोष्ठक [ ] के भीतर लिखते हैं। विमा लिखते समय भौतिक राशि में जो पद शामिल नहीं होता है उसका घात शून्य लिखते हैं जैसे घनत्व में समय शामिल नहीं है, अत: घनत्व की विमा $[ML^{-3}T^0]$ तथा त्वरण में द्रव्यमान शामिल न होने के कारण त्वरण की विमा $[M^0LT^{-2}]$ लिखी जायेगी।

1.12.2 प्रमुख भौतिक राशियों के विमीय सूत्र
(Dimensional Formulae of important Physical quantities)

क्र० सं० (S. No.)	भौतिक राशि एवं उसका प्रतीक (Physical quantity and its symbol)	सूत्र (Formula)	मूल अथवा व्युत्पन्न मात्रक (Fundamental or derived Unit)	विमीय सूत्र (Dimensional Formula)
1.	द्रव्यमान (m)		किलोग्राम (किग्रा)	$[ML^0T^0]$ या $[M]$
2.	लम्बाई (l) या विस्थापन		मीटर (मी)	$[M^0LT^0]$ या $[L]$
3.	समय (t)		सेकण्ड (से)	$[M^0L^0T]$ या $[T]$
4.	क्षेत्रफल (A)	$A = l \times l = l^2$	मीटर^2	$[M^0L^2T^0]$ या $[L^2]$
5.	आयतन (V)	$V = A \times l = l^3$	मीटर^3	$[M^0L^3T^0]$ या $[L^3]$
6.	वेग या चाल (v)	$v = \frac{s}{t}$	मीटर/सेकण्ड	$[M^0LT^{-1}]$ या $[LT^{-1}]$
7.	त्वरण (a)	$a = \frac{v}{t}$	मी/से^{2}	$[M^0LT^{-2}]$ या $[LT^{-2}]$
8.	संवेग (P)	$p = mv$	किग्रा मी/से	$[MLT^{-1}]$
9.	बल (F)	$F = ma$	न्यूटन	$[MLT^{-2}]$
10.	आवेग (q)	$q = f.t$	न्यूटन से	$[MLT^{-1}]$
11.	दाब (P)	$P = \frac{F}{A}$	न्यूटन/मी^{2} या पास्कल	$[ML^{-1}T^{-2}]$
12.	कार्य (W)	$W = F.s$	न्यूटन/मी या जूल	$[ML^2T^{-2}]$
13.	ऊर्जा (E) या आन्तरिक ऊर्जा	कार्य करने की क्षमता	जूल	$[ML^2T^{-2}]$
14.	गतिज ऊर्जा (K)	$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$	जूल	$[ML^2T^{-2}]$
15.	स्थितिज ऊर्जा (U)	$U = mgh = \frac{1}{2}kx^2$		
		$= -\frac{GMm}{r}$	जूल	$[ML^2T^{-2}]$
16.	शक्ति (P)	$P = \frac{W}{t}$	जूल/से या वॉट	$[ML^2T^{-3}]$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

17.	घनत्व (d)	$d = \frac{m}{V}$	किग्रा/मी^{3}	$[ML^{-3}T^0]$ या $[ML^{-3}]$
18.	आपेक्षिक घनत्व	—	मात्रकरहित	विमाहीन राशि
19.	कोणीय विस्थापन (θ)	$\theta = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$	रेडियन	विमाहीन राशि
20.	कोणीय वेग (ω)	$\omega = \frac{\theta}{t}$	रेडियन/से	$[M^0L^0T^{-1}]$ या $[T^{-1}]$
21.	कोणीय त्वरण (α)	$\alpha = \frac{\omega}{t}$	रेडियन/से^{2}	$[M^0L^0T^{-2}]$ या $[T^{-2}]$
22.	जड़त्व आघूर्ण (I)	$I = \sum mr^2$	किग्रा मी^{2}	$[ML^2T^0]$ या $[ML^2]$
23.	बल आघूर्ण (τ)	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = I\alpha$	न्यूटन मी	$[ML^2T^{-2}]$
24.	कोणीय संवेग (J)	$\vec{J} = \vec{P} \times \vec{r} = I\omega$	किग्रा मी^{2}/से या जूल से	$[ML^2T^{-1}]$
25.	परिभ्रमण त्रिज्या (K)	$K = \sqrt{I/M}$	मी	$[M^0LT^0]$ या $[L]$
26.	स्प्रिंग नियतांक (k)	$k = F/x$	न्यूटन/मी	$[ML^0T^{-2}]$ या $[MT^{-2}]$
27.	आवर्त काल (T)	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	से	$[M^0L^0T]$ या $[T]$
28.	गुरुत्वीय नियतांक (G)	$G = \frac{Fr^2}{m^2}$	$\frac{\text{न्यूटन मी}^2}{\text{किग्रा}^2}$	$[M^{-1}L^3T^{-2}]$
29.	गुरुत्वीय त्वरण (g)	$g = \frac{W}{m} = \frac{GM}{R^2}$	न्यूटन/किग्रा या मी/से^{2}	$[M^0LT^{-2}]$ या $[LT^{-2}]$
30.	गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता (E_g)	$E_g = -\frac{GM}{r^2}$	मी/से^{2}	$[M^0LT^{-2}]$ या $[LT^{-2}]$
31.	गुरुत्वीय विभव (V_g)	$V_g = -\frac{GM}{r}$	जूल/किग्रा	$[M^0L^2T^{-2}]$ या $[L^2T^{-2}]$
32.	पृष्ठ तनाव (T)	$T = \frac{F}{l} = \frac{W}{\Delta A}$	न्यूटन/मी या जूल/मी^{2}	$[ML^0T^{-2}]$ या $[MT^{-2}]$
33.	द्रव बूंद के अन्दर दाब आधिक्य या	$P = \frac{2T}{r}$		
	साबुन के बुलबुले के अन्दर दाब आधिक्य	$P = \frac{4T}{r}$	न्यूटन/मी^{2}	$[ML^{-1}T^{-2}]$
34.	वेग प्रवणता	वेग प्रवणता $= \frac{dv}{dx}$	प्रति से	$[M^0L^0T^{-1}]$ या $[T^{-1}]$
35.	श्यानता गुणांक (η)	$\eta = \frac{F}{A\frac{dv}{dx}}$	किग्रा/मी से	$[ML^{-1}T^{-1}]$

AKC TECHNICAL CLASSES

क्रमशः

Scanned with CamScanner

36.	प्रतिबल	$\frac{F}{A}$	न्यूटन/मी^{2}	$[ML^{-1}T^{-2}]$
37.	विकृति	$\frac{\Delta\theta}{\theta}$	मात्रकरहित	विमाहीन राशि
38.	प्रत्यास्थता गुणांक (E)	$E = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$	न्यूटन/मी^{2}	$[ML^{-1}T^{-2}]$
39.	पॉइसन निष्पत्ति (σ)	—	मात्रकरहित	विमाहीन राशि
40.	ऐंठन गुणांक (C)	$C = \frac{\pi \eta r^4}{2l}$	न्यूटन मी	$[ML^2T^{-2}]$
41.	ताप (t)	—	°C	$[M^0L^0T^0\theta]$ या $[\theta]$
42.	परम ताप (T)	—	K	$[M^0L^0T^0\theta]$ या $[\theta]$
43.	ऊष्मा (Q)	—	जूल	$[ML^2T^{-2}]$
44.	यांत्रिक कार्य (W)	$W = Q - U$	जूल	$[ML^2T^{-2}]$
45.	ऊर्जा का यांत्रिक तुल्यांक (J)	$J = \frac{W}{H}$	जूल/कैलोरी	विमाहीन
46.	विशिष्ट ऊष्मा (S)	$S = \frac{Q}{mt}$	जूल/किग्रा K	$[M^0L^2T^{-2}\theta^{-1}]$ या $[L^2T^{-2}\theta^{-1}]$
47.	ऊष्माधारिता	$\frac{Q}{t}$	जूल/K	$[ML^2T^{-2}\theta^{-1}]$
48.	मोलर विशिष्ट ऊष्मा (C_m)	वि०ऊष्मा×अणुभार	जूल/मोल K	$[ML^2T^{-2}\theta^{-1}]$
49.	गुप्त ऊष्मा (L)	$L = \frac{Q}{M}$	जूल/किग्रा	$[M^0L^2T^{-2}]$ या $[L^2T^{-2}]$
50.	वाण्डर वाल नियतांक (a)	$a = PV^2$	न्यूटन मी^{4}	$[ML^5T^{-2}]$
51.	वाण्डर वाल नियतांक (b)	$b = V$	मी^{3}	$[M^0L^3T^0]$ या $[L^3]$
52.	एन्ट्रॉपी (S)	$S = \frac{Q}{T}$	जूल/केल्विन	$[ML^2T^{-2}\theta^{-1}]$
53.	गैस नियतांक (R)	$R = \frac{PV}{nT}$	जूल/मोल K	$[ML^2T^{-2}\theta^{-1}]$
54.	बोल्ट्जमैन नियतांक (k)	$K = \frac{E}{T}$	जूल/K	$[ML^2T^{-2}\theta^{-1}]$
55.	ताप प्रवणता (T_g)	$T_g = \frac{d\theta}{dx}$	केल्विन/मी	$[M^0L^{-1}T^0\theta^1]$ या $[L^{-1}\theta^1]$
56.	ऊष्मा चालकता गुणांक (K)	$K = \frac{Q}{A.\frac{d\theta}{dx}.t}$	जूल/मी से K	$[MLT^{-3}\theta^{-1}]$

AYC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

57.	ऊष्मीय प्रतिरोध (R_H)	$R_H = \frac{\Delta\theta.t}{Q}$	K से/जूल	$[M^{-1}L^{-2}T^{3}\theta]$
58.	उत्सर्जन क्षमता (e)	$e = \frac{Q}{At}$	जूल/मी^{2} से	$[ML^{0}T^{-3}]$ या $[MT^{-3}]$
59.	स्पेक्ट्रमी उत्सर्जन क्षमता (e_λ)	$e_\lambda = \frac{Q}{A.t.\Delta\lambda}$	जूल/मी^{2} से Å	$[ML^{-1}T^{-3}]$
60.	उत्सर्जकता (E)	.....	मात्रकरहित	विमाहीन
61.	ऊर्जा घनत्व (U)	$U = \frac{Q}{V}$	जूल/मी^{3}	$[ML^{-1}T^{-2}]$
62.	स्पेक्ट्रमी ऊर्जा घनत्व (U_λ)	$U_\lambda = \frac{Q}{V.\Delta\lambda}$	जूल/मी^{3}Å	$[ML^{-2}T^{-2}]$
63.	रेखीय प्रसार गुणांक या आयतन प्रसार गुणांक या दाब प्रसार गुणांक	.....	K^{-1}	$[M^{0}L^{0}T^{0}\theta^{-1}]$ या $[\theta^{-1}]$
64.	सौर नियतांक (S) (Energy/Area × Time)	$S = \frac{\sigma T^4 R^2}{r^2}$	किलोवाट/मी^{2}	$[ML^{0}T^{-3}]$ या $[MT^{-3}]$
65.	स्टीफन नियतांक (σ)	$\sigma = \frac{E}{T^4}$	वॉट/मी^{2}K^4	$[ML^{0}T^{-3}\theta^{-4}]$ या $[MT^{-3}\theta^{-4}]$
66.	वीन नियतांक (b)	$b = \lambda .m.T$	मी K	$[M^{0}LT^{0}\theta^{-1}]$ या $[L\theta^{-1}]$
67.	प्लांक नियतांक (h)	$h = E/v$	जूल से	$[ML^{2}T^{-1}]$
68.	आवर्तनांक	.....	मात्रक रहित	विमाहीन
69.	ज्योति फ्लक्स	.....	ल्यूमेन	$[M^{0}L^{0}Cd]$ या $[Cd]$
70.	प्रदीप्ति घनत्व (I_d)	$I_d = \frac{\phi_L}{A}$	ल्यूमेन/मी^{2} या लक्स	$[M^{0}L^{-2}T^{0}Cd]$ या $[L^{-2}Cd]$
71.	ज्योति तीव्रता (I_L)	$I_L = \frac{\phi_L}{\Omega}$	ल्यूमेन/स्टेरेडियन	$[M^{0}L^{0}T^{0}CdSr^{-1}]$ या $[Cd\ Sr^{-1}]$
72.	ज्योति दक्षता (η)	—	ल्यूमेन/वॉट	$[M^{-1}L^{-2}T^{3}Cd]$
73.	तरंग की तीव्रता (I)	$I = 2\pi^2 n^2 a\rho v$	वॉट/मी^{2}	$[ML^{0}T^{-3}]$ या $[MT^{-3}]$
74.	तरंग ऊर्जा घनत्व (E)	$E = I/V$	जूल/मी^{3}	$[ML^{-1}T^{-2}]$
75.	विद्युत धारा (I)	$I = \frac{Q}{t}$	ऐम्पियर	$[M^{0}L^{0}T^{0}A]$ या $[A]$
76.	धारा घनत्व (J)	$J = \frac{I}{A}$	ऐम्पियर/मी^{2}	$[M^{0}L^{-2}T^{0}A]$ या $[L^{-2}A]$

AKC TECHNICAL CLASSES

क्रमशः

Scanned with CamScanner

77.	विद्युत फलक्स (ϕ)	$\phi = EA$	वोल्ट मी	$[ML^3T^{-3}A^{-1}]$
78.	विद्युत क्षेत्र की तीव्रता (E)	$E = \frac{\phi}{A}$	वोल्ट/मी	$[MLT^{-3}A^{-1}]$
79.	कूलॉम नियतांक (K)	$K = \frac{Fr^2}{q^2}$	न्यूटन मी^{2}/कूलॉम^2	$[ML^3T^{-4}A^{-2}]$
80.	विद्युत शीलता (ε_0)	$\varepsilon_0 = \frac{q^2}{4\pi r^2 F}$	कूलॉम^2/न्यूटन मी^{2} या फैरड/मी	$[M^{-1}L^{-3}T^4A^2]$
81.	विद्युत विभव (V)	$V = \frac{W}{q}$	जूल/कूलॉम	$[ML^2T^{-3}A^{-1}]$
82.	विद्युत धारिता (C)	$C = \frac{q}{V}$	फैरड	$[M^{-1}L^{-2}T^4A^2]$
83.	संधारित्र में संचित ऊर्जा (U)	$U = \frac{1}{2}CV^2$	जूल	$[ML^2T^{-2}]$
84.	प्रतिरोध (R)	$R = \frac{V}{I}$	ओम	$[ML^2T^{-3}A^{-2}]$
85.	विशिष्ट प्रतिरोध (ρ)	$\rho = \frac{RA}{l}$	ओम मी	$[ML^3T^{-3}A^{-2}]$
86.	विद्युत चालकता (σ)	$\sigma = \frac{1}{R}$	ओम$^{-1}$	$[M^{-1}L^{-2}T^3A^2]$
87.	विभव प्रवणता (X)	$X = \frac{V}{L} = \frac{E}{L}$	वोल्ट/मी	$[MLT^{-3}A^{-1}]$
88.	प्रत्यावर्ती वोल्टता का शिखर मान (E_0)	$E_0 = NAB\omega$	वोल्ट	$[ML^2T^{-3}A^{-1}]$
89.	प्रत्यावर्ती धारा का शिखर मान (I_0)	$I_0 = \frac{NAB\omega}{R}$	ऐम्पियर	$[M^0L^0T^0A]$ या $[A]$
90.	प्रतिघात (X)	$X = \frac{E_0}{I_0}$	ओम	$[ML^2T^{-3}A^{-2}]$
91.	औसत शक्ति ($\bar{P}$)	$\bar{P} = E_{rms}\, I_{rms} \cos\phi$	वॉट	$[ML^2T^{-3}]$
92.	शक्ति गुणांक ($\cos\phi$)	$\cos\phi = \frac{R}{Z}$	मात्रकरहित	विमाहीन
93.	चुम्बकीय फ्लक्स (ϕ_B)	$\phi_B = B.A$	वेबर	$[ML^2T^{-2}A^{-1}]$
94.	चुम्बकीय प्रेरण (B)	$B = \frac{\phi_B}{A}$	वेबर/मी^{2}	$[ML^0T^{-2}A^{-1}]$ या $[MT^{-2}A^{-1}]$
95.	ध्रुव सामर्थ्य (m_P)	$m_p = F/B$	न्यूटन/टेसला	$[M^0LT^0A]$ या $[LA]$
96.	चुम्बकन आघूर्ण (M)	$M = iA$	ऐम्पियर मी^{2}	$[M^0L^2T^0A]$ या $[L^2A]$

AKC TECHNICAL CLASSES

क्रमशः

Scanned with CamScanner

97. चुम्बकन तीव्रता (I)	$I = \frac{M}{V}$	ऐम्पियर/मी	$[M^0L^{-1}T^0A]$ या $[L^{-1}A]$
98. चुम्बकीय पारगम्यता (μ)	$\mu = \frac{B}{H}$	वेबर/ऐम्पियर-मी	$[MLT^{-2}A^{-2}]$
99. विघटन स्थिरांक	.....	से$^{-1}$	$[M^0L^0T^{-1}]$ या $[T^{-1}]$
100. तापायनिक धारा घनत्व (J) या धारा घनत्व	$J = AT^2e^{-\frac{\phi}{KT}}$	ऐम्पियर/मी^{2} ऐम्पियर/मी^{2}	$[M^0L^{-2}T^0A]$ या $[L^{-2}A]$
101. अर्द्धचालकों की चालकता (σ)	.....	ओम$^{-1}$ मी$^{-1}$	$[M^{-1}L^{-3}T^3A^2]$
102. अग्र अथवा उत्क्रम प्रतिरोध	.....	ओम	$[ML^2T^{-3}A^{-2}]$

§ 1.13 विभिन्न प्रकार के चर तथा अचर (Different types of Variables and Constants)

विमीय आधार पर भौतिक राशियों को निम्न प्रकार से वर्गीकृत किया जा सकता है—

(1) विमीय चर (Dimensional variable)—विमीय चर वे भौतिक राशियाँ हैं जिनकी **विमायें होती हैं** तथा **परिमाण नियत नहीं होता है।** जैसे—बल, त्वरण, क्षेत्रफल, आयतन इत्यादि।

(2) विमाहीन चर (Non-dimensional variable)—विमाहीन चर वे भौतिक राशियाँ हैं जिनकी विमायें नहीं होती हैं तथा परिमाण भी नियत नहीं होता है। जैसे—विकृति, कोण, आपेक्षिक घनत्व, लघुगणक फलन, चरघातीय फलन, त्रिकोणमितीय फलन इत्यादि। यहाँ यह ध्यान रखने योग्य है कि कुछ राशियाँ जैसे—कोण (angle), घन कोण (solid angle), लेंस की क्षमता (Power of lens) इत्यादि विमाहीन होने पर भी इनके मात्रक होते हैं, जैसे—रेडियन, स्टेरेडियन तथा डायोप्टर इत्यादि।

(3) विमीय नियतांक (Dimensional constant)—विमीय नियतांक वे भौतिक राशियाँ हैं जिनकी **विमायें होती हैं** तथा इनका **मान नियत रहता है।** जैसे—गैस नियतांक R (gas constant), गुरुत्वाकर्षण नियतांक G (gravitational constant), प्लांक नियतांक h (Planck's constant) इत्यादि।

(4) विमाहीन नियतांक (Non-dimensional constant)—विमाहीन नियतांक वे भौतिक राशियाँ हैं जिनकी **विमा नहीं होती** है तथा इनका **मान नियत रहता है।** जैसे—शुद्ध संख्या 1, 2, 3, 4, ..., π, e ($= 2{\cdot}718$) इत्यादि।

§ 1.14 विमीय समीकरण (Dimensional equation)

किसी भौतिक स्थिति (Physical situation) को दर्शाने वाले भौतिक सूत्र में उपस्थित सभी राशियों के मात्रकों को विमीय रूप में लिखने पर जो समीकरण प्राप्त होता है उसे विमीय समीकरण (Dimensional equation) कहते हैं। जैसे—

(1) कार्य का विमीय समीकरण

$$\text{कार्य} = \text{बल} \times \text{विस्थापन}$$

$$W = F \times d$$

भौतिक राशियों के विमीय रूप लिखने पर

$$W = [MLT^{-2}] \times [M^0LT^0]$$

अथवा

$$W = [ML^2T^{-2}]$$

(2) शक्ति का विमीय समीकरण

$$\text{शक्ति} = \frac{\text{कार्य}}{\text{समय}}$$

$$P = \frac{W}{t}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

भौतिक राशियों के विमीय रूप लिखने पर

$$P = \frac{[ML^2T^{-2}]}{[M^0L^0T]}$$

अर्थात्
$$P = [ML^2T^{-3}]$$

''विमीय समीकरण में विमाओं के लिए लगाया गया कोष्ठक [ ] दर्शाता है कि समीकरण भौतिक राशि की विमाओं के बीच है न कि उनके परिमाणों के बीच।''

§1.15 विमीय विश्लेषण (Dimensional Analysis)

विमीय विश्लेषण **फोरियर** (Fourier) नामक वैज्ञानिक ने दिया था, उनके अनुसार—

(1) **विमाओं की गणना में परिमाणों की गणना पर विचार नहीं करते हैं।** केवल उन राशियों की प्रकृति पर विचार करते हैं जो किसी अन्य राशि को व्यक्त करने के लिए प्रयोग की जाती है। इस प्रकार विमीय दृष्टि से वेग-परिवर्तन, औसत वेग, प्रारम्भिक वेग तथा अन्तिम वेग सभी समान हैं क्योंकि प्रत्येक लम्बाई/समय है।

(2) एक ही भौतिक राशि के कई मात्रक हो सकते हैं किन्तु विमीय सूत्र एक ही होगा। जैसे लम्बाई के मात्रक अलग-अलग लेने पर क्षेत्रफल के मात्रक अलग-अलग होंगे, किन्तु क्षेत्रफल का विमीय सूत्र अपरिवर्तित रहेगा। अर्थात्—**किसी भौतिक राशि का विमीय सूत्र उसके मात्रक पद्धति पर निर्भर नहीं करता है।**

§ 1.16 विमाओं के समांगीयता का सिद्धान्त (Principle of Homogeneity of Dimensions)

इस सिद्धान्त के अनुसार **''किसी भौतिक स्थिति को दर्शाने वाला समीकरण विमाओं की दृष्टि से समांग होता है।''**

(1) अर्थात् किसी विमीय समीकरण के विमीय सन्तुलन के लिए यह आवश्यक है कि उस समीकरण के बायीं ओर की राशियों (पदों) की विमायें (घातें) एवं दाहिनी ओर की राशियों (पदों) की विमायें (घातें) बराबर होनी चाहिए।

(2) यदि किसी समीकरण में कई पद जोड़े अथवा घटाये गये हैं तो प्रत्येक जुड़ने अथवा घटने वाले पदों की विमायें भी एक समान होनी चाहिए।

§ 1.17 विमीय विश्लेषण के उपयोग (Uses of Dimensional Analysis)

विमीय विश्लेषण के निम्न उपयोग हैं—

(1) मात्रकों की किसी पद्धति में, किसी दी हुई भौतिक राशि के मात्रक ज्ञात करना (To find the unit of given physical quantity in any system of units)—दिये गये भौतिक राशि का विमीय सूत्र लिखकर उसमें मूल राशि, M, L, T आदि को हटाकर, उनके स्थान पर अपेक्षित मात्रक पद्धति (required system of unit) के मूल मात्रक लिख देते हैं। इस प्रकार अपेक्षित पद्धति में भौतिक राशि का मात्रक प्राप्त हो जाता है। इस मात्रक को कभी-कभी कोई नया नाम भी दे दिया जाता है। जैसे—

$$\text{बल} = \text{द्रव्यमान} \times \text{त्वरण}$$
$$[F] = [MLT^{-2}]$$

इस समीकरण में M, L, T के स्थान पर CGS पद्धति के लिए सेमी, ग्राम तथा सेकण्ड रखेंगे तो बल का मात्रक ग्राम सेमी/सेकण्ड^2 प्राप्त होगा जिसे **डाइन** (dyne) भी कहते हैं तथा SI पद्धति के लिए मीटर किलोग्राम तथा सेकण्ड रखने पर बल का मात्रक किग्रा मीटर/सेकण्ड^2 प्राप्त होता है जिसे न्यूटन (newton) भी कहते हैं।

(2) किसी भौतिक नियतांक की विमायें तथा मात्रक ज्ञात करना (To find the unit and dimensions of any physical constant)—जिस भौतिक समीकरण अथवा सूत्र में कोई भौतिक नियतांक आता है उसे पक्षान्तरित कर उस सूत्र में सभी भौतिक राशियों की विमायें लिखकर भौतिक नियतांक की विमायें ज्ञात कर लेते हैं। जैसे—न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम में गुरुत्वाकर्षण नियतांक G की विमा निम्न प्रकार से ज्ञात करते हैं—

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अथवा $$G = \frac{F\,r^2}{m_1\,m_2}$$

सभी राशियों के विमीय सूत्र लिखने पर यहाँ सभी प्रतीक अपने सामान्य अर्थ रखते हैं।

$$[G] = \frac{[MLT^{-2}][M^0L^2T^0]}{[ML^0T^0][ML^0T^0]} = \frac{[ML^3T^{-2}]}{[M^2L^0T^0]}$$

अथवा $$[G] = [M^{-1}L^3T^{-2}]$$

यही गुरुत्वाकर्षण नियतांक G का विमीय सूत्र है। इसकी विमायें द्रव्यमान में (–1), लम्बाई में (3) तथा समय में (–2) हैं।

अत: G का SI मात्रक मीटर^3/किग्रा सेकण्ड^2 अथवा न्यूटन मीटर^2/किग्रा^{2} है।

(3) किसी भौतिक राशि के एक मात्रक पद्धति में संख्यात्मक मान को दूसरी मात्रक पद्धति में बदलना (Conversion of numerical values of physical quantities from one system of unit into another)—हम जानते हैं कि यदि किसी भौतिक राशि x को दो अलग-अलग मात्रक $|u_1|$ तथा $|u_2|$ में मापने पर उसके संख्यात्मक मान क्रमश: n_1 तथा n_2 हों तो

$$X = n_1\,|u_1| = n_2\,|u_2| \qquad ...(i)$$

क्योंकि किसी भौतिक राशि के मात्रक एवं उसके संगत संख्यात्मक मान का गुणनफल स्थिरांक होता है। यहाँ n_1 तथा n_2 शुद्ध संख्याएँ हैं, अत: इनके मात्रक नहीं होंगे।

अत: $$n_2 = n_1\,\frac{|u_1|}{|u_2|} \qquad ...(ii)$$

यदि भौतिक राशि X का विमीय सूत्र $[M^aL^bT^c]$ हो तथा दोनों मात्रक पद्धतियों में मूल राशियाँ क्रमश: M_1, L_1, T_1 तथा M_2, L_2, T_2 हों तो दोनों पद्धतियों में भौतिक राशि X के विमीय सूत्र इस प्रकार होंगे—

$$|u_1| = [M_1{}^a\,L_1{}^b\,T_1{}^c]$$

तथा $$|u_2| = [M_2{}^a\,L_2{}^b\,T_2{}^c]$$

$|u_1|$ तथा $|u_2|$ के मान समीकरण (2) में रखने पर

$$n_2 = n_1\,\frac{[M_1{}^aL_1{}^bT_1{}^c]}{[M_2{}^aL_2{}^bT_2{}^c]}$$

अथवा $$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c \qquad ...(7)$$

इस सूत्र के द्वारा किसी भौतिक राशि के संख्यात्मक मान को एक मात्रक पद्धति से दूसरी पद्धति में बदला जा सकता है।

उदाहरण 6 : विमीय विधि द्वारा बल के मात्रक डाइन (dyne) को न्यूटन (newton) में परिवर्तित कीजिए।

हल— ∵ $$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c \qquad ...(1)$$

बल का विमीय सूत्र $[MLT^{-2}]$ है, अत: विमीय सूत्र $[M^aL^bT^c]$ से तुलना करने पर

$$a = 1,\quad b = 1,\quad c = -2$$

प्रश्नानुसार, डाइन, बल का CGS मात्रक है तथा न्यूटन बल का MKS मात्रक है।

दिया है :

$n_1 = 1$ $\qquad$ $n_2 = ?$

$M_1 = 1$ ग्राम $\qquad$ $M_2 = 1$ किग्रा

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$L_1 = 1$ सेमी $\quad L_2 = 1$ मीटर

$T_1 = 1$ सेकण्ड $\quad T_2 = 1$ सेकण्ड

अत: दिये गये मान समीकरण (1) में रखने पर

$$n_2 = 1\left[\frac{1\text{ ग्राम}}{1\text{ किग्रा}}\right]^1\left[\frac{1\text{ सेमी}}{1\text{ मीटर}}\right]^1\left[\frac{1\text{ सेकण्ड}}{1\text{ सेकण्ड}}\right]^{-2}$$

$$= \left[\frac{1\text{ ग्राम}}{1000\text{ ग्राम}}\right]\left[\frac{1\text{ सेमी}}{100\text{ सेमी}}\right][1]^{-2}$$

$$= 10^{-5}$$

अत: 1 डाइन $= 10^{-5}$ न्यूटन

उदाहरण 7 : विमीय विधि द्वारा कार्य के मात्रक अर्ग को जूल में परिवर्तित कीजिए।

हल— $\because$

$$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c \quad ...(1)$$

कार्य का विमीय सूत्र $[M^1L^2T^{-2}]$ है, अत: विमीय सूत्र $[M^aL^bT^c]$ से तुलना करने पर

$$a = 1,\ b = 2,\ c = -2$$

प्रश्नानुसार, अर्ग, कार्य का CGS मात्रक है तथा जूल, कार्य का MKS मात्रक है।

दिया है : $n_1 = 1 \quad n_2 = ?$

$M_1 = 1$ ग्राम $\quad M_2 = 1$ किग्रा

$L_1 = 1$ सेमी $\quad L_2 = 1$ मीटर

$T_1 = 1$ सेकण्ड $\quad T_2 = 1$ सेकण्ड

अत: दिये गये मान समीकरण (1) में रखने पर

$$n_2 = 1\left[\frac{1\text{ ग्राम}}{1\text{ किग्रा}}\right]^1\left[\frac{1\text{ सेमी}}{1\text{ मीटर}}\right]^2\left[\frac{1\text{ सेकण्ड}}{1\text{ सेकण्ड}}\right]^{-2}$$

$$= \left[\frac{1\text{ ग्राम}}{1000\text{ ग्राम}}\right]^1\left[\frac{1\text{ सेमी}}{100\text{ सेमी}}\right]^2[1]^{-2}$$

$$= 10^{-7}$$

अत: 1 अर्ग $= 10^{-7}$ जूल

उदाहरण 8 : गुरुत्वीय त्वरण g का मान MKS पद्धति में 9·8 मी/से^{2} है। विमीय विधि द्वारा इसका मान किमी/मिनट^2 में ज्ञात कीजिए।

हल— $\because$

$$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c \quad ...(1)$$

गुरुत्वीय त्वरण का विमीय सूत्र $[M^0LT^{-2}]$ है, अत: विमीय सूत्र $[M^aL^bT^c]$ से तुलना करने पर

$$a = 0,\ b = 1,\ c = -2$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: समीकरण (1) से

$$n_2 = n_1 \left[\frac{M_1}{M_2}\right]^0 \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^1 \left[\frac{T_1}{T_2}\right]^{-2}$$

अथवा

$$n_2 = n_1 \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^1 \left[\frac{T_1}{T_2}\right]^{-2} \quad ...(2)$$

दिया है :

$n_1 = 9{\cdot}8$ $\quad$ $n_2 = ?$

$L_1 = 1$ मीटर $\quad$ $L_2 = 1$ किमी

$T_1 = 1$ सेकण्ड $\quad$ $T_2 = 1$ मिनट

दिये गये मान समीकरण (2) में रखने पर

$$n_2 = 9 \cdot 8 \left[\frac{1 \text{ मीटर}}{1 \text{ किमी}}\right]^1 \left[\frac{1 \text{ सेकण्ड}}{1 \text{ मिनट}}\right]^{-2}$$

$$= 9{\cdot}8 \left[\frac{1 \text{ मीटर}}{1000 \text{ मीटर}}\right]^1 \left[\frac{1 \text{ सेकण्ड}}{60 \text{ सेकण्ड}}\right]^{-2}$$

$$= \frac{9{\cdot}8 \times 60 \times 60}{1000} \text{ किमी/मिनट}^2$$

$$= 35{\cdot}28 \text{ किमी/मिनट}^2$$

(4) भौतिक समीकरणों की सत्यता की जाँच करना (Checking the correctness of physical equations)—विमाओं के समांगीयता के सिद्धान्त (Principle of homogeneity of dimensions) के आधार पर दिये गये समीकरण की सत्यता की जाँच की जाती है।

इसके लिए दिये गये समीकरण के दोनों ओर के प्रत्येक पद का विमीय रूप लिखते हैं। समीकरण का विमीय रूप लिखते समय विमाहीन नियतांकों को नहीं लिखते हैं। समीकरण के दोनों पक्षों में समान पद [M], [L], [T] प्राप्त करते हैं, यदि प्रत्येक पद का विमीय रूप समान है तो समीकरण विमीय रूप से सत्य है, अन्यथा नहीं।

उदाहरण 9 : गति के समीकरण $v = u + at$ की सत्यता की जाँच विमीय विधि से कीजिए।

हल—

$$v = u + at$$

बायें पक्ष की विमा = दायें पक्ष की विमा

अत:

$$[M^0LT^{-1}] = [M^0LT^{-1}] + [M^0LT^{-2}]\ [M^0L^0T]$$

अथवा

$$[M^0LT^{-1}] = [M^0LT^{-1}] + [M^0LT^{-1}]$$

अथवा

$$[M^0LT^{-1}] = 2\,[M^0LT^{-1}]^*$$

इस समीकरण के दोनों पक्षों के पद [M] [L] [T] एवं उनकी विमा (Power) समान है, अत: यह समीकरण विमीय दृष्टि से सत्य है।

* ध्यान देने योग्य है कि समांगीयता सिद्धान्त के अनुसार समान पदों वाली राशियों को ही आपस में जोड़ सकते हैं अथवा घटा सकते हैं। इस प्रकार किसी विमीय समीकरण में संख्यात्मक मान 2 या 3 या $\frac{1}{2}$ कुछ भी आ सकता है। समीकरण की विमीय सत्यता की जाँच में इसे छोड़ दिया जाता है; केवल दोनों पक्षों के पद एवं उनकी विमाओं की तुलना की जाती है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 10 : समीकरण $T = 2\pi \frac{l}{g}$ की सत्यता की जाँच विमीय विधि द्वारा कीजिए।

हल—

$$T = 2\pi \frac{l}{g}$$

अथवा

$$T = 2\pi . l . g^{-1}$$

बायें पक्ष की विमा = दायें पक्ष की विमा

यहाँ 2π विमाहीन राशि है। दोनों पक्षों के विमीय सूत्र लिखने पर

$$[M^0L^0T] = [M^0LT^0]\ [M^0LT^{-2}]^{-1}$$

अथवा

$$[M^0L^0T] = [M^0LT^0]\ [M^0L^{-1}T^2]$$

अथवा

$$[M^0L^0T] = [M^0L^0T^2]$$

इस समीकरण के दोनों पक्षों में पदों की विमायें समान नहीं हैं, अत: समीकरण असत्य है।

उदाहरण 11 : विमीय विधि से समीकरण $v = 2gh$ की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल—

$$v = 2gh$$

बायें पक्ष की विमा = दायें पक्ष की विमा

दोनों पक्षों में राशियों के विमीय सूत्र लिखने पर,

$$[M^0LT^{-1}] = [M^0LT^{-2}]\ [M^0LT^0]$$

अथवा

$$[M^0LT^{-1}] = [M^0L^2T^{-2}]$$

इस समीकरण के दोनों पक्षों में पदों की विमायें समान नहीं हैं, अत: समीकरण असत्य है।

(5) विभिन्न भौतिक राशियों के मध्य परस्पर सम्बन्ध स्थापित करना (Deriving relations among various physical quantities)—किसी भौतिक राशि के लिए विभिन्न भौतिक राशियों के मध्य सम्बन्ध ज्ञात करते समय अथवा किसी भौतिक राशि के लिए सूत्र ज्ञात करते समय यदि हमें यह ज्ञात हो कि भौतिक राशि अन्य किन-किन राशियों पर निर्भर करती है, तो उसका उन राशियों से वास्तविक सम्बन्ध विमीय समांगीयता सिद्धान्त से ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 12 : किसी पिण्ड का वेग v, गुरुत्वीय त्वरण g तथा ऊँचाई h पर निर्भर करता है। वेग v के लिए विमीय विधि द्वारा सूत्र का निगमन कीजिए।

हल—प्रश्नानुसार,

$$v \propto g\,h$$

यहाँ $\propto$ (समानुपात) का चिह्न भौतिक राशि का अन्य राशियों पर निर्भरता दिखाता है।

माना वेग v, गुरुत्वीय त्वरण g के a घात पर तथा ऊँचाई h के b घात पर निर्भर करता है अर्थात्—

$$v = k\ g^a h^b \qquad ...(1)$$

यहाँ k एक विमाहीन समानुपाती नियतांक है।

समीकरण (1) के दोनों पक्षों में विभिन्न भौतिक राशियों के विमीय सूत्र लिखने पर

$$[M^0LT^{-1}] = [M^0LT^{-2}]^a\ [M^0LT^0]^b$$

अथवा

$$[M^0LT^{-1}] = [M^0L^aT^{-2a}][M^0L^bT^0]$$

अथवा

$$[M^0LT^{-1}] = [M^0L^{a+b}T^{-2a}]$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

विमीय सन्तुलन के लिए दोनों पक्षों के पदों की विमायें समान होनी चाहिए (समांगीयता के सिद्धान्त से)। अत: दोनों पक्षों की विमाओं की तुलना करने पर—

$$a+b=1 \quad \ldots (2)$$

तथा

$$-2a=-1 \quad \ldots (3)$$

समीकरण (2) तथा (3) युगपत समीकरण (homogeneous equations) हैं। हल करने पर समीकरण (3) से

$$a=\frac{1}{2}$$

a का यह मान समीकरण (2) में रखने पर

$$\frac{1}{2}+b=1$$

अथवा

$$b=1-\frac{1}{2}$$

अथवा

$$b=\frac{1}{2}$$

$a\left(=\frac{1}{2}\right)$ तथा $b\left(=\frac{1}{2}\right)$ का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$v=k.g^{1/2}.h^{1/2}$$

अथवा

$$v=k.\sqrt{g}.\sqrt{h}$$

अथवा

$$v=k.\sqrt{gh}$$

स्थिरांक k का मान विमीय विधि द्वारा ज्ञात करना सम्भव नहीं है। प्रयोग से k का मान $\sqrt{2}$ आता है।

अत:

$$v=\sqrt{2gh}$$

यही अभीष्ट सम्बन्ध है।

उदाहरण 13 : v समान चाल से r त्रिज्या के वृत्त की परिधि में m द्रव्यमान के पिण्ड की वृत्तीय गति हेतु आवश्यक अभिकेन्द्र बल (F) के लिए विमीय विधि द्वारा सूत्र का निगमन कीजिए।

हल—माना v समान चाल से r त्रिज्या के वृत्त की परिधि में m द्रव्यमान के पिण्ड की वृत्तीय गति हेतु आवश्यक अभिकेन्द्र बल F, v की घात a, m की घात b तथा r की घात c पर निर्भर करता है। अर्थात्

$$F \propto v^a\, m^b\, r^c$$

अथवा

$$F = k\, v^a\, m^b\, r^c \quad \ldots (1)$$

यहाँ k एक विमाहीन समानुपाती नियतांक है।

समीकरण (1) के दोनों पक्षों में विभिन्न राशियों के विमीय सूत्र लिखने पर

$$[MLT^{-2}] = [M^0LT^{-1}]^a\,[ML^0T^0]^b\,[M^0LT^0]^c$$

अथवा

$$[MLT^{-2}] = [M^0L^aT^{-a}][M^bL^0T^0][M^0L^cT^0]$$

अथवा

$$[MLT^{-2}] = [M^bL^{a+c}T^{-a}]$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

विमीय समांगता के लिए समीकरण के दोनों पक्षों की विमाओं की तुलना करने पर

$$b = 1 \quad \ldots (2)$$

$$a + c = 1 \quad \ldots (3)$$

तथा $$-a = -2$$

या $$a = 2 \quad \ldots (4)$$

युगपत समीकरण (2), (3) तथा (4) से

$$a + c = 1$$

अथवा $$2 + c = 1$$

अथवा $$c = 1 - 2$$

अथवा $$c = -1$$

$a\ (=2)$, $b\ (=1)$ तथा $c(=-1)$ के मान समीकरण (1) में रखने पर

$$F = k.v^2.m^1.r^{-1}$$

अथवा $$F = k\frac{mv^2}{r}$$

प्रयोग द्वारा स्थिरांक k का मान 1 प्राप्त होता है, अत:

$$\boldsymbol{F = \frac{m\,v^2}{r}}$$

यही अभीष्ट सम्बन्ध है।

§ 1.18 विमीय विश्लेषण विधि की सीमायें (Limitations of Dimensional Analysis)

(1) इस विधि से सूत्रों में उपस्थित नियतांकों (constants) k (विमाहीन) का आंकिक मान निकालना सम्भव नहीं है। इसे प्रयोग या अन्य विधि से प्राप्त किया जा सकता है।

(2) यदि कोई भौतिक राशि तीन राशियों से अधिक राशियों पर निर्भर करती हो तो इन राशियों के मध्य परस्पर सम्बन्ध इस विधि द्वारा स्थापित नहीं किया जा सकता है। परन्तु किसी दिये हुए इस प्रकार के समीकरण की विमीय सत्यता की जाँच की जा सकती है।

(3) यदि काई भौतिक राशि केवल तीन भौतिक राशियों पर निर्भर करती है, परन्तु तीन में से दो राशियों की विमायें आपस में समान हों तो भी विमीय विधि द्वारा इन राशियों के मध्य परस्पर सम्बन्ध स्थापित नहीं किया जा सकता है, परन्तु विमीय सत्यता की जाँच की जा सकती है।

उदाहरण—स्वरित्र द्विभुज की आवृत्ति n के सूत्र $n = \frac{vt}{l^2}$ को विमीय विधि से स्थापित नहीं किया जा सकता है क्योंकि यहाँ v ध्वनि की चाल $[M^0LT^{-1}]$, t स्वरित्र की भुजा की मोटाई $[M^0LT^0]$ तथा l स्वरित्र की भुजा की लम्बाई $[M^0LT^0]$ है।

(4) यदि किसी समीकरण के किसी एक पक्ष में एक से अधिक पद हों जैसे— $v = u + at$ (यहाँ दाहिने पक्ष में दो पद हैं) तो इस समीकरण को विमीय विधि से निगमित (derive) नहीं किया जा सकता है। अर्थात् ऐसे सम्बन्धों को निगमित नहीं किया जा सकता है जिसमें कहीं पर भी धन (+) अथवा ऋण (–) का चिह्न हो। लेकिन इसकी विमीय सत्यता की जाँच की जा सकती है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(5) त्रिकोणमितीय अनुपातों ($\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ इत्यादि), चर घातांकीय (e^x) तथा लघुगुणक ($\log x$) पदों वाले समीकरणों का निगमन विमीय विश्लेषण विधि से सम्भव नहीं है, किन्तु इनकी विमीय सत्यता की जाँच की जा सकती है।

(6) कोई भौतिक राशि सदिश है अथवा अदिश विमीय विश्लेषण विधि से ज्ञात नहीं किया जा सकता है।

(7) यदि किसी समीकरण में स्थिरांक k विमाहीन न हो तो उस समीकरण के निगमन के लिए विमीय विश्लेषण विधि प्रयोग में नहीं लायी जा सकती है।

(8) किसी समीकरण द्वारा प्रदर्शित किसी भौतिक सम्बन्ध (Physical relation) के सत्य होने के लिए, इस समीकरण का विमीय सन्तुलन में होना एक आवश्यक शर्त तो है लेकिन केवल विमीय सन्तुलन भौतिक सम्बन्ध के सत्य होने के लिए पर्याप्त नहीं है। अर्थात्

''समीकरण भौतिक तथा गणितीय रूप से सत्य हो तो भी विमीय रूप से वह सत्य नहीं भी हो सकती है।''

उदाहरणत : किसी पिण्ड द्वारा t वें सेकण्ड में तय की गयी दूरी ज्ञात करने के लिए समीकरण $S_t = u + \frac{a}{2}(2t-1)$ की सत्यता की जाँच विमीय विधि द्वारा कीजिए, जहाँ प्रतीकों के सामान्य अर्थ हैं।

हल—

$$S_t = u + \frac{a}{2}(2t-1)$$

बायें पक्ष की विमा = दायें पक्ष की विमा

अर्थात् दूरी की विमा = वेग की विमा + त्वरण की विमा × समय की विमा

विमीय रूप लिखने पर

$$[M^0LT^0] = [M^0LT^{-1}] + [M^0LT^{-2}][M^0L^0T]$$

विमाहीन राशियों को छोड़ दिया गया है, अत:

$$[M^0LT^0] = [M^0LT^{-1}] + [M^0LT^{-1}]$$

अथवा

$$[M^0LT^0] = 2[M^0LT^{-1}]$$

इस समीकरण के दोनों पक्षों की विमायें समान नहीं हैं, अत: समीकरण असत्य है।

परन्तु वास्तव में भौतिक तथा गणितीय रूप से समीकरण $S_t = u + \frac{a}{2}(2t-1)$ सत्य है जिसका प्रयोग किसी पिण्ड द्वारा tवें सेकण्ड में चली गयी दूरी को ज्ञात करने में किया जाता है।

परन्तु इसी समीकरण को विमीय रूप से सत्य करने के लिए इस प्रकार भी लिखा जा सकता है—

$$S_t = u \times 1\,s + \frac{a}{2} \times 1\,s(2t - 1\,s)$$

§ 1.19 मापन में त्रुटियाँ (Errors in Measurement)

परिचय (Introduction)

''भौतिकी मापन का विज्ञान है।''

''Physics is a science of measurements.''

प्रकृति में द्रव्य तथा ऊर्जा एवं उनके अन्तर्सम्बधों एवं प्राकृतिक घटनाओं के निश्चित परिणामों को वैज्ञानिक विधि से जानने एवं व्यक्त करने के लिए मापन किया जाना अत्यावश्यक है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अनिश्चितता का सिद्धान्त (Principle of uncertainty) के प्रतिपादक वैज्ञानिक हाइज़ेनबर्ग के अनुसार किसी भी भौतिक राशि का यथार्थ (absolute) मापन किया जा पाना सम्भव नहीं है। अर्थात् **हम कुछ भी यथार्थतापूर्वक नहीं माप सकते हैं।** (We cannot measure anything absolutely); उनका यह कथन इस आधार पर था कि मापन एक तुलनात्मक विधि है (measurement is a process of comparison) तथा इस विधि में किसी न किसी स्तर पर त्रुटि अवश्य होती है।

§ 1.20 मापक यन्त्र की यथार्थता की सीमा (Limit of accuracy of a Measuring Instrument)

किसी भी भौतिक राशि को मापने के लिए मापक यन्त्र (measuring instrument) का प्रयोग किया जाता है जैसे—लम्बाई नापने के लिए मीटर पैमाना, वर्नियर कैलीपर्स, स्क्रूगेज आदि। परन्तु प्रत्येक मापन यन्त्र एक निश्चित सीमा तक ही यथार्थतापूर्वक (accurately) माप कर सकता है अर्थात् प्रत्येक मापक यन्त्र की यथार्थता की एक सीमा होती है।

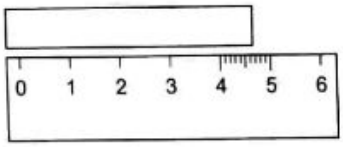
''कोई मापक यन्त्र जिस सीमा तक यथार्थ माप कर सकता है उसे उस यन्त्र की यथार्थता की सीमा कहते हैं। यह यन्त्र के अल्पतमांक के बराबर होता है।''

यन्त्र का अल्पतमांक (Least Count of Instrument)

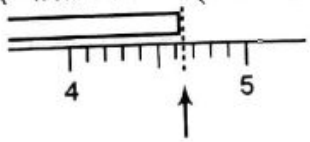
किसी मापक यन्त्र द्वारा लिए जा सकने वाले न्यूनतम माप (minimum measurement) को उस यन्त्र का अल्पतमांक (Least count) कहते हैं। जैसे—मीटर पैमाने, वर्नियर कैलीपर्स तथा स्क्रूगेज का अल्पतमांक क्रमशः 1 मिमी, 0·1 मिमी तथा 0·01 मिमी है।

§ 1.21 मापन में अनिश्चितता (Uncertainty in Measurements)

यदि मीटर पैमाने से किसी वस्तु की लम्बाई मापनी हो तो इससे सबसे छोटा मापन 0·1 सेमी अथवा 1 मिमी ही लिया जा सकता है। इससे कम या छोटा मापन मीटर पैमाने द्वारा सम्भव नहीं है। माना एक छात्र मीटर पैमाने का प्रयोग कर किसी वस्तु की लम्बाई माप रहा है। चित्र 1.11 के अनुसार यदि वस्तु की लम्बाई 4·67 सेमी हो तो मीटर स्केल द्वारा छात्र इसे 4·6 सेमी अथवा 4·7 सेमी पढ़ेगा। मीटर स्केल में 0·07 सेमी पढ़ने की कोई व्यवस्था नहीं है। वास्तव में छात्र अनुमान के आधार पर किसी वस्तु की लम्बाई को मापता है। वह यह अनुमान लगाता है कि यदि वस्तु की लम्बाई मीटर पैमाने के किन्हीं दो क्रमागत मिमी पैमानों के मध्य पड़ रही है तो मिमी पैमाने के आधे का अनुमान लगाकर छात्र यह देखता है कि मापी जाने वाली राशि इस अनुमानित आधे मिमी की माप से पहले है अथवा बाद में। यदि पहले है तो वह पहला मिमी पाठ्यांक पढ़ता है और यदि आधे मिमी के बाद का अनुमान होता है तो वह बाद वाला मिमी पाठ्यांक पढ़ता है, चित्र 1.12 (a) एवं (b)।

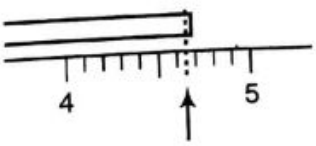


चित्र 1.11



. मिमी एवं · मिमी के आधे का अनुमान
सामान्यतः छात्र यह पाठ्यांक · मिमी पढ़ता है।

(a)



. मिमी एवं · मिमी के आधे का अनुमान सामान्यतः
छात्र यह पाठ्यांक · मिमी पढ़ता है।

(b)

चित्र 1.12

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

इस प्रकार छात्र द्वारा मापी गयी राशि की लम्बाई 4 · 6 सेमी से 4 · 7 सेमी के बीच कुछ भी हो सकती है। माप में यह अन्तर 0·1 सेमी या 1 मिमी, मीटर पैमाने की यथार्थता की सीमा है जो कि अल्पतमांक के बराबर है,

किसी राशि की माप में अनिश्चितता का मान उस राशि की माप के अधिकतम एवं न्यूनतम, क्रमागत मापों के अन्तर के बराबर होता है जो सदैव यन्त्र के अल्पतमांक के बराबर होता है।

स्पष्ट है कि किसी मापक यन्त्र द्वारा प्राप्त मान पूर्णतया यथार्थ नहीं होता है।

§ 1.22 यथार्थता एवं सूक्ष्मता (Accuracy and Precision)

किसी भौतिक राशि की माप कितनी भी सावधानीपूर्वक की जाये, मापी गयी राशि अपने वास्तविक मान (True value) से सदैव भिन्न प्राप्त होती है। अत: मापन विधि में सदैव मापकर्त्ता को मापी जाने वाली राशि के परिमाण के अनुमानत: उचित मापक यन्त्र का प्रयोग कर पूर्ण सावधानी के साथ मापन करना चाहिए ताकि मापी गयी माप अपने वास्तविक मान के निकटतम प्राप्त हो।

यथार्थता (Accuracy)

किसी माप की वास्तविक मान से निकटता को माप की यथार्थता कहते हैं।

"Accuracy is the term used to indicate the closeness of a measurement to its accurate value."

सूक्ष्मता (Precision)

इसे परिशुद्धता भी कहते हैं। मापक यन्त्र का अल्पतमांक (Least count) माप की सूक्ष्मता दर्शाता है। वास्तव में सूक्ष्मता अथवा परिशुद्धता वस्तु की किसी एक माप की उसी वस्तु की अन्य मापों से निकटता प्रदर्शित करता है। "Precision is the term used to indicate the closeness of a measurement to other measurements."

परिशुद्धता यह दर्शाती है कि वस्तु को किस विभेदन सीमा (resolution limit) तक मापा गया है।

$$\text{सूक्ष्मता या परिशुद्धता (Precision)} \propto \frac{1}{\text{अल्पतमांक (Least count)}}$$

यह आवश्यक नहीं है कि कोई माप यदि सूक्ष्म है तो वह यथार्थ भी हो जैसे यदि किसी पतले तार की त्रिज्या का वास्तविक मान 1 · 219 mm हो यदि इसकी माप 0 · 1 mm अल्पतमांक वाले वर्नियर कैलीपर्स एवं 0 · 01mm अल्पतमांक वाले स्क्रूगेज से की जाये और मान क्रमश: 1 · 2 mm तथा 1 · 31 mm प्राप्त हो तो वर्नियर द्वारा प्राप्त की गयी माप 1 · 2 mm अधिक यथार्थ (वास्तविक मान के निकट) है यद्यपि स्क्रूगेज की माप 1 · 31 mm अधिक सूक्ष्म है।

§ 1.23 मापन में त्रुटियाँ (Errors in Measurement)

किसी भौतिक राशि के मापन में निम्न त्रुटियों के होने की सम्भावना रहती है—

(1) क्रमबद्ध त्रुटियाँ (Systematic Errors) ज्ञात कारणों से उत्पन्न होती हैं। त्रुटियों पर प्रयोगकर्त्ता का नियन्त्रण होता है।

(2) अनियमित त्रुटियाँ (Random Errors) अज्ञात कारणों से उत्पन्न होती हैं। त्रुटियों पर प्रयोगकर्त्ता का नियन्त्रण नहीं होता है।

1.23.1 क्रमबद्ध त्रुटियाँ (Systematic Errors)

जब किसी मापन में सदैव एक समान त्रुटि होती है अर्थात् त्रुटि की प्रकृति अथवा चिह्न सदैव एक ही प्रकार का धनात्मक (Positive) अथवा ऋणात्मक (Negative) होता है, क्रमबद्ध त्रुटियाँ कहलाती हैं।

क्रमबद्ध त्रुटियाँ ज्ञात कारणों से होती हैं। इन कारणों को ज्ञात कर इन त्रुटियों को दूर किया जा सकता है।

क्रमबद्ध त्रुटियाँ निम्न प्रकार की हो सकती हैं—

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(1) स्थिर त्रुटियाँ (Constant Errors)—यदि मापक यन्त्र संरचना अथवा बनावट के दृष्टिकोण से ही त्रुटिपूर्ण (Faulty) है। अर्थात् मापक यन्त्र पर बने मापक चिह्न गलत (Faulty graduations) लगे हों तो ऐसे यन्त्र के प्रयोग से सभी प्रेक्षणों में त्रुटि सदैव एक समान प्राप्त होती है। ऐसी त्रुटि को स्थिर त्रुटि कहते हैं।

स्थिर त्रुटियों को दूर करने के लिए त्रुटिपूर्ण मापक यन्त्र के स्थान पर त्रुटिरहित यन्त्र का प्रयोग करना चाहिए और यदि यह सम्भव न हो तो त्रुटिपूर्ण यन्त्र में त्रुटि का स्वरूप (Nature of error) ज्ञात कर जितनी अधिक बार सम्भव हो सके मापन करना चाहिए।

(2) यन्त्र के कारण त्रुटियाँ (Errors Due to Instruments)—ऐसे मापक यन्त्र संरचना अथवा बनावट के दृष्टिकोण से त्रुटिरहित होते हैं, परन्तु इनके अत्यधिक प्रयोग से इन यन्त्रों में दोष उत्पन्न हो जाता है। जैसे वर्नियर कैलीपर्स अथवा स्क्रूगेज में शून्य त्रुटि (Zero error) का हो जाना, इत्यादि। प्रेक्षण प्रारम्भ करने से पूर्व प्रयोग में आने वाले सभी मात्रक यन्त्रों में इस प्रकार की त्रुटियाँ ज्ञात कर लेते हैं जिससे कि मापन का अन्तिम परिणाम यथार्थ हो सके।

(3) व्यक्तिगत त्रुटियाँ (Personal Errors)—वे त्रुटियाँ जो प्रयोग करने वाले अथवा मापन करने वाले व्यक्ति की असावधानी के कारण उत्पन्न होती हैं, व्यक्तिगत त्रुटियाँ कहलाती हैं। यह मापक यन्त्रों पर निर्भर नहीं करती हैं।

सांवधानी बढ़ाकर तथा सही तरीके से पाठ्यांक प्राप्त कर इस त्रुटि को कम किया जा सकता है।

(4) बाह्य कारकों द्वारा उत्पन्न होने वाली त्रुटियाँ (Errors due to External Reasons)—प्रेक्षण लेते समय दाब, ताप, आर्द्रता तथा वायु वेग इत्यादि के परिवर्तन के कारण प्रेक्षण में उत्पन्न त्रुटियाँ बाह्य कारकों द्वारा उत्पन्न होने वाली त्रुटियाँ कहलाती हैं।

उचित सावधानियाँ अपनाकर एवं वातावरण परिवर्तन पर नियंत्रण की सम्भव व्यवस्था कर इस प्रकार की त्रुटियों को दूर किया जा सकता है।

1.23.2 अनियमित त्रुटियाँ (Random Errors)

ऐसी त्रुटियाँ जिनके ऊपर प्रयोगकर्त्ता का कोई नियन्त्रण नहीं होता है अनियमित त्रुटियाँ कहलाती हैं। यदि प्रेक्षण लेने के दौरान अकस्मात् वातावरण का ताप, दाब अथवा आर्द्रता तेजी से बदल जाय अथवा विद्युत के किसी प्रयोग में सप्लाई वोल्टेज अचानक परिवर्तित हो जाए अथवा भूकम्प का मान सामान्य सीमा से अधिक हो जाये तो भिन्न-भिन्न प्रयोगों में इस प्रकार के परिवर्तनों का भिन्न प्रभाव पड़ता है जो प्रेक्षण के मान को प्रभावित करता है। इन त्रुटियों को दूर करने के लिए मापन को कई बार लेकर तथा उनका औसत ज्ञात कर काफी सीमा तक यथार्थ मान पाया जा सकता है।

§ 1.24 यथार्थ मान (Absolute Value)

किसी राशि के मापन में अधिक संख्या में किये गये प्रेक्षणों के मानों का समान्तर माध्य ही उस राशि का यथार्थ मान (Absolute value) या वास्तविक मान (True value or real value) या माध्य मान (Mean value) कहलाता है।

माना किसी भौतिक राशि को n बार मापने पर उसकी माप $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ आती है तब उसकी शुद्ध माप या वास्तविक माप या यथार्थ माप या माध्य माप निम्न प्रकार ज्ञात करते हैं—

$$a = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}$$

या

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} a_i \qquad ...(7)$$

(जहाँ i प्रेक्षणों की संख्या है तथा a_i प्रेक्षित मान है)

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 1.25 त्रुटियों का आकलन (Estimation of Errors)

मापन में त्रुटियों का आकलन निम्न प्रकार से करते हैं—

(1) परम/निरपेक्ष त्रुटि या सम्भावित त्रुटि (Absolute Error or Possible Error)—यदि किसी भौतिक राशि का यथार्थ मान (accurate value) a हो तथा मापक यन्त्र द्वारा प्रेक्षित मान (observed value) a_o हो तो यथार्थ/वास्तविक मान तथा प्रेक्षित मान के अन्तर को परम त्रुटि या सम्भावित त्रुटि कहते हैं। इसे Δa से प्रदर्शित करते हैं। अर्थात्

परम त्रुटि (absolute error) = वास्तविक मान (True value) – प्रेक्षित मान (observed value)

अथवा $$\Delta a = a - a_o \qquad ...(8)$$

यहाँ Δa का मात्रक वही होगा जो a तथा a_o का है। Δa का मान धनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकता है लेकिन शून्य नहीं हो सकता है क्योंकि किसी माप में परम / निरपेक्ष त्रुटि का मान, प्रयोग किये गये मापक यन्त्र के अल्पतमांक के बराबर होता है। अर्थात्

अधिकतम सम्भावित/निरपेक्ष त्रुटि = ± मापक यन्त्र का अल्पतमांक* ...(9)

चित्र 1.12 में वस्तु की लम्बाई नापने में अनिश्चितता $4 \cdot 7$ सेमी – $4 \cdot 6$ सेमी = $0 \cdot 1$ सेमी (= 1 मिमी) है जो मापक यन्त्र के अल्पतमांक के बराबर है यह इस माप की अधिकतम सम्भावित त्रुटि है।

कभी-कभी माप को $(a \pm \Delta a)$ के रूप में भी प्रदर्शित करते हैं, जिसका तात्पर्य है कि प्रेक्षित मान $(a - \Delta a)$ तथा $(a + \Delta a)$ के बीच कुछ भी हो सकता है, जहाँ Δa, इस माप a में निरपेक्ष त्रुटि है।

(2) भिन्नात्मक या सापेक्ष/आपेक्षिक त्रुटि (Fractional or Relative error)—परम त्रुटि तथा यथार्थ मान के अनुपात को सापेक्ष त्रुटि कहते हैं। इसे δa से प्रदर्शित करते हैं। अर्थात्

$$\text{भिन्नात्मक अथवा सापेक्ष त्रुटि} = \frac{\text{निरपेक्ष त्रुटि}}{\text{यथार्थ मान}}$$

$$\text{Fractional or relative error} = \frac{\text{Absolute error}}{\text{True value}}$$

अथवा $$\delta a = \frac{\Delta a}{a} \qquad ...(10)$$

सापेक्ष त्रुटि का प्रतिशत, प्रतिशत भिन्नात्मक त्रुटि कहलाता है। अर्थात्

$$\text{\% में भिन्नात्मक त्रुटि} = \frac{\Delta a}{a} \times 100 \qquad ...(11)$$

इसका कोई मात्रक नहीं होता है।

§ 1.26 त्रुटियों का संयोजन (Combination of Errors)

यदि कोई भौतिक राशि अन्य राशियों के सम्बन्धों पर आधारित हो और उन अन्य राशियों का मापन भिन्न-भिन्न मापक यन्त्रों द्वारा किया जाना हो तो प्रत्येक राशि के मापन में त्रुटियाँ भी भिन्न-भिन्न प्राप्त होंगी जो परस्पर एक-दूसरे पर अनिर्भर होंगी। भौतिक राशि का प्रेक्षित मान एवं उसमें अधिकतम संभाव्य त्रुटि (Maximum probable error) मापी गयी राशियों के मानों एवं उनमें प्राप्त अधिकतम संभाव्य त्रुटियों तथा राशियों के मध्य सम्बन्धों पर निम्न प्रकार से आधारित होगा—

माना किसी अज्ञात भौतिक राशि X को ज्ञात करने के लिए, दो अन्य भौतिक राशियों a तथा b को मापने की आवश्यकता है। यदि राशि a के मापन में Δa तथा राशि b के मापन में Δb परम त्रुटियाँ हैं, अर्थात् माप क्रमशः $(a \pm \Delta a)$ तथा $(b \pm \Delta b)$ है तो परिणामी राशि X में परम त्रुटि ΔX इस प्रकार प्राप्त होगी—

* किसी माप में सबसे दाहिने का अंक (Extreme right digit) अनिश्चित (doubtful) होता है। इस माप का निरपेक्ष त्रुटि ज्ञात करने के लिए माप के सबसे दाहिने अंक के नीचे 1 तथा शेष सभी अंकों के स्थान पर शून्य लिखकर दशमलव के नीचे दशमलव लगा देते हैं—यह मापक यन्त्र का अल्पतमांक होता है, जो निरपेक्ष त्रुटि Δa के रूप में प्राप्त होता है। जैसे—यदि कोई मापी गयी राशि $a = 2 \cdot 698$ सेमी हो तो $0 \cdot 001$ यन्त्र का अल्पतमांक होगा तथा $\Delta a = \pm 0 \cdot 001$ सेमी निरपेक्ष त्रुटि होगी।

RK TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(1) योग में त्रुटियों का संयोजन (Combination of Errors in Addition)—यदि परिणामी राशि X अन्य भौतिक राशियों a तथा b के मध्य योग के सम्बन्ध पर आधारित हो, अर्थात्

$$X = a + b$$

तो, माप की त्रुटियाँ सम्मिलित करने पर

$$X \pm \Delta X = (a \pm \Delta a) + (b \pm \Delta b) = a + b \pm (\Delta a + \Delta b)$$

या $$\pm \Delta X = \pm(\Delta a + \Delta b)$$

अत: X के आकलन में अधिकतम सम्भावित त्रुटि

$$\Delta X = \Delta a + \Delta b$$

$\therefore$ **योग में भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि** $= \dfrac{\Delta X}{X} \times 100\% = \dfrac{\Delta a + \Delta b}{a + b} \times 100\%$

(2) अन्तर में त्रुटियों का संयोजन (Combination of Errors in Subtraction)—यदि परिणामी राशि X अन्य भौतिक राशियों a तथा b के मध्य अन्तर के सम्बन्ध पर आधारित हो, अर्थात्

$$X = a - b$$

तो, माप की त्रुटियाँ सम्मिलित करने पर

$$X \pm \Delta X = (a \pm \Delta a) - (b \pm \Delta b)$$

$$= (a - b) \pm \Delta a \mp \Delta b$$

या $$\pm \Delta X = \pm \Delta a \mp \Delta b$$

अत: X के आकलन में अधिकतम सम्भावित त्रुटि

$$\Delta X = \Delta a + \Delta b$$

अन्तर में भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि $= \dfrac{\Delta X}{X} \times 100\% = \dfrac{\Delta a + \Delta b}{a - b} \times 100\%$

अर्थात्, भौतिक राशियों के योगफल अथवा अन्तर में अधिकतम सम्भावित त्रुटियाँ, सम्बन्धित राशियों की सम्भावित त्रुटियों के योग के बराबर होती है।

(3) गुणन में त्रुटियों का संयोजन (Combination of Errors in Multiplication)—यदि परिणामी राशि X अन्य भौतिक राशियों a तथा b के मध्य गुणन के सम्बन्ध पर आधारित हो, अर्थात्

$$X = a \times b$$

तो, माप की त्रुटियाँ सम्मिलित करने पर

$$X \pm \Delta X = (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b)$$

$$= ab \pm a\Delta b \pm b\Delta a \pm \Delta a \Delta b$$

या $$\pm \Delta X = \pm a\Delta b \pm b\Delta a$$

($\Delta a . \Delta b$ नगण्य होने के कारण छोड़ दिया गया है)

अत: X के आकलन में अधिकतम सम्भावित त्रुटि

$$\Delta X = a\Delta b + b\Delta a$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

गुणनफल में अधिकतम भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि

$$\frac{\Delta X}{X}\times 100\% = \frac{a\Delta b + b\Delta a}{ab}\times 100\% = \left(\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}\right)\times 100\%$$

(4) भाग में त्रुटियों का संयोजन (Combination of Errors in Division)—यदि परिणामी राशि X अन्य भौतिक राशियों a तथा b के मध्य भाग के सम्बन्ध पर आधारित हो, अर्थात्

$$X = a/b$$

तो, माप में त्रुटियाँ सम्मिलित करने पर

$$X \pm \Delta X = \frac{a \pm \Delta a}{b \pm \Delta b}$$

$$= (a \pm \Delta a)\,(b \pm \Delta b)^{-1}$$

$$= a\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right)\frac{1}{b}\left(1 \pm \frac{\Delta b}{b}\right)^{-1}$$

$$= \frac{a}{b}\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right)\left(1 \pm \frac{\Delta b}{b}\right)^{-1}$$

$\left(1 \pm \frac{\Delta b}{b}\right)^{-1}$ का द्विपद प्रमेय द्वारा विस्तार करने तथा उच्च घातों के पदों को नगण्य मानकर छोड़ने पर*

$$= \frac{a}{b}\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right)\left(1 \mp \frac{\Delta b}{b}\right)$$

अत: $$X \pm \Delta X = \frac{a}{b}\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a} \mp \frac{\Delta b}{b} \pm \frac{\Delta a \Delta b}{ab}\right)$$

पुन: $\frac{\Delta a \Delta b}{ab}$ को नगण्य लेने पर

$$X \pm \Delta X = \frac{a}{b}\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a} \mp \frac{\Delta b}{b}\right)$$

या $$X \pm \Delta X = X\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a} \mp \frac{\Delta b}{b}\right) \qquad \left(\because\ X = \frac{a}{b}\right)$$

X से दोनों पक्षों को भाग देने पर

$$1 \pm \frac{\Delta X}{X} = 1\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a} \mp \frac{\Delta b}{b}\right)$$

अत: X के आकलन में अधिकतम सोपक्ष या भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि

$$\frac{\Delta X}{X} = \left(\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}\right)$$

$$*\left(\because 1 \pm \frac{\Delta b}{b}\right)^{-1} = 1 \pm (-1)\frac{\Delta b}{b} \pm \frac{(-1)(-2)}{2}\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 \pm \ldots.$$

$$= 1 \mp \frac{\Delta b}{b} \pm \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 \pm \ldots.$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

भागफल में अधिकतम भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि

$$\frac{\Delta X}{X} \times 100\% = \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right) \times 100$$

अर्थात्, भौतिक राशियों के गुणनफल तथा भागफल में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि, सम्बन्धित राशियों की भिन्नात्मक त्रुटियों के योग के बराबर होती है।

(5) त्रुटियों के संयोजन में घातों का प्रभाव (Effect of Powers in Combination of Errors)—यदि परिणामी राशि X, अन्य भौतिक राशि A की घात m पर इस प्रकार आधारित हो

$$X = A^m$$

तो, दोनों पक्षों का अवकलन (differentiation) करने पर

$$\Delta X = mA^{m-1}\Delta A$$

$X = A^m$ से भाग देने पर $\quad \frac{\Delta X}{X} = m\,\frac{\Delta A}{A}$

अर्थात् **घात पर आधारित गणना में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि ज्ञात करने के लिए, सम्बन्धित राशि की भिन्नात्मक त्रुटि को उस राशि के घात (Power) से गुणा कर देते हैं।**

अत: **मापन में जिस राशि की घात सबसे उच्च हो उस राशि को अत्यन्त सावधानीपूर्वक मापना चाहिए क्योंकि उस राशि के परिणाम में त्रुटि राशि के घात की गुना हो जाती है।**

उदाहरणत : माना किसी घन की भुजा मीटर पैमाने से नापने पर $l = 50$ सेमी प्राप्त होता है। मीटर पैमाने का अल्पतमांक $= 0{\cdot}1$ सेमी है।

अत: भुजा की लम्बाई (l) मापने में प्रतिशत त्रुटि

$$= \frac{0{\cdot}1}{50} \times 100 = 0{\cdot}2\%$$

अब घन के एक फलक (Face) का क्षेत्रफल

$$(l)^2 = 50 \text{ सेमी} \times 50 \text{ सेमी} = 2500 \text{ सेमी}^2$$

यदि मापन की त्रुटि (अनिश्चितता) $0 \cdot 1$ सेमी (यन्त्र का अल्पतमांक) घन के एक फलक के क्षेत्रफल मापन में सम्मिलित कर ली जाए तो—

$$\text{प्रेक्षित क्षेत्रफल} = 50{\cdot}1 \text{ सेमी} \times 50{\cdot}1 \text{ सेमी}$$

$$= 2510{\cdot}01 \text{ सेमी}^2$$

अत: क्षेत्रफल मापने में प्रतिशत त्रुटि $= \dfrac{\text{यथार्थ मान} \sim \text{प्रेक्षित मान}^*}{\text{यथार्थ मान}} \times 100$

$$= \frac{2500 \sim 2510{\cdot}01}{2500} \times 100$$

$$= \frac{10{\cdot}01}{2500} \times 100$$

$$= 0{\cdot}4\%$$

---

* $\sim$ का अर्थ है Difference अर्थात् यथार्थ मान एवं प्रेक्षित मान में जो बड़ा हो उसमें से छोटा घटाया जाये परन्तु चिन्ह –ve नहीं लिया जायेगा।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

इसी प्रकार घन का आयतन ज्ञात करने में 0·6% की त्रुटि होगी। स्पष्ट है घन की भुजा की लम्बाई (l) मापन में भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि

$$= \frac{\Delta l}{l} \times 100 = 0{\cdot}2\%$$

तथा क्षेत्रफल (l^2) के मापन में भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि

$$= 2\frac{\Delta l}{l} \times 100 = 2 \times 0{\cdot}2\% = 0{\cdot}4\%$$

तथा, घन के आयतन ($l \times l \times l = l^3$) के मापन में भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि

$$= 3\frac{\Delta l}{l} \times 100 = 3 \times 0{\cdot}2\% = 0{\cdot}6\%$$

प्राप्त हो रही है, अर्थात् मापन में राशि की घात जितनी बढ़ रही है भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि भी उतने गुना हो रही है।

§ 1.27 अनुमेय त्रुटि (Permissible Error)

किसी प्रयोग में अन्तिम परिणाम प्राप्त करने के लिए भौतिक राशियों को विभिन्न मापक यन्त्रों से मापने की आवश्यकता हो सकती है। विभिन्न मापक यन्त्रों के, अल्पतमांकों के भिन्न निश्चित मानों के कारण उन यन्त्रों द्वारा ली गयी मापों में आयी सापेक्ष त्रुटियों (अर्थात् उनकी भिन्न यथार्थता)* के कारण, प्रयोग के फल में भिन्नात्मक त्रुटि आ जाती है जिसे अनुमेय त्रुटि कहते हैं। अन्य त्रुटियों के समान इसका भी अधिकतम मान ही ज्ञात किया जाता है।

यदि किसी प्रयोग में

$$X = \frac{A^a B^b}{C^c}$$

$$= A^a B^b C^{-c}$$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$$\log X = a \log A + b \log B - c \log C$$

इस समीकरण का आंशिक अवकलन (Partial differentiation) करने पर, X में अनुमेय त्रुटि**

$$\frac{\Delta X}{X} = a\frac{\Delta A}{A} + b\frac{\Delta B}{B} + c\frac{\Delta C}{C}$$

तथा अधिकतम अनुमेय प्रतिशत त्रुटि

$$\frac{\Delta X}{X} \times 100\% = \left(a\frac{\Delta A}{A} + b\frac{\Delta B}{B} + c\frac{\Delta C}{C}\right) \times 100\%$$

यह ध्यान देने योग्य है कि किसी प्रयोग के अन्तिम परिणाम में होने वाली अनुमेय त्रुटि में, उस प्रयोग में मापी जाने वाली विभिन्न राशियों की मापों में आयी सापेक्ष त्रुटियों के योगदान समान नहीं होते हैं। अत: जिस राशि की माप में सापेक्ष त्रुटि अधिकतम हो, उस राशि का मापन ऐसे यन्त्र से करना चाहिए जिसका अल्पतमांक अपेक्षाकृत कम हो अर्थात् यन्त्र की सूक्ष्मता (Precision) अधिक हो जिससे माप की यथार्थता (Accuracy) बढ़ जाये और अनुमेय त्रुटि अधिक प्रभावित न हो सके।

अनुमेय त्रुटि में, विभिन्न मापों के सापेक्ष त्रुटियों के आधार पर यह निश्चित करते हैं कि किस राशि के मापन में अधिक सावधानी आवश्यक है।

---

* यथार्थता, भिन्नात्मक त्रुटि के द्वारा निश्चित होती है—यथार्थता $\propto \frac{1}{\text{भिन्नात्मक त्रुटि}}$

** किन्हीं दो मापों की त्रुटियाँ मिलकर परस्पर निरस्त भी हो सकती हैं, किन्तु अनुमेय त्रुटि सदैव दोनों त्रुटियों के योगफल के बराबर ही मानी जानी उचित है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण के लिए यदि सूत्र $X = \frac{a^3 b}{c^2}$ में $a = 4{\cdot}248, b = 2{\cdot}0$ तथा $c = 0{\cdot}0213$ हो तो X के मान में अधिकतम सम्भावित सापेक्ष त्रुटि (अनुमेय त्रुटि)—

$$\left(\frac{\Delta X}{X}\right)_{\max} = 3\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + 2\frac{\Delta c}{c} \qquad ...(1)$$

a, b, c के दिये मानों से उनकी निरपेक्ष त्रुटि $\Delta a = 0{\cdot}001, \Delta b = 0{\cdot}1$ तथा $\Delta c = 0{\cdot}0001$ है। इनके मात्रक वही होंगे जो क्रमश: a, b, c के हैं।

समीकरण (1) में मान रखने पर

$$\left(\frac{\Delta X}{X}\right)_{\max} = 3 \times \frac{0{\cdot}001}{4{\cdot}248} + \frac{0{\cdot}1}{2{\cdot}0} + 2 \times \frac{0{\cdot}0001}{0{\cdot}0213}$$

$$= \frac{3}{4284} + \frac{1}{20} + \frac{2}{213}$$

अत: X के माप में अधिकतम सम्भावित प्रतिशत त्रुटि

$$\left(\frac{\Delta X}{X}\right)_{\max} \times 100 = \left(\frac{3}{4284} \times 100\right) + \left(\frac{1}{20} \times 100\right) + \left(\frac{2}{213} \times 100\right)$$

$$= 0{\cdot}07\% + 5{\cdot}0\% + 0{\cdot}93\%$$

$$= 6{\cdot}00\%$$

अत: स्पष्ट है कि इस प्रतिशत त्रुटि में अधिकतम योगदान (5 · 0%) b के मान के कारण है। अत: X में त्रुटि के इस मान को कम करने के लिए b की माप और अधिक यथार्थता से लेनी चाहिए अर्थात् ऐसे यन्त्र से लेनी चाहिए जिसकी सूक्ष्मता अधिक (अल्पतमांक कम) हो।

इस उदाहरण में a, b तथा c की मापों में सार्थक अंकों (significant figures) की संख्या क्रमश: चार, दो तथा तीन है। अर्थात् b सबसे काम यथार्थ है क्योंकि इसमें सार्थक अंकों की संख्या सबसे कम है।

यदि सभी राशियों की मापों में सार्थक अंकों की संख्या समान हो (अर्थात् उनकी सापेक्ष त्रुटियाँ लगभग समान हों) तो अनुमेय त्रुटि में उस राशि का योगदान सबसे ज्यादा होगा जिस राशि पर घात अधिकतम है।

§ 1.28 सार्थक अंक (Significant Figure)

किसी भी भौतिक राशि को एक सीमा तक ही यथार्थतापूर्वक मापा जा सकता है। किसी माप में जितने अधिक अंक होते हैं वह माप उतनी ही अधिक सूक्ष्म होती है। मापन में प्राप्त विश्वसनीय संख्या (सार्थक अंकों की संख्या) मापक यन्त्र के अल्पतमांक पर निर्भर करती है।

"उन अंकों की संख्या को, जिनके द्वारा किसी राशि को निश्चित रूप से व्यक्त किया जाता है, सार्थक अंक कहते हैं।"

"The digits that reflect the precision of the measurement are called significant figures."

माना किसी छड़ की लम्बाई (Length) वर्नियर कैलीपर्स से मापने पर 2 · 5 मिमी तथा स्क्रूगेज से मापने पर 2 · 53 मिमी प्राप्त होती है। स्पष्ट है उपरोक्त दोनों माप पूर्ण नहीं हैं, इन्हें यदि और अधिक सूक्ष्मता (कम अल्पतमांक वाले यन्त्र) से मापा जाय तो यह माप दशमलव के बाद तीसरे अथवा चौथे स्थान तक कुछ भी प्राप्त हो सकता है जो कि उस यन्त्र का अल्पतमांक होगा।

स्पष्ट है कि मापन द्वारा प्राप्त अंकों में इकाई (Unit) के अंक (यन्त्र के अल्पतमांक के स्थान पर स्थित अंक) संदिग्ध अंक (Doubtful figure) होते हैं,—शेष सभी अंक निश्चित अंक (Confirm figure) होते हैं, अत:

"किसी माप के प्रथम संदिग्ध अंक एवं समस्त निश्चित अंकों की कुल संख्या को सार्थक अंक कहते हैं।"

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

वास्तव में **"किसी माप में प्रत्येक वह अंक सार्थक होता है जो माप के सापेक्ष त्रुटि पर प्रभाव डालता है।"**
"A digit is significant if and only if it affects the relative errors."

उपरोक्त लिये गये माप में वर्नियर कैलीपर्स की माप में सार्थक अंकों की संख्या दो है, जिसमें 2 का अंक निश्चित अंक तथा 5 का अंक संदिग्ध अंक (यन्त्र के अल्पतमांक का स्थान) है, इसी प्रकार स्क्रूगेज की माप में सार्थक अंकों की संख्या तीन है जिसमें 2 तथा 5 का अंक निश्चित अंक तथा 3 का अंक संदिग्ध अंक (यन्त्र के अल्पतमांक का स्थान) है।

1.28.1 किसी माप में सार्थक अंक ज्ञात करना (Counting of Significant Figures in any Measurement)

किसी माप में सार्थक अंकों का ज्ञान निम्नलिखित नियमों के आधार पर होता है—

(1) सभी अशून्य अंक (Non-zero numbers) सार्थक अंक होते हैं। जैसे 46·3598 में 6 सार्थक अंक हैं।

(2) दो अशून्य अंकों (Non-zero numbers) के बीच समस्त शून्य अंक (Zero numbers) सार्थक अंक होते हैं। जैसे 600·8049 में 7 सार्थक अंक हैं।

(3) दशमलव बिन्दु के पूर्व यदि कोई अशून्य अंक (Non-zero number) न हो तो दशमलव बिन्दु के तुरन्त बाद के शून्य अंकों (Zero numbers) को छोड़कर संख्या में जितने अंक होते हैं, वे सभी सार्थक अंक होते हैं। जैसे— 0·002809 में 4 सार्थक अंक हैं।

(4) दशमलव बिन्दु के दायीं ओर किसी अशून्य अंक के बाद का शून्य सार्थक अंक होता है। जैसे 0·46920 में 5 सार्थक अंक हैं।

(5) यदि किसी संख्या में 10 की घात वाली संख्या का गुणा हो तो इसका प्रभाव सार्थक अंकों की संख्या पर नहीं पड़ता है। जैसे $6 \cdot 75 \times 10^3$ में 3 सार्थक अंक हैं।

(6) भिन्न मात्रक चुनने से सार्थक अंकों की संख्या नहीं बदलती है। जैसे यदि कोई माप 23 · 46 किमी हो तो अन्य मात्रकों में यह माप **23460** मी, **2346000** सेमी अथवा **23460000** मिमी होगी। यहाँ प्रत्येक माप में (चिन्हित) सार्थक अंकों की संख्या 4 है।

1.28.2 सार्थक अंकों का योग तथा अन्तर (Addition and Subtracstion of Significant Figures)

जोड़ी अथवा घटायी जाने वाली संख्याओं में जिस संख्या में दशमलव के पश्चात् सबसे कम अंक होता है, जोड़ने अथवा घटाने से प्राप्त फल (Result) को दशमलव के पश्चात् उतने ही स्थानों तक लिखते हैं।

उदाहरणत:

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 108 \text{ मी} \\ 17 \cdot 01 \text{ मी} \\ +6 \cdot 3 \text{ मी} \\ \hline 25 \cdot 418 \text{ मी} \end{array}$$

उपरोक्त उदाहरण में जोड़ी जाने वाली संख्याओं में 6 · 3 मी में दशमलव के पश्चात् एक स्थान तक मान है, अत: उपरोक्त जोड़ का उत्तर 25 · 4 मी है।

इसी प्रकार

$$\begin{array}{r} 46 \cdot 93 \text{ मिमी} \\ -8 \cdot 296 \text{ मिमी} \\ \hline 38 \cdot 634 \text{ मिमी} \end{array}$$

इस उदाहरण में 46 · 93 मिमी में दशमलव के पश्चात् दो स्थान तक अंक हैं, अत: उपरोक्त उत्तर 38 · 63 मिमी होगा।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

1.28.3 सार्थक अंकों का गुणा एवं भाग (Multiplication and Division of Significant Figures)

गुणा अथवा भाग की जाने वाली संख्याओं में जिस संख्या में सार्थक अंक सबसे कम होता है, गुणन अथवा भाग से प्राप्त फल (Result) को उसी न्यूनतम सार्थक अंक वाली संख्या के मान तक लिखते हैं।

उदाहरणत:

$2 \cdot 12$ सेमी $\times 1 \cdot 3$ सेमी $= 2 \cdot 756$ सेमी^{2} उपरोक्त उदाहरण में गुणन होने वाली संख्याओं में $1 \cdot 3$ सेमी में सार्थक अंकों की संख्या दो है जो कि न्यूनतम है, अत: प्राप्त गुणनफल $2 \cdot 7$ सेमी^{2} होगा (वास्तव में Round off करने पर यह मान $2 \cdot 8$ सेमी^{2} होगा)।

इसी प्रकार $\dfrac{3.612 \text{ ग्राम}}{0.74 \text{ सेमी}} = 4 \cdot 88108$ ग्राम/सेमी

इस उदाहरण में प्राप्त फल Round off करने पर $4 \cdot 9$ ग्राम/सेमी होगा।

§ 1.29 राउन्डिंग ऑफ (Rounding Off)

किसी माप के अथवा संख्याओं के जोड़, घटाना, गुणा अथवा भाग से प्राप्त फल के सार्थक अंकों को निश्चित रूप से व्यक्त करने के लिए कभी-कभी कुछ अंकों को छोड़ना पड़ता है। इसे **राउन्डिंग ऑफ** कहते हैं। राउन्डिंग ऑफ करने हेतु पहले सबसे दायें वाले अंक को छोड़ते (विलुप्त करते) हैं। यदि छोड़ी जाने वाली संख्या—

(1) **5 से अधिक हो तो उसके ठीक पहले वाली संख्या के मान में इकाई (1) की वृद्धि कर देते हैं।** जैसे, यदि $6 \cdot 547$ को तीन सार्थक अंकों में लिखना हो तो 7 के अंक को छोड़ना होगा, अत: यह संख्या $6 \cdot 55$ में राउन्ड ऑफ हो जायेगी।

(2) **5 से कम हो तो उसके ठीक पहले वाली संख्या के मान में कोई परिवर्तन नहीं करते हैं।** जैसे $6 \cdot 14$ को यदि दो सार्थक अंकों में लिखना हो तो 4 को छोड़ना होगा, अत: यह संख्या $6 \cdot 1$ में राउन्ड ऑफ हो जायेगी।

(3) **5 हो तो उसके ठीक पहले की संख्या यदि—**

(i) **सम संख्या (Even Number) है तो वह अपरिवर्तित रहती है।**

(ii) **विषम संख्या (Odd number) है तो उसके मान में इकाई (1) वृद्धि हो जाती है।**

जैसे 6·25 राउन्ड ऑफ होकर 6·2 हो जायेगी तथा 6·75 राउन्ड ऑफ होकर 6·8 हो जायेगी।

स्मरणीय बिन्दु (Points to be Remembered)

(1) मापन एक तुलनात्मक विधि है।

(2) मापन में किसी भौतिक राशि का परिमाण, मापन के लिए चुने गये मात्रक तथा संगत संख्यात्मक मान के गुणनफल के बराबर होता है, जो सदैव नियत रहता है, अर्थात् $n|u| =$ नियतांक, अथवा $n_1|u_1| = n_2|u_2|$

(3) मूल राशियाँ सात— लम्बाई (m), द्रव्यमान (kg), समय (s), वैद्युत धारा (A), तापक्रम (K), ज्योति तीव्रता (Cd), पदार्थ की मात्रा (mol) हैं।

(4) दो पूरक मूल राशियाँ—कोण (rad) तथा घनकोण (sr) हैं।

• जो संख्याएँ गिनकर प्राप्त होती हैं अर्थात् जो किसी मापक यन्त्र की सहायता से नहीं प्राप्त की जाती हैं, उनकी सार्थकता अनन्त (Infinite significant) होती है।

• किसी मापन में भिन्नात्मक त्रुटि का मान उस मापन में सार्थक अंकों की संख्या पर निर्भर करता है—

$$\text{भिन्नात्मक अथवा सापेक्ष त्रुटि} \propto \frac{1}{\text{सार्थक अंकों की संख्या}}$$

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(5) किसी व्युत्पन्न राशि का विमीय सूत्र वह व्यंजक है जो यह बताता है कि उस व्युत्पन्न राशि में कौन-कौन सी मूल राशि किस प्रकार शामिल है।

(6) विमायें वह घातें हैं जो किसी राशि को व्यक्त करने के लिए मूल राशियों पर लगाई जाती हैं।

(7) कोई भौतिक राशि मात्रकयुक्त होने पर भी विमाहीन हो सकती है जैसे कोण, घन कोण, लेंस की क्षमता आदि, परन्तु विमीय होने पर मात्रकहीन नहीं हो सकती है।

(8) यह आवश्यक नहीं है कि यदि भौतिक राशियों के मात्रक तथा विमीय सूत्र समान हों तो राशियाँ भी समान होंगी, जैसे— कार्य, ऊर्जा, बलयुग्म आदि।

(9) शुद्ध संख्याएँ, शुद्ध अनुपात, कोण, चरघातांकी पद, त्रिकोणमितीय फलन, लघुगणक पद विमाहीन होती हैं अर्थात् $1, 2, 3, ..., \pi, \theta, \sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, e^x, \log x$ आदि सभी विमाहीन हैं।

(10) किसी भौतिक समीकरण के जिन पदों में + (धन) अथवा − (ऋण) का चिह्न होता है उनके विमीय सूत्र समान होते हैं।

(11) किसी समीकरण के विमीय दृष्टि से सत्य होने के लिए इसके दोनों पक्षों में प्रत्येक पद का विमीय सूत्र समान होना चाहिए। यह विमा की समांगीयता का सिद्धान्त कहलाता है।

(12) किसी भौतिक राशि के परिमाण को एक मात्रक पद्धति से दूसरे मात्रक पद्धति में बदलने के लिए

$$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^2$$ सूत्र का प्रयोग करते हैं।

(13) यदि कोई भौतिक राशि X अन्य राशियों p, q, r निर्भर करती हो तो $X \propto p^a q^b r^c$, समीकरण से दोनों पक्षों के विमाओं की तुलना करके a, b, c के मान ज्ञात किये जा सकते हैं।

(14) विमीय विधि के प्रयोग से—

(i) विमाहीन समानुपाती नियतांक k का मान नहीं निकाला जा सकता है, इसे प्रयोग द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

(ii) जोड़ने तथा घटाने सम्बन्धी पदों वाले सूत्र का निगमन नहीं किया जा सकता है।

(iii) तीन से अधिक राशियों पर निर्भर सूत्र भी नहीं प्राप्त किये जा सकते हैं।

(iv) चरघातांकी, लघुगणकीय तथा त्रिकोणमितीय पदों वाले सम्बन्ध भी स्थापित नहीं किये जा सकते हैं।

(15) मापक यन्त्र द्वारा यथार्थतापूर्वक मापी गयी छोटी से छोटी माप यन्त्र का अल्पतमांक कहलाती है।

(16) किसी मापी गयी राशि में अनिश्चितता (Uncertainty) मापक यन्त्र के अल्पतमांक के बराबर होती है।

(17) किसी माप की वास्तविक मान से निकटता को माप की यथार्थता कहते हैं।

(18) मापक यन्त्र का अल्पतमांक माप की सूक्ष्मता दर्शाता है।

(19) मापन में त्रुटियाँ दो प्रकार की होती हैं—

(i) क्रमबद्ध त्रुटियाँ—ज्ञात कारणों से, नियन्त्रण-योग्य होती हैं।

(ii) अनिश्चित त्रुटियाँ—अज्ञात कारणों से, नियंत्रित नहीं की जा सकती हैं।

(20) किसी राशि के कई प्रेक्षणों के मानों का समान्तर माध्य ही उस राशि का यथार्थ मान (absolute value) या वास्तविक मान या सत्य मान (True value or real value) या माध्य मान (Mean value) कहलाता है—

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} ai$$

(21) किसी माप में निरपेक्ष/परम या सम्भावित त्रुटि, मापक यन्त्र के अल्पतमांक के बराबर होता है। इसका वही मात्रक होता है जो माप का होता है अर्थात् यह विमीय राशि है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(22) सापेक्ष/आपेक्षिक या भिन्नात्मक त्रुटि $\left(=\frac{\Delta X}{X}\right)$ का कोई मात्रक नहीं होता है, अर्थात् यह विमाहीन राशि होती है।

(23) राशियों के योग तथा अन्तर में अधिकतम सम्भावित त्रुटि, सम्बन्धित राशियों की सम्भावित त्रुटियों के योग के बराबर होती है।

(24) राशियों के गुणन तथा भागफल में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि, सम्बन्धित राशियों की भिन्नात्मक त्रुटियों के योग के बराबर होती है।

(25) यथार्थता $\propto \frac{1}{\text{सापेक्ष त्रुटि}} \propto$ सार्थक अंकों की संख्या।

(26) घात पर आधारित गणना में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि, सम्बन्धित राशि की भिन्नात्मक त्रुटि को उस राशि के घात से गुणा कर प्राप्त करते हैं।

(27) किसी माप में विश्वसनीय अंकों की संख्या **सार्थक अंक** (Significant figure) कहलाती है।

(28) परिशुद्धता $\propto \frac{1}{\text{यन्त्र का अल्पतमांक}}$

(29) यदि कई मापों में सार्थक अंकों की संख्या समान हो, तो दशमलव को छोड़ते हुए अधिकतम माप में भिन्नात्मक त्रुटि न्यूनतम तथा न्यूनतम माप में अधिकतम होगी।

(30) प्रायोगिक प्रतिशत त्रुटि $= \frac{\text{प्रमाणिक मान } \sim \text{ प्रायोगिक मान}}{\text{प्रमाणिक मान}} \times 100\%$

(31) त्रुटियों के अधिकतम मापन में त्रुटियाँ सदैव जुड़ती हैं।

साधित आंकिक उदाहरण
(Solved Numerical Examples)

उदाहरण 14 : सार्वत्रिक गैस नियतांक (R) का मात्रक ज्ञात कीजिए।

हल—गैस समीकरण के अनुसार,

$$PV = nRT$$

अत:
$$R = \frac{PV}{nT}$$

$$R \text{ का मात्रक} = \left(\frac{PV}{nT}\right) \text{ का मात्रक}$$

$$= \left(\frac{P \text{ का मात्रक} \times V \text{ का मात्रक}}{n \text{ का मात्रक} \times T \text{ का मात्रक}}\right)$$

$$= \frac{\frac{\text{न्यूटन}}{\text{मी}^2} \times \text{मी}^3}{K \text{ मोल}}$$

$$= \frac{\text{न्यूटन मी}}{K \text{ मोल}}$$

$$= \textbf{जूल}/K \textbf{ मोल}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 15 : वान्डर वाल गैस समीकरण $\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$ के नियतांक a तथा b की विमायें ज्ञात कीजिए। **(UPBTE 2001)**

हल—दिये हुए समीकरण में P, V तथा T क्रमश: दाब, आयतन तथा ताप हैं। विमाओं की समांगता के सिद्धान्त के अनुसार, इस समीकरण में $\frac{a}{V^2}$ तथा P के विमीय सूत्र समान हैं क्योंकि समान विमाओं वाली राशियों को ही आपस में जोड़ा अथवा घटाया जा सकता है।

अत: $\frac{a}{V^2}$ का विमीय सूत्र = P का विमीय सूत्र

a का विमीय सूत्र = P का विमीय सूत्र $\times V^2$ का विमीय सूत्र

$$= [ML^{-1}T^{-2}] \times [M^0L^3T^0]^2$$

$$= [ML^{-1}T^{-2}]\ [M^0L^6T^0]$$

अत: a का विमीय सूत्र = $[ML^5T^{-2}]$

इसी प्रकार b का विमीय सूत्र = V का विमीय सूत्र

अत: b का विमीय सूत्र = $[M^0L^3T^0]$

अत: a तथा b की विमायें M, L तथा T में क्रमश: (1, 5, – 2) तथा (0, 3, 0) हैं।

उदाहरण 16 : किसी कण का वेग v, समीकरण $v=at+\frac{b}{t+c}$ के अनुसार समय t पर निर्भर है। नियतांक a, b तथा c की विमायें ज्ञात कीजिए।

हल—विमाओं की समांगता के सिद्धान्त के अनुसार,

at का विमीय सूत्र = v का विमीय सूत्र

$$a \text{ का विमीय सूत्र} = \frac{v \text{ का विमीय सूत्र}}{t \text{ का विमीय सूत्र}}$$

$$= \frac{[M^0LT^{-1}]}{[M^0L^0T]}$$

अत: a का विमीय सूत्र = $[M^0LT^{-2}]$

इसी प्रकार $(t+c)$ में c का विमीय सूत्र = t समय का विमीय सूत्र

अत: c का विमीय सूत्र = $[M^0L^0T]$

इसी प्रकार $\frac{b}{t+c}$ का विमीय सूत्र = v का विमीय सूत्र

या $$\frac{b \text{ का विमीय सूत्र}}{t(\text{समय}) \text{ का विमीय सूत्र}} = v \text{ का विमीय सूत्र}$$

b का विमीय सूत्र = v का विमीय सूत्र $\times t$ (समय) का विमीय सूत्र

$$= [M^0LT^{-1}] \times [M^0L^0T]$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: b का विमीय सूत्र $= [M^0LT^0]$

इस प्रकार $[a] = [M^0LT^{-2}]$

$[b] = [M^0LT^0]$

तथा $[c] = [M^0L^0T]$

अत: a, b तथा c की विमायें M, L तथा T में क्रमश: (0, 1, – 2), (0, 1, 0) तथा (0, 0, 1) हैं।

उदाहरण 17 : ऊष्मा चालकता गुणांक (K) का मात्रक ज्ञात कीजिए।

हल—सूत्र $$Q = \frac{KA(\theta_1 - \theta_2).t}{x} \text{ से}$$

$$K = \frac{Q.x}{A(\theta_1 - \theta_2).t}$$

अत: $$K \text{ का मात्रक} = \left(\frac{Q.x}{A(\theta_1 - \theta_2).t}\right) \text{ का मात्रक}$$

$$= \frac{\text{जूल मी}}{\text{मी}^2 \times {}^\circ\text{C} \times \text{से}}$$

$$= \text{जूल/मी } {}^\circ\text{C से}$$

उदाहरण 18 : द्रव तल पर बनी λ तरंगदैर्घ्य वाली तरंग का वेग निम्न सूत्र से दिया जाता है—

$$v = \left[\frac{g\lambda}{2\pi}\right]^n$$

विमीय विश्लेषण विधि द्वारा n का मान ज्ञात कीजिए। **(UPBTE 2004)**

हल—दिये गये समीकरण के दोनों पक्षों के विमीय सूत्र लिखने पर,

वेग का विमीय सूत्र = (गुरुत्वीय त्वरण का विमीय सूत्र × तरंगदैर्घ्य का विमीय सूत्र)^n

$$[M^0LT^{-1}] = ([M^0LT^{-2}] \times [M^0LT^0])^n$$

$$[M^0LT^{-1}] = [M^0L^2T^{-2}]^n$$

$$[M^0LT^{-1}] = [M^0LT^{-1}]^{2n}$$

विमीय समांगीयता सिद्धान्त के अनुसार समीकरण के दोनों पक्षों में पदों के आधार समान हैं, अत: उनकी विमायें (घातें) भी समान होंगी, अत: $1 = 2n$

या $$n = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 19 : सरल आवर्त गति से दोलन करने वाले पिण्ड की ऊर्जा E, उसके द्रव्यमान m, आवृत्ति n तथा दोलन के आयाम a पर निर्भर करती है। विमीय विश्लेषण विधि द्वारा सिद्ध कीजिए— $E \propto mn^2 a^2$ **(UPBTE 1998)**

हल—माना $$E \propto m^x n^y a^z$$

या $$E = k\, m^x n^y a^z \quad \ldots(1)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

दोनों पक्षों की भौतिक राशियों के विमीय सूत्र लिखने पर

$$[ML^2T^{-2}] = [ML^0T^0]^x\,[M^0L^0T^{-1}]^y\,[M^0LT^0]^z$$

$$= [M^xL^0T^0][M^0L^0T^{-y}][M^0L^zT^0]$$

$$[ML^2T^{-2}] = [M^xL^zT^{-y}]$$

विमीय सन्तुलन के लिए समीकरण के दोनों पक्षों की विमायें समान होनी चाहिएँ, अत: विमाओं की तुलना करने पर,

$$x = 1,\ z = 2,\ -y = -2 \text{ या } y = 2$$

समीकरण (1) से x, y, z के मान रखने पर

$$E = k\, m^1\, n^2\, a^2$$

या

$$E \propto m\, n^2\, a^2$$

उदाहरण 20 : η श्यानता गुणांक वाले द्रव में r त्रिज्या की एक गोली, एक समान वेग v से गिर रही है। विमीय विधि द्वारा गोली पर लगने वाले श्यान बल F के लिए व्यंजक स्थापित कीजिए। **(UPBTE 1992)**

हल—प्रश्नानुसार, माना गोली पर लगने वाला श्यान बल F, गोली की त्रिज्या r के घात a, वेग v के घात b तथा द्रव के श्यानता गुणांक η के घात c पर निर्भर करता है।

अत:

$$F \propto r^a\, v^b\, \eta^c$$

या

$$F = k\, r^a\, v^b\, \eta^c \qquad \ldots(1)$$

जहाँ k विमाहीन समानुपाती नियतांक है।

समीकरण (1) के दोनों पक्षों में भौतिक राशियों के विमीय सूत्र लिखने पर

$$[MLT^{-2}] = [M^0LT^0]^a[M^0LT^{-1}]^b[ML^{-1}T^{-1}]^c$$

$$= [M^0L^aT^0][M^0L^bT^{-b}][M^cL^{-c}T^{-c}]$$

या

$$[MLT^{-2}] = [M^cL^{a+b-c}T^{-b-c}]$$

समीकरण के दोनों पक्षों में विमाओं की तुलना करने पर

$$c = 1 \qquad \ldots(2)$$

$$a + b - c = 1 \qquad \ldots(3)$$

$$-b - c = -2 \qquad \ldots(4)$$

समीकरण (2), (3) तथा (4) को हल करने पर

$$a = 1$$

$$b = 1$$

$$c = 1$$

a, b तथा c के मानों को समीकरण (1) में रखने पर

$$F = k\, r^1\, v^1\, \eta^1$$

या

$$\boldsymbol{F = k\, r\, v\, \eta}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 21 : एक बल का समय के साथ परिवर्तन निम्न सम्बन्ध के अनुसार होता है:

$$F = A \sin(pt - \theta)$$

A/p की विमा ज्ञात कीजिए। **(UPBTE 2011)**

हल—समीकरण $F = A \sin(pt - \theta)$ में त्रिकोणमितीय पद $\sin(pt - \theta)$ विमाहीन राशि है, इसलिए A का विमीय सूत्र बल (F) के विमीय सूत्र के समान होगा, चूँकि pt भी विमाहीन राशि है, अत: pt को इकाई मानते हुए

p का विमीय सूत्र $\times$ t का विमीय सूत्र $= 1$

या $$p \text{ का विमीय सूत्र} = \frac{1}{t \text{ का विमीय सूत्र}}$$

$$= \frac{1}{[M^0L^0T^1]}$$

$$= [M^0L^0T^{-1}]$$

अत: $$A/p \text{ का विमीय सूत्र} = \frac{F \text{ का विमीय सूत्र}}{p \text{ का विमीय सूत्र}}$$

$$= \frac{[MLT^{-2}]}{[M^0L^0T^{-1}]}$$

अत: A/p का विमीय सूत्र $= [MLT^{-1}]$

प्रश्नानुसार, **A/p के विमीय सूत्र में M, L तथा T की विमायें क्रमश: (1, 1, – 1) हैं।**

उदाहरण 22 : m द्रव्यमान का पिण्ड किसी आदर्श स्प्रिंग के सिरे पर लटका हुआ सरल आवर्त गति कर रहा है। स्प्रिंग का बल नियतांक k तथा पिण्ड का दोलन काल T है। विमीय विधि से सिद्ध कीजिए कि $T = 2\pi\frac{m}{k}$ समीकरण अशुद्ध है। इसका सही रूप स्थापित कीजिए।

हल—यदि समीकरण, $T = 2\pi\frac{m}{k}$ शुद्ध है तो विमाओं की समांगता के सिद्धान्त के अनुसार इसके दोनों पक्षों के पदों के विमीय सूत्र एक समान होने चाहिएँ।

अत: बायें पक्ष का विमीय सूत्र $= [M^0L^0T]$

तथा दायें पक्ष का विमीय सूत्र $= \frac{[ML^0T^0]}{[ML^0T^{-2}]}$

$$= [M^0L^0T^2]$$

चूँकि दोनों पक्षों के विमीय सूत्र समान नहीं हैं, अत: समीकरण $T = 2\pi\frac{m}{k}$ अशुद्ध है।

$T = 2\pi\frac{m}{k}$ का शुद्ध रूप ज्ञात करना—

माना $$T \propto m^a k^b$$

अथवा $$T = A\, m^a\, k^b \quad \ldots(1)$$

जहाँ A एक विमाहीन समानुपाती नियतांक है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

समीकरण के दोनों पक्षों में पदों के विमीय सूत्र लिखने पर

$$[M^0L^0T] = [ML^0T^0]^a[ML^0T^{-2}]^b$$

$$= [M^aL^0T^0][M^bL^0T^{-2b}]$$

अथवा $$[M^0L^0T] = [M^{a+b}L^0T^{-2b}]$$

विमीय सन्तुलन के लिए दोनों पक्षों के पदों की विमायें समान होनी चाहिएँ। अत: विमाओं की तुलना करने पर

$$a + b = 0 \quad ...(2)$$

$$-2b = 1 \quad ...(3)$$

समीकरण (2) तथा (3) हल करने पर

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{तथा} \quad b = -\frac{1}{2}$$

a तथा b का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$T = A\, m^{1/2}\, k^{-1/2}$$

$$= A\sqrt{\frac{m}{k}}$$

प्रयोगों के आधार पर $A = 2\pi$

अत: शुद्ध सूत्र $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

उदाहरण 23 : विमीय विधि द्वारा 1 km/h को m/s में परिवर्तित कीजिए।

हल—

$$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c \quad ...(1)$$

वेग का विमीय सूत्र $[M^0LT^{-1}]$ है। अत: विमीय सूत्र $[M^aL^bT^c]$ से तुलना करने पर

$$a = 0, b = 1, c = -1$$

अत: समीकरण (1) से

$$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^0\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^1\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^{-1}$$

अथवा

$$n_2 = n_1\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^1\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^{-1} \quad ...(2)$$

दिया है :

$n_1 = 1$ $\qquad$ $n_2 = ?$

$L_1 = 1$ किमी $\qquad$ $L_2 = 1$ मी

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$T_1 = 1$ घण्टा $\qquad T_2 = 1$ सेकण्ड

दिये गये मान समीकरण (2) में रखने पर

$$n_2 = 1\left[\frac{1 \text{ किमी}}{1 \text{ मीटर}}\right]\left[\frac{1 \text{ घण्टा}}{1 \text{ सेकण्ड}}\right]^{-1}$$

$$= 1\left[\frac{1000 \text{ मी}}{1 \text{ मी}}\right]^{1}\left[\frac{60\times 60 \text{ से}}{1 \text{ से}}\right]^{-1}$$

$$= 1\ (10^3)\ (3600)^{-1}$$

$$= 0{\cdot}277$$

अत: $\qquad$ **1 km/h = 0·277 m/s**

उदाहरण 24 : द्रव स्थैतिक दाब (Hydrostatic pressure) द्रव के मुक्त सतह से गहराई h, द्रव के घनत्व ρ तथा गुरुत्वीय त्वरण g पर निर्भर करता है। विमीय विधि द्वारा द्रव स्थैतिक दाब P हेतु व्यंजक स्थापित कीजिए।

हल—माना, द्रव स्थैतिक दाब P, द्रव की गहराई h के a घात पर, घनत्व ρ के घात b तथा गुरुत्वीय त्वरण g के घात c पर निर्भर करता है, अर्थात्—

$$P \propto h^a \rho^b g^c$$

या $\qquad P = k\, h^a \rho^b g^c \qquad ...(1)$

जहाँ k एक विमाहीन समानुपाती स्थिरांक है।

दोनों पक्षों के पदों के विमीय सूत्र लिखने पर,

$$[ML^{-1}T^{-2}] = [M^0LT^0]^a[ML^{-3}T^0]^b[M^0LT^{-2}]^c$$

$$= [M^0L^aT^0][M^bL^{-3b}T^0][M^0L^cT^{-2c}]$$

या $\qquad = [M^bL^{a-3b+c}T^{-2c}]$

विमीय सन्तुलन के लिए दोनों पक्षों के पदों की विमायें समान होनी चाहिएँ। अत: विमाओं की तुलना करने पर

$$b = 1 \qquad ...(2)$$

$$a - 3b + c = -1 \qquad ...(3)$$

तथा $\qquad -2c = -2 \qquad ...(4)$

उपरोक्त समीकरणों को हल करने पर

$$a = 1$$

$$b = 1$$

तथा $\qquad c = 1$

अत: a, b, c के मानों को समीकरण (1) में रखने पर

$$P = k\, h^1 \rho^1 g^1$$

या $\qquad P = k\, h\rho g$

प्रयोगों द्वारा $k = 1$ पाया गया है

अत: $\qquad P = h\rho g$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 25 : मीटर पैमाने द्वारा नापी गयी लम्बाइयाँ 50 · 0 सेमी तथा 25 · 0 सेमी हैं, दोनों मापों में कौन अधिक यथार्थ है और क्यों?

हल— 50 · 0 सेमी में निरपेक्ष त्रुटि = 00·1 सेमी

$\therefore$ 50 · 0 सेमी में सापेक्ष प्रतिशत त्रुटि $= \frac{00\cdot1}{50\cdot0}\times100\% = 0\cdot2\%$

तथा 25 · 0 सेमी में निरपेक्ष त्रुटि = 00·1 सेमी

$\therefore$ 25 · 0 सेमी में सापेक्ष प्रतिशत त्रुटि $= \frac{00\cdot1}{25\cdot0}\times100\% = 0\cdot4\%$

$\because$ यथार्थता $\propto \frac{1}{\text{सापेक्ष त्रुटि}}$

माप 50 · 0 सेमी में सापेक्ष प्रतिशत त्रुटि 0·2%, माप 25 · 0 सेमी में सापेक्ष प्रतिशत त्रुटि 0·4% से कम है। अत: माप 50·0 सेमी अधिक यथार्थ है।

उदाहरण 26 : किसी प्रयोग द्वारा वायु में ध्वनि का वेग 340 मी/से प्राप्त होता है। यदि समान भौतिक अवस्थाओं में इसका प्रमाणिक मान 332 मी/से हो तो प्रायोगिक प्रतिशत त्रुटि की गणना कीजिए।

हल— प्रायोगिक प्रतिशत त्रुटि $= \frac{\text{प्रमाणिक मान} \sim \text{प्रायोगिक मान}}{\text{प्रमाणिक मान}}\times100\%$

$= \frac{332 \sim 340}{332}\times100\%$

$= \frac{8}{332}\times100\%$

अत: **प्रायोगिक प्रतिशत त्रुटि = 2·41%**

उदाहरण 27 : यदि $Y = \frac{MgL}{\pi r^2 l}$, जहाँ $L = 3\cdot460$ मी, $M = 4\cdot00$ किग्रा, $l = 0\cdot068$ सेमी, तार की त्रिज्या $r = 0\cdot048$ सेमी तथा π और g नियतांक हैं, तो Y के मान में अधिकतम सम्भावित सापेक्ष त्रुटि की गणना कीजिए।

हल—सूत्र $Y = \frac{MgL}{\pi r^2 l}$

में अधिकतम सम्भावित प्रतिशत त्रुटि

$$\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)_{max}\times100 = \left(\frac{\Delta M}{M}\times100\right)+\left(\frac{\Delta L}{L}\times100\right)+\left(2\frac{\Delta r}{r}\times100\right)+\left(\frac{\Delta l}{l}\times100\right) \quad ...(1)$$

प्रश्नानुसार,

$M = 4\cdot00$ किग्रा	$\Delta M = 0\cdot01$ किग्रा
$L = 3\cdot460$ मी	$\Delta L = 0\cdot001$ मी
$r = 0\cdot048$ सेमी	$\Delta r = 0\cdot001$ सेमी
$l = 0\cdot068$ सेमी	$\Delta l = 0\cdot001$ सेमी

अत: समीकरण (1) से

$$\left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)_{max}\times100 = \left(\frac{0\cdot01}{4\cdot00}\times100\right)+\left(\frac{0\cdot001}{3\cdot460}\times100\right)+\left(2\times\frac{0\cdot001}{0\cdot048}\times100\right)+\left(\frac{0\cdot001}{0\cdot068}\times100\right)$$

$$= 0\cdot25\%+0\cdot028\%+4\cdot166\%+1\cdot470\%$$

अत: $\frac{\Delta Y}{Y}\times100 = 5\cdot914\%$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 28 : एक ठोस घन की भुजा की लम्बाई मापन में 2% तथा इसके द्रव्यमान मापन में 3% की भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि होती है। ठोस घन के घनत्व मापन में अधिकतम भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि की गणना कीजिए।

हल— प्रश्नानुसार, घन का आयतन $(V) =$ लम्बाई$^3 = (l)^3$ यदि द्रव्यमान m हो तो

घनत्व, $$\rho = \frac{m}{V}$$

या $$\rho = \frac{m}{l^3}$$

अत: घनत्व मापन में अधिकतम भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि

$$\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)\times 100\% = \left(\frac{\Delta m}{m}\times 100\%\right) + 3\times\left(\frac{\Delta l}{l}\times 100\%\right)$$

$$= 3\% + (3\times 2\%)$$

अत: $$\frac{\Delta\rho}{\rho}\times 100 = 9\%$$

उदाहरण 29 : किसी आयत की लम्बाई $(7\cdot5 \pm 0\cdot1)$ सेमी तथा चौड़ाई $(3\cdot6 \pm 0\cdot2)$ सेमी है। आयत का क्षेत्रफल अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि के साथ ज्ञात कीजिए।

हल— प्रश्नानुसार,

आयत की लम्बाई की माप $= l \pm \Delta l = (7\cdot5 \pm 0\cdot1)$ सेमी,

तथा, आयत की चौड़ाई की माप $= b \pm \Delta b = (3\cdot6 \pm 0\cdot2)$ सेमी

चूँकि आयत का क्षेत्रफल, $A = l \times b$ ...(1)

$= 7\cdot5$ सेमी $\times$ $3\cdot6$ सेमी

$= 27\cdot0$ सेमी^{2}

समीकरण (1) से आयत के क्षेत्रफल में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि

$$\frac{\Delta A}{A} = \pm\left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta b}{b}\right)$$

$$\frac{\Delta A}{27\cdot0} = \pm\left(\frac{0\cdot1}{7\cdot5} + \frac{0\cdot2}{3\cdot6}\right)$$

$$= \pm(0\cdot013 + 0\cdot055)$$

$$= \pm(0\cdot068)$$

अत: क्षेत्रफल में त्रुटि $\Delta A = \pm(0\cdot068)\times 27\cdot0$

$= \pm(1\cdot836) \approx \pm 1\cdot8$ सेमी^{2}

अत: आयत का क्षेत्रफल $A \pm \Delta A = (27\cdot0 \pm 1\cdot8)$ **सेमी^{2}**

उदाहरण 30 : दो प्रतिरोध $R_1 = (2 \pm 0\cdot2)\ \Omega$ तथा $R_2 = (4\cdot5 \pm 0\cdot3)\ \Omega$ के तुल्य प्रतिरोध का मान अधिकतम त्रुटि के साथ ज्ञात कीजिए जब वे—

(i) श्रेणी क्रम में जुड़े हों, तथा (ii) समान्तर क्रम में जुड़े हों।

हल— प्रश्नानुसार, दिया है : $R_1 = (2 \pm 0\cdot2)\ \Omega, R_2 = (4\cdot5 \pm 0\cdot3)\ \Omega$

(i) श्रेणी क्रम संयोजन—में तुल्य प्रतिरोध (R_s) हो तो

$$R_s = R_1 + R_2 \quad \text{... (1)}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$= (2+4\cdot5)\ \Omega$$
$$= 6\cdot5\ \Omega$$

यदि श्रेणी क्रम संयोजन में तुल्य प्रतिरोध में परम त्रुटि ΔR_S हो तो अधिकतम त्रुटि

$$\Delta R_S = \pm(\Delta R_1 + \Delta R_2)$$
$$= \pm(0\cdot2+0\cdot3)\ \Omega$$
$$= \pm(0\cdot5)\ \Omega$$

अत: त्रुटि सहित तुल्य प्रतिरोध

$$\boldsymbol{R_S \pm \Delta R_S = (6\cdot5 \pm 0\cdot5)\ \Omega}$$

(ii) समान्तर क्रम—में तुल्य प्रतिरोध R_P हो तो

$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \ldots(2)$$

या, $$\frac{1}{R_P} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4\cdot5}\right)\Omega$$

या, $$R_P = 1\cdot38\ \Omega$$

पुन: समान्तर क्रम में अधिकतम भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि प्राप्त करने के लिए, समीकरण (2) से

$$R_P^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$$

दोनों पक्षों का अवकलन (differentiation) करने पर

$$-R_P^{-2}dR_P = -R_1^{-2}dR_1 - R_2^{-2}dR_2$$

या $$\frac{dR_P}{R_P^2} = \frac{dR_1}{R_1^2} + \frac{dR_2}{R_2^2}$$

समीकरण को परम त्रुटि के रूप में लिखने पर

$$\frac{\Delta R_P}{R_P^2} = \frac{\Delta R_1}{R_1^2} + \frac{\Delta R_2}{R_2^2}$$

मान रखने पर

$$\frac{\Delta R_P}{(1\cdot38)^2} = \left(\frac{0\cdot2}{(2)^2} + \frac{0\cdot3}{(4\cdot5)^2}\right)\Omega$$

$$\frac{\Delta R_P}{1\cdot90} = \left(\frac{0\cdot2}{4} + \frac{0\cdot3}{20\cdot25}\right)\Omega$$

अत: $$\Delta R_P = 0\cdot12\ \Omega$$

अत: त्रुटि सहित तुल्य प्रतिरोध

$$\boldsymbol{R_P \pm \Delta R_P = (1\cdot38 \pm 0\cdot12)\ \Omega}$$

उदाहरण 31 : एक घड़ी का अल्पतमांक 0 · 2 सेकण्ड है। इसके द्वारा किसी दोलक के 20 दोलनों का समय 20 सेकण्ड मापा गया है। मापन में सापेक्ष प्रतिशत त्रुटि की गणना कीजिए।

हल—प्रश्नानुसार, $t = 20$ सेकण्ड, अल्पतामंक $= 0\cdot2$ सेकण्ड

अत: $$\Delta t = 0\cdot2 \text{ सेकण्ड}$$

अत: मापन में सम्भावित प्रतिशत त्रुटि $= \frac{\Delta t}{t} \times 100$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$= \frac{0\cdot2}{20}\times100$$

अत: **सम्भावित प्रतिशत त्रुटि = 1·0%**

उदाहरण 32 : किसी द्रव का प्रारम्भिक ताप $\theta_1 = (21\cdot6\pm0\cdot2)°C$ था। गर्म करने के पश्चात् उसका ताप $\theta_2 = (79\cdot5\pm0\cdot1)°C$ प्राप्त हुआ। ताप में वृद्धि की गणना त्रुटियों सहित कीजिए।

हल—द्रव के ताप में वृद्धि $\theta = \theta_2 - \theta_1$

$$= (79\cdot5-21\cdot6)°C$$

$$\theta = 57\cdot9°C$$

चूँकि दोनों तापक्रमों में परम त्रुटियाँ क्रमश: $\Delta\theta_1 = \pm0\cdot2°C$ तथा $\Delta\theta_2 = \pm0\cdot1°C$ हैं, अत: ताप वृद्धि के पश्चात् परम त्रुटियों का मान

$$\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2$$

$$= \pm(0\cdot2+0\cdot1)\ °C$$

$$\Delta\theta = \pm0\cdot3°C$$

अत: त्रुटि सहित ताप में वृद्धि

$$\theta \pm \Delta\theta = (57\cdot9\pm0\cdot3)°C$$

उदाहरण 33 : यदि किसी गोले के पृष्ठ क्षेत्रफल की माप में सापेक्ष प्रतिशत त्रुटि 2% हो तो गोले के आयतन मापन में सापेक्ष प्रतिशत त्रुटि की गणना कीजिए।

हल— गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल $A = 4\pi r^2$, जहाँ r गोले की त्रिज्या है।

प्रश्नानुसार, गोले के पृष्ठ क्षेत्रफल में सापेक्ष प्रतिशत त्रुटि

$$\frac{\Delta A}{A}\times100 = 2\frac{\Delta r}{r}\times100$$

दिया है $\frac{\Delta A}{A}\times100 = 2$

अत: $2 = 2\frac{\Delta r}{r}\times100$

अत: त्रिज्या मापन में सापेक्ष प्रतिशत त्रुटि

$$\frac{\Delta r}{r}\times100 = 1\%$$

गोले का आयतन $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

अत: आयतन मापन में सापेक्ष प्रतिशत त्रुटि

$$\frac{\Delta V}{V}\times100 = 3\left(\frac{\Delta r}{r}\times100\right)$$

$$= 3\times(1)$$

अत: **आयतन मापन में सापेक्ष प्रतिशत त्रुटि = 3%**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 34 : किसी प्रतिरोध R $(12 \pm 2)\ \Omega$ के सिरों पर $(18 \pm 0 \cdot 2)$ V का विभवान्तर उत्पन्न किया जाता है। प्रतिरोध में बहने वाली धारा का मान त्रुटि सहित ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है : $R \pm \Delta R = (12 \pm 2)\ \Omega, V \pm \Delta V = (18 \pm 0 \cdot 2)$ V

प्रश्नानुसार, $V = IR$ अत: $$I = \frac{V}{R} \quad ...(1)$$

मान रखने पर

$$I = \frac{18}{12}\text{ A}$$

$$I = 1 \cdot 5\text{ A}$$

प्राप्त धारा में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि, समीकरण (1) से

$$\frac{\Delta I}{I} = \pm\left(\frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta R}{R}\right)$$

मान रखने पर

$$\frac{\Delta I}{1 \cdot 5} = \pm\left(\frac{0 \cdot 2}{18} + \frac{2}{12}\right)\text{A}$$

अत: $$\Delta I = \pm 0 \cdot 266\text{ A} \approx \pm 0 \cdot 3\text{ A}$$

अत: त्रुटि सहित धारा का मान

$$I \pm \Delta I = (1 \cdot 5 \pm 0 \cdot 3)\text{ A}$$

उदाहरण 35 : किसी आयत की लम्बाई 11 मी तथा चौड़ाई 8·84 मी है। आयत का क्षेत्रफल सार्थक अंकों का सन्दर्भ लेते हुए, बताइये।

हल—दिया है, $l = 11$ मी

$b = 8 \cdot 84$ मी

∵ आयत का क्षेत्रफल, $A = l \times b$

$= 11 \times 8 \cdot 84$ मी^{2}

$= 97 \cdot 24$ मी^{2}

गुणन में सार्थक अकों के लिखने की विधि के अनुसार गुणनफल में सार्थक अंकों की संख्या, गुणन होने वाले संख्याओं में सबसे कम सार्थक अंकों वाली संख्या के बराबर होना चाहिए। अत: यहाँ प्राप्त उत्तर में दो सार्थक अंक ही होने चाहिएँ।

अत: राउन्ड ऑफ करने पर

$$A = 97\text{ मी}^2$$

उदाहरण 36 : एक तार की लम्बाई 25 · 5 सेमी नापी गयी है और त्रिज्या 1·02 मिमी है। इसके आयतन के मापन में भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि की गणना कीजिए। **(UPBTE 2013)**

हल—दिया है तार की लम्बाई $(l) = 25 \cdot 5$ सेमी,

अत: $\Delta l = 0 \cdot 1$ सेमी

त्रिज्या $(r) = 1 \cdot 02$ मिमी, $\Delta r = 0 \cdot 01$ मिमी

प्रश्नानुसार, तार का आयतन = अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल × लम्बाई

$$V = \pi r^2 \times l \quad ...(1)$$

AKO TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: समीकरण (1) से, आयतन मापन में भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि,

$$\frac{\Delta V}{V}\times 100\% = \left(2\times\frac{\Delta r}{r}\times 100\right)+\left(\frac{\Delta l}{l}\times 100\right)$$

मान रखने पर

$$\frac{\Delta V}{V}\times 100\% = 2\left(\frac{0\cdot 01}{1\cdot 02}\times 100\right)+\left(\frac{0\cdot 1}{25\cdot 5}\times 100\right)$$

$$= 1\cdot 96+0\cdot 39$$

अत: **आयतन मापन में भिन्नात्मक प्रतिशत त्रुटि = 2·35%**

उदाहरण 37 : 1·06 m व्यास वाले वृत्त के क्षेत्रफल की सार्थक अंकों में गणना करें। **(UPBTE 2015)**

हल—दिया है : वृत्त का व्यास, $d = 1\cdot 06\ \text{m}$

अत: वृत्त की त्रिज्या, $r = \frac{d}{2}$

$$= \frac{1\cdot 06}{2}\ \text{m} = 0\cdot 53\ \text{m}$$

∵ वृत्त का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$

$$= 3\cdot 14\times (0\cdot 53)^2$$

$$= 0\cdot 88247\ \text{m}^2$$

गुणन में सार्थक अंकों के लिखने की विधि के अनुसार गुणनफल में सार्थक अंकों की संख्या, गुणन होने वाले संख्याओं में सबसे कम सार्थक अंकों वाली संख्या के बराबर होनी चाहिए। अत: यहाँ प्राप्त उत्तर में दो सार्थक अंक ही होने चाहिए। अत: राउन्ड ऑफ करने पर

$$\boldsymbol{A = 0\cdot 88\ \text{m}^2}$$

अभ्यास (Exercises)

1. निम्न के विमीय सूत्र लिखिये—

(i) ऊष्मा चालकता गुणांक (Coefficient of Thermal conductivity) **(UPBTE 2001, 1998)**

(ii) ध्वनि तरंग की तीव्रता (Intensity of sound) **(UPBTE 2000, 1998)**

(iii) गुप्त ऊष्मा (Latent heat) **(UPBTE 2000)**

(iv) वेग प्रवणता (Velocity Gradient) **(UPBTE 2000)**

(v) दाब (Pressure) **(UPBTE 2001)**

(vi) ऊर्जा (Energy) **(UPBTE 2001)**

(vii) पृष्ठ तनाव (Surface Tension) **(UPBTE 2003)**

2. किसी भौतिक राशि की विमा, विमीय सूत्र तथा विमीय विश्लेषण से क्या तात्पर्य है? विमीय विश्लेषण की सीमायें बताइये। **(UPBTE 2011, 2010, 2009, 2003)**

3. विमीय विश्लेषण के गुण और दोषों का उल्लेख कीजिए। **(UPBTE 2013)**

4. विमीय समीकरण क्या है? विमीय समांगता के सिद्धान्त का उल्लेख कीजिए। **(UPBTE 2012)**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

5. बर्फ की गुप्त ऊष्मा 60 कैलोरी/ग्राम है। इसे जूल/किग्रा में व्यक्त कीजिए। **(उत्तर : $25 \cdot 08 \times 10^4$ जूल/किग्रा)**

6. समीकरण $v = E^n d^m$ में v किसी माध्यम में अनुदैर्घ्य तरंगों की चाल, E माध्यम की आयतन प्रत्यास्थता तथा d माध्यम का घनत्व है। विमीय विश्लेषण विधि द्वारा n तथा m के मान प्राप्त कीजिए। **(उत्तर : $n = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}$)**

7. पानी का पृष्ठ तनाव 65 डाइन/सेमी है। पृष्ठ तनाव का मान न्यूटन/मी में ज्ञात कीजिए। **(उत्तर : $6 \cdot 5 \times 10^{-2}$ न्यूटन/मी)**

8. भौतिक राशि की विमायें ज्ञात होने पर भी भौतिक राशि निश्चित (definite) नहीं हो सकती, क्योंकि विभिन्न भौतिक राशियों की विमायें आपस में समान हो सकती हैं। जैसे यदि किसी भौतिक राशि की विमा $[ML^2T^{-2}]$ है तो यह भौतिक राशि ऊर्जा अथवा कार्य अथवा बल-युग्म में से काई भी हो सकती है।

अर्थात् ऊर्जा = कार्य = बल-आघूर्ण

विमीय सूत्र लिखने पर $[ML^2T^{-2}] = [ML^2T^2] = [ML^2T^{-2}]$

विमीय दृष्टि से सही है परन्तु भौतिक दृष्टि से निरर्थक है—अर्थात् , **''विभिन्न भौतिक राशियों की विमायें समान होने पर भी यह आवश्यक नहीं है कि वे राशियाँ भौतिक तथा गणितीय दृष्टि से भी समान हों।''**

9. किसी द्रव में पूर्णत: डूबी हुई ठोस गोली पर लगने वाला उत्प्लावन बल (Buoyancy force) F_B, गोली के आयतन (Volume) V, द्रव के घनत्व (Density) ρ तथा गुरुत्वीय त्वरण (acceleration due to gravity) g पर निर्भर करता है। विमीय विधि से उत्प्लावन बल F_B के लिए व्यंजक स्थापित कीजिए। **(उत्तर : $F_B = k\rho g$)**

10. एक तनी तथा कम्पन करती डोरी की आवृत्ति n, डोरी की लम्बाई l, डोरी में तनाव T तथा डोरी की प्रति एकांक लम्बाई के द्रव्यमान m पर निर्भर करती है। विमीय विश्लेषण विधि द्वारा आवृत्ति 'n' के लिए व्यजंक स्थापित कीजिए।

(UPBTE 2002)

(उत्तर : $n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}$)

11. एक खिंची हुई डोरी में अनुप्रस्थ तरंगों की चाल 'v', तनाव 'T' और डोरी के प्रति इकाई द्रव्यमान 'm' पर निर्भर करती है। विमीय विधि से 'v', 'T' तथा 'm' में सम्बन्ध स्थापित कीजिए। **(UPBTE 2007)**

(उत्तर : $v = k\sqrt{\frac{T}{m}}$)

12. एक द्रव के श्यानता गुणांक का मान 10^{-2} प्वाइज है। इस मान को न्यूटन × सेकण्ड/मीटर^2 में परिवर्तित कीजिए।

(UPBTE 2009)

(उत्तर : 10^{-3} न्यूटन सेकण्ड/मी^{2})

13. विमीय विश्लेषण की उपयोगिता (Utility of Dimensional analysis) पर टिप्पणी लिखिये। **(UPBTE 2009)**

14. बलयुग्म के आघूर्ण और पृष्ठ तनाव के लिए विमीय सूत्र का निगमन कीजिए। **(UPBTE 2003)**

15. किसी वस्तु के जड़त्व आघूर्ण (I) के विमीय सूत्र को घूर्णीय गतिज ऊर्जा $E = \frac{1}{2} I\omega^2$ के माध्यम से ज्ञात कीजिए।

(उत्तर : I का विमीय सूत्र = $[ML^2T^0]$)

16. पृथ्वी का औसत घनत्व d, समीकरण $d = \frac{3g}{4RG}$ के द्वारा दिया गया है, जहाँ G सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक, R पृथ्वी की त्रिज्या तथा g गुरुत्वीय त्वरण है। इस समीकरण के विमीय रूप से सही होने की जाँच कीजिए।

(उत्तर : समीकरण सही है)

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

17. विमीय विधि द्वारा दर्शाइये कि किसी पिण्ड के संवेग परिवर्तन (ΔP) का मान समयान्तराल (Δt) तथा इस समयान्तराल में कार्यरत बल (F) के गुणनफल के बराबर होता है। **(उत्तर : $\Delta P = F \times \Delta t$)**
18. निरपेक्ष त्रुटि, सापेक्ष त्रुटि क्या हैं? उदाहरण सहित समझाइये।
19. यथार्थता तथा सूक्ष्मता से क्या तात्पर्य है?
20. सार्थक अंकों से आप क्या समझते हैं? मापन में इनका महत्व बताइये।
21. $5 \cdot 00$ सेमी, $0 \cdot 005$ सेमी तथा $50 \cdot 00$ सेमी में कौन सी माप अधिकतम यथार्थ है और क्यों?
(उत्तर : $50 \cdot 00$ सेमी, क्योंकि सार्थक अंकों की संख्या अधिकतम होने से सापेक्ष त्रुटि न्यूनतम होगी)
22. यदि गोले के व्यास में 2 प्रतिशत की त्रुटि है तो गोले के क्षेत्रफल तथा आयतन में कितने प्रतिशत की त्रुटि होगी? **(उत्तर : 4%, 6%)**
23. एक ठोस घन की भुजा मापने में 2 प्रतिशत की त्रुटि तथा द्रव्यमान मापने में 8 प्रतिशत की त्रुटि होती है। घन के पदार्थ के घनत्व की गणना में अधिकतम त्रुटि कितनी होगी? **(उत्तर : 14%)**
24. निम्न प्रेक्षणों में माप की अनिश्चितता बताइये—
(i) 8.92 मी (ii) 18.467 किग्रा **(उत्तर : $0 \cdot 01$ मी, $0 \cdot 001$ किग्रा)**
25. यदि $z = \dfrac{a^3 b^2}{c^4}$ किसी प्रयोग में प्रयुक्त सूत्र है, तो z के मान में अधिकतम सम्भावित प्रतिशत त्रुटि की गणना कीजिए, यदि $a = 2 \cdot 500$, $b = 2 \cdot 0$ तथा $c = 0 \cdot 360$ **(उत्तर : $11 \cdot 23\%$)**
26. एक सरल लोलक का दोलन काल $T = 2\pi\sqrt{\left(\dfrac{l}{g}\right)}$ है। यदि T की माप में भिन्नात्मक त्रुटि $\pm x$ तथा लम्बाई की माप में $\pm y$ हो तो g की माप में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि ज्ञात कीजिए। **(UPBTE 1999)**
(उत्तर : $2x + y$)
27. स्क्रूगेज द्वारा किसी तार का व्यास $0 \cdot 60$ सेमी मापा जाता है। यदि स्क्रूगेज का अल्पतमांक $0 \cdot 01$ सेमी हो तो माप में प्रतिशत त्रुटि की गणना कीजिए। **(उत्तर : $1 \cdot 66\%$)**
28. किसी प्रयोग में प्रतिरोध $R_1 = 5 \cdot 0 \pm 0 \cdot 2\ \Omega$ तथा $R_2 = 10 \cdot 0 \pm 0 \cdot 1\ \Omega$ हों तो प्रतिरोधों के श्रेणीक्रम तथा समान्तर क्रम संयोजन में तुल्य प्रतिरोध का मान प्रतिशत त्रुटि सहित ज्ञात कीजिए। **(उत्तर : $(15 \cdot 0 \pm 0 \cdot 3)\ \Omega, (3 \cdot 3 \pm 0 \cdot 09)\ \Omega$)**
29. एक कैलीपर्स का अल्पतमांक $0 \cdot 01$ सेमी है। इसका प्रयोग करके एक गुटके की माप 10 सेमी $\times$ 5 सेमी $\times$ 4 सेमी लिखा गया है। आयतन की अधिकतम संभावित त्रुटि की गणना कीजिए। **(UPBTE 2009)**
(उत्तर : $1 \cdot 1$ सेमी^{3})

आंकिक प्रश्नों के संक्षिप्त हल

(5) $60\dfrac{c}{g} = \dfrac{60 \times 4 \cdot 18}{1/1000}\dfrac{\text{J}}{\text{kg}} = 25 \cdot 08 \times 10^4\ \text{J/kg}$ ($\because Q$ कैलोरी $= 4 \cdot 18\, Q$ जूल)

(6) समीकरण $v = E^n d^m$ में भौतिक राशियों के विमीय सूत्र लिखने पर

$$[M^0LT^{-1}] = [ML^{-1}T^{-2}]^n [ML^{-3}T^0]^m$$

विमाओं की तुलना करने पर $n + m = 0, -n - 3m = 1, -2n = 1$

अत: $$n = \frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}$$

ARC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(7) पृष्ठ तनाव $= 65\frac{\text{डाइन}}{\text{सेमी}} = 65 \times \frac{10^{-5}\text{ न्यूटन}}{10^{-2}\text{ मीटर}} = \mathbf{6{\cdot}5 \times 10^{-2}}$ **न्यूटन/मीटर**

(8) $F_B \propto V^a \rho^b g^c \Rightarrow F_B = K V^a \rho^b g^c$

भौतिक राशियों के सूत्र लिखकर विमाओं की तुलना करने पर

$$[MLT^{-2}] = [M^0L^3T^0]^a [ML^{-3}T^0]^b [M^0LT^{-2}]^c$$

$$b = 1, 3a - 3b + c = 1, -2c = -2 \text{ अत: } a = 1, b = 1, c = 1$$

अत: $$\boldsymbol{F_B = kV\rho g}$$

(9) $n \propto l^a T^b m^c \Rightarrow n = K l^a T^b m^c$

भौतिक राशियों के विमीय सूत्र लिखकर विमाओं की तुलना करने पर

$$[M^0L^0T^{-1}] = [M^0LT^0]^a [MLT^{-2}]^b [ML^{-1}T^0]^c$$

$$b + c = 0, a + b - c = 0, -2b = -1 \text{ अत: } a = -1, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}$$

अत: $n = \frac{K}{P}\sqrt{\frac{T}{m}}$ प्रयोगों द्वारा $K = \frac{1}{2}$ **अत:** $\boldsymbol{n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{m}}}$

(10) $v \propto T^a m^b \Rightarrow v = kT^a m^b$

भौतिक राशियों के विमीय सूत्र लिखकर विमाओं की तुलना करने पर

$$[M^0LT^{-1}] = [MLT^{-2}]^a [ML^{-1}T^0]^b$$

$$a + b = 0, a - b = 1, -2a = -1 \text{ अत: } a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$$

अत: $$\boldsymbol{v = k\sqrt{\frac{T}{m}}}$$

(11) श्यानता गुणांक का विमीय सूत्र $[ML^{-1}T^{-1}]$ है अत: $a = 1,, b = -1, c = -1$

दिया है, $n_1 = 10^{-2}$, $M_1 = 1$ ग्राम, $L_1 = 1$ सेमी, $T_1 = 1$ सेकण्ड

$n_2 = ?$, $M_2 = 1$ किग्रा, $L_2 = 1$ मीटर, $T_2 = 1$ सेकण्ड

$= 1000$ ग्राम $= 100$ सेमी

अत: $$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$

$$= 10^{-2}\left[\frac{1}{1000}\right]\left[\frac{1}{100}\right]^{-1}\left[\frac{1}{1}\right]^{-1} \text{ न्यूटन सेकण्ड/मीटर}^2$$

$$= \mathbf{10^{-3}} \text{ न्यूटन सेकण्ड/मीटर}^2$$

(15) प्रश्नानुसार, समीकरण $d = \frac{3g}{4RG}$ में भौतिक राशियों के विमीय सूत्र लिखकर सरल करने पर

$$[ML^{-3}T^0] = [M^0LT^{-2}][M^0LT^0]^{-1}[M^{-1}L^3T^{-2}]^{-1}$$

$$[ML^{-3}T^0] = [ML^{-3}T^0]$$

∵ समीकरण के दोनों पक्षों की विमायें समान हैं अत: समीकरण सत्य है।

(16) प्रश्नानुसार, $\Delta P = F \times \Delta T$

दोनों पक्षों में भौतिक राशियों के विमीय सूत्र रखने पर

$$[MLT^{-1}] = [MLT^{-2}][M^0L^0T]$$

$$[MLT^{-1}] = [MLT^{-1}]$$

∵ दोनों पक्षों की विमायें समान हैं **अत: सिद्ध हुआ कि** $\boldsymbol{\Delta P = F \times \Delta T}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(21) प्रश्नानुसार, 5·00 सेमी में निरपेक्ष त्रुटि = 0·01 सेमी

$\therefore$ 5·00 सेमी में सापेक्ष प्रतिशत त्रुटि $= \frac{0\cdot01}{5\cdot00} \times 100\% = 0\cdot2\%$

इसी प्रकार 0·005 सेमी एवं 50·00 सेमी में सापेक्ष प्रतिशत त्रुटि क्रमश: 20% एवं 0·02%

अत: 50·00 सेमी की माप अधिक यथार्थ है, क्योंकि सार्थक अंकों की संख्या अधिक होने से सापेक्ष त्रुटि न्यूनतम होगी।

(22) $\because$ गोले का व्यास $(d) = 2\times$ गोले की त्रिज्या (x)

दिया है, $\frac{\Delta d}{d} \times 100 = 2\% \Rightarrow \frac{\Delta r}{r} \times 100 = 2\%$

अत: गोले के पृष्ठ क्षेत्रफल $S = 4\pi r^2$ में प्रतिशत त्रुटि

$$\frac{\Delta S}{S} \times 100 = 2\left(\frac{\Delta r}{r} \times 100\right) = \mathbf{4\%}$$

एवं, गोले के आयतन $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ में प्रतिशत त्रुटि

$$\frac{\Delta V}{V} \times 100 = 3\left(\frac{\Delta r}{r} \times 100\right) = \mathbf{6\%}$$

(23) घन के आयतन $(V = L^3)$ मापन में प्रतिशत त्रुटि $\frac{\Delta V}{V} \times 100 = 3\left(\frac{\Delta L}{L} \times 100\right) = 3 \times 2\% = 6\%$

अत: घन के पदार्थ के घनत्व की गणना में प्रतिशत त्रुटि

$$\frac{\Delta P}{P} \times 100 = \frac{\Delta m}{m} \times 100 + \frac{\Delta V}{V} \times 100 \qquad \left(\because\ m = PV \Rightarrow P = \frac{m}{V}\right)$$

$$= 8\% + 6\% = \mathbf{14\%}$$

(25) प्रश्नानुसार, $Z = \frac{a^3b^2}{c^4}$ एवं $a = 2\cdot500$ अत: $\Delta a = 0\cdot001$, $b = 2\cdot0$ अत: $\Delta b = 0\cdot1, c = 0\cdot360$ अत: $\Delta c = 0\cdot001$

$$\frac{\Delta Z}{Z} \times 100 = 3\left(\frac{\Delta a}{a} \times 100\right) + 2\left(\frac{\Delta b}{b} \times 100\right) + 4\left(\frac{\Delta c}{c} \times 100\right)$$

$$= \mathbf{11\cdot23\%}$$

(26) सूत्र $T = 2\pi \times \sqrt{\frac{\rho}{g}}$ से $g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$

अत: g की माप में अधिकतम भिन्नात्मक त्रुटि, $\frac{\Delta g}{g} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta T}{T}$

$$= \pm (y + \mathbf{2}x)$$

(27) मापन में सम्भावित प्रतिशत त्रुटि $= \frac{\Delta d}{d} \times 100$

$$= \frac{0\cdot01}{0\cdot60} \times 100 = \mathbf{1\cdot66\%}$$

(28) श्रेणीक्रम में तुल्य प्रतिरोध $R_s = R_1 + R_2 = 5\cdot0 + 10\cdot0 = 15\cdot0\ \Omega$

तथा अधिकतम सम्भावित त्रुटि $\Delta R_s = \pm(\Delta R_1 + \Delta R_2) = \pm(0\cdot2 + 0\cdot1) = \pm(0\cdot3)\ \Omega$

अत: $\boldsymbol{R_s \pm \Delta R_s = (15\cdot0 \pm 0\cdot3)\ \Omega}$

समान्तर क्रम में तुल्य प्रतिरोध $\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ या $R_p = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{5\cdot0 \times 10\cdot0}{5\cdot0 + 10\cdot0} = 3\cdot33\ \Omega$

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

तथा अधिकतम सम्भावित त्रुटि $\frac{\Delta R_p}{R_p^2}=\frac{\Delta R_1}{R_1^2}+\frac{\Delta R_2}{R_2^2}$

या $$\Delta R_p=\left(\frac{0\cdot2}{5\cdot0^2}+\frac{0\cdot1}{10\cdot0^2}\right)\times3\cdot33^2=0\cdot0998$$

अत: $$R_p+\Delta R_p=(3\cdot33\pm0\cdot09)\ \Omega$$

(29) कैलीपर्स द्वारा गुटके के किसी भी माप में अधिकतम सम्भावित त्रुटि $=0\cdot01$ सेमी

$\because$ गुटके का आयतन $V=l\times b\times h=10$ सेमी $\times$ 5 सेमी $\times$ 4 सेमी $=200$ सेमी^{3}

अत: गुटके के आयतन में सम्भावित त्रुटि $\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta l}{l}+\frac{\Delta b}{b}+\frac{\Delta h}{h}$

या $$\Delta V=\left(\frac{0\cdot01}{10}+\frac{0\cdot01}{5}+\frac{0\cdot01}{4}\right)\times200$$

$$=1\cdot1\ \text{सेमी}^3$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Chapter 2 बल एवं गति (Force and Motion)

SYLLABUS

2.1 *Scalar and vector quantities-examples, representation of vector, types of vectors.*

2.2 *Addition and Subtraction of Vectors, Triangle and Parallelogram law (Statement only), Scalar and Vector Product.*

2.3 *Resolution of Vectors and its application to lawn roller.*

2.4 *Force, Momentum, Statement and Derivation of conservation of linear momentum, its applications such as recoil of gun.*

2.5 *Impulse and its Applications*

2.6 *Circular motion (Uniform and Non-uniform), definition of angular displacement, angular velocity, angular acceleration, frequency, time period.*

2.7 *Relation between linear and angular velocity, linear acceleration and angular acceleration (related numerical).*

2.8 *Central force, Expression and Applications of Centripetal and centrifugal forces with examples such as banking of roads and bending of cyclist, principle of centrifuge.*

2.9 *Application of various forces in lifts, cranes, large steam engines and turbines.*

§ 2.1 परिचय (Introduction)

सामान्य सन्दर्भों में जब "भौतिक राशि" शब्द का प्रयोग किया जाता है तो "राशि" शब्द का तात्पर्य "किसी वस्तु की मात्रा के परिमाण (magnitude) की जानकारी देने वाले संख्या से होता है।"

शुद्ध गतिकी के अध्ययन हेतु कई भौतिकीय राशियों का प्रयोग किया जाता है जैसे—दूरी, विस्थापन, चाल, वेग, त्वरण, बल, द्रव्यमान, संवेग, कार्य, शक्ति, ऊर्जा आदि।

अधिकांश ऐसी भौतिक राशियाँ जिनमें परिमाण भी हो तथा दिशा भी हो, उदाहरणत: किसी पिण्ड की द्वि-आयामी गति (Two-dimensional motion) अथवा एक समतल में गति (Motion in a plane) या त्रि-आयामी गति (Three-dimensional motion) को व्यक्त करने के लिए एक विशिष्ट गणितीय भाषा (Special mathematical language) की आवश्यकता पड़ती है। इस हेतु राशियों को अदिश (Scalar), सदिश (Vector) अथवा प्रदिश (Tensor) राशियों के रूप में उनकी प्रकृति के अनुसार चिन्हित किया जाता है।

भौतिक राशियों को उनके स्वरूप में व्यक्त करना, द्रव्य-ऊर्जा अन्तर्सम्बन्धों को व्यक्त करने का प्रथम सोपान (Step) है।

§ 2.2 वेक्टर विश्लेषण (Vector Analysis)

विभिन्न भौतिक राशियों को पूर्ण रूप से व्यक्त करने के लिए उन्हें निम्न तीन प्रकार की राशियों में वर्गीकृत किया जा सकता है—

(1) अदिश राशियाँ (Scalar Quantities)—**"जिन भौतिक राशियों को पूर्ण रूप से व्यक्त करने के लिए केवल परिमाण (Magnitude) की आवश्यकता होती है, दिशा (Direction) की नहीं, उन्हें अदिश राशियाँ कहते हैं।"**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

"A quantity which has magnitude but direction is either applicable or nor specified is known as scalar quantity."

यह राशियां पुन: दो प्रकार की होती है

(i) वे राशियां जिन्हे केवल आंकिक मान अर्थात अनुपात द्वारा व्यक्त किया जाता है जैसे—अपवर्तनांक (refrective index), परावैद्युतांक (dielectric constant) तथा आपेक्षिक घनत्व (relative density) आदि।

(ii) वे राशियां जिन्हे परिमाण (आंकिक मान) तथा मात्रक द्वारा व्यक्त किया जाता है जैसे—द्रव्यमान, ताप, चाल, विषव आदि।

अदिश राशियो को जोड़ना, घटाना, गुणा व भाग करना साधारण गणित के नियमों द्वारा किया जाता है।

(2) सदिश राशियाँ (Vector Quantities)—**"जिन भौतिक राशियों को पूर्ण रूप से व्यक्त करने के लिए परिमाण एवं दिशा दोनों आवश्यक होते हैं उन्हें सदिश राशियाँ कहते हैं।"**

"A physical quantity in which both the magnitude and the direction must be stated is known as vector quantity."

जैसे—विस्थापन, बल, वेग, त्वरण, संवेग, आवेग, भार आदि।

सदिश राशियो को जोड़ने, घटाने, गुणा करने आदि के नियमों को सदिश राशियों के नियम (vector laws) कहते है और इनका गणित वेक्टर बीजगणित (vector algebra) कहलाता है। वेक्टर बीजगणित से भाग करने की क्रिया अर्थ-पूर्ण (valid operation) नहीं होती है।

किसी राशि के सदिश राशि होने के लिए, इसके द्वारा सदिश राशि के नियमों (vector laws) का पालन करना अनिवार्य प्रतिबंध है। यदि कोई भौतिक राशि सदिश है तो इसमें दिशा का होना अनिवार्य है परन्तु यदि कोई भौतिक राशि दिशा रखती है तो उसका सदिश होना अनिवार्य नहीं है। यह राशि अदिश राशि भी हो सकती है। उदाहरण के लिए वैद्युत धारा मे परिमाण एवं दिशा होती है परन्तु यह सदिश नियमों का पालन नहीं करती है, इसलिए वैद्युत धारा अदिश राशि है, जबकि वैद्युत धारा घनत्व $\left[\left(j=\frac{i}{A}\right)\text{(current density)}\right]$ सदिश राशि है। इसी प्रकार समय, दाब, पृष्ठ तनाव आदि में दिशा होने हुए भी ये अदिश राशियाँ हैं।

(3) प्रदिश राशियाँ (Tensor Quantities)—**"जिन भौतिक राशियों का मान अलग-अलग दिशाओं में अलग-अलग होता है उन्हें प्रदिश राशियाँ कहते हैं।"**

"A quantity that has different values in different directions is known as tensor quantity."

अर्थात इन राशियों का पूर्ण वर्णन परिमाण तथा दिशा द्वारा भी नहीं किया जा सकता है जैसे—प्रतिबल (stress), जड़त्व आघूर्ण (moment of inertia) तथा वैद्युतशीलता (electric susceptibility) आदि।

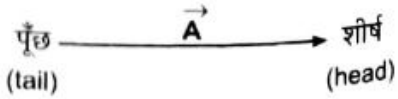
प्रदिश किसी सदिश के साथ क्रिया करके सदिश का परिमाण तथा दिशा दोनों ही बदल सकता है।

सदिश, प्रदिश का ही एक विशेष सरलतम प्रकार है। प्रदिश सामान्यत: सापेक्षवाद के सामान्य सिद्धान्त कि लिए उपयोगी है।

"A vector is a special simple case of a tensor. Tensors are particularly useful in general relativity theory."

§ 2.3 सदिश राशि का निरूपण (Representation of Vector Quantity)

वेक्टर (सदिश राशि) को एक तीर युक्त सरल रेखा द्वारा प्रदर्शित करते है। रेखा की लम्बाई वेक्टर के परिमाण के समानुपाती होती है और रेखा की दिशा वेक्टर की दिशा के समान्तर होती है। वेक्टर के प्रारंभिक बिन्दु को पूँछ (tail) तथा अन्तिम बिन्दु को



चित्र-2.1

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

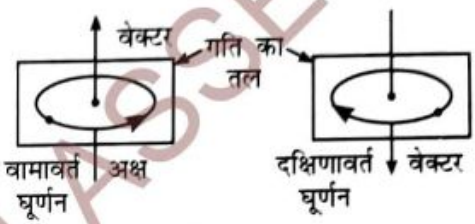
शीर्ष (head) कहते हैं। किसी सदिश (Vector) राशि को व्यक्त करने के लिए राशि को प्रतीक रूप में अंग्रेजी के मोटे अक्षरों में लिखकर उसके ऊपर तीर का चिन्ह लगा देते हैं, जैसे $\vec{A}$ (चित्र 2.1); या केवल गहरे काले बड़े अक्षर द्वारा भी प्रदर्शित कर सकते हैं, जैसे **A**; अंग्रेजी का सामान्य बड़ा अक्षर A अदिश राशि को अथवा सदिश राशि के परिमाण को व्यक्त करता है।

निरूपण के आधार पर सदिश (Vector on the basis of its Representation)

निरूपित वेक्टर निम्न दो प्रकार के हो सकते हैं—

(1) रैखिक वेक्टर (Rolar vector)—ये वेक्टर किसी रेखा के अनुदिश होते हैं। इन्हें वेक्टर की दिशा में तीर द्वारा प्रदर्शित करते हैं। किसी सरल रेखा के अनुदिश वेक्टर की केवल दो दिशायें हो सकती हैं। एक दिशा को धनात्मक तथा विपरीत दिशा को ऋणात्मक चिन्ह से प्रदर्शित करते हैं।

(2) अक्षीय वेक्टर (Axial vector)—ये वेक्टर घूर्णन प्रभाव को व्यक्त करते हैं जैसे—बल-आघूर्ण (torque), कोणीय संवेग (angular momentum) तथा कोणीय वेग (angular velocity) आदि। इसकी दिशा सदैव घूर्णन अक्ष (axis of rotation) के अनुदिश होती है तथा दाहिने हाथ के पेंच के नियम (right hand screw rule) द्वारा निर्धारित होती है। (दाहिने हाथ के अँगूठे को अँगुलियों के लम्बवत रखकर अँगुलियों को घूर्णन की दिशा में मोड़ने पर अँगूठा, इस वेक्टर की दिशा दिखाता है।) चित्र-2.2



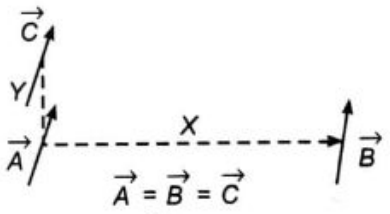
चित्र-2.2

§ 2.4 सदिशों के प्रकार एवं कुछ सम्बन्धित तथ्य (Kinds of Vectors and some related facts)

(1) किसी वेक्टर को स्वयं इसी के समानान्तर (parallel of itself) विस्थापित करने पर भी वेक्टर अपरिवर्तित रहता है (चित्र-2.3)।

(2) जो वेक्टर एक ही तल में स्थित होते हैं उन्हें समतलीय वेक्टर (coplanar vectors) कहते हैं।

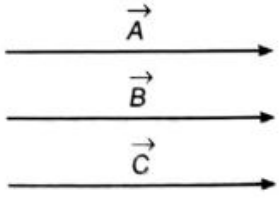
(3) जिन वेक्टरों का प्रारम्भिक बिन्दु एक होता है, वे सह-प्रारम्भिक वेक्टर (co-initial vectors) कहलाते हैं।



चित्र-2.3

(4) समान वेक्टर (Equal vectors)—ऐसे सभी वेक्टर जिनके परिमाण तथा दिशायें समान हों, समान वेक्टर कहलाते हैं (चित्र-2.4)

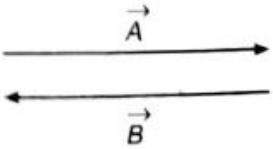
$$\vec{A} = \vec{B} = \vec{C}$$



चित्र-2.4

(5) विपरीत वेक्टर (Opposite vectors)—ऐसे वेक्टर जिनके परिमाण समान परन्तु दिशायें विपरीत हों, विपरीत वेक्टर कहलाते हैं (चित्र-2.5)

$$\vec{B} = -\vec{A}$$



चित्र-2.5

(6) शून्य वेक्टर (Zero vector or null vector)—जिस वेक्टर का परिमाण शून्य हो, शून्य वेक्टर कहलाता है इसे $\vec{O}$ लिखते हैं। इसके प्रारम्भिक तथा अन्तिम बिन्दु सम्पाती होते हैं अत: दिशा अनिश्चित (indefinite) होती है। वास्तव में दो विपरीत वेक्टरों का योग अथवा दो समान वेक्टरों का अन्तर शून्य वेक्टर के बराबर होता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

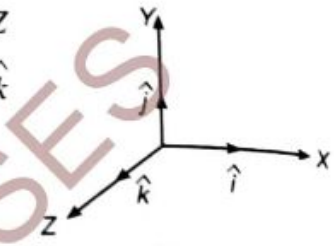
(7) एकांक वेक्टर (Unit vector)—जिस वेक्टर का परिमाण एकांक होता है, एकांक वेक्टर कहलाता है। किसी वेक्टर $\vec{A}$ की दिशा में एकांक वेक्टर को $\hat{A}$ से दर्शाते हैं तथा A कैप पढ़ते हैं। यदि $\vec{A}$ का परिमाण A हो तो

$$\vec{A} = A.\hat{A}$$

या $$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \qquad [|\vec{A}| = A = \text{वेक्टर } \vec{A} \text{ का परिमाण}]$$

(8) लम्ब कोणिक एकांक वेक्टर (Orthogonal unit vectors)—X, Y तथा Z अक्षों के अनुदिश (धनात्मक दिशाओं में) एकांक वेक्टरों को क्रमशः $\hat{i}, \hat{j}$ तथा $\hat{k}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है (चित्र-2.6)।

$$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}| = 1$$



चित्र-2.6

(9) समरेखिक वेक्टर (Collinear vectors)—जिन वेक्टरों की कार्य रेखा समानान्तर होती है वे समरेखिक वेक्टर या समानान्तर वेक्टर (collinear or parallel vectors) कहलाते हैं (चित्र-2.7)। इन वेक्टरों के बीच कोण का मान सदैव 0° या 180° होता है।

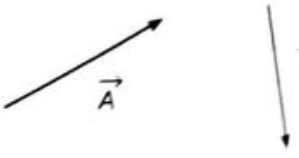
चित्र-2.7

§ 2.5 वेक्टरों का जोड़ना एवं घटाना (Addition and Subtraction of Vectors)

समान प्रकृति एवं मात्रक वाले वेक्टरों को ही आपस में जोड़ा अथवा घटाया जा सकता है। इनका परिणामी, सदैव वेक्टर राशि ही होता है। जोड़ने तथा घटाने की दो विधियाँ हैं—

(1) ज्यामितीय अथवा ग्राफीय विधि (Geometrical or graphical method) तथा

(2) गणितीय विधि (Analytical method)



चित्र-2.8

2.5.1 वेक्टरों का जोड़ना (Addition of Vectors)

माना $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ दो वेक्टर हैं (चित्र-2.8), जिन्हें जोड़ना है।

(1) ज्यामितीय अथवा ग्राफीय विधि (Geometrical or Graphical Method)

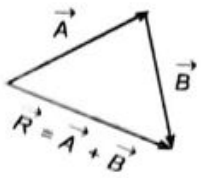
(A) त्रिभुज विधि (Triangle method)—माना $\vec{A} + \vec{B}$ करना है तो सर्वप्रथम वेक्टर $\vec{A}$ खींच लेते हैं फिर उसके शीर्ष से दूसरे वेक्टर $\vec{B}$ को खींचते हैं पुनः $\vec{A}$ की पूँछ से $\vec{B}$ के शीर्ष तक एक परिणामी वेक्टर $\vec{R}$ जिसकी दिशा $\vec{B}$ की ओर होती है खींच लेते हैं (चित्र-2.9)।

AKC TECHNICAL CLASSES

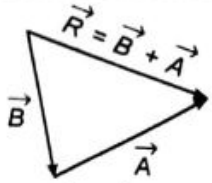
Scanned with CamScanner

चित्र 2.9 तथा 2.10 से स्पष्ट है कि वेक्टर योग "क्रम विनिमेय नियम (commutative law)" का पालन करता है अर्थात्

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$



चित्र-2.9



चित्र-2.10

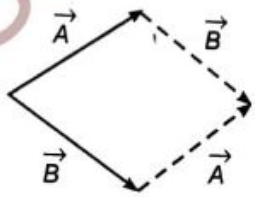
(B) बहुभुज विधि (Polygon method)—यदि दो से अधिक वेक्टरों को जोड़ना हो तो किन्हीं भी दो वेक्टरों को त्रिभुज विधि से जोड़कर उनका परिणामी वेक्टर ज्ञात करते हैं पुन: इस परिणामी से अगला वेक्टर जोड़ते हैं नया परिणामी प्राप्त करते हैं और पुन: यह क्रिया सभी वेक्टरों के जुड़ जाने तक दुहराते रहते हैं इसे वेक्टरों के योग का बहुभुज विधि कहते हैं।

वेक्टर योग साहचर्य नियम (Law of association) का भी पालन करता है—

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

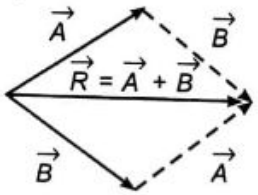
(C) समान्तर चतुर्भुज की विधि (Parallelogram method)—इस विधि में दोनों वेक्टरों के पूँछ संपाती कर लेते हैं (चित्र-2.11) तथा फिर दोनों के समान वेक्टर दोनों के सिरों पर क्रमश: बनाते हैं (चित्र-2.12)

चित्र-2.11



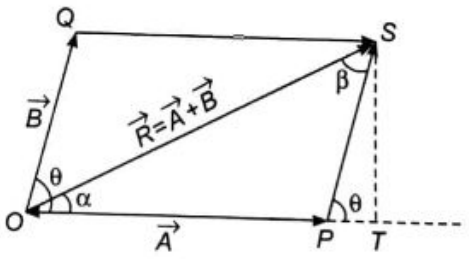
चित्र-2.12

चतुर्भुज का निर्माण पूरा हो जाता है। चतुर्भुज के एक विकर्ण पर दोनों वेक्टरों के तीर इकट्ठा पहुँच जाते हैं इस विकर्ण को वेक्टर रेखा द्वारा पूर्ण करने पर परिणामी वेक्टर प्राप्त हो जाता है (चित्र-2.13)।



चित्र-2.13

गणितीय विधि (Analytical method)—यदि दो वेक्टरों $\vec{A}$ (OP) तथा $\vec{B}$ (OQ) के बीच कोण θ ज्ञात हो तो चित्र-2.14 के अनुसार उनके योग के परिणामी वेक्टर $\vec{R}$ का परिमाण एवं दिशा ज्ञात किया जा सकता है। $\vec{R}$ का परिमाण तथा दिशा ज्ञात करने के लिए बिन्दु S से रेखा OP पर लम्ब ST खींचा।



चित्र-2.14

∴ समकोण त्रिभुज OTS में

$$OS^2 = OT^2 + ST^2$$

$$= (OP + PT)^2 + ST^2$$

$$= OP^2 + PT^2 + 2O\,P.PT + ST^2$$

$$= OP^2 + PS^2 + 2OP\,.\,PT \qquad (\because\ PT^2 + ST^2 = PS^2)$$

$$= OP^2 + PS^2 + 2OP\,.\,PS\cos\theta \qquad \left(\because\ \cos\theta = \frac{PT}{PS}\right)$$

∴ $$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta \qquad (\because\ OS = |\vec{R}| = R$$

तथा $OP = |\vec{A}| = A$

तथा $PS = OQ = |\vec{B}| = B$

अथवा $$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

इस समीकरण को **कोज्या का नियम** कहते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

त्रिभुज से

$$\tan\alpha = \frac{ST}{QT} = \frac{ST}{OT + PT}$$

$$\tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}$$

$\because \sin\theta = \frac{ST}{PS} = \frac{ST}{OQ}$

$\therefore ST = OQ\sin\theta = B\sin\theta$

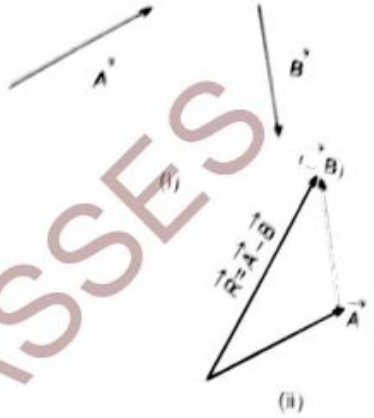
2.5.2 सदिशों का घटाना (Subtraction of Vectors)

(1) ज्यामितीय या ग्राफीय विधि (Geometrical or Graphical Method)

(अ) एकल विधि—माना दो वेक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ है तथा वेक्टर $\vec{B}$ को $\vec{A}$ में से घटाना है तब वेक्टर $\vec{B}$ को ($-\vec{B}$) बनाकर अर्थात दिशा विपरीत कर वेक्टर $\vec{A}$ में जोड़ देते है (चित्र 2.15)। इस प्रकार

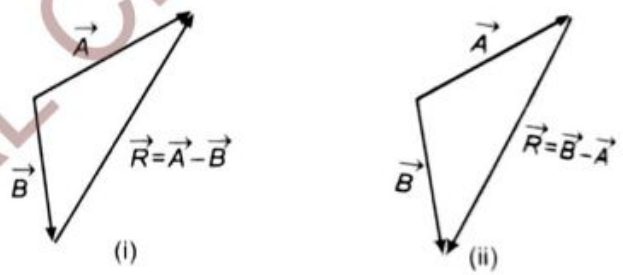
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

स्पष्ट है सदिश घटाने की विधि **क्रम विनिमेय नियम** का पालन नहीं करता है।



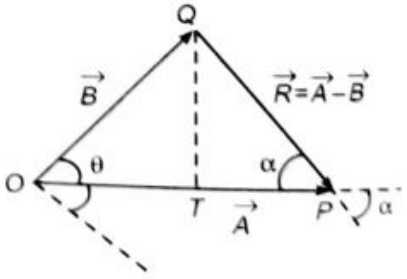
चित्र-2.15

(ब) द्विभुज विधि—इस विधि में दोनो वेक्टरों की पूँछ पर पूँछ रखकर सटा लेते है तथा पुनः जिस वेक्टर में से दूसरे को घटाना होता है उसी की तरफ तीर बनाकर दोनों के शीर्ष को एक सरल रेखा से जोड़ देते है यही परिणामी वेक्टर $\vec{R}$ होता है (चित्र 2.16)।



चित्र-2.16

गणितीय विधि (Analytical method)—चित्र-2.17 से स्पष्ट है कि वेक्टर $\vec{A}$ $(\vec{OP})$ तथा $\vec{B}$ $(\vec{OQ})$ है तब $\vec{A} - \vec{B}$ का परिणामी वेक्टर $\vec{R}$ $(\vec{QP})$ द्वारा प्रदर्शित है।



चित्र-2.17

समकोण त्रिभुज QTP में,

$$QP^2 = QT^2 + TP^2$$

$$= QT^2 + (OP - OT)^2$$

$$= QT^2 + OP^2 - 2OP \cdot OT + OT^2$$

$$= QT^2 + OT^2 + OP^2 - 2OP \cdot OT$$

$$= OQ^2 + OP^2 - 2OP \cdot OQ\cos\theta \quad (\because OQ^2 = OT^2 + QT^2)$$

$$R^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$$

तथा $\tan\alpha = \frac{QT}{PT} = \frac{OQ\sin\theta}{OP - OT}$ तथा $\cos\theta = \frac{OT}{OQ}$

$\left(\because \sin\theta = \frac{QT}{OQ}\right)$

या $\tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A - B\cos\theta}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 2.6 वेक्टर का गुणन (Multiplication of Vector)

यह गुणन निम्न दो प्रकार का हो सकता है—

(i) वेक्टर का स्केलर से गुणन (Multiplication of vector by a scalar)—इस गुणन में परिणामी सदैव वेक्टर राशि प्राप्त होता है तथा उसकी दिशा वही होती है जो गुणा होने वाले सदिश राशि की थी, जैसे—$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

(ii) वेक्टर का वेक्टर से गुणन (Multiplication of vector by a vector)—दो वेक्टरों के गुणनफल अदिश व सदिश दोनों प्रकार के हो सकते हैं। यदि परिणामी अदिश प्राप्त हो तो इसे अदिश गुणन (scalar multiplication) या डॉट (.) गुणन (dot product) कहते हैं जैसे बल (सदिश) तथा विस्थापन (सदिश) का गुणनफल कार्य (अदिश राशि) प्राप्त होता है $(W = \vec{F} \cdot \vec{S})$।

यदि परिणामी सदिश प्राप्त हो तो इसे सदिश गुणन (vector multiplication) या क्रास (×) गुणन (cross product) कहते हैं, जैसे बल (सदिश) को विस्थापन (सदिश) से गुणा करने पर बल-आघूर्ण (सदिश राशि) प्राप्त होता है $(\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r})$।

वास्तव में वेक्टर गुणन, वेक्टरों को समतलीय करने की क्रिया है।

2.6.1 अदिश गुणन या डॉट गुणन (Scalar multiplication or dot product)

जिन दो वेक्टरों का अदिश गुणनफल प्राप्त करना होता है उन्हें चित्र-2.18, की तरह पूँछ से पूँछ रखकर खींच देते हैं तथा जिस वेक्टर को दूसरे वेक्टर में गुणा करना होता है उसका दूसरे वेक्टर की दिशा में घटक ज्ञात कर दूसरे वेक्टर के परिमाण से गुणा कर देते हैं तथा डॉट (.) लगाकर प्रदर्शित करते हैं।

चित्र-2.18

अत: दो वेक्टरों के स्केलर गुणन या डॉट गुणन का मान उन दोनों वेक्टरों के परिमाणों तथा उनके बीच कोण की कोज्या (cosine) के गुणनफल के बराबर होता है।

या, दो वेक्टरों का अदिश गुणनफल, उनमें से किसी एक वेक्टर के परिमाण तथा इस वेक्टर के अनुदिश, दूसरे वेक्टर के घटक के गुणनफल के बराबर होता है।

अदिश गुणन के गुण (Properties of scalar multiplication)

(i) यह क्रम विनिमेय नियम (law of commutation) का पालन करता है, अर्थात $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = AB\cos\theta$

(ii) यह वितरण नियम (law of distribution) का पालन करता है—

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

ARC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(iii) यदि वेक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ समान्तर है तो $\vec{A}.\vec{B} = AB$

(iv) स्व:गुणन या समान वेक्टरों का गुणन, परिमाण का वर्ग होता है—$\vec{A}.\vec{A} = A^2$

(v) एकांक वेक्टर का स्व: अदिश गुणनफल—$\hat{i}.\hat{i} = 1.1\cos 0 = 1$

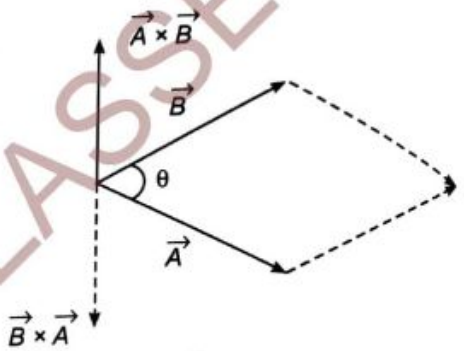
अत: $\hat{i}.\hat{i} = \hat{j}.\hat{j} = \hat{k}.\hat{k} = 1$

(vi) दो लम्बवत एकांक वेक्टरों का अदिश गुणनफल—$\hat{i}.\hat{j} = 1.1.\cos 90^o = 0$

अत: $\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{k} = \hat{k}.\hat{i} = 0$

2.6.2 सदिश गुणन या क्रॉस गुणन
(Vector multiplication or cross product)

जिन दो वेक्टरों का सदिश गुणनफल प्राप्त करना होता है उन्हें चित्र-2.19 की तरह पूँछ से पूँछ रखकर खींच देते हैं तथा समान्तर चतुर्भुज का निर्माण करते हैं। समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ही गुणन का परिमाण होता है तथा इसकी दिशा दाहिने हाथ के पेंच के नियम (अक्षीय वेक्टर) के अनुसार निर्धारित होती है। जिस वेक्टर का गुणा करना होता है उसकी तरफ खुली अँगुलियाँ रखकर दूसरे वेक्टर की तरफ मोड़ते हैं, लम्बवत् खुला अँगूठा परिणामी वेक्टर की दिशा दिखाता है इसे $\hat{n}$ से प्रदर्शित करते हैं। क्रॉस गुणन को (×) लगाकर प्रदर्शित करते हैं।



चित्र-2.19

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin\theta \hat{n}$$

अत: **''दो वेक्टरों के वेक्टर गुणन क्रॉस गुणन का मान दोनों वेक्टरों के परिमाणों तथा उनके बीच के कोण की ज्या (sine) के गुणनफल के बराबर होता है।**

सदिश गुणन के गुण (Properties of Vector Multiplication)

(i) यह क्रम विनिमेय नियम (law of commutation) का पालन नहीं करता है, अर्थात्

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$

(ii) यह वितरण नियम (law of distribution) का पालन करता है; जैसे—

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

तथा $$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$$

वेक्टरों का क्रम महत्वपूर्ण है यह बदलना नहीं चाहिए।

(iii) समान्तर वेक्टरों का सदिश गुणन (Vector product of parallel vectors)

$\because$ $\theta = 0$ अत: $\vec{A} \times \vec{B} = AB \sin 0 \hat{n} = 0.\hat{n} = 0$

(iv) स्व: सदिश गुणन $\vec{A} \times \vec{A} = AA \sin 0 \hat{n} = 0.\hat{n} = \vec{0}$

(v) एकांक वेक्टर का स्व: सदिश गुणनफल

$$\hat{i} \times \hat{i} = 1.1 \sin 0 \hat{n} = 0.\hat{n} = \vec{0} \text{ तथा } |\hat{i} \times \hat{i}| = 0$$

अत: $$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0}$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

(vi) दो लम्बवत एकांक वेक्टरों का सदिश गुणनफल

$$\hat{i} \times \hat{j} = 1.1 \sin 90^\circ \hat{n} = \hat{n} = \hat{n} = \hat{k} \qquad (\because \hat{n} \text{ तथा } \hat{k} \text{ की दिशा समान है})$$

अत: $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$

$\hat{j} \times \hat{c} = \hat{i}$

$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

वेक्टरों का क्रम बदलने पर गुणनफल का चिन्ह बदल जायेगा, जैसे $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$

(vii) दो वेक्टरों के सदिश गुणन को दोनों वेक्टरों के x, y तथा z घटकों के पदों में सारणिक (determinant) के रूप में लिख सकते हैं—

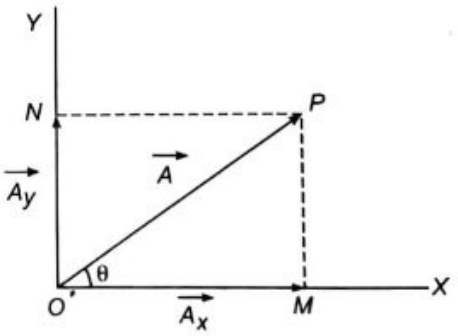
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_y \\ B_x & B_y & A_x \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{(A_y B_z - A_z B_y)^2 + (A_z B_x - A_x B_z)^2 + (A_x B_y - A_y B_x)^2}$$

§ 2.7 किसी वेक्टर का वियोजन (Resolution of a Vector)

वेक्टरों को जोड़ने की विपरीत क्रिया को वेक्टर का वियोजन कहते हैं। "यदि हम किसी दिये हुए वेक्टर को दो या दो से अधिक ऐसे वेक्टरों में वियोजित करें जिनका संयुक्त प्रभाव दिये गये वेक्टरों के समान हो तो इन वियोजित वेक्टरों को दिये हुए वेक्टर के घटक (components) कहते हैं और इस क्रिया को वेक्टर का वियोजन कहते हैं।" किसी दिये गये वेक्टर के सम्भव घटकों के असंख्य युग्म हो सकते हैं। यदि किसी वेक्टर को दो परस्पर लम्बवत् दिशाओं में वियोजित करें तो प्राप्त अवयवी वेक्टरों को दिये गये वेक्टर के समकोणिक घटक (Rectangular components) कहते हैं।

चित्र 2.20 में $\vec{A}$ एक वेक्टर है जिसे हमें दो आयताकार या समकोणिक घटकों में वियोजित करना है। इस कार्य के लिए वेक्टर $\vec{A}$ को इस प्रकार खींचते हैं कि इसका पुच्छ मूलबिन्दु O पर रहे। मूलबिन्दु से दोनों समकोणिक अक्षों OX एवं OY खींच लेते हैं। वेक्टर $\vec{A}$ के शीर्ष से OX एवं OY अक्षों पर लम्ब डालते हैं जो अक्षों को क्रमश: M व N बिन्दुओं पर मिलते हैं। इस प्रकार OM एवं ON क्रमश: वेक्टर $\vec{A}$ के दो लम्बवत् घटक $\vec{A}_x$ एवं $\vec{A}_y$ हैं। चित्र में बने आयत $ONPM$ से यह स्पष्ट है कि वेक्टर $\vec{A}$ घटकों $\vec{A}_x$ एवं $\vec{A}_y$ का वेक्टर योग है अर्थात $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$



चित्र-2.20

OM तथा ON को नापकर $\vec{A}_x$ एवं $\vec{A}_y$ के परिमाण क्रमश: A_x एवं A_y ज्ञात किये जा सकते हैं।

घटक A_x तथा A_y का परिमाण गणना द्वारा भी आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। मान लिया कि वेक्टर $\vec{A}$ अक्ष OX के साथ θ कोण बनाता है।

$\therefore$ ΔOPM में

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{A_x}{A}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$\therefore$ $A_x = A\cos\theta$ ... (1)

तथा $\sin\theta = \frac{MP}{OP} = \frac{A_y}{A}$

$\therefore$ $A_y = A\sin\theta$ ... (2)

समी० (1) व (2) के वर्गों को जोड़ने पर,

$$A_x^2 + A_y^2 = A^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta$$

$$= A^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$= A^2$$

$\therefore$ $A^2 = A_x^2 + A_y^2$

या $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ ... (3)

इस सूत्र की सहायता से वेक्टर $\vec{A}$ का परिमाण ज्ञात कर सकते हैं यदि उसके दोनों लम्बवत् घटक A_x तथा A_y ज्ञात हों।

अब त्रिभुज OPM में,

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{A_y}{A_x}$$

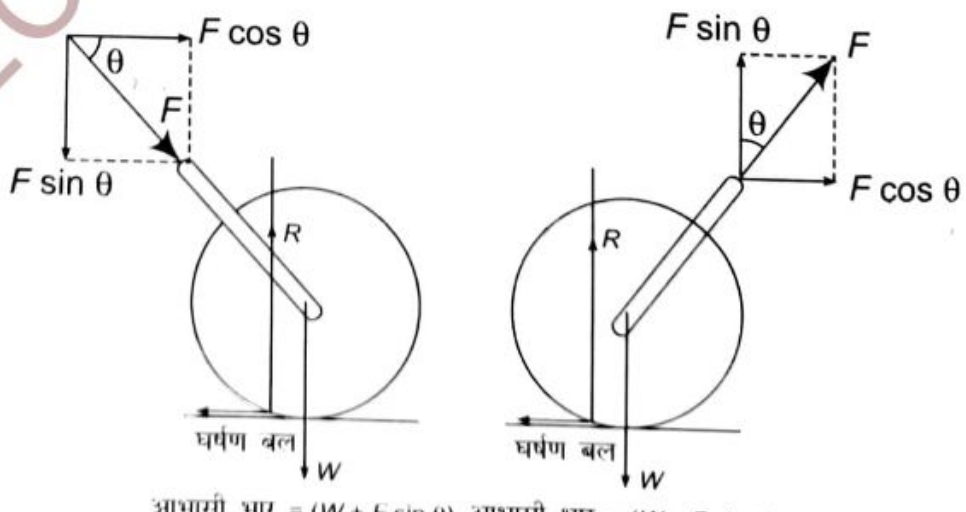
या $\theta = \tan^{-1}\left[\frac{A_y}{A_x}\right]$ ... (7)

इस समीकरण से वेक्टर $\vec{A}$ की दिशा ज्ञात कर सकते हैं।

वेक्टरों के वियोजन का उदाहरणः

रोलर को खींचना उसे धकेलने की अपेक्षा आसान है

रोलर को धकेलने की क्रिया में किसी व्यक्ति द्वारा लगाये गये बल F का क्षैतिज घटक $F\cos\theta$, रोलर को क्षैतिज गति प्रदान करता है और इसका लम्बवत् घटक $F\sin\theta$ रोलर के भार की दिशा में कार्य करता है (चित्र 2.21(a)), अतः यह रोलर को और अधिक भारी (आभासी भार $= W + F\sin\theta$) बनाता है। इसके विपरीत रोलर को खींचते समय (चित्र 2.21(b)) व्यक्ति द्वारा लगाये गये बल F का क्षैतिज घटक $F\cos\theta$, रोलर को क्षैतिज दिशा में गति प्रदान करता है और ऊर्ध्व घटक $F\sin\theta$ रोलर के भार W के विपरीत दिशा में कार्य करने के कारण रोलर को हल्का (आभासी भार $= W - F\sin\theta$) बनाता है। स्पष्ट है कि रोलर को खींचना उसको धकेलने की अपेक्षा आसान है क्योंकि हल्की वस्तु में भारी की अपेक्षा गति देना आसान है।



चित्र 2.21

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

सांख्यिक आंकिक उदाहरण
(Solved Numerical Examples)

उदाहरण 1. दो परस्पर लम्बवत् सदिशों P तथा Q के परिमाण क्रमशः 5 तथा 7 है। एक सांख्यिक सदिश ज्ञात कीजिए जो कि $P + Q$ तथा $P - Q$ दोनों के परिमाण व दिशा ज्ञात कीजिए।

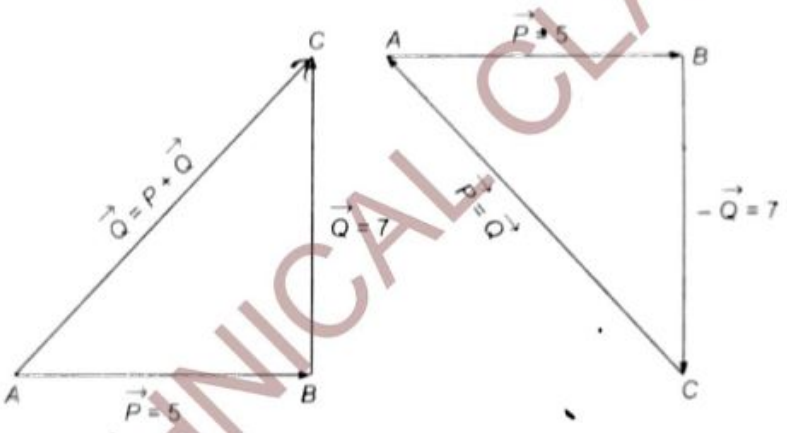
हल (i) $P + Q$ का मान ज्ञात करने के लिए चित्र (a) में

सदिश 1 सांख्यिक = 1 cm

$\vec{P} = AB = 5$ cm

$\vec{Q} = BC = 7$ सांख्यिक

$\vec{P} + \vec{Q} = 8{\cdot}6$ cm की दिशा $= 8{\cdot}6$

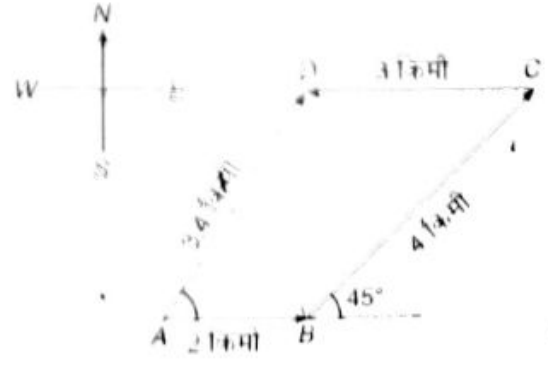


(ii) $\vec{P} - \vec{Q}$ के लिए चित्र (b) के अनुसार $\vec{P} = 5 = 5$ cm $= AB$; $-\vec{Q}$ 7 सांख्यिक $= 7$ cm BC खींचते हैं।

मापने पर, $P - Q = AC = 8{\cdot}6$ cm $= 8{\cdot}6$ सांख्यिक।

P के साथ $P - Q$ की दिशा $= 55°$

उदाहरण 2. एक मनुष्य 2 km पूरब की ओर चलकर, पूरब से उत्तर की ओर 45° कोण पर मुड़ जाता है और 4 km चलता है। फिर वह पश्चिम दिशा में 3 km चलकर रुक जाता है। वेक्टर आरेख खींचकर मूल स्थान से विस्थापन एवं उसके द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।



हल माना 1 km = 1 cm मान लिया A से पूर्व दिशा 2 km = 4 cm का वेक्टर AB खींचते हैं। फिर बिन्दु B से 4 km = 4 cm का वेक्टर BC वेक्टर AB से 45° के कोण पर खींचते हैं। बिन्दु C से 3 km = 3 cm का वेक्टर CD परिणामी विस्थापन को प्रकट करता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

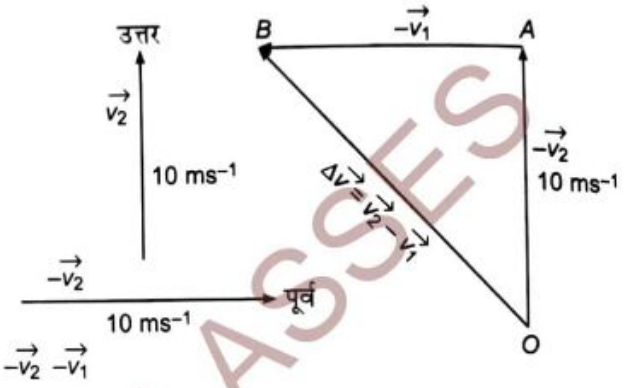
Scanned with CamScanner

परिणामी विस्थापन = AD की लम्बाई = $6{\cdot}8\text{ cm} = \frac{6{\cdot}8}{2} = 3{\cdot}4\text{ km}$

तय की गई कुल दूरी = $2 + 4 + 3 = 9\text{ km}$

उदाहरण 3. एक पिण्ड 10 ms^{-1} के वेग से पूरब में गतिमान है। इस पर एक बल आरोपित किये जाने पर पिण्ड का वेग उत्तर दिशा में 10 ms^{-1} हो जाता है। पिण्ड का वेग परिवर्तन ज्ञात कीजिये।

हल—मात्रक $2\text{ ms}^{-1} = 1\text{ cm}$ मानकर बिन्दु O से वेक्टर $\vec{OA} = 10\text{ ms}^{-1} = 5\text{ cm}$ खींचकर पश्चिम दिशा में $\vec{AB} = 5\text{ cm} = 10\text{ ms}^{-1}$ खींचा। बिन्दु O को B से मिलाया।



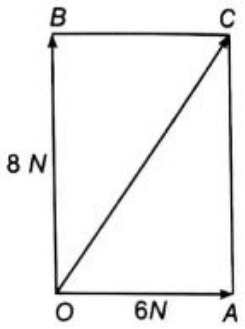
वेग परिवर्तन $\Delta\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$

$= \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}\text{ ms}^{-1}$

$= 10 \times 1{\cdot}414 = 14{\cdot}14\text{ m/s}$

वेक्टर आरेख से $\Delta\vec{v} = \vec{OB} = 7\text{ cm} = 14\text{ ms}^{-1}$

उदाहरण 4. एक बिन्दु पर 6 N तथा 8 N के दो बल परस्पर 90° का कोण बनाते हुए कार्य कर रहे हैं। वेक्टर आरेख खींचकर परिणामी का परिमाण ज्ञात कीजिए।



हल—पैमाना $2\text{ N} = 1\text{ cm}$ मानकर बिन्दु O पर कार्य कर रहे दो बल $\vec{OA} = 6\text{ N} = 3\text{ cm}$ तथा $\vec{OB} = 8\text{ N} = 4\text{ cm}$ खींचते हैं। ये दोनों बल परस्पर लम्बवत् है। आयत $OACB$ पूरा करते हैं। समानान्तर चतुर्भुज के नियम से इनका परिणामी परिणामी एवं दिशा में $\vec{OC}$ द्वारा प्रदर्शित होगा।

$\vec{OC} = 5\text{ cm}$

$= 5 \times 2 = 10\text{ N}$

परिणामी की दिशा 6 N बल के साथ = 54°

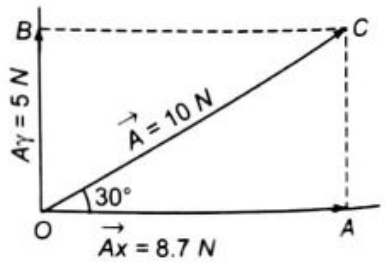
उदाहरण 5. 10 N परिमाण का बल क्षैतिज दिशा से 30° का कोण बनाता है। बल के ऊर्ध्व एवं क्षैतिज घटकों के मान ज्ञात कीजिए।

हल : (1) वेक्टर आरेख द्वारा—पैमाना $1\text{ N} = 1\text{ cm}$ मानकर $10\text{ N} = 10\text{ cm}$ का वेक्टर $\vec{OC}$ क्षैतिज से 30° का कोण बनाता हुआ खींचकर C से क्षैतिज रेखा रेखा पर लम्ब CA एवं O से ऊर्ध्व रेखा पर लम्ब OB डाले।

अत: दिये हुए वेक्टर का क्षैतिज घटक $\vec{A_x} = \vec{OA} = 8{\cdot}7\text{ cm}$

$= 8{\cdot}7\text{ N}$

ऊर्ध्व घटक = $\vec{A_y} = \vec{OB} = 5\text{ cm} = 5\text{ N}$



(2) गणना द्वारा—क्षैतिज घटक $\vec{A_x} = \vec{A}\cos 30°$

$= 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10 \times 0{\cdot}866$

ऊर्ध्व घटक $\vec{A_y} = \vec{A}\sin 30°$

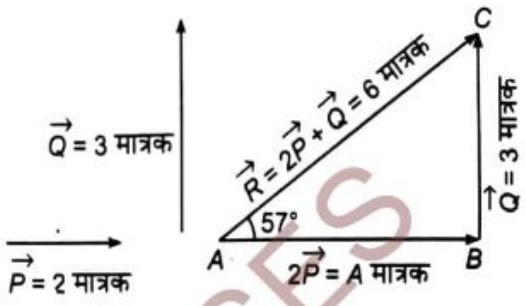
$= 10 \times \frac{1}{2} = 5\text{ N}$

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 6. एक वेक्टर $\vec{P}$ का परिमाण 2 तथा दूसरे वेक्टर $\vec{Q}$ का परिमाण 3 मात्रक है। दोनों वेक्टर परस्पर लम्बवत् है। वेक्टर-आरेख बनाकर $2\vec{P} + \vec{Q}$ का परिमाण ज्ञात कीजिए। इसकी दिशा आरेख में अंकित कीजिये।

हल : पैमाना 1 मात्रक = 2 cm मान कर $2\vec{P}$ = 4 मात्रक × 2 = 8 cm को प्रदर्शित करने वाला वेक्टर $\vec{AB}$ खींचकर इससे लम्बवत् वेक्टर $\vec{Q}$ = 3 मात्रक × 2 = 6 cm का वेक्टर $\vec{BC}$ खींचा। आरेख में बल त्रिभुज के नियम से $\vec{AC}$ परिणामी को प्रकट करेगा। AC की लम्बाई = 10 cm



अर्थात् परिणामी वेक्टर $\vec{R} = \vec{AC}$

= 10 cm ÷ 2 = 5 मात्रक

इस परिणामी वेक्टर की दिशा $2\vec{P}$ से 37° का कोण बनाती है।

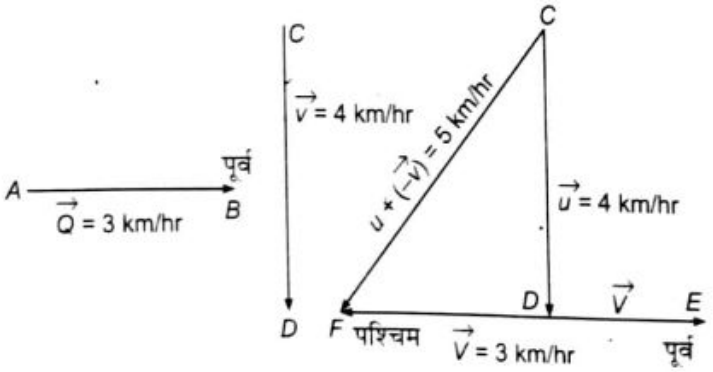
उदाहरण 7. एक मनुष्य पूरब की ओर 3 km/h के वेग से चल रहा है। तथा वर्षा ऊर्ध्वाधर 4 km/h के वेग से पड़ रही है। वर्षा का मनुष्य के सापेक्ष वेग व दिशा ज्ञात कीजियै।

हल : यदि मनुष्य का वेग $\vec{v}$ तथा वर्षा का वेग $\vec{u}$ द्वारा प्रदर्शित हो तो वर्षा का मनुष्य के सापेक्ष वेग ($= \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

अर्थात् वर्षा का मनुष्य के सापेक्ष वेग ज्ञात करने के लिए हमें वर्षा के वेग $\vec{u}$ द्वारा प्रदर्शित हो तो वर्षा का मनुष्य के सापेक्ष वेग $-\vec{v}$ जोड़ना है।

माना कि 1 km/h = 2 cm। मनुष्य का वेग 3 km/h = 6 cm पूरब की ओर दिष्ट है। ये $\vec{AB}$ द्वारा प्रदर्शित है। तथा वर्षा का वेग 4 km/h = 8 cm $\vec{CD}$ द्वारा प्रदर्शित है।

$\vec{u} - \vec{v}$ का मान ज्ञात करने के लिए 0·8 cm लम्बाई का वेक्टर नियमानुसार $\vec{CD}$ खींचते है। बिन्दु D से दिये गये वेक्टर $\vec{v}$ को प्रदर्शित करने के लिए 6 cm लम्बाई का वेक्टर $\vec{DE}$ पूरब दिशा में खींचते हैं। DE को पीछे की ओर इतना बढ़ाते हैं कि $DE = DF$ वेक्टर $\vec{DF}$ वेक्टर $-\vec{v}$ को प्रदर्शित करता है। वेक्टर $\vec{CF}$ वेक्टर $\vec{u} + (-\vec{v})$ को प्रकट करेगा।



मापने पर $\vec{CF}$ = 10 cm = 5 km/h; $\angle DCF = 37°$

अत: वर्षा का मनुष्य के सापेक्ष वेग 5 km/hr ऊर्ध्वाधर से 37° पश्चिम की ओर है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

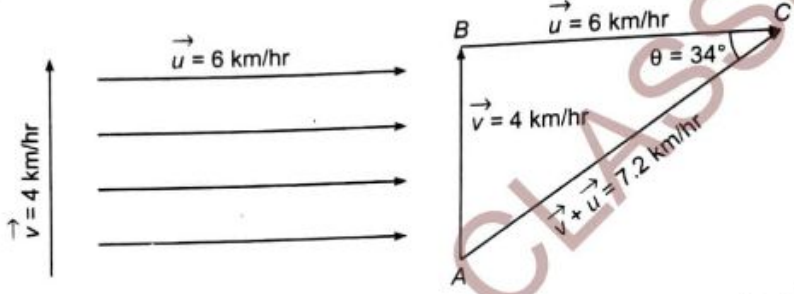
उदाहरण 8. एक नाव 4 km/h के वेग से नदी की धारा के लम्बवत् चलाई जा रही है। यदि नदी के जल का वेग 6 km/h हो तो नाव का परिणामी वेग वेक्टर आरेख खींचकर ज्ञात कीजिये।

हल : प्रशन से नाव का वेग नदी के लम्बवत् $= \vec{v} = 4$ km/h

नदी का किनारों के सापेक्ष वेग $= \vec{u} = 6$ km/h

नदी का परिणामी वेग (किनारों के सापेक्ष) = ?

नीवं का किनारो के सापेक्ष वेग, नाव का जल के सापेक्ष वेग $\vec{v}$ तथा नदी का किनारों के सापेक्ष वेग $\vec{u}$ के सदिश योग $\vec{v} + \vec{u}$ के तुल्य होगा।



पैमाना 1 km/h = 1 cm माप कर पहले $\vec{v} = \vec{AB} = 4$ km/h खींचते है। फिर B से $\vec{AB}$ के लम्बवत् वेक्टर $\vec{u} = \vec{BC} = 6\,\text{km/h} = 6\,\text{cm}$ खीचते हैं। $\vec{AC}$ परिणामी वेग को व्यक्त करता है। मापने पर $\vec{AC} = 7{\cdot}2\,\text{cm} = 7{\cdot}2\,\text{km/h}$ प्राप्त होता है। $\angle ACB = 34°$

अत: नाव का परिणामी वेग 7·2 km/h तथा इसकी दिशा किनारे से 34° है।

उदाहरण 9 एक पिण्ड 20 N का बल लगाया जाता है। तो यह बल की दिशा से 30° का कोण बनाते हुए 3 m विस्थापित हो जाता है। बल द्वारा किये गये कार्य की गणना कीजिये।

हल :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$
$$= F \cdot d \cos\theta$$
$$= 20 \times 3 \times \cos 30°$$
$$= 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3} = 30 \times 1{\cdot}1{\cdot}732 = 51{\cdot}96\ \text{J}$$

कार्य = 51·96 J

उदाहरण 10. वेक्टर $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ तथा वेक्टर $\vec{B} = B_x\,\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ के स्केलर गुणन का मान ज्ञात कीजिये।

हल : $\vec{A}$ व $\vec{B}$ का स्केलर गुणन

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \cdot B_x\,\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$
$$= A_xB_x\,\hat{i} \cdot \hat{i} + A_xB_y\hat{i}\hat{j} + A_xB_z\,\hat{i} \cdot \hat{k} + A_y\,B_x\hat{j} \cdot \hat{i}$$
$$+ A_xB_y\,\hat{j} \cdot \hat{j} + A_y\,B_z\,\hat{j} + A_zB_x\,\hat{k} \cdot \hat{j} + A_zB_y\,\hat{k} \cdot \hat{j} + A_zBl_z\,\hat{k} \cdot \hat{k}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$\because$ $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

तथा $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$

$\therefore$ $\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

उदाहरण 11. सिद्ध कीजिये कि वेक्टर $\vec{A} = 4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{B} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ परस्पर लम्बवत् हैं।

हल : हम जानते है। कि दो वेक्टरों के परस्पर लम्बवत् होने के लिए उनका स्केलर गुणन शून्य होना चाहिए।

अर्थात् $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

दिये गये वेक्टरो का स्केलर गुणन

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (4\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})\cdot(\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}))$$
$$= 4\hat{i}\cdot\hat{i} + 8\hat{i}\cdot\hat{k} - 4\hat{i}\cdot\hat{j}\cdot\hat{i} - 2\hat{j}\cdot\hat{i} + 4\hat{k} - 2\hat{k}\cdot\hat{k}$$
$$= 4 + 8\times 0 - 4\times 0 - 0 - 2 - 0 + 2\times 0 + 4 + 0 - 2$$
$$= 4 - 4 = 0$$

अत: वेक्टर $\vec{A}$ तथा वेक्टर $\vec{B}$ परस्पर लम्बवत् हैं।

उदाहरण 12. P का वह मान ात कीजिये जिसके लिए वेक्टर $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + p\hat{k}$ तथा $\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ परस्पर लम्बवत् हों।

हल : वेक्टर $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के परस्पर लम्बवत् होने के लिए $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

प्रश्न से $\vec{A}\cdot\vec{B} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + p\hat{k})\,(2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

$$= 4\hat{i}\cdot\hat{i} - 2\hat{i}\cdot\hat{j} + 2\hat{i}\cdot\hat{k} + 4\hat{j}\cdot\hat{i} + 2\hat{j}\cdot\hat{k} + 2p\hat{k}\cdot\hat{i} - p\,\hat{k}\cdot j + \hat{k}\cdot\hat{k}$$
$$= 4\times 1 - 2\times 0 + 2\times 0 + 4\times 0 - 2\times 1 + 2\times 0 + 2p\times 0 - p\times 0 + p\times 1$$
$$= 4 - 2 + p = 2 + p$$

$\therefore$ $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

$\therefore$ $2 + p = 0$ या $P = -2$

उदाहरण 13. तीन वेक्टर $\vec{P}$, $\vec{Q}$ व $\vec{R}$ इस प्रकार हैं कि $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$ तथा उनके परिमाण क्रमश 3, 4 व 5 हैं। वेक्टर $\vec{P}$ व $\vec{R}$ के बीच कोण बताइये।

हल—दिया है कि

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

या $$\vec{Q} = \vec{R} - \vec{P}$$

दोनो ओर का सवत: स्केलर गुणन लेने पर

$$\vec{Q}\cdot\vec{Q} = (\vec{R} - \vec{P})\,(\vec{R} - \vec{P})$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$\vec{R}\cdot\vec{R} = \vec{R}\cdot\vec{P} - \vec{P}\cdot\vec{R} + \vec{P}\cdot\vec{P}$$

या $$Q^2 = R^2 - 2\vec{R}\cdot\vec{P} + P^2 \qquad (\text{क्योंकि } \vec{R}\cdot\vec{P} = \vec{P}\cdot\vec{R})$$

या $$(Q^2 = R^2 - P^2 - 2R\cdot P\cos\theta) \quad (\text{क्योंकि } \vec{R}\cdot\vec{P} = R\cdot P\cos\theta)$$

$$\therefore \quad 2RP\cos\theta = R^2 + P^2 - Q^2$$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{R^2 + P^2 - Q^2}{2RP}$$

P, Q तथा R के मान रखने पर

$$\cos\theta = \frac{25+9-16}{2\times5\times3}$$

$$= \frac{18}{30} = \frac{3}{5} = 0{\cdot}6$$

$$\theta = \cos^{-1}(0{\cdot}6)$$

$$= 53^\circ$$

उदाहरण 14. यदि $\vec{A}$ व $\vec{B}$ दो वेक्टर है। तो $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ के सम्बन्ध में निष्कर्ष निकाले यदि

(i) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ तथा $A^2 + B^2 = C^2$

(ii) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ तथा $A + B = C$

हल : (i) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ दोनों ओर का स्वत: स्केलर गुणन करने पर

$$(\vec{A} + \vec{B})\cdot(\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C}\cdot\vec{C}$$

या $$\vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} = \vec{C}\cdot\vec{C}$$

या $$A^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B} + B^2 = C^2$$

$\because$ $$A^2 + B^2 = C^2$$

$\therefore$ $$C^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B} = C^2$$

या $$2\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

अत: $\vec{A}$ व $\vec{B}$ व परस्पर लम्बवत् है।

(ii) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ स्वत: स्केलर गुणन करने पर

$$(\vec{A} + \vec{B})\cdot(\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C}\cdot\vec{C}$$

या $$\vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{B} = \vec{C}\cdot\vec{C}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

या $A^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B} + B^2 = C^2$ ...(1)

प्रश्न से $(A + B) = C$

या $(A + B)^2 = C^2$

या $A^2 + B^2 + 2AB = C^2$ ...(2)

(1) व (2) से, $2\vec{A}\cdot\vec{B} = 2AB$

या $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB$

या $AB\cos\theta = AB$

या $\cos\theta = 1$

$\therefore$ $\theta = 0$

अत: $\vec{A}$ व $\vec{B}$ समानन्तर हैं।

उदाहरण 15. दो वेक्टरों का योग तथा अन्तर परस्पर लम्बवत् है। सिद्ध कीजिये कि दोनों वेक्टर परिमाण में बराबर हैं।

हल : माना कि $\vec{A}$ व $\vec{B}$ दो वेक्टर हैं। इनका योग $(\vec{A} + \vec{B})$ व अन्तर $(\vec{A} - \vec{B})$ होगा। प्रश्नानुसार ये दोनों परस्पर लम्बवत् हैं। तो इनका स्केलर गुणन शून्य होना चाहिए।

अर्थात् $(\vec{A} + \vec{B})\cdot(\vec{A} - \vec{B}) = 0$

अथवा $\vec{A}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{A} - \vec{B}\cdot\vec{B} = 0$

$\therefore$ $A^2 - B^2 = 0$ क्योंकि $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

या $A^2 = B^2$ या $A = B$

उदाहरण 16. दो वेक्टरों के योग व अन्तर वेक्टर परिमाण में समान हैं। अर्थात् $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$, तो सिद्ध कीजिये कि वेक्टर $\vec{A}$ व $\vec{B}$ परस्पर लम्बवत् हैं।

हल : प्रश्नानुसार, $(\vec{A} + \vec{B}) = (\vec{A} - \vec{B})$

या $|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A} - \vec{B}|^2$

चूँकि किसी वेक्टर का उसी वेक्टर से स्केलर गुणन उस वेक्टर के परिमाण के वर्ग के बराबर होता है। अत:

$$|\vec{A} + \vec{B}|\,|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} + \vec{B}|\,|\vec{A} - \vec{B}|$$

या $\vec{A}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B} = \vec{A}\cdot\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{B} - \vec{B}\cdot\vec{A} + \vec{B}\cdot\vec{B}$

या $\because$ $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ $\because$ $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$A^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B} + B^2 = A^2 - \vec{A}\cdot\vec{B} + B^2$$

या $$4\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

या $$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

चूँकि $\vec{A}$ व $\vec{B}$ कस सकेलर गुणन शून्य है। अत: ये रस्र लम्बवत् हैं

उदाहरण 17. यदि $\vec{A}, \vec{B}$ तथा $\vec{C}$ शून्य वेक्टर नहीं हैं तथा $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ एवं $\vec{B}\cdot\vec{C} = 0$ तो $\vec{A}\cdot\vec{C}$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल : प्रश्नानुसार $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ अर्थात् $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ परस्पर लम्बवत् हैं।

$\vec{B}\cdot\vec{C} = 0$ अर्थात् $\vec{B}$ व $\vec{C}$ भी रस्पर लम्बवत् हैं।

अत: स्पष्ट है। कि वेक्टर $\vec{A}$ व $\vec{C}$ दोनों वेक्टर $\vec{B}$ के लम्बवत् हैं। अर्थात् $\vec{A}$ व $\vec{C}$ समानन्तर हैं। अत एवं

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = AC\cos\theta = AC$$

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = AC$$

उदाहरण 18. यदि $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ हो तो $\vec{B}$ व $\vec{C}$ के बीच कोण ज्ञात कीजिये।

हल : प्रश्न से $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$

या $$\vec{A} = \vec{C} - \vec{B}$$

दोनों पखों का स्वत: स्केल गुणन लेने पर,

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = (\vec{C} - \vec{B})\cdot(\vec{C} - \vec{B})$$

या $$\vec{A}\cdot\vec{A} = \vec{C}\cdot\vec{C} - \vec{C}\cdot\vec{B} - \vec{B}\cdot\vec{C} + \vec{B}\cdot\vec{B}$$

या $$A^2 = C^2 - 2\vec{B}\cdot\vec{C} + B^2$$ क्योंकि $\vec{C}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{C}$

या $$2\vec{B}\cdot\vec{C} = C^2 - A^2 + B^2$$

$\because$ $$\vec{B}\cdot\vec{C} = BC\cos\theta$$ जहाँ θ वेक्टर $\vec{B}$ व $\vec{C}$ के बीच का कोण है।

$\therefore$ $$2BC\cos\theta = C^2 + B^2 - A^2$$

या $$\cos\theta = \frac{C^2 + B^2 - A^2}{2BC}$$

$\therefore$ $$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{C^2 + B^2 - A^2}{2BC}\right]$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 2.8 परिचय (Introduction)

प्राकृतिक घटनाओं के अन्वेषण मे मापन की आवश्यकता और उपयोगिता ने प्रकृति के तमाम अनसुलझे रहस्यों को उद्घाटित कर दिया। इन्हीं अनसुलझे रहस्यों मे से एक बहुत ही कौतूहलपूर्ण एवं रुचिकारक विषय था—पिण्ड की विराम अवस्था (State of rest) अथवा उसकी गति की अवस्था (State of motion)।

किसी पिण्ड की विराम अथवा गति की अवस्था के लिए बल (Force) नामक कारक (Factor) उत्तरदायी पाया गया तथा यह भी पाया गया कि **बल, प्रकृति में सर्वव्यापक है**—पूरे ब्रह्माण्ड में खगोलीय पिण्डों के मध्य—वृहद् स्तर पर अथवा परमाणु के अवयवी कणों के मध्य—सूक्ष्म स्तर पर किसी न किसी रूप में यह उपस्थित है।

बल, किसी पिण्ड में गति अथवा विराम की अवस्था परिवर्तन का मूल कारक है।

§ 2.9 बल (Force)

सामान्यतया **बल, धक्का या खिंचाव है।**

"Force denotes, generally, Push or Pull."

इसे निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है—

"बल, वह बाह्य कारक है जो किसी वस्तु के विराम अथवा एक समान गति की अवस्था में परिवर्तन कर देता है या करने का प्रयत्न करता है, अथवा उसे विरूपित कर देता है।"

"Force is an external agent which changes or tends to change the state of rest or of uniform motion of a body or deforms a body."

स्पष्ट है किसी पिण्ड पर बल लगाने से पिण्ड पर निम्न प्रभाव हो सकते हैं—

(1) पिण्ड के विराम की अवस्था में परिवर्तन हो सकता है।

(2) गतिमान पिण्ड का वेग घट सकता है अथवा बढ़ सकता है।

(3) गतिमान पिण्ड के गति की दिशा बदल सकती है।

(4) पिण्ड का रूप अथवा आकार अथवा दोनों बदल सकता है।

"बल एक सदिश राशि (Vector quantity) है, इसे F से प्रदर्शित करते हैं।"

बल का SI मात्रक **किग्रा मी से$^{-2}$** होता है, इसे **न्यूटन** (newton) भी कहते हैं। इसका CGS मात्रक **डाइन** (dyne) कहलाता है।

2.9.1 बलों का वर्गीकरण (Classification of Forces)

बलों को उनकी प्रकृति (Nature) के आधार पर निम्न प्रकार से वर्गीकृत किया जाता है—

(1) सम्पर्क बल (Contact Force)—

"वे बल जो वस्तुओं के सम्पर्क में आकर कार्य करते हैं, सम्पर्क बल कहलाते हैं।"

"Forces which act on objects by coming in contact with them are called contact forces."

सभी प्रकार के धक्के या खिंचाव के बल जो पिण्ड के सम्पर्क से प्रभाव में आते हैं, जैसे रस्साकशी में रस्से को बल लगाकर खींचना, बैल द्वारा बैलगाड़ी खींचना, गेंद पर ठोकर मारना, किसी भी मोटर अथवा रेल के इंजन द्वारा पहिये को घुमाने के लिए शाफ्ट पर बल लगाना इत्यादि।

(2) असम्पर्क बल (Non-contact Force)—

"वह बल जो वस्तु से सीधे सम्पर्क में न आकर आकाश (space) माध्यम से वस्तु पर कार्य करता है असम्पर्क बल कहलाता है।"

"A force which does not make a direct contact with a body, but acts through space is called a non-contact force or force at a distance."

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

सभी प्रकार के चुम्बकीय बल, वैद्युत चुम्बकीय बल, गुरुत्वीय बल तथा वैद्युत आकर्षण अथवा प्रतिकर्षण के बल असम्पर्क बल के उदाहरण हैं।

(3) अनुवर्ती बल (Consequential Forces)—

''वे बल जिनका स्वतन्त्र अस्तित्व नहीं होता, परन्तु जब कोई सम्पर्क बल किसी पिण्ड पर कार्यकारी होता है तब परिणामी बल अस्तित्व में आते हैं।''

''These forces come into play when a contact force is exerted on an object. They do not exist on their own.''

घर्षण बल, प्रत्यानयन बल, तनी अथवा कसी हुई स्प्रिंग में प्रत्यास्थ बल आदि इस बल के उदाहरण हैं।

2.9.2 केन्द्रीय बल (Central Forces)

किसी स्थिर बिन्दु की ओर अथवा उससे दूर की ओर कार्य करने वाले बल को केन्द्रीय बल कहते हैं।

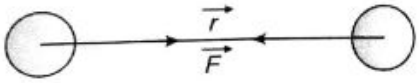
इस बल का परिमाण स्थिर बिन्दु (fixed point) से दूरी पर निर्भर करता है।

''Central force acts towards or outwards a fixed point and the magnitude of this force depends upon the distance from the fixed point to the point of action.''

चित्र 2.22 के अनुसार, गणितीय रूप में

केन्द्रीय बल $\vec{F}(r) = f(r)\hat{r}$

जहाँ $f(r) = |\vec{F}(r)|$



चित्र 2.22

यहाँ $\hat{r}$ केन्द्रीय बल $\vec{F}$ की दिशा में एकांक वेक्टर है,

अर्थात् $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$,

केन्द्रीय बल के अधीन गति करने वाले पिण्ड पर बल आघूर्ण ($\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r}$) कार्य नहीं करता है तथा पिण्ड का कोणीय संवेग संरक्षित (angular momentum conserve) रहता है।

केन्द्रीय बल के सरलतम उदाहरण हैं—

(i) किन्हीं दो द्रव्यमान कणों के मध्य लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल (न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण का नियम)।

(ii) स्थिर आवेशों के मध्य लगने वाला वैद्युत आकर्षण या प्रतिकर्षण बल (कूलॉम का नियम)।

(iii) स्प्रिंग से जुड़े द्रव्यमान की गति में बल जब स्प्रिंग को खींचकर या दबा कर छोड़ा गया हो।

शून्य बल-आघूर्ण तथा कोणीय संवेग संरक्षण को गणितीय विधि से सिद्ध किया जा सकता है। माना, कोई कण निम्न केन्द्रीय बल के अन्तर्गत गतिमान है—

$$\vec{F} = f(r)\,\vec{r}$$

कण पर लगने वाला बल-आघूर्ण

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

(क्योंकि दो समान्तर सदिशों का सदिश गुणन $\vec{r} \times \vec{F}$ शून्य होता है।)

(द्वितीय हल : $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = f(r)\vec{r} \times \vec{r} = f(r)\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{r} = \frac{f(r)}{r}\vec{r} \times \vec{r} = \vec{\tau} = 0$

(क्योंकि दो समान्तर सदिशों का सदिश गुणन ($\vec{r} \times \vec{r}$) शून्य होता है)

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

यदि, कण का कोणीय संवेग $\vec{L}$ हो, तो

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

अथवा $\vec{L}$ = **नियतांक**

इस प्रकार, केन्द्रीय बल के अन्तर्गत कण का कोणीय संवेग नियत (संरक्षित) रहता है।

§ 2.10 गति (Motion)

वस्तुत: किसी पिण्ड की दो अवस्थायें होती हैं—

(i) विराम अवस्था, एवं (ii) गति अवस्था।

2.10.1 विराम अवस्था (State of Rest)

''जब किसी पिण्ड की अवस्था में समय बदलने के साथ आस-पास के सापेक्ष, परिवर्तन न हो रहा हो तो पिण्ड विराम अवस्था में कहा जाता है।''

''When a body does not change its position in space with lapse of time, the body is said to be at rest.''

2.10.2 गति अवस्था (State of Motion)

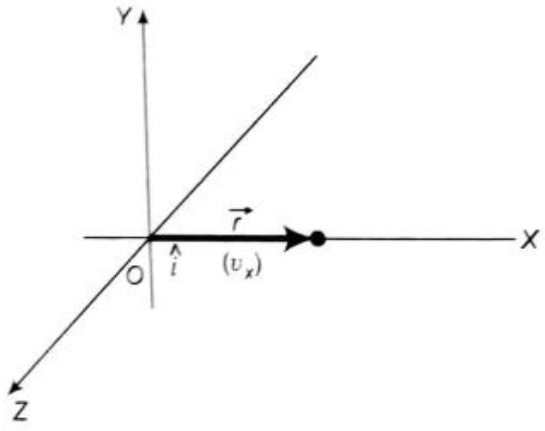
''जब किसी पिण्ड की अवस्था में समय बदलने के साथ-साथ आस-पास के सापेक्ष, परिवर्तन हो रहा हो तो पिण्ड गति की अवस्था में कहा जाता है।''

''When a body changes its position in space with lapse of time, it is said to be in motion.''

किसी पिण्ड के गतिशील होने पर, उसकी अवस्था में होने वाले परिवर्तन को स्थिति विशेष के प्रेक्षक (Particular observer) द्वारा किसी चयनित निर्देश तंत्र (Particular frame of reference)* के सापेक्ष प्रेक्षित (observe) किया जाता है। यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि केवल सापेक्ष गतियों (Relative motions) का ही मापन (measurement) सम्भव है, यथार्थ गतियाँ (Absolute motions) अर्थहीन (meaningless) होती हैं।

किसी पिण्ड की गति को निर्देश तंत्र के आधार पर निम्न प्रकार से वर्गीकृत किया जाता है।

(I) एक-आयामी गति (Motion in one dimension)—किसी पिण्ड की एक सरल रेखा में होने वाली गति एक निर्देशाक्ष पर होने वाली गति कहलाती है। इस गति का सम्पूर्ण वर्णन, गति के केवल एक घटक, वेग अथवा त्वरण से किया जा सकता है, (चित्र 2.23)।



पिण्ड की एक-आयामी गति में स्थिति

चित्र 2.23

''Motion of a body in a straight line is one dimensional (1-D) motion. Such motion can be described by only one component of its velocity or acceleration.''

एक-आयामी गति का सरलतम उदाहरण किसी पिण्ड को सरल रेखा में खिसकाना, 100 मीटर की फर्राटा दौड़ में धावक का एक ही दिशा में भागना, इत्यादि हैं।

---

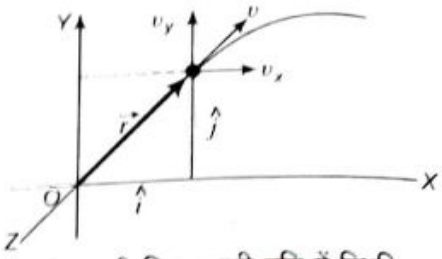
* निर्देश तन्त्र (आयाम)—निर्देश तन्त्र प्रायोगिक कार्यों हेतु अक्षों का वह समुच्चय है जो किसी कण के विराम अथवा गति की अवस्था में उसकी अलग-अलग तात्क्षणिक स्थिति (Instantaneous position) को दर्शाता है।

"A set of axes, taken as being for some practical purpose to be at rest, that enables the position of a point or body in space to be [illegible] at any instant of time."

AYC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

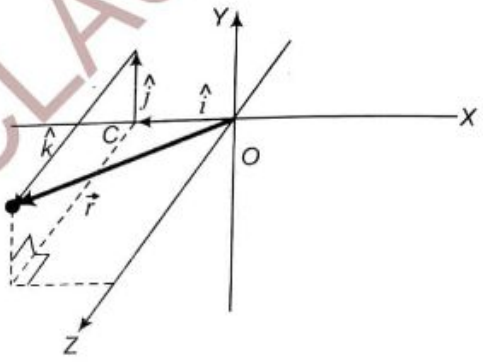
(II) द्वि-आयामी गति या एक समतल में गति (Motion in two dimensions or motion in a plane)—यदि किसी पिण्ड को पृथ्वी तल के सापेक्ष ऊर्ध्व तल मे ऊर्ध्वाधर से भिन्न ($\neq 90°$) किसी कोण पर फेंका जाय तो पिण्ड क्षैतिज (Horizontal) तथा ऊर्ध्व (Vertical) अक्षो पर क्रमशः परास (Range) तथा ऊंचाई (Height) दर्शाते हुए गति करता है। इस गति को प्रक्षेप्य गति (Projectile motion) कहते है। सभी प्रक्षेप्य गतियां तथा वृत्तीय गतियाँ एक समतल मे गति अथवा द्वि आयामी गति (motion in two-dimension) के उदाहरण है। द्वि आयामी गति में पिण्ड के वेग (अथवा त्वरण) को, दो परस्पर लम्बवत घटकों (v_x और v_y) से निरूपित किया जा सकता है, चित्र (2.24)।



पिण्ड की द्वि-आयामी गति में स्थिति
चित्र 2.24

"All projectile and circular motions are common examples of two dimensional (2-D) motion or motion in a plane. Its velocity (or acceleration) can be described by two components in any two mutually perpendicular directions (v_x and v_y)."

(III) त्रि-आयामी गति (Motion in three dimensions)—आकाश में उड़ती हुई चिड़िया की गति अथवा किसी पेड़ पर एक डाल से दूसरे डाल पर कूदते समय बन्दर की गति, त्रि-आयामी गति के सरलतम उदाहरण हैं। त्रि-आयामी गति में, पिण्ड की गति के वेग तथा त्वरण को गति के तीन परस्पर लम्बवत घटकों (v_x, v_y तथा v_z एवं a_x, a_y तथा a_z) में वियोजित कर प्रदर्शित किया जा सकता है (चित्र 2.25)।



पिण्ड की त्रि-आयामी गति में स्थिति
चित्र 2.25

"In a three dimensional (3-D) motion, velocity and acceleration of a particle can be resolved in three components (v_x, v_y, v_z and a_x, a_y, a_z). Here x, y and z are any three mutually perpendicular axes."

अतः "**किसी पिण्ड की एक-आयामी गति में स्थिति एक-चर (माना x) से तथा द्वि-आयामी गति में दो-चर (माना x तथा y) से तथा त्रि-आयामी गति में तीन-चर (x, y तथा z) से निरूपित किया जाता है।**"

"The position of a particle in one-dimensional (1-D) motion is described by one variable (say x). In a 2-D motion it involves two variables (normally x and y) and in a 3-D motion three variables x, y and z."

§ 2.11 गति सम्बन्धी न्यूटन के नियम* (Newton's Laws of Motion)

किसी पिण्ड पर लग रहे बल तथा उसमें उत्पन्न सरल रेखीय गति के सम्बन्ध में न्यूटन के तीन प्रमुख नियम इस प्रकार है

2.11.1 प्रथम नियम (First law)

यदि कोई पिण्ड विराम अवस्था में है अथवा सरल रेखा में एक समान गति की अवस्था में है तो वह तब तक उसी अवस्था में रहेगा जब तक कि उस पर कोई बाह्य बल न लगाया जाये। गति सम्बन्धी न्यूटन के इस प्रथम नियम को जड़त्व का नियम (Law of Inertia) भी कहते हैं।

*न्यूटन के गति सम्बन्धी नियम जड़त्वीय निर्देश तंत्र ● (Inertial frame of reference) सरल रेखीय एकसमान गति के लिए ही सही है, त्वरित निर्देश तंत्र (Accelerated frame of reference) के लिए यह नियम लागू नहीं होता है।

● **Inertial Frame of Reference** A frame of reference in which bodies move in straight lines with constant speeds unless acted upon by external forces i.e. a frame of reference in which bodies are not accelerated. **Newton's laws of motion are valid in an inertial system but not in a system that is itself accelerated with respect to such a frame.**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

"Every object in this universe will continue its state of rest or uniform motion in a straight line, unless acted upon by some external force."

2.11.2 संवेग (Momentum)

किसी वस्तु के द्रव्यमान तथा वेग के गुणनफल को उस वस्तु का संवेग कहते हैं। यह एक सदिश राशि है तथा इसकी दिशा वही होती है जो वेग की दिशा है। इसे $\vec{p}$ से प्रदर्शित करते हैं। यदि किसी m द्रव्यमान की वस्तु का वेग $\vec{v}$ हो तो संवेग $\vec{p} = m\vec{v}$ संवेग का मात्रक 'किग्रा-मीटर/सेकण्ड' अथवा 'न्यूटन-सेकण्ड' है।

2.11.3 संवेग परिवर्तन तथा गति सम्बन्धी न्यूटन का द्वितीय नियम (Charge in Momentum and Newton's Second law of motion)

"किसी पिण्ड पर लगा वास्तविक बल पिण्ड के द्रव्यमान तथा उसमें उत्पन्न त्वरण के गुणनफल के बराबर होता है।"

"The net force on a body is equal to the product of the body's mass and the acceleration of the body."

गति सम्बन्धी न्यूटन के इस द्वितीय नियम को **बल संरक्षण का नियम** (Law of conservation of force) अथवा **रेखीय संवेग परिवर्तन की दर के संरक्षण का नियम** (Law of conservation of rate of change of linear momentum) भी कहते हैं। इस नियम के अनुसार—

"किसी पिण्ड के रेखीय संवेग परिवर्तन की दर पिण्ड पर लगे बाह्य बल के समानुपाती होता है तथा इसकी दिशा आरोपित बलों की दिशा होती है।"

"The rate of change of the linear momentum is directly proportional to the impressed force, and takes the direction in which the force acts."

यदि किसी पिण्ड का द्रव्यमान m, प्रारम्भिक वेग u तथा t समयान्तराल के पश्चात् अंतिम वेग v हो तो पिण्ड का प्रारम्भिक संवेग

$$P_1 = mu$$

तथा पिण्ड का अन्तिम संवेग

$$P_2 = mv$$

अत: t समयान्तराल में पिण्ड में संवेग परिवर्तन

$$\Delta P = P_2 - P_1 = mv - mu = m(v-u)$$

अत: इकाई समय (1 सेकण्ड) में रेखीय संवेग परिवर्तन = रेखीय संवेग परिवर्तन की दर

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m(v-u)}{t} \quad \text{...(i)}$$

$\because$ $$v = u + at$$

$\therefore$ $$a = \frac{v-u}{t} \quad \text{...(ii)}$$

समीकरण (ii) का मान समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर

रेखीय संवेग परिवर्तन की दर $= ma$ ...(iii)

गति सम्बन्धी न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार,

रेखीय संवेग परिवर्तन की दर $\propto$ वास्तविक बल (F) ...(iv)

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

समीकरण (iii) तथा (iv) से

$$F \propto ma$$

या

$$F = k\, ma \quad \ldots(v)$$

जहाँ k एक समानुपाती नियतांक है।

यदि इकाई द्रव्यमान के पिण्ड मे इकाई त्वरण हो तो पिण्ड पर लगा बल इकाई होगा अत:

$$1 = k \times 1 \times 1$$

या

$$k = 1$$

k का मान समीकरण (v) मे रखने पर

$$\boldsymbol{F = ma^*} \quad \ldots(1)$$

स्पष्ट है $\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}$

अर्थात् किसी वस्तु की संवेग-परिवर्तन की दर उस पर आरोपित बाह्य बल के बराबर होती है तथा संवेग-परिवर्तन की दिशा सदैव बल की दिशा के अनुदिश होती है। यह न्यूटन के गति के दूसरे नियम का एक अन्य रूप है।

अब यदि $\vec{F} = 0$ तो $\Delta \vec{p}/\Delta t = 0$

अर्थात् यदि किसी वस्तु पर कोई बाह्य बल कार्य न कर रहा हो तो उस वस्तु के संवेग में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

2.11.4 संवेग संरक्षण का नियम (Law of Conservation of Momentum)

यदि दो अथवा दो से अधिक वस्तुओं के किसी निकाय पर कोई बाह्य बल कार्य न करें तो निकाय का कुल संवेग संरक्षित (अर्थात् नियत) रहता है। इसे 'संवेग संरक्षण का नियम' कहते हैं।

न्यूटन के गति विषयक नियमानुसार,

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

यदि निकाय पर कोई बाह्य बल कार्य न करे तो $\vec{F} = 0$

अत: $\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = 0$ अथवा $\Delta \vec{p}$ अथवा $\vec{p}$ = नियतांक

यही संवेग संरक्षण का नियम है।

संवेग संरक्षण सम्बन्धी कुछ तथ्य (Some Facts Raganding Conservation of Momention)

(i) बाह्य बल के अभाव मे किसी निकाय का द्रव्यमान केन्द्र नियत वेग से गति करता है, तो उसका रेखीय संवेग संरक्षित रहता है।

$$\vec{F}_{\text{external}} = 0 \text{ तो } \vec{v}_{cm} = \text{नियत}$$

(ii) केन्द्रीय बलो के प्रभाव मे कणो का रेखीय संवेग संरक्षित रहता है।

(iii) सभी प्रकार के कणो की टक्करो (प्रत्यास्थ या अप्रत्यास्थ) मे रेखीय संवेग संरक्षित रहता है।

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

(iv) बाहरी बलो की अनुपस्थिति मे निकाय के अलग अलग कणो के संवेग परिवर्तित हो सकते हैं, लेकिन निकाय का कुल संवेग अपरिवर्तित रहता है।

*Mathematically, force is the product of mass and acceleration

AKC TECHNICAL CLASSES

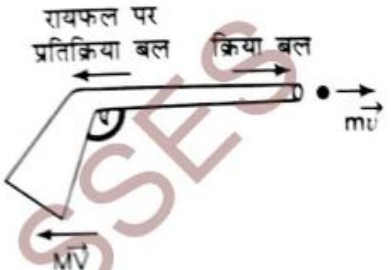
Scanned with CamScanner

(v) आन्तरिक बलों से निकाय के संवेग में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

(vi) रेखीय संवेग संरक्षण का नियम न्यूटन के गति के नियमों पर आधारित है। यह नियम प्रकृति का एक मूलभूत नियम है। जिसका कोई अपवाद नहीं है।

संवेग संरक्षण नियम के कुछ उदाहरण (Some of Conservation of Linear Momentum)

(i) बन्दूक का प्रतिक्षेप वेग (Recoil of gun)—चित्रानुसार बन्दूक फायर होने से पूर्व निकाय (बन्दूक + गोली) पर लगने वाला बाह्य बल शून्य रहता है फलस्वरूप इसका प्रारम्भिक कुल रैखिक संवेग शून्य होता है, अत: बन्दूक फायर होने के बाद संवेग संरक्षण के नियमानुसार बाद का संवेग भी शून्य रहेगा।



चित्र 2.26

अत: $M\vec{V} + m\vec{v} = 0$

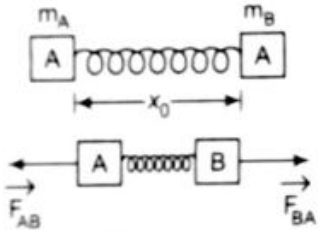
$$M\vec{V} + m\vec{v} = \vec{p}$$

$$\vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v}$$

ऋणात्मक चिन्ह का अर्थ है, गोली तथा बन्दूक एक दूसरे के विपरीत दिशा में गतिमान होते हैं।

तथा $$\frac{K_{\text{बन्दूक}}}{K_{\text{गोली}}} = \frac{m}{M} \quad \because \quad K_{\text{बन्दूक}} = \frac{P^2}{2M},\ K_{\text{गोली}} = \frac{P^2}{2m}$$

(ii) चिकनी क्षैतिज मेज पर रखे तथा स्प्रिंग से सम्बद्ध m_1 व m_2 द्रव्यमान के गुटकों को दबाकर या खींचकर छोड़ने पर निकाय का रेखीय संवेग संरक्षित रहता है।



चित्र 2.27

प्रारम्भिक संवेग = 0 अन्तिम संवेग = $M_A\vec{V}_A + M_B\vec{V}_B = 0$

$$\vec{V}_B = -\frac{M_A}{M_B}\vec{V}_A$$

तथा $$\frac{K_A}{K_B} = \frac{M_B}{M_A}$$

(iii) प्रतिक्षेप बल (Recoil force)—यदि तोप से m द्रव्यमान के n गोले t समय में छोड़े जाते हैं तो प्रतिक्षेप बल F = संवेग परिवर्तन की दर =

चित्र 2.28

प्रतिक्रिया बल = प्रणोद (thrust) = $\frac{nmv}{t}$ न्यूटन

(iv) नाव पर सवार व्यक्ति यदि नाव से नदी के किनारे पर कूदता है तो नाव पीछे की ओर खिसकती है।

(v) हवा भरे गुब्बारे से यदि हवा निकलती है तो गुब्बारा विपरीत दिशा में गति करता है।

(vi) राकेट का जेट प्रणोदन (Jet propulsion) परिवर्तित द्रव्यमान के साथ संवेग संरक्षण सिद्धान्त का पालन करता है।

2.11.5 बल का आवेग (Impulse of a Force)

जब कोई अधिक परिमाण का बल थोड़े समयान्तराल के लिए किसी वस्तु पर लगाया जाता है तो इस दशा में बल और समयान्तराल के गुणनफल को 'बल का आवेग' कहते हैं। उदाहरणार्थ, क्रिकेट के खेल में बल्ले से गेंद को मारना, हथौड़े से कील ठोकना आदि।

माना कि किसी वस्तु पर अधिक परिमाण के बल $\vec{F}$ को Δt समयान्तराल के लिए लगाया जाता है तब

$$\text{बल का आवेग} = \vec{F} \times \Delta t$$

AKG TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

आवेग एक सदिश राशि है तथा इसकी दिशा सदैव बल की दिशा के अनुदिश होती है। यदि m द्रव्यमान के पिण्ड पर बल $\vec{F}$ लगाने से उसके वेग मे परिवर्तन $\Delta \vec{v}$ हो तो न्यूटन के गति के द्वितीय नियमानुसार,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

अथवा $$\vec{F}\Delta t = m\Delta \vec{v}$$

परन्तु पिण्ड का संवेग परिवर्तन $\Delta \vec{p} = m\Delta \vec{v}$ अत: $\vec{F}\Delta t = \Delta \vec{p}$

अर्थात् किसी वस्तु को दिया गया आवेग, उसमे उत्पन्न संवेग-परिवर्तन के बराबर होता है। आवेग के मात्रक वही हैं जो संवेग के है।

2.11.6 तृतीय नियम (Third law)

जब दो पिण्ड सम्पर्क में आते हैं तब दोनों पिण्डों द्वारा एक-दूसरे पर लगाया गया बल सदैव परिमाण में बराबर एवं दिशा में विपरीत होता है।

''When two bodies interact, the forces on the bodies from each other are always equal in magnitude and opposite in direction.''

गति सम्बन्धी न्यूटन के तृतीय नियम को **क्रिया-प्रतिक्रिया का नियम*** (Law of action-reaction) भी कहते हैं।

संवेग संरक्षण के नियम से न्यूटन के तृतीय नियम की उत्पत्ति—माना कि दो पिण्ड एक-दूसरे से टकराते हैं। टकराते समय वे एक-दूसरे पर बल $\vec{F}_{12}$ व $\vec{F}_{21}$ आरोपित करते हैं। जिससे उनके संवेग में परिवर्तन $\Delta \vec{p}_1$ व $\Delta \vec{p}_2$ हो जाते हैं। यदि दोनो पिण्ड Δt समयान्तराल तक एक-दूसरे के सम्पर्क में रहते हैं तो सूत्र, आवेग = संवेग-परिवर्तन, के अनुसार

$$\vec{F}_{12}\Delta t = \Delta \vec{p}_2 \text{ तथा } \vec{F}_{21}\Delta t = \Delta \vec{p}_1$$

परन्तु टकराते समय दोनों पिण्ड एक ही संयुक्त पिण्ड के दो भाग माने जा सकते हैं, और इस संयुक्त पिण्ड पर कोई बाह्य बल नही लगता है। अत: न्यूटन के द्वितीय नियमानुसार,

$$\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0 \text{ अथवा } \vec{F}_{21}\Delta t + \vec{F}_{12}\Delta t = 0$$

$$\text{अथवा } \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0 \text{ अथवा } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

यही न्यूटन का गति विषयक तीसरा नियम है।

§ 2.12 सरल रेखीय गति के समीकरण (Equations of Rectilinear Motion)

यदि किसी गतिमान पिण्ड के त्वरण की दिशा सदैव उसके प्रारम्भिक वेग की दिशा की तरफ बनी रहे तो इस प्रकार की गति को सरल रेखीय गति या ऋजु रेखीय गति कहते हैं।

यदि पिण्ड u प्रारम्भिक वेग से एक समान त्वरण a के अन्तर्गत गति करते हुए t सेकण्ड में s विस्थापन पश्चात् v अन्तिम वेग प्राप्त करता है तो u, a, t, s तथा v को निम्न प्रकार समीकरणों में व्यक्त किया जाता है—

$$v = u + at \quad \ldots (2)$$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \quad \ldots (3)$$

एवं $$v^2 = u^2 + 2as \quad \ldots (4)$$

उपरोक्त समीकरणो मे पिण्ड मे त्वरण व गति की दिशा समान होने पर $+a$ तथा त्वरण व गति की दिशा विपरीत होने पर $-a$ का प्रयोग किया जाता है।

गुरुत्व के अधीन होने वाली सरल रेखीय गति के लिए उपरोक्त तीनो समीकरणों मे 'a' के स्थान पर 'g' का प्रयोग किया जाता है। नीचे से ऊपर जाते समय $-g$ तथा ऊपर से नीचे आते समय $+g$ का प्रयोग करते है।

*प्रत्येक क्रिया बल का समान मात्रा मे तथा विपरीत दिशा मे प्रतिक्रिया बल उत्पन्न होता है। किसी पिण्ड की सतह द्वारा लगाया गया प्रतिक्रिया बल सदैव सतह के लम्बवत होता है।

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 2.13 वृत्तीय गति (Circular Motion)

जब कोई पिण्ड किसी वृत्त की परिधि के अनुदिश गति करता है, तो इस गति को वृत्तीय गति कहते हैं।

"When a moving body follows the path of circumference of a circle, such motion is known as circular motion."

वृत्तीय गति करते पिण्ड का किसी बिन्दु पर वेग, उस बिन्दु पर खींची गयी स्पर्श रेखा (tangent) द्वारा दर्शाया जाता है। वृत्तीय गति दो प्रकार की होती है—

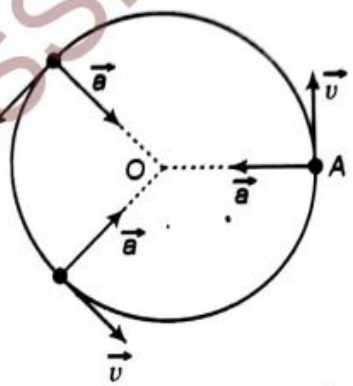
(I) एक समान वृत्तीय गति, एवं

(II) असमान वृत्तीय गति।

एक समान तथा असमान वृत्तीय गति (Uniform and non-uniform Circular Motions)

"यदि वृत्तीय गति करते पिण्ड की चाल एक समान अथवा नियत हो तो इस गति को एक समान वृत्तीय गति कहते हैं।"

एक समान वृत्तीय गति में पिण्ड के त्वरण का परिमाण नियत रहता है, परन्तु दिशा लगातार बदलती रहती है तथा सदैव कण के वेग की दिशा के लम्बवत् रहती है, चित्र (2.26)।



एक समान वृत्तीय गति
चित्र 2.26

वृत्तीय गति एक समतल में गति का उदाहरण है।

"A particle is in uniform circular motion if it travels around a circle or a circular arc at constant (uniform) speed. Although the speed does not vary, the particle is accelerating."

"यदि वृत्तीय गति करते पिण्ड की चाल असमान हो तो इस गति को असमान वृत्तीय गति कहते हैं।" उदाहरण—धागे में बँधे पिण्ड की ऊर्ध्व तल में गति।

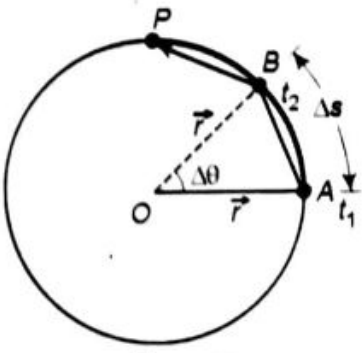
§ 2.14 कोणीय विस्थापन (Angular Displacement)

जिस प्रकार रेखीय गति (Linear motion) में किसी वस्तु की प्रारम्भिक तथा अन्तिम स्थितियों के मध्य न्यूनतम दूरी (distance) को रेखीय विस्थापन (Linear displacement) कहते हैं, इसी प्रकार वृत्तीय अथवा कोणीय गति में वस्तु द्वारा तय किया गया विस्थापन **कोणीय विस्थापन** (Angular displacement) कहलाता है।

"The angular displacement (θ) of a body is the angle in radians through which a point or line has been rotated in a specified axis."

कोणीय विस्थापन की माप वृत्तीय गति करते पिण्ड के द्वारा वृत्तीय पथ के केन्द्र पर अन्तरित कोण θ से करते हैं। इसका मात्रक रेडियन होता है।

चित्र 2.27 के अनुसार, माना कोई पिण्ड P, O केन्द्र वाले वृत्त की परिधि पर गति कर रहा है। प्रारम्भ में (अर्थात्, समय t_1 पर) पिण्ड बिन्दु A पर तथा किसी क्षण (समय t_2 पर) बिन्दु B पर है। कण की इन स्थितियों को क्रमशः वेक्टर $\vec{OA}$ तथा $\vec{OB}$ द्वारा प्रदर्शित किया गया है, इन्हें त्रिज्य वेक्टर (radial vector) कहते हैं। त्रिज्य वेक्टर का परिमाण (magnitude) वृत्त की त्रिज्या (r) के बराबर तथा दिशा उस त्रिज्या के अनुदिश, केन्द्र से बाहर की ओर (along the outward radius) होती है।



चित्र 2.27

समयान्तराल $\Delta t = t_2 - t_1$ में पिण्ड का त्रिज्य वेक्टर $\vec{OA}$ (r), Δs विस्थापित होकर कोण $\Delta\theta$ घूम जाता है, अतः पिण्ड का कोणीय विस्थापन

AVC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r} \text{ रेडियन} \qquad \left(\because \text{कोण} = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}\right) \qquad ...(5)$$

यदि समयान्तराल बहुत सूक्ष्म (Δt) हो तो Δs विस्थापन बहुत छोटा होगा, अत: कोणीय विस्थापन में बना कोण भी बहुत छोटा ($\Delta\theta$) होगा।

बड़े कोणीय विस्थापन θ, वेक्टर के नियमों का पालन नहीं करते हैं, अत: ये अदिश राशि हैं, परन्तु अति सूक्ष्म कोणीय विस्थापन $d\theta$ वेक्टर के नियमों का पालन करते हैं, अत: ये सदिश राशि हैं, इनकी दिशा घूर्णन अक्ष के अनुदिश होती है।

§ 2.15 कोणीय वेग-ω (Angular velocity - ω)

वृत्तीय अथवा कोणीय गति में किसी पिण्ड के कोणीय विस्थापन की समय दर को औसत कोणीय वेग कहते हैं। इसे ग्रीक शब्द ओमेगा ($\bar{\omega}$) से प्रदर्शित करते हैं, अर्थात्

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \frac{\text{रेडियन}}{\text{सेकण्ड}} \qquad ...(6)$$

अत: **पिण्ड द्वारा प्रति सेकण्ड होने वाले कोणीय विस्थापन को ही औसत कोणीय वेग कहते हैं।**

''Rate of change of angular displacement with respect to time is known as angular velocity.''

यदि समयान्तराल Δt का मान अत्यन्त सूक्ष्म (infinitesimal small) हो तो $\bar{\omega}$ को तात्क्षणिक कोणीय वेग (Instantaneous angular velocity) कहते हैं तथा इसे ω से प्रदर्शित करते हैं, अर्थात्

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

यदि कोणीय वेग एक समान हो तो $\omega = \bar{\omega}$

कोणीय वेग का मात्रक रेडियन/सेकण्ड तथा इसका विमीय सूत्र $[M^0L^0T^{-1}]$ है, यह एक सदिश राशि है।

यदि एक समान वृत्तीय गति करता हुआ कोई पिण्ड T समयान्तराल में पूरा एक चक्कर अर्थात् 360° (2π रेडियन) कोण तय करता हो, तो कण का औसत कोणीय वेग

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad ...(7)$$

या

$$\omega = 2\pi n \qquad \left(\because T = \frac{1}{n}\right) \qquad ...(8)$$

जहाँ n, 1 सेकण्ड में चक्करों की संख्या है।

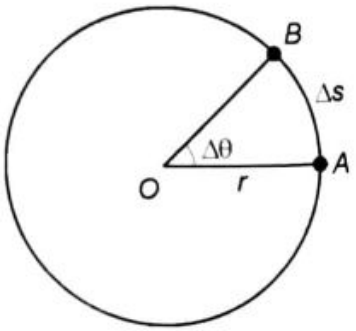
§ 2.16 कोणीय वेग तथा रेखीय वेग में सम्बन्ध (Relation between Angular Velocity and Linear Velocity)

यदि कोई पिण्ड एक निश्चित त्रिज्या के वृत्त की परिधि पर एक समान चाल से चलता है तथा यदि किसी समयान्तराल Δt में इसका कोणीय विस्थापन $\Delta\theta$ हो, (चित्र 2.28), तो कण का तात्क्षणिक कोणीय वेग

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \Delta\theta$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{r} \qquad \left(\because \Delta\theta = \frac{\Delta s}{r}\right)$$



चित्र 2.28

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{r}$$

$$\therefore \quad v \frac{1}{r} \qquad \left(\because \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v\right)$$

$$\omega = \frac{v}{r}$$

अथवा $$v = r\omega \qquad \ldots (9)$$

समीकरण (9) से

(i) ω के नियत मान के लिए, $v \propto r$ तथा

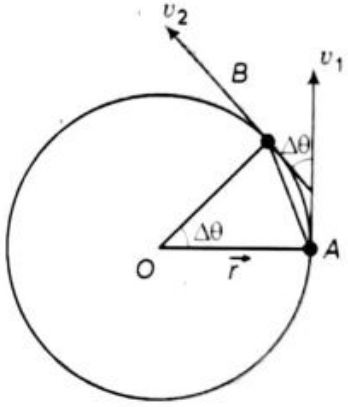
(ii) v के नियत मान के लिए, $\omega \propto \frac{1}{r}$.

§ 2.17 कोणीय त्वरण– α (Angular acceleration– α)

कोणीय अथवा घूर्णन गति में कोणीय वेग परिवर्तन की समय दर को कोणीय त्वरण कहते हैं।

"Rate of change of angular velocity with respect to time is known as angular acceleration."

माना, किसी वृत्तीय गति करते पिण्ड का किसी क्षण t_1 पर कोणीय वेग ω_1 तथा समय t_2 पर कोणीय वेग ω_2 है (चित्र 2.29)।



चित्र 2.29

अत: कोणीय त्वरण

$$\alpha = \frac{\text{कोणीय वेग परिवर्तन}}{\text{समयान्तराल}}$$

या $$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \frac{\text{रेडियन / सेकण्ड}}{\text{सेकण्ड}} \qquad \ldots (10)$$

यदि Δt समयान्तराल बहुत सूक्ष्म हो तो α को तात्कालिक कोणीय त्वरण कहते हैं, अर्थात्

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

कोणीय त्वरण 'अल्फा' (α) एक सदिश राशि है। इसका मात्रक **रेडियन/सेकण्ड^2** तथा विमा $[M^0L^0T^{-2}]$ है।

§ 2.18 कोणीय त्वरण तथा रेखीय त्वरण में सम्बन्ध (Relation between Angular Acceleration and Linear Acceleration)

∴ कोणीय त्वरण, $$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(v/r)}{\Delta t} \qquad (\because v = r\omega)$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{r} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$= \frac{1}{r} a \qquad \left(\because \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a\right)$$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{a}{r}$$

अथवा $$a = r.\alpha \qquad \ldots (11)$$

§ 2.19 आवर्त काल (Time Period 'T')

एक समान वृत्तीय गति करते कण द्वारा एक चक्कर में लगा समय, वृत्तीय गति का आवर्तकाल कहलाता है।

It is the time interval taken by the particle to complete one complete circular motion.

माना किसी कण का कोणीय वेग ω है, अत: इसको परिधि पर एक चक्कर पूरा करने में लगा समय = $\frac{2\pi}{\omega}$ सेकण्ड।

अत: वृत्तीय गति करते हुए पिण्ड का आवर्तकाल,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ सेकण्ड।}$$

§ 2.20 आवृत्ति (Frequency, *n*)

एक समान वृत्तीय गति करते कण द्वारा 1 सेकण्ड में किए गए चक्करों की संख्या को, वृत्तीय गति की आवृत्ति कहते हैं।

The number of rotations per second completed by the particle is known as frequency.

आवृत्ति, आवर्तकाल के व्युत्क्रम के बराबर होती है। अत:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ अथवा हर्ट्ज Hz}$$

$$\omega = 2\pi n \text{ रेडियन/सेकण्ड}$$

§ 2.21 कोणीय गति के समीकरण (Equations of Angular Motion)

किसी पिण्ड के सरल रेखीय गति के समीकरणों के समान ही कोणीय गति के समीकरण निम्न प्रकार हैं—

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \ldots (12)$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad \ldots (13)$$

एवं $$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \qquad \ldots (14)$$

उपरोक्त समीकरणों में ω_0 पिण्ड का प्रारम्भिक कोणीय वेग, ω अन्तिम कोणीय वेग, α कोणीय त्वरण, t समयान्तराल एवं θ कोणीय विस्थापन है।

पिण्ड में कोणीय त्वरण व गति की दिशा समान होने पर $+\alpha$ तथा कोणीय त्वरण व गति की दिशा विपरीत होने पर $-\alpha$ का प्रयोग करते हैं।

§ 2.22 अभिकेन्द्रीय त्वरण (Centripetal Acceleration)

जब कोई पिण्ड एक समान वृत्तीय गति (समान कोणीय वेग) करता है तो कण की चाल स्थिर होते हुए भी, पिण्ड के चलने की दिशा बदलते रहने के कारण उसका वेग लगातार बदलता रहता है।* चूँकि वेग की दिशा समय के साथ बदलती है, अत: पिण्ड की गति किसी त्वरण के अधीन होनी चाहिए। वेग का परिमाण न बदलने के कारण, उत्पन्न इस त्वरण का परिमाण भी

* वेग सदिश राशि है। यदि किसी सदिश राशि (= परिमाण + दिशा) में परिमाण अथवा दिशा अथवा दोनों, समय के साथ बदल जाते हैं तो सम्पूर्ण राशि का मान बदल जाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

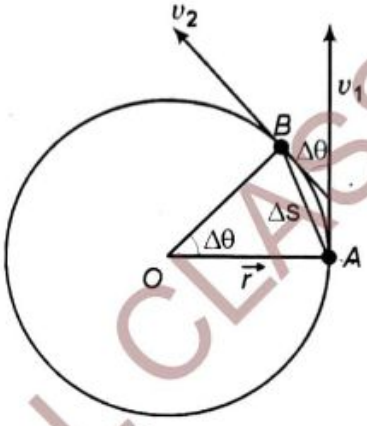
नहीं बदलता है, परन्तु दिशा सदैव बदलती रहती है। उत्पन्न त्वरण की दिशा सदैव रेखीय गति की दिशा के लम्बवत् तथा केन्द्र की ओर होती है। अत: एक समान वृत्तीय गति करते हुए किसी पिण्ड पर केन्द्र की ओर लगने वाले त्वरण को केन्द्रीय या अभिकेन्द्रीय* त्वरण कहते हैं।

सूत्र की व्युत्पत्ति (Derivation of formula)

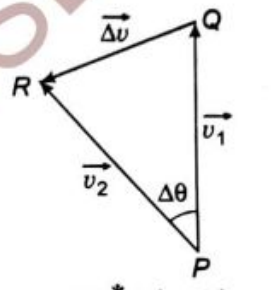
माना, m द्रव्यमान का कोई पिण्ड P, r त्रिज्या के वृत्तीय पथ जिसका केन्द्र बिन्दु O है, पर एक समान रेखीय चाल v से गति कर रहा है (चित्र 2.30)।

माना, पिण्ड एक सूक्ष्म समयान्तराल Δt में बिन्दु A से B तक ΔS विस्थापन तय करता है। बिन्दु A पर पिण्ड का वेग $\vec{v_1}$ तथा बिन्दु B पर पिण्ड का वेग $\vec{v_2}$ है। वेग के वेक्टर $\vec{v_1}$ तथा $\vec{v_2}$ के परिमाण समान (v) हैं, परन्तु इनकी दिशाओं में θ कोण का अन्तर है।

चित्र 2.31 में खींचे गये वेक्टर $\vec{v_1}$ तथा $\vec{v_2}$, चित्र 2.30 के वेग वेक्टर $\vec{v_1}$ तथा $\vec{v_2}$ के समान वेक्टर (equal vectors) हैं। चित्र 2.30 में बिन्दु A से बिन्दु B तक जाने में पिण्ड के वेग में परिवर्तन $\vec{v_2} - \vec{v_1} = \vec{\Delta v}$ होगा।



चित्र 2.30



यहाँ $\vec{v_1} = \vec{v_2} = v$

चित्र 2.31

चित्र 2.30 तथा चित्र 2.31 में बने त्रिभुज AOB तथा त्रिभुज QPR, दोनों समरूप (Similar) हैं, अत:

$$\frac{AB}{AO} = \frac{QR}{QP}$$

या $$\frac{\Delta s}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

या $$\Delta v = \frac{v}{r}.\Delta s$$

Δv वेग में परिवर्तन है, अत: समयान्तराल Δt में प्राप्त वेग में परिवर्तन पिण्ड का त्वरण होगा, अत: समीकरण के दोनों पक्षों को Δt से भाग देने पर

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}.\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

यदि Δt समयान्तराल अत्यन्त सूक्ष्म है, तब

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\left[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}\right]$$

या $$a = \frac{v}{r}.v \qquad \left[\because \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a \text{ एवं } \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v\right]$$

या $$\boldsymbol{a = \frac{v^2}{r}} \qquad \ldots (15)$$

यह वृत्तीय गति में उत्पन्न त्वरण है, इसे अभिकेन्द्र त्वरण कहते हैं। इस त्वरण की दिशा $\vec{\Delta v}$ की दिशा के समान होती है।

प्राप्त समीकरण में $v = r\omega$ रखने पर

$$a = \frac{r^2\omega^2}{r}$$

* 'अभि' का अर्थ है—की ओर या सामने, अत: अभिकेन्द्र = अभि + केन्द्र अर्थात् केन्द्र की ओर।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

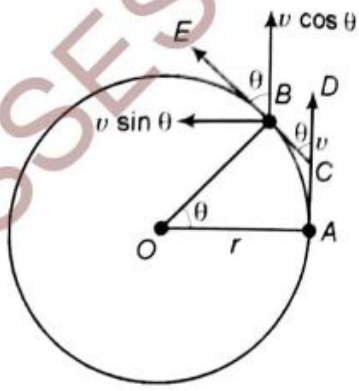
या $$a = r\omega^2 \quad \ldots (16)$$

या $$a = \frac{4\pi^2}{T^2} r \qquad \left[\because \ \omega = \frac{2\pi}{T} \right] \quad \ldots (17)$$

इस समीकरण में $T = \frac{1}{n}$ रखने पर, $$a = 4\pi^2 n^2 r \quad \ldots (18)$$

वैकल्पिक विधि (Alternative Method)

माना, m द्रव्यमान का एक पिण्ड, एक समान वेग $\vec{v}$ से त्रिज्या r के वृत्त की परिधि पर घूम रहा है। परिधि पर बिन्दु A तथा B बहुत समीप हैं। यदि त्रिज्य वेक्टर OA तथा OB के मध्य कोणीय विस्थापन θ हो तो A तथा B पर खींची गयी स्पर्श रेखायें क्रमशः AD तथा BE के बीच का कोण $\angle BCD = \theta$ होंगी। चित्र 2.32 के अनुसार बिन्दु A पर पिण्ड का वेग $\vec{v}$, AD दिशा में है जिसका AO की दिशा में घटक शून्य होगा, क्योंकि AO, AD पर लम्ब है, अतः बिन्दु A पर पिण्ड के वेग के दो घटक होंगे—



चित्र 2.32

(i) AO दिशा में $= 0$

(ii) AD दिशा में $= v$

इसी प्रकार, स्थिति B पर Δt समय पश्चात् जब पिण्ड पहुँचता है तो पिण्ड के वेग के पुनः दो घटक इस प्रकार होंगे—

(i) AD दिशा के समान्तर $= v\cos\theta$

(ii) AD दिशा के लम्बवत $= v\sin\theta$

चूँकि Δt समयान्तराल बहुत छोटा है और बिन्दु A तथा B बहुत ही समीप हैं, अतः कोण θ बहुत ही सूक्ष्म होगा, तब

$$\sin\theta = \theta \qquad \text{एवं} \qquad \cos\theta = 1$$

$\therefore$ बिन्दु B पर, AD के समान्तर वेग $= v\cos\theta = v$

तथा AD के लम्बवत् वेग $= v\sin\theta = v.\theta$

इससे स्पष्ट है कि जब पिण्ड बिन्दु A से B तक घूमता है तो उसकी स्पर्शी AD की दिशा में वेग अपरिवर्तित रहता है परन्तु स्पर्श रेखा के लम्बवत् अर्थात् त्रिज्या AO की दिशा में वेग शून्य से बढ़कर $v\theta$ हो जाता है।

अतः एक समान वृत्तीय गति में स्पर्श रेखा के अनुदिश वेग में परिवर्तन नहीं होता है, परन्तु त्रिज्या की दिशा में वेग परिवर्तन होता है, फलस्वरूप पिण्ड पर त्रिज्या के अनुदिश त्वरण कार्य करता है।

बिन्दु A से B तक जाने में वेग परिवर्तन $= v\theta - 0 = v\theta$

पिण्ड द्वारा A से B तक जाने में लिया गया समय $= \Delta t$

अतः एक समान वृत्तीय गति में त्रिज्या के अनुदिश त्वरण या अभिकेन्द्रीय त्वरण $= \frac{v\theta}{\Delta t}$

परन्तु $$\frac{\theta}{\Delta t} = \omega \qquad \text{(पिण्ड का कोणीय वेग)}$$

अतः अभिकेन्द्र त्वरण $= a = v\omega$

$$= v.\frac{v}{r} \qquad (\because v = r\omega)$$

अथवा $$a = \frac{v^2}{r}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 2.23 अभिकेन्द्र बल (Centripetal Force)

माना, एक समान वृत्तीय गति करते m द्रव्यमान के किसी पिण्ड पर a अभिकेन्द्र त्वरण कार्य करता है। यदि वृत्त की त्रिज्या r हो तो

न्यूटन के गति विषयक द्वितीय नियम (बल संरक्षण के नियम) के अनुसार किसी पिण्ड में त्वरण सदैव किसी बल के प्रभाव से ही उत्पन्न होता है तथा बल की दिशा वही होती है जो त्वरण की दिशा होती है। इस प्रकार यह स्पष्ट है कि **वृत्तीय गति करते हुए पिण्ड पर एक बल कार्य करता है जिसकी दिशा सदैव वृत्त के केन्द्र की ओर होती है, इस बल को अभिकेन्द्र बल कहते हैं।**

"A force acting on a body causing it to move in a circular path is known as centripetal force. The direction of this force is always directed towards the centre of the circle."

अभिकेन्द्र बल, किसी पिण्ड को बिना उसकी चाल बदले, वेग की दिशा को बदलते हुए त्वरित करता है।

"A centripetal force accelerates a body by changing the direction of the body's velocity without changing the body's speed."

अत: न्यूटन के नियमानुसार, वृत्तीय गति करते पिण्ड के लिए

$$\text{अभिकेन्द्र बल} = \text{द्रव्यमान} \times \text{अभिकेन्द्र त्वरण}$$

या,
$$F = m \times a$$
$$= m \times \frac{v^2}{r}$$
$$F = \frac{mv^2}{r} \quad \ldots (19)$$

अभिकेन्द्र बल एक सदिश राशि है, इसका SI मात्रक न्यूटन तथा इसकी विमा $[MLT^{-2}]$ है।

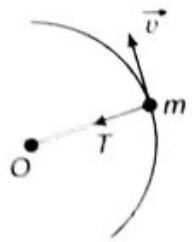
अभिकेन्द्र बल की आवश्यकता (Need for Centripetal Forces)

उपरोक्त विवेचना से स्पष्ट है कि किसी कण को वृत्ताकार मार्ग पर घुमाये रखने के लिए केन्द्रीय बल परम आवश्यक है, वास्तव में यही बल कण को सरल रेखा में न जाने देकर, वृत्तीय पथ पर घुमाता रहता है। इस बल के समाप्त या अपर्याप्त होते ही कण वृत्तीय गति में न घूमकर स्पर्शी की दिशा में सरल रेखीय गति करने लगता है।

प्रकृति में जितनी भी वृत्तीय गतियाँ हो रही हैं इन्हें उनकी प्रकृति अर्थात् उनमें उत्पन्न अभिकेन्द्र बल के अनुसार निम्न चार वर्गों में बाँट सकते हैं

(1) अभिकेन्द्र बल; तनाव बल के रूप में—जब वृत्तीय गति करने वाला पिण्ड किसी माध्यम—रस्सी, चेन, अथवा लटठे द्वारा वृत्त के केन्द्र से बँधा हो।

उदाहरणत: जब किसी पत्थर के टुकड़े को डोरी से बाँधकर वृत्ताकार पथ पर घुमाते हैं, तो डोरी का तनाव बल (Tension force) ही पत्थर को वृत्तीय पथ पर घुमाने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल प्रदान करता है। डोरी के टूट जाने पर यह बल विलुप्त हो जाता है तथा पत्थर का टुकड़ा स्पर्शी की दिशा में सरल रेखीय गति करने लगता है, (चित्र 2.33)।

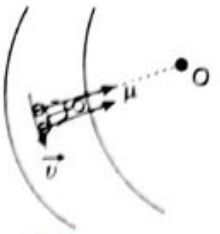


चित्र 2.33

AYG TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

(2) अभिकेन्द्र बल; घर्षण बल के रूप में—जब गति करने वाला पिण्ड किसी सड़क अथवा पटरी या किसी भी माध्यम पर रगड़ कर या फिसल कर चल रहा है।

उदाहरणत: किसी मोटर कार अथवा साइकिल को मोड़ पर मुड़ने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल उसके टायरो तथा सड़क के मध्य उत्पन्न घर्षण बल (Friction force) से मिलता है, (चित्र 2.34)।

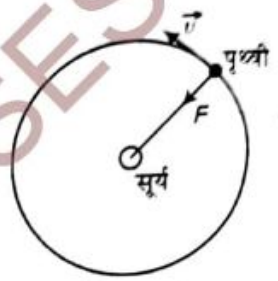


चित्र 2.34

(3) अभिकेन्द्र बल; गुरुत्वाकर्षण बल के रूप में—यह बल विशाल आकाशीय पिण्डों के मध्य उत्पन्न होता है।

उदाहरणत: पृथ्वी को सूर्य के चारों ओर घूमने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल केवल सूर्य द्वारा आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल से प्राप्त होता है, (चित्र 2.35)।

$$\left(\text{यहाँ, } F = G\frac{M_1 M_2}{r^2}\right)$$

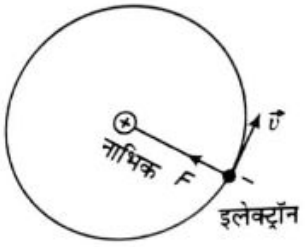


चित्र 2.35

(4) अभिकेन्द्र बल; वैद्युत आकर्षण बल के रूप में—यह बल अति सूक्ष्म कणों (आवेशों) के मध्य उत्पन्न होता है।

उदाहरणत: नाभिक के चारों ओर इलेक्ट्रॉन के घूमते रहने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल नाभिक द्वारा इलेक्ट्रॉन पर आरोपित वैद्युत आकर्षण बल से प्राप्त होता है, (चित्र 2.36)।

$$\left(\text{यहाँ, } F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r^2}\right)$$



चित्र 2.36

अभिकेन्द्र बल के कुछ प्रमुख उदाहरण (Some Important Examples of Centripetal Force)

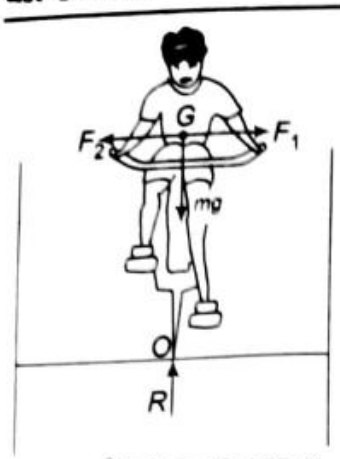
(1) समतल वृत्तीय पथ पर साइकिल सवार की गति (Motion of a bicycle rider on a plane circular path)

मोड़ पर मुड़ते समय साइकिल सवार अपने शरीर को साइकिल सहित मोड़ के केन्द्र की ओर ऊर्ध्वाधर से किसी विशेष कोण θ पर झुका लेता है।

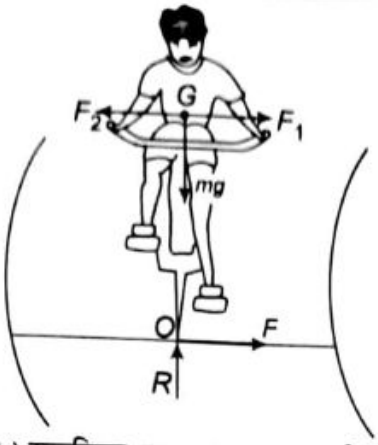
कोई साइकिल सवार जब मोड़ पर पहुँचता है तो उसका मार्ग वृत्ताकार हो जाने के कारण, उसे अभिकेन्द्र बल की आवश्यकता होती है। समतल सड़क पर, पहियो तथा सड़क के मध्य लगने वाला घर्षण बल F, जिसका अधिकतम मान $\mu_s R$ होता है ही आवश्यक अभिकेन्द्र बल प्रदान करता है, जहाँ R सड़क तक की साइकिल पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया है। माना साइकिल तथा सवार दोनो मिलकर एक निकाय (system) बनाते है जिसका द्रव्यमान m, चाल v तथा वृत्तीय पथ की त्रिज्या r है (चित्र 2.37)।

AKO TECHNICAL CLASSES

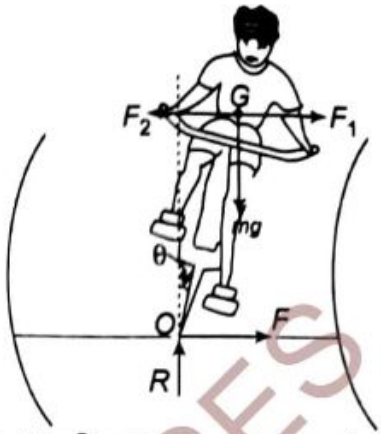
Scanned with CamScanner



(a) साइकिल सवार समतल सीधी सड़क पर



(b) साइकिल सवार समतल वृत्तीय पथ पर ऊर्ध्वाधर से बिना झुके हुए



(c) साइकिल सवार समतल वृत्तीय पथ पर ऊर्ध्वाधर से कोण θ पर झुका हुआ

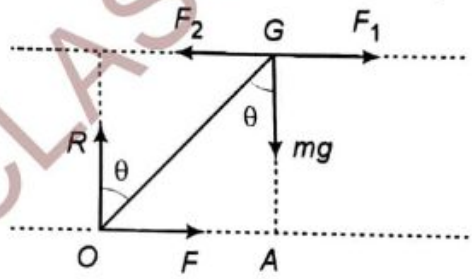
माना निकाय के गुरुत्व केन्द्र G पर दो समान तथा विपरीत बल F_1 तथा F_2 ($F_1 = F_2 = F$) कार्य कर रहे हैं। एक ही बिन्दु G पर लगे होने के कारण इनका परिणामी शून्य होगा तथा निकाय की स्थिति पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा [चित्र 2.37 (a)]।

इस स्थिति में निकाय पर निम्न बल लगे होते हैं—

(1) काल्पनिक बल F_1 तथा F_2 ($F_1 = F_2 = F$)

(2) निकाय का भार mg जो इसके गुरुत्व केन्द्र G पर ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कार्यरत है।

(3) सड़क की अभिलम्ब प्रतिक्रिया $R(= mg)$ जो सड़क तथा पहिये के सम्पर्क बिन्दु O पर ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर कार्यरत है।



(d)

चित्र 2.37

जब सवार सड़क के मोड़ पर पहुँचता है तथा यदि वह अपनी स्थिति में कोई परिवर्तन न करें तो वृत्तीय पथ पर उपरोक्त बलों के अतिरिक्त एक बल उत्पन्न होता है [चित्र 2.37 (b)] जो—

(4) सड़क तथा पहियों के बीच लगने वाला घर्षण बल F बिन्दु O पर वृत्तीय पथ के केन्द्र की ओर लगता है।

इस स्थिति में बल F तथा F_2 (उपरोक्त वर्णित बल (1) तथा (4)) एक वामावर्त बलयुग्म (anticlockwise torque) बनाते हैं जिससे सवार असन्तुलित होकर वृत्तीय पथ के केन्द्र से बाहर की ओर गिरने लगता है।

सड़क के वृत्तीय भाग पर सवार द्वारा संतुलन बनाये रखने के लिए यदि निकाय को वृत्तीय पथ के केन्द्र की ओर ऊर्ध्वाधर से कोण θ झुका दिया जाय तो निकाय की स्थितियाँ [चित्र 2.37 (c)] की भाँति हो जाती हैं। इस स्थिति में निकाय का भार mg तथा निकाय पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल R, एक दक्षिणावर्त बलयुग्म (Clockwise torque) बनाता है जो निकाय को दक्षिणावर्त घुमाने का प्रयास करता है।

निकाय के संतुलन के लिए इन दोनों बल आघूर्णों का परिमाण समान होना चाहिए, अत: चित्र 2.37 (d) से—

वामावर्त बल-आघूर्ण = दक्षिणावर्त बल-आघूर्ण

बल F_2 तथा F से बना वामावर्त बलयुग्म आघूर्ण = mg तथा R से बना दक्षिणावर्त बलयुग्म आघूर्ण

अत: $$F \times GA = mg \times OA$$

अथवा $$F \times OG \cos\theta = mg \times OG \sin\theta$$

या $$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{F}{mg}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

या $$\tan\theta = \frac{F}{mg}$$

इन दोनों बलों के संतुलित हो जाने पर, निकाय पर केवल एक क्षैतिज बल $|F_1'|$ $(= F)$ कार्य करता है जो निकाय को आवश्यक अभिकेन्द्र बल $\left(\frac{mv^2}{r}\right)$ प्रदान करता है जिससे निकाय संतुलित रूप से वृत्ताकार पथ पर घूम जाता है।

अत: समतल वृत्तीय पथ पर संतुलित रूप से मुड़ने के लिए घर्षण बल F का मान आवश्यक अभिकेन्द्र बल $\left(\frac{mv^2}{r}\right)$ के बराबर होना चाहिए।

अर्थात् $$\tan\theta = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg}$$

या $$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \quad \ldots (20)$$

या $$\theta = \tan^{-1}\frac{v^2}{rg} \quad \ldots (21)$$

चूँकि इस स्थिति में आवश्यक अभिकेन्द्र बल घर्षण बल द्वारा प्राप्त होता है तथा घर्षण बल का अधिकतम मान इसके सीमान्त घर्षण के मान $\mu_s R\ (= \mu_s mg)$ के बराबर होता है। अत: साइकिल सवार (निकाय) पर लगने वाले अभिकेन्द्र बल का अधिकतम मान $\mu_s mg$ के बराबर हो सकता है, इससे अधिक नहीं।

अर्थात् $$\frac{mv^2_{\max}}{r} = \mu_s mg$$

या $$v_{\max} = \sqrt{\mu_s rg} \quad \ldots (22)$$

इस अधिकतम चाल $v_{\max}$ से मुड़ते समय ऊर्ध्वाधर से बना कोण θ, घर्षण कोण $\tan^{-1}\mu$ के बराबर होता है। यदि मुड़ते समय चाल $v > v_{\max}$, तो साइकिल फिसल जायेगी, अत: वृत्तीय पथ पर सुरक्षित मुड़ने के लिए v का मान इसके अधिकतम मान $v_{\max}$ से कम होना चाहिए।

(2) मोड़ पर सड़क तथा रेल की पटरी में ढलान (Banking corner of road and rail track at turn)

समतल सड़क पर कार को मुड़ने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल $\left(\frac{mv^2}{r}\right)$, कार के टायरों तथा सड़क के बीच लगने वाले घर्षण बल F से प्राप्त होता है।

अत: $$F = \frac{mv^2}{r}$$

जहाँ m = कार का द्रव्यमान

v = कार की चाल

r = वृत्ताकार पथ की त्रिज्या

यहाँ घर्षण बल F का अधिकतम मान $\mu_s R$ है।

यदि किसी निश्चित त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर कार की चाल बढ़ जाय, तो घर्षण द्वारा लगने वाला अभिकेन्द्र बल भी बढ़ना चाहिए। परन्तु घर्षण बल का अधिकतम मान इसके सीमान्त

समतल वृत्तीय पथ पर कार की गति

चित्र 2.38

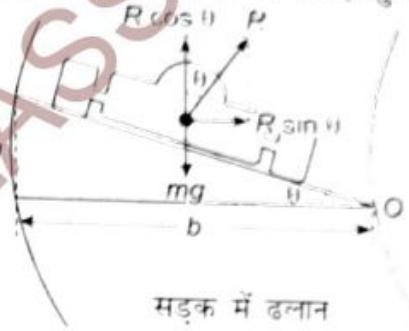
AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

मान $\mu_s R$ से अधिक नहीं हो सकता। अत: कार की चाल अधिक हो पर घर्षण बल आवश्यक अभिकेन्द्र बल प्रदान नहीं कर पाता है, जिसके कारण कार वृत्तीय पथ पर उसी चाल से चलती तथा वृत्तीय पथ के केन्द्र से बाहर की ओर फिसलना चाहती है (चित्र 2.38)।

इस स्थिति से बचने के लिए दूसरे उपाय के रूप में **सड़क को मोड़ों पर अन्दर (वृत्तीय पथ के केन्द्र) की ओर कुछ ढलान दे देते हैं (अथवा सड़क के बाहरी सिरे को कुछ ऊपर उठा देते हैं)। इस प्रक्रिया को सड़कों अथवा रेलों की बैंकिंग (Banking of roads or rails) कहते हैं। ऐसा कर देने पर घर्षण बल के बिना भी आवश्यक अभिकेन्द्र बल प्राप्त हो जाता है और कार की वृत्तीय पथ पर बाहर की ओर फिसलने की प्रवृत्ति समाप्त हो जाती है।**

इसी प्रकार, रेल पटरियाँ बिछाते समय मोड़ो पर अन्दर वाली पटरी को बाहर वाली पटरी की तुलना में कुछ नीचा बिछाते हैं। ऐसा कर देने से कार अथवा रेलगाड़ी, मोड़ पर स्वत: ही वृत्तीय पथ के केन्द्र की तरफ (मोड़ पर अन्दर की ओर) झुक जाती है, जिससे इन्हे घूमने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल प्राप्त हो जाता है।



सड़क में ढलान

चित्र 2.39

माना, चित्र 2.39 मे सड़क का क्षैतिज से झुकाव कोण θ है तथा इस सड़क पर m द्रव्यमान की एक कार r त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर v चाल से चल रही है। G कार का गुरुत्व केन्द्र है जहाँ पर कार का भार mg, ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर लगा है तथा सड़क द्वारा कार के चारो पहियों पर लगने वाले अभिलम्ब प्रतिक्रिया बलों का परिणामी बल R, ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाते हुए ऊपर की ओर लगता है। R का ऊर्ध्वाधर घटक (vertical component of R) $R\cos\theta$, कार के भार mg को सन्तुलित करता है तथा क्षैतिज घटक (horizontal component) $R\sin\theta$ आवश्यक अभिकेन्द्र बल प्रदान करता है। अत:

$$R\cos\theta = mg \quad \ldots (i)$$

तथा

$$R\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \quad \ldots (ii)$$

समीकरण (ii) को (i) से भाग देने पर

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} \quad \ldots (23)$$

r तथा v के मान ज्ञात होने पर, मोड़ पर ढलान कोण θ का मान ज्ञात किया जा सकता है। यदि सड़क की चौड़ाई b तथा इसके दोनो सिरों के बीच ऊँचाई का अन्तर h हो, तो $\tan\theta = \frac{h}{b}$

θ तथा r का मान निश्चित होने पर, v का मान भी निश्चित हो जाता है, तब समीकरण (23) से

$$v = \sqrt{rg\tan\theta} \quad \ldots (24)$$

इस समीकरण में कार का द्रव्यमान m तथा घर्षण बल उपस्थित नहीं है, अत: यह चाल कार के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करती है। अत: नियत ढलान वाले मोड़ पर सभी वाहनों के लिए समान है। इस चाल को मोड़ की वांछित चाल (required or designed speed) कहते हैं। मोड़ पर इस चाल से चलने पर, पहियों तथा सड़क के मध्य किसी घर्षण बल की आवश्यकता नहीं होती है, अत: टायरों को न्यूनतम हानि होती है। बर्फीली सड़क पर (अर्थात् घर्षण बल लगभग शून्य होने पर) भी कार इस चाल से चलकर मोड़ को सुरक्षित पार कर लेगी।

घर्षणरहित मोड़ पर यदि कार की चाल इस वांछित चाल से कम है तो आवश्यक अभिकेन्द्र बल का मान घट जाने के कारण कार के वृत्ताकार पथ की त्रिज्या कम हो जायेगी $\left|\frac{v^2}{r} < g\tan\theta \text{ (बन जाता है)}\right|$ फलस्वरूप कार अन्दर की तरफ फिसलने लगेगी।

AKC TECHNICAL CLASSES

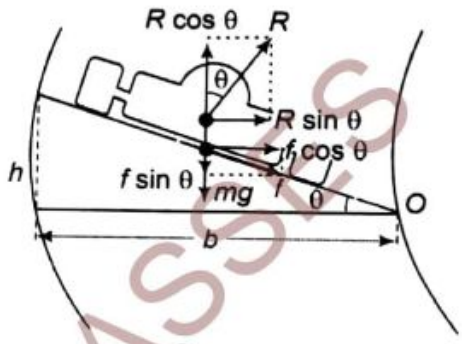
Scanned with CamScanner

यदि मोड़ पर कार की चाल इस वांछित चाल से अधिक है तो वृत्ताकार पथ की त्रिज्या अधिक होने के कारण कार बाहर की ओर फिसलने लगेगी।

मोड़ पर कार की चाल अत्यधिक होने पर, कार के बाहरी पहियों की अपेक्षा अन्दर वाले पहियों पर सड़क का प्रतिक्रिया बल पहले शून्य हो जाता है और ये पहिये सड़क से ऊपर उठ जाते हैं तथा कार बाहर की ओर पलट जाती है।

(3) घर्षण बल का प्रभाव

यदि ढलाव वाले मोड़ पर कार तथा सड़क के मध्य घर्षण बल भी लग रहा हो तो कार पर लगने वाले विभिन्न बलों को चित्र 2.40 के अनुसार प्रदर्शित किया जा सकता है। यहाँ f घर्षण बल है जो कार के चारों पहियों पर सतह के समान्तर लगने वाले सभी घर्षण बलों का परिणामी है। f का अधिकतम मान $\mu_s R$ होता है, जहाँ μ_s सीमान्त घर्षण गुणांक है।



चित्र 2.40

चित्र के अनुसार अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल R तथा घर्षण बल f के क्षैतिज घटकों (Horizontal components) का वेक्टर योग अभिकेन्द्र बल प्रदान करता है।

चित्रानुसार, संतुलन की स्थिति में क्षैतिज घटक

$$R\sin\theta + f\cos\theta = \frac{mv^2}{r}$$

या $$R\sin\theta + \mu_s R\cos\theta = \frac{mv^2}{r}$$

या $$R(\sin\theta + \mu_s\cos\theta) = \frac{mv^2}{r} \quad \text{... (i)}$$

इसी प्रकार, ऊर्ध्व घटक

$$R\cos\theta = mg + f\sin\theta$$

या $$R\cos\theta = mg + \mu_s R\sin\theta$$

या $$R(\cos\theta - \mu_s\sin\theta) = mg \quad \text{... (ii)}$$

समीकरण (i) को (ii) से भाग देने पर

$$\frac{R(\sin\theta + \mu_s\cos\theta)}{R(\cos\theta - \mu_s\sin\theta)} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg}$$

या $$\frac{\sin\theta + \mu_s\cos\theta}{\cos\theta - \mu_s\sin\theta} = \frac{v^2}{rg}$$

बायें पक्ष में ऊपर-नीचे $\cos\theta$ से भाग देने पर

$$\frac{\tan\theta + \mu_s}{1 - \mu_s\tan\theta} = \frac{v^2}{rg} \quad \text{... (25)}$$

उपरोक्त समीकरण से स्पष्ट है कि—

(1) यदि $\theta = 0°$, अर्थात् सड़क या रेल पटरी के ढलान का मान शून्य है, तो $\mu_s = \frac{v^2}{rg}$, अत: वृत्तीय पथ पर मुड़ने के लिये आवश्यक अभिकेन्द्र बल, घर्षण बल से प्राप्त होता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(2) यदि $\mu_s = 0$, अर्थात् सड़क या रेल पटरी की सतह का सीमान्त घर्षण गुणांक शून्य है, तो $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$, अत: वृत्तीय पथ पर मुड़ने के लिए ऊर्ध्वाधर से θ कोण का झुकाव आवश्यक है।

(3) यदि झुकाव कोण θ तथा सीमान्त घर्षण गुणांक μ_s दोनों के मान शून्य हों ($\theta = 0$ तथा $\mu_s = 0$), तो वेग का मान शून्य ($v = 0$) प्राप्त होगा। अर्थात् वृत्तीय गति सम्भव नहीं है।

यदि घर्षण युक्त ढलान वाले मोड़ पर कार की चाल वांछित चाल से कम है तो कार मोड़ पर अन्दर की ओर फिसलने लगती है, तब घर्षण बल बाहर की ओर लगकर कार पर लगने वाले अभिकेन्द्र बल को कम कर देता है तथा यदि मोड़ पर कार की चाल वांछित चाल से अधिक है, तो वह मोड़ पर बाहर की ओर फिसलने लगती है, तब घर्षण बल अन्दर की ओर लगकर अतिरिक्त अभिकेन्द्र बल प्रदान करता है।

(4) रोटर (Rotor)

रोटर सर्कस इत्यादि स्थलों पर मनोरंजन का एक उपकरण है। यह जालीदार, खोखला, बेलनाकार कमरा होता है जो एक ऊर्ध्वाधर अक्ष (vertical axis) के परित: घूम सकता है (चित्र 2.41)। रोटर में अन्दर फर्श से कुछ ऊँचाई पर एक छोटा प्लेटफार्म लगा होता है जिस पर खेल दिखाते समय एक व्यक्ति खड़ा हो जाता है। रोटर को विद्युत मोटर इत्यादि के सहारे घुमाते हैं तथा धीरे-धीरे रोटर की घूर्णन गति (rotational speed) बढ़ाते जाते हैं। एक निश्चित गति पर व्यक्ति के नीचे लगे प्लेटफार्म को हटा लेते हैं, परन्तु, आश्चर्य! व्यक्ति नीचे नहीं गिरता बल्कि अपने स्थान पर चिपका खड़ा रह जाता है।

रोटर में व्यक्ति पर कार्यकारी बल
चित्र 2.41

वास्तव में रोटर की दीवार पर चिपका व्यक्ति अपने भार के कारण नीचे गिरता है, परन्तु वृत्तीय गति में उत्पन्न घर्षण बल के कारण अपने स्थान पर ही चिपका रह जाता है।

चित्र 2.41 में रोटर में खड़े व्यक्ति की स्थितियाँ प्रदर्शित की गयी हैं।

W व्यक्ति का भार है, f_s व्यक्ति तथा रोटर की दीवार के मध्य, सीमान्त घर्षण बल है, F अभिकेन्द्र बल है जो रोटर की दीवार व्यक्ति पर लगाती है। इस अभिकेन्द्र बल F के कारण ही व्यक्ति की गति वृत्तीय पथ पर होती है।

माना रोटर की त्रिज्या r तथा अन्तिम गति v है। चूँकि व्यक्ति की ऊर्ध्वाधर दिशा में गति नहीं है तथा इस पर एक अभिकेन्द्रीय त्वरण v^2/r कार्य करता है, अत:

$$f_s - W = 0$$

या $$f_s = W \quad \ldots (i)$$

यदि रोटर की दीवार तथा व्यक्ति के मध्य सीमान्त घर्षण गुणांक μ_s हो, तब $f_s = \mu_s F$ (यह अधिलम्ब प्रतिक्रिया बल, वृत्तीय गति के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल $F = \frac{mv^2}{r}$ के रूप में है)

चित्रानुसार,

$$f_s = \mu_s F = W \quad \text{(समीकरण (i) से)}$$

या $$\mu_s = \frac{W}{F}$$

अत: $$\mu_s = \frac{mg}{mv^2/r}$$

$$\mu_s = \frac{rg}{v^2} \quad \ldots (26)$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

यह सीमान्त घर्षण गुणांक का वह मान है जो त्रिज्या r एवं वेग v पर वृत्तीय गति में गतिमान रोटर में किसी व्यक्ति अथवा पिण्ड को रोटर की दीवार पर चिपके रहने के लिए आवश्यक है।

§ 2.24 अपकेन्द्र* बल (Centrifugal Force)

अपकेन्द्र बल एक कल्पित बल (Fictitious force) या आभासी बल (Pseudo force) है जिसका अस्तित्व एवं आभास केवल त्वरित निर्देश तंत्र (accelerated frame of reference) में ही होता है।

निर्देश तंत्र की आवश्यकता (Need for frame of reference)

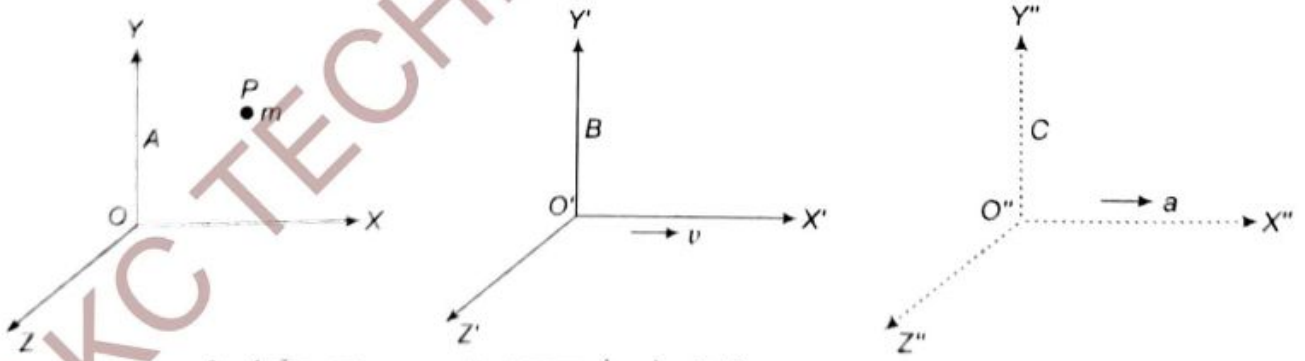
जिस प्रकार दूरियों को माप किसी न किसी निर्देश बिन्दु के सापेक्ष की जाती है, इसी प्रकार गति का वर्णन सदा किसी न किसी निर्देश तंत्र के सापेक्ष किया जाता है।

उदाहरण के लिए एक रेलगाड़ी जो किसी वेग से किसी दिशा में जा रही है, के वेग का मापन तीन प्रेक्षकों द्वारा किया जा रहा है। पृथ्वी पर खड़ा पहला प्रेक्षक (observer) रेलगाड़ी का वेग मापता है, उसका मान कुछ आता है। दूसरा प्रेक्षक चलती हुई कार मे बैठा है, उसका वेग कुछ और ही आयेगा (यह इस बात पर भी निर्भर करेगा कि कार तथा रेलगाड़ी के चलने की दिशा क्या है, एक-दूसरे के विपरीत या एक ही दिशा में)। तीसरा प्रेक्षक रेलगाड़ी में बैठा है, उसके द्वारा मापा गया वेग शून्य आयेगा। स्पष्ट है कि रेलगाड़ी का वेग भिन्न-भिन्न प्रेक्षकों द्वारा भिन्न-भिन्न मापा जाता है यद्यपि प्रत्येक माप सही है परन्तु मापों की भिन्नता निर्देश तंत्रों के अलग-अलग होने के कारण है।

निर्देश तंत्र (Frame of reference)

जिस बिन्दु के सापेक्ष किसी गति का अध्ययन करते हैं, उस बिन्दु को निर्देश बिन्दु (Reference point) कहते हैं। निर्देश बिन्दु से जाने वाले दो या तीन परस्पर लम्बवत् रेखाओं को निर्देशाक्ष (coordinate axes) तथा इस सम्पूर्ण तंत्र को निर्देश तंत्र कहते हैं (चित्र 2.42)। निर्देश तंत्र दो प्रकार का होता है—

(1) जड़त्वीय निर्देश तंत्र (Inertial frame of reference)—**वे निर्देश तंत्र जिसमें न्यूटन के गति के नियम लागू (वैध) होते हैं जड़त्वीय निर्देश तंत्र कहलाते हैं [चित्र 2.42 (a)]। पृथ्वी की गति त्वरित होते हुए भी इसे जड़त्वीय निर्देश तंत्र मानते हैं।**



(a) A-जड़त्वीय निर्देश तन्त्र (b) B-समान वेग से गतिशील, निर्देश तन्त्र (c) C-त्वरित निर्देश तन्त्र

चित्र 2.42

(2) त्वरित या अजड़त्वीय निर्देश तंत्र (Accelerated or non-inertial frame of reference)—**जो निर्देश तंत्र पृथ्वी (पृथ्वी गति की त्वरित होते हुए भी उसे जड़त्वीय निर्देश तंत्र मानते हैं) के सापेक्ष त्वरित गति करते हैं, या जिन निर्देश तंत्रों में न्यूटन के गति के नियम लागू नहीं होते, उन्हें त्वरित निर्देश तंत्र कहते हैं।** चित्र 2.42 (b) में एक समान वेग से गतिशील निर्देश तंत्र B, एवं चित्र 2.42 (c) में एक त्वरित निर्देश तंत्र C प्रदर्शित किया गया है।

* 'अप' का अर्थ है अलग या दूर, अतः अपकेन्द्र = अप + केन्द्र अर्थात् केन्द्र से दूर।

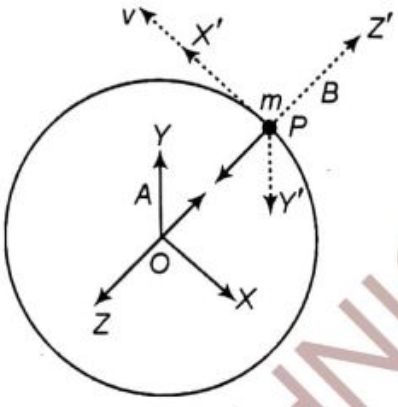
AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

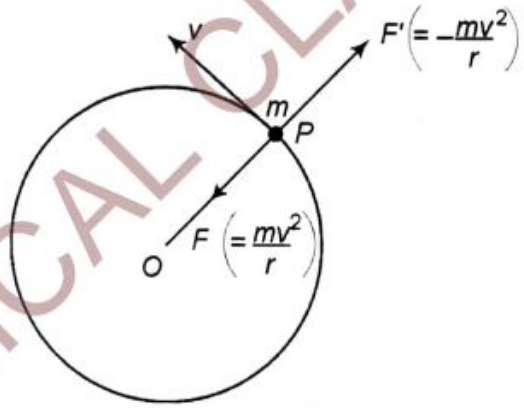
निर्देश तंत्र A (चित्र 2.42 (a)) में, माना m द्रव्यमान का कोई कण बिन्दु P पर रखा है, तथा निर्देश तंत्र C, निर्देश तंत्र A के सापेक्ष त्वरण 'a' से गति कर रहा है। तब निर्देश तंत्र C में कण P, X –अक्ष की दिशा में $(-a)$ त्वरण से गतिमान (दूर जाता हुआ) प्रतीत होगा। चूँकि कण P का द्रव्यमान m है, अत: इस कण पर $-ma$ बल कार्य करेगा (न्यूटन का गति विषयक द्वितीय नियम—बल संरक्षण का नियम)। परन्तु यहाँ न्यूटन के नियमानुसार वास्तव में कण पर बाह्य बल का मान शून्य है। स्पष्ट है कि यह जड़त्वीय निर्देश तंत्र नहीं है तथा $-ma$ बल, कल्पित या आभासी बल (fictitious or pseudo force) है।

अपकेन्द्र बल (Centrifugal force)

माना m द्रव्यमान का एक कण P, r त्रिज्या वाले वृत्त की परिधि पर 'v' वेग से गति कर रहा है। वृत्त के केन्द्र O पर जड़त्वीय निर्देश तंत्र A है तथा दूसरा निर्देश तंत्र B घूमते हुए कण P से जुड़ा है (चित्र 2.43), जो कण के साथ ही वृत्तीय गति कर रहा है। हम जानते हैं कि एक समान वृत्तीय गति में अभिकेन्द्र त्वरण का मान v^2/r तथा दिशा वृत्त के केन्द्र की तरफ होती है। यहाँ कण P से सम्बद्ध निर्देश तंत्र B त्वरित निर्देश तंत्र है। अत: निर्देश तंत्र B का त्वरण $-v^2/r$ होगा तथा दिशा वृत्त के केन्द्र से बाहर की तरफ होगी। इस निर्देश तंत्र B में कण पर लगने वाला बल $-\frac{mv^2}{r}$ होगा, जिसकी दिशा केन्द्र से बाहर की ओर होगी। यह बल, कण P द्वारा वृत्त के केन्द्र O पर लगता है (चित्र 2.44)। इस कल्पित या आभासी बल की अनुभूति केवल त्वरित निर्देश तंत्र में होती है। जड़त्वीय निर्देश तंत्र में इसका कोई अस्तित्व नहीं है। अत: इसे काल्पनिक बल कहते हैं।



चित्र 2.43



चित्र 2.44

जब कोई व्यक्ति घूमती हुई वस्तु (त्वरित निर्देश तंत्र) पर स्थित होता है तो उसे अपकेन्द्र बल का अहसास होता है,

उदाहरणार्थ—

(i) यदि कोई व्यक्ति घूमते हुए झूले (Merry go round) पर खड़ा हो जाय और झूले की रस्सियों को छोड़ दे तो वह व्यक्ति तुरन्त बाहर की ओर गिर पड़ेगा। व्यक्ति को यह महसूस होगा कि उस पर बाहर की ओर कोई बल (अपकेन्द्र) आरोपित हुआ था।

(ii) ड्रायर (Drier)—यह गीले कपड़े सुखाने का यन्त्र है। इसमें गीले कपड़ों को एक बेलनाकार बर्तन, जिसकी दीवार में छिद्र होते हैं, में भरकर इस बर्तन को बेलन की अक्ष के परित: तेजी से घुमाते हैं। बर्तन पर अभिकेन्द्र बल अन्दर की ओर तथा इसके अन्दर रखे गीले कपड़ों पर बाहर की ओर आभासी (अपकेन्द्र) बल का प्रभाव होता है जिसके कारण कपड़े बेलन की दीवार से सट जाते हैं तथा कपड़ों के अन्दर उपस्थित पानी के कण बेलन की दीवार में छिद्रों से बाहर निकल जाते हैं जिससे कपड़े लगभग सूख जाते हैं।

(iii) यदि हम कार में बैठकर यात्रा कर रहे हों और हमारा शरीर सीट बेल्ट से बँधा न हो तो यदि कार अचानक दायीं ओर मुड़ जाए तो हम बायीं ओर गिरने लगते हैं, कार की बॉडी से टकरा जाते हैं। ऐसा कार के वृत्तीय पथ पर चलने के कारण होता है। हमें ऐसा प्रतीत होता है कि कार के मुड़ने पर मोड़ से बाहर की ओर कोई बल (अपकेन्द्र) हमें धकेल रहा है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 2.19 अपकेन्द्रित्र (Centrifuge)

यह एक ऐसा यन्त्र है जिसकी सहायता से किसी द्रव में उपस्थित भिन्न-भिन्न द्रव्यमानों के कणों को अलग किया जाता है। यह भी आभासी (अपकेन्द्र) बल के कारण ही होता है। इसमें द्रव को एक बेलनाकार बर्तन में भर कर, ऊर्ध्वाधर अक्ष के परित: क्षैतिज तल में तीव्र गति से घुमाया जाता है, जिससे अधिक द्रव्यमान (अधिक घनत्व) वाले कण केन्द्र से बाहर की ओर, तथा कम द्रव्यमान (कम घनत्व) वाले कण केन्द्र की ओर चले जाते हैं और इस प्रकार भिन्न-भिन्न द्रव्यमान के कण द्रव के अन्दर भिन्न-भिन्न त्रिज्याओं के वृत्ताकार पथ पर घूमते हैं।

अपकेन्द्र शोषक (centrifuge drier), क्रीम पृथक्कारी (cream separator), ड्राई क्लीनिंग मशीन (dry cleaning machine), चीनी बनाने की मशीन, वाशिंग मशीन (washing machine), खून से प्लेटलेट निकालने की मशीन आदि इसी सिद्धान्त पर कार्य करते हैं।

अपकेन्द्रित्र का सिद्धान्त (Principle of Centrifuge)

अपकेन्द्रित्र, अपकेन्द्रीय क्रिया पर आधारित होता है, यद्यपि इसमें कहीं भी अपकेन्द्र बल कार्य नहीं करता है।

यन्त्र में भरे द्रव के विभिन्न आकार (size) तथा द्रव्यमान (mass) के कण होते हैं। इन्हें क्षैतिज तल में समान कोणीय चाल ω से घुमाते हैं यद्यपि इस समय सभी कणों का रेखीय चाल ($v = r\omega$) भिन्न-भिन्न होता है। बर्तन पर एक अभिकेन्द्र बल लगता है।* द्रव तथा उसमें उपस्थित कण, त्वरित निर्देश तंत्र में स्थित होने के कारण, एक आभासी (अपकेन्द्र) बल $mr\omega^2$ का अनुभव करते हैं, जिसकी दिशा केन्द्र से दूर बाहर की ओर होती है। यदि भिन्न-भिन्न द्रव्यमानों के कण केन्द्र से समान दूरी (r) पर हों तो इन कणों पर आभासी बल उनके द्रव्यमानों के अनुपात में होगा अर्थात् अपकेन्द्र बल हल्के कणों पर कम तथा भारी कणों पर अधिक होगा। इसलिए भारी कण केन्द्र से अपेक्षाकृत अधिक दूरी पर परिधि की ओर चले जाते हैं। इस प्रकार **हल्के कण केन्द्र के पास तथा भारी कण केन्द्र से दूर हो जाते हैं।**

माना किसी द्रव में उपस्थित भारी तथा हल्के कणों के द्रव्यमान क्रमश: M तथा m, तथा इन्हें समान वृत्तीय गति में घुमाने पर इनमें द्रव्यमानों के अनुपात में उत्पन्न आभासी (अपकेन्द्र) बल के कारण इनकी केन्द्र से दूरियाँ क्रमश: R (अधिक दूरी) तथा r (कम दूरी) हो, तो

भारी कणों पर आरोपित आभासी (अपकेन्द्र) बल $= F = -\dfrac{Mv^2}{R}$ ... (i)

तथा हल्के कणों पर आरोपित आभासी (अपेकन्द्र) बल $= F = -\dfrac{mv^2}{r}$ ... (ii)

चूँकि दोनों कणों पर एक समान वृत्तीय गति के कारण आभासी (अपकेन्द्र) बल बराबर आरोपित होता है, अत: समीकरण (i) तथा (ii) से

$$\frac{Mv^2}{R} = \frac{mv^2}{r}$$

या $$\frac{M}{R} = \frac{m}{r} \quad \text{... (27)}$$

यदि द्रव में उपस्थित कणों को गोलाकार एवं समान त्रिज्या (आकार) का मान लें तो भारी कणों के घनत्व D तथा हल्के कणों के घनत्व d मानने पर, समीकरण (27) से—

$$\frac{(4/3)\pi r^3.D}{(4/3)\pi r^3.d} = \frac{R}{r}$$

या $$\frac{D}{d} = \frac{R}{r} \quad \text{... (28)}$$

समीकरण (27) एवं (28) से स्पष्ट है कि द्रव में उपस्थित भारी कण केन्द्र से अधिक दूरी पर एवं हल्के कण केन्द्र से कम दूरी पर स्थित हो जाते हैं और इस प्रकार विभिन्न घनत्व वाले कण अलग-अलग हो जाते हैं।

* द्रव कणों को वृत्तीय पथ पर घूमने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल द्रव परतों के मध्य श्यान बल (श्यानता) से प्राप्त होता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

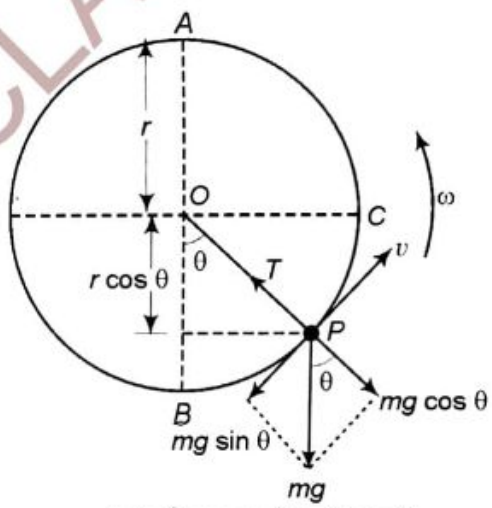
अपकेन्द्रित्र के उदाहरण (Examples of Centrifuge)

(i) **दूध से क्रीम निकालने की मशीन** (Cream separator)—अपकेन्द्रित्र में भरे दूध को घुमाने पर, इसमें उपस्थित सभी कण आभासी (अपकेन्द्र) बल का अनुभव करते हैं। दूध में उपस्थित क्रीम के कण दूध के कणों की अपेक्षा हल्के होते हैं, अत: ये कम आभासी (अपकेन्द्र) बल का अनुभव करते हैं। दूध के भारी कण बड़ी त्रिज्या का मार्ग तय कर परिधि की ओर तथा क्रीम के हल्के कण कम त्रिज्या का मार्ग ग्रहण कर बर्तन के केन्द्रीय भाग में आ जाते हैं। इस प्रकार दूध तथा क्रीम एक दूसरे से पृथक् हो जाते हैं।

(ii) **चीनी बनाने की मशीन** (Sugar machine)—चीनी बनाने की मशीन में चीनीयुक्त पानी के घोल (गन्ने का रस शोधित कर एवं पकाकर) को भरकर तेजी से घुमाते हैं, तो चीनी के कण भारी होने के कारण केन्द्र से बाहर परिधि की ओर भागते हैं और बर्तन की दीवार से चिपक जाते हैं। पानी के कण हल्के होने के कारण बर्तन के केन्द्रीय भाग में रहते हैं। इस प्रकार इन्हें पृथक् कर लिया जाता है।

ऊर्ध्वाधर वृत्त में गति—असमान वृत्तीय गति
(Motion in a vertical circle — Non-uniform circular motion)

जब किसी कण को डोरी के एक सिरे से बाँध कर ऊर्ध्वाधर वृत्तीय पथ पर घुमाते हैं तो उसकी चाल (कोणीय ω, रेखीय v) स्थिर न रहकर लगातार बदलती रहती है, क्योंकि वस्तु पर ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर गुरुत्वीय त्वरण 'g' लगता है। इस कारण कण पर लगने वाला त्वरण, अभिकेन्द्र बल तथा डोरी में तनाव भी परिमाण तथा दिशा में लगातार बदलता रहता है। अत: ऊर्ध्वाधर वृत्त में कण की गति असमान वृत्तीय गति होती है।



ऊर्ध्वाधर तल में वृत्तीय गति

चित्र 2.45

ऊर्ध्व तल में असमान वृत्तीय गति करते पिण्ड के लिए वृत्तीय पथ के विभिन्न बिन्दुओं (स्थितियों) पर कण के वेग तथा डोरी में तनाव का मान निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है—

चित्र 2.45 के अनुसार, माना m द्रव्यमान का एक कण r त्रिज्या (अर्थात् डोरी की लम्बाई r है) के ऊर्ध्वाधर वृत्तीय पथ पर बिन्दु B से घूमना प्रारम्भ करता है। माना किसी क्षण कण ऊर्ध्वाधर से θ कोण विस्थापित होकर बिन्दु P पर पहुँचता है। यदि बिन्दु P पर कण की चाल v हो तो बिन्दु P पर कण की स्थिति के अनुसार निम्न दो बल कार्यकारी होते हैं—

(i) कण का भार mg, ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर तथा इसके दो लम्बवत् घटक $mg\cos\theta$ तथा $mg\sin\theta$

(ii) डोरी में तनाव के कारण बल T, जिसकी दिशा केन्द्र O की ओर है।

घटक $mg\sin\theta$ के कारण कण की चाल v बदलती रहती है (इसलिए ω भी बदलती रहती है)।

अत: वृत्त के केन्द्र की तरफ लगने वाला नेट बल $= T - mg\cos\theta$

यही बल कण पर लगने वाला अभिकेन्द्र बल है, अत:

$$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{r}$$

या
$$T = \frac{mv^2}{r} + mg\cos\theta \quad \text{... (i)}$$

कण जब वृत्तीय पथ के उच्चतम बिन्दु पर होगा तो कण की चाल तथा डोरी में तनाव दोनों ही कम हो जायेंगे। समीकरण (i) में $\cos\theta$ का मान $180°$ प्रतिस्थापित करने पर

AKC-TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$T_A = \frac{mv_A^2}{r} + mg\cos 180°$$

या $$T_A = \frac{mv_A^2}{r} - mg \qquad (\because \cos 180° = -1) \qquad \ldots (ii)$$

समीकरण (ii) से स्पष्ट है कि V_A का मान कम करते जाने पर T_A का मान कम होता जाता है तथा V_A के एक विशेष मान पर T_A शून्य हो जाता है, अर्थात्

$$0 = \frac{mv_A^2}{r} - mg$$

या $$mv_A^2 = mg.r$$

$$v_A = \sqrt{gr}$$

अथवा $$v_A = v_C = \sqrt{gr} \qquad \ldots (29)$$

v_A का यह मान ऊर्ध्वाधर वृत्तीय गति के लिए आवश्यक न्यूनतम चाल है, इसे क्रान्तिक चाल (critical speed) v_C कहते हैं। इस दशा में आवश्यक अभिकेन्द्र बल कण के भार से ही प्राप्त होता है। यद्यपि इस समय डोरी में तनाव शून्य $(T = 0)$ है फिर भी डोरी सीधी तनी होती है तथा पिण्ड जड़त्व के कारण वृत्तीय पथ पर आगे बढ़ जाता है। यदि पिण्ड की चाल उच्चतम बिन्दु पर क्रान्तिक चाल से कम हो जाये अर्थात् $v_A < v_C (= \sqrt{gr})$ तब आवश्यक अभिकेन्द्र बल का मान कण के भार से कम होगा तथा डोरी ढीली पड़ जायेगी तथा वृत्तीय गति संभव नहीं होगा। यदि $v_A > v_C (= \sqrt{gr})$ तब $T_A \neq 0$, अर्थात् डोरी में तनाव होगा।

चूँकि बिन्दु P पर कण की चाल v है तो ऊर्जा संरक्षण के नियमानुसार—

बिन्दु A पर कण की कुल ऊर्जा = बिन्दु P पर कण की कुल ऊर्जा

अर्थात् बिन्दु A पर कण की गतिज ऊर्जा व स्थितिज ऊर्जा का योग = बिन्दु P पर की गतिज ऊर्जा व स्थितिज ऊर्जा का योग

या $$K_A + U_A = K_P + U_P$$

या $$\frac{1}{2}mv_A^2 + mg(2r) = \frac{1}{2}mv^2 + mg(r - r\cos\theta)$$

समीकरण (29) से V_A का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{1}{2}m(\sqrt{gr})^2 + 2mgr = \frac{1}{2}mv^2 + mg(r - r\cos\theta)$$

या, $$\frac{gr}{2} + 2gr = \frac{v^2}{2} + gr(1 - \cos\theta)$$

या, $$\boldsymbol{v = \sqrt{gr\,(3 + 2\cos\theta)}} \qquad \ldots (30)$$

समीकरण (30) का यह मान समीकरण (i) में रखने पर

$$T = \frac{m}{r}[\sqrt{gr\,(3 + 2\cos\theta)}]^2 + mg\cos\theta$$

या $$\boldsymbol{T = 3\,mg(1 + \cos\theta)} \qquad \ldots (31)$$

ऊर्ध्व तल में वृत्तीय गति करते कण की विभिन्न स्थितियों में जैसे चित्र 2.45 के अनुसार बिन्दु A, B अथवा C पर कण की चाल तथा डोरी में तनाव समीकरण (30) तथा (31) से ज्ञात किया जा सकता है, जैसे—

(i) $\cos\theta = 180°$, रखने पर $v_A = \sqrt{gr}$, $T_A = 0$

(ii) $\cos\theta = 0°$ तब $v_B = \sqrt{5gr}$, $T_B = 6\,mg$

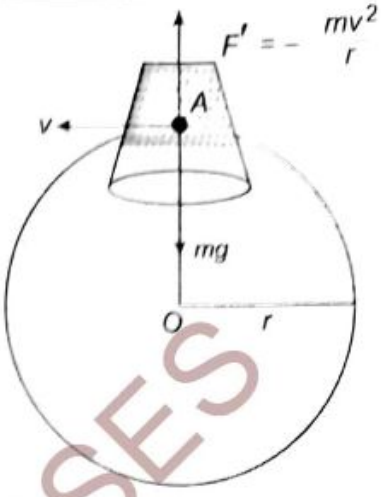
(iii) $\cos\theta = 90°$, तब $v_C = \sqrt{3gr}$, $T_C = 3\,mg$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

ऊर्ध्वाधर वृत्तीय गति का उदाहरण

यदि किसी बाल्टी में पानी भरकर तेजी से ऊर्ध्व तल में वृत्ताकार घुमाई जाए तो पानी, वृत्त के उच्चतम बिन्दु पर बाल्टी के उलट जाने पर भी नीचे नहीं गिरता है (चित्र 2.46)।



चित्र 2.46

माना एक बाल्टी में भरे पानी का द्रव्यमान m है तथा इसे r त्रिज्या के ऊर्ध्व तल में वृत्तीय पथ पर घुमाया जा रहा है। वृत्त की उच्चतम बिन्दु A पर पानी का भार mg नीचे की ओर कार्य करेगा जबकि बाल्टी के रेखीय वेग v के कारण आभासी (अपकेन्द्र) बल $\left(=-\frac{mv^2}{r}\right)$ ऊपर की ओर कार्य करेगा (–ve चिह्न दिशा दिखाता है)। अर्थात् बाल्टी के पानी पर कुल परिणामी बल

$$= \frac{mv^2}{r} - mg$$

यदि $$\frac{mv^2}{r} \geq mg$$

तो परिणामी बल के कारण पानी नीचे नहीं गिरेगा। उपरोक्त सम्बन्ध से $v = \sqrt{gr}$, अत: ऊर्ध्वाधर वृत्तीय गति में उच्चतम बिन्दु पर न्यूनतम चाल $\sqrt{gr}$ होना चाहिए। यह मान बाल्टी में भरे पानी के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है।

स्मरणीय बिन्दु
(Points to be Remembered)

(1) वे राशियाँ जिनमें केवल परिमाण होता है, दिशा नहीं होती है, अदिश राशियाँ कहलाती हैं।

(2) वे राशियाँ जिनमें परिणाम के साथ-साथ दिशा भी होती है, सदिश राशियाँ कहलाती है।

(3) विद्युत धारा एवं कोणीय विस्थापन दोनों दिशायुक्त होते हुए भी अदिश राशियों की श्रेणी में आते हैं जबकि भार, अल्प क्षेत्रफल, अल्पकोण तथा धारा घनत्व सदिश राशियां है।

(4) दो वेक्टरों का योग उनके बीच के कोण पर निर्भर करता है। और निम्नांकित सूत्र से प्राप्त होता है।

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

$\theta = 0$ होने पर, $R_{max} = (A + B)$

और $\theta = 180°$ होने पर, $R_{max} = (A \approx B)$

(5) (i) घटाने की क्रिया भी योग की क्रिया है। जिस वेक्टर को घटाना होता है। उसका ऋणात्मक वेक्टर जोड़ दिया जाता है।

अर्थात् $$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

(ii) वेक्टरों का अन्तर क्रमविनिमेय (Commutative) नहीं होता है क्योंकि

$$(\vec{A} - \vec{B}) = -(\vec{B} - \vec{A})$$

(6) (i) किसी वेक्टर के घटक, दो या दो से अधिक, वे वेक्टर है। जिनका योग उस वेक्टर के बराबर होता है। यदि किसी वेक्टर $\vec{A}$ के दो लम्बवत घटक $\vec{A}_x$ एवं $\vec{A}_y$ हो तो वह वेक्टर

(ii) रोलर को धकेलने की अपेक्षा खींचना आसान होता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(7) किसी वेक्टर को जब स्केलर से गुणा करते हैं। तो गुणनफल वेक्टर ही होता है। जिसकी दिशा मूल वेक्टर की दिशा में होती है और परिमाण दोनों के (वेक्टर एवं स्केलर) परिमाणों का गुणनफल होता है।

$$\vec{R} = K \cdot \vec{A}$$

(8) (i) वेक्टरों का स्केलर या डॉट गुणनफल अदिश राशि होती है। इसका मान

(ii) जब $\theta = 0^\circ$ तो $\cos\theta = 1$ $\therefore$ $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB$

(iii) जब $\theta = 90^\circ$ तो $\cos\theta = 0$ $\therefore \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

(iv) इसीलिए $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$

और $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$

(v) वेक्टरों का डॉट गुणनफल क्रमविनिमेय (Commutative) होता है।

(9) (i) वेक्टरों का वेक्टर गुणन या क्रॉस गुणन सदिश राशि होती है। इसका मान निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होता है।

$$\vec{A} \times \vec{B} = A \cdot B \sin\theta \hat{n}$$

जहाँ $\hat{n}$ वेक्टरों $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के तल के लम्बवत् दिशा में (दक्षिणावर्त पेंच के नियमानुसार) मात्रक वेक्टर है।

(ii) सदिश गुणन क्रमविनिमेय नहीं होता है। क्योंकि

$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$$

(10) दो वेक्टरों के बीच का कोण यदि θ है तो

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

$$\therefore \quad \theta = \cos^{-1}\left[\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}\right]$$

(11) मात्रक वेक्टरों $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ के पदों में यदि कोई वेक्टर

$$\vec{A} = x\hat{i} + y\hat{i} + Z\hat{K}$$

तो $$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

जहाँ $\left|\vec{A}\right| = a = \vec{A})$ का परिमाण।

(12) 1^c (रेडियन) $= 57{\cdot}3^\circ$ तथा $1^\circ = 0{\cdot}0175^c$ (रेडियन)

वृत्ताकार पथ पर गतिमान कण द्वारा लगाये गये चक्करों के पदों में, 1 चक्कर $= 2\pi$ रेडियन $= 360^\circ$

$$1^c = 0{\cdot}159 \text{ चक्कर}$$

(13) वामावर्त दिशा (anticlockwise direction) में मापा गया कोण धनात्मक तथा दक्षिणावर्त दिशा (clockwise direction) में मापा गया कोण ऋणात्मक चिह्न द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

(14) सामान्यतया, बल धक्का या खिंचाव है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(15) किसी स्थिर बिन्दु की ओर अथवा उससे दूर की ओर कार्य करने वाले बल को केन्द्रीय बल कहते हैं।

(16) वृत्तीय गति एक समतल मे गति का उदाहरण है।

(17) किसी पिण्ड के सरल रेखीय एक समान गति के सम्बन्ध में न्यूटन के गति विषयक तीन नियम हैं—

(i) जड़त्व का नियम (ii) बल संरक्षण का नियम $\left(F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = ma\right)$

(iii) क्रिया-प्रतिक्रिया का नियम।

(18) एक समान त्वरण के अन्तर्गत रेखीय गति करते पिण्ड के लिए गति के तीन समीकरण निम्न हैं—

$$v = u + at$$

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{त्वरण के लिए : } +a$$

$$v^2 = u^2 + 2as \qquad \text{मंदन के लिए : } -a$$

(19) वृत्तीय गति दो प्रकार की होती है—

(i) एक समान वृत्तीय गति—सभी क्षैतिज वृत्तीय गतियाँ जिनकी चाल नियत हो परन्तु दिशा परिवर्तनशील।

(ii) असमान वृत्तीय गति—ऊर्ध्व तल में वृत्तीय गतियाँ जिनकी न चाल और न ही दिशा स्थिर होती है।

(20) कोणीय विस्थापन, $\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r}$ रेडियन

(21) वृत्ताकार पथ पर गतिमान कण के लिए, $v = r.\omega$

(22) **अभिकेन्द्र त्वरण :** $\left(a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 = v\omega = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 4\pi^2 f^2 r\right)$

एक समान वृत्तीय गति करते पिण्ड की दिशा (वेग में) लगातार बदलती रहती है, इस कारण उसकी गति में त्वरण होता है जिसकी दिशा वेग की दिशा के लम्बवत, वृत्ताकार पथ की त्रिज्या के अनुदिश केन्द्र की ओर होती है, इसे अभिकेन्द्र त्वरण कहते हैं।

(23) **अभिकेन्द्र बल :** $\left(F = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2 = mv\omega = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} = m4\pi^2 f^2 r\right)$

अभिकेन्द्र त्वरण जिस कारण से होता है उसे अभिकेन्द्र बल कहते हैं, इस बल की दिशा भी सदैव केन्द्र की ओर दिष्ट होती है। **वृत्तीय गति में अभिकेन्द्र बल द्वारा किया गया कार्य शून्य होता है।**

(24) **स्पर्श रेखीय त्वरण :** असमान वृत्तीय गति करने वाले कण पर अभिकेन्द्र त्वरण के साथ-साथ एक अन्य त्वरण, कण के वेग की दिशा के अनुदिश लगता है जिसे स्पर्श रेखीय त्वरण कहते हैं, इसका मान $a_t = \frac{dv}{dt} = r\alpha$, जहाँ α कण का कोणीय त्वरण है।

(25) यदि समतल सड़क वृत्ताकार हो, तो साइकिल अथवा मोटर साइकिल सवार सन्तुलन बनाये रखने के लिए, ऊर्ध्वाधर से कोण θ पर मोड़ के केन्द्र की ओर कोण θ पर झुक जाता है। मुड़ने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल, सड़क तथा टायर के मध्य लगने वाले घर्षण बल से प्राप्त होता है, तब $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$ तथा मोड़ पर सुरक्षित मुड़ने के लिए चाल का अधिकतम मान $v_{max} = \sqrt{\mu rg}$ होता है। इस अधिकतम चाल से मुड़ने पर ऊर्ध्वाधर से बना कोण, घर्षण कोण $(\tan^{-1}\mu)$ के बराबर होता है।

AKOTECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(26) समतल सड़क पर मोड़ पर कार को मुड़ने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल, कार के टायरों तथा सड़क के मध्य लगने वाले घर्षण बल से प्राप्त होता है जिसका मान एक अधिकतम मान (सीमान्त घर्षण बल $\mu_s N$) से अधिक नहीं हो सकता है।

$$\therefore \quad \frac{mv^2}{r} \le \mu_s mg \qquad \therefore \quad r \ge \frac{r^2}{\mu_s g}$$

यदि $\frac{v^2}{r} > \mu_s g$ तो कार मुड़ने के बजाय फिसलने लगेगी।

(27) भारी वाहनों को अधिक अभिकेन्द्र बल प्रदान के लिए सड़क अथवा रेल की पटरी को मोड़ पर अन्दर (केन्द्र) की ओर कुछ ढलाव दे देते हैं तब वाहन पर लगने वाला अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल का क्षैतिज घटक आवश्यक अभिकेन्द्र बल प्रदान करता है। तब $\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$, मोड़ पर वांछित चाल $v = \sqrt{rg\tan\theta}$; वांछित चाल वाहन के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता। यदि मोड़ पर वाहन की चाल > वांछित चाल, तो वाहन के अन्दर के पहियों पर प्रतिक्रिया बल पहले शून्य होता है तथा सड़क से सम्पर्क हट जाता है जिससे वाहन बाहर की ओर पलट जाता है।

(28) अजड़त्वीय निर्देश तंत्र (जिनकी गति त्वरित $\vec{a}$ होती है) में स्थित द्रव्यमान m का पिण्ड एक आभासी बल $F = -ma$ का अनुभव करता है, अत: घूमते हुए निर्देश तंत्र में स्थित द्रव्यमान m के किसी पिण्ड पर $m\omega^2 r \left(= \frac{mv^2}{r} = m\omega v\right)$ त्रिज्या के अनुदिश केन्द्र से बाहर की ओर लगा प्रतीत होता है। इसे ही अपकेन्द्र बल कहते हैं— इसका प्रभाव महसूस होता है।

(29) अपकेन्द्रित्र एक ऐसा यन्त्र है जो किसी द्रव में उपस्थित भिन्न-भिन्न द्रव्यमान के कणों को अलग-अलग कर देता है। भारी कण केन्द्र से दूर तथा हल्के कण केन्द्र के पास।

साधित आंकिक उदाहरण
(Solved Numerical Examples)

उदाहरण 19 : एक पिण्ड 20 मीटर/सेकण्ड के वेग से ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंका जाता है। ज्ञात कीजिए— (i) पिण्ड की अधिकतम ऊँचाई (ii) यात्रा का कुल समय (iii) पृथ्वी से वापस टकराते समय पिण्ड का वेग। (g = 10 मीटर/सेकण्ड^2)

हल— दिया है : $u = 20$ मी/से तथा $a = -g$, अत:

(i) समीकरण $v^2 = u^2 + 2as$ से

चूँकि अधिकतम ऊँचाई पर वेग शून्य होता है अत: $v = 0$

इसलिए $(0)^2 = (20)^2 + 2(-g)h$

या $h = \frac{20\times20}{2\times10}$

h = **20 मीटर**

AKOTECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(ii) यदि पिण्ड t समय मे अधिकतम ऊँचाई प्राप्त करता है, तो

समीकरण $v = u + at$ से

$$0 = 20 + (-g)\,t$$

$$t = \frac{20}{10} \text{ सेकण्ड}$$

$$\therefore \quad t = 2 \text{ सेकण्ड}$$

अत: यात्रा मे लगा कुल समय $T = 2t$

या $= 2 \times 2$ से

या $\boldsymbol{T = 4}$ **सेकण्ड**

(iii) सममिति सिद्धान्त के अनुसार पिण्ड जिस वेग से पृथ्वी तल से ऊपर फेंका जाता है वह उसी वेग से (उस ऊँचाई पर) पृथ्वी से वापस टकराता है। अत: **पृथ्वी से टकराते समय पिण्ड का वेग = 20 मीटर/सेकण्ड ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर।**

उदाहरण 20 : एक रॉकेट, जो किसी उपग्रह को उसकी कक्षा में भेजने के लिए भेजा जाता है, 2·05 मिनट में $2{\cdot}90 \times 10^4$ किमी/घण्टे का वेग प्राप्त कर लेता है। ज्ञात कीजिए—

(i) इसकी किमी/घण्टा प्रति सेकण्ड में औसत वेग वृद्धि।

(ii) यदि एक समान वेग वृद्धि से चले तो एक घण्टे पश्चात् उसका वेग (माना जाये कि प्रारम्भिक वेग शून्य था)।

(iii) एक घण्टे में चली गयी दूरी।

(UPBTE 1994)

हल— दिया है :

$$u = 0,\ v = 2{\cdot}90 \times 10^4 \text{ किमी/घण्टा}$$

$$t = 2{\cdot}05 \text{ मिनट} = 2{\cdot}05 \times 60 \text{ सेकण्ड}$$

(i) समीकरण $v = u + at$ से

$$2{\cdot}90 \times 10^4 = 0 + a \times (2{\cdot}05 \times 60)$$

या $$a = \frac{2{\cdot}90 \times 10^4}{2{\cdot}05 \times 60} \text{ किमी/घण्टा प्रति सेकण्ड}$$

या $\boldsymbol{a = 235.8}$ **किमी/घण्टा प्रति सेकण्ड**

(ii) एक घण्टा पश्चात् रॉकेट का वेग

समीकरण $v = u + at$ से

$$v = 0 + 235{\cdot}8 \times 60 \times 60 \text{ किमी/घण्टा}$$

या $\boldsymbol{v = 848880}$ **किमी/घण्टा**

(iii) एक घण्टे में चली गयी दूरी

समीकरण $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ से

$$s = (0 \times t) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{235{\cdot}8}{60 \times 60}\right) \times (60 \times 60)^2 \text{ किमी}$$

या $\boldsymbol{s = 424440}$ **किमी**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 21 : एक पिण्ड 480 चक्कर प्रति मिनट की दर से 0.4 मीटर व्यास के वृत्त में चक्कर लगा रहा है। पिण्ड का कोणीय वेग तथा रेखीय वेग बताइये।

हल— प्रश्नानुसार, $n = 480$ चक्कर/मिनट

$$= \frac{480}{60} \text{ चक्कर/सेकण्ड}$$

$$= 8 \text{ चक्कर/सेकण्ड}$$

∵ पिण्ड का कोणीय वेग, $\omega = 2\pi n$

अत: $= 2 \times \frac{22}{7} \times 8$ रेडियन/सेकण्ड

$\omega = 50 \cdot 29$ रेडियन/सेकण्ड

तथा पिण्ड का रेखीय वेग, $v = r\omega$

$$= \left(\frac{0 \cdot 4}{2}\right) \times 50 \cdot 29 \text{ मीटर/सेकण्ड}$$

$$v = \mathbf{10 \cdot 05 \text{ मीटर/सेकण्ड}}$$

उदाहरण 22 : 100 ग्राम द्रव्यमान के एक पिण्ड को 2 मीटर डोरी, जो कि अधिकतम 36 न्यूटन का तनाव सह सकती है, की सहायता से किसी क्षैतिज तल में अधिकतम कितने पूर्ण चक्कर प्रति मिनट की दर से घुमाया जा सकता है?

हल— प्रश्नानुसार,

अभिकेन्द्र बल = डोरी में तनाव

अथवा $\frac{mv^2}{r} = T$

या $T = \frac{m}{r}.(r\omega)^2 = \frac{m}{r}.(r^2 2\pi n)^2$

या $T = 4\pi^2 n^2 . mr$ ... (i)

दिया है $m = 100$ ग्राम $= 100 \times 10^{-3}$ किग्रा $= 10^{-1}$ किग्रा $r = 2$ मीटर, $T = 36$ न्यूटन

अत: समीकरण (i) से

$$36 = 4\pi^2 . n^2 \times 10^{-1} \times 2 = \frac{36}{8\pi^2 \times 10^{-1}} = \frac{36}{79 \cdot 02 \times 10^{-1}}$$

$$n^2 = 4 \cdot 55$$

$$n = \mathbf{2 \cdot 13 \text{ चक्कर/मिनट}}$$

अर्थात् डोरी को अधिकतम 2 · 13 चक्कर/मिनट की दर से घुमाया जा सकता है।

उदाहरण 23 : किसी मशीन का कोणीय वेग 10 सेकण्ड में 500 चक्कर/मिनट से बढ़कर 1000 चक्कर/मिनट हो जाता है। मशीन का कोणीय त्वरण ज्ञात कीजिए।

हल—प्रथम अवस्था मे मशीन का कोणीय वेग

$$\omega_1 = 2\pi n_1 = 1000\pi \text{ रेडियन/मिनट}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

दूसरी अवस्था में मशीन का कोणीय वेग

$$\omega_2 = 2\pi n_2 = 2000\pi \text{ रेडियन/मिनट}$$

अत: मशीन का कोणीय त्वरण $= \dfrac{2000\pi - 1000\pi}{t}$

$$= \frac{1000\pi}{60\times 10} \text{ रेडियन/सेकण्ड}$$

$$\alpha = \mathbf{5\cdot 23 \text{ रेडियन/सेकण्ड}}$$

उदाहरण 24 : घड़ी की 8 सेमी लम्बी सेकण्ड वाली सुई का औसत कोणीय वेग ज्ञात कीजिए।

हल— कोणीय वेग $= 2\pi n$

चूँकि घड़ी की सेकण्ड की सुई 1 मिनट (= 60 सेकण्ड) में एक चक्कर पूरा करती है। अत:

$$n = \frac{1}{60} \text{ चक्कर/सेकण्ड}$$

सुई का औसत कोणीय वेग, $\omega = 2\pi n$

$$= \frac{2\pi}{60}$$

$$\omega = \mathbf{\frac{\pi}{30} \text{ रेडियन/सेकण्ड}}$$

सुई की लम्बाई का सुई के औसत कोणीय वेग से कोई सम्बन्ध नहीं होता है।

उदाहरण 25 : एक साइकिल सवार का साइकिल सहित द्रव्यमान 90 किग्रा है। वह 45 मीटर त्रिज्या वाले वृत्तीय मोड़ को 15 मी/से के वेग से पार करना चाहता है। यदि साइकिल के टायरों तथा सड़क के बीच घर्षण गुणांक $\mu = 0\cdot 6$ हो, तो क्या सवार मोड़ को पार कर लेगा? वह ऊर्ध्वाधर से किस कोण पर झुके कि साइकिल बिना फिसले मोड़ पार कर ले? ($g = 9.8$ मी/से^{2})

हल— मुड़ने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल, पृथ्वी तथा टायरों के बीच घर्षण बल द्वारा प्राप्त होता है। अत:

अभिकेन्द्र बल $F = \dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{90\times 15\times 15}{45} = 450$ न्यूटन

यदि पृथ्वी की अभिलम्ब प्रतिक्रिया R हो, तब अधिकतम घर्षण बल μR होगा, जहाँ μ घर्षण गुणांक (Friction coefficient) है।

क्षैतिज सड़क पर $R = mg$

अत: घर्षण बल $= \mu R$

$$= \mu mg$$

$$= 0\cdot 6\times 90\times 9\cdot 8$$

$$= 529\cdot 2 \text{ न्यूटन}$$

चूँकि आवश्यक अभिकेन्द्र बल, उत्पन्न घर्षण बल से कम है अत: साइकिल सवार मोड़ को पार कर लेगा।

यदि सवार का ऊर्ध्वाधर से झुकाव θ हो, तब

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg} = \frac{15\times 15}{45\times 9\cdot 8} = 0\cdot 51$$

$\therefore$ कोण $\theta = \mathbf{\tan^{-1}(0\cdot 51) = 27^\circ}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 26 : 0 · 2 किग्रा द्रव्यमान, 1 · 0 मीटर लम्बी डोरी के एक सिरे से बाँधकर, जिसका दूसरा सिरा स्थिर है, क्षैतिज तल में घुमाया जाता है। यदि यह $\frac{6}{\pi}$ चक्कर/से लगाता हो, तो डोरी में तनाव ज्ञात कीजिए।

हल — दिया है : $m = 0 \cdot 2$ किग्रा, $r = 1$ मीटर, $n = \frac{6}{\pi}$

हम जानते हैं कि

$$T = 4\pi^2 mrn^2$$

डोरी में तनाव $$T = 4 \times \pi^2 \times 0 \cdot 2 \times 1 \cdot 0 \times \left(\frac{6}{\pi}\right)^2$$

या $$T = \mathbf{28 \cdot 8}$$ **न्यूटन**

उदाहरण 27 : m द्रव्यमान की गेंद को रस्सी के एक सिरे से बाँधकर, क्षैतिज तल में घुमाया जाता है। यदि घूर्णन आवृत्ति $\frac{3}{2}$ गुना कर दी जाये, तो डोरी के तनाव में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात कीजिए।

हल— डोरी में उत्पन्न तनाव = अभिकेन्द्र बल

अथवा $$T = 4\pi^2 mr.n^2 \quad \text{(i)}$$

प्रश्नानुसार, $$T_1 = 4\pi^2 .mr.n_1^2$$

जब $$n_2 = \frac{3}{2} n_1$$

तब $$T_2 = 4\pi^2 .m\ .r.\left[\frac{3}{2} n_1\right]^2 \quad \text{(ii)}$$

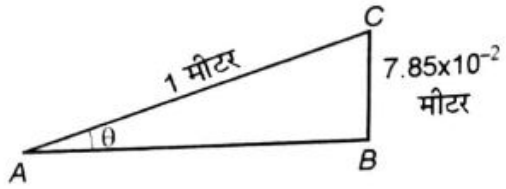
समीकरण (i) तथा (ii) से $$\frac{T_2}{T_1} = \frac{9}{4}$$

अत: तनाव में प्रतिशत वृद्धि $$= \left[\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right] \times 100$$

$$= \left[\frac{9}{4} - 1\right] \times 100$$

$$= \frac{5}{4} \times 100$$

$$= \mathbf{125\%}$$



उदाहरण 28 : 10^9 किग्रा द्रव्यमान की मीटर गेज (पटरी के मध्य दूरी 1 मीटर) की एक रेलगाड़ी 1200 मीटर त्रिज्या वाले मोड़ से मुड़ना चाहती है। यदि मोड़ की बाहरी पटरी भीतरी पटरी से 7 · 85 सेमी ऊँची हो तथा पटरी व गाड़ी के पहियों के मध्य घर्षण गुणांक 0 · 21 हो तो गाड़ी का अधिकतम सुरक्षित वेग ज्ञात कीजिए।

हल दिया है : $$m = 10^9 \text{ किग्रा},$$

$$r = 1200 \text{ मी},$$

$$\mu = 0 \cdot 21$$

$$\Delta ABC \text{ से } \sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{7 \cdot 85 \times 10^{-2}}{1}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

चूँकि θ छोटा है, अत:

$$\sin\theta = \tan\theta = 7{\cdot}85\times10^{-2}$$

अब समीकरण $\dfrac{\tan\theta+\mu}{1-\mu\tan\theta} = \dfrac{v^2}{rg}$ से

$$\frac{(7{\cdot}85\times10^{-2})+0{\cdot}21}{1-(0{\cdot}21\times7{\cdot}85\times10^{-2})} = \frac{v^2}{1200\times9{\cdot}8}$$

या $$\frac{0{\cdot}2885}{0{\cdot}9835} = \frac{v^2}{1200\times9{\cdot}8}$$

या $$v = \sqrt{3449{\cdot}63}$$

∴ $$\boldsymbol{v = 58{\cdot}73 \text{ मी/से}}$$

उदाहरण 29 : एक मोटर गाड़ी को 9° ढलान (Banking) वाली सड़क, जिसकी मोड़ पर त्रिज्या 150 मी है, से मुड़ना है। यदि मोटर गाड़ी के टायर तथा सड़क के मध्य घर्षण गुणांक 0.6 हो तो ज्ञात कीजिए (i) मोटर गाड़ी का अधिकतम सुरक्षित वेग (ii) अधिकतम सुरक्षित वेग जब टायर का घिसाव कम से कम हो (दिया है tan 9° = 0·1584)।

हल— दिया है $\theta = 9°$ अत: $\tan 9° = 0{\cdot}1584$, $r = 150$ मी, $\mu = 0{\cdot}6$

(i) समीकरण $\dfrac{\mu+\tan\theta}{1-\mu\tan\theta} = \dfrac{v^2}{rg}$ से

$$\frac{0{\cdot}6+0{\cdot}1584}{1-(0{\cdot}6\times0{\cdot}1584)} = \frac{v^2}{150\times9{\cdot}8}$$

$$\boldsymbol{v = 35{\cdot}098 \text{ मी/से}}$$

(ii) टायर घिसाव कम से कम रखने के लिये समीकरण में $\mu = 0$ रखने पर,

$$\tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

या $$v = \sqrt{0{\cdot}1584\times150\times9{\cdot}8}$$

∴ $$\boldsymbol{v = 15{\cdot}26 \text{ मी/से}}$$

उदाहरण 30 : 50 ग्राम द्रव्यमान का एक कण 1·0 मीटर त्रिज्या के क्षैतिज वृत्त में घूमते हुए $\frac{15}{\pi}$ चक्कर प्रति सेकण्ड लगाता है। गणना कीजिए—

(i) कण का त्वरण

(ii) एक-चौथाई चक्कर लगाने में संवेग परिवर्तन। **(UP BTE 2013)**

हल—दिया है :

$$m = 50 \text{ ग्राम} = 50\times10^{-3} \text{ किग्रा}$$

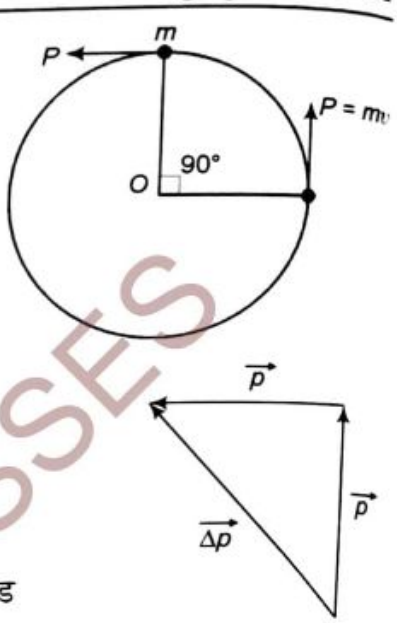
$$r = 1{\cdot}0 \text{ मीटर}$$

तथा $$\omega = 2\pi n = 2\pi\times\frac{15}{\pi}$$

$$\omega = 30 \text{ रेडियन/सेकण्ड}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner



अत: (i) ∵ अभिकेन्द्र त्वरण $a = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$

मान रखने पर $= 1 \times (30)^2$

$=$ **900 मीटर/सेकण्ड^2**

(ii) एक चौथाई चक्कर $= 90°$ (∵ एक पूर्ण चक्कर $= 360°$)

अत: एक चौथाई चक्कर में संवेग परिवर्तन

$$\Delta p = \sqrt{p^2 + p^2}$$

$$\Delta p = \sqrt{2}\, p$$

∵ रेखीय संवेग $p = mv$

$= mr\omega$

मान रखने पर $p = 50 \times 10^{-3} \times 1{\cdot}0 \times 30$ किग्रा मीटर/सेकण्ड

$= 1{\cdot}5$ किग्रा मीटर/सेकण्ड

अत: $\Delta p = 1{\cdot}5\sqrt{2}$

$\Delta p = 1{\cdot}5 \times 1{\cdot}414$

$\Delta p = 2{\cdot}12$ किग्रा मीटर/सेकण्ड

अभ्यास (Exercises)

1. द्रव्यमान, कार्य, त्वरण तथा दाब में कौन सी राशि सदिश है? **[उत्तर :** त्वरण।**]**

2. क्या एक स्केलर को वेक्टर में जोड़ा जा सकता है? **[उत्तर :** नहीं।**]**

3. क्या एक स्केलर का एक वेक्टर से गुणा किया जा सकता है? **[उत्तर :** हाँ।**]**

4. एक स्केलर S को वेक्टर $\vec{A}$ से गुणा कीजिए तथा बताइये गुणनफल कैसी राशि है? **[उत्तर : SA** वेक्टर**]**

5. एक स्केलर के वेक्टर से गुणन का कोई उदाहरण दीजिए। **[उत्तर :** संवेग $\vec{p} = m\vec{v}$ या बल $m\vec{a} = \vec{F}$**]**

6. क्या $(\vec{A} + \vec{B})$ का मान वही है तो $(\vec{B} + \vec{A})$ का है। **[उत्तर :** हाँ।**]**

7. क्या $(\vec{A} - \vec{B})$ का मान वही है जो $(\vec{B} - \vec{A})$ का हैं? **[उत्तर :** मान समान किन्तु दिशा विपरीत।**]**

8. दो वेक्टरों का योग कब अधिकतम व कब न्यूनतम होता है?
[उत्तर : $\theta = 0°$ पर अधिकतम, $\theta = 180°$ पर न्यूनतम या जब दोनों की दिशायें समान हों तो अधिकतम और जब दिशायें विपरीत हो जो न्यूनतम।**]**

9. क्या विभिन्न परिमाण के दो सदिशों को ऐसे जोड़ा जा सकता है। कि उनका परिणामी शून्य हो? **[उत्तर :** नहीं।**]**

10. क्या तीन वेक्टरों को इस प्रकार जोड़ा जा सकता है। कि उनका परिणामी शून्य हो?
[उत्तर : हाँ, यदि उन्हें परिमाण व दिशा में किसी त्रिभुज की चक्रीय क्रम में ली गई भुजाओं द्वारा निरूपित किया जा सके। **]**

11. यदि दो वेक्टरों के परिमाणों को अपरिवर्तित रखते हुए उनके बीच के कोण को बदल दें तो उनके परिणामी वेक्टरों पर क्या प्रभाव पड़ेगा?
[उत्तर : परिणामी वेक्टर का परिमाण व दिशा दोनों बदल जायेंगे।**]**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

12. यदि किसी वेक्टर $\vec{A}$ को स्केलर m से गुणा किया जाय तो परिणामी वेक्टर का परिमाण व दिशा बताइये।

[उत्तर : $m\vec{A}$, दिशा वही जो मूल वेक्टर $\vec{A}$ की है।]

13. दो वेक्टरो के स्केलर गुणन से आप क्या समझते है?

14. दो वेक्टरो के स्केलर गुणन का सूत्र लिखिये। प्रयुक्त प्रतीकों का अर्थ बताइये।

15. अदिश एवं सदिश राशियो से क्या समझते हैं? उदाहरण देकर समझाइये।

16. निम्नलिखित भौतिक राशियों मे से अदिश एवं सदिश राशियाँ अलग-अलग छाँटियें:

(i) द्रव्यमान, विस्थापपन, दाब, कार्य, त्वरण।

(ii) सवेग, ऊर्जा, चाल, घनत्व, ताप, आवेश।

[उत्तर : (i) **अदिश**—द्रव्यमान, दाब, कार्य। **सदिश**—विस्थापन, त्वरण।

(ii) **अदिश**—ऊर्जा, चाल,घनतव, ताप, आवेश। **सदिश**—संवेग।]

17. परिभाषा दीजिये—

(i) मात्रक वेक्टर, (ii) समान वेक्टर, (iii) विपरीत वेक्टर।

18. दो वेक्टरों को जोड़ने का समानान्तर चतुर्भुज का नियम बताइये। यदि $\vec{P}$ व $\vec{Q}$ बल एक बिन्दु पर α कोण पर कार्य कर रहे हो एवं उनके परिमाण बराबर हों तो सिद्ध कीजिए। परिणामी $R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

19. दो वेक्टरों के जोड़ने की त्रिभुज विधि समझाइये तथा सिद्ध कीजिये कि वेक्टरों का योग 'क्रम-विनिमेय' होता है।

20. सिद्ध कीजिये कि दो वेक्टरों के योग का परिमाण अधिकतम $A + B$ तथा न्यूनतम $A - B$ अथवा $B - A$ होता है।

21. दो से अधिक वेक्टरों को जोड़ने की बहुभुज विधि समझाइये। सिद्ध कीजिये कि वेक्टरों का योग साहचर्य नियम का पालन करता है।

22. किसी वेक्टर के वियोजन से क्या तात्पर्य है? किसी वेक्टर का द्विविमीय वियोजन कीजिये।

23. दो वेक्टर राशियों के सकेलर गुणन से क्या तात्पर्य है? कार्य का उदाहरण देकर समझाइये।

24. सिद्ध कीजिये।

(i) दो वेक्टरों का स्केलर गुणन क्रम-विनिमेय होता है।

(ii) वेक्टरों का स्केलर गुणन वितरण नियम का पालन करता है।

(iii) दो परस्पर लम्बवत् वेक्टरों का स्केलर गुणन शून्य होता है।

25. सिद्ध कीजिये : (i) $\hat{i}\cdot\hat{i} = 1$ (ii) $\hat{j}\cdot\hat{j} = 1$ (iii) $\hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

26. सिद्ध कीजिये : (i) $\hat{i}\cdot\hat{j} = 0$ (ii) $\hat{j}\cdot\hat{k} = 0$ (iii) $\hat{k}\cdot\hat{i} = 0$

27. (अ) गति के प्रथम समीकरण का वेक्टर रूप लिखिये।

(ब) गति के द्वितीय समीकरण का वेक्टर रूप लिखिये।

[उत्तर : (अ) $\vec{v} = \vec{u} + a\vec{t}$ (ब) $\vec{s} = \vec{u}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$]

28. कोणीय वेग तथा कोणीय त्वरण का क्या अर्थ है?

29. रेखीय वेग तथा कोणीय वेग व रेखीय त्वरण तथा कोणीय त्वरण के मध्य सम्बन्ध स्थापित कीजिए।

30. एक पिण्ड v चाल से, r त्रिज्या के वृत्ताकार मार्ग पर घूम रहा है। सिद्ध करो कि अभिकेन्द्र त्वरण, $a = v^2/r$

31. एक वस्तु R त्रिज्या के वृत्तीय मार्ग पर एक समान चाल से गतिमान है। यदि इसकी परिभ्रमण आवृत्ति n हो तो अभिकेन्द्रीय त्वरण के मान को n तथा R के पदों में व्यक्त करो। (उत्तर : $a = 4\pi^2 n^2 R$)

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

32. केन्द्रीभूत बल क्या है? समझाइये।

33. वर्षा की बूँदें 30 मीटर/सेकण्ड के वेग से ऊर्ध्वाधरत: नीचे की ओर गिर रही हैं। एक व्यक्ति साइकिल पर सवार होकर उत्तर से दक्षिण दिशा मे 1 मीटर/सेकण्ड के वेग से जा रहा है। किस दिशा में उसे अपना छाता पकड़े रहना चाहिए?

[**उत्तर** : ऊर्ध्वाधर से 18° 26 के कोण पर दक्षिण की ओर।]

34. एक नाविक अपनी नाव को शान्त जल में 10 km/h के वेग से चला सकता है। यदि किसी नदी की चौड़ाई 2 km तथा उसके जल के बहने का वेग 5 km/h हो तो बताइये कि नाविक को अपनी नाव को किस दिशा में चलाना चाहिए। जिससे कि वह नदी के पार दूसरे किनारे पर ठीक सामने के बिन्दु पर पहुँच सके? यह भी ज्ञात कीजिये कि नाविक को नदी पार करने मे कितना समय लगेगा।?

[**उत्तर** : 120° पर नाव को नदी की दिशा से चलाना चाहिए, वेग = 8·66 किमी/घण्टा, समय = 1385 मिनट।]

35. वेक्टर $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{B} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ का स्केलर गुणनफल ज्ञात कीजिए। [**उत्तर** : 16]

36. किसी वस्तु पर नियत बल $\vec{F} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ न्यूटन लगाकर उसमें $7\hat{i} - 10\hat{j} + 8\hat{k}$ मीटर विस्थापन उत्पन्न किया जाता है। वस्तु पर किये कार्य का मान ज्ञात कीजिये। [**उत्तर** : 24 जूल।]

37. सिद्ध कीजिए कि वेक्टर $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ तथा $\vec{B} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ परस्पर लम्बवत् है।

38. P के किस मान के लिए $\vec{A} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + p\hat{k}$ तथा $\vec{B} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$ परस्पर लम्बवत् हैं? [**उत्तर** : $p = 5$]

39. यदि $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ तथा $A^2 + B^2 + C^2$ तो सिद्ध कीजिये कि $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ परस्पर लम्बवत् हैं?

40. दो बलों $\vec{P}$ व $\vec{Q}$ का परिणामी बल 12 N है। परिणामी बल की दिशा $\vec{P}$ के साथ 60° का कोण बनाती हैं यदि $\vec{P}$ का परिमाण 8 N है तो वेक्टर आरेख बनाकर $\vec{Q}$ का परिमाण व दिशा ात कीजिये।

[**उत्तर** : 10·6 N, $\vec{P}$ की दिश 101° के कोण पर।]

41. दो वेक्टरों के परिमाण 5 व 8 हों तथा उनके स्केलर गुणन का मान $20\sqrt{2}$ हो तो उनके बीच का कोण ज्ञात कीजिये।

[**उत्तर** : 45°]

42. 50 N का एक बल किसी पिण्ड को 5 m विस्थापित करने के लिए 125 J कार्य करता है। बल एवं विस्थापन की दिशाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिये। [**उत्तर** : 60°]

43. यह मानकर कि चन्द्रमा 27 दिन 7 घण्टे में पृथ्वी की परिक्रमा पूरी करती है, यदि $R = 3{,}85{,}000$ किमी तो चन्द्रमा का पृथ्वी की ओर त्वरण ज्ञात कीजिए। **(उत्तर : 0 · 27 सेमी/से^{2})**

44. जल से भरी बाल्टी को 18 · 6 सेमी त्रिज्या के एक ऊर्ध्व वृत्त में घुमाया जाता है। इस गति के उच्चतम बिन्दु पर बाल्टी का कम से कम क्या वेग होना चाहिए कि बाल्टी से जल नीचे न गिरे? **(उत्तर : 135 · 0 सेमी/से)**

45. 0 · 1 मीटर त्रिज्या के वृत्तीय मार्ग पर एक प्रोटॉन $2{\cdot}0\times10^{-13}$ न्यूटन के अभिकेन्द्र बल के अन्तर्गत चक्कर लगा रहा है। प्रोटॉन का द्रव्यमान $1{\cdot}6\times10^{-27}$ किग्रा है, उसके घूर्णन का कोणीय वेग ज्ञात कीजिए। **(उत्तर : $3{\cdot}5\times10^{7}$ रेडियन/से)**

46. एक कार 380 मीटर वक्रता त्रिज्या की सड़क पर चल रही है। यदि टायर और सड़क के मध्य घर्षण गुणांक 0 · 40 हो तो किस अधिकतम चाल से कार को मोड़ पर चलाया जा सकता है? ($g = 10$ मी/से^{2})। **(उत्तर : 38 · 98 मी/से)**

47. अभिकेन्द्र बल की परिभाषा कीजिए।

एक कण *l* लम्बाई के धागे के एक सिरे से बाँधकर ऊर्ध्वाधर तल में घुमाया जाता है, जबकि दूसरा सिरा स्थिर है। निम्न बिन्दु पर कण को कितना क्षैतिज वेग दिया जाय कि वह ऊर्ध्वाधर वृत्त पूरा घूम सके?

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

48. एक साइकिल सवार का साइकिल सहित द्रव्यमान 140 किग्रा है। यदि मोड़ पर सड़क का ढलान 7° तथा टायर व सड़क के मध्य घर्षण गुणांक 0 · 4 हो तो ज्ञात कीजिए कि सवार अधिकतम किस वेग से मोड़ पर मुड़ सकता है। मोड़ की त्रिज्या 40 मीटर है। **(उत्तर : 14 · 68 मी/से)**

49. एक पिण्ड किसी मीनार की चोटी से छोड़ा जाता है। ठीक उसी समय दूसरा पिण्ड पृथ्वी से ऊपर की ओर 50 मी/से के वेग से फेंका जाता है। यदि मीनार की ऊँचाई 150 मी हो तो ज्ञात कीजिए कि दोनों पत्थर कब व कहाँ टकराएँगे? ($g = 10$ मी/से^{2}) **(उत्तर : $t = 3$ से बाद पृथ्वी तल से 105 मीटर की ऊँचाई पर)**

50. रेलगाड़ी की पटरी के मध्य 1 · 6 मी की दूरी है। मोड़ पर बाहर पटरी भीतरी पटरी से 9 · 3 सेमी ऊँची है। पटरी तथा गाड़ी के पहिए के मध्य घर्षण गुणांक 0 · 35 है। मोड़ पर गाड़ी को 90 किमी/घंटा की चाल से मुड़ना है। मोड़ की आवश्यक त्रिज्या ज्ञात कीजिए। **(उत्तर : 13 · 06 मीटर)**

आंकिक प्रश्नों के संक्षिप्त हल

(43) सूत्र $a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$ में दिये गये मान रखने पर $a = 0 \cdot 27$ **सेमी/से^{2}**

(44) सूत्र $v = \sqrt{gr}$ से $v = \sqrt{980 \times 18 \cdot 6}$ सेमी/से अत: $v = 135 \cdot 0$ **सेमी/से**

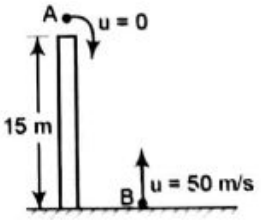
(45) सूत्र $F = \frac{mv^2}{r}$ एवं $v = r\omega$ से $\omega = \sqrt{\frac{F}{mr}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0 \times 10^{-13}}{1 \cdot 6 \times 10^{-27} \times 0 \cdot 1}}$ अत: $\omega = 3 \cdot 5 \times 10^7$ **रेडियन/से**

(46) सूत्र $v_{max} = \sqrt{\mu_s rg}$ से $v_{max} = \sqrt{0 \cdot 40 \times 380 \times 10}$ अत: $v_{max} = 38 \cdot 98$ **मी/से**

(48) सूत्र $\frac{\mu + \tan\theta}{1 - \mu \tan\theta} = \frac{v^2}{rg}$ से $\frac{0 \cdot 4 + \tan 7°}{1 - 0 \cdot 4 \times \tan 7°} = \frac{v^2}{40 \times 9 \cdot 8}$ अत: $v = 14 \cdot 68$ **मी/से**

(49) चित्रानुसार, प्रथम पिण्ड A द्वारा t सेकण्ड में चली गयी दूरी

$$S_A = 0 + \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \quad \ldots (1)$$



पुन: पिण्ड B द्वारा t सेकण्ड में चली गयी दूरी

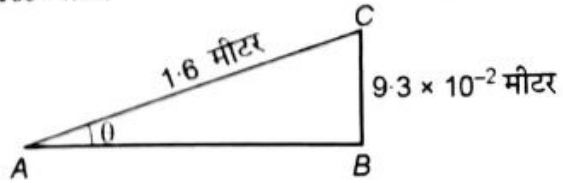
$$S_B = 50t - \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 \quad \ldots (2)$$

समीकरण (1) व (2) से

$$S_A + S_B = 50t \Rightarrow 150 = 50t \text{ अत: } t = 3 \text{ सेकण्ड}$$

पुन: समीकरण (2) से $S_B = 50 \times 3 - \frac{1}{2} \times 10 \times (3)^2 = 105$ **मीटर**

(50) दिया है $v = 90$ किमी/घण्टा $= 25$ मी/से, $\mu = 0 \cdot 35$



चित्रानुसार, ΔABC से $\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{9 \cdot 3 \times 10^{-2}}{1 \cdot 6} = 0 \cdot 058$

$\because$ θ अत्यन्त छोटा है। अत: $\sin\theta = \tan\theta = 0 \cdot 058$ लेने पर समीकरण

$$\frac{\tan\theta + \mu}{1 - \mu \tan\theta} = \frac{v^2}{rg} \text{ से } \frac{0 \cdot 058 + 0 \cdot 35}{1 - (0 \cdot 35 \times 0 \cdot 058)} = \frac{(25)^2}{r \times 9 \cdot 8} \text{ अत: } r = 153 \cdot 13 \text{ मी}$$

❑

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

Chapter 3 कार्य, शक्ति एवं ऊर्जा (Work, Power and Energy)

SYLLABUS

3.1 *Work and its units, examples of zero work, positive work and negative work, conservative and non-conservative force.*

3.2 *Friction : Modern concept, types, laws of limiting friction, Coefficient of friction and its Engineering Applications.*

3.3 *Work done in moving an object on horizontal and inclined plane for rough and plane surfaces with its applications.*

3.4 *Energy and its units : Kinetic energy and potential energy with examples and their derivation, work energy theorem.*

3.5 *Principle of conservation of mechanical energy for freely falling bodies, examples of transformation of energy.*

3.6 *Power and its units, calculation of power in numerical problems.*

3.7 *Application of friction in brake system of moving vehicles, bicycle, scooter, car, trains etc.*

AKC TECHNICAL CLASSES

§ 3.1 घर्षण (Friction)

परिचय (Introduction)

यदि चिकने फर्श पर कोई गेंद लुढ़कायी जाए तो वह कुछ दूर जाकर रुक जाती है। साइकिल चलाता कोई बच्चा जब पैडल चलाना बन्द कर देता है तब भी साइकिल चलती रहती है, परन्तु कुछ दूर जाकर अपने आप रुक जाती है। ऐसा वास्तव में, इन पिण्डों पर इनके गतियों के विरोध में लगने वाले बल के कारण होता है।

प्रकृति में कोई भी पिण्ड (body) पूर्णतया चिकना (perfectly smooth) नहीं है, क्योंकि व्यवहारत: प्रत्येक पिण्ड का तल (surface) कुछ न कुछ खुरदुरा अथवा रूक्ष (rough) अवश्य होता है। वास्तव में जब दो पिण्ड परस्पर सम्पर्क में होते हैं तथा एक-दूसरे पर फिसलते (slide) हैं या आपेक्षिक गति करते हैं तब प्रत्येक तल, दूसरे तल पर एक बल आरोपित करता है जो पिण्डों की आपेक्षिक गति का विरोध करता है। इस **प्रतिरोधी बल** (retarding force) को **घर्षण बल** (friction force) कहते हैं। यह घर्षण बल सदैव **सम्पर्क** (contact) में आये **तलों के समान्तर** एवं पिण्डों की **आपेक्षिक गति के विपरीत दिशा** में कार्य करता है। ऐसे पिण्डों को रूक्ष पिण्ड (rough bodies) तथा अवरोध उत्पन्न करने के इस गुण को **घर्षण** (friction) कहते हैं।

व्यवहार में प्रत्येक पिण्ड रूक्ष पिण्ड है कोई कम, कोई ज्यादा। घर्षण बल की उत्पत्ति रूक्षता के कारण ही होती है। यदि तलों की रूक्षता कम कर दी जाए तो घर्षण बल का मान घट जाता है, परन्तु दो तलों के मध्य घर्षण बल को पूर्णत: समाप्त नहीं किया जा सकता।

अत: **दो सतहों के सम्पर्क तलों के मध्य, उनके आपेक्षिक गतियों के विरोधी बल को घर्षण बल कहते हैं।**

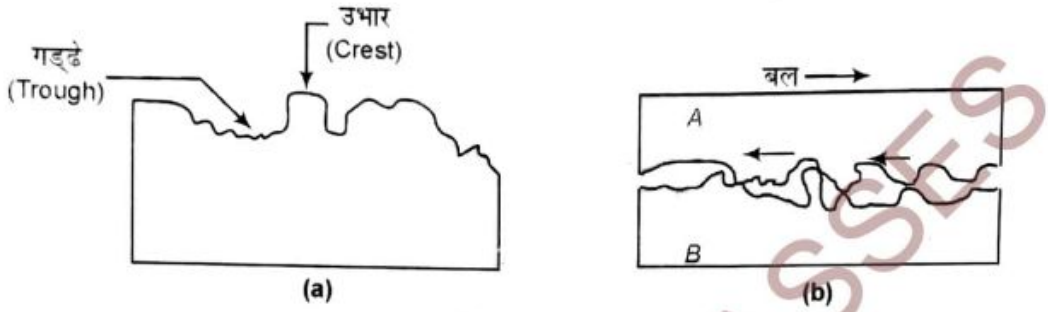
The force that resists the motion of one surface relative to another with which it is in contact, is known as friction force.

Scanned with CamScanner

§ 3.2 घर्षण का कारण (Cause of Friction)

किन्हीं दो गतिमान सतहों के मध्य उत्पन्न घर्षण बल निम्न तीन कारणों से प्रभाव में आता है—

(i) सतहों के खुरदुरेपन के कारण (Due to roughness of the surfaces)—पिण्ड की सतह कितनी भी चिकनी (smooth) क्यों न हो सूक्ष्मदर्शी से देखने पर पता चलता है कि प्रत्येक पिण्ड का तल खुरदुरा होता है। उस पर असंख्य शिखर



चित्र 3.1

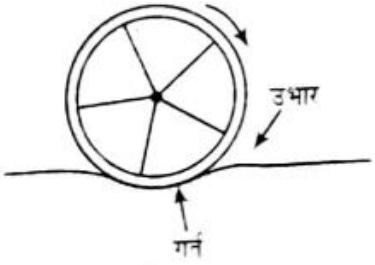
(उभार-crest) व गर्त (गड्ढे-trough) होते हैं। जब ऐसी किसी सतह पर कोई दूसरी वस्तु जिसकी सतह भी ऐसी ही है, रखते हैं तो दोनों वस्तुओं के शिखर व गर्त आपस में गुँथ (interlocked) जाते हैं। जब वस्तु पर बल लगाकर उसे खिसकाने का प्रयास करते हैं तो सतहों की अनियमितताओं का अन्तर्बंधन (interlocking) वस्तु को चलने से रोकता है अथवा उसकी गति की दशा में सतहों के मध्य एक विरोधी बल लगाता है।

(ii) अणुओं तथा परमाणुओं के बीच लगने वाले वैद्युत-चुम्बकीय बल के कारण (Due to electromagnetic forces between atoms and molecules)—जब किसी वस्तु को दूसरी वस्तु के ऊपर रखते हैं तो दोनों वस्तुओं की सतहों की अनियमितता के कारण उनके वास्तविक सम्पर्क का क्षेत्रफल (actual area of contact) उन सतहों के क्षेत्रफल की तुलना में बहुत कम होता है क्योंकि उनका सम्पर्क पूरी सतह पर न होकर केवल कुछ स्थानों पर ही होता है। (चित्र 3.1 (b)) इन सम्पर्क बिन्दुओं पर दोनों सतहों के परमाणुओं तथा अणुओं के एक-दूसरे के बहुत निकट होने के कारण, एक-दूसरे पर तीव्र आकर्षण बल लगाते हैं। जब एक वस्तु को दूसरी वस्तु की सतह पर चलाने का प्रयास किया जाता है तो ये आकर्षण बंधन (bonds of attraction) ही गति का विरोध करते हैं अर्थात् दोनों सतहों के बीच घर्षण बल क्रियाशील हो जाता है।

किन्हीं दो सतहों के बीच लगने वाले घर्षण बल की माप उस बल द्वारा की जाती है जो दोनों सतहों के वास्तविक सम्पर्क बिन्दुओं पर लगने वाले आकर्षण बलों के बंधनों को तोड़ने के लिए आवश्यक होता है।

परमाणुओं तथा अणुओं के बीच लगने वाला आकर्षण बल, दोनों सतहों के वास्तविक सम्पर्क क्षेत्रफल के समानुपाती होता है तथा वास्तविक सम्पर्क क्षेत्रफल, वस्तु पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया (normal reaction) के समानुपाती होता है। अत: घर्षण बल अभिलम्ब प्रतिक्रिया के समानुपाती होता है। सतहों को बहुत अधिक चिकना कर देने पर, इनका वास्तविक सम्पर्क क्षेत्रफल बढ़ जाता है, जिसके कारण परमाणुओं तथा अणुओं के बीच आकर्षण बलों के बढ़ जाने पर, इन सतहों के बीच घर्षण बल का मान बढ़ जाता है।

(iii) सतह के प्रत्यास्थ विरूपण के कारण (Due to elastic deformation of surface)—कोई भी पिण्ड पूर्णत: दृढ़ (rigid) नहीं होता है, अत: जब एक पिण्ड दूसरे पिण्ड के तल पर विश्रामावस्था में पड़ा होता है, तो ऊपर वाले पिण्ड के भार के संपीडन प्रभाव के कारण, सम्पर्क पृष्ठों का कुछ न कुछ विरूपण हो जाता है। इस विरूपण के कारण भी कुछ शिखर और गर्त उत्पन्न हो जाते हैं। ऐसे दो पिण्ड जब सम्पर्क में आते हैं तो एक पिण्ड के कुछ शिखर दूसरे पिण्ड के कुछ गर्तों में फँस जाते हैं और एक-दूसरे को जकड़ लेते हैं। जैसे—जब कोई पहिया (wheel) किसी समतल सतह पर चलता है तो पहिया एक छोटा-सा गड्ढा (little



चित्र 3.2

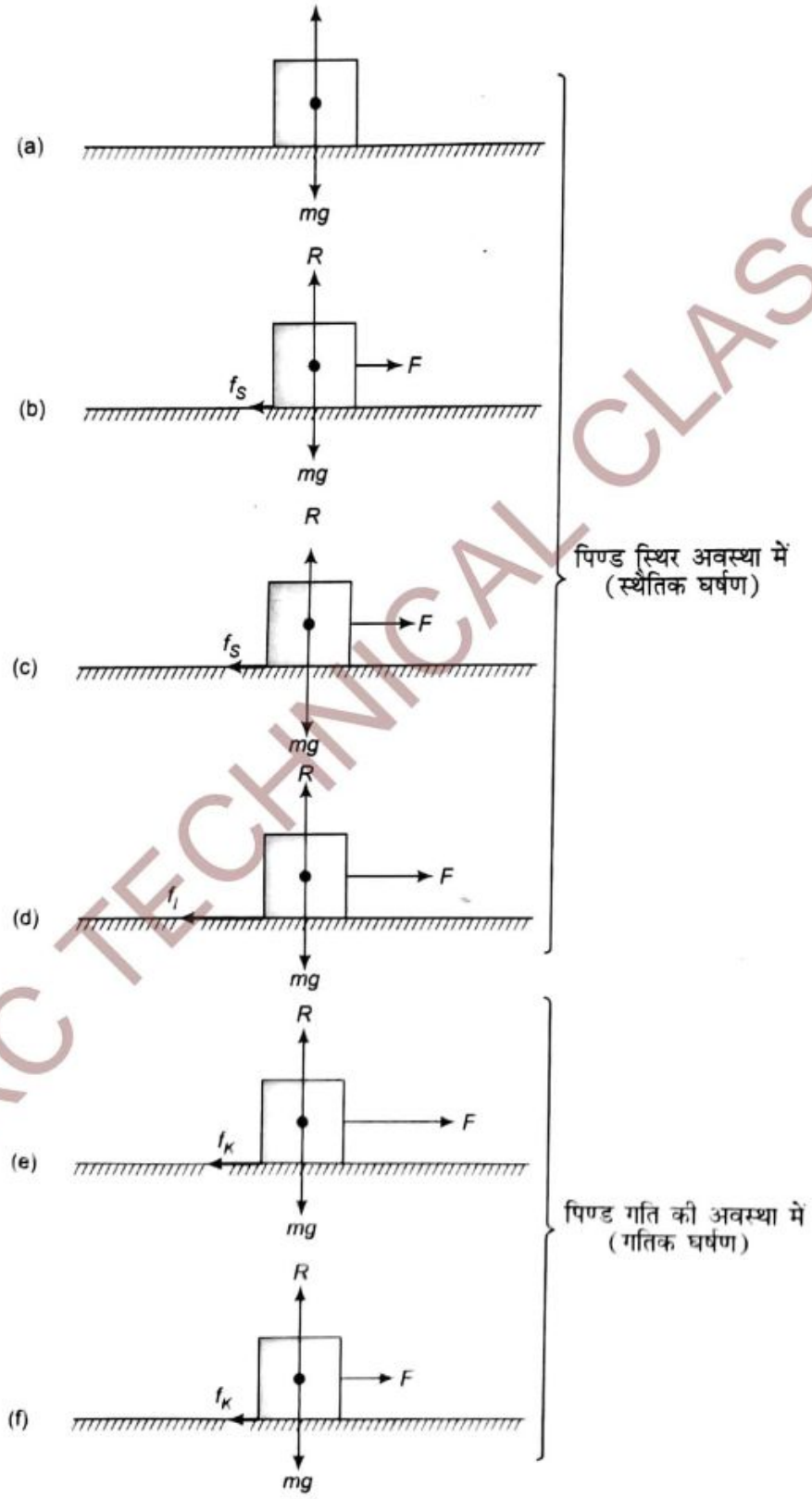
AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

depression) बनाता है, जिसके कारण पहिए के तुरन्त आगे एक छोटा-सा कूबड़ (small hump) उत्पन्न होता है। इस कूबड़ पर चढ़ते वक्त पहिया लोटनी घर्षण का अनुभव करता है (चित्र 3.2)।

§ 3.3 स्थैतिक, सीमान्त व गतिक घर्षण (Static, Limiting and Dynamic Frictions)

माना किसी क्षैतिज तल पर M द्रव्यमान ($=mg$ भार) का एक पिण्ड रखा है। पिण्ड का भार mg क्षैतिज तल पर—



चित्र 3.3

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

नीचे की ओर तथा तल द्वारा पिण्ड पर प्रतिक्रिया बल R ऊपर की ओर लगता है, चित्र 3.3 (a)। पिण्ड पर कोई बाह्य बल आरोपित नहीं है, अत: पिण्ड स्थिर है। इस दशा में $mg = R$ यदि पिण्ड पर अल्प बल F चित्र 3.3 (b) के अनुसार लगाया जाए तो भी पिण्ड स्थिर रहता है क्योंकि अल्प बल के विपरीत दिशा में पिण्ड तथा क्षैतिल तल के सम्पर्क सतह के मध्य में एक विरोधी बल (घर्षण बल) f_s उत्पन्न हो जाता है, अर्थात् $f_s = F$ (f_s का मान F पर इस प्रकार से निर्भर करता है कि जब तक पिण्ड चलना प्रारम्भ नहीं करता है तब तक

$$f_s = F$$

पिण्ड की विरामावस्था में पिण्ड पर लगने वाले घर्षण बल को स्थैतिक घर्षण कहते हैं। इसे f_s से प्रदर्शित करते हैं। स्थैतिक घर्षण बल को स्वयं सामंजस्य स्थापित करने वाला बल (self-adjusting force) भी कहते हैं, क्योंकि जैसे-जैसे बाह्य बल F बढ़ाते या घटाते जाते हैं वैसे-वैसे स्थैतिक घर्षण बल का मान (f_s) भी बढ़ता या घटता जाता है चित्र 3.3 (c)। अब यदि आरोपित अल्प बल F का मान बढ़ाते जाएँ तो स्थैतिक घर्षण बल का मान भी बढ़ता जाता है, परन्तु एक सीमा (limit) के बाद f_s और नहीं बढ़ता है तथा इस समय पिण्ड क्षैतिज बल पर चलने ही वाला होता है। f_s के इस अधिकतम मान को सीमान्त घर्षण बल कहते हैं। इसे f_l से प्रदर्शित करते हैं [चित्र 3.3 (d)] ।

अर्थात् **स्थैतिक घर्षण बल का चरम मान सीमान्त घर्षण बल कहलाता है।**

"The static frictional force is a self-adjusting force and increases with the force applied, so as to be equal and opposite to it, until motion is just about to ensue;—this maximum frictional force is called the **'limiting friction'** and its value is different for different pairs of surfaces."

Before this limiting value of friction is reached, its magnitude is just enough to preserve equilibrium*.

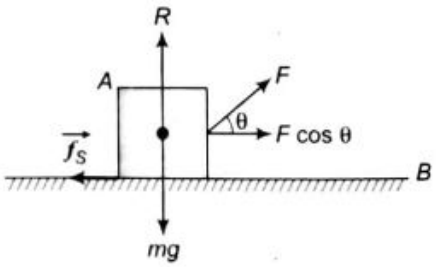
यदि बाह्य बल का मान सीमान्त घर्षण बल से थोड़ा और बढ़ा दिया जाए तो पिण्ड चलने लगता है। इस स्थिति में पिण्ड पर लगने वाला घर्षण बल, गतिक घर्षण बल कहलाता है चित्र 3.3 (e)। इसे f_K से प्रदर्शित करते हैं।

जब पिण्ड एक बार चलना प्रारम्भ कर देता है तो पिण्ड को चलाए रखने के लिए अपेक्षाकृत कम बल की आवश्यकता होती है, चित्र 3.3 (f) । स्पष्ट है कि पिण्ड के गति में आने के बाद, उस पर लगने वाला घर्षण बल कम हो जाता है अर्थात् **गतिमान पिण्ड पर लगने वाले इस घर्षण बल को गतिज घर्षण बल (kinetic frictional force) कहते हैं तथा इसे F_K से निरूपित करते हैं। इसका मान स्थैतिक घर्षण बल से कम होता है।**

§ 3.4 घर्षण के नियम (Laws of Friction)

घर्षण के नियमों की सर्वप्रथम व्याख्या **अमॉन्टांस** (Amontons) (1699) ने, तत्पश्चात् **कूलॉम** (Coulomb) (1779) ने इस प्रकार की—

माना कोई वस्तु A किसी क्षैतिज सतह B पर रखी है चित्र 3.4; वस्तु का भार mg ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर तथा वस्तु पर सतह B द्वारा आरोपित प्रतिक्रिया बल R ऊपर की ओर है। वस्तु A पर आरोपित किसी बल F के कारण A तथा B के बीच उत्पन्न घर्षण बल निम्न नियमों का पालन करते हैं—



चित्र 3.4

(i) यदि वस्तु A सतह B पर चलना प्रारम्भ नहीं करती है, तो सतह B के द्वारा A पर लगाया गया स्थैतिक घर्षण बल $\vec{f_s}$ तथा आरोपित बल $\vec{F}$ का वह घटक जो सतह B के समान्तर है, एक-दूसरे को संतुलित करते हैं। ये परिमाण में बराबर तथा दिशा में विपरीत होते हैं।

अर्थात् $$f_s \propto F\cos\theta$$

(ii) यदि स्थैतिक घर्षण बल $\vec{f_S}$ के परिमाण का अधिकतम मान (सीमान्त घर्षण) $f_{S_{max}}$ हो, तो

* It will be readily seen that this really follows from Newton's third law of motion.

ARC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$f_{S_{max}} \propto R$$

$$f_{S_{max}} = \mu_S R \quad ...(i)$$

जहाँ μ_s **स्थैतिक घर्षण गुणांक** (Coefficient of static friction) है।

(iii) यदि सतह B के समान्तर आरोपित बल के घटक का मान, $f_{S_{max}}$ से अधिक है तो वस्तु A सतह B पर चलना प्रारम्भ करती है। तब वस्तु A पर सतह B द्वारा एक गत्यात्मक घर्षण बल f_K आरोपित होता है तो इसकी गति का विरोध करता है तथा जिसका मान $f_{S_{max}}$ से कम होता है तथा

$$f_K = \mu_K R \quad ...(ii)$$

जहाँ μ_K को **गत्यात्मक घर्षण गुणांक** (Coefficient of kinetic or dynamic friction) कहते हैं। तब बल की दिशा में वस्तु का त्वरण $a = \frac{F - f_K}{m}$, यदि $F = 0$ तब $a = -\frac{f_K}{m}$ अर्थात् इसमें अवमंदन होने लगता है तथा कुछ दूरी चलने के बाद वस्तु का वेग शून्य हो जाता है तथा f_K भी शून्य हो जाता है। यदि सतहों के बीच आपेक्षिक चाल कम है तो f_K का मान पिण्ड की चाल पर निर्भर नहीं करता है।

गुणांक μ_S तथा μ_K विमाहीन होते हैं। इनके मान सम्पर्क सतहों की प्रकृति, खुरदुरापन (state of roughness) तथा उनके पदार्थों (materials) पर निर्भर करते हैं, परन्तु $\mu_K < \mu_S$।

समीकरण (i) व (ii) वेक्टर रूप में नहीं हैं, क्योंकि $\vec{f_S}$ और $\vec{f_K}$ की दिशा सदैव सतह के समान्तर तथा सम्भावित गति के विपरीत होती है तथा $\vec{R}$ की दिशा सदैव सतह के लम्बवत् होती है।

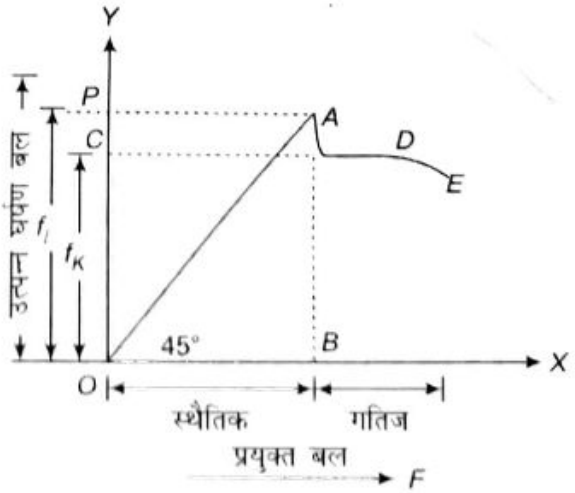
(iv) R का मान समान रहने पर घर्षण बल f_S अथवा f_K सतहों के क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है।

(v) किसी सतह पर लगने वाले घर्षण बल की दिशा उस सतह के स्पर्शीय (tangential) होती है।

(vi) घर्षण बल, सम्पर्क में रखी वस्तुओं के बीच आपेक्षिक वेग का विरोध करता है।

§ 3.5 स्थैतिक तथा गतिज घर्षण का ग्राफीय निरूपण

चित्र 3.5 में प्रयुक्त बल (Applied force) F (x-अक्ष के अनुदिश) तथा इस बल के कारण उत्पन्न घर्षण बल f (y-अक्ष के अनुदिश) के मध्य ग्राफ दर्शाया गया है। ग्राफ से स्पष्ट है कि जैसे-जैसे प्रयुक्त बल F का मान बढ़ाते जाते हैं तदनुसार उत्पन्न घर्षण बल f का मान भी बढ़ता जाता है। धीरे-धीरे एक स्थिति (बिन्दु A) ऐसी आती है जबकि पिण्ड ठीक गति करने ही वाला होता है। चूंकि OA वक्र, x-अक्ष के साथ 45° का कोण बनाता है, अत: प्रत्येक क्षण पर उत्पन्न घर्षण बल का मान; प्रयुक्त बल F के बराबर होता है। बिन्दु A के सापेक्ष OB तथा OP क्रमश: प्रयुक्त बल F तथा उत्पन्न घर्षण बल f को निरूपित करते हैं। जैसे ही प्रयुक्त बल को OB से अधिक बढ़ाया जाता है, पिण्ड गति में आ जाता है और घर्षण बल का मान घटने लगता है। अत: OP अधिकतम स्थैतिक घर्षण बल (f_S) को निरूपित करता है। **पिण्ड में गति उत्पन्न होने के बाद, जो घर्षण बल लगता है उसे गतिज घर्षण बल f_K (kinetic frictional force) कहते हैं।** ग्राफ में इसे OC से दर्शाया गया है। गतिज बल f_K का मान सदैव स्थैतिक घर्षण बल f_S से कम होता है।



चित्र 3.5

प्रयुक्त बल F अत्यधिक लगाने पर पिण्ड जब त्वरित गति से उच्च वेग की ओर बढ़ता है, तो f_K का मान भी कम होने लगता है जिसे चित्र में DE से दर्शाया गया है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 3.6 घर्षण गुणांक (Coefficient of Friction)

घर्षण के नियम से

$$f \propto R$$

$$f = \mu R \quad ...(1)$$

जहाँ μ एक नियतांक है जिसे घर्षण गुणांक कहते हैं। समीकरण (1) से,

$$\mu = \frac{f}{R}$$

अत: घर्षण गुणांक का मान घर्षण बल तथा अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल के अनुपात के बराबर होता है। इसलिए घर्षण गुणांक एक मात्रकविहीन तथा विमाविहीन भौतिक राशि होती है।

(i) स्थैतिक घर्षण गुणांक—यदि पिण्ड पर लगने वाला बाह्य बल सीमांत घर्षण बल या इससे कम है तो पिण्ड विरामावस्था में रहता है। अत: स्थैतिक घर्षण गुणांक (μ_S) का स्थैतिक घर्षण बल से सम्बन्ध

$$f_S = \mu_S R \quad ...(2)$$

(ii) गतिज घर्षण गुणांक—जब पिण्ड पर लगे बाह्य बल का मान सीमांत घर्षण से अधिक हो जाता है तो पिण्ड गति करने लगता है। अत: गतिज घर्षण गुणांक μ_K का गतिज घर्षण बल से सम्बन्ध

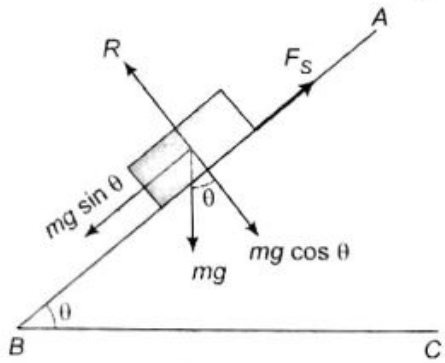
$$f_K = \mu_K R \quad ...(3)$$

चूँकि $f_S > f_K$ (देखे ग्राफ, चित्र 3.5) अत: $\mu_S > \mu_K$

§ 3.7 घर्षण कोण (Angle of Friction)

किन्हीं दो नियत सतहों के मध्य सापेक्ष गति के लिए आनत अथवा क्षैतिज तल पर घर्षण कोण का मान नियत होता है।

(i) पिण्ड आनत तल पर (Body on inclined plane)—चित्र 3.6 के अनुसार माना AB एक आनत तल है जो क्षैतिज तल से θ कोण पर झुका हुआ है। इस झुके तल पर m द्रव्यमान की एक वस्तु रखी है। यदि झुके तल का कोण θ धीरे-धीरे बढ़ाते जाएँ तो θ के एक विशेष मान के लिए वस्तु तल पर सरकने ही वाला होता है। इस कोण को "घर्षण कोण" कहते हैं। वस्तु, फिसलने के ठीक पूर्व, निम्न बलों के प्रभाव में संतुलन में होती है—



चित्र 3.6

(i) वस्तु का भार mg ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर।

(ii) अभिलम्ब प्रतिक्रिया R तल के लम्बवत्।

(iii) सीमान्त घर्षण बल f_S गति के विपरीत अर्थात् तल के अनुदिश ऊपर की ओर।

भार mg के दो घटक $mg\cos\theta$ और $mg\sin\theta$ क्रमश: तल के लम्बवत् और तल के अनुदिश लेने पर, वस्तु के फिसलने से पूर्व अर्थात् सन्तुलन अवस्था में;

$$f_S = mg\sin\theta$$

$$R = mg\cos\theta$$

अत: $$f_S / R = \tan\theta = \mu$$

अर्थात् $$\mu = \tan\theta \quad ...(4)$$

अत: नियत सतहों के लिए, **स्थैतिक घर्षण गुणांक, तल के झुकाव कोण की स्पर्शज्या के बराबर होता है।**

The static coefficient of friction for a given pair of surfaces is equal to the tangent of the angle of friction for them.

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(ii) पिण्ड क्षैतिज तल पर (Body on horizontal plane)—चित्रानुसार किसी क्षैतिज तल पर रखे m द्रव्यमान के पिण्ड के लिए सीमान्त घर्षण की दशा में $f_s = \mu_S R$, अत: **f_S तथा R का परिणामी (S) प्रभावी प्रतिरोध कहलाता है। S एवं R के मध्य का कोण घर्षण कोण θ कहलाता है।** समान्तर चतुर्भुज $OABC$ में,

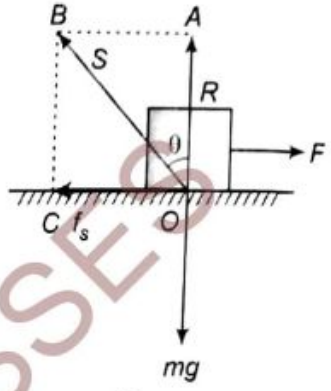
$$AB = OC = f_S$$

चूँकि ΔOAB में, $\quad \frac{AB}{OA} = \tan\theta$

या $\quad \frac{f_S}{R} = \tan\theta$

या $\quad \frac{\mu_S R}{R} = \tan\theta$

या $\quad \mu_S = \tan\theta$



चित्र 3.7

§ 3.8 झुकाव कोण (Angle of Inclination)

किसी आनत तल पर रखे हुए पिण्ड के लिए झुकाव कोण वास्तव में घर्षण कोण ही है।

आनत तल पर जब पिण्ड कोण के एक विशेष मान के लिए फिसलने ही वाला होता है, तब इस कोण को **विश्रान्ति कोण** (Angle of repose) θ_s कहते हैं।

विश्रान्ति कोण के लिए $\quad \mu_S = \tan\theta_s$ ...(5)

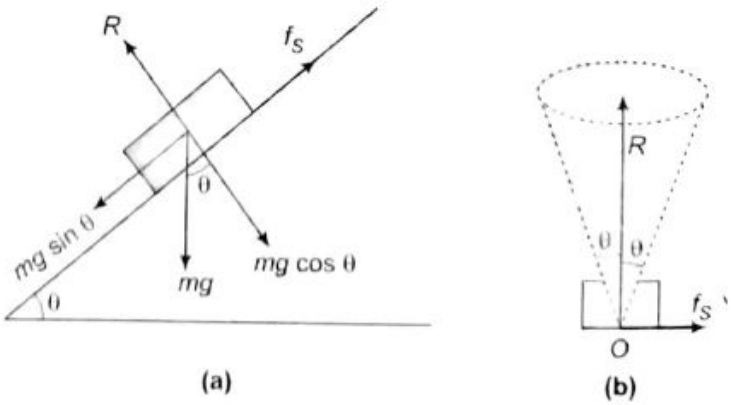
यदि विश्रान्ति कोण का मान अल्प बढ़ाया जाए तो पिण्ड आनत तल पर फिसलने लगता है, इस कोण को **एक समान फिसलन का कोण** (Angle of uniform slip) θ_K कहते हैं।

$$\mu_K = \tan\theta_K \quad ...(6)$$

§ 3.9 घर्षण शंकु (Cone of Friction)

यदि किसी पिण्ड तथा सतह के लिए घर्षण कोण θ हो [चित्र 3.8 (a)] तब अभिलम्ब प्रतिक्रिया R के चारों ओर घर्षण कोण की रेखा को घुमाने पर घर्षण शंकु प्राप्त होता है, चित्र 3.8 (b)।

घर्षण शंकु के भीतर आरोपित किसी भी परिमाण का कोई भी बल जो शंकु की क्रिया रेखाओं के अनुदिश तथा शंकु के भीतर की ओर हो, पिण्ड में किसी प्रकार की गति उत्पन्न नहीं कर सकता है।



चित्र 3.8

§ 3.10 घर्षणयुक्त तल पर पिण्ड की गति (Motion of a Body on a Plane having Friction)

जब कोई पिण्ड गति में होता है तो उस पर विभिन्न बल विभिन्न अवस्थाओं में कार्यकारी होते है। किसी पिण्ड की गति में होने के लिए निम्न समीकरण का संतुष्ट होना आवश्यक है—

(गति की दिशा में पिण्ड पर लगने वाले समस्त बलों का योग) − (गति की विपरीत दिशा में पिण्ड पर लगने वाले समस्त बलों का योग) = पिण्ड का द्रव्यमान × पिण्ड का तुल्य त्वरण

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

3.10.1 क्षैतिज तल में गति (Motion on Horizontal Plane)

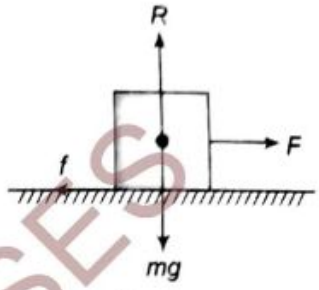
माना किसी समतल सतह पर m द्रव्यमान का पिण्ड रखा है। सतह तथा पिण्ड के मध्य घर्षण गुणांक μ है। बाह्य बल F के कारण पिण्ड में a त्वरण उत्पन्न होता है, चित्र 3.9; अत: गति के सामान्य समीकरण से,

$$F - f = ma \quad ...(i)$$

किन्तु $$f = \mu R \quad ...(ii)$$

तथा $$R = mg \quad ...(iii)$$

इसलिए समीकरण (i) से $$F - \mu mg = ma$$



चित्र 3.9

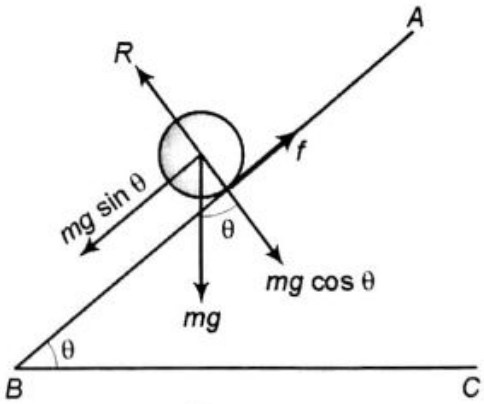
अत: त्वरण

$$a = \frac{F - \mu mg}{m} \quad ...(7)$$

3.10.2 आनत तल पर गति (Motion on Inclined Plane)

(i) नीचे की ओर गति—माना, क्षैतिज से किसी कोण θ पर m द्रव्यमान का एक पिण्ड आनत तल AB पर रखा है चित्र 3.10; भार mg घटक $mg\cos\theta$ सतह के तल के लम्बवत् तथा $mg\sin\theta$ तल के समान्तर नीचे की ओर कार्य करता है। अभिलम्ब प्रतिक्रिया R सतह के लम्बवत् ऊपर की ओर एवं घर्षण बल f गति की दिशा के विपरीत ऊपर की ओर कार्य करता है।

आनत समतल का क्षैतिज के साथ बना θ कोण, झुकाव कोण से अधिक होने पर पिण्ड त्वरण a से नीचे की ओर गति करता है।



चित्र 3.10

अत: $$mg\sin\theta - f = ma \quad ...(i)$$

यदि घर्षण गुणांक μ हो, तब

$$f = \mu R$$

$\because$ $$R = mg\cos\theta$$

अत: $$f = \mu mg\cos\theta$$

f का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = ma$$

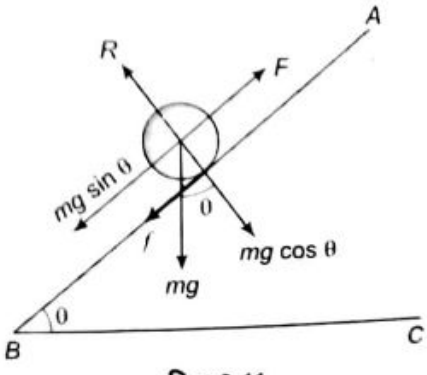
अत: $$a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) \quad ...(8)$$

(ii) ऊपर की ओर गति—इसके लिए पिण्ड पर ऊपर की ओर बाह्य बल F लगाना पड़ता है। अत: घर्षण बल f गति की विपरीत दिशा अर्थात् नीचे की ओर लगता है। यदि पिण्ड का त्वरण a हो तब, चित्र 3.11 के अनुसार

$$F - (mg\sin\theta + f) = ma \quad ...(i)$$

तथा $$R = mg\cos\theta \quad ...(ii)$$

अत: $$f = \mu R = \mu\, mg\cos\theta \quad ...(iii)$$



चित्र 3.11

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

इस प्रकार तीनों समीकरणों की सहायता से अज्ञात राशि का मान ज्ञात किया जा सकता है। पिण्ड का वेग एक समान होने पर, पिण्ड का त्वरण शून्य होगा,

अत: $F - (mg\sin\theta + f) = 0$

अथवा $F = mg\sin\theta + f$

अथवा $F = mg\sin\theta + \mu R$

अथवा $F = mg\sin\theta + \mu\, mg\cos\theta$

$$\boldsymbol{F = mg\,(\sin\theta + \mu\cos\theta)} \quad \text{... (9)}$$

यह एक समान वेग के लिए आवश्यक बल है।

§ 3.11 लोटनिक घर्षण (Rolling Friction)

किसी वस्तु को दूसरी वस्तु पर सरकाने की अपेक्षा लुढ़काना अधिक सरल होता है। जब कोई वस्तु किसी दूसरी वस्तु पर लुढ़कती है, तो दोनों के बीच जो घर्षण कार्य करता है उसे **लोटनिक घर्षण** (rolling friction) कहते हैं।

जब कोई गोल वस्तु (जैसे पहिया) किसी समतल पर लुढ़कती है तो समतल के पूर्ण दृढ़ (perfectly rigid) न होने के कारण मार्ग में थोड़ा-सा अवनमन (depression) एवं उभार (hump) उत्पन्न हो जाता है। अत: पहिए को गति बनाए रखने के लिए उसके मार्ग में आए उभार को पार करना पड़ता है। साथ ही रबड़ के पहियों में दाब के कारण कुछ चपटापन भी आ जाता है। इसी कारण इस गति में लोटनिक घर्षण उत्पन्न होता है, चित्र 3.2।

वास्तव में यह गतिक घर्षण का ही एक प्रकार है।

आधुनिक मशीनों में मशीन का कार्यकाल एवं दक्षता दोनों बढ़ाने के लिए गतिक घर्षण के स्थान पर लोटनिक घर्षण की व्यवस्था की जाती है।

§ 3.12 कार्य (Work)

सामान्य भाषा में कार्य का अर्थ किसी क्रिया के सम्पादन से होता है। जब कोई व्यक्ति साइकिल चलाता है, चक्की से आटा पीसता है, लकड़ी चीरता है, पुस्तक पढ़ता है या ध्यान-योग करता है, तो सामान्य भाषा में यह कहा जाता है कि व्यक्ति कार्य कर रहा है परन्तु भौतिकी में हम उन सभी परिस्थितियों को कार्य कहते हैं जिनमें किसी वस्तु पर बल लगाने से वस्तु की स्थिति में परिवर्तन होता है। यदि वस्तु की स्थिति अपरिवर्तित रहती है तो कार्य किया हुआ नहीं माना जाता है। जैसे दीवार पर धक्का लगाना या भारी पत्थर को हटाने की कोशिश करना या सिर पर भारी बोझा रखकर खड़े रहना आदि कार्य नहीं है। इससे यह स्पष्ट है कि कार्य का अर्थ लाभ (Merits) है, प्रयास (effort) नहीं। दूसरे शब्दों में किसी वस्तु पर बल लगाकर यदि उसकी गतिक अथवा विरामावस्था में परिवर्तन किया जाये तब हम कह सकते हैं कि कार्य किया गया है। स्पष्ट है कि—

"बल लगाकर किसी वस्तु को बल की दिशा में विस्थापित करने की क्रिया को ही कार्य कहते हैं।"

अर्थात् कार्य होने के लिए (i) बल तथा (ii) बल की दिशा में विस्थापन दोनों आवश्यक है। यदि बल लगाने से वस्तु में विस्थापन उत्पन्न न हो, या विस्थापन तो उत्पन्न हो परन्तु बल की दिशा में न हो तो भौतिकी में यही कहा जायगा कि कार्य नहीं हो रहा है। पृथ्वी पर स्थिर रखी सभी वस्तुओं पर गुरुत्व बल तो लगता है परन्तु विस्थापन न होने से कोई कार्य नहीं हो रहा होता है। वृत्ताकार मार्ग पर घूमते हुए किसी पिण्ड का विस्थापन तो हो रहा है परन्तु घूमने के लिए लग रहे अभिकेन्द्र बल की दिशा केन्द्र की ओर है, जो विस्थापन के लम्बवत् है अत: बल की दिशा में विस्थापन का मान शून्य होने के कारण, यह स्पष्ट है कि बल द्वारा कोई कार्य नहीं किया जा रहा है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

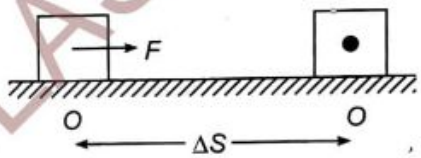
वस्तु के विस्थापन में एक विरोधी बल (opposilte force or resistance) भी कार्य करता है वास्तव में इस विरोधी बल के विरुद्ध वस्तु को विस्थापित करने में ही कार्य किया जाता है। यदि यह विरोधी बल न हो तो वस्तु के विस्थापन में किसी बल की आवश्यकता ही नहीं रहेगी।

पत्थर को ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंकने में गुरुत्वीय बल के विरुद्ध कार्य करना पड़ता है। साइकिल चलाते समय, साइकिल के पहियों व पृथ्वी के मध्य घर्षण बल के विरुद्ध कार्य करना पड़ता है, आदि।

बल लगाने में सदा दो वस्तुयें भाग लेती हैं, एक वह जिस पर बल लग रहा है और दूसरी वह जो बल लगा रही है। जब हम हाथ से बल लगा कर किसी पत्थर को ऊपर उठाते हैं तो पत्थर पर बल हाथ द्वारा ऊपर की ओर लगाया जाता है। जो वस्तु बल लगाती है उसके द्वारा कार्य किया जाता है और जिस वस्तु पर बल लगाया जाता है उस पर कार्य होता है। ऊपर के उदाहरण में पत्थर पर हाथ द्वारा कार्य किया जा रहा है।

§ 3.13. कार्य का मापन (Measurement of Work)

यदि विभिन्न द्रव्यमान की वस्तुयें मेज पर रखी हों और उनमें से प्रत्येक को कार्य तक उठाना हो तो इन निश्चित विस्थापन को उत्पन्न करने के लिए उन पर लगाये गये बल का मान वस्तुओं के द्रव्यमान के व्युत्क्रमानुपाती होगा तथा जिस वस्तु को विस्थापित करने में अधिक बल लगाना पड़ेगा उस वस्तु पर किया गया कार्य भी इसी अनुपात में अधिक होगा।

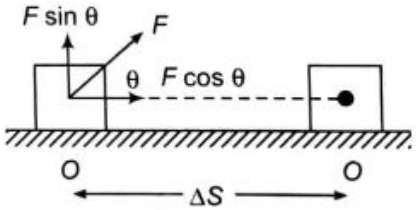


चित्र 3.12

अत: किसी वस्तु को एक निश्चित दूरी तक विस्थापित करने में किया गया कार्य वस्तु पर लगाये गये बल के समानुपाती होता है।

$$\text{कार्य } (W) \propto \text{बल } (F) \quad \text{.... (i)}$$

यदि एक ही वस्तु को बल लगाकर विस्थापित किया जा रहा हो तो जितना अधिक विस्थापन होगा उसी अनुपात में किया गया कार्य भी अधिक होगा। स्पष्टत: बल लगाकर किसी वस्तु को विस्थापित करने में किया गया कार्य भी विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होगा—



चित्र 3.13

$$\text{कार्य } (W) \propto \text{विस्थापन } (S) \quad \text{.... (ii)}$$

समीकरण (i) एवं (ii) से

$$\text{कार्य } (W) \propto F \text{ (बल)} \times S \text{ (विस्थापन)}$$

$$= K.F.S. \qquad \text{(जहाँ } K \text{ एक समानुपात स्थिरांक है) (iii)}$$

यदि कार्य का मात्रक इस प्रकार चुना जाए कि एकांक बल लगाने पर एकांक विस्थापन होने से कार्य भी एकांक हो अर्थात् जब $F = 1$ तथा $W = 1$

तब उपर्युक्त समीकरण (iii) से

$$W = K \cdot F \cdot S$$

या $\quad 1 = K \cdot 1 \cdot 1$

या $\quad K = 1$

अत: $\quad W = F \times S$

अर्थात् $\quad$ कार्य = बल × बल की दिशा में विस्थापन

माना F बल लगाने से किसी पिण्ड की स्थिति में ΔS विस्थापन होता है (चित्र 3.12) तब बल द्वारा किया गया कार्य

$$W = F \times \Delta S \qquad (10)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

यदि बल F क्षैतिज से θ कोण पर लगा हो (चित्र 3.13) तब किया गया कार्य

W = बल (F) का विस्थापन की दिशा में घटक × विस्थापन

अथवा $$W = F\cos\theta \times \Delta S \quad (11)$$

§ 3.14 शून्य, धनात्मक तथा ऋणात्मक कार्य (Zero, Positive & Negative Work)

कार्य का मान शून्य, धनात्मक (+ ive) तथा ऋणात्मक (– ive) कुछ भी हो सकता है। यदि बल तथा विस्थापन के मध्य का कोण न्यून कोण (acute angle) हो अर्थात् $\theta < 90°$ तो $\cos\theta$ का मान धनात्मक होने के कारण कार्य धनात्मक होगा और यदि बल व विस्थापन के मध्य का कोण अधिक कोण (obtuse angle) अर्थात् $\theta > 90°$ हो तो $\cos\theta$ का मान ऋणात्मक होने के कारण कार्य ऋणात्मक होगा तथा यदि $\theta = 90°$ तब $\cos\theta = 0$ अत: कार्य शून्य होगा। पिण्ड पर किया गया कार्य धनात्मक हो तो पिण्ड की ऊर्जा बढ़ जायेगी और यदि कार्य ऋणात्मक हो तो पिण्ड की ऊर्जा घट जायेगी। घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य सदैव ऋणात्मक होता है क्योंकि यह सदैव विपरीत दिशा ($\theta = 180°$ जिससे $\cos\theta = -1$) में कार्य करता है।

समीकरण $W = F\cos\theta \times \Delta S$ से स्पष्ट है कि कार्य θ पर निर्भर करता है यदि—

(i) $\theta = 0°$ तब $\cos\theta = 1$

अत: $W = F \times \Delta S$ ($\because \cos 0° = 1$)

(कार्य का मान अधिकतम तथा प्रकृति धनात्मक)

(ii) $\theta = 90°$ तब $\cos\theta = 0$

अत: $W = 0$ ($\because \cos 90° = 0$)

(कार्य शून्य)

(iii) $\theta = 180°$ तब $\cos\theta = -1$

अत: $W = -F \times \Delta S$

(कार्य ऋणात्मक)

$\because$ बल एवं विस्थापन दोनों सदिश राशियाँ हैं अत: कार्य W को बल सदिश ($\vec{F}$) तथा विस्थापन सदिश ($\vec{S}$) के बिन्दु गुणनफल (dot product) के रूप में निरूपित किया जा सकता है अर्थात्

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

चूँकि दो सदिशों का बिन्दु गुणनफल (dot multiplication) एक अदिश होता है अत: कार्य एक **अदिश (Scalar) राशि** है।

§ 3.15 कार्य का मात्रक एवं विमा (Unit of Work and Dimension)

चूँकि, कार्य (W) = बल ($\vec{F}$) × विस्थापन $\Delta(\vec{S})$

अत: सेन्टीमीटर ग्राम सेकण्ड (C.G.S.) पद्धति में कार्य का मात्रक

= (बल × विस्थापन) का C.G.S. में मात्रक

= डाइन × सेमी = अर्ग

अत: यदि 1 डाइन का बल लगाने से किसी वस्तु की स्थिति में विस्थापन 1 सेमी होता है तो किया गया कार्य 1 अर्ग होगा।

मीटर किलोग्राम सेकण्ड (M.K.S.) पद्धति में कार्य का मात्रक

= 1 न्यूटन × 1 मीटर = 1 जूल

अत: यदि 1 न्यूटन का बल लगाने से किसी वस्तु की स्थिति में विस्थापन 1 मीटर होता है तो किया गया कार्य 1 जूल होगा।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

1 जूल = 1 न्यूटन × 1 मीटर

$= 10^5 \times 10^2$ अर्ग

$= 10^7$ अर्ग

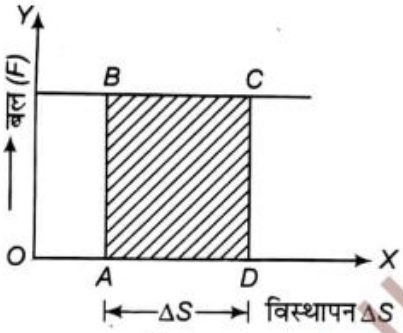
कार्य की विमा = $[MLT^{-2}][L]$

$= [ML^2T^{-2}]$

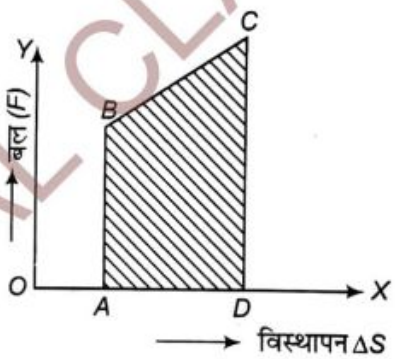
§ 3.16 बल विस्थापन वक्र (Force Displacement Graph)

किसी वस्तु पर कार्यरत बल तथा उससे उत्पन्न संगत विस्थापन के बीच खींचे गये ग्राफ को बल-विस्थापन वक्र (Force-Displacement Graph) कहते हैं। आरोपित बल की दो स्थितियाँ सम्भव हैं—

(i) एकसमान बल (Uniform Force)—यदि कार्यरत बल एक समान है तो ग्राफ एक सीधी रेखा में मिलता है (चित्र 3.14)



चित्र 3.14



चित्र 3.15

बल-विस्थापन ग्राफ से हम सीधे-सीधे कार्य की गणना कर लेते हैं।

किया गया कार्य = बल-विस्थापन वक्र द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल

= क्षेत्रफल $ABCD$

(ii) परिवर्ती बल (Variable Force)—यदि वस्तु पर कार्यरत बल परिवर्ती हो तो परिवर्ती बल की किसी विशेष स्थिति के लिए बल तथा विस्थापन के बीच खींचा गया ग्राफ चित्र 3.15 के अनुसार प्राप्त हो सकता है। इस स्थिति में किया गया कार्य क्षेत्रफल $ABCD$ के बराबर होगा।

§ 3.17 संरक्षी तथा असंरक्षी बल (Conservative and non-Conservative Forces)

एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक किसी कण को ले जाने में किया गया कार्य पथ पर निर्भर न करता हो तो कण पर लगने वाला बल संरक्षी बल कहलाता है। जैसे-गुरुत्वीय तथा वैद्युत क्षेत्र में लगने वाला बल आदि।

यदि किया गया कार्य पथ पर निर्भर करता हो तो उस बल को असंरक्षी बल कहते हैं। जैसे—घर्षण बल आदि।

Conservative and non-conservative force. A field of force in which the work done in moving a body from one point to another is independent of the path taken. The force required to move the body between these points in a conservative field is called a conservative force, else it will be known as non-conservative force.

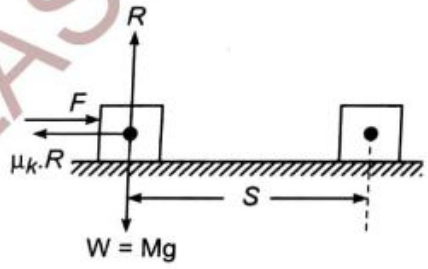
AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 3.18 क्षैतिज समतल पर पिण्ड विस्थापित करने में किया गया कार्य (Work done in displacing a body on an horizontal plane)

किसी वस्तु पर कार्यरत बल की विभिन्न अवस्थायें हो सकती हैं जैसे धक्का बल (push force) तथा खिंचाव बल (Pull force) तथा यह बल भी किसी समतल (क्षैतिज) के समानान्तर अथवा क्षैतिज से भिन्न किसी कोण (angle) पर आरोपित हो सकता है। अत: किये गये कार्य की गणना आरोपित बल की प्रकृति के अनुसार विभिन्न प्रकार से ज्ञात करते हैं।

(i) जब धक्का बल रूक्ष क्षैतिज समतल के समान्तर कार्यरत हो (When push force is parallel to the rough Surface)—माना M द्रव्यमान का एक पिण्ड एक रूक्ष क्षैतिज समतल पर स्थित है तथा पिण्ड पर तल के समान्तर बल F लगाने से पिण्ड मे S विस्थापन होता है। पिण्ड अपने भार (W) के कारण तल को Mg न्यूटन बल से नीचे की ओर दबाता है तथा न्यूटन के तृतीय नियम से तल की पिण्ड पर अभिलम्ब प्रतिक्रिया R इस बल के बराबर तथा विपरीत दिशा में ऊपर की ओर होती है। पिण्ड को क्षैतिज बल (F) द्वारा धक्का (Push) दिया जाता है। अत: पिण्ड विपरीत दिशा में गतिज घर्षण बल ($\mu_k \cdot R$) अनुभव करता है। चित्र 3.16 चूँकि पिण्ड नियत चाल से गतिमान है अत: उस पर कार्यरत क्षैतिज दिशा में परिणामी बल शून्य होगा अर्थात्



चित्र 3.16

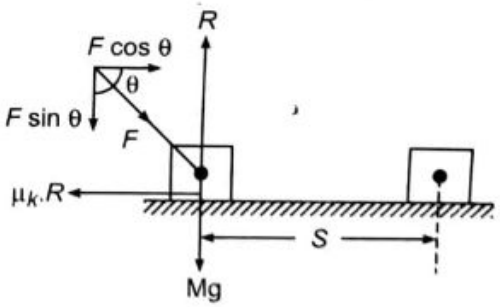
$$F - \mu_k \cdot R = 0$$

अथवा $$F = \mu_k \cdot R = \mu_k \cdot Mg \qquad (\because R = Mg)$$

अत: बल द्वारा पिण्ड पर किया गया कार्य

$$\boldsymbol{W = F \times S = \mu_k Mg \cdot S} \text{ जूल} \qquad (12)$$

(ii) कार्यरत धक्का बल क्षैतिज से θ कोण पर कार्यरत है (Push force is acting at an angle θ with Horizontal)—इस स्थिति में पिण्ड को क्षैतिज से θ कोण पर बल F द्वारा धक्का दिया जाता है (चित्र 3.17)। बल F को क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर घटकों में वियोजित करने पर



चित्र 3.17

(a) क्षैतिज घटक $= F\cos\theta$ (पिण्ड को आगे की ओर बढ़ाता है)

(b) ऊर्ध्वाधर घटक $= F\sin\theta$ (पिण्ड पर नीचे की ओर कार्य करता है तथा भार Mg में जुड़ जाता है)

तब प्रतिक्रिया बल $R = Mg + F\sin\theta$

तथा घर्षण बल $\mu_k R = \mu_k (Mg + F\sin\theta)$

चूँकि पिण्ड स्थिर चाल से गतिमान है। अत: उस पर कार्यरत बल का क्षैतिज घटक ($F\cos\theta$) घर्षण बल [$\mu_k (Mg + F\sin\theta)$] के बराबर होगा। अर्थात्

$$F\cos\theta = \mu_k (Mg + F\sin\theta)$$

अथवा $$F\cos\theta - \mu_k F\sin\theta = \mu_k \cdot Mg$$

अथवा $$F\cos\theta(1 - \mu_k \cdot \tan\theta) = \mu_k \cdot Mg$$

अथवा $$F\cos\theta = \frac{\mu_k \cdot Mg}{(1 - \mu_k \tan\theta)}$$

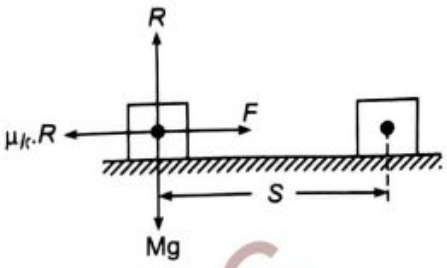
अत: बल द्वारा पिण्ड पर किया गया कार्य

$$\boldsymbol{W = F\cos\theta \cdot S = \left(\frac{\mu_k Mg}{1 - \mu_k \tan\theta}\right) \cdot S} \qquad (13)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(iii) पिण्ड पर तल के समान्तर खिंचाव बल (Pulling Force acting on the body Parallel to Plane)—चित्र 3.18, इस दशा में पिण्ड का भार Mg = प्रतिक्रिया बल R चूँकि पिण्ड एकसमान चाल से गतिमान है। अत: तल के समान्तर परिणामी बल शून्य है। अर्थात्



चित्र 3.18

$$F - \mu_k \cdot R = 0$$

अथवा $$F = \mu_k \cdot R = \mu_k \cdot Mg$$

अत: किया गया कार्य

$$W = F \times \Delta S = \mu_k \cdot MgS \text{ जूल} \qquad (14)$$

(iv) पिण्ड पर कार्यरत क्षैतिज से θ कोण पर खिंचाव बल (Pulling Force acting on the body at an angle θ with Horizontal)—चित्र 3.19 में एक समान बल F क्षैतिज से θ कोण पर पिण्ड को खींचता हुआ दर्शाया गया है। बल F को घटकों में वियोजित करने पर

क्षैतिज घटक $= F\cos\theta$ (पिण्ड को क्षैतिज गति प्रदान करता है)

ऊर्ध्वाधर घटक $= F\sin\theta$ (तल द्वारा पिण्ड पर ऊपर की ओर कार्यरत)

चित्र 3.19 के अनुसार,

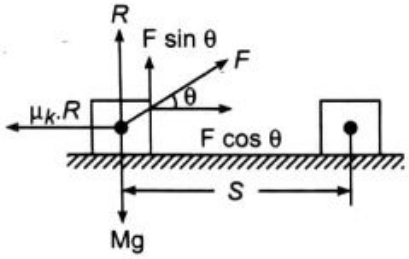
$$R + F\sin\theta = Mg$$

अथवा $$R = Mg - F\sin\theta$$

$$\text{घर्षण बल} = \mu_k \cdot R = \mu_k\,(Mg - F\sin\theta)$$

∵ पिण्ड नियत वेग से गति कर रहा है। अत: बल का क्षैतिज घटक घर्षण बल के समान होगा।

अर्थात्



चित्र 3.19

$$F\cos\theta = \mu_k\,(Mg - F\sin\theta)$$

या $$F\cos\theta + \mu_k F\sin\theta = \mu_k\, Mg$$

या $$F\cos\theta\,(1 + \mu_k\tan\theta) = \mu_k Mg$$

या $$F\cos\theta = \frac{\mu_k\, mg}{1 + \mu_k\tan\theta}$$

इस बल द्वारा पिण्ड पर किया गया कार्य

$$W = F\cos\theta \times \Delta S$$

अथवा $$W = \left(\frac{\mu_k\, Mg}{1 + \mu_k \tan\theta}\right) S \qquad (15)$$

§ 3.19 रूक्ष नत तल पर पिण्ड को विस्थापित करने में किया गया कार्य (Work done in displacing a body on an inclined plane)

(i) जब कार्यकारी खिंचाव बल (F) नत तल के समानान्तर लगाया जाये (When Applied pull Force is Parallel to the inclined Plane)—पिण्ड पर कार्यरत समस्त बल चित्र 3.20 में दर्शाये गये हैं।

नत तल के समान्तर बल

$$F = \mu_k \cdot R + Mg\sin\theta$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

नत तल के ऊर्ध्वाधर बल

$$R = Mg\cos\theta$$

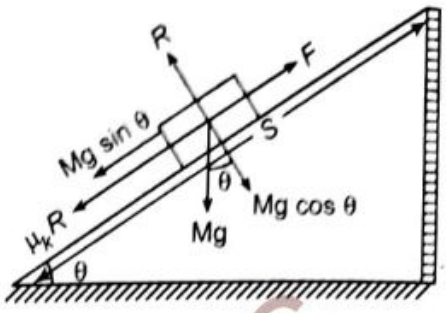
$$\therefore \quad F = \mu_k \cdot Mg\cos\theta + Mg\sin\theta$$

पिण्ड को नत तल पर S दूरी विस्थापित करने में किया गया कार्य

$$W = F \cdot S = FS\cos\theta = FS$$

$$= (\mu_k\ Mg\cos\theta + Mg\sin\theta) \times S$$

अथवा $$W = MgS\ (\mu_k\ \cos\theta + \sin\theta) \qquad (16)$$



चित्र 3.20

(ii) कार्यकारी खिंचाव बल (F) नत तल से α कोण पर ऊपर की ओर लगाने पर किया गया कार्य (Work done when Applied pull Force is working at an angle α upward on an inclined plane)—पिण्ड पर कार्यरत बल चित्र 3.21 में दर्शाये गये हैं।

चित्रानुसार,

$$\mu_k \cdot R + Mg\sin\theta = F\cos\alpha \quad \text{---(i)}$$

तथा $$R + F\sin\alpha = Mg\cos\theta$$

अथवा $$R = (Mg\cos\theta - F\sin\alpha) \quad \text{---(ii)}$$

अत: $$\mu_k(Mg\cos\theta - F\sin\alpha) + Mg\sin\theta = F\cos\alpha$$

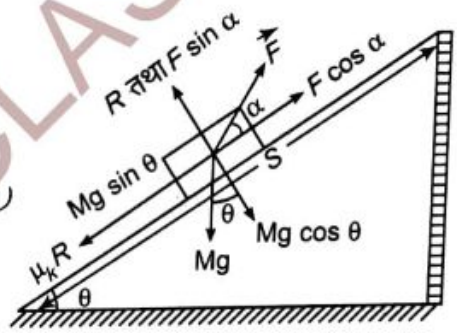
अथवा $$\mu_k \cdot Mg\cos\theta - \mu_k F\sin\alpha + Mg\sin\theta = F\cos\alpha$$

अथवा $$\mu_k\ Mg\cos\theta + Mg\sin\theta = F\cos\alpha + \mu_k F\sin\alpha$$

अथवा $$Mg\cos\theta\ (\mu_k + \tan\theta) = F\ (\cos\alpha + \mu_k\sin\alpha)$$

अथवा $$F = \frac{Mg\cos\theta\ (\mu_k + \tan\theta)}{\cos\alpha + \mu_k\sin\alpha}$$

$$= \frac{Mg\cos\theta\ (\mu_k + \tan\theta)}{\cos\alpha\ (1 + \mu_k\tan\alpha)}$$



चित्र 3.21

पिण्ड को नत तल में ऊपर की ओर S दूरी विस्थापित करने में किया गया कार्य

$$W = F \cdot S = FS\cos\alpha$$

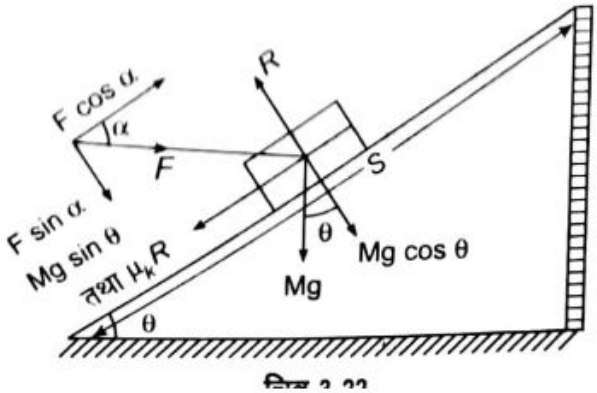
$$= \frac{Mg\cos\theta\ (\mu_k + \tan\theta) \cdot S\cos\alpha}{\cos\alpha\ (1 + \mu_k\tan\alpha)}$$

अथवा $$W = \frac{MgS\cos\theta\ (\mu_k + \tan\theta)}{(1 + \mu_k\tan\alpha)}$$

(iii) कार्यकारी धक्का बल (F) नत तल से α कोण पर नीचे की ओर लगाने पर किया गया कार्य (Work done when Applied push Force is working at an angle α downwards on an inclined plane)—पिण्ड पर कार्यरत बल चित्र 3.22 में दर्शाये गये हैं।

चित्रानुसार,

$$\mu_k \cdot R + Mg\sin\theta = F\cos\alpha$$



चित्र 3.22

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

तथा $$R = Mg\cos\theta + F\sin\alpha$$

$\therefore$ $$\mu_k\,(Mg\cos\theta + F\sin\alpha) + Mg\sin\theta = F\cos\alpha$$

अथवा $$\mu_k \cdot Mg\cos\theta + \mu_k F\sin\alpha + Mg\sin\theta = F\cos\alpha$$

अथवा $$\mu_k \cdot Mg\cos\theta + Mg\sin\theta = F\cos\alpha - \mu_k F\sin\alpha$$

अथवा $$Mg\cos\theta\,(\mu_k + \tan\theta) = F\cos\alpha\,(1 - \mu_k\tan\alpha)$$

अथवा $$F = \frac{Mg\cos\theta\,(\mu_k + \tan\theta)}{\cos\alpha\,(1 - \mu_k\tan\alpha)}$$

अत: पिण्ड को S दूरी विस्थापित करने में किया गया कार्य

$$W = F \cdot S = FS\cos\alpha$$

$$= \frac{Mg\cos\theta\,(\mu_k + \tan\theta)}{\cos\alpha\,(1 - \mu_k\tan\alpha)} \cdot S\cos\alpha$$

अथवा $$\boldsymbol{W = \frac{MgS\cos\theta\,(\mu_k + \tan\theta)}{1 - \mu_k\tan\alpha}} \qquad (17)$$

§ 3.20 शक्ति अथवा सामर्थ्य (Power)

किसी व्यक्ति अथवा मशीन द्वारा एकांक समय में किये गये कार्य को उस व्यक्ति अथवा मशीन की शक्ति अथवा सामर्थ्य कहते हैं। दूसरे शब्दों में किसी कारक के कार्य करने की समय दर को शक्ति कहते हैं इसे P से निरूपित करते हैं। माना कोई व्यक्ति t समय में W कार्य करता है, तब

$$\text{शक्ति} = \frac{\text{कुल कार्य}}{\text{समय}} \quad \text{अथवा} \quad P = \frac{W}{t} \qquad (18)$$

§ 3.21 शक्ति के मात्रक (Units of Power)

(i) S.I. पद्धति में :

शक्ति का मात्रक $= \frac{\text{जूल}}{\text{सेकण्ड}}$ या वॉट है। वॉट को W अक्षर से प्रदर्शित करते हैं। यह मात्रक वैज्ञानिक जैम्स वॉट के नाम पर रखा गया है।

अत: $$\textbf{1 वॉट} = \frac{\textbf{1 जूल}}{\textbf{1 सेकण्ड}}$$

इस प्रकार 1 किलोवॉट $= 10^3$ वॉट

तथा 1 मेगावॉट $= 10^6$ वॉट

(ii) C.G.S पद्धति में :

$$\text{शक्ति का मात्रक} = \frac{\text{अर्ग}}{\text{सेकण्ड}} \text{ या अर्ग/सेकण्ड}$$

(iii) F.P.S. पद्धति में : मशीनों की सामर्थ्य को अश्व-शक्ति (Horse Power) में भी व्यक्त किया जाता है।

1 अश्व शक्ति (H.P.) = 746 वॉट (लगभग)

किसी स्वस्थ मनुष्य की औसत शक्ति 0·5 से 1·0 अश्व शक्ति तक हो सकती है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 3.22 कार्य का व्यावहारिक मात्रक (Practical Unit of Work)

$\because$ शक्ति = कार्य/समय

अर्थात् कार्य = शक्ति × समय

शक्ति को वॉट तथा समय को घण्टा में नापने पर

कार्य का मात्रक = 1 वॉट × 1 घण्टा

= 1 वॉट घण्टा

इस प्रकार 1 किलोवॉट घण्टा $= 10^3$ वॉट घण्टा

तथा 1 मेगावॉट घण्टा = 1 वॉट घण्टा

विद्युत (Electricity) द्वारा घरों या कारखानों में विद्युत उपकरणों अथवा मशीनों के माध्यम से किये गये कार्य को किलोवॉट घण्टा में नापते हैं तथा इसे यूनिट कहते हैं।

$$1 \text{ वॉट-घण्टा} = \frac{\text{जूल}}{\text{सेकण्ड}} \times 3600 \text{ सेकण्ड} = 3600 \text{ जूल}$$

$$1 \text{ किलोवॉट-घण्टा} = 3600 \times 10^3 \text{ जूल} = 3{\cdot}6 \times 10^6 \text{ जूल}$$

§ 3.23 विद्युत-शक्ति (Electric Power)

जब किसी परिपथ में i ऐम्पियर की धारा t सेकण्ड तक बहती है तथा परिपथ के सिरों पर V वोल्ट का विभवान्तर होता है तब विद्युत धारा द्वारा किया गया कार्य

$$W = Vit \text{ जूल}$$

$\therefore$ $$\text{शक्ति } (P) = \frac{\text{कार्य } (W)}{\text{समय } (t)}$$

$$= \frac{Vit}{t} = Vi \text{ जूल/से}$$

या $$\boldsymbol{P = Vi \text{ वॉट}}$$

1 वॉट = 1 वोल्ट × 1 ऐम्पियर

1 किलोवॉट-घण्टा = 1 यूनिट $= 10^3$ वॉट घण्टा

$= 10^3 \times 3600$ जूल

§ 3.24 ऊर्जा (Energy)

किसी वस्तु द्वारा कार्य करने की क्षमता (capacity) को उसकी ऊर्जा कहते हैं जैसे ऊँचाई पर एकत्र पानी में विद्युत उत्पन्न करने की क्षमता होती है, चाबी वाली घड़ियों की कमानी में सुइयाँ चलाने की क्षमता होती है। यदि एक वस्तु दूसरी वस्तु पर बल लगाकर कार्य करती है तो कार्य करने वाली वस्तु की ऊर्जा कार्य करने में व्यय होती है। अर्थात् जो वस्तु कार्य करती है उसकी ऊर्जा में कमी होती है तथा जिस वस्तु पर कार्य किया जाता है, उसकी ऊर्जा में वृद्धि होती है। स्पष्टत: ऊर्जा स्थानान्तरण की माप, किये गये कार्य की मात्रा के बराबर होती है परन्तु ऊर्जा की यह माप निरपेक्ष (Absolute) नहीं होती है। ऊर्जा की निरपेक्ष माप ज्ञात करने के लिये किसी समय अथवा विशेष अवस्था में वस्तु की ऊर्जा को शून्य ऊर्जा की अवस्था में मान लेते हैं तथा इसके सापेक्ष वस्तु की ऊर्जा की माप करते हैं जो पूर्णत: निरपेक्ष होती है। ऊर्जा के रूपान्तरण एवं हस्तान्तरण से ही कार्य सम्पन्न होता है जैसे कोयला जलाकर ऊष्मीय ऊर्जा प्राप्त करते हैं जिससे पानी को भाप में बदलते हैं जो पिस्टन को धक्का देती है। परिणामस्वरूप पिस्टन की गति से गतिपालक पहिया (Flywheel) चलता है एवं रेलगाड़ी पटरी पर चलती है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

इस प्रकार "**ऊर्जा स्थानान्तरण ही कार्य है।**"

अर्थात् स्थानान्तरित ऊर्जा = किया गया कार्य

चूँकि ऊर्जा किये गये कार्य के कुल परिमाण को बताती है अत: इसका मात्रक वही है जो कार्य का मात्रक है। अर्थात्

(i) C.G.S. पद्धति मे ऊर्जा का मात्रक अर्ग होता है।

(ii) M.K.S. अथवा S.I. पद्धति में ऊर्जा का मात्रक जूल होता है।

ऊर्जा एक अदिश राशि है तथा ऊर्जा की विमा $[ML^2T^{-2}]$ होती है।

§ 3.25 ऊर्जा के रूप (Forms of Energy)

ऊर्जा के कुछ विभिन्न रूप इस प्रकार हैं—

(i) यान्त्रिक ऊर्जा (Mechanical Energy),

(ii) ऊष्मीय ऊर्जा (Thermal Energy),

(iii) विद्युत ऊर्जा (Electrical Energy),

(iv) ध्वनि ऊर्जा (Sound Energy),

(v) प्रकाश ऊर्जा (Light Energy),

(vi) विकीर्ण ऊर्जा (Radiant Energy),

(vii) रासायनिक ऊर्जा (Chemical Energy),

(viii) चुम्बकीय ऊर्जा (Magnetic Energy),

(ix) नाभिकीय ऊर्जा (Nuclear Energy),

(x) परमाणु ऊर्जा (Atomic Energy),

(xi) द्रव्यमान ऊर्जा (Mass Energy),

(xii) सौर ऊर्जा (Solar Energy),

(xiii) पवन ऊर्जा (Wind Energy)

(xiv) भूतापीय ऊर्जा (Geothermal Energy)

(xv) ज्वारीय ऊर्जा (Tidal Energy)

(xvi) भूकंपी ऊर्जा (Seismic Energy)

§ 3.26 यान्त्रिक ऊर्जा (Mechanical Energy)

यांत्रिक ऊर्जा दो प्रकार की होती है—

(i) गतिज ऊर्जा (Kinetic Energy)

(ii) स्थितिज ऊर्जा (Potential Energy)

3.26.1 गतिज ऊर्जा (Kinetic Energy)

गतिमान वस्तुओं में गति के कारण जो ऊर्जा संचित होती है वह उनकी गतिज ऊर्जा कहलाती है। गतिज ऊर्जा की माप कार्य की उस मात्रा से की जाती है जो वस्तु को विरामवस्था से गतिमान अवस्था तक अथवा गतिमान अवस्था से विराम अवस्था तक लाने में किया जाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

माना m द्रव्यमान की कोई वस्तु विरामावस्था में है तथा उसे F बल लगाकर त्वरित किया जाता है, तब वस्तु में उत्पन्न त्वरण

$$a = \frac{F}{m}$$ (न्यूटन के सूत्र $F = ma$ से) ... (i)

चूँकि वस्तु विरामावस्था में है अत: उसका प्रारम्भिक वेग $u = 0$

माना S दूरी तय करने के बाद वस्तु का वेग v हो जाता है,

तब समीकरण $v^2 = u^2 + 2aS$ से,

$$v^2 = 0^2 + 2aS \quad \text{अथवा} \quad v^2 = 2aS$$ ... (ii)

अथवा $v^2 = 2\left(\frac{F}{m}\right)S$ (समीकरण (1) से)

या $F \times S = \frac{1}{2}mv^2$

हम जानते हैं कि $F \times S =$ बल × दूरी

= वस्तु द्वारा किया गया कार्य

= गतिज ऊर्जा

अत: गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2$

अथवा $\boldsymbol{K = \frac{1}{2}mv^2}$ **... (19)**

समीकरण (19) से स्पष्ट है कि रेखीय गति में गतिमान वस्तु की गतिज ऊर्जा वस्तु के द्रव्यमान तथा उसके वर्ग के गुणनफल के आधे के बराबर होती है।

3.27.2 घूर्णन गतिज ऊर्जा (Rotational Kinetic Energy)

माना कोई वस्तु घूर्णन गति कर रही है। r घूर्णन त्रिज्या व ω कोणीय वेग है, तब

$$v = r\omega$$

चूँकि रेखीय गति में वस्तु की गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2$

अत: $K = \frac{1}{2}m(r\omega)^2$

$= \frac{1}{2}mr^2 \cdot \omega^2$

$= \frac{1}{2}I \cdot \omega^2$ (जहाँ $I = mr^2$ वस्तु का जड़त्व आघूर्ण है)

अत: घूर्णन करती वस्तु की गतिज ऊर्जा

$$\boldsymbol{K_R = \frac{1}{2}I\omega^2}$$ (20)

3.27.3 स्थितिज ऊर्जा (Potential Energy)

किसी वस्तु में उसकी स्थिति (Position) अथवा विकृति (strain) के कारण जो ऊर्जा संचित होती है वह उसकी स्थितिज ऊर्जा कहलाती है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

स्थितिज ऊर्जा अनेकों रूपों में वस्तुओं में निहित रहती है। जैसे—

(i) गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा (Gravitational Potential Energy)—पृथ्वी तल से किसी ऊँचाई पर स्थित होने के कारण वस्तु में जो ऊर्जा संचित होती है वह उसकी गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कहलाती है।

माना m द्रव्यमान की एक वस्तु पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर स्थित है अथवा इसे h ऊँचाई तक उठाया गया है, तब इस वस्तु को उठाने में गुरुत्वीय बल (mg) के विरुद्ध कार्य किया जाता है जो वस्तु में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित होता है। अत: वस्तु की

$$\text{स्थितिज ऊर्जा } U = \text{गुरुत्वीय बल के विरुद्ध किया गया कार्य}$$
$$= \text{गुरुत्व बल} \times \text{विस्थापन}$$
$$= mg \times h$$

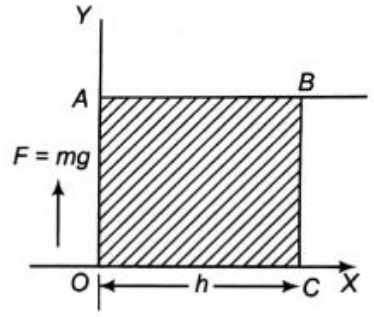
अथवा $$\boldsymbol{U = mgh} \qquad (21)$$

यह सूत्र तभी सत्य होगा जब पृथ्वी पर वस्तु की स्थितिज ऊर्जा शून्य हो। यदि वस्तु h ऊँचाई से गिरायी जाये तो वह mgh परिमाण का कार्य करेगी।

ग्राफीय निरूपण (Graphical Representation)

गुरुत्वीय बल एक स्थिर बल है अत: बल (F) तथा पृथ्वी तल से कम ऊँचाई (h) के मध्य ($F - h$) वक्र एक सरल रेखा प्राप्त होगी जो $X-$अक्ष के समानान्तर होगी (चित्र 3.23)। अत: वस्तु की स्थितिज ऊर्जा

$= F - h$ वक्र तथा $X-$अक्ष के बीच का क्षेत्रफल
$= \text{आयत } OABC \text{ का क्षेत्रफल}$
$= OA \times OC$
$= mg \times h$
$= mgh$

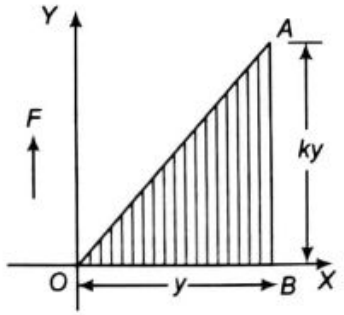


चित्र 3.23

अर्थात् **गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा = *mgh***

(ii) प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा (Elastic Potential Energy)—जब वस्तु में संचित ऊर्जा उसकी प्रत्यास्थता के गुण के कारण होती है तो उसे प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा कहते हैं। जैसे दबी या खिंची हुयी स्प्रिंग, धातु की मुड़ी पत्ती, खिंची हुयी रबड़, तनी हुयी कमान आदि।

माना एक आदर्श स्प्रिंग दृढ़ आधार से लटका है तथा उससे सम्बन्धित एक संकेतक मीटर पैमाने पर गति करता है। जब स्प्रिंग के निचले सिरे पर द्रव्यमान रखते हैं तो वह y दूरी तक खिंच जाता है। इस प्रकार अलग-अलग द्रव्यमान द्वारा अलग-अलग खिंचाव ज्ञात कर लेते हैं। बल (F) तथा खिंचाव (y) के बीच खींचा गया ग्राफ (चित्र 3.24) एक सरल रेखा प्राप्त होता है।



चित्र 3.24

अत: $$F \propto y$$

अथवा $$F = ky$$

जहाँ k स्प्रिंग नियतांक है।

स्प्रिंग को O से B तक खींचने में किया गया

$$\text{कार्य} = \text{स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा}$$
$$= (F - y) \text{ वक्र व '}X\text{' अक्ष के बीच का क्षेत्रफल}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$\therefore \Delta OAB$ का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} OB \times AB = \frac{1}{2} y \times ky = \frac{1}{2} ky^2$$

अत: स्प्रिंग को खीचने मे $\frac{1}{2} ky^2$ जूल कार्य करना पड़ेगा।

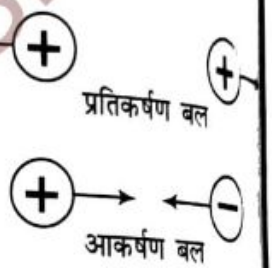
अर्थात् **स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा** $= \frac{1}{2} ky^2$

$F - y$ ग्राफ के ढाल (slope) से स्प्रिंग का बल नियतांक (k) ज्ञात कर लेते हैं अर्थात्

$$k = \frac{BA}{OB}$$

● k का मान ज्ञात कर प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा का मान ज्ञात किया जा सकता है।

(iii) वैद्युत स्थितिज ऊर्जा— जिस प्रकार पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र में स्थित किसी पिण्ड पर लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल के कारण उसमें गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का समावेश हो जाता है, उसी प्रकार विद्युत क्षेत्र में यदि कोई आवेशित वस्तु स्थित हो तो उस पर लगने वाले वैद्युत बलों के कारण वस्तुयें विस्थापित हो सकती हैं, और उनमें कार्य करने की क्षमता का समावेश हो जाता है। यह ऊर्जा वस्तु में विशेष अवस्था (वैद्युत क्षेत्र में स्थित होने) के कारण है अत: इस ऊर्जा को वैद्युत स्थितिज ऊर्जा कहते हैं।



चित्र 3.25

(iv) चुम्बकीय स्थितिज ऊर्जा—चुम्बकीय क्षेत्र में स्थित किसी गतिशील आवेश पर अथवा धारावाही चालक पर चुम्बकीय बल के कारण जो कार्य करने की क्षमता उत्पन्न होती है उसे चुम्बकीय स्थितिज ऊर्जा कहते हैं।

(v) रासायनिक ऊर्जा—पदार्थ में उसकी विशेष परमाणविक संरचना के कारण जो स्थितिज ऊर्जा निहित होती है उसे रासायनिक ऊर्जा कहते हैं। रासायनिक क्रियाओं में इस ऊर्जा का रूपान्तरण अन्य स्वरूपों (ऊष्मा, प्रकाश, वैद्युत-ऊर्जा आदि) में होता है।

(vi) नाभिकीय ऊर्जा—पदार्थ के मूल कणों (प्रोटॉन तथा न्यूट्रॉन) के परमाणुओं के नाभिक में रहने की विशेष अवस्था के कारण नाभिक में जो स्थितिज ऊर्जा निहित रहती है उसे नाभिकीय ऊर्जा कहते हैं। परमाणु-बम, हाइड्रोजन-बम, सूर्य तथा अन्य नक्षत्रों (stars) में नाभिकीय ऊर्जा का रूपांतरण ऊष्मा, प्रकाश, यान्त्रिक ऊर्जा आदि में होता है।

(vii) द्रव्यमान ऊर्जा—विभिन्न प्रकार की नाभिकीय प्रक्रियाओं में पदार्थ के द्रव्यमान का कुछ अंश ऊर्जा में परिवर्तित हो जाता है अर्थात् द्रव्यमान भी ऊर्जा का ही एक स्वरूप है। इसे द्रव्यमान ऊर्जा कहते हैं।

§ 3.28 कार्य ऊर्जा प्रमेय (Work Energy Theorem)

किसी वस्तु पर बल लगाने से, बल द्वारा किया गया कार्य (W) वस्तु की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन (ΔK) के बराबर होता है।

3.28.1 नियत बल के लिए कार्य ऊर्जा प्रमेय (Work Energy Theorem for a Constant Force)

माना किसी वस्तु का द्रव्यमान m तथा प्रारम्भिक वेग v_1 है, गति की दिशा में बल F कार्यरत होने से वस्तु में उत्पन्न त्वरण a है, तब

वस्तु पर बल = द्रव्यमान × त्वरण

अथवा $F = ma$

बल आरोपण के उपरान्त यदि वस्तु dt समय में dx दूरी तय करता है तथा उसका वेग v_2 हो जाता है तो बल द्वारा किया गया कार्य

W = बल × विस्थापन

ARC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

अथवा $$W = ma \times dx \quad \text{...(ii)}$$

dt समय में औसत वेग $= \frac{v_1 + v_2}{2}$

dt समय में विस्थापन dx हो तो dx = औसत वेग × समय

$$= \left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) \cdot dt \quad \text{...(iii)}$$

तथा त्वरण $a = \frac{v_2 - v_1}{dt}$ ... (iv)

समीकरण (iii) व (iv) के मान समीकरण (ii) में रखने पर,

$$W = m\left(\frac{v_2 - v_1}{dt}\right)\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) dt$$

$$= \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

$$= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = K_2 - K_1$$

जहाँ $K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ = वस्तु की प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा,

तथा $K_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$ = वस्तु की अन्तिम गतिज ऊर्जा।

अत: $$W = \Delta K \quad (22)$$

अर्थात् किसी वस्तु पर बल लगाने से, बल द्वारा किया गया कार्य वस्तु की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन के बराबर होता है। यही कार्य ऊर्जा प्रमेय है।

3.28.2 परिवर्ती बल के लिये कार्य ऊर्जा प्रमेय (Work Energy Theorem for a Variable Force)

माना m द्रव्यमान का वस्तु प्रारम्भिक वेग u से गतिशील है। वस्तु पर कोई परिवर्ती बल कार्यरत् है। अत: किसी सूक्ष्म विस्थापन dx में बल द्वारा किया गया तात्क्षणिक कार्य,

$$dW = F \cdot dx = ma\, dx \quad \text{(जहाँ } a \text{ तात्क्षणिक त्वरण है।)}$$

$$= m\frac{dv}{dt} \cdot dx = m\frac{dx}{dt} \cdot dv$$

$$= mv\, dv \quad \left(\text{जहाँ } v = \frac{dx}{dt}, \text{ तात्क्षणिक वेग है}\right)$$

यदि वस्तु की प्रारम्भिक स्थिति x_1 पर वेग u तथा बलारोपण के उपरान्त अंतिम स्थिति x_2 पर वेग v हो तो, इस दौरान किया गया कार्य उपरोक्त समीकरण का उचित सीमा के अंतर्गत समाकलन करने पर प्राप्त होगा

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\, dx = \int_u^v mv\, dv$$

$$= m\int_u^v v\, dv = m\left[\frac{v^2}{2}\right]_u^v = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2 \quad \text{...(i)}$$

परन्तु $\frac{1}{2}mu^2 = K_i$ (प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा)

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$\frac{1}{2}mv^2 = K_f$$ (अंतिम गतिज ऊर्जा)

अत: समी० (i) से $$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = K_f - K_i = \Delta K \quad \ldots (ii)$$

यही कार्य ऊर्जा प्रमेय है।

§ 3.29 ऊर्जा संरक्षण का सिद्धान्त (Principle of Conservation of Energy)

इस नियम के अनुसार "किसी निकाय (system) की कुल ऊर्जा सदैव नियत रहती है अर्थात् न तो ऊर्जा उत्पन्न की जा सकती है और न ही नष्ट की जा सकती है। केवल ऊर्जा का स्वरूप बदला जा सकता है।"

किसी क्रिया में यदि निकाय (system) की प्रारम्भिक ऊर्जा का मान अन्तिम ऊर्जा के बराबर प्राप्त हो तो यह कहा जाता है कि क्रिया में यान्त्रिक ऊर्जा का मान संरक्षित है अर्थात् ऐसी क्रिया में प्रयुक्त निकाय की ऊर्जा न तो बाहर जाती है और न ही बाहर की ऊर्जा निकाय को प्राप्त होती है। अत: निकाय की गतिज ऊर्जा एवं स्थितिज ऊर्जा का योग सदैव नियत (constant) रहता है।

अर्थात् $$K + U = \text{नियत}$$

इससे स्पष्ट है कि किसी प्रक्रिया में स्थितियों के परिवर्तन से यदि गतिज ऊर्जा बढ़ती है तो उतनी ही स्थितिज ऊर्जा घटती है तथा यदि गतिज ऊर्जा घटती है तो स्थितिज ऊर्जा में उतनी ही वृद्धि होती है। अर्थात् दोनों ऊर्जाओं का योग सदैव नियत बना रहता है। उदाहरणत:

⇒ मुक्त रूप से गिरते हुए पिण्ड के मार्ग के प्रत्येक बिन्दु पर गतिज एवं स्थितिज ऊर्जाओं का योग नियत रहता है—

माना कोई वस्तु पृथ्वी के धरातल से H ऊँचाई पर स्थित है तथा इसका द्रव्यमान m है (चित्र 3.26)। बिन्दु A पर वस्तु की कुल ऊर्जा

$$= \text{स्थितिज ऊर्जा} + \text{गतिज ऊर्जा}$$
$$= mgH + 0$$

अथवा $$E_A = mgH \quad \ldots (i)$$

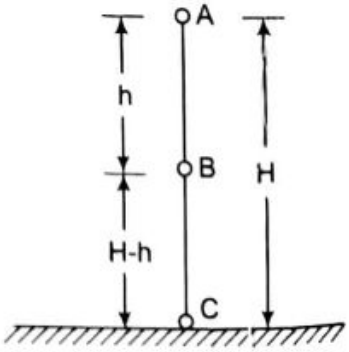
माना वस्तु बिन्दु A से स्वतन्त्रतापूर्वक गिरना प्रारम्भ करती है। बिन्दु B जो धरातल से $(H - h)$ ऊँचाई पर है वहाँ वस्तु का वेग $v^2 = u^2 + 2gh$

या $$v^2 = 0 + 2gh$$

या $$v = \sqrt{2gh} \quad \ldots (ii)$$

अत: बिन्दु B पर कुल ऊर्जा

$$E_B = \text{गतिज ऊर्जा} + \text{स्थितिज ऊर्जा}$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 + mg\,(H - h)$$
$$= \frac{1}{2}m\,2gh + mg\,(H - h) = mgH \quad \ldots (iii)$$



चित्र 3.26

जब वस्तु धरातल के बिन्दु C पर पहुँचती है तब उसका वेग $v = \sqrt{(2gH)}$

अत: बिन्दु C पर कुल ऊर्जा

$$E_C = \text{स्थिति ऊर्जा} + \text{गतिज ऊर्जा}$$
$$= 0 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot 2gH$$
$$= mgH \quad \ldots (iv)$$

समीकरण (i), (iii) व (iv) से स्पष्ट है कि बिन्दु $A, B\ C$ पर ऊर्जा का मान नियत है।

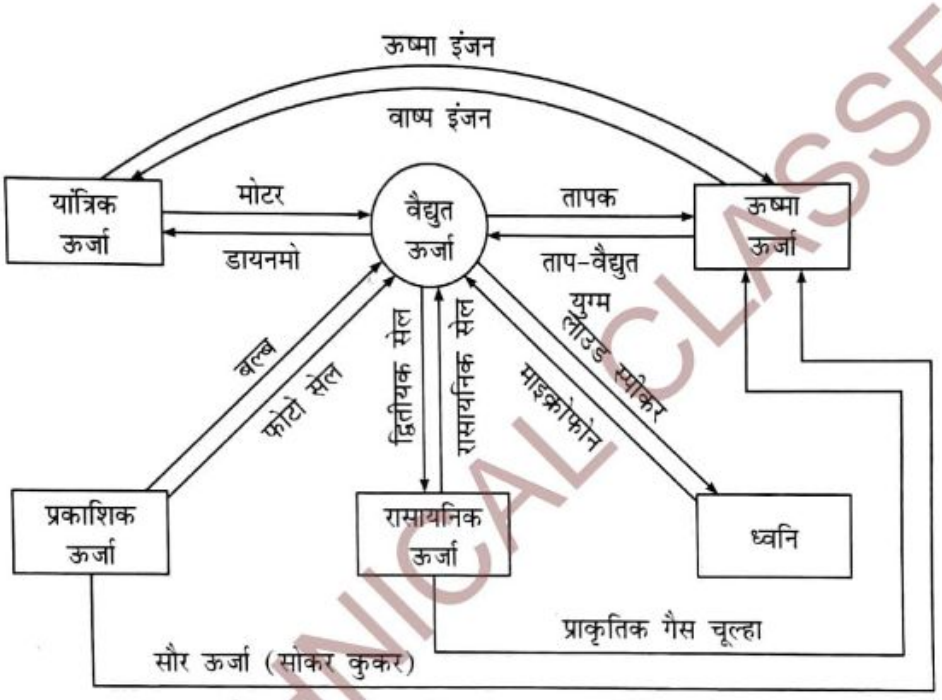
AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

§ 3.30 ऊर्जा का रूपान्तरण (Transformation of Energy)

ऊर्जा न तो उत्पन्न की जा सकती है और न ही नष्ट की जा सकती है मात्र इसका रूपान्तरण ही सम्भव है।

आइन्सटीन के द्रव्यमान-ऊर्जा सम्बन्ध $E = mc^2$ के अनुसार पदार्थ को ऊर्जा में $(e^- + e^+ \longrightarrow hv + hv)$ तथा ऊर्जा को पदार्थ $(hv \longrightarrow e^- + e^+$ यदि $hv > 1{\cdot}02$ MeV) में परिवर्तित कर सकते हैं।

सामान्य व्यावहारिक जीवन में विज्ञान के सामान्य अनुप्रयोगों से सामान्यत: निम्न प्रकार का ऊर्जा रूपान्तरण प्राप्त होता है—



चित्र 3.27

कुछ अन्य उदाहरण निम्न प्रकार हैं—

1. टोस्टर (toaster) द्वारा वैद्युत ऊर्जा को ऊष्मीय ऊर्जा में रूपान्तरित करते हैं।
2. सम्मिश्रक (Blender) द्वारा वैद्युत ऊर्जा को यान्त्रिक ऊर्जा में रूपान्तरित करते हैं।
3. सूर्य द्वारा नाभिकीय ऊर्जा को पराबैंगनी (Ultraviolet), अवरक्त (Infrared) और गामा ऊर्जा (Gamma energy) को सभी प्रकार के वैद्युत-चुम्बकीय ऊर्जा (electromagnatic energy) में रूपान्तरित किया जाता है।
4. हमारे शरीर द्वारा भोजन के माध्यम से प्राप्त रासायनिक ऊर्जा को यान्त्रिक एवं वैद्युत ऊर्जा में रूपान्तरित किया जाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

स्मरणीय बिन्दु
(Points to be Remembered)

1. **घर्षण बल** जब किसी पिण्ड का तल किसी दूसरे पिण्ड के तल पर फिसलता है तो प्रत्येक पिण्ड दूसरे पिण्ड पर ऐसा बल लगाता है जो पिण्डों के सम्पर्क तलों के समान्तर होता है तथा पिण्डों के गति का विरोध करता है।
2. सीमान्त घर्षण बल अभिलम्ब प्रतिक्रिया R के अनुक्रमानुपाती होता है। अत:

$$f_l \propto R$$

Scanned with CamScanner

3. सीमान्त घर्षण बल का मान सतहों के सम्पर्क क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है, परन्तु सम्पर्क सतहों की प्रकृति पर निर्भर करता है।
4. यदि घर्षण कोण θ हो, तो $\mu_l = \tan\theta$
5. झुके तल पर रखे पिण्ड में त्वरण $a = g\sin\theta - \mu g\cos\theta$
6. झुके तल पर रखे पिण्ड की ऊपर की ओर गति के लिए नैट बल

$$f = P - (mg\sin\theta + \mu mg\cos\theta)$$

जहाँ P लगाया गया बाह्य बल है।

7. कार्य-बल लगाकर किसी वस्तु को बल की दिशा में विस्थापित करने की क्रिया को कार्य कहते हैं। कार्य एक अदिश (Scalar) राशि है।
8. कार्य का MKS-पद्धति में मात्रक जूल, CGS पद्धति में मात्रक अर्ग है तथा इसकी विमा $[ML^2T^{-2}]$ है।
9. कार्य की माप सूत्र $W = \cos\theta \times \Delta S$ से करते हैं।
10. किसी कारक के कार्य करने की समय दर को शक्ति कहते हैं।

$$\text{शक्ति } (P) = \frac{\text{कुल कार्य}(W)}{\text{समय}(t)}$$

11. शक्ति का SI पद्धति में मात्रक वॉट है तथा CGS पद्धति में मात्रक अर्ग/सेकण्ड एवं F.P.S. पद्धति में मात्रक अश्व-शक्ति (Horse-power) है—

1 अश्व शक्ति (Horse-power) = 746 वॉट (लगभग)

12. कार्य का व्यवहारिक मात्रक, वॉट-घण्टा अथवा यूनिट है।
13. किसी वस्तु द्वारा कार्य करने की दक्षता (Capacity) को उसकी ऊर्जा कहते हैं।
14. ऊर्जा का मात्रक तथा कार्य का मात्रक एक समान होता है।
15. ऊर्जा एक अदिश राशि है इसकी विमा $[ML^2T^{-2}]$ होती है।
16. ऊर्जा संरक्षण का सिद्धान्त—किसी निकाय (System) की कुल ऊर्जा सदैव नियत रहती है अर्थात् न तो ऊर्जा उत्पन्न की जा सकती है और न ही नष्ट की जा सकती है। केवल ऊर्जा का स्वरूप बदला जा सकता है।

साधित आंकिक उदाहरण
(Solved Numerical Examples)

उदाहरण 1 : एक वस्तु 45° ढलान के एक खुरदरे अवनत तल पर फिसलती है। यदि इसमें लिया गया समय, समान झुकाव के एक चिकने तल में लिए गये समय का दो गुना हो, तो घर्षण गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल—माना खुरदरे अवनत तल पर नीचे की ओर त्वरण a_1 तथा समय t_1 एवं चिकने तल पर त्वरण a_2 तथा समय t_2 है, तो खुरदरे अवनत तल पर नीचे की ओर गति करने के लिए

चित्रानुसार,

$$mg\sin\theta - \mu R = ma_1$$

या
$$mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = ma_1 \quad \ldots(1)$$

(जहाँ m = फिसलने वाले पिण्ड का द्रव्यमान)

इसी प्रकार चिकने अवनत तल पर नीचे की ओर गति के लिए

$$mg\sin\theta = ma_2 \qquad (\because \mu = 0) \quad \ldots(2)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

समीकरण (1) को समीकरण (2) से भाग देने पर,

$$\frac{mg\sin\theta}{mg\sin\theta} - \frac{\mu mg\cos\theta}{mg\sin\theta} = \frac{a_1}{a_2}$$

$$1 - \mu\cot 45° = \frac{a_1}{a_2}$$

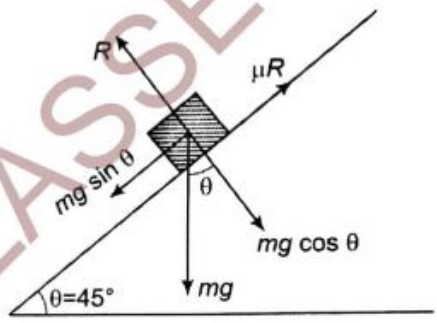
$$1 - \mu = \frac{a_1}{a_2} \qquad ...(3)$$

वस्तु द्वारा चली गयी दूरी

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \text{ से}$$

$$s = \frac{1}{2}a_1t_1^2 = \frac{1}{2}a_2t_2^2$$

या $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{t_2^2}{t_1^2} = \frac{1}{4}$$



a_1 / a_2 का मान समीकरण (3) में रखने पर

$$1 - \mu = \frac{1}{4}$$

$$\mu = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\mu = \frac{3}{4}$$

$$\mu = \mathbf{0 \cdot 75}$$

उदाहरण 2 : 2 किग्रा का एक टुकड़ा फर्श पर रखा है, घर्षण गुणांक 0·4 है। 2·5 N का एक बल टुकड़े पर क्षैतिज दिशा में लगाया जा रहा है।

(i) फर्श तथा टुकड़े के बीच में लगने वाले घर्षण बल की गणना कीजिए।

(ii) टुकड़े को गति देने के लिए आवश्यक न्यूनतम बल ज्ञात कीजिए।

हल—(i) फर्श तथा टुकड़े के बीच में लगने वाला घर्षण बल

$$f_s = \mu_S\ R$$

$$f_s = \mu_S\ mg$$

$$f_s = (0 \cdot 4) \times (2) \times (9 \cdot 8)$$

$$f_s = 7 \cdot 84 \text{ न्यूटन}$$

घर्षण बल

$$\boldsymbol{f_s = 7 \cdot 84 \text{ न्यूटन}}$$

(ii) टुकड़े को गति देने के लिए आवश्यक न्यूनतम बल = सीमान्त घर्षण बल

$$= 7 \cdot 84 \text{ N}$$

चूँकि 2·5 न्यूटन का बाह्य बल पहले से लगा है, अत: पिण्ड को गति देने के लिए $7 \cdot 84 - 2 \cdot 5 = 5 \cdot 34$ न्यूटन का अतिरिक्त बल और लगना पड़ेगा।

अत:

आवश्यक बल = 5·34 N

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 3 : 1·0 किग्रा द्रव्यमान का एक पिण्ड एक ट्रक में क्षैतिज तल पर रखा है। पिण्ड तथा तल के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0·6 है। यदि ट्रक का त्वरण 5 मीटर/सेकण्ड^2 हो, तो पिण्ड पर आरोपित घर्षण बल ज्ञात कीजिए।

हल—चूँकि ट्रक 5 m s^{-2} की दर से त्वरित गति कर रहा है, अत: ट्रक के अन्दर रखा पिण्ड भी उसी दर से त्वरित गति करेगा। अत: ट्रक के त्वरण के कारण पिण्ड पर आरोपित बल,

$$F = ma$$
$$F = 1 \times 5$$
$$F = 5\,\text{N}$$

पिण्ड में गति प्रारम्भ करने के लिए वांछित अधिकतम बल,

$$F_{\max} = \mu_s R$$
$$= \mu_s mg$$
$$= 0{\cdot}6 \times (1{\cdot}0 \text{ किग्रा॰} \times 9{\cdot}8 \text{ मीटर/सेकण्ड}^2)$$
$$F_{\max} = 5{\cdot}88\,\text{N}$$

चूँकि बाह्य बल F का परिमाण, पिण्ड में गति प्रारम्भ करने के लिए वांछित अधिकतम बल $F_{\max}$ से कम है, अत: पिण्ड नहीं फिसलेगा। पिण्ड पर लगने वाला घर्षण बल बाह्य बल के बराबर होगा, अत:

$$\boldsymbol{F_s = 5{\cdot}0\,\text{N}}$$

उदाहरण 4 : 3 kg द्रव्यमान का एक गुटका क्षैतिज से 30° कोण पर झुके हुए एक आनत तल पर स्थित है। गुटके तथा तल के बीच घर्षण गुणांक 0·6 है। गुटके पर लगने वाला घर्षण बल क्या होगा?

हल—चूँकि गुटका स्थिर है, अत: घर्षण बल स्थैतिक होगा,

∴ स्थैतिक घर्षण बल, $F_S = \mu_S R$

$$= \mu_S\, Mg\cos 30° \qquad [\because\ R = Mg\cos 30°]$$
$$= 0{\cdot}6 \times 3 \times 9{\cdot}8 \times \cos 30°$$
$$= \mathbf{15{\cdot}28\,N}$$

उदाहरण 5 : जल की बूँद जिसकी त्रिज्या 0·0015 mm है, वायु में गिर रही है। यदि वायु का श्यानता गुणांक $1{\cdot}8 \times 10^{-5}$ किग्रा/मीटर-सेकण्ड हो, तो बूँद का सीमान्त वेग क्या होगा? **(UP BTE 1998)**

(जल का घनत्व = $1{\cdot}0 \times 10^3$ किग्रा/मीटर^3, वायु का घनत्व = 0, g = 9·8 न्यूटन/किग्रा)

हल—जब जल की एक छोटी बूँद जिसकी त्रिज्या r तथा घनत्व P_w है; 0 घनत्व की श्यान वायु में स्वतंत्रतापूर्वक गिर रही है, तो उस पर तीन बल कार्य करते हैं—

(i) जल की बूँद पर गुरुत्वीय बल,

$$F_g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_w\, g \downarrow \qquad \text{(ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर)}$$

(ii) वायु का उत्प्लावन बल (upthrust)

$$F_u = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a\, g \uparrow \qquad \text{(ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर)}$$

(iii) स्टोक के नियम के अनुसार प्रतिरोधक श्यान बल

$$F_r = 6\pi.\eta.r.v \uparrow \qquad \text{(ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर)}$$

अन्तिम वेग प्राप्त करने पर चूँकि त्वरण शून्य होता है, अत: परिणामी बल,

$$F = 0$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$F_g - F_u - F_r = 0$$

अथवा $$F_r = F_g - F_u$$

या $$6\pi\,\eta.r.v = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_w g - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_a g$$

$$= \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_w - \rho_a).g$$

∴ सीमान्त वेग,

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_w - \rho_a).g / 6\pi\,\eta r$$

$$= \frac{2}{9} r^2 (\rho_w - \rho_a).g / \eta \qquad ...(i)$$

दिया है : $r = 0{\cdot}0015 \text{ mm} = 15 \times 10^{-7} \text{ m}$

$\rho_w = 1 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}, \rho_a = 0$

$\eta = 1{\cdot}8 \times 10^{-5} \text{kg.m}^{-1}\text{s}^{-1}$

$g = 9{\cdot}8 \text{ m/s}^2$

समीकरण (i) में यह मान प्रतिस्थापित करने पर;

सीमान्त वेग, $$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{(15 \times 10^{-7})^2 \times (10^3 - 0) \times 9{\cdot}8}{1{\cdot}8 \times 10^{-5}}$$

$$= \frac{4410}{16{\cdot}2} \times 10^{-6} = \mathbf{2{\cdot}72 \times 10^{-4} \text{ m/s}}$$

उदाहरण 6 : 5 kg का एक पिण्ड एक खुरदुरे क्षैतिज तल पर स्थित है और तल के समान्तर 3 N का बल पिण्ड पर लगाया जाता है। गणना कीजिए—(i) स्थैतिक घर्षण बल (ii) $0{\cdot}1 \text{ m/s}^2$ से पिण्ड को खींचने के लिए आवश्यक बल। घर्षण गुणांक $\mu = 0{\cdot}2$ तथा गुरुत्वीय त्वरण $= 0{\cdot}10 \text{ m/s}^2$. **(UPBTE 2001)**

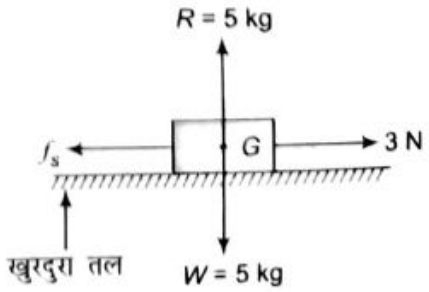
हल—दिया है : चित्रानुसार,

पिण्ड का भार, $W = 5 \text{ kg}$

गुरुत्वाकर्षण बल, $g = 0{\cdot}10 \text{ m/s}^2$

माना स्थैतिक घर्षण बल f_s है; तब

$$f_s = \mu R = 0{\cdot}2 \times 5 = 1 \text{ kg}$$



(ii) पिण्ड को खींचने के लिए आवश्यक बल

$$F = M \times g$$

$$= 5 \times 0{\cdot}10$$

$$= \mathbf{0{\cdot}5 \text{ kg}}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 7 : क्षैतिज से 60° कोण वाले एक अवनत तल पर m द्रव्यमान की एक वस्तु समान वेग से नीचे आती है। नत तल और वस्तु के बीच घर्षण गुणांक ज्ञात कीजिए। **(UPBTE 2005)**

हल—दिया है :

पिण्ड का द्रव्यमान $= m$

$$\theta = 60°$$

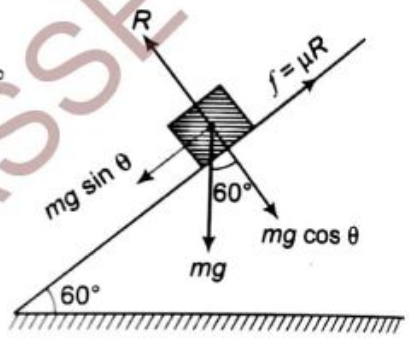
जब पिण्ड नीचे की ओर समान गति से फिसलता है, तो पिण्ड पर निम्न बल पर लगते हैं—

(i) पिण्ड का भार m नीचे की ओर

(ii) प्रतिक्रिया बल R ऊपर की ओर

(iii) घर्षण बल $f = \mu R$ नत तल के समान्तर ऊपर की ओर

चित्रानुसार, पिण्ड का भार दो घटकों में बाँटा जा सकता है—पहला $mg \sin 60°$ तथा दूसरा $mg \cos 60°$; इस प्रकार पिण्ड पर तल के समान्तर कुल बल



$$\mu R - mg \sin 60° = 0 \qquad ...(i)$$

तथा समान गति में पिण्ड के नीचे फिसलने पर लगा बल शून्य होगा,

अर्थात् $R = mg \cos 60°$

समीकरण (i) से,

$$\mu R = mg \sin \theta \text{ या}$$

$$\mu = \frac{mg \sin \theta}{R} \qquad ...(ii)$$

समीकरण (ii) में R का मान रखने पर,

$$\mu = \frac{mg \sin 60°}{mg \cos 60°} = \tan 60° = \sqrt{3}$$

अत: **घर्षण गुणांक $= \sqrt{3}$**

उदाहरण 8 : 2 kg का एक टुकड़ा फर्श पर रखा है। घर्षण गुणांक 0·4 है। 2·5 न्यूटन का एक बल टुकड़े पर क्षैतिज दिशा में लगाया गया है—

(i) फर्श तथा टुकड़े के बीच लगने वाले घर्षण बल की गणना करो।

(ii) टुकड़े को गति देने के लिए न्यूनतम बल ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है :

पिण्ड या टुकड़े का द्रव्यमान $m = 2$ kg

घर्षण गुणांक $\mu = 0{\cdot}4$

कार्यान्वित बल $P = 2{\cdot}5$ N

इस अवस्था में अभिलम्ब प्रतिक्रिया $R = 2$ kg के बराबर होगा। पिण्ड पर चरम घर्षण बल; पिण्ड की सम्भावित गति के विपरीत दिशा में $F = f_l = \mu R$ के बराबर कार्य करता है।

(i) अत: $F = \mu R = 0{\cdot}4 \times 2 = \mathbf{0{\cdot}8\ kg}$ या **8 N**

(ii) टुकड़े को गति देने के लिए न्यूनतम आवश्यक बल

$$P' = (F - P)$$

$$P' = 8 - 2{\cdot}5 = \mathbf{5{\cdot}5\ N}$$

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 9 : एक 45° वाले ढलान वाले खुरदुरे तल पर फिसलने के लिए एक द्रव्यमान, समान चिकने तल की अपेक्षा n गुना अधिक समय लेता है। गतिज घर्षण गुणांक का मान ज्ञात कीजिए। **(UPBTE 2006)**

हल—प्रश्नानुसार, दिया है :

$$\theta = 45°$$

माना खुरदुरे नत के लिए त्वरण एवं समय क्रमश: a_1 तथा t_1 है तथा नत चिकने तल के लिए त्वरण एवं समय क्रमश: a_2 तथा t_2 है। चित्रानुसार, खुरदुरे नत तल पर नीचे की ओर चलने के लिए,

$$mg\sin\theta - \mu R = ma_1 \quad \text{... (i)}$$

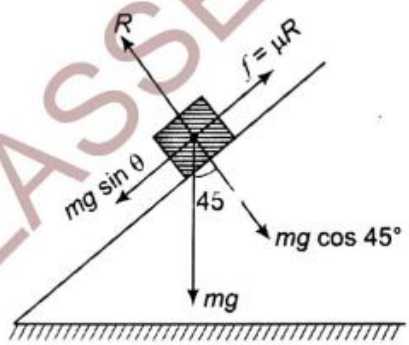
(m = पिण्ड का द्रव्यमान)

या $$mg\sin\theta - \mu\, mg\cos\theta = ma_1 \quad \text{... (ii)}$$

जहाँ पर $$R = \mu R = mg\cos\theta$$

इसी प्रकार, चिकने नत तल पर नीचे की ओर चलने के लिए,

$$mg\sin\theta = ma_2 \quad \text{... (iii)}$$



समीकरण (i) को (ii) से भाग देने पर,

$$\frac{mg\sin\theta}{mg\sin\theta} - \frac{\mu\, m\, g\cos\theta}{mg\sin\theta} = \frac{m\,a_1}{m\,a_2}$$

$$1 - \mu\cot\theta = \frac{a_1}{a_2} \text{ या } 1 - \mu\cot 45° = \frac{a_1}{a_2}$$

या $$1 - \mu = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{...(iv)}$$

सूत्र $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ से, पिण्ड द्वारा चली गई दूरी,

$$s = \frac{1}{2}a_1t_1^2 = \frac{1}{2}a_2t_2^2$$

या $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{t_2^2}{t_1^2} = \frac{t^2}{n^2t^2} = \frac{1}{n^2}$$

समीकरण (iv) में $\frac{a_1}{a_2}$ का मान रखने पर;

$$1 - \mu = \frac{1}{n^2} \quad \text{या} \quad \mu = 1 - \frac{1}{n^2}$$

अत: $$\mu = \left[1 - \frac{1}{n^2}\right]$$

उदाहरण 10 : 2 kg का एक गुटका क्षैतिज तल पर स्थित है। गुटके तथा तल के मध्य स्थैतिक एवं गतिक घर्षण गुणांक क्रमश: 0·15 तथा 0·12 है। गणना कीजिए—

(i) गुटके को गति देने के लिए न्यूनतम क्षैतिज बल।

(ii) गुटके को समरूप 0·8 m / s² त्वरण से चलने के लिए आवश्यक क्षैतिज बल। (g = 10 m / s²)

(UPBTE 2009)

हल—प्रश्नानुसार, दिया है :

गुटके का भार $= 2\text{ kg} \times 10 = 20\text{ N}$

स्थैतिक घर्षण गुणांक $= \mu_s = 0{\cdot}15$

गतिज घर्षण गुणांक $= \mu_d = 0{\cdot}12$

क्षैतिज बल की अभिलम्ब प्रतिक्रिया $R = 20\text{ N}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(i) गुटके को चलाने के लिए आवश्यक बल

$$F_1 = \mu_s \times R = 0.15 \times 20$$

$$= \mathbf{3\ N}$$

(ii) गुटके को $0.8\ m\ s^{-2}$ के त्वरण से चलाने हेतु आवश्यक बल

$$F_2 = \mu_d \times R \times a$$

$$= 0.12 \times 20 \times 0.80$$

$$F_2 = \mathbf{1.92\ N}$$

उदाहरण 11 : 6 न्यूटन का बल लगाने से किसी वस्तु में विस्थापन 4 मीटर होता है। किये गये कार्य की गणना कीजिये।

हल—प्रश्नानुसार, $F = 6$ न्यूटन, $S = 4$ मीटर

अत: कार्य $(W) = F \times S = 6 \times 4 =$ **24 जूल**

उदाहरण 12 : 60 किलोग्राम का एक व्यक्ति 5 मीटर ऊँची दीवार पर 10 मिनट में चढ़ता है। व्यक्ति द्वारा किया गया कार्य बताइये।

हल— कार्य = भार × ऊँचाई

$$= mg \times h$$

$$= 60 \times 9.8 \times 5$$

$$= \mathbf{2940}$$ जूल

उदाहरण 13 : 8 मेगावॉट का एक यन्त्र 5 मिनट में कितना कार्य कर सकता है ?

हल—प्रश्नानुसार, शक्ति $P = 8$ मेगावॉट

$$= 8 \times 10^6 \text{ वॉट}$$

अत: यन्त्र द्वारा 5 मिनट में किया गया कार्य

$$W = P \times t = 8 \times 10^6 \times \frac{5}{60} \text{ वॉट-घण्टा}$$

$$= \mathbf{0.67 \times 10^6}$$ **वॉट-घण्टा**

उदाहरण 14 : एक 10 ग्राम की गोली 200 मीटर/से के वेग से चलती हुयी किसी दीवार से टकराती है। गोली की गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिये।

हल— प्रश्नानुसार $m = 10$ ग्राम $= 10^{-2}$ किलोग्राम, $v = 200$ मी/से

अत: गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-2} \times 200 \times 200$ जूल

$$= \mathbf{200}$$ जूल

उदाहरण 15 : 12 किग्रा की एक वस्तु किसी स्थिर अक्ष के परित : घूम रही है। यदि वस्तु का उस अक्ष के परित : जड़त्व आघूर्ण 0·7 किग्रा मी^{2} तथा कोणीय वेग 2π रेडियम/से हो तो वस्तु की घूर्णन गतिज ऊर्जा क्या होगी?

हल— घूर्णन गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}I\omega^2$

$$= \frac{1}{2} \times 0.7 \times (2\pi)^2$$

$$= \mathbf{13.8}$$ जूल

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 16 : एक रूक्ष क्षैतिज समतल पर 50 किग्रा की एक भारी वस्तु रखी है। वस्तु तथा समतल के बीच गतिज घर्षण गुणांक 0·5 है। यदि वस्तु को स्थिर चाल से 2 मीटर विस्थापित किया जाये तो किये गये कार्य की गणना कीजिए, जबकि बल–

(i) समतल के समान्तर

(ii) क्षैतिज से 30° के कोण पर कार्यरत है।

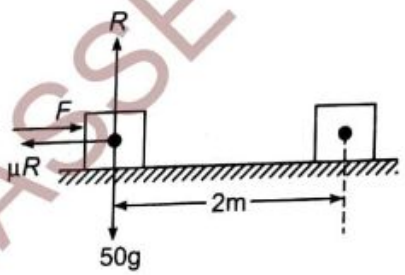
हल— (i) कार्यरत बल समतल के समान्तर है, तब

$$F - \mu_k \cdot R = 0$$

अर्थात्
$$F = \mu_k \cdot R = \mu_k \cdot mg$$
$$= 0{\cdot}5 \times 50 \times 9{\cdot}8 = 245 \text{ न्यूटन}$$

अत: वस्तु को 2 मीटर विस्थापित करने में किया गया कार्य

$$W = 245 \times 2 = \mathbf{490 \text{ जूल}}$$

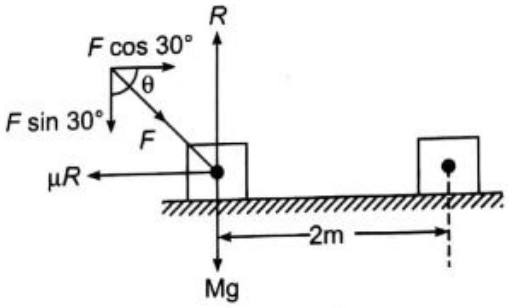


चित्र A

(ii) कार्यरत बल क्षैतिज से 30° के कोण पर है तब घर्षण बल

$$F\cos\theta = \frac{\mu_k mg}{1 - \mu_k \tan\theta}$$

अथवा
$$F\cos 30° = \frac{0{\cdot}5 \times 50 \times 9{\cdot}8}{1 - 0{\cdot}5 \times \tan 30°}$$
$$= \frac{245}{1 - 0{\cdot}5 \times 0{\cdot}577}$$
$$= \frac{245}{0{\cdot}71} = 345 \text{ न्यूटन}$$



चित्र B

वस्तु को 2 मीटर विस्थापित करने में किया गया कार्य

$$W = F\cos\theta \times S$$
$$= 345 \times 2$$
$$= \mathbf{690 \text{ जूल}}$$

उदाहरण 17 : एक धातु के तार से 6 किग्रा भार लटकाने पर उसकी लम्बाई में 0·6 सेमी की वृद्धि होती है। तार का बल नियतांक तथा उसे खींचने में किये गये कार्य की गणना कीजिए।

हल—तार से लटकाया गया भार $= mg = 6$ किग्रा

चूँकि $mg = Kx$

$$\therefore \quad \text{बल नियतांक } K = \frac{mg}{x} = \frac{6}{0{\cdot}6 \times 10^{-2}} = 10^3 \text{ न्यूटन/मीटर}$$

तार को खींचने में किया गया कार्य

$$W = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2} \times 10^3 \times (0{\cdot}6 \times 10^{-2})^2$$
$$= \frac{1}{2} \times 10^3 \times \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} \times 10^{-2} \times 10^{-2}$$
$$= 0{\cdot}18 \times 10^{-1}$$
$$= \mathbf{1{\cdot}8 \times 10^{-2} \text{ जूल}}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 18 : 16 किग्रा का एक पिण्ड घर्षण रहित क्षैतिज तल पर 8 मीटर/सेकण्ड के वेग से खिसकता है। मार्ग में स्थित स्प्रिंग को दबाने पर यह विराम अवस्था में आ जाता है। यदि स्प्रिंग का बल नियतांक 144 न्यूटन/मीटर हो तो बताइये कि स्प्रिंग को कितना दबाया गया है?

हल—पिण्ड की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2$

पिण्ड द्वारा विरामावस्था तक आने में किया गया कार्य इसकी गतिज ऊर्जा के बराबर होगा। स्प्रिंग को उसकी सामान्य लम्बाई से x दूरी संपीडित करने में किया गया कार्य

$$W = \frac{1}{2}kx^2$$

अत: $$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

अथवा $$x = v\sqrt{\left(\frac{m}{k}\right)}$$

$$= 8\sqrt{\left(\frac{16}{144}\right)} = 8 \times \frac{4}{12} = \frac{8}{3} = \mathbf{2{\cdot}67 \text{ मीटर}}$$

उदाहरण 19 : 2·0 किग्रा का एक पिण्ड 0·4 मीटर की ऊँचाई से एक स्प्रिंग पर गिराया जाता है। यदि स्प्रिंग का बल नियतांक 1960 न्यूटन/मीटर हो तो ज्ञात कीजिये कि स्प्रिंग अधिकतम कितना दब जायेगी?

हल—माना पिण्ड के गिरने से स्प्रिंग x मीटर दबती है, तब स्प्रिंग को x मीटर दबाने में किया गया कार्य

$$W = \frac{1}{2}Kx^2$$

यह कार्य पिण्ड को स्प्रिंग पर गिराने से प्राप्त ऊर्जा के बराबर है अर्थात्

$$mg\,(h + x) = \frac{1}{2}Kx^2$$

अथवा $$2 \times 9{\cdot}8 \times (0{\cdot}4 + x) = \frac{1}{2} \times 1960 \times x^2$$

अथवा $$0{\cdot}4 + x = 50x^2$$

अथवा $$\frac{4}{10} + x = 50x^2$$

अथवा $$250x^2 - 5x - 2 = 0$$

अथवा $$x = -\frac{2}{25} \quad \text{अथवा} \quad \frac{1}{10}$$

अर्थात् $$x = \frac{1}{10} \quad \text{मीटर} = 0{\cdot}1 \text{ मीटर}$$

अत: स्प्रिंग **0·1 मीटर दबेगी।**

उदाहरण 20 : 10 ग्राम की गोली 360 मीटर/से के वेग से चलती हुयी लकड़ी के एक गुटके से टकराती है तथा उसमें 10 सेमी धँस जाती है। गोली का औसत मंदन क्या होगा?

हल—गोली की गतिज ऊर्जा, अवरोधक बलों के विरुद्ध कार्य करने में खर्च हो जाती है अर्थात्

$$\frac{1}{2}mv^2 = F \times S$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

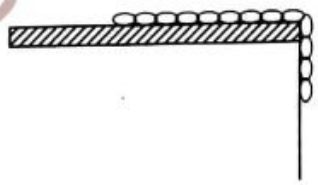
अथवा $$F = \frac{mv^2}{2S} = \frac{0{\cdot}01 \times (360)^2}{2 \times 0{\cdot}1}$$

$$= 360 \times 18 \text{ न्यूटन}$$

$\therefore$ औसत मंदन $a = \frac{F}{m} = \frac{360 \times 18}{0{\cdot}01} = \mathbf{6{\cdot}48 \times 10^5}$ **मी/से^{2}**

उदाहरण 21 : एक लोहे की चेन किसी घर्षण रहित मेज पर इस प्रकार स्थित है कि उसका $\frac{1}{3}$ भाग मेज के किनारे से नीचे लटका हुआ है। यदि चेन की लम्बाई L तथा द्रव्यमान M हो तब चेन के लटकने वाले भाग को मेज से ऊपर खींचने में कितना कार्य करना होगा?

हल—प्रश्नानुसार, किनारे से नीचे लटकी चेन का द्रव्यमान $= \frac{M}{3}$



लटकी हुयी चेन के गुरुत्व केन्द्र की मेज के किनारे से दूरी

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

लटकी हुयी चेन का भार $\left(\frac{Mg}{3}\right)$ चेन के गुरुत्व केन्द्र पर कार्यरत है।

अत: लटकी हुयी चेन को खींचने में किया गया कार्य

$$W = \text{भार} \times \text{विस्थापन}$$

$$= \frac{Mg}{3} \times \frac{L}{6} = \frac{MgL}{18}$$

$$\boldsymbol{W = \frac{MgL}{18}}$$

उदाहरण 22 : एक पम्प मोटर की सामर्थ्य 2 किलोवॉट है। वह कितना पानी प्रति मिनट 10 मीटर की ऊँचाई तक उठा सकता है?

हल—माना पम्प m किग्रा पानी प्रति सेकण्ड उठा सकता है अत: पम्प द्वारा 1 सेकण्ड में किया गया कार्य

$$= 2 \text{ किलोवॉट} = 2000 \text{ वॉट} = 2000 \text{ जूल/से}$$

m किग्रा पानी को 10 मीटर ऊपर उठाने में पम्प द्वारा किया गया कार्य

$$W = mgh$$

$$= m \times 9{\cdot}8 \times 10 \text{ जूल}$$

$\therefore$ $m \times 98 = 2000$

या $$m = \frac{2000}{98} = \mathbf{20{\cdot}4}$$ **किग्रा**

$\therefore$ पम्प द्वारा 1 मिनट में उठाये गये पानी का द्रव्यमान

$$= 20{\cdot}4 \times 60 = \mathbf{1224}$$ **किग्रा**

उदाहरण 23 : एक वस्तु 45° ढलाने के एक खुरदरे अवनत (Inclined) तल पर फिसलती है। यदि इसमें लिया गया समय एकसमान चिकने तल में लिये गये समय का दो गुना हो, तो घर्षण गुणांक का मान ज्ञात कीजिये।

हल—माना खुरदरे तल पर नीचे की ओर त्वरण a_1 तथा समय t_1 एवं चिकने तल पर त्वरण a_2 व समय t_2 है तब खुरदरे नत तल पर नीचे की ओर गति के लिए

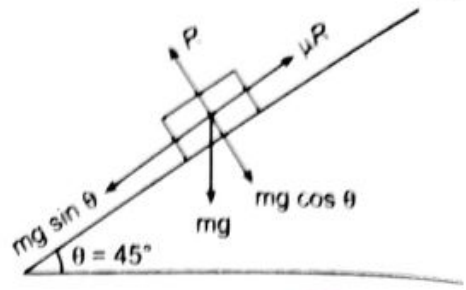
AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta = ma_1 \quad \ldots(1)$$

तथा चिकने नत तल पर गति के लिये

$$mg\sin\theta = ma_2 \quad \ldots(2)$$



समीकरण (1) को (2) से भाग देने पर,

$$\frac{mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta}{mg\sin\theta} = \frac{a_1}{a_2}$$

अथवा $$1 - \mu\cot\theta = \frac{a_1}{a_2}$$

अथवा $$1 - \mu\cot 45^\circ = \frac{a_1}{a_2}$$

अथवा $$1 - \mu = \frac{a_1}{a_2}$$

चली गयी दूरी $$S = \frac{1}{2}a_1t_1^2 = \frac{1}{2}a_2t_2^2$$

या $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{t_2^2}{t_1^2} = \frac{1}{4}$$

$\therefore\ 1-\mu = \frac{1}{4}$ अथवा **घर्षण गुणांक** $(\mu) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \mathbf{0{\cdot}75}$

उदाहरण 24 : एक बल $\vec{F} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$ एक द्रव्यमान पर कार्य करके उसमें $\vec{S} = 3\hat{i} - \hat{j}$ विस्थापन उत्पन्न करता है, जहाँ F न्यूटन में तथा S मीटर में है। किये गये कार्य की गणना कीजिये।

हल—किया गया कार्य

$$W = F \cdot S = (4\hat{i} + 2\hat{j})\cdot(3\hat{i} - j)$$

$$= 12 - 2 = \mathbf{10}\ \text{जूल}$$

उदाहरण 25 : m किग्रा का एक पिण्ड θ° ढलान वाले एक चिकने तल पर स्थित है इसे तल पर ऊपर की ओर v स्थिर चाल से खींचने के लिए आवश्यक सामर्थ्य ज्ञात कीजिये।

हल—प्रश्नानुसार,

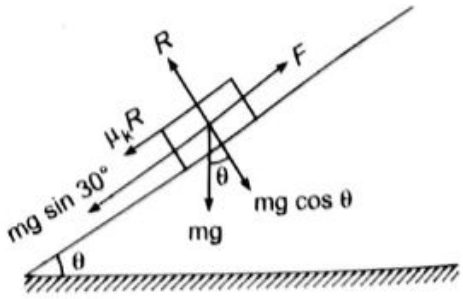
$$F = \mu_k \cdot R + mg\sin\theta$$

तथा $$R = mg\cos\theta$$

$$F = \mu_k\,(mg\cos\theta) + mg\sin\theta$$

ऊपर की ओर नियत चाल v से खींचने के लिए आवश्यक सामर्थ्य

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F\cdot S}{t} = F\cdot v$$



अथवा $$P = (\mu_k \cdot mg\ \cos\theta + mg\ \sin\theta)v$$

उदाहरण 26 : क्षैतिज से 30° कोण पर झुके नत तल पर एक 2 किग्रा द्रव्यमान का टुकड़ा रखा है। टुकड़े एवं तल के मध्य घर्षण गुणांक 0·15 है। इसे 5·0 मीटर दूरी पर समान चाल से तल पर ऊपर की ओर खींचने के लिए लगाये गये बल द्वारा किये गये कार्य की गणना कीजिये।

हल—माना पिण्ड को ऊपर की ओर खींचने के लिए तल के समान्तर ऊपर की ओर लगा बल F है तथा तल की अभिलम्बीय प्रतिक्रिया R है, तब चित्रानुसार

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$F = \mu R + 2g \sin 30^\circ \qquad \text{तथा } R = 2g \cos 30^\circ$$

$$= \mu\, 2g \cos 30^\circ + 2g \sin 30^\circ$$

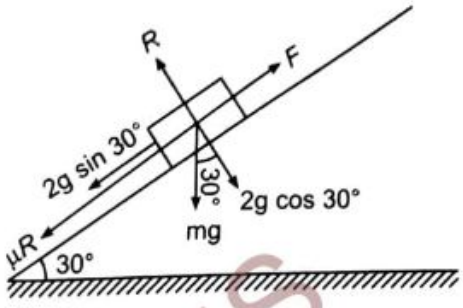
$$= 2g\,(\mu \cos 30^\circ + \sin 30^\circ)$$

$$= 2 \times 9{\cdot}8 \left(0{\cdot}15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 9{\cdot}8\,(0{\cdot}15 \times 1{\cdot}732 + 1)$$

$$= 9{\cdot}8\,(0{\cdot}1299 + 1)$$

$$= 12{\cdot}346 \text{ न्यूटन}$$



पिण्ड को नत तल में ऊपर की ओर 5 मीटर विस्थापित करने में किया गया कार्य

$$W = \text{बल} \times \text{दूरी} = F \times S = 12{\cdot}346 \times 5$$

$$= \mathbf{61{\cdot}73 \text{ जूल}}$$

उदाहरण 27 : एक स्टीमर इंजन की निर्गत होने वाली शक्ति 2500 वॉट है। यह स्टीमर 7·2 किमी/घण्टा की नियत चाल से चल रहा है। स्टीमर पर लगने वाले बल की गणना कीजिये।

हल—प्रश्नानुसार,

स्टीमर की निर्गत शक्ति = 2500 वॉट

स्टीमर की चाल = 7·2 किमी/घण्टा $= \dfrac{7{\cdot}2 \times 1000}{60 \times 60}$ मी/सेमी = 2 मी/से

सूत्र $\qquad P = \dfrac{W}{t}$ से, $P = \dfrac{F \cdot S}{t} = F \cdot v$

अथवा $\qquad$ बल $(F) = \dfrac{P}{v} = \dfrac{2500}{2} = \mathbf{1250}$ **न्यूटन**

अभ्यास (Exercises)

1. घर्षण बल को परिभाषित कीजिए।
2. घर्षण का कारण क्या है?
3. स्थैतिक, सीमान्त व गतिक घर्षण से आप क्या समझते हैं?
4. घर्षण कोण को परिभाषित कीजिए।
5. घर्षण गुणांक का SI मात्रक तथा विमा बताइए।
6. गाड़ियों के पहिये वृत्ताकार क्यों बनाए जाते हैं?
7. श्यानता गुणांक की परिभाषा देते हुए द्रव की श्यानता ज्ञात करने के लिए सूत्र की व्युत्पत्ति कीजिए। **(UPBTE 2012)**
8. स्टोक का नियम लिखते हुए विवेचना कीजिए। **(UPBTE 2006)**
9. श्यानता से आप क्या समझते हैं? द्रवों व गैसों में श्यानता क्यों होती है? श्यानता गुणांक ज्ञात करने के लिए स्टोक का नियम किस प्रकार प्रयुक्त किया जाता है? **(UPBTE 2012)**
10. कार्य से क्या तात्पर्य है? इसकी माप के लिए सूत्र स्थापित कीजिये।
11. कार्य का मात्रक बताइये। C.G.S. तथा M.K.S. मात्रकों में सम्बन्ध लिखिये।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

12. शक्ति से आप क्या समझते है? शक्ति तथा ऊर्जा में अन्तर लिखिये।
13. वॉट तथा अश्व शक्ति मे क्या सम्बन्ध है?
14. स्प्रिंग की स्थितिज ऊर्जा के सूत्र $U = \frac{1}{2}kx^2$ का निगमन कीजिए।
15. वृत्ताकार पथ पर एकसमान रेखीय चाल से चल रहे किसी पिण्ड द्वारा एक पूर्ण चक्कर लगाने में किया गया कार्य कितना होगा? (**उत्तर**—शून्य)
16. यदि किसी वस्तु का वेग दो गुना कर दिया जाये तो वस्तु की गतिज ऊर्जा कितने गुना हो जायेगी? (**उत्तर**—4 गुना)
17. कार्य की विमा लिखिये।
18. क्या किसी पिण्ड मे संवेग की उत्पत्ति बिना ऊर्जा के सम्भव है? (**उत्तर** : नहीं)
19. घड़ी में चाबी भरने पर कौन-सी ऊर्जा संचित होती है? (**उत्तर** : स्थितिज ऊर्जा)
20. ऊर्जा से आप क्या समझते हैं? गतिज तथा स्थितिज ऊर्जा को संक्षेप में समझाइये।
21. ऊर्जा संरक्षण का नियम लिखिये।
22. 250 ग्राम द्रव्यमान की एक वस्तु 100 मीटर/सेकण्ड के वेग से चल रही है। इसकी गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए। (**उत्तर** : 1250 जूल)
23. 2 किग्रा द्रवयमान का पिण्ड 10 मीटर/सेकण्ड के वेग से चलता हुआ एक आदर्श भारहीन स्प्रिंग से टकराता है तथा उसमें 25 सेमी का संपीडन उत्पन्न करता है। स्प्रिंग का बल नियतांक ज्ञात कीजिए। (**उत्तर** : 3200 न्यूटन/मीटर)
24. 1 किलोवाट मोटर द्वारा 10 मीटर गहरे कुएँ से प्रति सेकण्ड कितना पानी प्राप्त हो सकता है? (**उत्तर** : 10·2 किग्रा)
25. एक रेलगाड़ी जिसका द्रव्यमान 12×10^5 किग्रा है समान गति से चल रही है। यह 2 किमी दूरी पर स्थित दो बिन्दुओं के मध्य से 2 मिनट में गुजरती है। रेलगाड़ी की गतिज ऊर्जा ज्ञात करो। (**उत्तर** : $1{\cdot}815 \times 10^5$ जूल)
26. 8 किग्रा द्रव्यमान के एक पिण्ड को बाह्य बल F द्वारा क्षैतिज तल में खींचा जाता है। पिण्ड का त्वरण ज्ञात कीजिए जबकि बाह्य बल (i) 6 न्यूटन (ii) 31·36 न्यूटन (iii) 54·7 न्यूटन हो। पिण्ड तथा क्षैतिज तल के मध्य स्थैतिक घर्षण गुणांक 0·4 है। [**उत्तर** : शून्य, शून्य, 2·92 मी/से^{2}]
27. 2 किग्रा द्रव्यमान का एक पिण्ड क्षैतिज से 30° कोण पर झुके हुए एक आनत तल पर स्थित है। पिण्ड तथा तल के बीच घर्षण गुणांक 0·7 है। पिण्ड पर लगने वाला घर्षण बल क्या होगा? [**उत्तर** : 11·88 न्यूटन]
28. क्षैतिज से 45° कोण वाले एक अवनत तल पर m द्रव्यमान की एक वस्तु समान वेग से नीचे आती है। नत तल पर तथा वस्तु के मध्य घर्षण गुणांक ज्ञात कीजिए। [**उत्तर** : 1·732]
29. एक पानी की बूँद जिसकी त्रिज्या 0·4 मिमी है, हवा में 2 मी०/से० के सीमान्त वेग से गिर रही है। यदि हवा की श्यानता 16×10^{-6} प्वाइज़ हो तो हवा द्वारा लगाया गया प्रतिरोधी बल ज्ञात कीजिए। [**उत्तर** : $2{\cdot}41 \times 10^{-6}$ न्यूटन]
30. 0·4 mm के अंतराल पर द्रव की दो परतों के मध्य सापेक्ष गति 1 cm/s है। वेग प्रवणता ज्ञात कीजिए। यदि द्रव की श्यानता 0·008 Pa-s तथा परतों का क्षेत्रफल 12 cm^2 हो, तो श्यान बल ज्ञात कीजिए।

आंकिक प्रश्नों के संक्षिप्त हल

(26) (i) पिण्ड पर लगने वाला सीमान्त घर्षण, $f_s = \mu_s R = \mu_s \times mg$
$= 0{\cdot}4 \times 8 \times 9{\cdot}8$
$= 31{\cdot}36$ न्यूटन

इसलिये 6 न्यूटन का बाह्य बल लगाने पर घर्षण बल भी 6 न्यूटन होगा तथा पिण्ड स्थिर रहेगा। अत: **त्वरण शून्य** होगा।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(ii) ∵ $F - f_s = m \times a$

अत: $31 \cdot 36 - 31 \cdot 36 = ma$

∴ $a = 0$

(iii) ∵ $F - f_s = m \times a$

$54 \cdot 7 - 31 \cdot 36 = 8 \times a$

अत: $a = 2 \cdot 92$ **मीटर/सेकण्ड^2**

(27) ∵ $f = \mu mg \cos\theta$

अत: $f = 0 \cdot 7 \times 2 \times 9 \cdot 8 \times \cos 30°$

$f = 11 \cdot 88$ **न्यूटन**

(28) चित्रानुसार $\mu R - mg \sin 45° = 0$ ... (i)

तथा $R = mg \cos 45°$

∵ $\mu = \dfrac{mg \sin\theta}{R}$ ... (ii)

समीकरण (ii) में R का मान रखने पर

$$\mu = \frac{mg \sin 45°}{mg \cos 45°} = \tan 45° = 1$$

अत: **घर्षण गुणांक = 1**

(29) सूत्र $F = 6\pi\eta rv$ से $F = 6 \times \dfrac{22}{7} \times 16 \times 10^{-5} \times 0 \cdot 4 \times 10^{-3} \times 2$

$= 2 \cdot 41 \times 10^{-6}$ **न्यूटन**

(30) वेग प्रवणता $= \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = \dfrac{0 \cdot 01}{0 \cdot 0004} = 25/s$

तथा, श्यान बल $F = \pm \eta A \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$

$= 0 \cdot 008 \times 12 \times 10^{-4} \times 25 = 2 \cdot 4 \times 10^{-4}$ **न्यूटन**

❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

घूर्णन गति

Chapter 4 (Rotational Motion)

SYLLABUS

4.1 *Concept of translatory and rotatory motions with examples*

4.2 *Definition of torque with examples*

4.3 *Angular momentum, Conservation of angular momentum (quantitative) and its examples*

4.4 *Moment of inertia and its physical significance, radius of gyration for rigid body, Theorems of parallel and perpendicular axes (statements only), moment of inertia of rod, disc, ring and sphere (hollow and solid) (Formulae only). Concept of Flywheel.*

4.5 *Rotational kinetic energy, Rolling of sphere on the slant plane.*

4.6 *Comparison of linear motion and rotational motion.*

4.7 *Application of rotational motions in transport vehicles, and machines.*

AKG TECHNICAL CLASSES

§ 4.1 परिचय (Introduction)

प्रकृति के गूढ़ रहस्यों की खोज में एक सबसे महत्वपूर्ण उपलब्धि थी—अणुओं तथा परमाणुओं की संरचना एवं उनके अवयवी कणों की जानकारी (knowledge of subatomic domain of atom and molecules)। मूल कणों की खोज के बाद सबसे पहला यक्ष प्रश्न था कि जब प्रकृति के सभी पदार्थों में मूल कण एक जैसे ही हैं तो उनसे निर्मित पदार्थ भिन्न-भिन्न कैसे हो गए? इस प्रश्न का समाधान भौतिकी की शाखा—घन भौतिकी (Solid state Physics) में सुलझायी गयी। घन भौतिकी के अनुसार सभी अवयवी कण परस्पर अन्योन्य क्रियाओं एवं बलों से बँधे होते हैं; जिससे कि वे परमाणुओं अथवा अणुओं की संरचना का एक नियत समूह बनाते हैं जिसे आव्यूहन (Array) कहते हैं। अणुओं-परमाणुओं का यह विशिष्ट आव्यूहन ही पदार्थों को भिन्न-भिन्न बनाता है; जैसे रबड़, लोहा, मोम आदि।

§ 4.2 दृढ़ पिण्ड (Rigid Body)

यदि किसी पिण्ड पर बाह्य बल लगाने पर पिण्ड के अवयवी कणों की सापेक्ष स्थितियाँ अपरिवर्तित (स्थिर) रहती हैं अर्थात् इनके कणों के बीच कोई पारस्परिक विस्थापन नहीं होता है तो इस पिण्ड को दृढ़ पिण्ड कहते हैं। वास्तव में कोई भी पिण्ड पूर्णत: दृढ़ नहीं होता है, परन्तु सामान्यत: ठोस पिण्डों (रबड़, गीली मिट्टी, इत्यादि को छोड़कर अन्य) को दृढ़ पिण्ड मान लिया जाता है; क्योंकि इस पर बाह्य बल लगाने पर इसके कणों में होने वाला सापेक्ष विस्थापन बहुत कम होता है, जिसे नगण्य माना जा सकता है। साधारण बोलचाल में पिण्ड का तात्पर्य दृढ़ पिण्ड से ही होता है।

"When an external force is applied on a body and there is no relative displacement between particles of the body, such a body is called a rigid body. In fact no real body is perfectly rigid."

§ 4.3 बल आघूर्ण * (Moment of a Force or Torque)

यदि किसी अक्ष (axis) के किसी बिन्दु से कीलकित (pivoted) किसी दृढ़ पिण्ड पर कोई बल लगाया जाए तो साधारणत: वह पिण्ड उस अक्ष के परित: घूमने की प्रवृत्ति रखता है। बल की इस प्रवृत्ति, अर्थात् पिण्ड को किसी अक्ष के परित: घुमाने की प्रवृत्ति को जिस राशि द्वारा मापा जाता है; उसे बल आघूर्ण कहते हैं तथा प्रतीक τ (tau) से प्रदर्शित करते हैं, अर्थात्

* आघूर्ण का शाब्दिक अर्थ है—घूमता हुआ, चक्कर खाता हुआ, आओ घूमें अर्थात् कोई भी ऐसी भौतिक राशि (जैसे बल, द्रव्यमान आदि) जो किसी निकाय या पिण्ड पर आरोपित हो तथा उसमें घूर्णन का प्रभाव उत्पन्न करे अर्थात् उस पिण्ड को किसी अक्ष के परित: घुमा दे या घुमाने का प्रयास करे तो इसे उस भौतिक राशि का आघूर्ण कहते हैं तथा इसका मान घूर्णन का प्रभाव उत्पन्न करने वाली भौतिक राशि तथा घूर्णन बिन्दु से क्रिया रेखा की लम्बवत् दूरी के गुणनफल के बराबर होता है। जैसे—बल आघूर्ण $= F \times r$, बलयुग्म का आघूर्ण $= c \times r$, द्रव्यमान आघूर्ण $= m \times r$, पिण्ड के रेखीय संवेग का आघूर्ण $= P \times r = mv \times r$, जड़त्व-आघूर्ण $= mr \times r = mr^2$ आदि।

Scanned with CamScanner

"किसी बाह्य बल द्वारा किसी वस्तु को किसी अक्ष के चारों ओर घुमाने के प्रभाव (turning effect) को उस बल का आघूर्ण या बल आघूर्ण (Moment of Force or Torque) कहते हैं तथा इसे τ (tau) से प्रदर्शित करते हैं।" इसकी माप घूर्णन अक्ष या घूर्णन बिन्दु के परित: घुमाने के लिए पिण्ड पर आरोपित बल तथा घूर्णन बिन्दु से बल की क्रिया रेखा* की लम्बवत् दूरी के गुणनफल से की जाती है।

"A measure of the turning effect produced by a force about an axis. The magnitude of the moment is the product of the force and the perpendicular distance from the axis to line of action of the force."

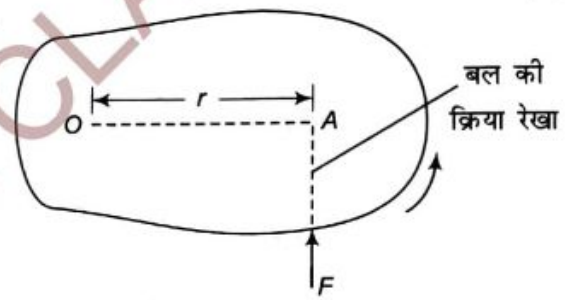
(An object will be in rotational equilibrium if the algebraic sum of all the moments of the forces on it about any axis is zero.)

यदि एक वस्तु सरल रेखा में चलने को स्वतंत्र नहीं है परन्तु किसी बिन्दु 'O' के चारों ओर गति करने के लिए स्वतंत्र हो, तो चित्रानुसार बाह्य बल F लगाने पर, वस्तु बल की दिशा में न चलकर बिन्दु 'O' के चारों ओर घूम जाएगी या घूमने का प्रयत्न करेगी। अत: आघूर्ण या बल आघूर्ण

$$\tau = \text{बल} \times \text{बिन्दु से बल की लम्बवत् दूरी}$$

$$\tau = F \times r \qquad \ldots (1)$$

यदि बल वस्तु को वामावर्त (anticlockwise) घुमाने की प्रवृत्ति रखता हो तो बल आघूर्ण धनात्मक (positive) कहलाता है, और यदि वह वस्तु को दक्षिणावर्त (clockwise) घुमाने की प्रवृत्ति रखता है तो बल आघूर्ण ऋणात्मक कहलाता है। बल आघूर्ण एक सदिश राशि है।



चित्र 4.1

बल आघूर्ण का S.I. मात्रक—न्यूटन-मीटर (N-m) तथा बल आघूर्ण का विमीय सूत्र—$[ML^2T^{-2}]$ होता है।

बल आघूर्ण का दैनिक जीवन में प्रभाव—

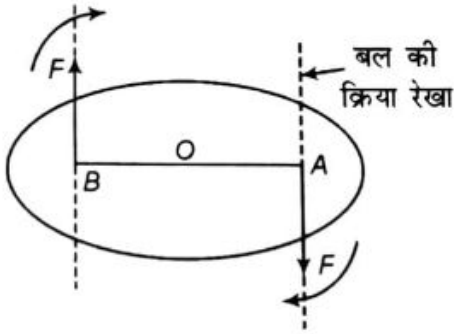
1. किवाड़ों पर हैण्डिल कब्जे से दूर लगाये जाते हैं।
2. गेहूँ आदि पीसने की घरेलू चक्की में हत्था (handle) परिधि के पास या केन्द्र से दूर होता है, ताकि चलाने के लिए कम बल लगाना पड़े।
3. पेंचकस का हत्था चौड़ा बनाया जाता है।

§ 4.4 बलयुग्म (Couple)

"दो समान, विपरीत एवं समान्तर बलों के युग्म को जिनकी क्रिया रेखाएँ (lines of action) एक सीध में नहीं हैं, बलयुग्म कहते हैं।"

दोनों बलों की क्रिया रेखाओं के मध्य लम्बवत् दूरी को बलयुग्म की भुजा (Arm of Couple) कहते हैं। बलयुग्म के किसी एक बल तथा बलयुग्म की भुजा के गुणनफल को बलयुग्म का आघूर्ण (moment of couple) कहते हैं।

अर्थात् $C = F \times AB$



चित्र 4.2

§ 4.5 रेखीय तथा घूर्णन गति की अवधारणा(Concept of Translatory or Linear and Rotatory Motion)

4.5.1 रेखीय गति (Linear or Translatory Mation)

जब किसी ऐसे स्थिर दृढ़ पिण्ड पर बल लगाया जाता है जो चलने के लिए स्वतन्त्र हो तो वह पिण्ड बल आरोपण की दिशा में गतिमान हो जाता है।

* बल के वेक्टर के दोनों सिरों को बढ़ाकर खींची गयी काल्पनिक रेखा ही बल की क्रिया रेखा कहलाती है।

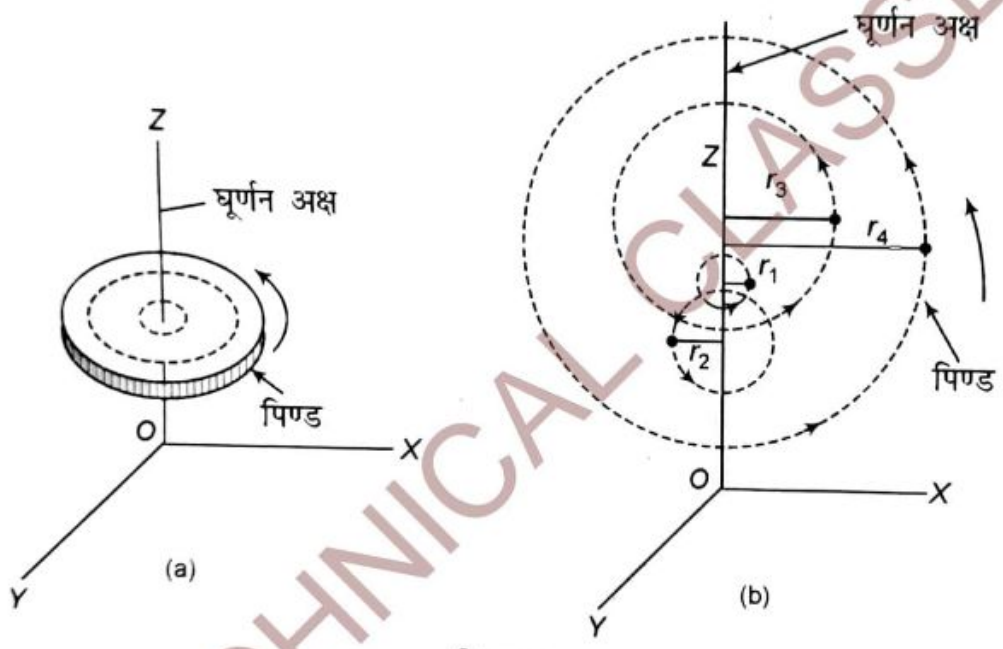
AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

यदि प्रत्येक समय गतिमान पिण्ड के वेग $\vec{v}$ की दिशा सदैव आरोपित बल ($\vec{F}$) अथवा प्रारम्भिक वेग $\vec{u}$ के दिशा में ही बनी रहे तो इस प्रकार की गति को रेखीय गति (Linear or Translatory Motion) कहते हैं। जैसे घर्षणहीन फर्श पर सरकते गोली की गति, गुरुत्व एवं घर्षण के अनुपस्थिति में बन्दूक की गोली की गति, आदि।

4.5.2 घूर्णन गति (Rotational Motion)

जब कोई दृढ़ पिण्ड किसी स्थिर अक्ष के परित: घूमता है तो उसे घूर्णन गति अथवा कोणीय गति कहते हैं तथा उस अक्ष को घूर्णन अक्ष (Axis of Rotation) कहते हैं। घूर्णन गति में पिण्ड का प्रत्येक कण एक वृत्त में गति करता है तथा इन सभी वृत्तों के केन्द्र घूर्णन अक्ष पर स्थित होते हैं [चित्र 4.3 (a) तथा (b)] उदाहरणार्थ लट्टू की गति, पृथ्वी का चक्रण, पंखे के घूमते ब्लेड आदि।



चित्र 4.3

यदि घूर्णन गति करते हुए पिण्ड का कोणीय वेग समय के साथ-साथ बदलता है तब पिण्ड की गति को त्वरित घूर्णन गति (Accelerated Rotary Motion) कहते हैं अर्थात् **किसी पिण्ड के घूर्णन अक्ष के परित: कोणीय वेग परिवर्तन की दर को उस पिण्ड का कोणीय त्वरण कहते हैं। इसे प्राय: α से प्रदर्शित करते हैं।**

यदि किसी कण में कोणीय वेग t_1 सेकण्ड पर ω_1 तथा t_2 सेकण्ड पर ω_2 हो, अर्थात् $(t_2 - t_1)$ सेकण्ड के समयान्तराल में कण के कोणीय वेग में परिवर्तन = $(\omega_2 - \omega_1)$ रेडियन/सेकण्ड हो, तब इस समयान्तराल में कण का औसत कोणीय त्वरण

$$\bar{\alpha} = \frac{\text{कोणीय वेग परिवर्तन}}{\text{समयान्तराल}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \text{ रेडियन/सेकण्ड}^2$$

यदि Δt का मान अनन्त सूक्ष्म (अर्थात् लगभग शून्य) हो तो $\bar{\alpha}$ को **तात्क्षणिक कोणीय त्वरण** (Instantaneous angular acceleration) कहते हैं तथा इसे 'α' से व्यक्त करते हैं। अधिकतर इसी का प्रयोग किया जाता है।

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} \quad \ldots (2)$$

इसका मात्रक **रेडियन/सेकण्ड^2** अथवा **चक्कर की संख्या प्रति सेकण्ड^2** (rev/s^2) होता है तथा विमीय सूत्र $[M^0L^0T^{-2}]$ है।

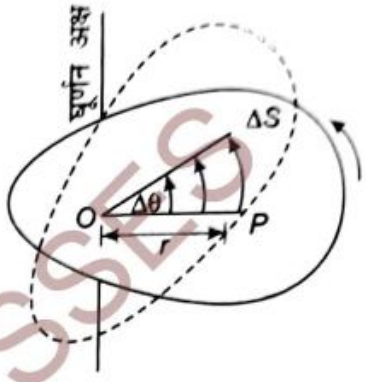
यदि कण का कोणीय त्वरण एक समान (uniform) हो, तो

$$\alpha = \bar{\alpha}$$

AKG TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

§ 4.6 वृत्तीय अथवा घूर्णन गति में, पिण्ड के किसी कण के कोणीय त्वरण तथा स्पर्श रेखीय त्वरण में सम्बन्ध (Relation between Angular Acceleration and Tangential Acceleration of any Particle of a Body in Circular or Rotational Motion)

माना कोई पिण्ड, अपने किसी बिन्दु 'O' से गुजरने वाली अक्ष के परित: घूमने को स्वतंत्र है, (चित्र 4.4)। पिण्ड पर कोई नियत बल-आघूर्ण लगाने पर, पिण्ड इस घूर्णन अक्ष के परित: एकसमान कोणीय त्वरित गति करने लगता है। माना इसका कोणीय त्वरण 'α' है।



चित्र 4.4

चित्र 4.4 से स्पष्ट है कि पिण्ड के विभिन्न कण समान समयान्तराल में भिन्न-भिन्न दूरियाँ तय करते हैं, अत: उनके रेखीय वेग भिन्न-भिन्न हैं। किन्तु सभी कण समान समयान्तराल में समान कोण से घूमते हैं अर्थात् प्रत्येक कण का कोणीय विस्थापन समान है; अत: किसी क्षण प्रत्येक कण का कोणीय वेग (ω) समान है।

माना कि पिण्ड का कोई कण P, बिन्दु O से r दूरी पर है। पिण्ड के घूमने पर कण P का किसी समयान्तराल Δt में कोणीय विस्थापन $\Delta\theta$ तथा वृत्तीय पथ के चाप पर रेखीय विस्थापन ΔS है, तो

$$\Delta\theta = \frac{\Delta S}{r}$$

दोनों ओर Δt से भाग देने पर,

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

दोनों ओर, $\lim \Delta t \to 0$ का प्रतिबन्ध लगाने पर

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{r}\cdot\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

अथवा $$\omega = \frac{1}{r}v$$

यहाँ ω कण का कोणीय वेग तथा v कण का स्पर्शरेखीय वेग है।

दोनों ओर समय t के साथ अवकलन करने पर

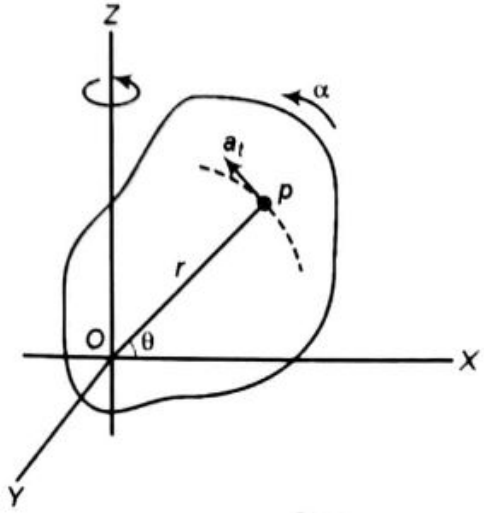
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r}\cdot\frac{dv}{dt}$$

[यहाँ ω तथा v, समय t के साथ परिवर्तनशील है, किन्तु r का मान, किसी एक कण के लिए नियत रहता है।]

अथवा $$\alpha = \frac{1}{r}a_t = \frac{a_t}{r} \qquad \left[\because \frac{d\omega}{dt}=\alpha \text{ तथा } \frac{dv}{dt} = a_t\right]$$

a_t का अर्थ है स्पर्शरेखीय त्वरण (a tangential or Tangential Acceleration)

$$\therefore \quad a_t = \alpha r \qquad \ldots (3)$$



अत: **घूर्णन गति में, पिण्ड के किसी कण का स्पर्शरेखीय त्वरण (a_t) का मान पिण्ड के कोणीय त्वरण (α) तथा उस कण की घूर्णन अक्ष से दूरी (r) के गुणनफल के बराबर होता है, चित्र 4.5 ।**

AKC TECHNICAL CLASSES

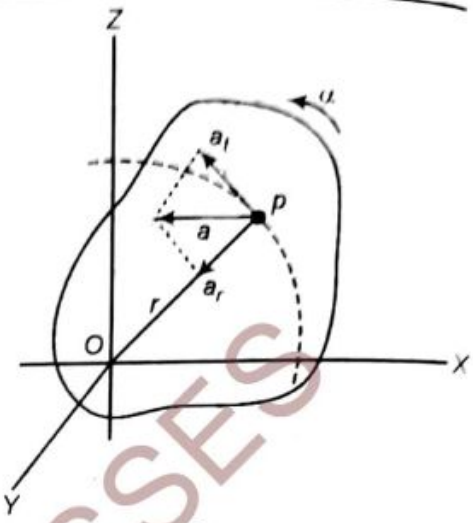
Scanned with CamScanner

चूँकि वृत्तीय गति में कण का नेट रेखीय त्वरण $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$ होता है (चित्र 4.6), इसलिए घूर्णन गति मे दृढ़ पिण्ड के किसी कण (बिन्दु) के नेट रेखीय त्वरण का परिमाण,

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} \quad \ldots (4)$$

$$= \sqrt{(\alpha r)^2 + (r\omega^2)^2} \quad (\because a_t = r\alpha \text{ तथा } a_r = r\omega^2)$$

$$a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \quad \ldots (5)$$



चित्र 4.6

§ 4.7 जड़त्व आघूर्ण-*I* [Moment of Inertia (MI)—*I*]

सरल रेखीय समान गति में न्यूटन के प्रथम नियम के अनुसार प्रत्येक वस्तु में अपनी अवस्था परिवर्तन का विरोध करने का एक विशेष गुण होता है जिसे जड़त्व (Inertia) कहते हैं। रेखीय गति में जड़त्व केवल द्रव्यमान पर निर्भर करता है। जिस वस्तु का द्रव्यमान अधिक होता है उसका जड़त्व भी अधिक होता है। अर्थात् उसमें विरोध करने की शक्ति अधिक होती है।

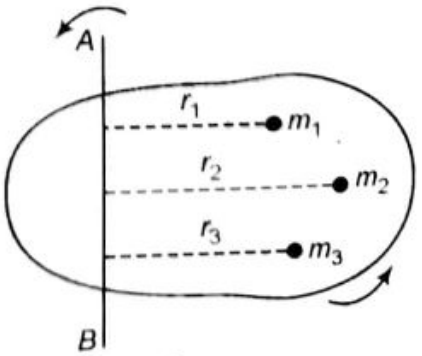
इसी प्रकार घूर्णन गति में कोई वस्तु किसी अक्ष के चारों ओर जिस कोणीय वेग से घूम रही होती है, वह उसी वेग से उसी दिशा में घूमते रहना चाहती है जब तक कि उस पर कोई बाहरी बलयुग्म न लगाया जाए। बलयुग्म (couple) लगाए जाने पर वस्तु अपने घूर्णन जड़त्व (rotational inertia) के कारण इस बाह्य बलयुग्म का विरोध करती है और अपनी प्रारम्भिक अवस्था में बने रहना चाहती है। इस घूर्णन जड़त्व (rotational inertia) को ही जड़त्व आघूर्ण (moment of inertia)* कहते हैं। इसे *I* से प्रदर्शित करते हैं। स्पष्ट है कि **रेखीय गति में जो महत्व जड़त्व (द्रव्यमान) का है, वही महत्व कोणीय गति में जड़त्व आघूर्ण का है।** अन्तर केवल यह है कि रेखीय गति में जड़त्व केवल वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर करता है; जबकि कोणीय गति में जड़त्व आघूर्ण वस्तु के द्रव्यमान के साथ ही साथ उसकी अक्ष से दूरी पर भी निर्भर करता है जिसके चारों ओर वस्तु घूम रही है, इसे द्रव्यमान की प्रभावशीलता (effectiveness of the mass) कहते हैं। जैसे—50 ग्राम की वस्तु पर समान त्वरण (रेखीय) उत्पन्न करने के लिए एक ही परिमाण का बल ($F = ma$) लगाना पड़ेगा वस्तु चाहे जिस आकार व प्रकृति की हो। परन्तु यदि इसी 50 ग्राम के टुकड़े को 50 सेमी लम्बी डोरी से बाँधकर घुमायें, फिर 100 सेमी लम्बी डोरी से बाँध कर घुमाएँ, तो समान कोणीय त्वरण के लिए भिन्न बलयुग्म लगाना पड़ेगा।

उपर्युक्त उदाहरण से स्पष्ट है कि जड़त्व आघूर्ण , द्रव्यमान के साथ-साथ उस कण की अक्ष से दूरी पर भी निर्भर करता है।

वस्तु के किसी कण का जड़त्व आघूर्ण, वस्तु के द्रव्यमान एवं उसकी घूर्णन अक्ष से दूरी के वर्ग के गुणनफल के बराबर होता है।

अर्थात् $$I = mr^2 \qquad \text{[कण के लिए]}$$

पिण्ड के लिए माना M द्रव्यमान का एक पिण्ड अक्ष AB के परित: घूम रहा है। माना पिण्ड अनन्त सूक्ष्म कणों से मिलकर बना है जिनके द्रव्यमान क्रमश: $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$ हैं तथा इनकी घूर्णन अक्ष AB से दूरियाँ क्रमश: $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_n$ हैं (चित्र 4.7)।



चित्र 4.7

स्पष्ट है कि पहले कण का जड़त्व आघूर्ण, $I_1 = m_1 r_1^2$

दूसरे कण का जड़त्व आघूर्ण, $I_2 = m_2 r_2^2$

तीसरे कण का जड़त्व आघूर्ण, $I_3 = m_3 r_3^2$

* The moment of Inertia of a body, in rotational motion, as the "effectiveness of the mass", plays the same part as, or is the analogue of the "mass" of a body in the case of translatory motion. Or, pushing the analogue a little further, we may define mass the "Coefficient of Inertia" for translatory motion and the moment of inertia as the "Coefficient of rotational inertia."

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

... ...

n वे कण का जड़त्व आघूर्ण , $I_n = m_n r_n^2$

अत: सम्पूर्ण वस्तु का जड़त्व आघूर्ण, घूर्णन अक्ष AB के परित:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n$$

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + ... + m_n r_n^2$$

$$\boldsymbol{I = \sum mr^2} \qquad \text{...(6)}$$

अत: समीकरण (6) से स्पष्ट है कि **"किसी वस्तु का किसी घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण उस वस्तु के प्रत्येक कण के द्रव्यमान तथा उसकी घूर्ण अक्ष से दूरी के वर्ग के गुणनफलों के योग के बराबर होता है।"**

"The moment of inertia of a massive body about an axis is the sum of all the products formed by multiplying the magnitude of each element of mass (m) by the square of its distance (r) from the line, *i.e.*, $I = \sum mr^2$. It is analogue in rotational dynamics of mass in linear dynamics."

जड़त्व आघूर्ण का S.I. मात्रक—किलोग्राम-मीटर^2 (kg - m^2) तथा जड़त्व आघूर्ण का विमीय सूत्र—[ML^2T^0] होता है। जड़त्व आघूर्ण एक ऐसी भौतिक राशि है जो न तो सदिश (vector) है और न ही अदिश (scalar); बल्कि एक प्रदिश (टेन्सर—Tensor) राशि है। टेन्सर ऐसी भैतिक राशियों को कहते हैं जिनके मान अलग-अलग दिशाओं में अलग-अलग होते हैं।

4.7.1. जड़त्व आघूर्ण की निर्भरता (Dependence of Moment of Inertia)

किसी घूर्णन अक्ष के परित: किसी वस्तु का जड़त्व आघूर्ण का मान निम्न पर निर्भर करता है—

(i) वस्तु का द्रव्यमान

(ii) घूर्णन अक्ष की स्थिति

(iii) घूर्णन अक्ष के सापेक्ष, वस्तु के द्रव्यमान का वितरण।

घूर्णन अक्ष की स्थिति बदलने से वस्तु के जड़त्व आघूर्ण का मान बदल जाता है। अत: किसी वस्तु के जड़त्व आघूर्ण के साथ उसके घूर्णन अक्ष की स्थिति स्पष्ट करना आवश्यक है जिसके परित: वस्तु घूर्णन गति कर रही है। द्रव्यमान के वितरण से, द्रव्यमान के अक्ष से दूर होने पर M.I. का मान अधिक तथा अक्ष के पास होने पर M.I. का मान कम होता है।

4.7.2. जड़त्व आघूर्ण का भौतिक महत्व (Physical Significance of M.I.)

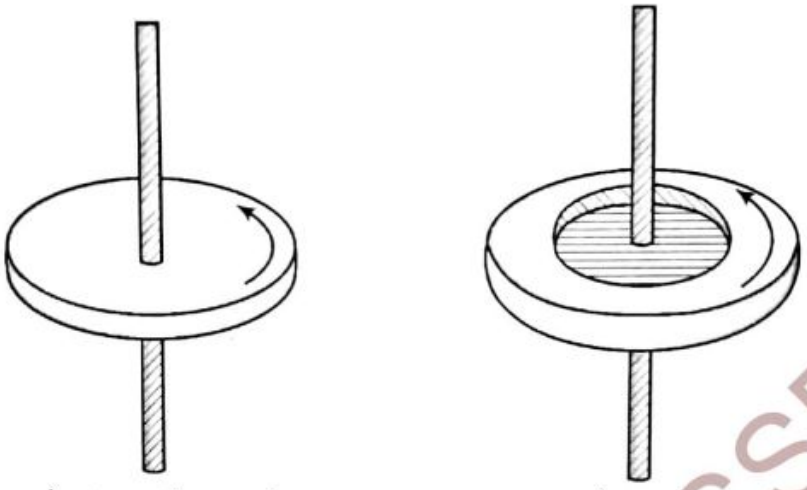
किसी पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण, उसकी घूर्णन गति में वही कार्य करता है जो पिण्ड का द्रव्यमान उसकी रेखीय गति में करता है, क्योंकि पिण्ड का द्रव्यमान, रेखीय गति में पिण्ड के जड़त्व को मापता है। अत: पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण, घूर्णन गति में पिण्ड के जड़त्व को मापता है। जड़त्व आघूर्ण को घूर्णन जड़त्व (rotational inertia) भी कहते हैं। यही जड़त्व आघूर्ण का भौतिक महत्व है।

किसी पिण्ड के जड़त्व तथा जड़त्व आघूर्ण में एक अन्तर यह भी है **कि पिण्ड का जड़त्व पिण्ड के केवल द्रव्यमान पर निर्भर करता है परन्तु किसी अक्ष के परित: पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण, पिण्ड के द्रव्यमान के साथ-साथ घूर्णन अक्ष के सापेक्ष द्रव्यमान के वितरण पर भी निर्भर करता है।**

उदाहरणत: यदि दो समान द्रव्यमान तथा समान आकार के पहियों में एक पहिया ठोस (पटल की तरह) तथा दूसरा बीच में खोखला (साइकिल अथवा मोटर साइकिल के पहिये की तरह) है। चित्र 4.8 (a) तथा (b), तो खोखले पहिये में द्रव्यमान के अधिक भाग वितरण अक्ष से दूर होने के कारण खोखले पहिये का जड़त्व आघूर्ण, ठोस (पटल) पहिए की अपेक्षा अधिक होगा। इसीलिए इन पहियों में घूर्णन गति प्रारम्भ करने के लिए खोखले पहिये पर अधिक बल आघूर्ण ($\tau = I\alpha$) लगाना पड़ेगा। यदि दोनों पहियों को घुमाकर छोड़ दें, तो खोखला पहिया (अत्यधिक जड़त्व आघूर्ण के कारण) अधिक देर तक घूमता रहेगा।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner



(a) ठोस (पटल की तरह) पहिया (b) खोखला पहिया

चित्र 4.8

यही कारण है कि मोटर-कार, स्कूटर, साइकिल, रिक्शा, बैलगाड़ी आदि के पहियों अथवा ऑटो मोबाइल इन्जनों में गतिपालक चक्रों (पहियों) (fly-wheel) का जड़त्व आघूर्ण बढ़ाने के लिए, पहियों का अधिकांश द्रव्यमान उनके रिमों (rims) पर स्थित होता है।

§ 4.8 जड़त्व आघूर्ण सम्बन्धी प्रमेय (Theorems regarding M.I.)

जड़त्व आघूर्ण के निम्न दो प्रमेय हैं—

(i) समान्तर अक्षों का प्रमेय (Theorem of Parallel Axes)

(ii) समकोणिक अक्षों का प्रमेय (Theorem of Perpendicular Axes)

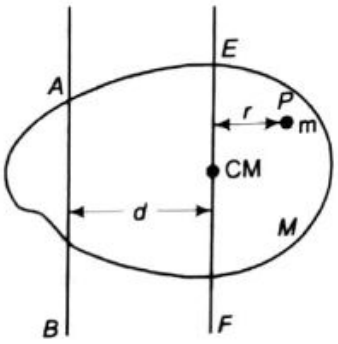
(i) समान्तर अक्षों का प्रमेय (Theorem of Parallel Axes)—**"किसी पिण्ड का किसी घूर्णन अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण (I) पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र (cm) से गुजरने वाली (अक्ष AB के) समान्तर अक्ष के सापेक्ष पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण (I_{cm}) तथा उसके द्रव्यमान और दोनों समान्तर अक्षों के बीच लम्बवत् दूरी के वर्ग के गुणनफल के योग के बराबर होता है।"**

अर्थात्
$$I_{AB} = I_{CM} + Md^2 \qquad ...(7)$$

"The moment of inertia of a body about any axis is equal to its moment of inertia about a parallel axis through its centre of mass, plus the product of the mass of the body and the square of the distance between the two axes."

माना किसी पिण्ड में अक्ष EF पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र CM से गुजरता है तथा कोई अन्य अक्ष AB जो अक्ष EF के समान्तर है, के परित: पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है। माना M पिण्ड का कुल द्रव्यमान है तथा d दोनों अक्षों के बीच की लम्बवत् दूरी है। पिण्ड अनन्त सूक्ष्म कणों से मिलकर बना है।

चित्र 4.9 के अनुसार, माना पिण्ड के एक कण P का द्रव्यमान m तथा अक्ष EF से इसकी दूरी r है।



चित्र 4.9

∴ इस कण का घूर्णन अक्ष EF के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $= mr^2$

∴ सम्पूर्ण पिण्ड का घूर्णन अक्ष EF के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $I_{cm} = \sum mr^2$

तथा कण P का घूर्णन अक्ष AB के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $= m(r + d)^2$

AVC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

∴ सम्पूर्ण पिण्ड का घूर्णन अक्ष AB के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण,

$$I_{AB} = \sum m (r + d)^2$$

$$= \sum m (r^2 + d^2 + 2rd)$$

$$= \sum mr^2 + \sum md^2 + \sum 2mrd$$

[∵ d नियत है, अत: इसे चिह्न $\sum$ से बाहर रखा जा सकता है]

∴ $$I_{AB} = I_{CM} + d^2 \sum m + 2d \sum mr \qquad (\because \sum mr^2 = I_{CM})$$

अथवा $$I_{AB} = I_{CM} + d^2 M$$

[∵ द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष $\sum mr = 0$ तथा $\sum m = M$ = पिण्ड का द्रव्यमान]

∴ $$\boldsymbol{I_{AB} = I_{cm} + Md^2}$$

[$d = 0$ होने पर अर्थात् द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली घूर्णन अक्ष के सापेक्ष किसी पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण न्यूनतम होता है।]

(ii) समकोणिक अक्षों का प्रमेय (Theorem of Perpendicular Axes)—

"किसी समतल पटल (plane lamina) का उसके तल में ली गई दो परस्पर लम्बवत् अक्षों (OX तथा OY) के सापेक्ष जड़त्व आघूर्णों का योग, इन अक्षों के कटान बिन्दु (O) से जाने वाली तथा पटल के तल के लम्बवत् अक्ष (OZ) के सापेक्ष उस पटल के जड़त्व आघूर्ण के बराबर होता है।"

अर्थात् $$\boldsymbol{I_x + I_Y = I_Z} \qquad \ldots (8)$$

जहाँ I_X, I_Y तथा I_Z क्रमश: X, Y तथा Z अक्षों के सापेक्ष पटल के जड़त्व आघूर्ण हैं।

"The moment of inertia of a plane lamina about an axis, perpendicular to the plane of the lamina is equal to the sum of the moments of inertia of the lamina about two axes at right angles to each other, in its own plane, and intersecting each other at the point where the perpendicular axis passes through it."

चित्र 4.10 में एक समतल पटल दिखाया गया है। पटल के तल में दो परस्पर लम्बवत् अक्ष OX तथा OY हैं जिनका कटान बिन्दु 'O' है। बिन्दु 'O' से गुजरने वाली तथा पटल के तल के लम्बवत् अक्ष OZ है। माना पटल के एक कण P का द्रव्यमान m है तथा इसकी स्थिति के निर्देशांक, बिन्दु 'O' के सापेक्ष (x, y) है तथा Z-अक्ष से इसकी दूरी r है तब इस कण का OX अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण = my^2

- **किसी निकाय की दिये गये घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण की गणना (Calculation of MI of a Body about an Axis of Rotation)**—किसी निकाय की MI की गणना निम्न प्रकार से करते हैं—

(1) **यदि निकाय के द्रव्यमान का वितरण विविक्त है** (When discrete distribution of mass is there)—तब प्रत्येक कण का जड़त्व आघूर्ण, घूर्णन अक्ष के परित: ज्ञात करके उनका योग कर लेते हैं। यही घूर्णन अक्ष के परित: पूरे पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण होता है।

अर्थात् $$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\ldots\ldots + m_n r_n^2$$

(2) **यदि निकाय के द्रव्यमान का वितरण सतत् है** (When continuous distribution of mass is there)—तब निकाय का कोई ऐसा अल्पांश (element) लेते हैं जिसका प्रत्येक कण घूर्णन अक्ष से समान दूरी (माना r) पर हो। माना ऐसे अल्पांश का द्रव्यमान dm है तब घूर्णन अक्ष के परित: इस अल्पांश का जड़त्व आघूर्ण $dI = dmr^2$ । उस घूर्णन अक्ष के परित: पूरे निकाय का जड़त्व आघूर्ण निकालने के लिए प्राप्त व्यंजक का वांछित सीमाओं तक समाकलन कर लेते हैं।

अर्थात् $$I = \int dI = \int dmr^2$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

∴ पूरे पटल का OX अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I_X = \Sigma m y^2$$

इसी प्रकार पूरे पटल का OY अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

$$I_Y = \Sigma m x^2$$

कण P का OZ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण $= mr^2$

∴ पूरे पटल का OZ अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

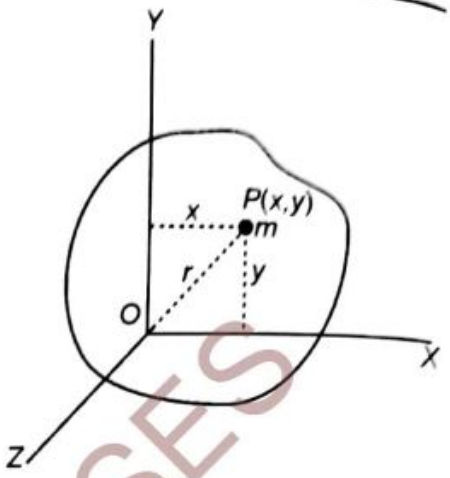
$$I_Z = \Sigma m r^2$$

$$= \Sigma m(x^2 + y^2) \qquad [\because r^2 = x^2 + y^2]$$

$$= \Sigma m x^2 + \Sigma m y^2$$

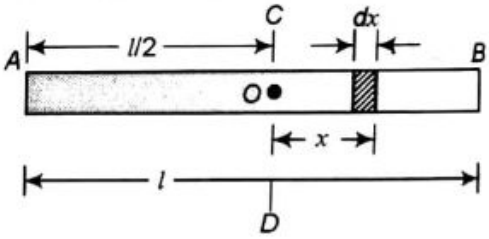
$$= I_Y + I_X$$

अथवा $\quad I_X + I_Y = I_Z$



चित्र 4.10

... (i) **पतले लम्बे छड़ का जड़त्व आघूर्ण**—(छड़ की लम्बाई के लम्बवत् तथा केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण) माना छड़ की लम्बाई l तथा द्रव्यमान M है। अक्ष CD के परित: जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है। यदि केन्द्र बिन्दु O से x दूरी पर dx चौड़ाई की पट्टी है (माना छड़ dx चौड़ाई की समान पट्टियों से मिलकर बना है) तो—

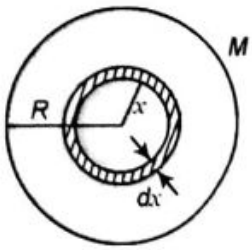


dx पट्टी का द्रव्यमान $= \frac{M}{l}.dx$ ($\frac{M}{l}$ इकाई लम्बाई का द्रव्यमान)

अत: $\quad dx$ पट्टी का M.I. $= \frac{M}{l}.dx.x^2$

अत: $\quad$ सम्पूर्ण छड़ का M.I. $= 2\int_0^{l/2} \frac{M}{l}.x^2.dx = \frac{ml^2}{12}$

(ii) डिस्क या वृत्तीय पटल का जड़त्व आघूर्ण—(पटल तल के लम्बवत् तथा केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परित:) माना पटल का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है। केन्द्र O से x दूरी पर dx चौड़ाई की वृत्ताकार पट्टी है। (माना पटल dx चौड़ाई की समान वृत्ताकार पट्टियों से मिलकर बना है) तो

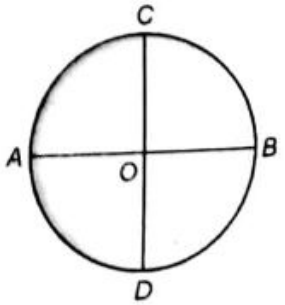


dx पट्टी का क्षेत्रफल $= 2\pi x.dx$

तथा $\quad dx$ पट्टी का द्रव्यमान $= \frac{M}{\pi R^2}.2\pi x.dx$

अत: $\quad dx$ पट्टी का M.I. $= \frac{2Mx\,dx}{R^2}.x^2$

अत: $\quad$ सम्पूर्ण पटल का M.I. $= \int_0^R \frac{2M}{R^2}.x^3.dx = \frac{MR^2}{2}$

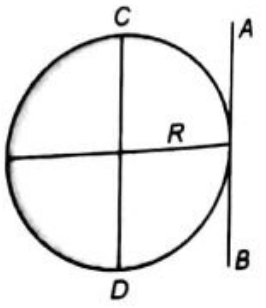


यदि घूर्णन अक्ष पटल तल के व्यास के अनुदिश हो, तो समकोणिक अक्षों के प्रमेय से,

$$\text{M.I. of } AB + \text{M.I. of } CD = \frac{MR^2}{2}$$

या $\quad I + I = \frac{MR^2}{2} \Rightarrow 2I = \frac{MR^2}{2}$

या $\quad I = \frac{MR^2}{4}$



यदि घूर्णन अक्ष पटल तल के स्पर्शी रूप में हो, तो समान्तर अक्षों के प्रमेय से

$$I = \frac{MR^2}{4} + MR^2 = \frac{5MR^2}{4}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 4.9 घूर्णन त्रिज्या या परिभ्रमण त्रिज्या-K (Radius of Gyration-K)

यदि किसी पिण्ड (body) के सम्पूर्ण द्रव्यमान को किसी एक बिन्दु पर केन्द्रित मान लें जिसकी घूर्णन अक्ष से लम्बवत दूरी इतनी हो कि दूरी के वर्ग को पिण्ड के द्रव्यमान से गुणा करने पर पिण्ड का घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण प्राप्त हो जाए तो इस दूरी को घूर्णन अक्ष के सापेक्ष पिण्ड की घूर्णन त्रिज्या कहते हैं। इसे K से प्रदर्शित करते हैं।

"The radius of gyration of a body, about a given axis of rotation, may be defined as the distance from the axis at which, if the whole mass of the body were to be concentrated, the moment of inertia of the body about the given axis of rotation would be the same as with its actual distribution of mass."

माना M द्रव्यमान के किसी पिण्ड का किसी घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण I है, तब

$$I = MK^2$$

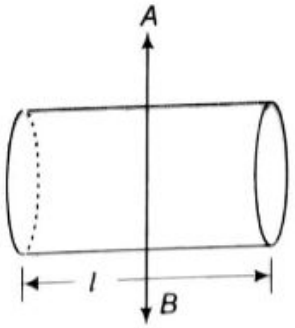
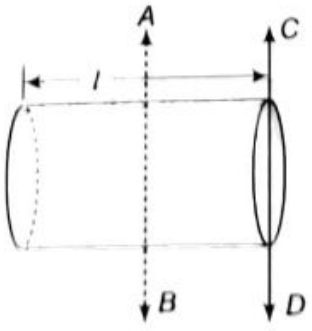
अथवा
$$K = \sqrt{\left(\frac{I}{M}\right)} \qquad ...(9)$$

K को घूर्णन अक्ष के सापेक्ष पिण्ड की घूर्णन त्रिज्या कहते हैं। अत:

"किसी पिण्ड के घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण तथा पिण्ड के द्रव्यमान की निष्पत्ति का वर्गमूल उस पिण्ड की घूर्णन अक्ष के सापेक्ष घूर्णन त्रिज्या (Radius of gyration) कहलाती है।"

घूर्णन त्रिज्या का मात्रक **मीटर** होता है क्योंकि यह दूरी है।

§ 4.10 कुछ नियमित आकृतियों की वस्तुओं का जड़त्व आघूर्ण (Moment of inertia of some regular shaped bodies)

क्र० सं०	पिण्ड का नाम		अक्ष का नाम	चित्र	जड़त्व आघूर्ण
1.	पतली लम्बी छड़	(a)	गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाली तथा लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष		$I_{AB} = \frac{Ml^2}{12}$
		(b)	छड़ के एक सिरे से गुजरने वाली तथा छड़ की लम्बाई के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष		$I_{CD} = \frac{Ml^2}{3}$

- **Lamina :** A thin plate, sheet or layer.
- **Planar lamina :** A planar lamina is a closed set in a plane of mass m and surface density $\rho(x, y)$ such that :

$$m = \iint \rho(x, y)\, dx\, dy$$

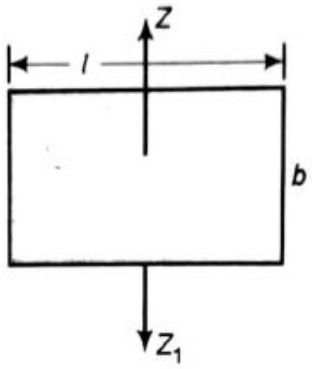
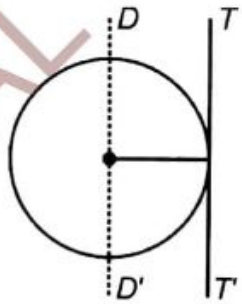
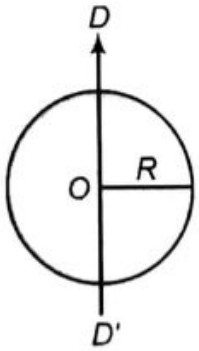
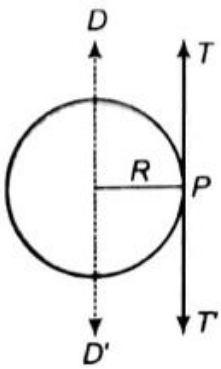
over the closed set.

क्रमश:

AKC TECHNICAL CLASSES

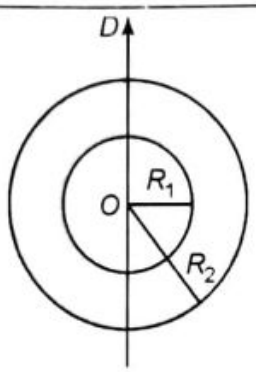
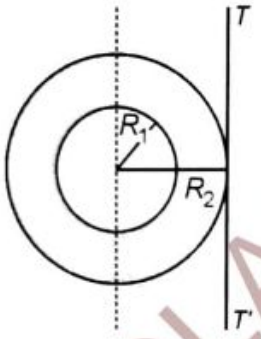
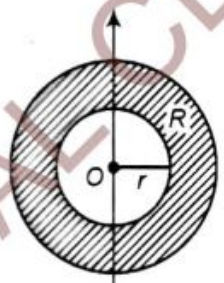
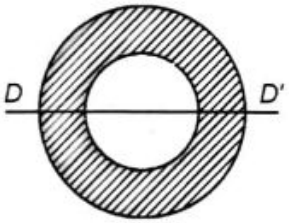
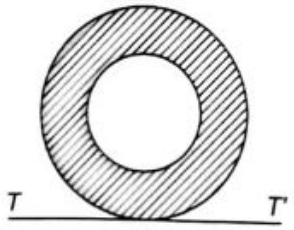
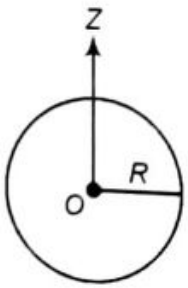
Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

2.	आयताकार पटल		सतह के लम्बवत्		$I = \frac{M(l^2 + b^2)}{12}$
3.	गोलीय कोश	(a)	उसके व्यास के सापेक्ष		$I_d = \frac{2}{3}MR^2$
		(b)	तल में स्थित स्पर्श रेखा के सापेक्ष		$I_T = \frac{5}{3}MR^2$
4.	ठोस गोला	(a)	उसके व्यास के सापेक्ष (केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष)		$I_d = \frac{2}{5}MR^2$
		(b)	उसके तल में स्थित स्पर्श रेखा के सापेक्ष		$I_T = \frac{7}{5}MR^2$

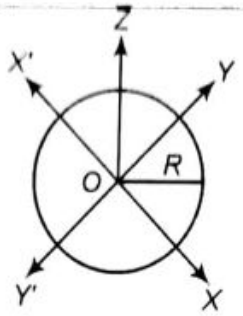
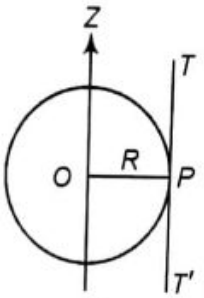
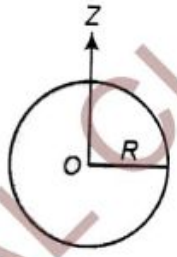
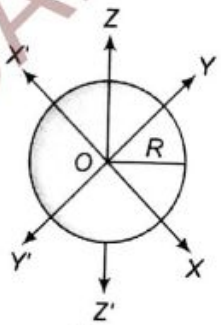
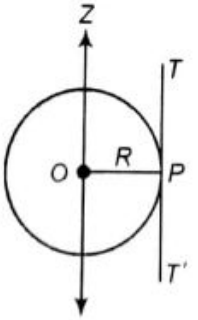
AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

5.	खोखला गोला	(a)	व्यास के सापेक्ष		$I_d = \frac{2}{5} M \left[\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} \right]$
		(b)	तल में स्थित स्पर्श रेखा के सापेक्ष		$I_T = \frac{2}{5} M \left[\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^2 - R_1^2} \right] + MR_2^2$
6.	छिद्रयुक्त वृत्ताकार चकती	(a)	केन्द्र से गुजरने वाली तथा तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष		$I_Z = \frac{M}{2}(r^2 + R^2)$
		(b)	व्यास के सापेक्ष		$I_d = \frac{M}{4}(r^2 + R^2)$
		(c)	तल में स्थित स्पर्श रेखा के सापेक्ष		$I_T = \frac{M}{4}(5r^2 + R^2)$
7.	वृत्ताकार वलय	(a)	द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली तथा तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष		$I_Z = MR^2$

AKC TECHNICAL CLASSES

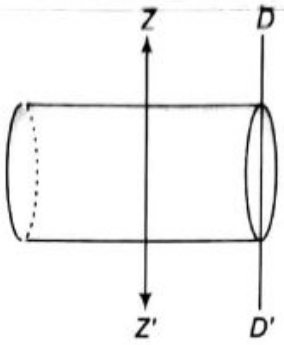
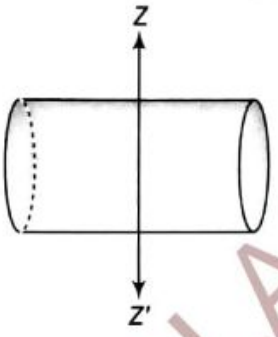
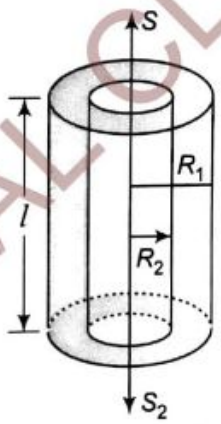
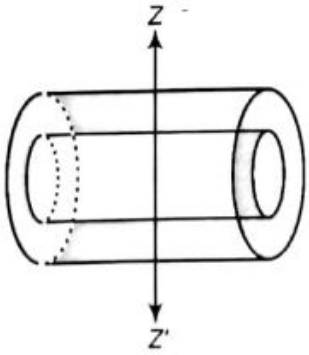
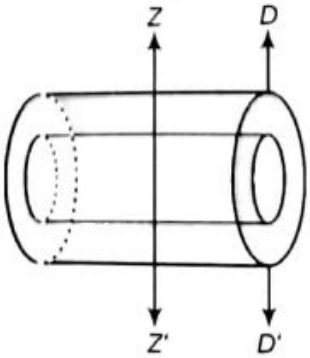
Scanned with CamScanner

		(b)	किसी व्यास के सापेक्ष		$I_d = \frac{MR^2}{2}$
		(c)	तल में स्थित स्पर्श रेखा के सापेक्ष		$I_T = \frac{3}{2}MR^2$
8.	ठोस वृत्ताकार चकती	(a)	तल के लम्बवत् गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष		$I_Z = \frac{MR^2}{2}$
		(b)	व्यास के सापेक्ष		$I_d = \frac{MR^2}{4}$
		(c)	तल में स्थित स्पर्श रेखा के सापेक्ष		$I_T = \frac{5}{4}MR^2$
9.	ठोस बेलन	(a)	ज्यामितीय अक्ष के सापेक्ष		$I_S = \frac{Mr^2}{2}$

AKC TECHNICAL CLASSES

क्रमशः

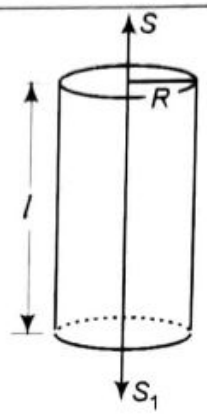
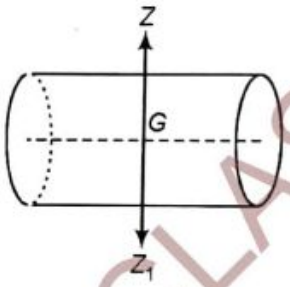
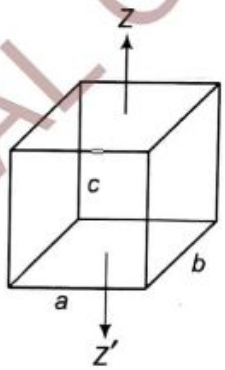
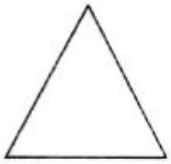
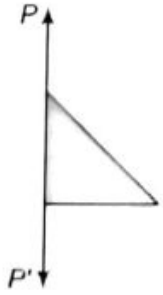
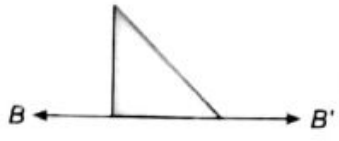
Scanned with CamScanner

		(b)	लम्बाई के लम्बवत् व गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष		$I_Z = M\left[\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4}\right]$
		(c)	बेलन के एक फलक के सापेक्ष		$I_d = M\left[\frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{4}\right]$
10.	खोखला बेलन	(a)	अक्ष के सापेक्ष		$I_S = \frac{M}{2}[R_1^2 + R_2^2]$
		(b)	लम्बाई के लम्बवत् व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष		$I_Z = M\left[\frac{l^2}{12} + \frac{(R_1^2 + R_2^2)}{4}\right]$
		(c)	उसके किसी फलक के व्यास के सापेक्ष		$I_d = M\left[\frac{l^2}{3} + \frac{(R_1^2 + R_2^2)}{4}\right]$

AKC TECHNICAL CLASSES

क्रमशः

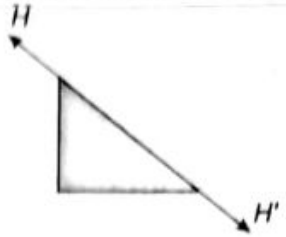
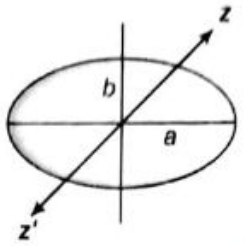
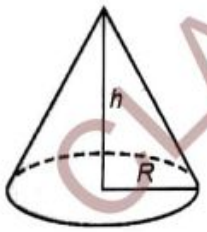
Scanned with CamScanner

11.	बेलनाकार कोश	(a)	उसकी अक्ष के परित:		$I_S = MR^2$
		(b)	लम्बाई के लम्बवत् व द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष		$I_Z = M\left[\frac{L^2}{12} + \frac{R^2}{2}\right]$
12.	घनाभ		केन्द्रीय अक्ष के सापेक्ष		$I_Z = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}$
13.	त्रिभुजाकार प्रिज्म (आधार = a, ऊँचाई = h)		गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाली तथा त्रिभुजाकार फलक के लम्बवत् अक्ष के परित:		$I = \frac{Ma^2}{6}$
14.	त्रिभुजाकार प्लेट	(a)	अक्ष PP' के सापेक्ष		$I = \frac{Mb^2}{6}$
	(आधार = b)	(b)	अक्ष BB' के सापेक्ष		$I = \frac{Mb^2}{6}$

AKC TECHNICAL CLASSES

क्रमश:

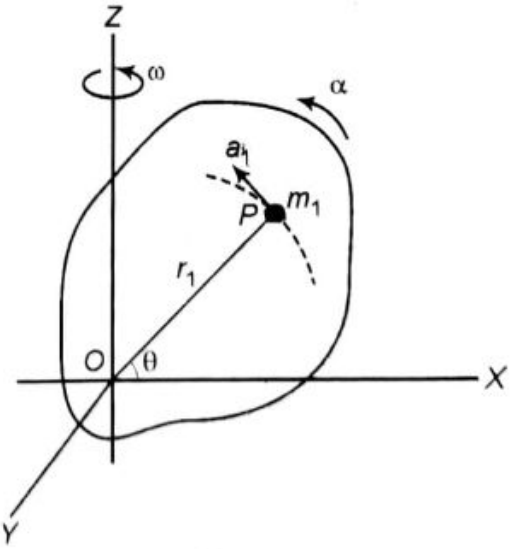
Scanned with CamScanner

	(लम्ब = P कर्ण = h)	(c)	अक्ष HH' के सापेक्ष		$I = \frac{M}{6}\left[\frac{b^2P^2}{b^2+P^2}\right]$
15.	दीर्घ-वृत्ताकार चकती		गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाली तथा तल के लम्बवत् अक्ष के सापेक्ष		$I_Z = \frac{M}{4}(a^2+b^2)$
16.	शंकु		शंकु के शीर्ष तथा आधार के केन्द्र को मिलाने वाली अक्ष के परित:		$I = \frac{3}{10}MR^2$

$\tau = I\alpha$

§ 4.11 बल आघूर्ण तथा कोणीय त्वरण में सम्बन्ध (Relation between Torque and Angular Acceleration)

माना M द्रव्यमान का एक पिण्ड अनन्त सूक्ष्म द्रव्यमान कणों $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots, m_n$ से मिलकर बना है। इन कणों की पिण्ड के घूर्णन अक्ष से दूरियाँ क्रमश: $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_n$ हैं। माना दृढ़ पिण्ड, स्थिर Z-अक्ष के परित: कोणीय त्वरण α से घूम रहा है (चित्र 4.12)।



चित्र 4.12

माना पिण्ड के किसी कण P का द्रव्यमान m_1, घूर्णन अक्ष से दूरी r_1 तथा स्पर्श रेखीय त्वरण a_1 है। इस कण पर लगने वाला स्पर्शरेखीय बल F_1 हो, तो

$$F_1 = m_1 a_1 \qquad \ldots(i)$$

इस बल का घूर्णन अक्ष के परित: आघूर्ण

$$\tau_1 = F_1 r_1$$

या $$= m_1 a_1 r_1 \qquad \text{(समीकरण (i) से)}$$

या $$= m_1 (r_1 \alpha)\, r_1 \qquad (\because a = r\alpha)$$

अथवा $$\tau_1 = m_1 r_1^2\, \alpha \qquad \ldots(ii)$$

घूर्णन अक्ष के परित: पिण्ड के सभी कणों पर लगने वाले बल-आघूर्णों की दिशायें समान हैं, अत: इनका योग ही पूरे पिण्ड पर लगने वाला बल-आघूर्ण होगा।

अत:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \ldots\ldots + \tau_n$$

$$= m_1 r_1^2\alpha + m_2 r_2^2\alpha + m_3 r_3^2\alpha + \ldots\ldots + m_n r_n^2\alpha$$

$$= \Sigma mr^2\alpha = (\Sigma mr^2)\,.\,\alpha$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$\boxed{\tau = I\,\alpha} \qquad \text{...(10)}$$

यदि $\alpha = 1$ तब

$$\tau = I$$

अर्थात्, **किसी वस्तु का घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण उस बल-आघूर्ण के बराबर होता है जो वस्तु में उसी अक्ष के परित: एकांक कोणीय त्वरण उत्पन्न कर दे।**

"Moment of Inertia of a rigid body about an axis of rotation is numerically equal to the external torque required to produce a unit angular acceleration in the rotational motion of the body about that axis."

§ 4.12 कार्य तथा बल-आघूर्ण में सम्बन्ध (Relation between Work and Torque)

माना M द्रव्यमान एक पिण्ड अनन्त सूक्ष्म द्रव्यमान कणों $m, m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$ से मिलकर बना है। इन कणों की पिण्ड के घूर्णन अक्ष से दूरियाँ क्रमश: $r, r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n$ हैं। माना दृढ़ पिण्ड, स्थिर Z-अक्ष के परित: एक समान कोणीय वेग ω से घूम रहा है (चित्र 4.13)।

माना किसी समय बिन्दु A पर पिण्ड के किसी कण का द्रव्यमान m घूर्णन अक्ष से दूरी r तथा रेखीय वेग v है। माना Δt समय पश्चात् कण बिन्दु B पर पहुँचता है। बिन्दु A से B के बीच कण का रेखीय विस्थान Δl तथा कोणीय विस्थापन $\Delta\theta$ है। यदि बिन्दु A से B तक कण को विस्थापित करने में F बल आरोपित हुआ हो तो अल्पतम रेखीय विस्थापन Δl के लिए किया गया कार्य

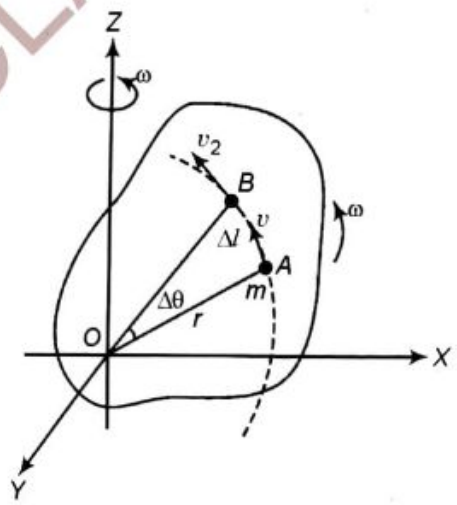
कार्य = बल × बल की दिशा में विस्थापन

या $\Delta W = F \times \Delta l$

या $\Delta W = F\,(r\Delta\theta) \qquad \left(\because \Delta\theta = \dfrac{\Delta l}{r}\right)$

$= Fr\,(\Delta\theta)$

अथवा $\boxed{\Delta W = \tau\,\Delta\theta}$ ...(11)



चित्र 4.13

अत: **घूर्णन गति करते हुए पिण्ड पर किया गया कार्य, पिण्ड पर लगे बल आघूर्ण तथा कोणीय विस्थापन के गुणनफल के बराबर होता है।**

"Work done on a body under rotational motion, is equal to the product of torque applied on the body and angular displacement of the body."

गति में पिण्ड पर किया गया कार्य $\Delta W = \tau\,\Delta\theta$, पिण्ड पर रेखीय गति में किये गये कार्य $W = F.s$ के ही समान है। SI मात्रक पद्धति में बल-आघूर्ण का मात्रक न्यूटन-मीटर तथा कोणीय विस्थापन का मात्रक रेडियन है, परन्तु कार्य का मात्रक जूल (J) होता है।

§ 4.13 शक्ति तथा बल-आघूर्ण में सम्बन्ध (Relation between Power and Torque)

घूर्णन गति में किसी पिण्ड पर किये गये कार्य के मान को निम्न समीकरण द्वारा प्रदर्शित किया जाता है—

$$\Delta W = \tau\,\Delta\theta$$

उपरोक्त समीकरण के दोनों पक्षों को सूक्ष्म समयान्तराल Δt से भाग देने पर (वास्तव में कार्य का मान इसी सूक्ष्म समयान्तराल के लिये कोणीय विस्थापन $\Delta\theta$ के रूप में प्राप्त किया जाता है)—

अत: $\dfrac{\Delta W}{\Delta t} = \tau \cdot \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$

अथवा $\boxed{P = \tau\omega}$ ...(12)

AYC TECHNICAL CLASSES

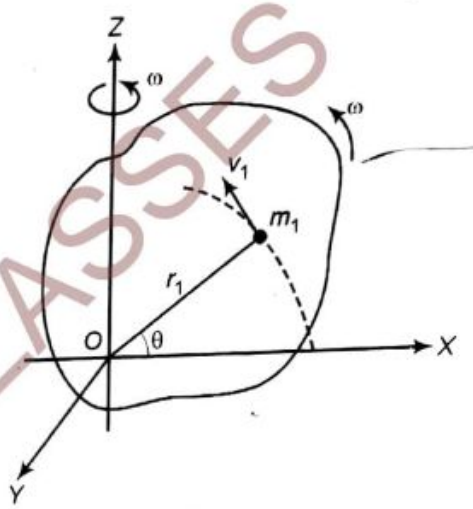
Scanned with CamScanner

अत: **घूर्णन गति में पिण्ड को दी गयी शक्ति, पिण्ड पर लगाये गये बल-आघूर्ण तथा पिण्ड में उत्पन्न कोणीय वेग के गुणनफल के बराबर होता है।**

"Power delivered to a body under rotational motion, is equal to the product of torque applied on the body and angular velocity produced in the body."

§ 4.14 घूर्णन गतिज ऊर्जा (Rotational Kinetic Energy)

माना M द्रव्यमान एक पिण्ड अनन्त सूक्ष्म कणों $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots\ldots, m_n$ से मिलकर बना है। इन कणों की घूर्णन अक्ष से दूरियाँ क्रमश: $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, r_n$ हैं। माना दृढ़ पिण्ड, स्थिर Z-अक्ष के परित: एकसमान कोणीय चाल ω से घूम रहा है चित्र, (4.14)।



चित्र 4.14

गतिमान पिण्ड में प्रत्येक कण अपने द्रव्यमान तथा रेखीय चाल के कारण गतिज ऊर्जा रखता है।

माना पिण्ड के किसी कण का द्रव्यमान m_1, रेखीय चाल v_1 तथा इसकी घूर्णन अक्ष से दूरी r_1 है, तब इस कण की गतिज ऊर्जा—

$$K_{1(\text{रेखीय})} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$\therefore \quad K_{1(\text{कोणीय})} = \frac{1}{2} m_1 (r_1\omega)^2 \qquad (\because v = r\omega)$$

घूर्णन गति में प्रत्येक कण की कोणीय चाल ω समान होती है तथा $v = r\omega$ लागू रहता है।

अत: $$K_{1(\text{कोणीय})} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2$$

∵ पिण्ड की कुल गतिज ऊर्जा इसके सभी कणों की गतिज ऊर्जाओं का योग होता है। अत: पिण्ड की कुल घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$K_{(\text{कोणीय})} = K_1 + K_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + K_n$$
$$= m r_1^2 \omega^2 + m_2 r_2^2 \omega + \ldots\ldots\ldots\ldots + m_n r_n^2 \omega$$

अत: $$K_{(\text{कोणीय})} = \Sigma \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

∵ ω सभी कणों के लिए समान है, अत:

$$K_{(\text{कोणीय})} = \frac{1}{2} (\Sigma m r^2)\, \omega^2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{K_{(\text{कोणीय})} = \frac{1}{2} I \omega^2} \qquad \ldots(13)$$

घूर्णन गतिज ऊर्जा का मात्रक **जूल** है तथा इसका विमीय सूत्र $[ML^2T^{-2}]$ है।

§ 4.15 कोणीय संवेग (Angular Momentum)

जिस प्रकार से रेखीय गति में, कण के द्रव्यमान m तथा रेखीय वेग $\vec{v}$ के गुणनफल को कण का **रेखीय संवेग** (linear momentum) कहते हैं तथा $\vec{P}$ से प्रदर्शित करते हैं (अर्थात् $\vec{P} = m\vec{v}$), उसी प्रकार

"घूर्णन गति में, घूर्णन अक्ष के परित: कण के रेखीय संवेग के आघूर्ण को, कण का कोणीय संवेग कहते हैं।"

AKC TECHNICAL CLASSES

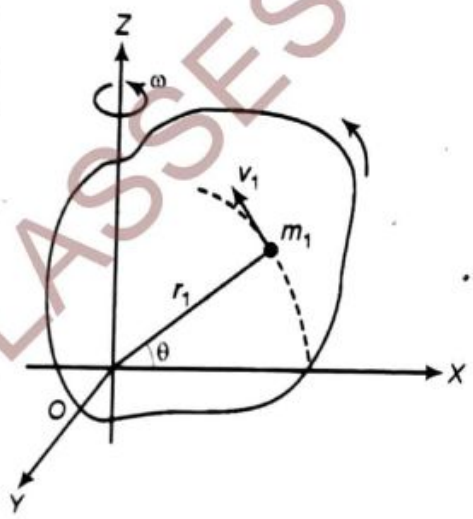
Scanned with CamScanner

"Moment of linear momentum of a particle about the axis of roration is called angular momentum of the particle."

इसे $\vec{J}$ अथवा $\vec{L}$ द्वारा व्यक्त करते हैं। यह एक **अक्षीय सदिश** है अर्थात् इसकी दिशा घूर्णन अक्ष के अनुदिश होती है। उपरोक्त परिभाषा के अनुसार,

$$\vec{J} \text{ अथवा } \vec{L} = \vec{P} \times \vec{r}$$

माना M द्रव्यमान का एक पिण्ड अनन्त सूक्ष्म कणों $m_1, m_2, m_3, \ldots\ldots\ldots, m_n$ से मिलकर बना है। इन कणों की घूर्णन अक्ष से दूरियाँ क्रमश: $r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, r_n$ हैं। माना दृढ़ पिण्ड स्थिर Z-अक्ष के परित: एक समान कोणीय चाल ω से घूम रहा है (चित्र 4.15)।



चित्र 4.15

माना पिण्ड के किसी कण का द्रव्यमान m_1, रेखीय वेग v_1 तथा घूर्णन अक्ष से दूरी r_1 है, तब इस कण का रेखीय संवेग

$$P_1 = m_1 v_1$$

इस कण के रेखीय संवेग का घूर्णन अक्ष के परित: आघूर्ण अर्थात् कण का घूर्णन अक्ष के परित: कोणीय संवेग

$$J_1 = P_1 \times r_1$$

या $$= m_1 v_1 r_1$$

$$= m_1 (r_1 \omega)\, r_1 \qquad (\because v = r\omega)$$

या $$J_1 = m_1 r_1^2 \omega$$

घूर्णन अक्ष के परित: पिण्ड के सभी कणों के कोणीय संवेगों का योग ही पूरे पिण्ड का कोणीय संवेग होता है। अत: पिण्ड का कोणीय संवेग

$$J = J_1 + J_2 + \ldots\ldots\ldots + J_n$$

$$J = m_1 r_1^2 \omega + m_2 r_2^2 \omega + \ldots\ldots\ldots + m_n r_n^2 \omega$$

$$= \sum m r^2 \omega$$

ω सभी कणों के लिए समान है, अत:

$$J = (\sum m r^2)\, \omega$$

अथवा $$\boldsymbol{J = I\omega} \qquad \ldots(14)$$

कोणीय संवेग का मात्रक **किग्रा-मीटर^2-सेकण्ड$^{-1}$** है तथा इसका विमीय सूत्र $[ML^2T^{-1}]$ है।

§ 4.16 कोणीय संवेग परिवर्तन की दर (Rate of Change of Angular Momentum)

माना M द्रव्यमान का एक पिण्ड , बाह्य बल-आघूर्ण τ के अन्तर्गत किसी स्थिर अक्ष के परित: घूर्णन गति कर रहा है। माना पिण्ड का कोणीय त्वरण α है तथा किसी क्षण t सेकण्ड पर पिण्ड का कोणीय वेग ω है, तब उस क्षण पिण्ड का कोणीय संवेग

$$J = I\omega$$

यहाँ ω तथा J समय t के साथ परिवर्तित होते हैं। अत: उपरोक्त समीकरण का समय t के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{dJ}{dt} = I.\frac{d\omega}{dt}$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

या $\frac{dJ}{dt} = I\alpha$ $\left(\because \frac{d\omega}{dt} = \alpha, \text{ पिण्ड का कोणीय त्वरण}\right)$

$\therefore$ $\frac{dJ}{dt} = \tau$ $(\because \tau = I\alpha)$ ...(15)

अत: स्पष्ट है कि **घूर्णन अक्ष के परित: किसी पिण्ड के कोणीय संवेग के परिवर्तन की दर, उस पिण्ड पर लगे बाह्य बल-आघूर्ण के बराबर होती है।**

"Torque acting on a body is equal to the rate of change of angular momentum of the body."

§ 4.17 कोणीय संवेग संरक्षण का सिद्धान्त (Law of Conservation of Angular Momentum)

हम जानते हैं कि **घूर्णन अक्ष के परित: किसी पिण्ड के कोणीय संवेग के परिवर्तन की दर, उस पिण्ड पर लगे बाह्य बल-आघूर्ण के बराबर होती है,** अत:

$$\frac{dJ}{dt} = \tau$$

यदि $\tau = 0$ तब $\frac{dJ}{dt} = 0$

$\therefore$ $dJ = 0$ (क्योंकि $dt \neq 0$, समय शून्य नहीं हो सकता है)

अर्थात् $J = \text{नियत (constant)}$

$= I\omega$ **(नियत)**

यही कोणीय संवेग संरक्षण का नियम है अर्थात् **यदि किसी अक्ष के परित: घूमते हुए पिण्ड पर कोई बाह्य बल-आघूर्ण आरोपित न हो तो उस पिण्ड का कोणीय संवेग ($J = I\omega$) नियत रहता है।**

"The law of conservation of angular momentum states that the angular momentum of a rotating body about an axis remains constant, if no external torque be applied to it. "

अर्थात् घूर्णन करते किसी पिण्ड के लिए,

$$J = I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{नियत} \quad ...(16)$$

यहाँ i पिण्ड की initial (आरम्भिक) तथा f पिण्ड की final (अन्तिम) स्थिति प्रदर्शित कर रहा है।

यदि $I_f > I_i$ तब $\omega_f < \omega_i$

अर्थात् यदि निकाय का जड़त्व आघूर्ण (I) बढ़ता है तो इसका कोणीय वेग (ω) घट जायेगा तथा यदि I घटेगा तो ω बढ़ जायेगा।

उदाहरण 1. जब कोई तैराक स्वीमिंग पूल में Diving board से कूदता है तो प्रारम्भ में उसके हाथ-पैर फैले रहते हैं। परन्तु जब वह हवा में कलाबाजी दिखाना चाहता है तो अपने हाथ-पैर सिकोड़ लेता है, जिससे उसका जड़त्व आघूर्ण (I) कम हो जाता है, तद्नुपात उसका कोणीय वेग (ω) बढ़ जाता है जिससे वह हवा में सुगमतापूर्वक कलैया लेने लगता है। जल में गिरने से कुछ क्षण पहले वह शरीर को पुन: सीधा कर लेता है जिससे I बढ़ जाता है और ω घट जाता है।

उदाहरण 2. डांसिंग बोर्ड पर अथवा बर्फ पर स्केट्स (Skates : पहिये लगे जूते) पहनकर नाचने वाली लड़की नाचते समय अपने फैले हाथों को सिकोड़ लेती है जिससे उसका जड़त्व आघूर्ण (I) कम हो जाता है, इसलिए कोणीय संवेग को स्थिर रखने के लिए कोणीय वेग (ω) बढ़ जाता है जिससे वह तेजी से घूमने लगती है।

उदाहरण 3. यदि किसी हल्के पिण्ड को धागे से बाँधकर क्षैतिज तल में घुमाया जाये तथा धागा अंगुली में लिपट रहा हो तो लिपटते समय पिण्ड का कोणीय वेग (ω) बढ़ता चला जाता है। चूँकि लिपटते समय पिण्ड का अंगुली के परित: जड़त्व आघूर्ण (I) घटता जाता है, इसीलिए कोणीय संवेग को स्थिर रखने के लिए कोणीय वेग (ω) बढ़ता जाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 4.18 पिण्ड की लुढ़कन गति (Rolling Motion of the Body)

जब किसी दृढ़ पिण्ड की घूर्णन गति किसी गतिशील घूर्णन अक्ष के परित: होती है तब इसे लुढ़कन गति कहते हैं।

"When a rigid body rotates around a fixed axis which is in translatory motion, such motion is known as rolling motion."

किसी पिण्ड की लुढ़कन गति में निम्न दो गतियाँ होती हैं—

(i) पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली घूर्णन अक्ष के परित: घूर्णन गति।

(ii) पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र की स्थानान्तरित गति।

चित्र 4.16 के अनुसार माना R त्रिज्या का एक पहिया समतल सतह पर बिना फिसले लुढ़क रहा है। जब पहिया किसी सूक्ष्म समयान्तराल dt में कोण $d\theta$ घूमता है तो इसका द्रव्यमान केन्द्र एक रेखीय दूरी $ds\,(= R\,d\theta)$ चलता है। (एक समान गोला खोखला अथवा ठोस या एक समान वृत्तीय वलय का द्रव्यमान केन्द्र पिण्ड के केन्द्र पर ही होता है।)

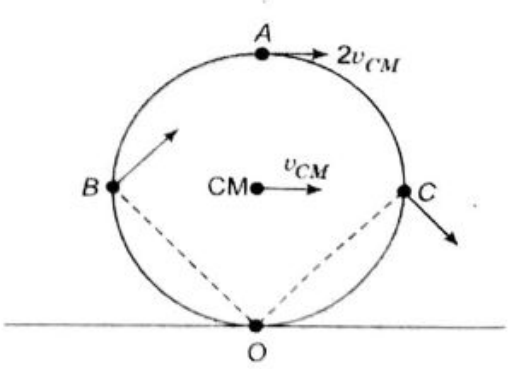
चित्र 4.16

इस गति में द्रव्यमान केन्द्र के वेग तथा त्वरण के परिमाण निम्न होते हैं—

वेग
$$v_{CM} = \frac{ds}{dt} = \frac{R\,d\theta}{dt} = R.\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = R\omega$$

तथा त्वरण,
$$a_{CM} = \frac{dv_{CM}}{dt} = \frac{R\,d\omega}{dt} = R.\left(\frac{d\omega}{dt}\right) = R\alpha$$

चित्र 4.17 में घूमते पहिये के विभिन्न कणों के रेखीय वेग प्रदर्शित हैं। किसी बिन्दु (माना B) के रेखीय वेग की दिशा, उस बिन्दु तथा पहिये के समतल सतह से स्पर्श बिन्दु O को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् होता है। किसी भी क्षण स्पर्श बिन्दु O, सतह के सापेक्ष विराम अवस्था में रहता है क्योंकि पहिया फिसलता नहीं है।



चित्र 4.17

यद्यपि पहिया, द्रव्यमान केन्द्र CM के परित: घूर्णन गति कर रहा है जो कि चित्र के लम्बवत् है, परन्तु पिण्ड में रेखीय गति होने के कारण बिन्दु O से गुजरने वाले (चित्र के लम्बवत्) अक्ष को पिण्ड का **तात्कालिक घूर्णन अक्ष** (Instantaneous Axis of rotation) कहते हैं। माना पहिया एक समान कोणीय चाल ω से घूम रहा है तब जिस सतह पर पहिया चल रहा है उसके सापेक्ष कणों का रेखीय वेग इस प्रकार होगा—

बिन्दु O की रेखीय गति, $v_0 = 0$

बिन्दु CM (द्रव्यमान केन्द्र) की रेखीय गति, $v_{CM} = R\omega$

बिन्दु A की रेखीय गति, $v_A = 2R\omega$

लुढ़कन गति तभी सम्भव है जब लुढ़कने वाले पिण्ड तथा सतह के मध्य घर्षण बल उपस्थित हो, जो लुढ़कने वाले पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र के सापेक्ष एक नेट बल-आघूर्ण आरोपित करे।

चूँकि किसी भी क्षण पहिये का स्पर्श बिन्दु O, सतह के सापेक्ष विराम अवस्था में रहता है। अत: घर्षण बल के उपस्थित रहते हुए भी पिण्ड की यान्त्रिक ऊर्जा में कोई हानि नहीं होती है जबकि फिसलने की स्थिति में यान्त्रिक ऊर्जा में हानि होती है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

बिना फिसले पिण्ड के लुढ़कने की शर्त (Condition of a body rolling without Slipping)—यदि पिण्ड पहिया है तो

(i) यदि $v_{CM} = R\omega$, तो पहिये की गति शुद्ध लुढ़कन ही होती है। पहिये का केन्द्र एक पूरे चक्र में $2\pi R$ दूरी चलता है।

(ii) यदि $v_{CM} > R\omega$, तो पहिये की गति आगे सरकते हुए लुढ़कन की (rolling with forward slipping) होती है। यह गति तब होती है जब किसी गीली अथवा चिकनी सड़क पर चलती कार अथवा साइकिल में ब्रेक लगा दी जाये। कार अथवा साइकिल कुछ लम्बी दूरी चलने के बाद रुकती है, परन्तु इस समयान्तराल में कार अथवा साइकिल के पहिये बहुत कम घूमते हैं। पहिये का स्पर्श बिन्दु सड़क पर रगड़कर आगे की ओर रेखीय वेग में चलता है। $v_A > 2R\omega$ अत: पहिये का केन्द्र एक पूरे चक्र में $2\pi R$ दूरी से अधिक चलता है।

(iii) यदि $v_{CM} < R\omega$, तो पहिये की गति पीछे सरकते हुए लुढ़कन की (rolling with backward slipping) होती है। यह गति तब होती है जब कीचड़भरी सड़क में वाहन के पहिये तेजी से घूमते हैं, परन्तु रेखीय गति नाममात्र की होती है। पहिये का केन्द्र एक पूरे चक्र में $2\pi R$ दूरी से कम दूरी चलता है।

§ 4.19 बिना फिसले लुढ़कते हुए पिण्ड की कुल गतिज ऊर्जा (Total Kinetic Energy of a Body Rolling without Slipping)

जब कोई पिण्ड किसी तल (समतल अथवा आनत तल) पर बिना फिसले लुढ़कता है तो वह अपने द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परित: घूर्णन गति करता है तथा उसका द्रव्यमान केन्द्र एक रेखीय गति करता है जिसके कारण पिण्ड आगे की ओर बढ़ता है। अत: पिण्ड में घूर्णन (rotational) तथा स्थानान्तरीय (translational) दोनों प्रकार की गतियाँ होती हैं तथा इन गतियों के कारण पिण्ड में गतिज ऊर्जा होती है।

अत: पिण्ड की कुल गतिज ऊर्जा

$$K_{total} = K_{trans} + K_{rota}$$

यदि पिण्ड का द्रव्यमान M, त्रिज्या R, घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण I व लुढ़कने का कोणीय वेग ω तथा द्रव्यमान केन्द्र का रेखीय वेग v हो, तब

$$K_{total} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \ldots (17)$$

$$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}MK^2\omega^2 \quad \ldots (18)$$

($\because I = MK^2$) K घूर्णन त्रिज्या है।

बिना फिसले लुढ़कने की शर्त लगाने पर, $v = R\omega$ या $\omega = \frac{v}{R}$

अत:

$$K_{total} = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}MK^2\frac{v^2}{R^2}$$

$$K_{total} = \frac{1}{2}Mv^2\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right) \quad \ldots (19)$$

§ 4.20 आनत तल पर बिना फिसले किसी पिण्ड का लुढ़कना (Rolling of a Body on an Inclined Plane without Slipping)

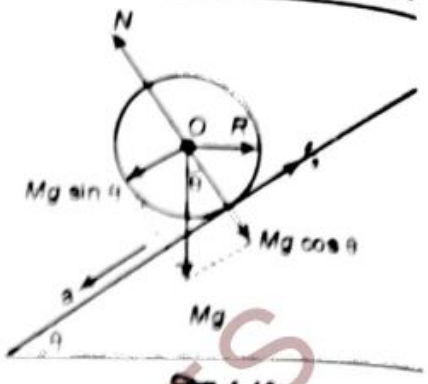
माना M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या का एक गोल पिण्ड, क्षैतिज से θ कोण पर झुके हुए तल (आनत तल) पर लुढ़क रहा है (चित्र 4.18)। पिण्ड की रेखीय गति ज्ञात करने के लिए पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र पर निम्न बल आरोपित माने जा सकते हैं—

(i) पिण्ड का भार mg, ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

(ii) आनत समतल की अभिलम्ब प्रतिक्रिया N तथा

(iii) आनत तल द्वारा पिण्ड पर आरोपित स्थैतिक घर्षण बल f_s, आनत तल के समान्तर ऊपर की ओर। यही बल पिण्ड के फिसलने से रोकता है तथा पिण्ड को लुढ़कने के लिए पिण्ड पर आवश्यक बल आघूर्ण τ आरोपित करता है।



चित्र 4.18

माना आनत तल के अनुदिश पिण्ड के द्रव्यमान केन्द्र का त्वरण a है, तब चित्रानुसार इन बलों को तल के समान्तर तथा अभिलम्बवत् वियोजित करने पर

$$Mg \sin\theta - f_s = Ma \qquad \ldots(i)$$

तथा $$N - Mg\cos\theta = 0 \qquad \ldots(ii)$$

पिण्ड के लुढ़कते समय

$$\tau = f_s R \qquad \ldots(iii)$$

परन्तु $$\tau = I\alpha \qquad \ldots(iv)$$

जहाँ I पिण्ड का घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण तथा α पिण्ड में उत्पन्न कोणीय त्वरण है।

अत: समीकरण (iii) तथा (iv) से

$$f_s R = I\alpha$$

या $$f_s = I\frac{\alpha}{R} \qquad \ldots(v)$$

बिना फिसले, लुढ़कने की स्थिति में,

$$a_{CM} = R\alpha$$ (यह घूर्णन गति करते गोले का रेखीय त्वरण है)

या $$a = R\alpha$$

अत: $$\alpha = \frac{a}{R}$$

α का यह मान समीकरण (v) में रखने पर

$$f_s = I\frac{a}{R^2} \qquad \ldots(vi)$$

f_s का यह मान समीकरण (i) में रखने पर

$$Mg\sin\theta - \frac{Ia}{R^2} = Ma$$

या $$Mg\sin\theta = Ma + \frac{Ia}{R^2} = a\left(M + \frac{I}{R^2}\right)$$

या $$a = \frac{Mg\sin\theta}{M + \frac{I}{R^2}}$$

या $$a = \frac{g\sin\theta}{1 + \frac{I}{MR^2}} \qquad \ldots(vii)$$

यदि घूर्णन अक्ष के परित: पिण्ड की घूर्णन त्रिज्या K हो, तो

$$I = MK^2$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: समीकरण (vii) से

$$a = \frac{g \sin\theta}{1 + \frac{K^2}{R^2}} \qquad ...(20)$$

रेखीय त्वरण a का यह मान समीकरण (vi) में रखने पर

$$f_s = \frac{I\left(\frac{g\sin\theta}{1+\frac{K^2}{R^2}}\right)}{R^2}$$

अत: $$f_s = \frac{Mg \sin\theta}{1 + \frac{R^2}{K^2}} \qquad ...(21)$$

लुढ़कते पिण्ड के लिए यह न्यूनतम आवश्यक घर्षण बल है, इससे कम घर्षण बल होने पर पिण्ड आनत तल पर नीचे को फिसलेगा।

$\because$ $$f_s = \mu_s N$$

या $$f_s = \mu_s Mg\cos\theta \qquad \text{(समीकरण (ii) से } N = Mg\cos\theta) \qquad ...(viii)$$

अत: f_s का मान समीकरण (21) में रखने पर

$$\mu_s Mg\cos\theta = \frac{Mg\sin\theta}{1+\frac{R^2}{K^2}}$$

या $$\mu_s = \frac{\tan\theta}{\left(1+\frac{R^2}{K^2}\right)} \qquad ...(22)$$

पिण्ड को आनत तल पर लुढ़कने के लिए यही न्यूनतम आवश्यक स्थैतिक घर्षण गुणांक का मान है। यदि μ_s का मान इससे कम होगा तो पिण्ड आनत तल पर नीचे को फिसलेगा।

उदाहरण :

(1) यदि लुढ़कने वाला पिण्ड ठोस गोला है, तब

$$I = MK^2 = \frac{2}{5}MR^2$$

$\therefore$ $$\frac{K^2}{R^2} = \frac{2}{5}$$

अत: समीकरण (20) से

$$a = \frac{g\sin\theta}{1+\left(\frac{2}{5}\right)}$$

$\therefore$ $$a = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

तथा समीकरण (vi) से

$$f_s = \frac{\left(\frac{2}{5}MR^2\right) \times \left(\frac{5}{7}g\sin\theta\right)}{R^2}$$

$$\therefore \quad f_s = \frac{2}{7}Mg\sin\theta$$

तथा समीकरण (viii) से

$$\frac{2}{7}Mg\sin\theta = \mu_s Mg\cos\theta$$

$$\mu_s = \frac{2}{7}\tan\theta$$

(2) यदि लुढ़कने वाला पिण्ड ठोस बेलन है, तब

$$I = MK^2 = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\therefore \quad \frac{K^2}{R^2} = \frac{1}{2}$$

अत: समीकरण (20) से

$$a = \frac{g\sin\theta}{1+\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore \quad a = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

तथा समीकरण (vi) से

$$f_s = \frac{\left(\frac{1}{2}MR^2\right) \times \left(\frac{2}{3}g\sin\theta\right)}{R^2}$$

$$\therefore \quad f_s = \frac{1}{3}Mg\sin\theta$$

तथा समीकरण (viii) से

$$\frac{1}{3}Mg\sin\theta = \mu_s Mg\cos\theta$$

$$\therefore \quad \mu_s = \frac{1}{3}\tan\theta$$

§ 4.21 गतिपालक चक्र (Flywheel)

ऑटोमोबाइल इंजन में डीजल अथवा पेट्रोल दहन इंजन का प्रयोग किया जाता है। इंजन (सिलिण्डर) में तकनीकी कारणों से ईंधन का दहन सदैव एकसमान नहीं होता है। अत: पिस्टन द्वारा दी गयी ऊर्जा घटती-बढ़ती रहती है, फलत: इन्जन के शैफ्ट (shaft : धुरा) को घुमाने वाला बल-आघूर्ण घटता बढ़ता रहता है, अत: शैफ्ट का घूर्णन एक समान नहीं रहता। इसे एक समान रखने के लिए शैफ्ट पर एक भारी तथा बड़ा पहिया लगा देते हैं, जिसे गतिपालक चक्र (flywheel) कहते हैं। इसका

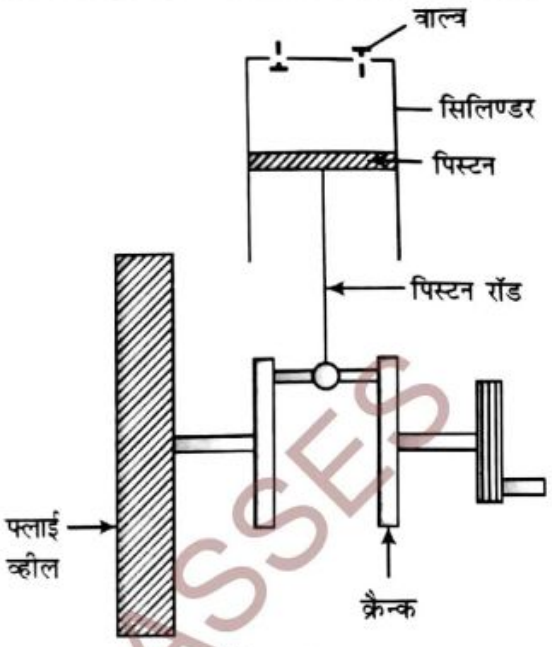
AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

जड़त्व-आघूर्ण बहुत अधिक होता है। शैफ्ट के घूमने पर गतिपालक चक्र भी घूमता है। शैफ्ट को घुमाने वाले बल-आघूर्ण के घटने या बढ़ने पर भी गतिपालक चक्र अपने बहुत अधिक जड़त्व-आघूर्ण के कारण लगभग एवं समान कोणीय गति से घूमता रहता है। फलत: शैफ्ट को एक समान गति से घुमाता रहता है जिसके कारण इंजन द्वारा लगभग एक समान गति के रूप में निर्गत (output) प्राप्त होता रहता है।

इसी कारण प्रत्येक फैक्टरी में घूमने वाली मशीनों में बड़े-बड़े गतिपालक चक्र लगे होते हैं ताकि दहन इंजन के निर्गत बल-आघूर्ण के बदलने अथवा यदि वैद्युत मोटर प्रयुक्त है तो वैद्युत मोटर में निवेशी (input) वैद्युत शक्ति का वोल्टेज आदि बदलने पर, अर्थात् निर्गत (output) बल-आघूर्ण के बदलने पर भी गतिपालक चक्र के बहुत अधिक जड़त्व आघूर्ण के कारण, मशीनें लगभग एक समान चाल से घूमती रहें।

मोटर साइकिल, मोटर कार तथा बच्चों की खिलौना गाड़ियों में गतिपालक चक्र का बहुतायत में प्रयोग किया जाता है।



चित्र 4.19

§ 4.22 रेखीय गति एवं घूर्णन गति में समीकरणों की तुलना (Comparison of Equations Between Linear and Rotaional Motions)

रेखीय गति तथा घूर्णन गति वस्तुत: समरूप होते हैं, इनकी समरूप विशिष्टताएँ निम्नवत् हैं—

क्रमांक (S.No.)	रेखीय गति (Linear Motion)	घूर्णन गति (Rotational Motion)
1.	रेखीय विस्थापन s	कोणीय विस्थापन θ
2.	रेखीय वेग $v = \frac{ds}{dt}$	कोणीय वेग $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
3.	रेखीय त्वरण $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	कोणीय त्वरण $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$
4.	रेखीय जड़त्व M	घूर्णन जड़त्व $I = \sum mr^2 = MK^2$
5.	बल $F = Ma = M\frac{dv}{dt} = M\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dp}{dt}$ यदि $F = 0$ तब $P =$ नियत	बल-आघूर्ण $\tau = Fr = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{dJ}{dt}$ यदि $\tau = 0$ तब $J =$ नियत
6.	रेखीय संवेग $P = mv$	कोणीय संवेग $J = L = I\omega$
7.	कार्य $W = \int_{s_0}^{s} F.ds$	कार्य $W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau\, d\theta$
8.	शक्ति $P = Fv$	शक्ति $P = \tau\omega$
9.	रेखीय गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}Mv^2$	घूर्णन गतिज ऊर्जा $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
10.	आवेग $\Delta P = F\,\Delta t$	कोणीय आवेग $\Delta J = \tau\,\Delta t$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

11.	यदि कोई बाह्य बल न हो तो रेखीय संवेग संरक्षित रहता है, अत: $P_1 = P_2$ या $m_1v_1 = m_2v_2$	यदि कोई बल-आघूर्ण कार्य न कर रहा हो तो कोणीय संवेग संरक्षित रहता है, अत: $J_1 = J_2$ or $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$
12.	रेखीय गति के समीकरण, यदि a नियत है (i) $v = u + at$ (ii) $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ (iii) $v^2 = u^2 + 2as$	घूर्णन गति के समीकरण, यदि α नियत है (i) $\omega = \omega_0 + \alpha t$ (ii) $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ (iii) $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

स्मरणीय बिन्दु
(Points to be Remembered)

1. यदि किसी पिण्ड पर बाह्य बल लगाने पर, पिण्ड के कणों के मध्य कोई पारस्परिक विस्थापन न हो तो ऐसे पिण्ड को दृढ़ पिण्ड कहते हैं।
2. वह बल जो किसी पिण्ड को अक्ष के परित: घुमाने की प्रवृत्ति रखता हो उसे बल-आघूर्ण (τ) कहते हैं तथा उसकी प्रवृत्ति की माप पिण्ड पर क्रियाशील बल तथा घूर्णन अक्ष से बल की क्रिया रेखा की लम्बवत् दूरी के गुणनफल से की जाती है।

$$\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r}$$

बल आघूर्ण का मात्रक न्यूटन-मीटर तथा विमीय सूत्र $[ML^2T^{-2}]$ होता है। वामावर्त दिशा में बल-आघूर्ण धनात्मक होता है।

3. **कोणीय त्वरण** (α)—कोणीय वेग परिवर्तन की दर को कोणीय त्वरण कहते हैं, $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ कोणीय त्वरण का मात्रक रेडियन/से०^2 तथा विमीय सूत्र $[M^0L^0T^{-2}]$ है।
4. रेखीय त्वरण तथा कोणीय त्वरण में निम्न सम्बन्ध होता है, $a = r\alpha$
5. रेखीय गति में जड़त्व की माप द्रव्यमान से तथा घूर्णन गति में जड़त्व आघूर्ण से की जाती है।
6. **जड़त्व आघूर्ण**—बल-आघूर्ण वस्तु की घूर्णन गति में अवस्था परिवर्तन करता है तथा जड़त्व-आघूर्ण अवस्था परिवर्तन का विरोध करता है। किसी पिण्ड के द्रव्यमान तथा घूर्ण अक्ष से दूरी के वर्ग के गुणनफल को पिण्ड का जड़त्व-आघूर्ण कहते हैं।

$$I = \sum mr^2$$

जड़त्व-आघूर्ण का S.I. मात्रक किग्रा-मीटर^2 तथा विमीय सूत्र $[ML^2T^0]$ है।

7. τ तथा α के मध्य सम्बन्ध — $\tau = I\alpha$
8. τ तथा W के मध्य सम्बन्ध — $dW = \tau\, d\theta$
9. τ तथा P के मध्य सम्बन्ध — $P = \tau\omega$
10. घूर्णन गतिज ऊर्जा — $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$
11. पिण्ड की परिभ्रमण त्रिज्या— $K = \sqrt{\frac{I}{M}}$

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

12. जड़त्व आघूर्ण के प्रमेय से—

(i) $I = I_{CM} + Md^2$

(ii) $I_X + I_Y = I_Z$

13. **कोणीय संवेग**—रेखीय संवेग के आघूर्ण को कोणीय संवेग कहते हैं।

$$J = mvr$$

14. जब कोई गोलीय पिण्ड किसी नत समतल पर लुढ़कता है तब पिण्ड का

(i) रेखीय त्वरण $$a = \frac{g \sin\theta}{1 + \frac{K^2}{R^2}}$$

(ii) आवश्यक न्यूनतम घर्षण बल $$f_s = \frac{Mg \sin\theta}{1 + \frac{R^2}{K^2}}$$

(iii) आवश्यक न्यूनतम घर्षण गुणांक $$\mu_s = \frac{\tan\theta}{\left(1 + \frac{R^2}{K^2}\right)}$$

15. किसी गोलीय पिण्ड के किये बिना फिसले लुढ़कने की शर्त

सतह तथा गोले के सम्पर्क बिन्दु का वेग $v_0 = 0$

द्रव्यमान केन्द्र का वेग $v_{CM} = R\omega$

गोले के उच्चतम बिन्दु का वेग $v_A = 2R\omega$

16. लुढ़कते पिण्ड की कुल गतिज ऊर्जा

$$K_{\text{total}} = \frac{1}{2}Mv^2\left(1 + \frac{K^2}{R^2}\right)$$

साधित आंकिक उदाहरण
(Solved Numerical Examples)

उदाहरण 1 : 30 ग्राम द्रव्यमान व 60 सेमी त्रिज्या वाली डिस्क पर कितना बल आघूर्ण लगाया जाए कि 5 सेकेण्ड में 2π का कोणीय वेग उत्पन्न हो जाए? (डिस्क का प्रारम्भिक वेग शून्य है व घूर्णन अक्ष डिस्क के तल के लम्बवत् व केन्द्र से गुजर रही है)

हल—ज्ञात है,

$M = 30$ किग्रा, $R = 60$ सेमी $= 0{\cdot}6$ मी, $t = 5$ से

$\omega = 2\pi$ व $\omega_0 = 0$

$\tau = I\alpha$

$$\tau = \frac{1}{2}MR^2\left[\frac{\omega - \omega_0}{t}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times 30 \times 0{\cdot}6 \times 0{\cdot}6\left[\frac{2\pi - 0}{5}\right]$$

$$\tau = \mathbf{6{\cdot}78\ N\text{-}m}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 2 : एक पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण 6 किग्रा-मी^{2} है। इस पर 14 न्यूटन-मी का बल-आघूर्ण लगाने पर उत्पन्न कोणीय त्वरण ज्ञात कीजिए।

हल—ज्ञात है,

$$I = 6 \text{ किग्रा-मी}^2$$

$$\tau = 14 \text{ न्यूटन-मी}$$

$$\tau = I\alpha$$

$$14 = 6 \times \alpha$$

$$\alpha = \mathbf{2 \cdot 33 \text{ रेडियन/से}^2}$$

उदाहरण 3 : एक वृत्ताकार डिस्क का द्रव्यमान 6 किग्रा तथा त्रिज्या 0·8 मीटर है। इसको 2000 चक्र प्रति मिनट की दर से केन्द्र में को गुजरने वाली तथा उसके तल के लम्बवत् अक्ष के परित: घुमाया जाता है तो निम्न की गणना कीजिए–(a) कोणीय वेग, (b) घूर्णन अक्ष के परित: डिस्क का जड़त्व आघूर्ण, तथा (c) कोणीय संवेग।

हल—(a) डिस्क का कोणीय वेग $\omega = \dfrac{2\pi n}{t}$

जहाँ $n = 2000$ तथा $t = 1$ मिनट $= 60$ सेकण्ड

अत: $$\omega = \frac{2\pi \times 2000}{60} = \frac{2 \times 3 \cdot 14 \times 2000}{60}$$

$$\omega = \mathbf{209 \cdot 33 \text{ रेडियन/सेकण्ड}}$$

(b) डिस्क के केन्द्र से गुजरने वाली तथा उसके तल के लम्बवत् अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{MR^2}{2} = \frac{6 \times 0 \cdot 8^2}{2}$$

$$I = \mathbf{1 \cdot 92 \text{ किग्रा} \times \text{मी}^2}$$

(c) घूर्णन अक्ष के परित: कोणीय संवेग $= I\omega$

$$= 1 \cdot 92 \times 209 \cdot 33$$

$$= \mathbf{401 \cdot 91 \text{ किग्रा} \times \text{मी}^2/\text{सेकण्ड}}$$

उदाहरण 4 : किसी पिण्ड के घूर्णन का कोणीय संवेग 24·8 जूल-सेकण्ड तथा घूर्णन की दर 15 चक्कर/से है। पिण्ड के जड़त्व आघूर्ण की गणना कीजिए।

हल—पिण्ड का कोणीय वेग

$$\omega = \frac{2\pi n}{t} = \frac{2 \times 3 \cdot 14 \times 15}{1}$$

$$= 94 \cdot 2 \text{ रेडियन / से}$$

पिण्ड का कोणीय संवेग $J = I\omega = 24 \cdot 8$ जूल-से

अत: $$I = \frac{J}{\omega} = \frac{24 \cdot 8}{94 \cdot 2}, \quad J = I\omega \text{ से}$$

$\therefore$ पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण $= \mathbf{0 \cdot 26 \text{ किग्रा} \times \text{मी}^2}$

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 5 : 4 किग्रा द्रव्यमान के एक पिण्ड को 2·0 मी लम्बी रस्सी से बाँधकर 4 चक्कर प्रति सेकण्ड की दर से क्षैतिज वृत्त में घुमाया जाता है। ज्ञात कीजिए घूर्णन अक्ष के परित: पिण्ड का (i) जड़त्व आघूर्ण (ii) कोणीय संवेग (iii) घूर्णन गतिज ऊर्जा।

हल—(i) पिण्ड का घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण

$$I = mr^2 = 4 \times (2{\cdot}0)^2$$

$$= \mathbf{16 \text{ किग्रा} \times \text{मीटर}^2}$$

(ii) पिण्ड का कोणीय वेग $\omega = \dfrac{2\pi n}{t}$

$$= \frac{2 \times \pi \times 4}{1}$$

$$= \mathbf{8\pi \text{ रेडियन/से}} \Rightarrow \mathbf{8 \times 3{\cdot}14 = 25{\cdot}12 \text{ रेडियन/से}}$$

∴ पिण्ड का घूर्णन अक्ष के परित: कोणीय संवेग

$$J = I\omega$$

$$= 16 \times 25{\cdot}12$$

$$= \mathbf{401{\cdot}92 \text{ किग्रा} \times \text{मी}^2/\text{से}}$$

(iii) पिण्ड की घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$K_R = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times (25{\cdot}12)^2$$

$$\boldsymbol{K_R = 5048{\cdot}12 \text{ जूल}}$$

उदाहरण 6 : एक दृढ़ पिण्ड किसी अक्ष के परित: घूमते हुए 20 चक्कर प्रति मिनट लगाता है। यदि इसकी गतिज ऊर्जा 10·0 जूल हो तो जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

हल—दिया है : $N = 20$ चक्कर/मिनट, $n = N/60 = 20/60 = 0{\cdot}3$ चक्कर/से

कोणीय वेग $\omega = 2\pi n = 2 \times 3{\cdot}14 \times 0{\cdot}3$

$$= 1{\cdot}884 \text{ रेडियन/से}$$

चूँकि घूर्णन गतिज ऊर्जा $K_R = \dfrac{1}{2} I\omega^2$

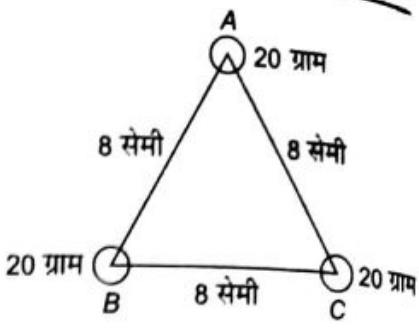
या जड़त्व आघूर्ण $I = \dfrac{2K_R}{\omega^2} = \dfrac{2 \times 10{\cdot}0}{(1{\cdot}884)^2} = \dfrac{20}{3{\cdot}55}$

$$\boldsymbol{I = 5{\cdot}635 \text{ किग्रा-मी}^2}$$

उदाहरण 7 : तीन कण (प्रत्येक का द्रव्यमान 20 ग्राम) एक 8 सेमी भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज के तीनों कोनों पर स्थित हैं। इस समुदाय का त्रिभुज के एक कोने में को गुजरने वाली तथा त्रिभुज के तल के लम्बवत् अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

हल—चित्र के अनुसार, माना कि जिस अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है, वह A कोने से गुजरता है जो त्रिभुज के लम्बवत् भी है। अत: इस समुदाय का दिये गये अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण



$$I = I_A + I_B + I_C$$

$$= m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2$$

$$= 0 + 20 \times (8)^2 + 20 \times (8)^2 \qquad [\because r_1 = 0]$$

$$= 0 + 1280 + 1280$$

$$= \mathbf{2560 \text{ ग्राम} \times \text{सेमी}^2}$$

उदाहरण 8 : 8 किग्रा एवं 0·6 मी व्यास का एक रिंग (Ring) अपने अक्ष पर घूर्णन गति करता है। यदि वह 2200 चक्कर प्रति मिनट लगाता हो तो रिंग का (i) जड़त्व आघूर्ण (ii) कोणीय संवेग (iii) घूर्णन गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए।

हल—यहाँ $M = 8$ किग्रा, $R = \frac{0{\cdot}6}{2} = 0{\cdot}3$ मी

$$n = \frac{2200}{60} = 36{\cdot}67/\text{से}$$

(i) जड़त्व आघूर्ण

$$I = MR^2$$

$$= 8 \times 0{\cdot}3^2$$

$$= \mathbf{0{\cdot}72 \text{ किग्रा-मी}^2}$$

(ii) कोणीय संवेग

$$L = I\omega$$

$$= I \times (2\pi n)$$

$$= 0{\cdot}72 \times (2 \times \pi \times 36{\cdot}67)$$

$$= \mathbf{165{\cdot}80 \text{ किग्रा-मी}^2/\text{से}}$$

(iii) घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$K_R = \frac{1}{2} I\omega^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 0{\cdot}72 \times (2 \times \pi \times 36{\cdot}67)^2$$

$$\boldsymbol{K_R = 19091{\cdot}66 \text{ जूल}}$$

उदाहरण 9 : एक वृत्ताकार चक्रिका, जिसका व्यास 2 मी तथा द्रव्यमान 20 किग्रा है, एक समतल मेज पर 5 मी/घण्टा के रेखीय वेग से घूम रही है। इसकी कुल गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए।

हल—क्योंकि चक्रिका रेखीय गति के साथ घूर्णन गति भी करती है; अत: उसमें रेखीय तथा घूर्णन दोनों प्रकार की गतिज ऊर्जाएँ हैं। अत: चक्रिका की कुल ऊर्जा

$$K_{\text{total}} = K_{\text{trans}} + K_{\text{rota}} = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

यहाँ चक्रिका का घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$I = \frac{MR^2}{2} \text{ तथा } \omega = \frac{v}{R}$$

अत: $$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2} \times \frac{v^2}{R^2}$$

$$E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{4}Mv^2$$

$$= \frac{3}{4}Mv^2$$

$\therefore$ $$E = \frac{3}{4} \times 20 \times \left(\frac{5}{60 \times 60}\right)$$

$$E = \mathbf{0 \cdot 0208 \text{ जूल}}$$

उदाहरण 10 : 3 kg द्रव्यमान और 12 cm त्रिज्या की एक डिस्क 1000 चक्कर प्रति मिनट पूर्ण करती है। इसे 4 से में रोकने के लिये बलयुग्म ज्ञात कीजिए।

हल—यहाँ $M = 3 \text{ kg}, R = 12 \text{ cm} = 0 \cdot 12 \text{ m}$

$n = 1000$ चक्कर/मिनट $= \frac{1000}{60} = 16 \cdot 67$ चक्कर/से

$t = 4$ से

आरम्भिक कोणीय वेग

$$\omega_0 = 2\pi n = 2 \times 3 \cdot 14 \times 16 \cdot 67$$

$= 104 \cdot 68$ /से तथा अंतिम कोणीय वेग शून्य है।

अत: $\omega = \omega_0 + \alpha . t$ से

$$0 = 104 \cdot 68 - \alpha \times 4$$

या कोणीय त्वरण $$\alpha = \frac{104 \cdot 68}{4}$$

$= 26 \cdot 172$ रेडियन/से^{2}

चूँकि बलयुग्म $\tau = I\alpha$

अत: $$\tau = \frac{MR^2}{2} \times \alpha$$

$$= \frac{3 \times (0 \cdot 12)^2}{2} \times 26 \cdot 172$$

$$= \mathbf{0 \cdot 5653 \text{ न्यूटन-मी}}$$

उदाहरण 11 : 40 किग्रा भार का एक पहिया 120 चक्कर प्रति मिनट लगा रहा है। उसका सम्पूर्ण द्रव्यमान घूर्णन अक्ष से 2 मीटर की दूरी पर केन्द्रित है। पहिये की गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिये।

हल—दिया है, पहिये का द्रव्यमान $M = 40$ किग्रा, अक्ष से समस्त द्रव्यमान की दूरी = घूर्णन अक्ष के परित: परिभ्रमण त्रिज्या $K = 2$ मीटर। अत: पहिये का घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण

$$I = MK^2 = 40 \times (2)^2 = 160 \text{ किग्रा-मीटर}^2$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

पहिये का कोणीय वेग $\omega = \frac{2\pi n}{t}$

$= \frac{2 \times 3{\cdot}14 \times 120}{60}$ रेडियन/सेकण्ड

$= 12{\cdot}56$ रेडियन/सेकण्ड

अत: पहिये की गतिज ऊर्जा $K_{rota} = \frac{1}{2} I\omega^2$

$= \frac{1}{2} \times 160 \times (12{\cdot}56)^2$ जूल

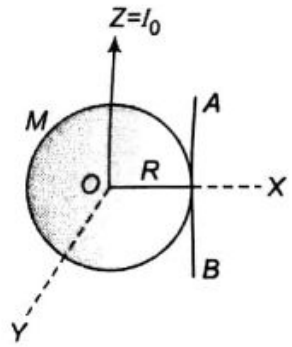
$K_{rota} = 12620{\cdot}29$ जूल

उदाहरण 12 : एक डिस्क का अपने अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण I_0 है। इसका जड़त्व-आघूर्ण परिधि से जाने वाली एक समान्तर अक्ष के परित: I_0 के पदों में ज्ञात कीजिए। **(UP BTE 2011)**

हल—माना डिस्क का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या R है। डिस्क का अपने तल के लम्बवत् गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के परित: जड़त्व-आघूर्ण,

$$I_z = \frac{MR^2}{2}$$

प्रश्नानुसार, $I_z = I_0 = \frac{MR^2}{2}$



समान्तर अक्षों के प्रमेय से

$$I = I_{CM} + MR^2$$

या $I = I_{AB} = I_0 + MR^2$

या $= \frac{MR^2}{2} + MR^2$

$= I_0 + 2I_0$

अत: $\boldsymbol{I = 3I_0}$

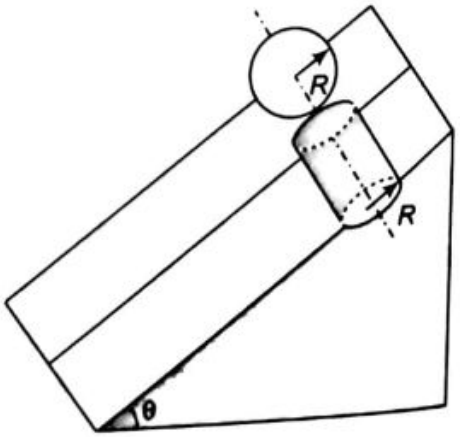
उदाहरण 13 : एक वलय व एक सिलिण्डर समान कोण पर झुके हुए तल पर बगैर फिसले लुढ़क रहे हैं। दोनों की त्रिज्याएँ समान हैं। इनमें से कौन-सा पिण्ड जमीन पर पहले तथा अधिकतम वेग से पहुँचेगा?

हल—आनत तल पर बिना फिसले लुढ़कते पिण्ड के लिए त्वरण

$$a = \frac{g \sin\theta}{1 + \frac{I}{MR^2}}$$

प्रश्नानुसार, वलय (ring) के लिए $I = MR^2$

अत: $a_{\text{वलय}} = a_r = \frac{g \sin\theta}{1+1} = 0{\cdot}5\, g \sin\theta$



तथा ठोस सिलिण्डर के लिए $I = \frac{1}{2} MR^2$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: $$a_{\text{सिलिण्डर}} = a_r = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{1}{2}} = 0.67\, g\sin\theta$$

चूँकि $$a_s > a_r$$

अत: स्पष्ट है कि ठोस सिलिण्डर का त्वरण अधिक होने के कारण ठोस सिलिण्डर जमीन पर अधिकतम वेग से तथा पहले पहुँचेगा।

उदाहरण 14 : किसी गतिपालक चक्र (flywheel) के चक्रणों की संख्या 80 चक्कर/मिनट से बढ़ाकर 320 चक्कर/मिनट करने में व्यय ऊर्जा 800 जूल है। ज्ञात कीजिए–गतिपालक चक्र का जड़त्व-आघूर्ण।

हल—दिया है, $$n_1 = \frac{80}{60} = \frac{\text{चक्कर}}{\text{सेकण्ड}} = 1{\cdot}33 \text{ चक्कर प्रति सेकण्ड}$$

तथा $$n_2 = \frac{320}{60} = \frac{\text{चक्कर}}{\text{सेकण्ड}} = 5{\cdot}33 \text{ चक्कर प्रति सेकण्ड}$$

(चक्रण बढ़ाने में व्यय ऊर्जा) किया गया कार्य $W = 800$ जूल

$\because$ $$\omega_1 = 2\times\pi\times n_1 = 2\pi\times 1{\cdot}33 = 2{\cdot}66\pi$$

तथा $$\omega_2 = 2\times\pi\times n_2 = 2\pi\times 5{\cdot}33 = 10{\cdot}66\pi$$

$\because$ किया गया कार्य = घूर्णन गतिज ऊर्जा में वृद्धि

$$W = K_2 - K_1$$

या $$W = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

$$= \frac{1}{2}I\,(\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

$$= \frac{1}{2}I\,[(10{\cdot}66\pi)^2 - (2{\cdot}66\pi)^2]$$

$$= \frac{1}{2}I\,[113{\cdot}63\pi^2 - 7{\cdot}07\pi^2]$$

$$= \frac{1}{2}I\,(106{\cdot}56\pi^2)$$

$$= I\,(53{\cdot}28\pi^2)$$

अत: $$I = \frac{W}{53{\cdot}28\pi^2} = \frac{800}{525{\cdot}32} = 1{\cdot}52 \text{ किग्रा मी}^2$$

उदाहरण 15 : 2 kg द्रव्यमान तथा 10 cm त्रिज्या की एक डिस्क अपने अक्ष के परित: घूर्णन करते हुए $10/\pi$ चक्कर प्रति सेकण्ड लगाती है। ज्ञात कीजिए— (i) इसकी घूर्णन गतिज ऊर्जा (ii) इसे 30 सेकण्ड में रोकने के लिए आवश्यक बल आघूर्ण। **(UP BTE 2010)**

हल—यहाँ $M = 2$ kg, $R = 10$ cm $= 0{\cdot}1$ m, $n = 10/\pi$ rps

(i) घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{MR^2}{2}\right](2\pi n)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2\times 0\cdot 10^2}{2}\right]\left[2\times\pi\times\frac{10}{\pi}\right]^2$$

$$= 2\ \text{J}$$

(ii) $\omega = \omega_0 + \alpha.t$ से कोणीय त्वरण,

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

$$= \frac{0 - 2\times\pi\times 10/\pi}{30}$$

$$= -2/3\ \text{rad/s}^2$$

अत: आवश्यक बल आघूर्ण

$$\tau = I\alpha = \frac{MR^2}{2}\times\alpha$$

$$= \frac{2\times 0\cdot 10^2}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \mathbf{-6\cdot 67\times 10^{-3}\ N\text{-}m}$$

उदाहरण 16 : M द्रव्यमान और R त्रिज्या का एक गोला क्षैतिज तल पर रेखीय वेग v से लुढ़क रहा है। गोले की सम्पूर्ण ऊर्जा का व्यंजक प्राप्त कीजिए। **[UP BTE 2004, 09 (BP)]**

हल—किसी तल पर बिना फिसले, लुढ़कते हुए ठोस गोले में रेखीय तथा घूर्णन गति, दोनों गतियाँ होती हैं। अत: लुढ़कते हुए ठोस गोले में रेखीय गतिज ऊर्जा तथा घूर्णन गतिज ऊर्जा दोनों होंगी।

अत: लुढ़कते हुए ठोस गोले की सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा

= रेखीय गतिज ऊर्जा + घूर्णन गतिज ऊर्जा

$$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

(जहाँ M = गोले का द्रव्यमान तथा R = गोले की त्रिज्या)

($\because$ M द्रव्यमान तथा R त्रिज्या के ठोस गोले का जड़त्व आघूर्ण उसके किसी व्यास के सापेक्ष $I = \frac{2}{5}MR^2$ तथा $\omega = \frac{v}{R}$ हैं, इनके मान उपरोक्त में प्रतिस्थापित करने पर)

अत: सम्पूर्ण गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}MR^2\right]\left[\frac{v}{R}\right]^2$

$$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{5}Mv^2$$

$$= \frac{5Mv^2 + 2Mv^2}{10}$$

$$= \mathbf{\frac{7}{10}Mv^2}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

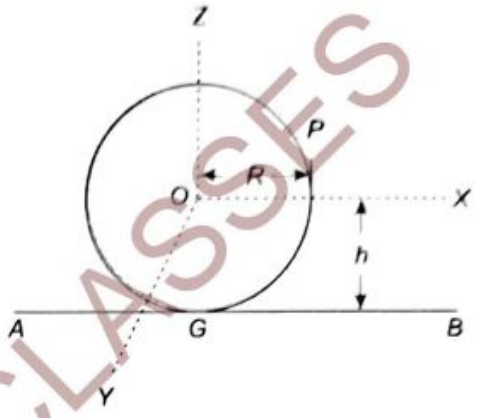
Scanned with CamScanner

उदाहरण 17 : केन्द्र से तल के लम्बवत् जाने वाली अक्ष के परित: एक वृत्ताकार चकती (circular disc) का जड़त्व आघूर्ण I_0 है। चकती के तल में स्पर्शवत् अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण की गणना करें। (UP BTE 2005)

हल—वृत्ताकार चकती (circular disc) के केन्द्र 'O' से होकर गुजरने वाली तथा चकती के तल के लम्बवत् अक्ष (Z-अक्ष) के परित: जड़त्व आघूर्ण

$$I_0 = \frac{MR^2}{2} \qquad ...(i)$$

जहाँ M = चकती का द्रव्यमान तथा R = चकती की त्रिज्या



लम्बवत् अक्षो के प्रमेय (theorem of perpendicular axes) से

$$I_X + I_Y = I_Z$$

सममिति से दोनो अक्षो (OX तथा OY) के परित: जड़त्व आघूर्ण समान होते है—

$$I_X = I_Y$$

$$\therefore \quad I_X + I_Y = I_Z$$

$$= I_0 \qquad (\text{दिया है } I_Z = I_0)$$

या $$2I_X = I_0$$

या $$I_X = \frac{I_0}{2}$$

या $$I_X = \frac{I_0}{2} \qquad ...(ii)$$

समान्तर अक्षों के प्रमेय (Theorem of parallel axes) से चकती के तल के स्पर्शवत् अक्ष AB के परित: जड़त्व आघूर्ण

$$I_{AB} = I_G + M.h^2$$

जहाँ I_G = चकती के गुरुत्व केन्द्र से होकर गुजरने वाले, AB के समान्तर अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण

h = दोनों अक्षों के मध्य लम्बवत् दूरी

यहाँ दिया है : $I_G = I_X = \frac{I_0}{2}$ तथा $h = R$ (चकती की त्रिज्या)

$$I_{AB} = \frac{I_0}{2} + M.R^2 \qquad [\text{समीकरण (i) से } MR^2 = 2I_0]$$

$$= \frac{I_0}{2} + 2I_0$$

$$= \frac{5}{2} I_0$$

उदाहरण 18 : क्षैतिज से $\theta°$ कोण पर झुके नत तल के h ऊँचाई (ऊर्ध्वाधर ऊँचाई) से M द्रव्यमान व R त्रिज्या का एक ठोस गोला विरामावस्था से लुढ़क रहा है। रेखीय गति की दिशा में गोले पर आरोपित त्वरण की गणना कीजिए।

(UP BTE 2006)

हल—बिन्दु A से, नत तल AB पर लुढ़कता हुआ गोला जब बिन्दु B (तली) पर पहुँचेगा, तो उसकी सम्पूर्ण स्थितिज ऊर्जा (P.E. at $A = mgh$), घूर्णन तथा स्थानान्तरीय गतिज ऊर्जा में रूपान्तरित हो जाएगी।

अत:

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

या $$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\left[\frac{v}{R}\right]^2 \qquad \left[\because \omega = \frac{v}{R}\right]$$

या $$2\,Mgh = v^2\left[M + \frac{1}{R^2}\right]$$

या $$v^2 = \frac{2Mgh}{M + \frac{1}{R^2}} \qquad ...(i)$$

यदि गोले की दिशा में त्वरण a तथा गोला A से B तक S-दूरी तय करता हो, तो गति के तृतीय समीकरण से

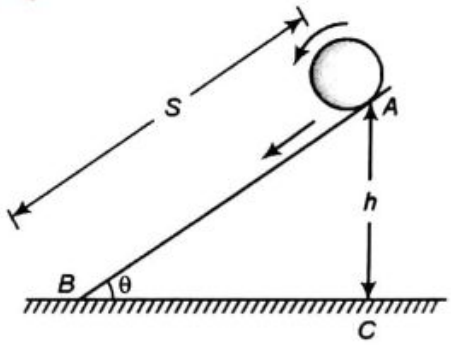
$$v^2 = u^2 + 2as$$

∵ गोला विरामावस्था से गति प्रारम्भ करता है, अत:

$$u = 0$$

$$v = 0 + 2aS$$

$$v = 2aS$$



या समीकरण (i) व (ii) से

$$2as = \frac{2Mgh}{M + \frac{I}{R^2}}$$

त्वरण, $$a = \left[\frac{Mg}{M + \frac{I}{R^2}}\right]\frac{h}{S}$$

उदाहरण 19 : एक कण जिसका द्रव्यमान 3 किग्रा है, 0·6 मीटर की त्रिज्या वाले वृत्त में 46 रेडियन/सेकण्ड के कोणीय वेग से घूम रहा है। यदि इसके मार्ग की त्रिज्या 1·2 मी हो जाए तो इसके कोणीय वेग का मान क्या होगा?

हल—यदि कण का घूर्णन अक्ष के परित: प्रारम्भिक जड़त्व आघूर्ण I_i तथा कोणीय वेग ω_i तथा बाद में त्रिज्या बदलने के कारण जड़त्व आघूर्ण I_f तथा कोणीय वेग ω_f हो तो कोणीय संवेग संरक्षरण के नियम से,

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \qquad \text{[कण पर बाह्य बल आघूर्ण शून्य है]}$$

या $$mr_i^2\omega_i = mr_f^2\omega_f$$

$$r_i^2\omega_i = r_f^2\omega_f$$

$$(0{\cdot}6)^2 \times 46 = (1{\cdot}2)^2\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{0{\cdot}6 \times 0{\cdot}6 \times 46}{1{\cdot}2 \times 1{\cdot}2}$$

$$= \mathbf{11{\cdot}5\ \text{रेडियन/सेकण्ड}}$$

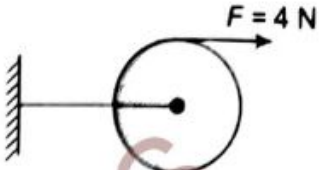
AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 20 : 30 सेमी त्रिज्या तथा 6000 ग्राम द्रव्यमान का एक ऊर्ध्वाधर ठोस पहिया अपनी क्षैतिज धुरी पर घूमने के लिए स्वतंत्र है। पहिए पर एक डोरी लिपटी है। डोरी को 4 न्यूटन के बल से 6 सेकण्ड तक खींचा जाता है। गणना कीजिए, पहिया किस कोणीय चाल से घूमने लगेगा। धुरी घर्षणरहित है।

हल—हम जानते हैं कि $\tau = I\alpha$

(यहाँ $\tau = FR$)



अत: $FR = I\alpha$

या $FR = \frac{1}{2}MR^2\alpha$

या $F = \frac{1}{2}MR\alpha$

[$F = 4$ न्यूटन, $M = 6000$ ग्राम $= 6$ किग्रा

$R = 30$ सेमी $= 0{\cdot}30$ मीटर]

या $4 = \frac{1}{2} \times 6 \times 0{\cdot}30\,\alpha$

$$\alpha = \frac{8}{6 \times 0{\cdot}30} = \frac{8}{1{\cdot}8} = 4{\cdot}44 \text{ रेडियन/सेकण्ड}$$

t सेकण्ड पर पहिए की कोणीय चाल,

$\omega = \omega_0 + \alpha t$ (यहाँ $\omega_0 = 0$)

$= \alpha t$

$= 4{\cdot}44 \times 6$

$= 26{\cdot}66$ रेडियन/सेकण्ड

उदाहरण 21. 1·0 kg द्रव्यमान और 0·2 m त्रिज्या की एक वृत्ताकार चकती 4 रेडियन/से० के कोणीय वेग से घूम रही है। गणना कीजिए—

(i) घूर्णन गति ऊर्जा

(ii) 5 सेकण्ड में एक समान रूप से इसे रोकने के लिए आवश्यक बल आघूर्ण। **(UP BTE 2014)**

हल—प्रश्नानुसार, दिया है $M = 1{\cdot}0\text{ kg},\ R = 0{\cdot}2\text{ m},\ \omega = 4\text{ rad s}^{-1}$

अत:

(i) घूर्णन गतिज ऊर्जा $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{MR^2}{2}\right](4)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1{\cdot}0 \times (0{\cdot}2)^2}{2}\right](4)^2$$

$$K_R = 0{\cdot}16\text{ J}$$

(ii) समीकरण $W = \omega_0 + \alpha \cdot t$ से

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

$$= \frac{0-4}{5}$$

$$= -0{\cdot}8 \text{ rad s}^{-2}$$

अत: रोकने के लिए आवश्यक बल-आघूर्ण

$$\tau = I\alpha = \frac{MR^2}{2}.\alpha$$

$$= \frac{1{\cdot}0 \times (0{\cdot}2)^2}{2} \times (-0{\cdot}8)$$

$$\tau = \mathbf{-0{\cdot}016\ N\ m}$$

उदाहरण 22. कोणीय संवेग संरक्षण सिद्धान्त को लिखें। 0·5 किग्रा मी^{2} जड़त्व-आघूर्ण एवं 20 सेमी त्रिज्या का एक पहिया अपने अक्ष पर 20·0 रेडियन/से के कोणीय वेग से घूम रहा है। यदि पहिये पर उक्त अवस्था में 200 g का द्रव्यमान और रख दें तो पहिये के नये कोणीय वेग की गणना कीजिए। **(UP BTE 2015)**

हल— दिया है $I_1 = 0{\cdot}5 \text{ kg m}^2$

$r = 20 \text{ cm} = 2{\cdot}0 \text{ m}$

$\omega_1 = 20{\cdot}0 \text{ rad/s}$

अतिरिक्त भार $\Delta m = 200 \text{ g} = 0{\cdot}2 \text{ kg}$

$\omega_2 = ?$

∵ संवेग संरक्षण सिद्धान्त के अनुसार, $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$ ...(1)

पहिये के तल के लम्बवत् तथा उसके गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाले अक्ष के सापेक्ष पहिये का जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{m r^2}{2}$$

अत: प्रथम स्थिति में $0{\cdot}5 = \frac{m_1 \times (0{\cdot}2)^2}{2}$

अत: $m_1 = 25 \text{ kg}$

पहिये पर अतिरिक्त भार Δm रखने पर पहिये का कुल भार $m_2 = m_1 + \Delta m$

$= 25 + 0{\cdot}2 \text{ kg}$

$= 25{\cdot}2 \text{ kg}$

अत: द्वितीय स्थिति में $I_2 = \frac{25{\cdot}2 \times (0{\cdot}2)^2}{2} = 0{\cdot}504 \text{ kg m}^2$

पुन: समीकरण (1) से

$$\omega_2 = \frac{I\omega}{I_2}$$

या $\omega_2 = \frac{0{\cdot}5 \times 20{\cdot}0}{0{\cdot}504} \text{ rad/s}$

$= 19{\cdot}841 \text{ rad/s}$

अत: $\omega_2 = \mathbf{19{\cdot}8 \text{ rad/s}}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अभ्यास (Exercises)

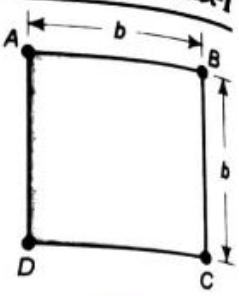
1. कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग तथा कोणीय त्वरण की परिभाषा दीजिए।
2. किसी वस्तु पर कार्यरत बल-आघूर्ण से आप क्या समझते हैं?
3. घूर्णन गतिज ऊर्जा के आधार पर जड़त्व आघूर्ण को परिभाषित कीजिए। **(UP BTE 2001)**
4. कोणीय त्वरण व स्पर्श रेखीय त्वरण में सम्बन्ध स्थापित कीजिए।
5. जड़त्व व जड़त्व-आघूर्ण मे क्या अन्तर है? जड़त्व आघूर्ण का भौतिक महत्व क्या है? जड़त्व आघूर्ण किन-किन बातों पर निर्भर करता है? **(UP BTE 2011)**
6. कोणीय संवेग को समझाइये तथा कोणीय संवेग संरक्षण का सिद्धान्त बताइये। **(UP BTE 2009)**
7. बल-आघूर्ण तथा जड़त्व आघूर्ण में सम्बन्ध स्थापित कीजिए।
8. घूर्णन त्रिज्या अथवा परिभ्रमण त्रिज्या से आप क्या समझते हैं?
9. एक पहिये का जड़त्व आघूर्ण 50,000 ग्राम सेमी^{2} है। वह 1200 चक्कर प्रति मिनट लगा रहा है। इसे 10 सेकण्ड में रोकने के लिए आवश्यक बल-आघूर्ण की गणना कीजिए। (**उत्तर :** $6{\cdot}28 \times 10^{-2}$ न्यूटन-मीटर)
10. शिखर एक गाड़ी के पहिये को नियत कोणीय त्वरण 3·50 रेडियन/ सेकण्ड^2 से घुमा रहा है। यदि $t = 0$ पर कोणीय वेग 2·00 रेडियन/सेकण्ड हो तो—
    (i) $t = 2{\cdot}00$ सेकण्ड में पहिया कितना कोण घूम जायेगा? (**संकेत :** $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$)
    (ii) $t = 2{\cdot}00$ सेकण्ड पर कितना कोणीय वेग होगा? तथा (**संकेत :** $\omega = \omega_0 + \alpha t$)
    (iii) $t = 2{\cdot}00$ सेकण्ड व $t = 3{\cdot}00$ सेकण्ड के मध्य पहिया कितना कोण घूम जायेगा?
    (**उत्तर :** (i) 11 रेडियन (ii) 9 रेडियन/सेकण्ड (iii) 10·75 रेडियन)
11. रेलगाड़ी का पहिया 1500 चक्कर प्रति मिनट लगा रहा है। इसे ब्रेक लगाकर 10 सेकण्ड में रोक दिया जाता है। कोणीय त्वरण ज्ञात कीजिए। (**उत्तर :** –ve 15·7 रेडियन/सेकण्ड^2)
12. 10 किग्रा द्रव्यमान एवं 0·4 मीटर व्यास की एक रिंग अपने द्रव्यमान केन्द्र से गुजरने वाली एवं तल के लम्बवत् अक्ष के परित: 2100 चक्कर/ मिनट की दर से घूम रही है। उसके (i) जड़त्व-आघूर्ण तथा (ii) कोणीय-संवेग की गणना कीजिए।
    (**उत्तर :** (i) 0·4 किग्रा-मीटर^2 (ii) 87·96 किग्रा मीटर^2/सेकण्ड)
13. किसी पिण्ड के घूर्णन का कोणीय संवेग 144·6 जूल सेकण्ड तथा घूर्णन की दर 20 चक्कर/सेकण्ड है। पिण्ड के जड़त्व-आघूर्ण की गणना कीजिए। (**उत्तर :** 1·15 किग्रा-मीटर^2)
14. एक मोटर के पहियों का चक्रण 2 सेकण्ड में 1200 चक्कर/मिनट से बढ़कर 1800 चक्कर/मिनट हो जाता है। कोणीय त्वरण ज्ञात कीजिए। (**उत्तर :** 10π)
15. यदि पृथ्वी सहसा इतनी छोटी हो जाए कि उसकी त्रिज्या वर्तमान त्रिज्या की आधी रह जाये तो दिन का मान कितना रह जायेगा? (**उत्तर :** 6 घण्टे)
16. घड़ी की सेकण्ड, मिनट तथा घण्टे वाली सुइयों की कोणीय चाल ज्ञात कीजिए।
    (**उत्तर :** $\pi/30$ रेडियन/सेकण्ड (ii) $\pi/1800$ रेडियन/सेकण्ड (iii) $\pi/21600$ रेडियन/सेकण्ड)
17. एक पतला बेलनाकार कोश जिसका द्रव्यमान M है (i) v गति से बिना घूमे चल रहा है (ii) बिना फिसले समान गति से लुढ़क रहा है। दोनों स्थितियों में कुल गतिज ऊर्जाओं का अनुपात ज्ञात कीजिए। (**उत्तर :** $K_1 : K_2 = 1 : 2$)
18. एक गोलीय कोश एवं ठोस गोला नत समतल पर लुढ़कते हैं। दिखाइये कि उनके त्वरणों का अनुपात 21 : 25 होगा।

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

19. एक गेंद क्षैतिज से 30° कोण पर एक आनत तल पर लुढ़क रही है। यह गेंद विश्राम अवस्था से 7 मीटर लुढ़कने में कितना समय लेगी? ($g = 9{\cdot}8$ मी/से^{2})

(उत्तर : $t = 2$ सेकण्ड)



20. b मीटर भुजा वाले वर्ग के प्रत्येक कोने पर m किग्रा द्रव्यमान के पिण्ड रखे हुए हैं। ज्ञात कीजिये (i) A से गुजरने वाले वर्ग-तल के लम्बवत् अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण (ii) वर्ग के केन्द्र के परित: जड़त्व आघूर्ण जबकि अक्ष तल के लम्बवत् है।

(उत्तर : (i) $4mb^2$ किग्रा-मीटर^2 (ii) $2mb^2$ किग्रा-मीटर^2**)**

आंकिक प्रश्नों के संक्षिप्त हल

(9) समीकरण व $\omega = \omega_o - \alpha t$ से $\omega = 2\pi n - \alpha t = 0$

या $$2\pi\left(\frac{1200}{60}\right) - \alpha \times 10 = 0 \quad \text{अत: } \alpha = 4\pi$$

पुन: सूत्र $\tau = I\alpha$ से $\tau = 5 \times 10^{-3}$ kg m$^2 \times 4\pi =$ **$6{\cdot}28 \times 10^{-2}$ न्यूटन**

(10) (i) सूत्र $\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ से $\theta = 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3{\cdot}50 \times (2)^2 =$ **11 रेडियन**

(ii) सूत्र $\omega = \omega_o + \alpha t$ से $\omega = 2 + 3{\cdot}50 \times 2 =$ **9 रेडियन/सेकण्ड**

(iii) सूत्र $\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ से $t = 3$ सेकण्ड के लिए $\theta = 21{\cdot}75$ रेडियन

अत: 2 व 3 सेकण्ड के मध्य पहिया द्वारा घूमा गया कोण (21·75 – 11) रेडियन = **10·75 रेडियन**

(11) सूत्र $\omega = \omega_o + \alpha t$ से $\omega = 2\pi n + \alpha t = 0$

अत: $\omega = 2 \times \pi \times \left(\frac{1500}{60}\right) + \alpha \times 10 = 0$ या $\alpha = -$ ve **15·7 रेडियन/सेकण्ड^2**

(12) (i) सूत्र $h = mr^2$ से $I = 10 \times (0{\cdot}2)^2 = 0{\cdot}4$ किग्रा-मीटर^2

(ii) सूत्र $J = I\omega$ से $J = I \times \frac{2\pi n}{t} = \frac{0{\cdot}4 \times 2\pi \times 2100}{60} =$ **87·92 किग्रा-मीटर^2/सेकण्ड**

(13) सूत्र $J = I\omega$ से $I = \frac{J}{\omega} = \frac{J}{2\pi n} = \frac{144{\cdot}6}{2 \times \pi \times 20} =$ **1·15 किग्रा-मी^{2}**

(14) सूत्र $\omega = \omega_o + \alpha t$ से $2 \times \pi \times \left(\frac{1800}{60}\right) = 2 \times \pi \times \left(\frac{1200}{60}\right) + \alpha \times 2$

अत: $\alpha = 10\pi$ रेडियन/सेकण्ड^2

(15) ∵ $$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow \frac{2}{5}mr_1^2\omega_1 = \frac{2}{5}mr_2^2\omega_2$$

या, $$r_1^2\omega = \left(\frac{r_1}{2}\right)^2\omega_2 \quad (\because r_2 = \frac{r_1}{2}) \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{4} = \frac{24}{4} \text{ घण्टे} = \textbf{6 घण्टे}$$

(16) सेकण्ड वाली सुई के लिये $$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30} \textbf{ रेडियन/सेकण्ड}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

इसी प्रकार मिनट वाली सुई के लिये $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3600} = \frac{\pi}{1800}$ **रेडियन/सेकण्ड**

तथा घण्टे वाली सुई के लिये $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{12\times 3600} = \frac{\pi}{21600}$ **रेडियन/सेकण्ड**

(17) प्रश्नानुसार, $K_1 = \frac{1}{2}mv^2$ तथा $K_2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

अत: $\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv^2 + \left(\frac{1}{2}mr^2\right)\frac{v^2}{r^2}} \Rightarrow \mathbf{K_1 : K_2 = 1 : 2}$

(18) प्रश्नानुसार, लुढ़कते गोलीय कोश का त्वरण, $a_1 = \frac{g\sin\theta}{1+\frac{I}{MR^2}}$

जहाँ $I = \frac{2}{3}MR^2$ अत: $a_1 = \frac{3}{5}g\sin\theta$

इसी प्रकार लुढ़कते ठोस गोले का त्वरण, $a_2 = \frac{5}{7}g\sin\theta$

अत: इनके त्वरण का अनुपात, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{3}{5}g\sin\theta}{\frac{5}{7}g\sin\theta}$

या $\mathbf{\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{5}\times\frac{7}{5} = \frac{21}{25}}$

(19) सूत्र $a = \frac{5}{7}g\sin\theta$ से $a = \frac{5}{7}\times 9\cdot 8\times\sin 30^\circ = 3\cdot 5$

पुन: सूत्र $v^2 = u^2 + 2as$ से $v^2 = 0 + 2\times 3\cdot 5\times 7 = 49 \Rightarrow v = 7$ मी०/से०

अत: सूत्र $v = u + at$ से $7 = 0 + 3\cdot 5t$ अत: $\mathbf{t = 2}$ **सेकण्ड**

(20) (i) A के परित: जड़त्व आघूर्ण $I_A = I_B + I_C + I_D \Rightarrow I_A = mb^2 + m(b\sqrt{2})^2 + mb^2 = \mathbf{4mb^2}$

(ii) केन्द्र के परित: जड़त्व आघूर्ण, $I = 4\times m\left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \mathbf{2mb^2}$

❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Chapter 5 ग्रहों एवं उपग्रहों की गतियाँ (Motion of Planets and Satellites)

SYLLABUS

5.1 *Gravitational force, Kepler's law of planetary motion,*

5.2 *Acceleration due to gravity and its variation,*

5.3 *Gravitational Potential and Gravitational potential energy,*

5.4 *Motion of satellite, orbital velocity and time period of satellite, total energy and Binding energy of a satellite, Escape energy and escape velocity,*

5.5 *Types of satellites, Geo-stationary satellite, semi-synchronous, polar satellite (concept only) and their uses in science and technology,*

5.6 *Concept of Black Holes.*

§ 5.1 परिचय (Introduction)

ब्रह्माण्ड में किसी तारे (हमारा सूर्य भी एक तारा है) के परित: जो पिण्ड अपनी-अपनी कक्षाओं में परिक्रमण करते रहते हैं उन्हें ग्रह (Planet) कहते हैं।

वे प्राकृतिक आकाशीय अथवा कृत्रिम पिण्ड जो ग्रहों की परिक्रमा उस ग्रह के गुरुत्वाकर्षण बल के कारण करते हैं, उपग्रह (Satellite) कहलाते हैं।

सूर्य, ग्रहों तथा उनके उपग्रहों के इस परिवार को सौर परिवार (Solar system) कहते हैं।

"ब्रह्माण्ड के किन्हीं भी दो कणों या पिण्डों के मध्य गुरुत्व के कारण लगने वाले आकर्षण बल को गुरुत्वाकर्षण बल कहते हैं। यह बल सदैव आकर्षण का होता है।" वास्तव में ब्रह्माण्ड का अस्तित्व इसी बल के कारण बना हुआ है।

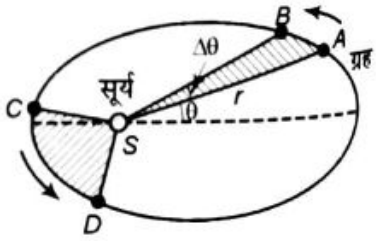
§ 5.2 ग्रहों की गति सम्बन्धी कैपलर के नियम* (Kepler's Laws of Planetary motion)

टाइको ब्रेह (Tycho Brahe) के खगोलीय प्रेक्षणों के आधार पर कैपलर ने सौर परिवार में सूर्य की परिक्रमा करने वाले ग्रहों की गति के सम्बन्ध में निम्न तीन नियम दिये—

(1) कक्षाओं का नियम (Laws of Orbits)—**प्रत्येक ग्रह सूर्य के परित: दीर्घवृत्ताकार पथ (elliptical path) पर गति करता है तथा सूर्य उस दीर्घवृत्त के किसी एक फोकस (नाभि) पर होता है।** विभिन्न ग्रहों की कक्षायें भिन्न-भिन्न होती हैं।

(2) क्षेत्रीय चाल का नियम (Law of Areal Velocity)—**किसी ग्रह के कक्षीय तल (Plane of orbit) में ग्रह तथा सूर्य को मिलाने वाली रेखा समान समयान्तरालों में (कक्षा के तल में) समान क्षेत्र तय (sweep) करती है अर्थात् ग्रह तथा सूर्य को मिलाने वाली रेखा की क्षेत्रफलीय चाल (areal velocity) नियत है।**

चित्र 5.1 में प्रदर्शित कोई ग्रह सूर्य की परिक्रमा करते हुए एक निश्चित समयान्तराल में अपनी कक्षा के बिन्दु A से बिन्दु B तक जाता है तथा उतने ही समयान्तराल में कक्षा के बिन्दु C से बिन्दु D तक जाता है, तब इस नियम के अनुसार, क्षेत्रफल ASB = क्षेत्रफल CSD; इस तथ्य से स्पष्ट है कि अपनी कक्षा में ग्रह की चाल निरन्तर बदलती रहती है तथा जब ग्रह सूर्य से दूरस्थ (Farthest) होता है तो उसकी



चित्र 5.1

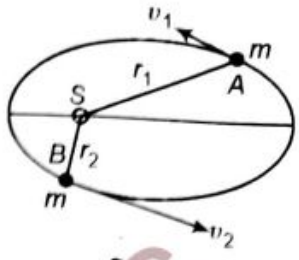
*जॉन्स कैपलर (Johannes Kepler) ने ग्रहों के गति सम्बन्धी प्रथम दो नियम सन् 1609 में तथा तृतीय नियम सन् 1619 में प्रकाशित किया था। इन नियमों के प्रकाशन से पहले मान्यता थी कि सभी ग्रह सूर्य के चारों ओर वृत्ताकार कक्ष में परिभ्रमण करते हैं।

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

चाल न्यूनतम तथा जब सूर्य के समीपस्थ (nearest or closest) होता है तो ग्रह की चाल अधिकतम होती है।

कैपलर का ग्रहों की गति का द्वितीय नियम, वास्तव में ग्रह के कोणीय संवेग संरक्षण का नियम (Law of conservation of angular momentum) है। अर्थात् ग्रह के कोणीय संवेग की दिशा (घूर्णन अक्ष के अनुदिश) तथा परिमाण दोनों संरक्षित रहते हैं, अत: घूर्णन अक्ष तथा घूर्णन तल स्थिर होते हैं तथा ग्रह का अनुप्रस्थ त्वरण (Transverse acceleration)— (घूर्णन तल के लम्बवत् त्वरण) शून्य होता है अर्थात् पिण्ड जिस तल में गति करता है, उस तल से ऊपर अथवा नीचे नहीं जा सकता है। वास्तव में सूर्य के परित: ग्रह की गति केन्द्रीय बल (Central force)— गुरुत्व बल के कारण होती है।



चित्र 5.2

चित्र 5.2 के अनुसार,

$$mv_1r_1 = mv_2r_2$$

या $$v_1r_1 = v_2r_2$$

या $$r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2 \qquad (\because v = r\omega) \qquad \ldots (1)$$

[बिन्दु A – सूर्य से दूरस्थ ग्रह-चाल का न्यूनतम परिमाण (v_1 वेक्टर) तथा बिन्दु B – सूर्य से समीपस्थ ग्रह-चाल का अधिकतम परिमाण (v_2 वेक्टर) है।]

(3) परिक्रमण काल का नियम (Law of period of revolution)—सूर्य के चारों ओर किसी ग्रह द्वारा एक चक्कर पूरा करने में लगा समय अर्थात् **ग्रह का सूर्य के परित: परिक्रमण काल (Period of revolution) T का वर्ग, उसकी दीर्घवृत्ताकार कक्षा के अर्द्ध-दीर्घअक्ष (Semi-major axis of the elliptical orbit of the planet) r की तृतीय घात के अनुक्रमानुपाती होता है।**

$$T^2 \propto r^3$$

या $$T^2 = Kr^3 \qquad \ldots (2)$$

जहाँ K एक समानुपाती नियतांक है।

इस समीकरण से स्पष्ट है कि सूर्य के परित: ग्रह की कक्षा जितनी छोटी होगी, वह उतने ही कम समय में एक चक्कर पूर्ण करेगा।

यदि दो ग्रहों के परिक्रमण काल T_1 तथा T_2 तथा उनकी कक्षा के अर्द्ध-दीर्घ अक्ष की दूरियाँ क्रमश: r_1 तथा r_2 हों तो

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3} \qquad \ldots (3)$$

§ 5.3 कैपलर के नियमों से न्यूटन के निष्कर्ष * (Newton's Conclusions from Kepler's Laws)

न्यूटन ने अपने अन्वेषणों में पाया कि अधिकांश ग्रह (बुध व प्लूटो को छोड़कर, जो कि सूर्य के निकटस्थ तथा दूरस्थ ग्रह हैं) सूर्य के परित: लगभग वृत्ताकार कक्षाओं में गति करते हैं। कैपलर के द्वितीय नियम के अनुसार, ग्रह के त्रिज्य वेक्टर की क्षेत्रफलीय चाल नियत रहती है, अत: वृत्ताकार कक्षा में त्रिज्य वेक्टर की तथा स्वयं ग्रह की रेखीय तथा कोणीय चालें क्रमश: v तथा ω नियत रहेंगी।

माना r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ में चलने के कारण, m द्रव्यमान के ग्रह पर केन्द्र (सूर्य) की ओर एक अभिकेन्द्र बल F लगता है।

$$F = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

* कैपलर के नियमों के आधार पर वैज्ञानिक आइजक न्यूटन ने सन् 1686 में गुरुत्वाकर्षण का नियम प्रतिपादित किया।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

$$= mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$ (यहाँ T ग्रह का परिक्रमण काल है)

परन्तु वृत्तीय कक्षा के लिए कैपलर के तृतीय नियम से,

$$T^2 \propto r^3 \quad \text{अथवा} \quad T^2 = Kr^3$$ (यहाँ K कोई समानुपाती नियतांक है)

$$\therefore \quad F = \frac{4\pi^2 mr}{Kr^3} = \frac{4\pi^2}{K}\left(\frac{m}{r^2}\right) \quad \ldots (i)$$

अथवा $$F \propto \frac{m}{r^2}$$ ($\frac{4\pi^2}{K}$ कोई नियतांक है)

इस प्रकार कैपलर के नियमों के आधार पर न्यूटन ने निम्नलिखित निष्कर्ष निकाले—

(1) ग्रह पर एक बल (अभिकेन्द्र) आरोपित होता है, जिसकी दिशा सूर्य की ओर होती है।

(2) इस बल का परिमाण, ग्रह तथा सूर्य के बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है $\left(F \propto \frac{1}{r^2}\right)$।

(3) यह बल ग्रह के द्रव्यमान के अनुक्रमानुपाती होता है $(F \propto m)$।

ग्रह पर लगने वाला यह बल, ग्रह तथा सूर्य के बीच एक पारस्परिक (mutual action-reaction) बल है अर्थात् यह बल सूर्य द्वारा ग्रह पर तथा ग्रह द्वारा सूर्य पर भी लगता है। क्योंकि ग्रह पर लगने वाला बल ग्रह के द्रव्यमान (m) के समानुपाती है, अत: सूर्य पर लगने वाला बल सूर्य के द्रव्यमान (M) के भी समानुपाती होना चाहिए। अत: उपरोक्त समीकरण (i) में नियतांक $\frac{4\pi^2}{K}$ का मान सूर्य के द्रव्यमान M पर भी निर्भर करना चाहिए। अत: इस नियतांक, $\frac{4\pi^2}{K}$ के स्थान पर GM लिख सकते हैं, जहाँ G एक अन्य नियतांक है।

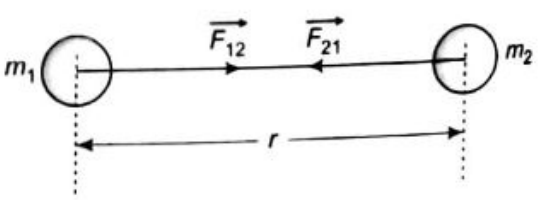
तब $$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

इस प्रकार न्यूटन ने यह निष्कर्ष निकाला कि **सूर्य तथा ग्रह के बीच लगने वाला बल, इनके द्रव्यमानों के गुणनफल के समानुपाती तथा इनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है।**

§ 5.4 न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण का नियम (Newton's Law of Gravitation)

न्यूटन ने, कैपलर के नियमों से प्राप्त निष्कर्ष की विस्तृत व्याख्या करते हुए बताया कि प्राप्त निष्कर्ष आकाशीय पिण्डों तक ही सीमित न होकर ब्रह्माण्ड (Universe) में स्थित किन्हीं दो द्रव्यमान कणों (Point masses) के बीच भी लागू होता है। इसी आधार पर न्यूटन ने सन् 1686 में बल का एक नियम (Law of force) प्रतिपादित किया, जिसे न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण का नियम कहते हैं। यह नियम इस प्रकार है—

ब्रह्माण्ड में प्रत्येक कण (पिण्ड), किसी भी अन्य कण को अपनी ओर आकर्षित करते हुए उस पर एक आकर्षण बल लगाता है जिसे गुरुत्वाकर्षण बल अथवा गुरुत्वीय बल कहते हैं। इस बल का परिमाण दोनों कणों के द्रव्यमानों के गुणनफल के समानुपाती तथा उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होती है।



चित्र 5.3

"There is a force of attraction between any two massive particles in the universe, which is known as gravitational force

KC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

or force of gravity. Magnitude of this force is proportional to the product of masses of the particles and inversely proportional to the square of distance between them."

माना दो कणों के द्रव्यमान m_1 तथा m_2 एवं इनके बीच की दूरी r है। तब इनके बीच लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल, F का परिमाण,

(i) $F \propto m_1 m_2$ एवं

(ii) $F \propto \frac{1}{r^2}$

अत: $$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

अथवा $$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \ldots (4)$$

जहाँ G एक स्थिरांक है, जिसे **सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण स्थिरांक** (Universal gravitational constant) कहते हैं।

इन बलों की दिशा, दोनों कणों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश होती है (चित्र 5.3)। बल $\vec{F}_{12}$ द्रव्यमान m_1 पर द्रव्यमान m_2 के द्वारा आरोपित आकर्षण बल है तथा बल $\vec{F}_{21}$, द्रव्यमान m_2 पर द्रव्यमान m_1 के द्वारा आरोपित आकर्षण बल है, तथा $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ अर्थात् इन दोनों बलों के परिमाण बराबर हैं, लेकिन दिशायें विपरीत हैं।

गोलाकार सममित वस्तुओं के मध्य आकर्षण बल यह मान कर ज्ञात करते हैं कि उनका समस्त द्रव्यमान उनके केन्द्रों पर स्थित है।

§ 5.5 सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण स्थिरांक (Universal Gravitational Constant)

दो कणों के मध्य लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

यदि $m_1 = m_2 = 1$ किग्रा, $r = 1$ मीटर

तब $G = F$ न्यूटन

अत: **सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण स्थिरांक परिमाण में उस गुरुत्वाकर्षण बल (आकर्षण बल) के बराबर है जो एकांक दूरी पर स्थित एकांक द्रव्यमान वाले दो कणों के बीच लगता है।**

G का मात्रक एवं विमीय सूत्र

सूत्र $$G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2} \text{ से}$$

$$= \frac{\text{न्यूटन मीटर}^2}{\text{किग्रा}^2}$$

यह G का SI मात्रक है।

सूत्र में सभी भौतिक राशियों के विमीय सूत्र लिखने पर

$$G = \frac{[MLT^{-2}][M^0L^2T^0]}{[ML^0T^0][ML^0T^0]}$$

$$= [M^{-1}L^3T^{-2}]$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

विमीय विधि से G का मात्रक किग्रा$^{-1}$ मीटर^3 सेकण्ड$^{-2}$ है।

G का मान कणों की प्रकृति, द्रव्यमान, ब्रह्माण्ड में उनकी स्थिति, उनके ताप, उनके बीच माध्यम एवं समय आदि किसी भी राशि पर निर्भर नहीं करता है। इसीलिए इसे सार्वत्रिक स्थिरांक कहते हैं।

स्थिरांक G एक **अदिश राशि** है।

सर्वप्रथम प्रयोगशाला में G का मान केवेन्डिश (Cavendish) नाम के वैज्ञानिक ने ऐंठन तुला (Torsion balance) द्वारा प्राप्त किया था।

$G = 6{\cdot}67\times10^{-11}$ न्यूटन मीटर^2/किग्रा^{2} $= 6{\cdot}67\times10^{-11}$ मीटर^3/किग्रा सेकण्ड^2; G का उपरोक्त मान, 1 मीटर की दूरी पर रखे एक-एक किलोग्राम के दो पिण्डों के बीच का आकर्षण बल है। G का मान इतना कम होने के कारण ही दैनिक जीवन में हम इस बल का अनुभव नहीं करते हैं।

§ 5.6 गुरुत्व (Gravity)

पृथ्वी द्वारा किसी वस्तु पर आरोपित आकर्षण (खिंचाव) बल को गुरुत्व बल (Force due to gravity) कहते हैं। यह बल वस्तु का भार (weight) कहलाता है। इसी बल के कारण ऊपर से छोड़ी गयी वस्तुएँ पृथ्वी तल की ओर गिरती हैं।

§ 5.7 गुरुत्वीय त्वरण (Acceleration due to Gravity)

पृथ्वी तल पर स्वतन्त्रतापूर्वक गिरती हुई किसी वस्तु के वेग में होने वाली प्रति सेकण्ड वेग वृद्धि को गुरुत्वीय त्वरण कहते हैं।

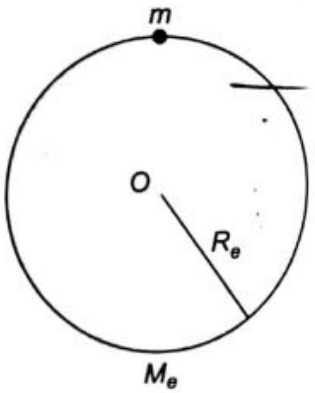
"Rate of change of velocity of a body which is falling freely under the effect of gravity, is called acceleration due to gravity."

g का मान केवल स्थान पर निर्भर करता है। यह वस्तु के रूप, आकार अथवा द्रव्यमान आदि पर निर्भर नहीं करता है।

दूसरे शब्दों में **पृथ्वी द्वारा किसी एकांक द्रव्यमान की वस्तु पर आरोपित बल को गुरुत्वीय त्वरण कहते हैं। इसका SI मात्रक मीटर/सेकण्ड^2 या न्यूटन/किग्रा होता है।**

§ 5.8 पृथ्वी के गुरुत्वीय त्वरण 'g' तथा सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक 'G' में सम्बन्ध (Relation between Earth's Acceleration due to Gravity 'g' and Universal Gravitational Constant 'G')

माना पृथ्वी का द्रव्यमान M_e तथा त्रिज्या R_e है, चित्र 5.4। माना पृथ्वी सतह पर m द्रव्यमान की कोई वस्तु स्थित है। पृथ्वी द्वारा m द्रव्यमान की वस्तु पर लगाये जा रहे गुरुत्व बल को ज्ञात करने के लिए पृथ्वी को गोलाकार मानकर उसके सम्पूर्ण द्रव्यमान को पृथ्वी के केन्द्र O पर केन्द्रित मान लेते हैं।



चित्र 5.4

इस स्थिति में, पृथ्वी द्वारा वस्तु पर लगाया गया आकर्षण बल,

$$F = G\frac{M_e m}{R_e^2} \qquad \text{... (i)}$$

यदि गुरुत्वीय त्वरण 'g' का मान ज्ञात हो, तो m द्रव्यमान पर लगने वाला गुरुत्व बल

$$F = mg \qquad \text{... (ii)}$$

समीकरण (i) तथा (ii) से

$$mg = G\frac{M_e m}{R_e^2}$$

या

$$\boxed{g = G\frac{M_e}{R_e^2}} \qquad \text{... (5)}$$

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

इस सूत्र में वस्तु का द्रव्यमान m नहीं आता है स्पष्ट है, g का मान वस्तु के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है। अत: यदि वायु की अनुपस्थिति में दो भिन्न-भिन्न द्रव्यमान की वस्तुएँ एक साथ समान ऊँचाई से गिराई जायें तो दोनों में समान गुरुत्वीय त्वरण उत्पन्न होने के कारण, दोनों एक साथ पृथ्वी पर पहुँचेंगी।

समीकरण (5) का प्रयोग किसी अन्य ग्रह अथवा उपग्रह पर गुरुत्वीय त्वरण का मान ज्ञात करने के लिए प्रयुक्त किया जा सकता है, इस स्थिति में M_e तथा R_e के स्थान पर उस ग्रह अथवा उपग्रह का द्रव्यमान एवं त्रिज्या का मान गणना में शामिल करेंगे।

§ 5.9 पृथ्वी के गुरुत्वीय त्वरण 'g' के मान में परिवर्तन (Variation in the Value of Earth's 'g')

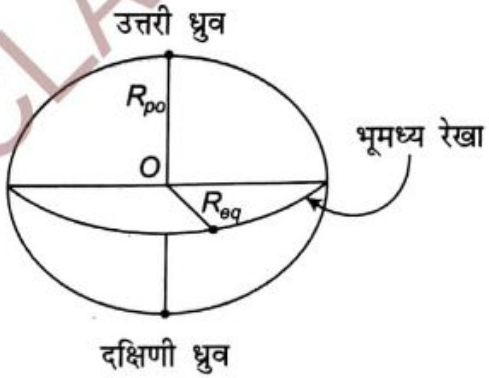
पृथ्वी के गुरुत्वीय त्वरण 'g' के मान में परिवर्तन निम्न कारणों से होता है—

(A) पृथ्वी की सतह पर 'g' के मान में परिवर्तन (Variation in 'g' on the s urface of the earth)

(i) पृथ्वी के आकार के कारण (Due to shape of earth)—पृथ्वी को पूर्ण गोलाकार मानने पर उसकी सतह पर g का मान निम्न रूप में प्राप्त होता है—

$$g = G\frac{M_e}{R_e^2} \qquad \text{.. (i)}$$

परन्तु, वास्तव में पृथ्वी पूरी तरह गोलाकार (spherical) नहीं है, बल्कि दोनों ध्रुवों (poles) पर कुछ दबी हुई अर्थात् चपटी है* (चित्र 5.5), भूमध्य रेखा (Equator line) पर इसकी त्रिज्या R_{eq} ध्रुवों पर इसकी त्रिज्या R_{po} से लगभग 21 किमी अधिक है $[R_{eq} > R_{po}]$।



चित्र 5.5

अत: पृथ्वी सतह पर ध्रुव से भूमध्य रेखा तक पृथ्वी की त्रिज्या R_e एक समान न होकर भिन्न-भिन्न होती है। परिणामस्वरूप समीकरण (i) से g का मान भी स्थान-स्थान पर बदलता रहता है।

पृथ्वी के ध्रुवों (Poles) पर जहाँ त्रिज्या R_e का मान न्यूनतम (R_{po}) होता है g का मान अधिकतम होता है तथा भूमध्य रेखा (Equator line) पर R_e का मान अधिकतम (R_{eq}) होने के कारण 'g' का मान न्यूनतम होता है।

(ii) पृथ्वी के घूमने के कारण (Due to rotation of earth)—पृथ्वी दोनों ध्रुवों से गुजरने वाली ऊर्ध्वाधर अक्ष के परित: पश्चिम से पूरब की ओर नियत कोणीय चाल ω से घूर्णन गति करती है। इसका आवर्तकाल $T = 24$ घण्टा है। पृथ्वी तल पर स्थित प्रत्येक वस्तु भी इसी चाल एवं आवर्तकाल से घूमती है। हम जानते हैं कि किसी कण को R त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर ω कोणीय चाल से घूमने के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल $\frac{mv^2}{R} = mR\omega^2$ होता है। इस अभिकेन्द्र बल से उत्पन्न अभिकेन्द्र त्वरण की दिशा केन्द्र की ओर होती है। गुरुत्वीय सन्दर्भ में यह त्वरण पृथ्वी के गुरुत्वीय त्वरण से ही प्राप्त होता है, जिसके कारण पृथ्वी का गुरुत्वीय त्वरण स्थान-विशेष पर घट जाता है।

माना m द्रव्यमान का एक पिण्ड भूमध्य तल (Equatorial plane) पर पृथ्वी के केन्द्र से λ अक्षांश (Lattitude) पर पृथ्वी की सतह पर किसी बिन्दु A पर स्थित है।

यदि पृथ्वी घूर्णन नहीं कर रही हो तो पिण्ड पर पृथ्वी का गुरुत्वाकर्षण बल अर्थात् पिण्ड का भार mg पृथ्वी के केन्द्र O की ओर दिष्ट होगा।

माना पृथ्वी अपने उत्तरी तथा दक्षिणी ध्रुवों से गुजरने वाले घूर्णन अक्ष (N तथा S) के परित: ω कोणीय वेग से घूर्णन गति कर रही है, फलस्वरूप पृथ्वी तल पर स्थित पिण्ड भी N-S अक्ष के परित: क्षैतिज वृत्तीय पथ पर गति करेगा। यदि बिन्दु A

* पृथ्वी की संरचना oblate spheroid की तरह होती है।

AKC TECHNICAL CLASSES

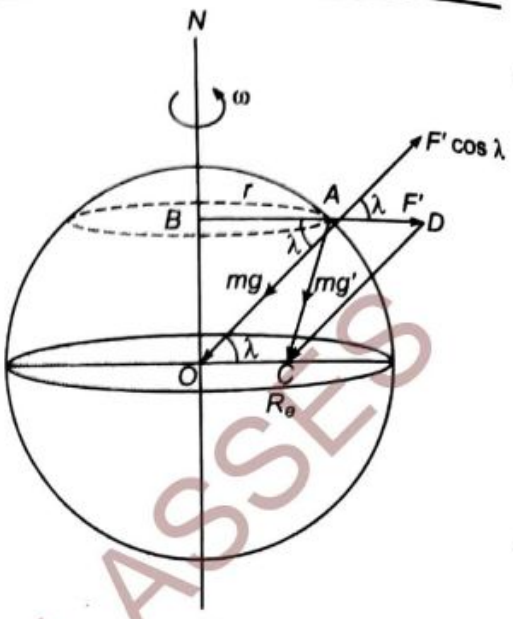
Scanned with CamScanner

पर पिण्ड के क्षैतिज वृत्तीय पथ की त्रिज्या r तथा पृथ्वी की त्रिज्या R हो तो चित्र 5.6 में ΔOAB के अनुसार—

$$\frac{AB}{OA} = \cos\lambda$$

या $$\frac{r}{R} = \cos\lambda$$

अत $$r = R\cos\lambda \qquad ...(i)$$



चित्र 5.6

यदि पिण्ड पर घूर्णन गति के कारण अपकेन्द्र बल F' हो तो बिन्दु A पर पृथ्वी की सतह के लम्बवत् अपकेन्द्र बल का एक घटक $F'\cos\lambda$ होगा। चित्र से स्पष्ट है कि बिन्दु A पर स्थित पिण्ड पर दो बल mg तथा F' कार्यशील होंगे। इन दोनों बलों का परिणामी, पिण्ड का आभासी भार mg' प्रदान करेगा जो बलों के वेक्टर योग (Vector addition) द्वारा निर्मित समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण (diagonal) के रूप में बिन्दु C पर प्राप्त होगा।

यदि बिन्दु A पर पृथ्वी का गुरुत्वीय त्वरण g' हो तो—

$$mg' = mg - F'\cos\lambda \qquad ...(ii)$$

चूँकि $$F' = m\omega^2 r = m\omega^2 R\cos\lambda$$

अत: $$mg' = mg - (m\omega^2 R\cos\lambda)\cos\lambda$$

या $$mg' = mg - m(\omega^2 R\cos^2\lambda)$$

या $$\boldsymbol{g' = g - \omega^2 R\cos^2\lambda} \qquad ...(6)$$

चित्र 5.6 से स्पष्ट है कि g' की दिशा पृथ्वी के केन्द्र की ओर नहीं होती है।

(i) भूमध्य रेखा पर गुरुत्वीय त्वरण $g' = g - R_e\omega^2 \qquad (\because \lambda = 0°)$

तथा

(ii) ध्रुवों पर गुरुत्वीय त्वरण $g' = g^* \qquad (\because \lambda = 90°)$

यदि पृथ्वी अपने अक्ष के परित: घूमना बन्द कर दे अर्थात् $\omega = 0$, तब समीकरण (5) से ध्रुवों के अतिरिक्त प्रत्येक स्थान पर g के मान में वृद्धि होगी, अत: वस्तुओं का भार बढ़ जायेगा। यह वृद्धि भूमध्य रेखा पर सबसे अधिक तथा ध्रुवों की ओर कम होती जायेगी। इसके विपरीत यदि पृथ्वी का कोणीय चाल बढ़ जाता है तो ध्रुवों के अतिरिक्त प्रत्येक स्थान पर वस्तुओं के भार में कमी हो जायेगी।

यदि पृथ्वी अपना एक चक्कर 24 घण्टों की बजाय 1.4 घण्टे में पूर्ण कर ले तो भूमध्य रेखा पर वस्तु का भार शून्य हो जायेगा, परन्तु द्रव्यमान अपरिवर्तित रहेगा।

(B) पृथ्वी तल से ऊपर जाने पर 'g' पर प्रभाव (Variation of 'g' above earth's surface)—माना, पृथ्वी का द्रव्यमान M_e, त्रिज्या R_e तथा केन्द्र O है (चित्र 5.7)। यदि पृथ्वी तल पर m द्रव्यमान का एक पिण्ड बिन्दु A पर स्थित हो, तब पृथ्वी तल पर गुरुत्वीय त्वरण 'g' का मान (g तथा G के सम्बन्ध से)

$$g = \frac{GM_e}{R_e^2} \qquad ...(i)$$

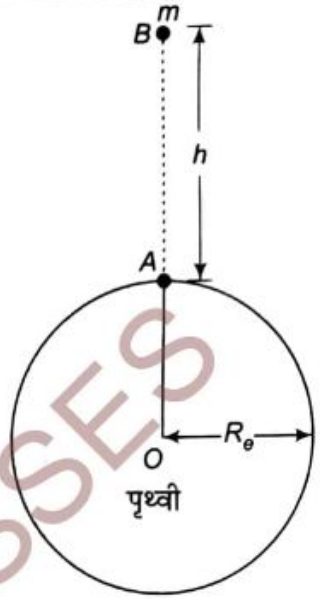
* 'g' का प्रमाणिक मान समुद्र तल पर $\lambda = 45°$ अक्षांश (latitude) पर लिया जाता है जोकि 9·80665 मीटर/सेकण्ड^2 होता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

यदि पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर किसी बिन्दु B पर गुरुत्वीय त्वरण g' हो, तब

$$g' = \frac{GM_e}{(R_e + h)^2} \quad \text{... (ii)}$$



चित्र 5.7

समीकरण (ii) को (i) से भाग देने पर

$$\frac{g'}{g} = \frac{GM_e}{(R_e + h)^2} \times \frac{R_e^2}{GM_e}$$

$$= \frac{R_e^2}{(R_e + h)^2}$$

$$= \frac{R_e^2}{R_e^2\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{g' = \frac{g}{\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^2}} \quad \text{... (7)}$$

$$\therefore \quad g' < g$$

समीकरण (6) से

$$\frac{g'}{g} = \left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^{-2}$$

$\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^{-2}$ को द्विपद प्रमेय (Binomial theorem) से प्रसारित करने पर

$\frac{g'}{g} = 1 - \frac{2h}{R_e} + \frac{h}{R_e}$ के उच्च घातों के अन्य पद

यदि R_e की तुलना में h बहुत ही छोटा हो (अर्थात् $h << R_e$) तब $\frac{h}{R_e}$ के उच्च घातों के पदों को नगण्य मानकर छोड़ा जा सकता है।

अत:

$$\frac{g'}{g} = 1 - \frac{2h}{R_e}$$

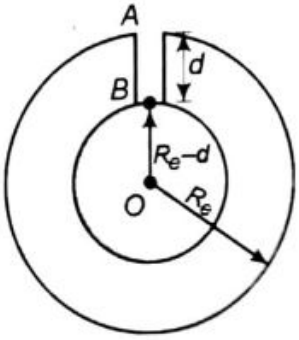
अथवा

$$\boldsymbol{g' = g\left(1 - \frac{2h}{R_e}\right)} \quad \text{... (8)}$$

$$\therefore \quad g' < g$$

समीकरण (7) तथा (8) से स्पष्ट है कि पृथ्वी तल से ऊपर की ओर जाने पर गुरुत्वीय त्वरण का मान घटता है।

समीकरण (7) का उपयोग तब करते हैं जब पृथ्वी तल से पिण्ड की ऊँचाई h पृथ्वी की त्रिज्या R_e के बराबर हो अथवा उससे ज्यादा हो अर्थात् $h \geq R_e$; तथा जब h का मान पृथ्वी की त्रिज्या R_e से बहुत कम ($h << R_e$) होता है तब समीकरण (8) से 'g' का मान ज्ञात किया जाता है।



चित्र 5.8

(C) पृथ्वी तल के नीचे (अन्दर) जाने पर 'g' पर प्रभाव (Variation of 'g' below earth's surface)—माना, m द्रव्यमान का एक पिण्ड पृथ्वी से d दूरी नीचे (गहराई में) बिन्दु B पर स्थित है चित्र 5.8, जहाँ गुरुत्वीय त्वरण का मान, माना g' है। पिण्ड की पृथ्वी के केन्द्र O से दूरी $(R_e - d)$ है। O को केन्द्र मानकर, $(R_e - d)$ त्रिज्या का एक गोला खींचा गया है। स्पष्ट है कि

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

पिण्ड भीतर वाले $(R_e - d)$ त्रिज्या के ठोस गोले के तल पर स्थित है तथा बाहरी कवच (खोखले गोले) के अन्दर है। चूँकि खोखले गोले के भीतर स्थित पिण्ड पर आकर्षण बल शून्य (क्योंकि खोखले गोले के भीतर गुरुत्वीय क्षेत्र शून्य) होता है, अत: इस पिण्ड पर भीतर वाले ठोस गोले के गुरुत्वाकर्षण के कारण एक आकर्षण बल लगेगा।

यदि $(R_e - d)$ त्रिज्या वाले ठोस गोले का द्रव्यमान M_e' हो, तब

$$M_e' = \text{गोले का आयतन} \times \text{पृथ्वी का घनत्व}$$

$$M_e' = \frac{4}{3}\pi (R_e - d)^3 \times \rho$$

जहाँ ρ, माना पृथ्वी में भरे पदार्थ का औसत घनत्व है।

माना, पृथ्वी तल से d दूरी नीचे, बिन्दु B पर गुरुत्वीय त्वरण g' है, तब (g तथा G के सम्बन्ध से)—

$$g' = \frac{GM_e'}{(R_e - d)^2}$$

$$= G\frac{\frac{4}{3}\pi (R_e - d)^3 . \rho}{(R_e - d)^2}$$

$$g' = \frac{4}{3}\pi . G (R_e - d)\rho \quad \ldots (i)$$

इसी प्रकार, यदि पिण्ड पृथ्वी तल (बिन्दु A) पर हो जहाँ गुरुत्वीय त्वरण g है, तब

$$g = \frac{4}{3}\pi G R_e \rho \quad \ldots (ii)$$

समीकरण (i) को समीकरण (ii) से भाग देने पर,

$$\frac{g'}{g} = \frac{R_e - d}{R_e}$$

$$= 1 - \frac{d}{R_e}$$

अथवा

$$\boldsymbol{g' = g\left(1 - \frac{d}{R_e}\right)} \quad \ldots (9)$$

$\therefore$ $g' < g$

अत: पृथ्वी तल से नीचे जाने पर भी g का मान घटता है। पृथ्वी के केन्द्र $(d = R_e)$ पर गुरुत्वीय त्वरण शून्य हो जाता है।

§ 5.10 भारहीनता (Weightlessness)

किसी वस्तु का भार वह बल है जिससे पृथ्वी वस्तु को अपने केन्द्र की ओर आकर्षित करती है। m द्रव्यमान की वस्तु का भार mg होता है, चूँकि वस्तु का द्रव्यमान शून्य नहीं हो सकता, अत: भारहीनता की दशा के लिए गुरुत्वीय त्वरण 'g' का मान शून्य होना चाहिए। 'g' का शून्य मान निम्न परिस्थितियों में संभव है—

(i) जब वस्तु गुरुत्व के प्रभाव में स्वतन्त्रतापूर्वक गिर रही हो।

(ii) जब वस्तु वाह्य अन्तरिक्ष में शून्य गुरुत्व (null gravity) वाले स्थान पर हो।

(iii) पृथ्वी के केन्द्र पर।

(iv) वृत्तीय कक्षा में पृथ्वी का परिक्रमण करते उपग्रह या यान में खड़े व्यक्ति पर (पृथ्वी द्वारा लगाया जाने वाला गुरुत्वाकर्षण बल व्यक्ति पर आभासी (अपकेन्द्र) बल के बराबर होता है। अत: व्यक्ति का तुल्य भार शून्य होता है)।

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 5.11 गुरुत्वीय क्षेत्र (Gravitational Field)

प्रत्येक वस्तु अपने चारों ओर एक गुरुत्वीय क्षेत्र उत्पन्न करती है अर्थात् यह अपने क्षेत्र में स्थित हर दूसरी वस्तु पर एक आकर्षण बल लगाती है जिसे '**गुरुत्वाकर्षण बल**' कहते हैं। अत: "**किसी वस्तु के चारों ओर वह क्षेत्र जिसमें स्थित हर वस्तु को वह अपनी ओर आकर्षित करती है, उस वस्तु का गुरुत्वीय क्षेत्र कहलाता है।**" किसी वस्तु के गुरुत्वीय क्षेत्र का मान गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता से ज्ञात किया जाता है।

§ 5.12 गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता (Intensity of Gravitational Field)

"**गुरुत्वीय क्षेत्र में किसी बिन्दु पर एकांक द्रव्यमान की वस्तु पर कार्य करने वाला बल ही उस बिन्दु पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता कहलाता है।**" इसे I से व्यक्त करते हैं। अत: यदि किसी बिन्दु पर m किग्रा की वस्तु पर F गुरुत्वीय बल कार्य करता है तो उस बिन्दु पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता

$$I = \frac{F}{m}$$

$\therefore$ I का मात्रक $= \mathrm{N \cdot kg^{-1}}$

तथा $$I \text{ का विमीय सूत्र} = \frac{[\mathrm{M^1L^1T^{-2}}]}{[\mathrm{M^1}]} = [\mathrm{M^0L^1T^{-2}}]$$

यदि पृथ्वी का द्रव्यमान M_e मान लें तो उसके केन्द्र से r दूरी पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता

$$I = \frac{F}{m} = \frac{\frac{GM_e m}{r^2}}{m}$$

या $$\boxed{I = \frac{GM_e}{r^2}} \quad \ldots(10)$$

पृथ्वी सतह के लिए $r = R_e$ पृथ्वी की त्रिज्या

$\therefore$ $$I = \frac{GM_e}{r^2} \quad \ldots(11)$$

परन्तु पृथ्वी सतह पर गुरुत्वीय त्वरण

$$g = \frac{GM_e}{r_e^2} \quad \ldots(12)$$

अत: स्पष्ट है कि पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र में किसी बिन्दु पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता उस बिन्दु पर गुरुत्वीय त्वरण के आंकिक मान के बराबर होती है।

उक्त समी० (11) व (12) से स्पष्ट है कि यद्यपि गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता एवं गुरुत्वीय त्वरण के आंकिक मान किसी बिन्दु पर समान हैं लेकिन ये दोनों राशियाँ अलग-अलग हैं। I गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता है जिसका मात्रक $\mathrm{N \cdot kg^{-1}}$ है जबकि 'g' गुरुत्वीय तवरण है जिसका मात्रक $m\,s^{-2}$ होता है।

§ 5.13 गुरुत्वीय विभव (Gravitational Potential)

गुरुत्वीय क्षेत्र में रखे किसी पिण्ड पर आकर्षण बल लगता है। यदि किसी पिण्ड को गुरुत्वीय क्षेत्र से बाहर ले जाये तो हमें गुरुत्वाकर्षण के विरुद्ध कार्य करना पड़ता है और यदि पिण्ड को बाहर से गुरुत्वीय क्षेत्र के अन्दर लाये तो स्वयं गुरुत्वीय क्षेत्र उस पिण्ड पर कार्य करेगा।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

"अनन्त से किसी बिन्दु तक एकांक द्रव्यमान को लाने में जो कार्य करना पड़ता है उसे ही उस बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव कहते हैं।" अनन्त पर गुरुत्वीय विभव शून्य माना जाता है। चूँकि अनन्त से किसी बिन्दु तक किसी पिण्ड को लाने में कार्य प्राप्त होता है (करना नहीं पड़ता है), अत: गुरुत्वीय विभव सदैव ऋणात्मक होता है। यदि m द्रव्यमान की वस्तु को अनन्त से किसी बिन्दु तक लाने में W कार्य प्राप्त होता है तो उस बिन्दु पर गुरुत्वीय विभव

$$V_G = -\frac{W}{m} \text{ जूल/किग्रा}$$

इसका विमीय सूत्र $\frac{[ML^2T^{-2}]}{[M]} = [M^0L^2T^{-2}]$

पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र में पृथ्वी के केन्द्र से r दूरी पर गुरुत्वीय विभव

$$V_G = -\frac{GM_e}{r}$$ जहाँ M_e पृथ्वी का द्रव्यमान है।

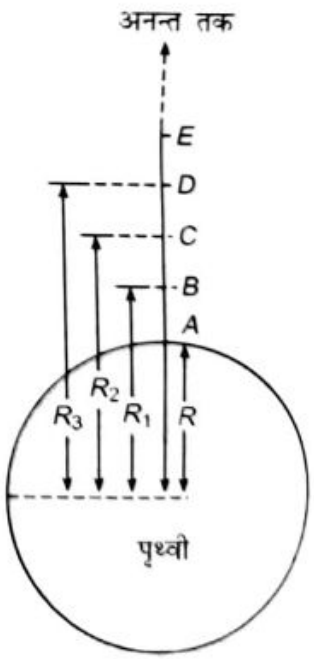
पृथ्वी सतह पर $r = R_e$ (पृथ्वी की त्रिज्या)

$$V_G = -\frac{GM_e}{R_e} \quad \ldots(13)$$

इस सूत्र का निगमन, गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा के सूत्र के निगमन से प्राप्त होता है।

§ 5.14 गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा (Gravitational Potential Energy)

"किसी वस्तु को अनन्त से गुरुत्वीय क्षेत्र के अन्दर किसी बिन्दु तक लाने में जो कार्य करना पड़ता है उसे उस बिन्दु पर उस वस्तु की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कहते हैं।" अनन्त पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा को शून्य माना जाता है। चूँकि अनन्त से गुरुत्वीय क्षेत्र के अन्दर किसी वस्तु को लाने में कार्य प्राप्त होता है। अत: गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा भी गुरुत्वीय विभव की भाँति ऋणात्मक होती है। यह एक अदिश राशि है और इसका मात्रक जूल है।



चित्र 5.9

पृथ्वी तल पर किसी वस्तु की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा को ज्ञात करने के लिए हमें अनन्त से उस वस्तु को पृथ्वी तल तक लाने में किया गया कार्य ज्ञात करना होगा। इसके लिए पहले उस वस्तु को पृथ्वी तल से अनन्त तक ले जाने में किया गया कार्य ज्ञात करेंगे।

माना कि m द्रव्यमान का एक पिण्ड पृथ्वी तल के A बिन्दु पर रखा है। माना कि पृथ्वी का द्रव्यमान M_e व त्रिज्या R_e है। बिन्दु A से अनन्त तक की दूरी को छोटे-छोटे भागों $AB, BC, CD, \ldots\ldots$ में विभाजित कर लेते हैं।

माना कि बिन्दुओं $B, C, D, \ldots\ldots$ की पृथ्वी के केन्द्र से दूरियाँ क्रमश: $R_1, R_2, R_3, \ldots\ldots$ हैं।

बिन्दु A पर पिण्ड पर पृथ्वी द्वारा लगने वाला आकर्षण बल

$$F_A = \frac{GM_e\, m}{R_e^2}$$

अब यदि वस्तु B बिन्दु पर है, तो

$$F_B = \frac{GM_e\, m}{R_1^2}$$

चूँकि बिन्दु A व B अत्यन्त निकट है अत: A से B तक वस्तु पर लगने वाला बल F_A व F_B का गुणोत्तर माध्य लिया जा सकता है। इसलिए A से B तक वस्तु पर औसत आकर्षण बल

$$F_{AB} = \sqrt{F_A \times F_B}$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

$$= \sqrt{\frac{GM_e m}{R_e^2} \times \frac{GM_e m}{R_1^2}}$$

$$= \frac{GM_e m}{R_e R_1}$$

पिण्ड को A से B तक ले जाने में इस आकर्षण बल के विरुद्ध किया गया कार्य

$$W_{AB} = F_{AB} \times (R_1 - R_e)$$

$$= \frac{GM_e m}{R_e R_1}(R_1 - R_e)$$

$$= GM_e m \frac{R_1 - R_e}{R_e R_1}$$

$$= GM_e m \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_1}\right)$$

इसी प्रकार, $$W_{BC} = GM_e m \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

और $$W_{CD} = GM_e m \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)$$

इसी प्रकार छोटे-छोटे अन्तरालों के माध्यम से अनन्त तक ले जाने में किया गया कार्य ज्ञात कर सभी को जोड़कर कुल कार्य ज्ञात कर लेते हैं।

$\therefore$ $$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + \ldots\ldots \infty$$

या $$W = GM_e m \left[\left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_1}\right) + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) + \left(\ldots - \frac{1}{\infty}\right)\right]$$

$$= GM_e m \left[\frac{1}{R_e} - \frac{1}{\infty}\right]$$ (क्योंकि इनके अलावा सभी पद कट जाते हैं)

$$= GM_e m \left[\frac{1}{R} - 0\right]$$

$$W = \frac{GM_e m}{R_e}$$

अर्थात् m द्रव्यमान की वस्तु को पृथ्वी सतह से अनन्त तक ले जाने में हमें आकर्षण बल (गुरुत्वाकर्षण) के विरुद्ध $\frac{GM_e m}{R_e}$ कार्य करना होगा। इसके विपरीत जब वस्तु को अनन्त से पृथ्वी तल तक लायेंगे तो इतना ही कार्य प्राप्त होगा। अत: पृथ्वी सतह पर वस्तु की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\frac{GM_e m}{R_e} \quad \ldots(14)$$

यदि पिण्ड पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर स्थित हो, तो वहाँ पर उसकी गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\frac{GM_e m}{R_e + h} \quad \ldots(15)$$

उक्त सूत्रों (14) तथा (15) में $m = 1$ रखने पर क्रमश: पृथ्वी सतह पर एवं h ऊँचाई पर गुरुत्वीय विभव प्राप्त होता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

∴ पृथ्वी सतह पर गुरुत्वीय विभव

$$V_G = \frac{GM_e}{R_e}$$ समी० (14) में $m = 1$ रखने पर।

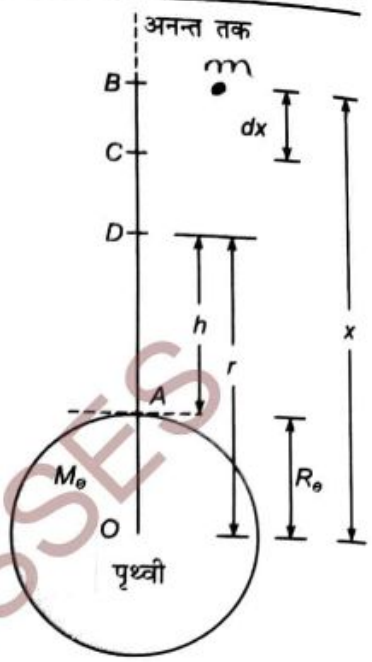
और h ऊँचाई पर

$$V_G = -\frac{GM_e}{(R_e + h)}$$

ऋणात्मक चिन्ह से स्पष्ट है कि जैसे-जैसे h का मान बढ़ता जाता है, गुरुत्वीय विभव एवं गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा बढ़ती जाती है।

वैकल्पिक विधि (Alternative method)—माना कि पृथ्वी का द्रव्यमान M_e तथा त्रिज्या R_e है। पृथ्वी के केन्द्र O से x दूरी पर m द्रव्यमान का एक पिण्ड बिन्दु B पर रखा है। न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम के अनुसार पृथ्वी द्वारा पिण्ड पर लगने वाला आकर्षण बल

$$F = \frac{GM_e m}{x^2}$$



चित्र 5.10

माना कि पिण्ड को बल की दिशा में बिन्दु B से बिन्दु C तक अत्यन्त सूक्ष्म दूरी dx द्वारा चलाया जाता है। अत: पिण्ड को B से C तक ले जाने में किया गया कार्य

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{dx}$$
$$= F\,dx\cos\theta$$
$$= F\,dx$$

∴ अनन्त से D बिन्दु तक पिण्ड को लाने में किया गया कार्य अर्थात् D बिन्दु पर पिण्ड की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U = W = \int_\infty^r dW = \int_\infty^r F \cdot dx$$
$$= \int_\infty^r \frac{GM_e m}{x^2} \cdot dx$$
$$= GM_e m \int_\infty^r \frac{1}{x^2} dx$$
$$= GM_e m \int_\infty^r x^{-2}\,dx$$
$$= GMm\left[-\frac{1}{x}\right]_\infty^r \qquad \left(\text{सूत्र } \int x^m\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ से}\right)$$

या
$$U = GM_e m\left[-\frac{1}{r} - \left(\frac{-1}{\infty}\right)\right] \qquad \left(\text{सूत्र } [x]_{x_1}^{x_2} = x_2 - x_1 \text{ से}\right)$$

∴
$$U = GM_e m\left[-\frac{1}{r} + 0\right] = -\frac{GM_e m}{r} \qquad \ldots (16)$$

यदि D बिन्दु पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर हो, तो

$$r = (R_e + h)$$
$$U = -\frac{GM_e m}{(R_e + h)}$$

पृथ्वी तल के लिए $r = R_e$

अत: पृथ्वी सतह पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$\boxed{U = -\frac{GM_e m}{R_e}}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 5.15 उपग्रह (Satellite)

वे प्राकृतिक आकाशीय अथवा कृत्रिम पिण्ड जो ग्रहों की परिक्रमा उस ग्रह के गुरुत्वाकर्षण बल के कारण करते हैं, उपग्रह कहलाते हैं।

उपग्रह दो प्रकार के होते हैं

(i) प्राकृतिक उपग्रह जैसे चन्द्रमा पृथ्वी का प्राकृतिक उपग्रह है।

(ii) कृत्रिम उपग्रह जैसे आर्य भट्ट, इनसेट 1B, इनसेट 2B, एडूसेट आदि कृत्रिम उपग्रह हैं।

§ 5.16 उपग्रहों के प्रक्षेपण का सिद्धान्त (Principle of Launching Satellites)

पृथ्वी के तल पर एक बहुत ऊँचे टावर की कल्पना कीजिए (चित्र 5.11)। माना, इस टॉवर के महत्तम ऊँचाई से क्षैतिज दिशा मे किसी वेग v से एक पिण्ड फेंका जाता है। यह पिण्ड परवलयाकार पथ पर गति करता हुआ पृथ्वी तल पर बिन्दु A पर टकराता है। अब यदि पिण्ड का क्षैतिज वेग बढ़ाया जाता है तो पिण्ड बिन्दु B पर तथा वेग और बढ़ाने से बिन्दु C पर टकराता है। यदि पिण्ड का क्षैतिज वेग v बढ़ाते जायें तो एक स्थिति ऐसी आती है कि पिण्ड पृथ्वी तल से नहीं टकराता है। गुरुत्व बल के प्रभाव में यह पृथ्वी तल पर गिरना चाहता है परन्तु गिर नहीं पाता अर्थात् पिण्ड पृथ्वी के चारों ओर वृत्ताकार पथ पर गति करने लगता है।

फेंके गये पिण्ड को कृत्रिम उपग्रह माना जा सकता है, तब इसके परिक्रमण पथ को कक्षा (orbit) तथा इसके वेग को कक्षीय वेग (orbital velocity) तथा पृथ्वी के एक सम्पूर्ण चक्कर में लगे समय को परिक्रमण काल (Time period of satellite) कहते हैं।

§ 5.17 उपग्रह की कक्षीय चाल तथा परिक्रमण काल (Orbital Speed and Period of Revolution of Satellite)

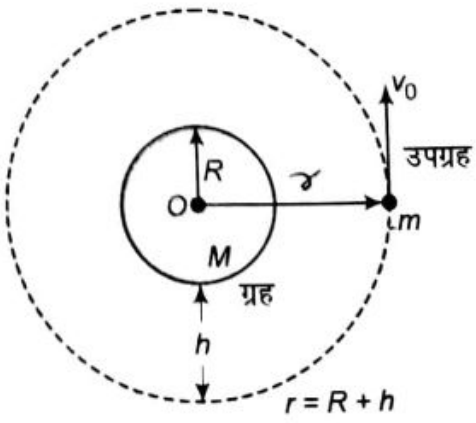
(i) उपग्रह की कक्षीय चाल-v_o (Orbital speed of satellite)—माना M द्रव्यमान का ग्रह जिसकी त्रिज्या R तथा केन्द्र O है, की सतह से h दूरी पर m द्रव्यमान का एक उपग्रह, कक्षीय चाल v_o से ग्रह के चारों ओर त्रिज्या r $(= R + h)$ के वृत्ताकार पथ पर परिक्रमण कर रहा है (चित्र 5.12)।* इस स्थिति में ग्रह द्वारा उपग्रह पर आरोपित गुरुत्वाकर्षण बल $\left(F = G\frac{Mm}{r^2}\right)$ ही उपग्रह को वृत्तीय गति के लिए आवश्यक अभिकेन्द्र बल $\left(\frac{mv^2}{r}\right)$ प्रदान करता है। अत:

$$G\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv_o^2}{r}$$

अथवा $$v_o^2 = \frac{GM}{r}$$

अथवा $$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}} \quad \ldots (17)$$

इस समीकरण में उपग्रह का द्रव्यमान m नहीं आता है अर्थात् उपग्रह की कक्षीय चाल v_o द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है। अत: भिन्न-भिन्न द्रव्यमानों के उपग्रह किसी ग्रह के चारों ओर एक ही कक्षा में समान कक्षीय चाल से परिक्रमण करते हैं।



चित्र 5.12

यदि ग्रह की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण g है तब $g = \frac{GM}{R^2}$

अत: $$GM = gR^2$$

GM का मान समीकरण (16) में रखने पर

$$v_o = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}}$$

* यद्यपि ग्रह स्वयं सूर्य के चारों ओर परिक्रमण करता है परन्तु उपग्रह की गति का अध्ययन करने के लिए ग्रह को स्थिर मान लेते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

या $$v_o = R\sqrt{\frac{g}{R+h}} \quad \ldots (18)$$

समीकरण (18) से स्पष्ट है कि h का मान v_o पर निर्भर करता है। h का मान बढ़ने पर v_o का मान घटता है। यदि उपग्रह ग्रह के अत्यन्त समीप हो ($h << R$) तब

$$(v_o)_{max} = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR} \quad \ldots (19)$$

पृथ्वी तल के समीप परिक्रमण करते उपग्रह के लिए $g = 9{\cdot}8$ मी/से^{2} तथा $R = R_e = 6{\cdot}4\times10^6$ मीटर अत: समीकरण (19) से

$$v_o = \sqrt{gR_e}$$
$$= \sqrt{9{\cdot}8\times6{\cdot}4\times10^6} = 7919{\cdot}6 \text{ मी/से}$$
$$= 7{\cdot}98 \text{ किमी/सेकण्ड}$$
$$\approx 8 \text{ किमी/सेकण्ड}$$

(ii) उपग्रह का परिक्रमण काल (Period of revolution of satellite)—माना कि उपग्रह का परिक्रमण काल T है, तब

$$T = \frac{2\pi r}{v_o}$$
$$= \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM}{r}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}.r^{3/2}$$

अथवा $$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}} \quad \ldots (20)$$

अथवा $$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{gR^2}} \quad (\because GM = gR^2)$$

अथवा $$T = \frac{2\pi}{R}\sqrt{\frac{(R+h)^3}{g}} \quad \ldots (21)$$

उपरोक्त समीकरण से स्पष्ट है कि किसी उपग्रह का परिक्रमण काल उसकी ग्रह के तल से ऊँचाई पर निर्भर करता है तथा h का मान बढ़ने पर बढ़ता है।

पृथ्वी तल के अत्यन्त समीप परिक्रमण करते उपग्रह का परिक्रमण काल—

$\because h << R_e$ तब h को नगण्य मानने पर

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R_e^3}{GM_e}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_e}{g}}$$

यहाँ, $R_e = 6{\cdot}4\times10^6$ मीटर, $g = 9{\cdot}8$ मीटर/सेकण्ड^2

अत:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{6{\cdot}4\times10^6}{9{\cdot}8}} \text{ सेकण्ड}$$
$$= 5079 \text{ सेकण्ड}$$
$$= 84{\cdot}6 \text{ मिनट}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 5.18 उपग्रहों के प्रकार (Types of Satellites)

5.18.1 भू-स्थैतिक अथवा तुल्यकाली उपग्रह (Geostationary or Synchronous Satellite)

यदि कोई उपग्रह पृथ्वी के चारों ओर वृत्ताकार कक्षा में 24 घण्टे में पश्चिम से पूर्व की ओर (चूँकि पृथ्वी भी अपने अक्ष पर पश्चिम से पूर्व की ओर 24 घण्टे में घूर्णन करती है) परिक्रमण करता है तो उसकी गति पृथ्वी के सापेक्ष स्थिर गति (moving with respect to earth) होगी। अर्थात् पृथ्वी तल के किसी बिन्दु के सापेक्ष उपग्रह स्थिर प्रतीत होगा। इस प्रकार के उपग्रह को भू स्थैतिक अथवा तुल्यकाली उपग्रह कहते हैं।

समीकरण (20) में $T = 24$ घण्टे $= 24 \times 60 \times 60$ सेकण्ड, $R_e = 6400$ किमी तथा $g = 9{\cdot}8$ मी/से^{2} रखने पर

$$24 \times 3600 = \frac{2\pi}{6{\cdot}4 \times 10^6} \sqrt{\frac{(6{\cdot}4 \times 10^6 + h)^3}{9{\cdot}8}}$$

या $$h = 36{,}000 \text{ किमी}$$

अतः पृथ्वी के लिए ऊँचाई $h = 36{,}000$ किमी पर किसी कक्षा में स्थित पश्चिम से पूर्व की ओर पृथ्वी के चारों ओर परिक्रमण करता हुआ उपग्रह सदैव स्थिर प्रतीत होगा। इस प्रकार के उपग्रह को तुल्यकाली (synchronous) या भू-स्थैतिक (geo-stationary) उपग्रह कहते हैं।

समीकरण (18) से पृथ्वी के लिए इस उपग्रह का कक्षीय वेग (v_o) लगभग 3·08 किमी/सेकण्ड प्राप्त होता है। इस प्रकार के उपग्रह का उपयोग इलेक्ट्रॉनिक कम्यूनिकेशन जैसे टेलीविजन सिग्नल, मोबाइल दूरसंचार सिग्नल को पृथ्वी से प्राप्त कर पुनः उन्हें परावर्तित कर सुदूर स्थानों को प्रेषित करने में किया जाता है।

1. संचार उपग्रह (Communication Satellite)

पृथ्वी के विभिन्न दूरस्थ हिस्सों में सूचना संकेतों (signals) का बेतार संचार (wireless communication) करने के लिए उपयोग में लाये जाने वाले उपग्रह को संचार उपग्रह कहते हैं। यह भू-स्थैतिक उपग्रह होते हैं।

यह उपग्रह दो प्रकार के होते हैं—

(i) **सक्रिय उपग्रह (Active Satellite)**—वे उपग्रह जो पृथ्वी से भेजे गये सभी सूचना संकेतों (signals) को प्राप्त (receive) करते हैं, उन्हें संसाधित (process) करते हैं तथा पृथ्वी पर पुनः प्रसार (re-transmit) करते हैं सक्रिय उपग्रह कहलाते हैं।

बेतार संचार हेतु आजकल सक्रिय उपग्रह ही प्रयोग में लाये जा रहे हैं। इन कार्यों हेतु ऐसे उपग्रह—कम्प्यूटर, ऐन्टिना इत्यादि समस्त उपकरणों से सुसज्जित होते हैं।

(ii) **निष्क्रिय उपग्रह (Passive Satellite)**—वे उपग्रह जो पृथ्वी से भेजे गये सूचना संकेतों (signals) के लिये मात्र परावर्तक (reflector) का कार्य करते हैं उन्हें निष्क्रिय उपग्रह कहते हैं।

संचार उपग्रह वास्तव में एक सूक्ष्म तरंग प्रसारण केन्द्र (microwave relay station) होता है। पृथ्वी पर स्थित सूक्ष्म तरंग प्रसारण केन्द्र से 1 से 10 GHz के बीच किसी एक निश्चित आवृत्ति पर सूक्ष्म तरंग जिसमें सूचना सन्निहित होती है, संचार उपग्रह को भेजा जाता है। इस प्रक्रिया को 'अपलिंक' (uplink) कहते हैं। अपलिंक (uplink) हेतु 5·9 से 6·4 GHz तक के परास की बैण्ड आवृत्ति (band frequency) प्रयोग की जाती है। प्राप्त सूचना संकेतों को संचार उपग्रह में लगे उपकरण प्रवर्धित (amplify) एवं संसाधित (process) करने के उपरान्त दूसरे अन्य आवृत्ति पर पृथ्वी पर पुनः प्रसारित (re-transmit) कर देते हैं। इस प्रक्रिया को 'डाउनलिंक' (down link) कहते हैं। डाउनलिंक (down link) के लिये 3·7 से 4·2 GHz तक के परास की बैण्ड आवृत्ति (band frequency) का प्रयोग किया जाता है। अपलिंक तथा डाउनलिंक में प्रयुक्त आवृत्तियों में यह अन्तर व्यतिकरण (Interference) से बचाव के लिये किया जाता है। आवृत्तियों के इस संयोग (combination) को (4/6) GHz बैण्ड कहते हैं।

AKG TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

2. भू-स्थैतिक उपग्रह प्रक्षेपण यान
(Geo Synchronous Satellite Launch Vehicle-GSLV)

भू-स्थैतिक उपग्रह अथवा किसी संचार उपग्रह को उसकी कक्षा में पहुँचाने के लिये जिस प्रक्षेपण यान का प्रयोग किया जाता है उसे भू-स्थैतिक उपग्रह प्रक्षेपण यान (Geo Synchronous Satellite Launch Vehicle) संक्षेप में GSLV कहते हैं।

भारत में 'इसरो' (ISRO-Indian space Research organization) द्वारा विकसित एवं अत्याधुनिक नवनिर्मित तथा 18 दिसम्बर 2014 को सफलतापूर्वक प्रक्षेपित भूस्थिर उपग्रह प्रक्षेपण यान GSLV MK III तीन ईंधन चरणों वाला प्रक्षेपण यान है जिसके प्रत्येक चरण में क्रमश: ठोस (Solid), तरल (Fluid) तथा अतिप्रशीतित चरण (Cryogenic Stage) का प्रयोग किया गया है।

उपग्रह को निश्चित कक्षा में पहुँचाने के लिये प्रक्षेपण पर नियंत्रण रखने, निश्चित कक्षा का प्रारम्भिक चयन करने, उड़ान सुरक्षा एवं अन्य कार्यों हेतु प्रक्षेपण यान S-band Telemetry एवं C-band Transponders से युक्त होता है।

5.18.2 ध्रुवीय उपग्रह (Polar Satellite)

पृथ्वी की सतह को देखने, पृथ्वी के भू-भाग का भौगोलिक एवं सैन्य सर्वेक्षण करने तथा मानचित्र इत्यादि बनाने, वैश्विक ताप एवं जलवायु परिवर्तन की जानकारी प्राप्त करने हेतु उपयोग में लाये जाने वाले उपग्रह को ध्रुवीय उपग्रह कहते हैं।

यह उपग्रह अपनी कक्षा में पृथ्वी के उत्तरी ध्रुव के ऊपर से होता हुआ दक्षिणी ध्रुव की ओर जाता है अर्थात् उत्तर से दक्षिण दिशा की ओर कक्षीय गति करता है तथा पृथ्वी ठीक इसके नीचे पश्चिम से पूर्व दिशा की ओर अपने स्थान पर चक्रण करती है परिणामत: ध्रुवीय उपग्रह पूरी पृथ्वी के प्रत्येक अंश को बहुत कम समय में जल्दी-जल्दी स्कैन (scan) कर सकता है अर्थात् देख सकता है।

ध्रुवीय उपग्रह पृथ्वी के परित: जिस कक्षा में गति करता है उसे ध्रुवीय कक्षा (Polar orbit) कहते हैं। वास्तव में यह ध्रुवीय कक्षा सूर्य समकालिक कक्षा (sun synchronous orbit) होती है अर्थात् सूर्य के परिप्रेक्ष्य से पृथ्वी के परित: ऐसी कक्षा जिसमें उपग्रह प्रत्येक समय अपनी कक्षा में किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच एक समान स्थानिक दिनमान् (same local time of day) पर ही गुजरता है तथा उपग्रह के ठीक ऊपर सूर्य स्थित होने के कारण उपग्रह की सतह पर सूर्य द्वारा बनने वाला प्रदीपन कोण (surface illumination angle) प्रत्येक समय लगभग एक जैसा रहता है। ध्रुवीय उपग्रह के लिये यह अपरिवर्तनीय प्रकाश व्यवस्था अत्यन्त लाभकारी अभिलक्षण (characteristic) होता है क्योंकि इस दशा में उपग्रह दृश्य प्रकाश अथवा अवरक्त किरणों के तरंगदैर्घ्य (visible or infrared wave lengths) का उपयोग कर पृथ्वी की सतह पर निगरानी या जासूसी, समुद्र में तथा मौसम के परिवर्तनीयता का प्रेक्षण अथवा रिमोट सेंसिंग सम्बन्धी किसी भी प्रकार के कार्य के लिए ऐसे उपकरण का प्रयोग कर सकता है जिसके लिये सूर्य की रोशनी आवश्यक है परन्तु ऐसा तभी सम्भव है जब ध्रुवीय उपग्रह की कक्षा भी उसी दर से प्रेसेस (precess)* करे जिस दर पर पृथ्वी पूरे वर्ष सूर्य के चारों ओर परिक्रमण गति (revolve motion) करती है। यदि उपग्रह की कक्षा पृथ्वी के ध्रुवों के ठीक ऊपर से गुजरेगी अर्थात् भूमध्य रेखा (equator line) के ठीक लम्बवत् (= 90°), तो वांछित प्रेसेशन (precession) सम्भव नहीं होगा क्योंकि पृथ्वी का आकार Oblate Spheroid जैसा होने के कारण इसका भूमध्य भाग फूला हुआ (equatorial bulge) है। अत: ध्रुव से लगभग 8° बाहर की ओर झुकी हुई ध्रुवीय कक्षा जो भूमध्य रेखा से लगभग लम्बवत् (≈ 98°) अर्थात् पृथ्वी के घूर्णन की दिशा से अल्प प्रतिगामी (slightly retrograde) होती है आवश्यक Torque Induce Precession उत्पन्न कर देती है जिससे उपग्रह अपनी स्थिति सदैव सूर्य कालिक कक्षा (sun synchronous orbit) में बनाये रखता है।

यह ध्रुवीय कक्षा पृथ्वी तल के बहुत समीप लगभग 600–800 किमी की ऊँचाई पर होती है तथा इसमें उपग्रह का परिक्रमण काल लगभग 96–100 मिनट होता है।

* Precession is a change in the orientation of the rotation axis of a rotating body. In other words, the axis of a rotation of precessing body itself rotates around another axis. Example—Gyroscopic precession, precession of toy top etc.

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

1. ध्रुवीय उपग्रह प्रक्षेपण यान (Polar Satellite Launch Vehicle-PSLV)

ध्रुवीय उपग्रह को उसकी कक्षा मे पहुँचाने के लिये जिस प्रक्षेपण यान का प्रयोग किया जाता है उसे ध्रुवीय उपग्रह प्रक्षेपण यान (Polar Satellite Launch Vehicle) संक्षेप में PSLV कहते हैं।

भारत मे 'इसरो', ISRO-(Indian Space Research Organisation) द्वारा विकसित एवं अत्याधुनिक नवनिर्मित PSLV चार चरणो वाला प्रक्षेपण यान है जिसके प्रथम तथा तृतीय चरण में ठोस ईंधन प्रणोदक निकाय (solid fuel propulsion system) तथा द्वितीय एवं चतुर्थ चरण मे तरल ईंधन प्रणोदक निकाय (liquid fuel propulsion system) का प्रयोग किया जाता है जो उपग्रह को उसकी कक्षा में पहुँचाने के लिये वांछित प्रणोद (propulsion) उत्पन्न करते हैं।

प्रथम चरण मे ठोस रॉकेट मोटर (solid rocket motor) हेतु Hydroxyl-terminated polybutadiene (HTPB) ईंधन के रूप में तथा दूसरे चरण में तरल ईंधन के रूप में Unsymmetrical dimethylhydrazine (UDMH) तथा ऑक्सीकारक (oxidizer) के रूप में Nitrogen tetroxide (N_2O_4) का प्रयोग तरल रॉकेट मोटर (liquid rocket motor) द्वारा किया जाता है। तृतीय चरण पुन: HTPB एवं चतुर्थ चरण में लगे दो रॉकेट इन्जनों द्वारा monomethlhydrazine (MMH) तथा Mixed oxides of nitrogen (MON) का प्रयोग किया जाता है।

§ 5.19 परिक्रमण करते हुए उपग्रह की ऊर्जा अथवा उपग्रह की बन्धन ऊर्जा (Energy of an Orbiting Satellite or Binding Energy of a Satellite)

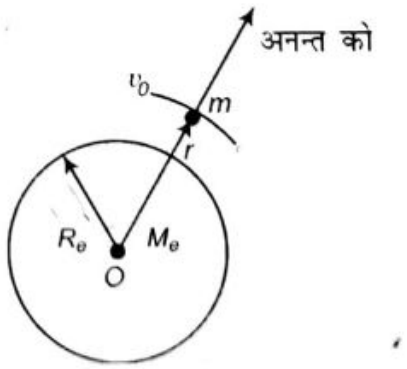
किसी ग्रह के परित: परिक्रमण करते हुए उपग्रह में गतिज तथा गुरुत्वीय स्थितिज दोनों प्रकार की ऊर्जाएँ होती हैं।

गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा—ग्रह के गुरुत्वीय क्षेत्र में स्थित होने के कारण किसी पिण्ड में गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा होती है। अर्थात् **''गुरुत्वीय क्षेत्र में अपनी स्थिति के कारण किसी पिण्ड में जो ऊर्जा होती है वह उस पिण्ड की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा कहलाती है।''** जो किसी पिण्ड को अनन्त से गुरुत्वीय क्षेत्र के भीतर किसी बिन्दु तक लाने के लिये किये गये कार्य के रूप में प्राप्त होती है (कार्य करना नहीं पड़ता है); अर्थात्—

''गुरुत्वीय क्षेत्र में किसी बिन्दु पर स्थित पिण्ड की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का मान, गुरुत्वीय बल द्वारा उस पिण्ड को अनन्त से उस बिन्दु तक लाने में किये गये कार्य के ऋणात्मक मान के बराबर होता है। ऋणात्मक मान यह दर्शाता है कि स्थितिज ऊर्जा आकर्षण बल के कारण है।''

जब कोई पिण्ड ग्रह से अनन्त दूरी पर होता है तब उसकी स्थितिज ऊर्जा शून्य मानी जाती है। इसे U से प्रदर्शित करते हैं। इसका मात्रक **जूल** है तथा यह एक अदिश राशि है।

माना पृथ्वी का सम्पूर्ण द्रव्यमान M_e इसके केन्द्र पर सन्निहित है तथा m द्रव्यमान का कोई उपग्रह, पृथ्वी के चारों ओर r त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर से परिक्रमण कर रहा है। पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र में स्थित होने के कारण, उपग्रह की स्थितिज ऊर्जा,



चित्र 5.13

$$U = W_{\infty \to r}$$

जहाँ $W_{\infty \to r}$ उपग्रह को अनन्त से दूरी r तक लाने में प्राप्त कार्य है,

अत:

$$U = W_{\infty \to r} = \int_{\infty}^{r} F\,dr$$

जहाँ $$F = G\frac{M_e m}{r^2}$$

अत: $$U = \int_{\infty}^{r} \frac{GM_e m}{r^2}\,dr = GM_e m\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r}$$

अत: $$\boxed{U = -G\frac{M_e m}{r}} \quad \ldots (i)$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

गतिज ऊर्जा—गतिज ऊर्जा उपग्रह की कक्षीय गति के कारण होती है। यदि इस कक्षा में उपग्रह का कक्षीय चाल v_o हो तो उपग्रह की गतिज ऊर्जा

$$K = \frac{1}{2}mv_o^2$$

$$= \frac{1}{2}m\frac{GM_e}{r} \qquad \left(\because v_o = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}\right)$$

या $$K = \frac{GM_e m}{2r} \qquad \text{... (ii)}$$

∴ उपग्रह की कुल यांत्रिक ऊर्जा $E = U + K$

समीकरण (i) तथा (ii) से

$$E = -\frac{GM_e m}{r} + \frac{GM_e m}{2r}$$

$$\boxed{E = -\frac{GM_e m}{2r}} \qquad \text{... (22)}$$

समीकरण (21) में ऋण चिह्न यह प्रकट करता है कि ग्रह एवं उपग्रह परस्पर आकर्षण बल से बंधे हुए हैं।

अत: उपग्रह को अपनी कक्षा से अनन्त तक ले जाने के लिए अर्थात् उसकी कुल ऊर्जा शून्य करने के लिए उपग्रह को ऊर्जा देना आवश्यक है, यही आवश्यक न्यूनतम ऊर्जा उपग्रह की बन्धन ऊर्जा कहलाती है।

अत: $$\boxed{\text{उपग्रह की बन्धन ऊर्जा} = -E = \frac{GM_e m}{2r}}$$

उपग्रह उस समय तक अपनी कक्षा नहीं छोड़ेगा जब तक उसे अतिरिक्त ऊर्जा नहीं प्राप्त होगी, अर्थात् वह एक बन्द कक्षा (Closed orbit) में परिक्रमण करता रहेगा।

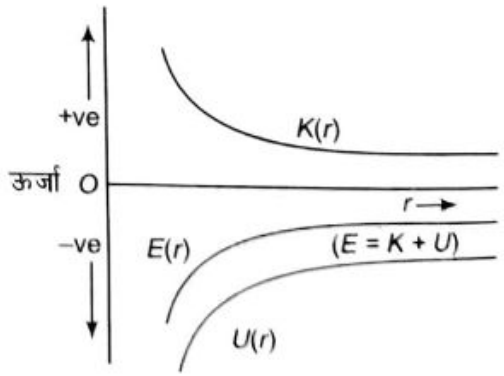
समीकरण (i), (ii) तथा (21) से स्पष्ट है—

(1) उपग्रह की गतिज, स्थितिज तथा कुल ऊर्जा उपग्रह तथा ग्रह के द्रव्यमानों तथा इसकी कक्षा की त्रिज्या r पर निर्भर करती है।

(2) $\frac{K}{E} = -1 \Rightarrow K = -E$

तथा $\frac{U}{E} = 2 \Rightarrow U = 2E$

उपरोक्त आधार पर इन तीनों ऊर्जाओं (K, U तथा E) का कक्षीय त्रिज्या r के साथ परिवर्तन चित्र 5.14 के अनुसार प्रदर्शित किया जा सकता है। r का मान अनन्त होने पर इन तीनों ऊर्जाओं के मान शून्य हो जाते हैं।



चित्र 5.14

§ 5.20 पलायन वेग (v_e) तथा पलायन ऊर्जा (Escape Velocity v_e and Escape Energy)

यदि पृथ्वी तल से किसी पिण्ड को किसी प्रारम्भिक वेग से ऊपर की ओर फेंका जाता है तो वह पिण्ड कुछ ऊँचाई तक जाकर, गुरुत्वाकर्षण के कारण, पुन: पृथ्वी तल पर वापस लौट आता है। पिण्ड के प्रारम्भिक वेग का मान बढ़ाये जाने पर पिण्ड अधिकाधिक ऊँचाई तक जाकर पृथ्वी तल पर वापस लौट आता है। अन्त में वेग के किसी मान के लिए, पिण्ड पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र से बाहर निकल जाता है तथा वापस पृथ्वी तल पर नहीं लौटता है। पृथ्वी सतह पर पिण्ड की प्रारम्भिक वेग के इस मान को पलायन वेग कहते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: पलायन वेग वह न्यूनतम वेग है जिससे किसी पिण्ड को पृथ्वी से ऊपर फेंकने पर, पिण्ड पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र से बाहर निकल जाता है तथा पुन: पृथ्वी पर लौटकर वापस नहीं आता है। पलायन वेग से फेंकने के लिए पिण्ड को दी गयी गतिज ऊर्जा पिण्ड की पलायन ऊर्जा कहलाती है।

अनन्त पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा शून्य होती है तथा पृथ्वी तल पर, m द्रव्यमान के पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा (U) निम्न होती है—

$$U = -\frac{GM_e m}{R_e}$$

अर्थात् पिण्ड को पृथ्वी तल से अनन्त में भेजने के लिए पिण्ड पर इतना ही $\left(\frac{GM_e m}{R_e}\right)$ कार्य करना होगा, अर्थात् यदि पिण्ड को $\frac{GM_e m}{R_e}$ के तुल्य गतिज ऊर्जा दे दी जाए तो वह पृथ्वी के गुरुत्वीय क्षेत्र से बाहर अन्तरिक्ष (space) में चला जायेगा। **पिण्ड को अनन्त में भेजने के लिए दी गयी $\frac{+GM_e m}{R_e}$ (गतिज) ऊर्जा पलायन ऊर्जा कहलाती है।**

पृथ्वी तल पर यदि पिण्ड को $\frac{GM_e m}{R_e}$ के तुल्य गतिज ऊर्जा देने के लिए पलायन वेग v_e से फेंका जाता है, तब—

$$\text{KE} = \frac{1}{2}mv_e^2 = \frac{GM_e m}{R_e}$$

अथवा
$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}} \quad \text{...(i)}$$

परन्तु
$$GM_e = gR_e^2$$

अत:
$$v_e = \sqrt{\frac{2gR_e^2}{R_e}}$$

या
$$\boldsymbol{v_e = \sqrt{2gR_e}} \quad \text{... (23)}$$

पृथ्वी की सतह पर पलायन वेग का मान समीकरण (15) से

$$v_e = \sqrt{2\times 9{\cdot}8\times 6{\cdot}4\times 10^6} \text{ मी/से}$$

$$v_e = 11{\cdot}2 \text{ किमी/से}$$

समीकरण (22) से स्पष्ट है कि—

(i) पलायन वेग का मान पिण्ड के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता है।

(ii) पलायन वेग का मान पिण्ड के प्रक्षेपण कोण (Angle of projection) पर निर्भर नहीं करता है।

(iii) यह पृथ्वी के द्रव्यमान तथा त्रिज्या पर निर्भर करता है।

(iv) यदि पृथ्वी तल के समीप परिक्रमण करते उपग्रह की चाल v_o हो, तो $\frac{v_e}{v_o} = \frac{\sqrt{2gR_e}}{\sqrt{gR_e}}$ अर्थात् $v_e = \sqrt{2}\, v_o$

वैकल्पिक विधि (Alternative Method)

माना पृथ्वी तल पर पलायन वेग का मान v_e है तथा द्रव्यमान m का कोई पिण्ड पृथ्वी सतह को v_e वेग से छोड़ता है। तब पृथ्वी सतह पर—

(i) पिण्ड की गतिज ऊर्जा, $K = \frac{1}{2}mv_e^2$

(ii) पिण्ड की स्थितिज ऊर्जा, $U = -\frac{GM_e m}{R_e}$

(iii) पिण्ड की कुल ऊर्जा, $E = K + U$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$E = \frac{1}{2}mv_e^2 + \left(-\frac{GM_e m}{R_e}\right)$$

जब पिण्ड अनन्त पर पहुँचता है तो यह रुक जाता है तथा इसकी कुल ऊर्जा शून्य होती है। पिण्ड की गति पृथ्वी के गुरुत्व बल (संरक्षी बल) के अन्तर्गत होने के कारण, यान्त्रिक ऊर्जा के संरक्षण के नियम के अनुसार, पिण्ड की कुल ऊर्जा पृथ्वी सतह पर भी शून्य होनी चाहिए, अत:

$$\frac{1}{2}mv_e^2 + \left(-\frac{GM_e m}{R_e}\right) = 0$$

$$\therefore \quad v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$$

5.21 कृष्ण विवर की अवधारणा (Concept of black hole)

ऐसा माना जाता है कि प्राय: बहुत बड़े आकार के तारे के गुरूत्वीय विध्वंस (Gravitational collapse) की परिणति कृष्ण विवर (Black hole) के रूप में होती है।

वास्तव में कृष्ण विवर (Black hole) का बनना किसी तारे के जीवन यात्रा की अन्तिम अवस्था है।

तारा एक स्व-प्रकाशित आकाशीय पिण्ड है जो नाभिकीय ऊर्जा को ऊष्मा, प्रकाश एवं अन्य प्रकार के विकिरण ऊर्जा में सतत् परिवर्तित करता रहता है। ब्रह्मण्ड में लाखों तारे हैं, जो अनन्त आकाश में एक समान रूप से वितरित नहीं है वरन समूहों के रूप में एकत्रित पाये जाते हैं, जिन्हें आकाशगंगा (Galaxy) कहते हैं। ब्रह्माण्ड में कई आकाशगंगा हैं तथा प्रत्येक में करोड़ों तारे हैं। सूर्य भी एक तारा है जो दूधिया आकाश गंगा (Milky way Galaxy) का एक सदस्य है।

भिन्न-भिन्न तारों का आकार द्रव्यमान तथा ताप एक-दूसरे से भिन्न-भिन्न होता है। जिसमें तारों का व्यास सूर्य के व्यास से 450 गुणा छोटा अथवा 1000 गुणा बड़ा तक के हो सकता है तथा द्रव्यमान का मान सूर्य के द्रव्यमान के 20वें भाग से लेकर 50 गुणा तक कुछ भी हो सकता है।

इसी प्रकार सतह ताप का मान 3000 डिग्री सेल्सियस से लेकर 50,000 डिग्री सेल्सियस तक हो सकता है।

ब्रह्माण्ड की उत्पत्ति—(बिंग-बैंग सिद्धान्त) [Origination of Universe—big-bang theory (Superdense theory)]

ब्रह्माण्डोत्पत्ति संबन्धी सिद्धान्त (Cosmological theory) के अनुसार ब्रह्माण्ड की समस्त ऊर्जा एवं द्रव्य की उत्पत्ति एक नियत समय पर अरबों-अरब वर्ष पूर्व एक अति घनीभूत पिण्ड के बड़े धमाके के कारण हुई थी।

यह सिद्धान्त ब्रह्माण्ड के विस्तार की भी व्याख्या करता है जिसके अनुसार प्रत्येक आकाश गंगा एक दूसरे से दूर जा रहा है। साथ ही अंतरक्षीय कृष्णिका के 3 K ताप पर अति सूक्ष्म तरंगों के विकिरण (Microwave radiation) एवं महाविस्फोट (big-bang) के पश्चात् अगले 100 सेकण्ड में 10^9K ताप पर ड्यूटेरियम (Deuterium) के विस्फोट से अत्यधिक मात्रा में हीलियम (Helium) के उत्पत्ति की भी व्याख्या करता है।

सर्वमान्य ब्रह्माण्डोत्पत्ति सम्बन्धी महा विस्फोट का प्रथम सिद्धान्त 1927 में ए०जी०ई० लेमाइट्र (A.G.E. Lemaitre) द्वारा दिया गया था।

तारे का जन्म (Birth of Stars)

महाविस्फोट के पश्चात् अन्तर्तारकीय आकाश (Interstellar Space), धूल एवं गैस (मुख्यतया हाइड्रोजन) के बादलो से भरा था, जिसे नीहारिका (nebula) कहा गया। सुदूर अन्तरिक्ष में यह स्थितियाँ आज भी विद्यमान हैं। यदि नीहारिका का द्रव्यमान एक निश्चित परिमाण, जिसे ज़ीन द्रव्यमान (Jean mass) कहा जाता है, से अधिक होता है तो द्रव्य कणों के मध्य विद्यमान कमज़ोर गुरुत्वीय आकर्षण बल (weak gravitational force) के कारण नीहारिका सिकुड़ने लगता है। गुरुत्वीय खिचाव अधिक से अधिक नीहारिका को खींचकर नीहारिका का एक सघन ढ़ेर बना देता है सघनता के कारण केन्द्रीय भाग में गर्मी बढ़ती है जिससे चमक पैदा होती है इस कारण इसे आद्यतारा (Protostar) कहते हैं।

AKG TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

सधनता के कारण गैस के बादल गर्म होने लगते है जिससे बादलों के ढ़ेर के अन्दर दबाव भी बढ़ने लगता है। सघनता की प्रक्रिया सतत् चलते रहने अर्थात् लगातार संकुचन के कारण इस अति सघन गैस के ढ़ेर के अन्दर अत्यधिक ताप एवं दाब की दशा में नाभिकीय संलयन (nuclear fusion) की क्रिया प्रारम्भ हो जाती है। इस समय गैस के इस सघन ढ़ेर के केन्द्रीय भाग (Central core) का ताप लगभग 10^7 K होता है तथा केन्द्रीय भाग में उपलब्ध हाइड्रोजन अणु (H) अत्यधिक ऊर्जा निस्तारित करते हुए हीलियम (He) अणु मे परिवर्तित होने लगता है—

$$4_1H^1 \longrightarrow 2He_4 + \text{ऊर्जा}$$

उत्पन्न ऊर्जा तारे को करोड़ो वर्षो तक प्रकाशित रखती है। इस समय द्रव्य कणों के मध्य विद्यमान गुरुत्व बल जो गैसीय पिण्ड मे अन्दर की ओर लगता है तथा हाइड्रोजन गैस के दहन के फलस्वरूप बाहर की ओर लगने वाला विकिरण दाब; सन्तुलन में होने के कारण तारा स्थिर दशा में होता है। इसे मुख्य दृश्यतारा (Main sequence star) अथवा जवान तारा (Young star) भी कहते हैं। हमारा सूर्य वर्तमान में एक जवान तारा है।

तारे की मृत्यु (Death of Stars)

नाभिकीय संलयन प्रक्रिया के लिए ईंधन के रूप में जब हाइड्रोजन गैस की कमी होने लगती है तब तारा मरने लगता है।

लाल दानव तारे का बनाना (Formation of red gaint star)

जब तारे का सम्पूर्ण हाइड्रोजन गैस (ईंधन), दहन (नाभिकीय क्रिया) के पश्चात् हीलियम में रूपान्तरित हो जाता है तो नए का उत्पन्न होना बन्द हो जाता है इस प्रकार बाहर की ओर लगने वाला विकिरण दाब शून्य हो जाता है; परिणामस्वरूप केवल अन्दर की ओर लगने वाला गुरुत्वीय बल ही शेष बचता है, इस प्रकार तारा पुन: सिकुड़ने लगता है तथा इसके केन्द्रीय भाग, हीलियम का ताप पुन: बढ़ने लगता है।

ताप के बढ़ने से तारे का बाहरी सतह फैलनै लगता है फलस्वरूप तारे का आकर बढ़ने लगता है। प्रक्रिया सतत् चलती रहती है इस प्रकार तारे का आकार बहुत बड़ा हो जाता है।

आकार विस्तार के कारण तारे के बाहरी सतह का ताप कम होने लगता है परन्तु केन्द्रीय भाग के अत्यधिक गर्म होने के कारण हीलियम नाभिकीय प्रक्रियाओं के द्वारा कार्बन में रूपान्तरित होने लगता है। बाहरी सतह का ताप कम होने के कारण यह कम चमकीला होता है, परन्तु केन्द्रीय भाग अत्यधिक गर्म होने के कारण सुर्ख लाल चमकता है जिस कारण सम्पूर्ण तारा अति विशाल लाल गोले के रूप में दिखायी पड़ता है इसे लाल दानव तारा (Red gaint star) कहते हैं।

सुपरनोवा की घटना (नोवा विस्फोट) (Supernova/Nova Explosion)

कोई तारा, लाल दानव तारा के रूप में लाखों साल तक रह सकता है जिसमें, तारे के केन्द्रीय भाग में स्थित हीलियम लगातार भारी तत्वों जैसे कार्बन तथा नाइट्रोजन में रूपान्तरित होता रहता है। इस दशा के अन्त में तारे से ऊर्जा निस्तारण की मात्रा अत्यधिक हो जाती है और अचानक ही तारे में एक तीव्र एवं भयानक विस्फोट होता है जिससे पूरा आकाश रोशनी से नहा उठता है, इस घटना को नोवा या सुपरनोवा की घटना कहते हैं। इस विस्फोट से तारे का अधिकांश बाहरी हिस्सा (गैसीय भाग) जिसे ग्रहीय नीहारिका (Planetary Nebula) कहते हैं; अंतरिक्ष में बिखर जाता है साथ ही हीलियम, केन्द्रीय भाग भी पूर्णतया समाप्त हो जाता है।

सुपरनोवा की घटना में तारे की चमक बहुत तेजी से बढ़ती है पुन: समय के साथ धीरे-धीरे कम होती जाती है और अन्त में समाप्त हो जाती है अर्थात् तारे की मृत्यु हो जाती है।

लाल दानव तारा बनने के पश्चात, मृत्यु की ओर अग्रसर तारे के केन्द्रीय भाग का द्रव्यमान जिसे प्रारम्भिक द्रव्यमान (Initial mass) कहते हैं, बहुत ही महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है तथा निम्न तीन स्थितियों में से किसी एक दशा को प्राप्त होकर मृत्यु को प्राप्त होता है—

1. सफेद वामन तारा (White Dwarf star)
2. न्यूट्रॉन तारा (Neutron star)
3. कृष्ण विवर (Black hole)

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

सफेद वामन तारे का बनना (Formation of White Drarf Star)

यदि तारे का प्रारम्भिक द्रव्यमान हमारे सूर्य के द्रव्यमान से कम अथवा उसके बराबर होता है तो लाल दानव तारा सफेद वामन तारा बन जाता है। चूँकि इस समय सफेद वामन तारे में कोई नाभिकीय प्रक्रिया नहीं चल रही होती है अत: सफेद वामन तारा सिकुड़ कर पृथ्वी के आकार के बराबर हो जाता है। इस समय इसका रंग सफेद से परिवर्तित होकर पहले पीला फिर लाल एवं अन्त मे काला हो जाता है तब इसे काला वामन तारा (Black dwarf star) कहते हैं।

न्यूट्रॉन तारे का बनना (Formation of Neutron Star)

यदि तारे का प्रारम्भिक द्रव्यमान, सूर्य के द्रव्यमान से एक से पाँच गुणा अधिक द्रव्यमान के मध्य तक होता है तो लाल दानव तारा न्यूट्रॉन तार बन जाता है। जब तारे का प्रारम्भिक द्रव्यमान सूर्य के द्रव्यमान से अधिक होता है तो गुरुत्वीय खिंचाव के कारण तारा लगातार सिकुड़ता रहता है जिससे केन्द्रीय भाग का घनत्व अत्यधिक बढ़ जाता है। फलस्वरूप इलेक्ट्रॉन का संघट्ट प्रोट्रॉन के साथ होता है जिससे न्यूट्रॉन की उत्पत्ति होती है अन्ततोगत्वा परमाणुओं के नाभिक में न्यूट्रॉनों की अधिकता हो जाती है जो अन्त में टूट कर तारे को न्यूट्रॉनों से भर देता है अत: इसे न्यूट्रॉन तारा कहते हैं।

न्यूट्रॉन तारा प्रकाश का उत्सर्जन नहीं करता है वरन स्पंदन (Pulse) के रूप में रेडियो तरंगों (Radio waves) को उत्सर्जित करता है। इसलिए इसे पल्सर्स (Pulsars) भी कहते हैं। न्यूट्रॉन तारे का व्यास लगभग 10-20 किलोमीटर तथा इसका घनत्व 1017 kgm^3 होता है। न्यूट्रॉन तारे का चुम्बकीय क्षेत्र बहुत ही तीव्र, लगभग 108 टेस्ला के परास का होता है।

कृष्ण विवर का बनना (Formation of Black Hole)

यदि तारे का प्रारम्भिक द्रव्यमान, सूर्य के द्रव्यमान के पाँच गुणा मान से भी अधिक होता है तो लाल दानव तारा कृष्ण विवर (black hole) बन जाता है।

विशालकाय तारा अपने अत्यधिक द्रव्यमान के कारण अन्दर (केन्द्र) की ओर, अत्यधिक गुरुत्वीय प्रभाव में अनियन्त्रित संकुचन (contraction) की दशा में पहुँच जाता है। संकुचन की प्रक्रिया सतत् चलती रहती है परिणामस्वरूप तारा इतना घनीभूत (dense) हो जाता है कि इसमें प्रवेश करने के पश्चात् प्रकाश (light) भी इसके गुरुत्व के कारण बाहर नहीं निकल पाता है।

फलस्वरूप कृष्ण विवर (black hole) अदृश्य होता है अत: इन्हें सीधे तौर पर नहीं देखा जा सकता है।

अन्तरिक्ष में कृष्ण विवर (black hole) की उपस्थिति निम्न दो तरीकों से बताई जा सकती है—

1. आकाश में इसके निकटवर्ती पदार्थों के क्षेत्र द्वारा (By the field of its neighboring objects in the sky)—यदि कोई तारा अदृश्य तारे की ओर तेजी से बढ़ रहा है तो अनुमान लगाया जा सकता है कि तारा, कृष्ण विवर की ओर बढ़ रहा है।

2. कृष्ण विवर द्वारा उत्सर्जित X-ray की खोज द्वारा (By the detection of X-rays given off by the black hole)—जब कोई पदार्थ कृष्ण विवर के भंवर में चक्कर खाते हुए प्रवेश करता है तो अत्यधिक गर्म हो जाने के कारण X-rays उत्सर्जित करता है जिसके आधार पर कृष्ण विवर को खोजा जा सकता है।

यदि कृष्ण विवर का द्रव्यमान M तथा विध्वंस त्रिज्या (Collapsed radius) R हो तो—

$$R = \frac{GM}{C^2}$$

जहाँ, G = गुरुत्वाकर्षण नियतांक, तथा C = प्रकाश की चाल है।

सूर्य को कृष्ण विवर बनने के लिए 300 मीटर की त्रिज्या तक सिकुड़ना होगा।

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

स्मरणीय बिन्दु
(Points to be Remembered)

(1) गुरुत्वीय बल, केन्द्रीय बल होता है।

(2) ग्रहों की गति सम्बन्धी कैपलर के तीन नियम हैं—

(i) कक्षाओं का नियम (Laws of Orbits)—प्रत्येक ग्रह सूर्य के परित: दीर्घवृत्ताकार पथ (elliptical path) पर गति करता है तथा सूर्य उस दीर्घवृत्त के किसी एक फोकस (नाभि) पर होता है। विभिन्न ग्रहों की कक्षायें भिन्न-भिन्न होती हैं।

(ii) क्षेत्रीय चाल अथवा ग्रह के कोणीय संवेग संरक्षण का नियम (Law of Areal Velocity)—किसी ग्रह के कक्षीय तल (Plane of orbit) में ग्रह तथा सूर्य को मिलाने वाली रेखा समान समयान्तरालों में (कक्षा के तल में) समान क्षेत्र तय (sweep) करती है अर्थात् ग्रह तथा सूर्य को मिलाने वाली रेखा की क्षेत्रफलीय चाल (areal velocity) नियत है।

$$r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2$$

(iii) परिक्रमण काल का नियम (Law of period of revolution)—ग्रह का सूर्य के परित: परिक्रमण काल (Period of revolution) T का वर्ग, उसकी दीर्घवृत्ताकार कक्षा के अर्द्ध-दीर्घअक्ष (Semi-major axis of the elliptical orbit of the planet) r की तृतीय घात के अनुक्रमानुपाती होता है।

अर्थात् $$T^2 = Kr^3$$

(3) न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण का नियम किन्हीं दो पिण्डों जिनके द्रव्यमान m_1 तथा m_2 तथा जिनके बीच दूरी r है के लिए निम्न प्रकार लागू होता है, $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, जहाँ G सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक है, इसका मान $6{\cdot}67\times10^{-11}$ न्यूटन मी^{2}/किग्रा^{2} होता है।

(4) खोखले गोले के अन्दर गुरुत्वीय क्षेत्र शून्य होता है।

(5) $g = G\frac{M}{R^2}$ होता है, जहाँ g ग्रह की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण, M तथा R क्रमश: ग्रह का द्रव्यमान तथा उसकी त्रिज्या है।

(6) **गुरुत्वीय त्वरण g के मान में परिवर्तन :**

(i) पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई पर $$g' = \frac{g}{\left(1+\frac{h}{R_e}\right)^2} \quad (\text{जब } h \geq R_e)$$

तथा $$g' = g\left(1-\frac{2h}{R_e}\right) \quad \text{जब } h << R_e$$

(ii) पृथ्वी की सतह के नीचे $$g' = g\left(1-\frac{d}{R_e}\right)$$

(iii) पृथ्वी की अक्षीय घूर्णन गति ω तथा अक्षांश λ का प्रभाव

$$g' = g - R_e\omega^2\cos^2\lambda$$

(7) पृथ्वी के चारों ओर वृत्तीय कक्षा में चक्कर काटते किसी उपग्रह के लिए यदि M ग्रह का द्रव्यमान, m उपग्रह का द्रव्यमान, R ग्रह की त्रिज्या, h उपग्रह की ग्रह से ऊँचाई हो, तो

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

(i) कक्षीय वेग, $v_o = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$

(ii) परिक्रमण काल, $T = 2\pi\sqrt{\frac{GM}{R+h}}$

(iii) उपग्रह की कुल ऊर्जा, $E = -\frac{GMm}{2r}$, जहाँ $r = R + h$

यहाँ $E = U + K$

$$= -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{2r}$$

उपग्रह की कुल ऊर्जा ही उपग्रह की बंधन ऊर्जा कहलाती है।

(8) ग्रह की सतह पर पलायन वेग, $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

$v_e = \sqrt{2gR}$, पृथ्वी की सतह पर पलायन वेग = 11·2 किमी/से

(9) उपग्रह के कक्षीय वेग v_o तथा पलायन वेग v_e में सम्बन्ध

$$v_e = \sqrt{2}\, v_o$$

(10) यदि पिण्ड का प्रक्षेपण वेग v, पलायन वेग v_e से अधिक है तो अंतरिक्ष (space) में पिण्ड की गति v_s

$$v_s = \sqrt{v^2 - v_e^2}$$

साधित आंकिक उदाहरण
(Solved Numerical Examples)

उदाहरण 1 : पृथ्वी की सतह से कितनी गहराई पर गुरुत्वीय त्वरण का मान $\frac{1}{6}$ रह जायेगा?

हल—पृथ्वी की सतह से d गहराई पर गुरुत्वीय त्वरण

$$g' = g\left(1 - \frac{d}{R}\right)$$

प्रश्नानुसार $g' = \frac{g}{6}$

अतः $\frac{g}{6} = g\left(1 - \frac{d}{R}\right)$

या $\frac{1}{6} = 1 - \frac{d}{R}$ या $d = \frac{5}{6}R$

उदाहरण 2 : पृथ्वी तल से कितनी ऊँचाई जाने पर गुरुत्वीय त्वरण पृथ्वी पर गुरुत्वीय त्वरण का सोलहवाँ भाग रह जाएगा? (पृथ्वी की त्रिज्या = 6400 किमी)

हल— हम जानते है कि

$$g' = \frac{g}{\left[1 + \frac{h}{R_E}\right]^2}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

दिया है, $\frac{g'}{g} = \frac{1}{16}$ व $R_E = 6400$ किमी

$$\frac{1}{16} = \frac{1}{\left[1+\frac{h}{R_E}\right]^2} \Rightarrow \frac{1}{4^2} = \frac{1}{\left[1+\frac{h}{R_E}\right]^2}$$

$$4^2 = \left[1+\frac{h}{R_E}\right]^2 \Rightarrow 1+\frac{h}{R_E} = 4$$

या $$\frac{h}{R_E} = 3$$

$$h = 3\times 6400 = 19200 \text{ किमी}$$

उदाहरण 3 : यदि कोई व्यक्ति पृथ्वी तल से पृथ्वी की त्रिज्या के बराबर ऊँचाई पर चला जाए तो उसका भार कितना रह जाएगा?

हल— हम जानते हैं कि $$g' = \frac{g}{\left[1+\frac{h}{R_e}\right]^2}$$

प्रश्नानुसार, $h = R_e$

$\therefore$ $$g' = \frac{g}{[1+1]^2} = \frac{g}{4}$$

अत: स्पष्ट है कि गुरुत्वीय त्वरण या व्यक्ति का भार (mg') एक-चौथाई रह जाएगा।

उदाहरण 4 : एक कृत्रिम उपग्रह पृथ्वी के निकट वृत्ताकार पथ में घूम रहा है। सिद्ध कीजिए कि इसका आवर्तकाल $T = \sqrt{\left(\frac{3\pi}{G\rho}\right)}$ है जहाँ ρ पृथ्वी का घनत्व है। यदि $G = 6{\cdot}67\times10^{-11}$ न्यूटन-मीटर^2/किग्रा^{2}, $g = 9.8$ मी/से^{2} तथा $R_e = 6400$ किमी हो, तो उपग्रह के आवर्तकाल की गणना कीजिए।

हल—हम जानते हैं कि $$T = \frac{2\pi}{R_e}\sqrt{\left[\frac{(R_e+h)^3}{g}\right]}$$

$h = 0$ (शून्य) रखने पर,

$$T = \frac{2\pi}{R_e}\sqrt{\left[\frac{R_e^{\,3}}{g}\right]} = \sqrt{\left[\frac{4\pi^2.R_e^{\,3}}{gR_e^{\,2}}\right]}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{4\pi^2.R_e}{g}\right]} = \sqrt{\left[\frac{4\pi^2.R_e^{\,3}}{GM_e}\right]} \qquad (\because gR_e^{\,2} = GM_e)$$

$$= \sqrt{\left[\frac{4\pi^2.R_e^{\,3}}{G\frac{4}{3}(\pi R_e^{\,3}.\rho)}\right]} \qquad \left[\because M_e = \frac{4}{3}\pi R_e^{\,3}.\rho\right]$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अथवा $$T = \sqrt{\left[\frac{3\pi}{G\rho}\right]}$$

पुनः आवर्तकाल $$T = 2\pi\sqrt{\left[\frac{R_e}{g}\right]}$$

मान रखने पर,

आवर्तकाल $$T = 2\times 3\cdot 14\sqrt{\left[\frac{6400\times 10^3}{9\cdot 8}\right]}$$

T = 5074 से = 1 घंटा 24 मि 34 से

उदाहरण 5 : एक कृत्रिम उपग्रह 14.3 किमी/से के वेग से पृथ्वी के चारों ओर समीप स्थित वृत्तीय कक्षा में चक्कर लगा रहा है। उपग्रह का पलायन वेग ज्ञात कीजिए।

हल—चूँकि पलायन वेग व कक्षीय वेग में निम्न सम्बन्ध होता है—

$$v_e = \sqrt{2}\, v_o$$

$$= \sqrt{2}\times 14\cdot 3 = \mathbf{20\cdot 22}\ \text{किमी/से}$$

उदाहरण 6 : दो ग्रहों के केन्द्रों के मध्य की दूरी $9r$ है। छोटे ग्रह का द्रव्यमान M तथा त्रिज्या r है। बड़े ग्रह का द्रव्यमान $9M$ तथा त्रिज्या $2r$ है। दोनों ग्रहों के मध्य शून्य गुरुत्वाकर्षण बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल— चित्रानुसार किसी बिन्दु पर गुरुत्वाकर्षण बल शून्य होने के लिए उस बिन्दु पर लगने वाले समस्त बलों का सदिश योग शून्य होना चाहिए। माना शून्य गुरुत्वाकर्षण बल वाला बिन्दु P छोटे ग्रह से x दूरी पर स्थित है। यदि बिंदु P पर m द्रव्यमान का कोई पिण्ड रखा हो, तो छोटे ग्रह के कारण गुरुत्वाकर्षण बल

$$F_1 = \frac{G\times M\times m}{x^2} \qquad (P \text{ से } O_1 \text{ की ओर})$$

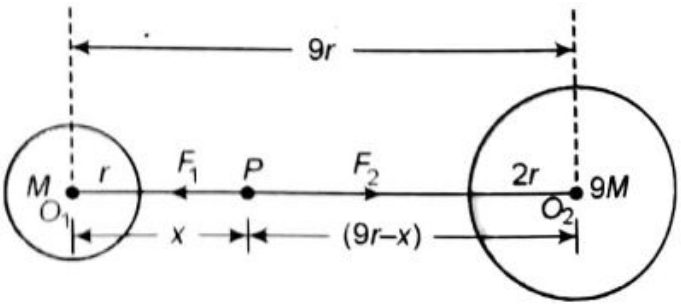
इसी प्रकार बड़े ग्रह के कारण m द्रव्यमान पर लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल

$$F_2 = \frac{G\times 9M\times m}{(9r-x)^2} \qquad (P \text{ से } O_2 \text{ की ओर})$$

चूँकि बिन्दु P पर तुल्य बल शून्य है। इसलिए

$$F_1 = F_2$$

अतः $$\frac{G\times M\times m}{x^2} = \frac{G\times 9M\times m}{(9r-x)^2}$$



या $$\frac{1}{x^2} = \frac{9}{(9r-x)^2}$$

या $$(3x)^2 = (9r-x)^2$$

या $$4x = 9r$$

या $$\boldsymbol{x = 2\cdot 5r}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 7 : किसी ग्रह का द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान का 2 गुना तथा त्रिज्या आधी है। उस ग्रह के गुरुत्वीय त्वरण का मान ज्ञात करें।

हल— G तथा g के संबंध से पृथ्वी सतह पर गुरुत्वीय त्वरण का मान $g = \dfrac{GM}{R^2}$

चूँकि ग्रह का द्रव्यमान $M' = 2M$ तथा ग्रह की त्रिज्या $R' = \dfrac{R}{2}$ है। यदि उस ग्रह पर गुरुत्वीय त्वरण का मान g' हो, तो

$$g' = \frac{GM'}{(R')^2} = \frac{G(2M)}{(R/2)^2} = \frac{G(2M)\times 4}{R^2}$$

या $$g' = 8\frac{GM}{R^2} = 8g$$

$\therefore$ $$\boldsymbol{g' = 8\,g}$$

उदाहरण 8 : दो ग्रह, सूर्य से क्रमशः 10^{11} तथा 10^{10} मीटर की दूरी पर स्थित है। दोनों ग्रहों के परिक्रमण काल एवं चाल का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल—केपलर के तृतीय नियम के अनुसार, यदि ग्रहों का सूर्य के परितः परिक्रमण काल क्रमशः T_1 तथा T_2 एवं सूर्य से दूरियाँ r_1 तथा r_2 हो, तो

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{3/2}$$

दिया है $r_1 = 10^{11}$ मीटर तथा $r_2 = 10^{10}$ मीटर

अतः $$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{10^{11}}{10^{10}}\right)^{3/2} = \boldsymbol{10\sqrt{10}}$$

यदि ग्रहों की कक्षायें वृत्तीय हों तथा उनकी चाल क्रमशः v_1 तथा v_2 हों, तो

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1} \text{ तथा } v_2 = \frac{2\pi r_2}{T_2}$$

या $$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{T_2}{T_1} = \frac{r_1}{r_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{3/2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{10^{10}}{10^{11}}\right)^{1/2} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{10}}}$$

उदाहरण 9 : पृथ्वी पर किसी व्यक्ति का भार 80 kg है। ज्ञात कीजिए—

(i) चन्द्रमा पर उसका भार तथा द्रव्यमान क्या होगा?

(ii) यदि यह व्यक्ति पृथ्वी पर 2 मीटर ऊँचाई तक कूद सकता है तो चन्द्रमा पर कितनी ऊँचाई तक कूदेगा?

(iii) यदि पृथ्वी पर 100 मीटर दौड़ने में उसे 1 मिनट लगता है तो चन्द्रमा पर 1 मिनट में वह कितनी दूरी दौड़ेगा?

(दिया है, चन्द्रमा का द्रव्यमान $= 7\cdot 34\times 10^{22}$ kg, चन्द्रमा की त्रिज्या $= G = 6\cdot 67\times 10^{6}$ m तथा गुरुत्वाकर्षण नियतांक $G = 6\cdot 67\times 10^{-11}$ N m^{2}kg^{-2})

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

हल—(i) सूत्र $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ में चन्द्रमा के लिए दिये गये मान रखने पर

$$F = W' = \frac{(6.67\times10^{-11}\,\text{Nm}^2\text{kg}^{-2})\times(7.34\times10^{22}\,\text{kg})\times 80\,\text{kg}}{(1.75\times10^{6}\,\text{m})^2} = \mathbf{128\,N}$$

द्रव्यमान पदार्थ का मौलिक गुण है अत: इसके मान पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा, अर्थात् पृथ्वी पर व्यक्ति का द्रव्यमान तथा चन्द्रमा पर उसी व्यक्ति का द्रव्यमान एक समान रहेगा।

(ii) $\quad F = mg$

अत: चन्द्रमा पर $\quad F = W' = mg'$

या $\quad g' = \dfrac{W'}{m} = \dfrac{128\,\text{N}}{80\,\text{kg}} = 1{\cdot}6\,\text{N/kg}$

अर्थात् पृथ्वी के सापेक्ष चन्द्रमा का गुरुत्वीय त्वरण

$$\frac{g'}{g} = \frac{1{\cdot}6}{9{\cdot}8} = \frac{1}{6} \quad \text{(लगभग)}$$

अत: चन्द्रमा पर वह व्यक्ति पृथ्वी के सापेक्ष 6 गुना ज्यादा ऊँचा कूदेगा, अर्थात्

चन्द्रमा पर कूदने की ऊँचाई $= 6\times2$ मीटर

$= \mathbf{12\ मीटर}$ (लगभग)

(iii) किसी समतल पर गतिमान पिण्ड पर गुरुत्वीय त्वरण g का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है अत: चन्द्रमा पर वह व्यक्ति 1 मिनट में 100 मीटर ही दौड़ेगा।

अभ्यास (Exercises)

1. गुरुत्वीय त्वरण 'g' तथा गुरुत्वाकर्षण नियतांक 'G' में क्या सम्बन्ध है? व्यंजक प्राप्त कीजिए।
2. सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण स्थिरांक G की परिभाषा देते हुए इसकी विमा तथा मात्रक लिखिये।
3. पृथ्वी के निकट परिक्रमा करते हुए एक उपग्रह के कक्षीय वेग का व्यंजक प्राप्त कीजिये। पलायन वेग से इसका क्या सम्बन्ध है?
4. भू स्थिर उपग्रह से आप क्या समझते हैं? इसके क्या उपयोग हैं?
5. पलायन ऊर्जा तथा पलायन वेग से क्या तात्पर्य है? पृथ्वी तल से किसी पिण्ड के लिए पलायन वेग के लिए व्यंजक लिखिये।
6. 300 किग्रा का एक द्रव्यमान पिण्ड 75 किग्रा के द्रव्यमान पिण्ड से 4 मीटर की दूरी पर स्थित है। दोनों पिण्डों के मध्य लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल का मान ज्ञात कीजिए। ($g = 6{\cdot}67\times10^{-11}\,\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$) **(उत्तर : $9{\cdot}37\times10^{-8}$ न्यूटन)**
7. एक उपग्रह, जिसका द्रव्यमान 2500 किग्रा है, पृथ्वी की सतह से 1700 किमी की ऊँचाई पर वृत्तीय पथ पर गति कर रहा है। उपग्रह की बन्धन ऊर्जा ज्ञात कीजिये। पृथ्वी की त्रिज्या $R_e = 6400$ किमी तथा पृथ्वी का द्रव्यमान $M_e = 6{\cdot}0\times10^{24}$ किग्रा है। **(उत्तर : $6{\cdot}9\times10^{10}$ जूल)**
8. पृथ्वी की सतह से $R/3$ ऊपर जाने पर 'g' के मान पर क्या प्रभाव पड़ेगा, जहां R पृथ्वी की त्रिज्या है? **(उत्तर : $\frac{9}{16}g$)**
9. यदि पृथ्वी अपनी धुरी पर एक चक्कर 210 मिनट में पूरा करने लगे तो गुरुत्वीय त्वरण का मान क्या होगा?

AYC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(i) विषुवत वृत्त पर

(ii) ध्रुवों पर

जहाँ पृथ्वी की त्रिज्या 6400 किमी तथा $g = 9{\cdot}8$ मी/से^{2}। **(उत्तर : (i) 8 · 20 मी/से^{2} (ii) कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा)**

10. एक उपग्रह पृथ्वी की सतह से 400 किमी ऊपर वृत्तीय गति कर रहा है। यदि उपग्रह का द्रव्यमान 130 किग्रा हो तो ज्ञात कीजिए—(i) उपग्रह का कक्षीय वेग (ii) परिक्रमण काल (iii) अभिकेन्द्र त्वरण (iv) अभिकेन्द्र बल (v) बन्धन ऊर्जा। पृथ्वी की त्रिज्या 6400 किमी तथा पृथ्वी का द्रव्यमान 6×10^{24} किग्रा है।

(उत्तर : (i) 7 · 68 किमी (ii) 1 · 54 घण्टा (iii) 8 · 65 मी/से^{2} (iv) 1124 · 5 न्यूटन (v) $3{\cdot}82\times10^9$ जूल)

11. एक कृत्रिम उपग्रह 9·8 किमी/से के वेग से पृथ्वी के चारों ओर समीप स्थित वृत्तीय कक्षा में चक्कर लगा रहा है। उपग्रह का पलायन वेग ज्ञात कीजिये। **(उत्तर : 13·85 किमी/से)**

आंकिक प्रश्नों के संक्षिप्त हल

(6) सूत्र $F = G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$ से $F = \dfrac{6{\cdot}67\times10^{-11}\times300\times75}{(4)^2} = \mathbf{9{\cdot}37\times10^{-8}}$ **न्यूटन**

(7) उपग्रह की बन्धन ऊर्जा $E = \dfrac{GM_em}{2(R_e+h)} = \dfrac{6{\cdot}67\times10^{-11}\times6{\cdot}0\times10^{24}\times2500}{2(6{\cdot}4\times10^6+1{\cdot}7\times10^6)} = \mathbf{6{\cdot}9\times10^{10}}$ **जूल**

(8) सूत्र $g' = \dfrac{g}{\left(1+\dfrac{h}{R_e}\right)^2}$ से $g' = \dfrac{g}{\left(1+\dfrac{R_e/3}{R_e}\right)^2} \Rightarrow \mathbf{g' = \dfrac{9}{16}g}$

(9) (i) सूत्र $g' = g - R_e\omega^2$ से $g' = \left[9{\cdot}8 - \left(6{\cdot}4\times10^6\times\dfrac{4\times(3{\cdot}14)^2}{(12600)^2}\right)\right] \Rightarrow \mathbf{g' = 8{\cdot}20}$ **मी/से^{2}**

(10) (i) सूत्र $v_o = R_e\sqrt{\dfrac{g}{(R_e+h)}}$ से $v_o = 6{\cdot}4\times10^6\sqrt{\dfrac{9{\cdot}8}{(6400+4{\cdot}00)\times10^3}} = \mathbf{7{\cdot}68}$ **किमी/से**

(ii) सूत्र $T = \dfrac{2\pi(R_e+h)}{v_o}$ से $T = \dfrac{2\times3{\cdot}14}{7{\cdot}68\times10^3}[(6400+400)\times10^3] = \mathbf{1{\cdot}54}$ **घण्टा**

(iii) सूत्र $a = \dfrac{v_o^2}{(R_e+h)}$ से $a = \dfrac{(7{\cdot}68\times10^3)^2}{(6400+400)\times10^3} = \mathbf{8{\cdot}65}$ **मी/से^{2}**

(iv) सूत्र $F = \dfrac{mv_o^2}{(R_e+h)}$ से $F = m\times a = 130\times8{\cdot}65$ N $=$ **1124 · 5 जूल**

(v) सूत्र $E = \dfrac{GM_em}{2(R_e+h)} = \dfrac{6{\cdot}67\times10^{-11}\times6\times10^{24}\times130}{2[(6400+400)\times10^3]} = \mathbf{3{\cdot}82\times10^9}$ **जूल**

(11) सूत्र $v_e = \sqrt{2}v_o$ से $v_e = \sqrt{2}\times9{\cdot}8 = \mathbf{13{\cdot}85}$ **किमी/से**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Chapter 6 द्रव्य गुण (Properties of Matter)

SYLLABUS

6.1 *Elasticity : Definition of stress and strain, different types of moduli of elasticity, Hooke's law, significance of stress-strain curve.*

6.2 *Pressure : Definition, its units, atmospheric pressure, gauge pressure, absolute pressure, Fortin's Barometer and its applications*

6.3 *Surface tension : Concept, its units, angle of contact, Capillary action and determination of surface tension from capillary rise method, applications of surface tension, effect of temperature and impurity on surface tension.*

6.4 *Viscosity and coefficient of viscosity : Terminal velocity, Stoke's law and effect of temperature on viscosity, application in hydraulic systems.*

6.5 *Concept of fluid motion, stream line and turbulent flow, Reynold's number, Equation of continuity, Bernoulli's Theorems and their applications.*

§ 6.1 प्रत्यास्थता (Elasticity)

6.1.1 परिचय

किसी वस्तु पर बाह्य बल लगाने से उसकी बनावट के अनुसार उसका आकार (size) अथवा रूप (shape) अथवा दोनों में परिवर्तन हो जाता है। इस बाह्य बल को विरूपक बल (deforming force) कहते हैं तथा वस्तु में यह परिवर्तन विरूपण (deformation) कहलाता है। सभी पदार्थों में इस विरूपक बल का विरोध करने का कुछ-न-कुछ गुण अवश्य होता है क्योंकि विरूपक बल हटा लेने पर वस्तु पुन: अपने प्रारम्भिक आकार अथवा रूप में आ जाती है। उदाहरणार्थ जब रबड़ की डोरी के एक सिरे को स्थिर कर दूसरे सिरे को खींचा जाता है तो डोरी की लम्बाई बढ़ जाती है, परन्तु खिंचाव बल हटा देने पर डोरी पुन: अपनी पूर्व लम्बाई की हो जाती है। पदार्थ में, बाह्य आरोपित विरूपक बल का विरोध करने का यह गुण प्रत्यास्थता कहलाता है तथा जिस वस्तु में यह गुण पाया जाता है वह वस्तु, प्रत्यास्थ (Elastic) वस्तु कहलाती है। अत: **"प्रत्यास्थता किसी वस्तु के पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण वस्तु किसी बाह्य विरूपक बल के द्वारा उत्पन्न आकार अथवा रूप परिवर्तन का विरोध करती है तथा विरूपक बल हटा लिये जाने पर वस्तु अपनी पूर्व अवस्था को प्राप्त कर लेती है।"**

प्रत्यास्थता की दृष्टि से पदार्थ को तीन श्रेणियों में रखा जा सकता है—

(a) पूर्ण प्रत्यास्थ पदार्थ (Perfectly Elastic bodies)—जो वस्तुयें विरूपक बल हटा लेने पर अपनी पूर्व अवस्था को पूर्णत: प्राप्त कर लेती हैं वे वस्तुयें पूर्ण प्रत्यास्थ कहलाती हैं। वास्तव में कोई भी वस्तु पूर्ण प्रत्यास्थ नहीं है। व्यवहार में क्वार्ट्ज (Quartz) तथा फॉस्फर काँसा (Phosphor Bronze) को पूर्ण प्रत्यास्थ माना जा सकता है।

(b) पूर्ण सुघट्य पदार्थ (Perfectly Plastic bodies)—जो वस्तुयें विरूपक बल हटा लेने पर भी अपनी पूर्वावस्था को प्राप्त नहीं करती बल्कि सदैव के लिए विरूपित हो जाती हैं वे वस्तुये पूर्ण सुघट्य कहलाती है। व्यवहार में कोई भी पदार्थ पूर्ण सुघट्य नहीं है परन्तु गीली मिट्टी एवं मोम (Wax) को पूर्ण सुघट्य पदार्थ मान सकते हैं।

(c) अप्रत्यास्थ पदार्थ (Inelastic bodies)—जिन वस्तुओं पर बाह्य बल लगाने से उनका आकार एवं रूप अपरिवर्तित रहता है, अप्रत्यास्थ पदार्थ कहलाते हैं। ऐसी वस्तुओं में बहुत अधिक परिमाण का बाह्य विरूपक बल लगाने पर भी परिवर्तन

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

इतना कम होता है कि उसे नगण्य (Negligible) माना जा सकता है। व्यवहार में कोई भी वस्तु पूर्ण अप्रत्यास्थ नहीं होती फिर भी लकड़ी, काँच आदि को अप्रत्यास्थ पदार्थ मान सकते हैं।

§ 6.2 प्रत्यास्थता की सीमा (Limit of Elasticity)

प्रत्यास्थ वस्तुयें, विरूपक बल को हटा लेने पर अपनी पूर्वावस्था को प्राप्त कर लेती हैं परन्तु ऐसा एक निश्चित सीमा तक ही होता है। विरूपक बल का मान धीरे-धीरे बढ़ाने पर एक अवस्था ऐसी भी आती है जब बल को हटा लेने पर वस्तुयें अपनी पूर्वावस्था में नहीं लौटतीं बल्कि सदैव के लिए विरूपित हो जाती हैं अर्थात् पदार्थ का प्रत्यास्थता का गुण नष्ट हो जाता है। विरूपक बल की इस सीमा को जिसके अन्तर्गत पदार्थ में प्रत्यास्थता का गुण विद्यमान रहता है, उसे उस पदार्थ की प्रत्यास्थता की सीमा कहते हैं।

§ 6.3 प्रतिबल (Stress)

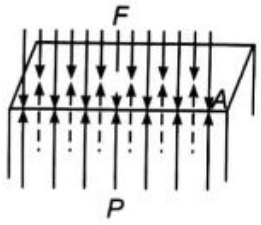
जब किसी वस्तु पर बाह्य बल लगाकर उसके आकार अथवा रूप में परिवर्तन किया जाता है तब वस्तु की प्रत्येक अनुप्रस्थ काट (Cross-section) पर, बाह्य बल के बराबर परन्तु विपरीत दिशा में एक आन्तरिक प्रतिक्रिया बल उत्पन्न हो जाता है जो वस्तु को उसकी प्रारम्भिक अवस्था में लाने का प्रयत्न करता है। साम्यावस्था में **''वस्तु की अनुप्रस्थ काट के एकांक क्षेत्रफल पर कार्यरत आन्तरिक प्रतिक्रिया बल को प्रतिबल कहते हैं।''** चूँकि सन्तुलन की अवस्था में आन्तरिक प्रातक्रिया बल का मान बाह्य बल के बराबर होता है अत: प्रतिबल, एकांक क्षेत्रफल पर कार्य करने वाला बाह्य बल होता है।

माना किसी वस्तु की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A है तथा इस पर कार्यरत बाह्य बल F है, तब

$$\text{प्रतिबल} = \frac{\text{बाह्य बल}}{\text{क्षेत्रफल}}$$

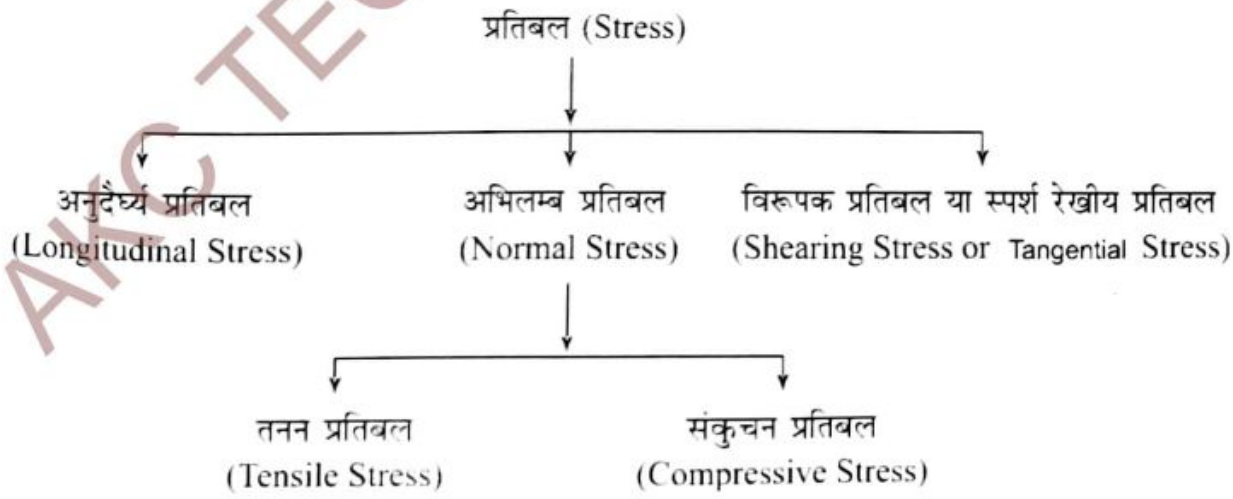
अथवा
$$\text{प्रतिबल } (P) = \frac{F}{A} \text{ न्यूटन/मी}^2 \qquad (1)$$

$$\text{प्रतिबल का विमीय सूत्र} = \frac{\text{बल की विमा}}{\text{क्षेत्रफल की विमा}} = \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]} = [ML^{-1}T^{-2}]$$



चित्र 6.1

प्रतिबल के प्रकार—वस्तु पर आरोपित बाह्य विरूपक बल के प्रकृति के अनुसार प्रतिबल तीन प्रकार का होता है—



(1) अनुदैर्घ्य प्रतिबल (Longitudinal Stress)—जब बाह्य बल किसी वस्तु की लम्बाई के अनुदिश तथा अनुप्रस्थ काट के लम्बवत् लगा हो जिससे वस्तु की लम्बाई में वृद्धि होती है तब वस्तु के अनुप्रस्थ काट के एकांक क्षेत्रफल पर कार्यरत बल, अनुदैर्घ्य प्रतिबल कहलाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

माना किसी तार की त्रिज्या r है तथा उस पर बाह्य बल F $(= mg)$ कार्यरत है, तब

$$\text{अनुदैर्घ्य प्रतिबल} = \frac{F}{A} = \frac{mg}{\pi r^2}$$

(2) अभिलम्ब प्रतिबल (Normal Stress)—जब वस्तु की सम्पूर्ण सतह पर सभी जगह एकसमान बल अथवा दाब, तल के लम्बवत् कार्य करता है तब वस्तु के आयतन में परिवर्तन होता है परन्तु रूप नहीं बदलता। इस प्रकार वस्तु के एकांक पृष्ठ के क्षेत्रफल पर कार्यरत अभिलम्ब बल अथवा दाब को अभिलम्ब प्रतिबल कहते हैं। माना वस्तु पर आरोपित दाब p है, तब

$$\text{अभिलम्ब प्रतिबल} = p \qquad (2)$$

यह दो प्रकार का होता है—

(i) तनन प्रतिबल (Tensile Stress)—जब बाह्य बल के लगने से वस्तु में खिंचाव या तनाव उत्पन्न होता है तब वस्तु के एकांक क्षेत्रफल पर कार्यरत बल को तनन प्रतिबल कहते हैं।

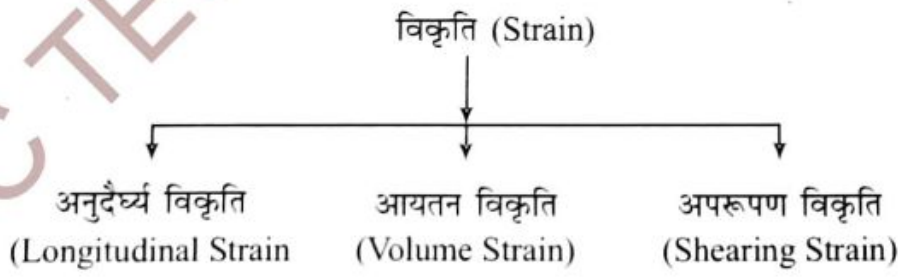
(ii) संकुचन प्रतिबल (Compressive Stress)—जब बाह्य बल द्वारा वस्तु में सिकुड़न उत्पन्न हो तब वस्तु के एकांक क्षेत्रफल पर कार्यरत बल को संकुचन प्रतिबल कहते हैं।

(3) विरूपक अथवा स्पर्श रेखीय प्रतिबल (Shearing or Tangential Stress)—जब तल को स्पर्श करते हुये तल के समान्तर बाह्य बल इस प्रकार कार्यरत होता है कि वस्तु के रूप में परिवर्तन हो जाता है जबकि उसका आयतन अपरिवर्तित रहता है तब वस्तु के एकांक क्षेत्रफल पर कार्यरत बल को स्पर्श रेखीय अथवा विरूपक प्रतिबल कहते हैं।

§ 6.4 विकृति (Strain)

जब किसी वस्तु पर बाह्य बल लगाने से उसके आकार अथवा रूप में परिवर्तन हो जाता है तो वस्तु विकृत अवस्था में कही जाती है। अत: वस्तु में उत्पन्न विरूपण (Deformation) ही विकृति (Strain) कहलाता है। विकृति को निम्न प्रकार परिभाषित कर सकते हैं—

"वस्तु के एकांक आकार में बाह्य बल द्वारा होने वाले परिवर्तन को विकृति कहते हैं।" माना किसी तार का एक सिरा दृढ़ता से बंधा है तथा दूसरे सिरे पर भार लटकाने से उसकी लम्बाई में वृद्धि हो जाती है, तब लम्बाई में वृद्धि तथा प्रारम्भिक लम्बाई के अनुपात को विकृति कहते हैं।" चूँकि विकृति एक अनुपात है अत: यह मात्रकहीन तथा विमाहीन है। वस्तु पर कार्यरत बाह्य बल के अनुसार विकृति भी तीन प्रकार की होती है—



(1) अनुदैर्घ्य विकृति (Longitudinal Strain)—यदि किसी वस्तु की लम्बाई के अनुदिश उस पर बाह्य विरूपक बल लगाया जाता है तो उसकी लम्बाई में वृद्धि हो जाती है। वस्तु में उत्पन्न इस विकृति को अनुदैर्घ्य विकृति या रेखीय (Linear) विकृति कहते हैं। अत: अनुदैर्घ्य विकृति या रेखीय विकृति $= \dfrac{\text{लम्बाई में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}} = \dfrac{l}{L}$ (3)

(2) आयतन विकृति (Volume Strain)—किसी वस्तु पर विरूपक बल लगाने से उसके एकांक आयतन में होने वाले परिवर्तन को आयतन विकृति कहते हैं।

माना वस्तु का प्रारम्भिक आयतन (Volume) $= V$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

तथा विरूपक बल लगाने से आयतन में परिवर्तन $= \Delta V$

तब आयतन विकृति $= \dfrac{\Delta V}{V}$ (4)

(3) अपरूपण विकृति (Shearing Strain)—यदि किसी वस्तु की सतह के समान्तर बल इस प्रकार लगाया जाये कि उसकी आकृति परिवर्तित हो जाये परन्तु आयतन अपरिवर्तित रहे तब उत्पन्न विकृति को अपरूपण विकृति कहते हैं।

अपरूपण विकृति की माप कोण से की जाती है।

§ 6.5 हुक का नियम (Hooke's Law)

सन् 1679 ई० में वैज्ञानिक रॉबर्ट हुक ने वस्तु पर कार्यरत बल तथा बल के कारण वस्तु में उत्पन्न संगत विकृति के मध्य सम्बन्ध स्थापित किया। इनके अनुसार—

''प्रत्यास्थता की सीमा के अन्तर्गत प्रतिबल (Stress) सदैव विकृति के अनुक्रमानुपाती होती है।''

$$\text{प्रतिबल} \propto \text{विकृति}$$

अथवा $$\text{प्रतिबल} = \text{नियतांक} \times \text{विकृति}$$

अथवा $$\frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}} = \text{नियतांक } (E)$$ (5)

इस नियतांक को E द्वारा व्यक्त करते हैं तथा इसे प्रत्यास्थता गुणांक (Modulus of elasticity) कहते हैं। E का मान पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है। E का मात्रक न्यूटन/मी^{2} तथा E का विमीय सूत्र $[ML^{-1}T^{-2}]$ होता है।

किसी दिये गये पदार्थ के लिए प्रत्यास्थता गुणांक (E) का मान प्रतिबल तथा संगत विकृति के अनुपात पर निर्भर करता है। चूँकि प्रतिबल तथा विकृति दोनों तीन प्रकार के होते हैं अत: प्रत्यास्थता गुणांक भी तीन प्रकार का होता है।

(i) यंग प्रत्यास्थता गुणांक (Young's Modulus of Elasticity)

$$(Y) = \frac{\text{अनुदैर्घ्य प्रतिबल}}{\text{अनुदैर्घ्य विकृति}}$$

(ii) आयतन प्रत्यास्थता गुणांक (Bulk Modulus of Elasticity)

$$(B) = \frac{\text{अभिलम्ब प्रतिबल}}{\text{आयतन विकृति}}$$

(iii) अपरूपण गुणांक अथवा दृढ़ता गुणांक (Modulus of Rigidity)

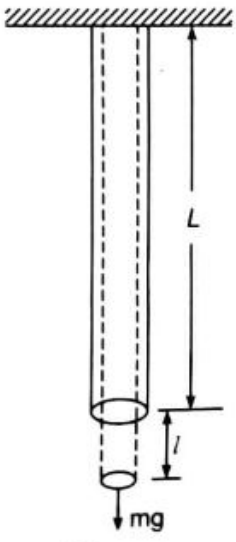
$$(\eta) = \frac{\text{अपरूपक प्रतिबल}}{\text{अपरूपण विकृति}}$$

§ 6.6 यंग प्रत्यास्थता गुणांक (Young's Modulus)

जब किसी वस्तु पर, जिसकी लम्बाई उसकी चौड़ाई तथा मोटाई के सापेक्ष बहुत अधिक हो, लम्बाई के अनुदिश बाह्य बल लगाया जाता है तो उसकी लम्बाई में परिवर्तन हो जाता है। प्रत्यास्थता की सीमा के अन्तर्गत **''अनुदैर्घ्य प्रतिबल तथा अनुदैर्घ्य विकृति के अनुपात को उस वस्तु के पदार्थ का यंग प्रस्त्यास्थता गुणांक कहते हैं। इसे Y द्वारा व्यक्त करते हैं।''**

अत: $$Y = \frac{\text{अनुदैर्घ्य प्रतिबल}}{\text{अनुदैर्घ्य विकृति}} = \frac{F/A}{l/L} = \frac{F \cdot L}{A \cdot l}$$

माना त्रिज्या (r) तथा लम्बाई (L) का एक तार एक सिरे पर दृढ़ता से बंधा है तथा दूसरे सिरे पर भार (mg) लटकाया गया है। प्रत्यास्थता की सीमा में भार (mg) लटकाने से तार की लम्बाई में l वृद्धि हो जाती है, तब



चित्र 6.2

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

$$\text{अनुदैर्घ्य प्रतिबल} = \frac{\text{लटकाया गया भार}}{\text{अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल}} = \frac{mg}{\pi r^2}$$

तथा $$\text{अनुदैर्घ्य विकृति} = \frac{\text{लम्बाई में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}} = \frac{l}{L}$$

अत: तार के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक $(Y) = \frac{\text{अनुदैर्घ्य प्रतिबल}}{\text{अनुदैर्घ्य विकृति}} = \frac{mg/\pi r^2}{l/L} = \frac{mgL}{\pi r^2 l}$ (6)

Y का अन्तर्राष्ट्रीय पद्धति S.I. में मात्रक न्यूटन/मी^{2} है तथा Y का विमीय सूत्र $[ML^{-1}T^{-2}]$ है।

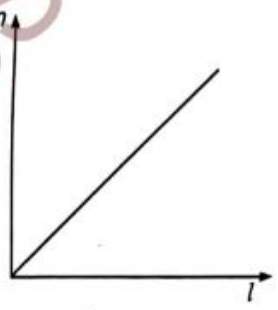
उपरोक्त सूत्र $Y = \frac{mgL}{\pi r^2 l}$ से,

$$l = \left(\frac{gL}{\pi r^2 Y}\right) \cdot m$$

अथवा $$l \propto m$$

[∵ दिये गये तार के लिये L, r व Y नियत हैं]

इस प्रकार तार के मुक्त सिरे पर अलग-अलग भार लटकाकर लम्बाई में संगत वृद्धि (l) ज्ञात करते हैं। l तथा m के मध्य ग्राफ खींचने पर वह चित्र 6.3 के अनुसार प्राप्त होता है। प्रत्यास्थता की सीमा के अन्दर ग्राफ एक सरल रेखा प्राप्त होता है। इससे हुक के नियम का सत्यापन होता है।



चित्र 6.3

रबड़ तथा स्टील की आपेक्षिक प्रत्यास्थता (Relative Elasticity of Rubber and Steel) : प्रत्यास्थता किसी वस्तु के पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण वस्तु बाह्य विरूपक बल द्वारा उत्पन्न आकार अथवा रूप के परिवर्तन का विरोध करती है। स्पष्ट है कि किसी वस्तु के आकार अथवा रूप में नियत परिवर्तन के लिए जितना अधिक बाह्य बल लगाना पड़े वह वस्तु उतनी ही अधिक प्रत्यास्थ होगी।

माना समान लम्बाई (L) व त्रिज्या (r) के स्टील व रबड़ के दो तार हैं। इन तारों पर समान भार mg लटकाया गया है। यदि स्टील के तार में लम्बाई में वृद्धि l_S तथा रबड़ में l_R हो एवं इनके यंग प्रत्यास्थता गुणांक क्रमश: Y_S तथा Y_R हों, तब

$$Y_S = \frac{mgL}{\pi r^2 l_S} \text{ तथा } Y_R = \frac{mgL}{\pi r^2 l_R}$$

$$\therefore \quad \frac{Y_S}{Y_R} = \frac{l_R}{l_S}$$

समान भार लटकाने पर l_R का मान l_S से अधिक मिलता है। $(l_R > l_S)$

अत: $$Y_S > Y_R$$

अर्थात् रबड़ की अपेक्षा स्टील अधिक प्रत्यास्थ होता है।

प्रत्यास्थता की पहचान के लिए हम अलग-अलग पदार्थों की ठोस गोलियाँ बनाकर समान ऊँचाई से ठोस फर्श पर गिराते हैं। जिस पदार्थ की गोली तल से टकराकर जितनी अधिक ऊँचाई तक जायेगी वह उतना ही अधिक प्रत्यास्थ होगा।

§ 6.7 आयतन प्रत्यास्थता गुणांक (Bulk Modulus of Elasticity)

किसी वस्तु की सतह पर लम्बवत् बल अथवा दाब लगाने से, प्रत्यास्थता की सीमा के अन्तर्गत वस्तु में उत्पन्न अभिलम्ब प्रतिबल तथा आयतन विकृति के अनुपात को आयतन प्रत्यास्थता गुणांक कहते हैं। इसे B द्वारा व्यक्त करते हैं। माना किसी वस्तु का आयतन V है तथा P दाब लगाने से उसके आयतन में परिवर्तन ΔV होता है, तब

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

अभिलम्ब प्रतिबल = P

तथा आयतन विकृति = $\frac{\Delta V}{V}$

अत: वस्तु का आयतन प्रत्यास्थता गुणांक

$$B = \frac{P}{\Delta V / V} = \frac{P.V}{\Delta V} \quad (7)$$

B का S.I. मात्रक न्यूटन/मी^{2} तथा B का विमीय सूत्र $[ML^{-1}T^{-2}]$ है। B के व्युत्क्रम को संपीड्यता (Compressibility) कहते हैं।

§ 6.8 दृढ़ता गुणांक (Modulus of Rigidity)-η (ईटा)

जब किसी वस्तु पर बाह्य बल इस प्रकार लगा हो कि वस्तु की आकृति में परिवर्तन हो जाये परन्तु आयतन अपरिवर्तित रहे, तब वस्तु अपरूपित कही जाती है।

चित्र 6.4 में $ABCDEFGH$ के द्वारा किसी वर्गाकार वस्तु को दर्शाया गया है, जिसकी सतह $ABGH$ स्थिर रख कर ऊपरी सतह $CDEF$ पर स्पर्श रेखीय बल F लगाया गया है। इससे सतह $CDEF$ बल की दिशा में विस्थापित हो जाती है तथा वस्तु का नया रूप $ABC'D'E'F'GH$ प्राप्त होता है। ऊपरी सतह पर बल F लगाने से वस्तु में उत्पन्न अपरूपण विकृति ϕ है।

माना $EE' = DD' = x$

तथा $AD = L$

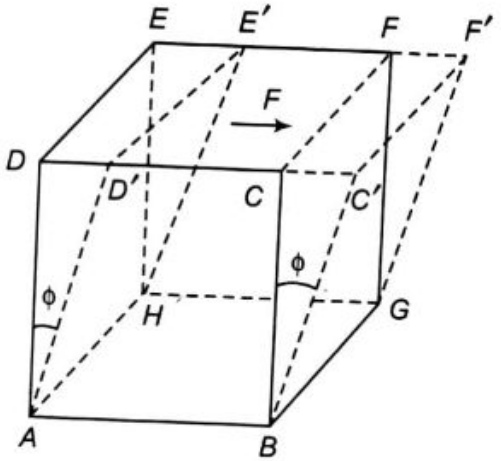
तब अपरूपण विकृति = $\frac{DD'}{AD} = \frac{x}{L}$

परन्तु $\frac{x}{L} = \tan\phi$

अत: अपरूपण विकृति = $\frac{x}{L} = \tan\phi$

यदि कोण ϕ बहुत छोटा हो तो $\tan\phi = \phi$

अत: अपरूपण विकृति = ϕ



चित्र 6.4

यदि सतह $CDEF$ का क्षेत्रफल A हो तब अपरूपण प्रतिबल = $\frac{F}{A}$

अत: पदार्थ का दृढ़ता गुणांक (η) = $\frac{\text{अपरूपक प्रतिबल}}{\text{अपरूपक विकृति}}$

अथवा $$\eta = \frac{F/A}{\phi} = \frac{F}{A\phi} \quad (8)$$

दृढ़ता गुणांक η ठोस पदार्थों का अभिलाक्षणिक गुण होता है। η का मात्रक न्यूटन/मी^{2} तथा η का विमीय सूत्र $[ML^{-1}T^{-2}]$ होता है।

§ 6.9 खींचे गये तार की स्थितिज ऊर्जा (Potential Energy of Stretched Wire)

जब किसी तार पर बाह्य बल लगाकर इसे खींचा जाता है तो बाह्य बल को अन्तरा परमाणु बलों के विरुद्ध कार्य करना पड़ता है। यह कार्य तार में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है।

माना किसी तार की प्रारम्भिक लम्बाई = L

आरोपित बाह्य बल = F

AKG TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

तथा तार की लम्बाई मे वृद्धि $= l$

तार की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $= A$

प्रारम्भ मे तार मे आन्तरिक बल $= 0$

तार की लम्बाई मे वृद्धि करने हेतु औसत आन्तरिक बल $= \frac{0+F}{2} = \frac{F}{2}$

अत: तार को खीचने मे किया गया कार्य

$W =$ औसत बल $\times$ लम्बाई में वृद्धि

$$= \frac{F}{2} \times l$$

$$= \frac{1}{2} \times F \times l$$

यह कार्य तार में प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा U के रूप में संचित होता है। अत:

$$U = \frac{1}{2} \times F \times l$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{F}{A} \times \frac{l}{L} \times (LA)$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{प्रतिबल} \times \text{विकृति} \times \text{तार का आयतन}$$

तार के एकांक आयतन में संचित प्रत्यास्थ स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{1}{2} \times \text{प्रतिबल} \times \text{विकृति}$$

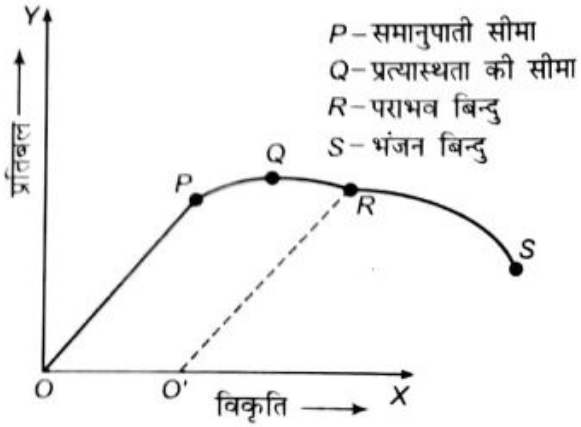
अथवा $$U = \frac{1}{2} \times (\text{प्रत्यास्थता गुणांक} \times \text{विकृति}) \times \text{विकृति}$$

अथवा $$U = \frac{1}{2} \times \text{प्रत्यास्थता गुणांक} \times (\text{विकृति})^2 \qquad (2)$$

§ 6.10 प्रतिबल-विकृति वक्र (Stress–Strain Curve)

यदि धातु तार के एक सिरे को दृढ़ता से बाँध कर दूसरे पर भार बढ़ाते हुए प्रत्येक स्थिति में तार की लम्बाई में वृद्धि (विकृति) तथा प्रतिबल के मध्य ग्राफ खींचा जाये। तो वह चित्र 6.5 के अनुसार प्राप्त होता है।

ग्राफ का भाग OP एक सरल रेखा है जिससे स्पष्ट है कि विकृति प्रतिबल के समानुपाती है अर्थात् इस बिन्दु तक तार हुक के नियम का पालन करता है। इस बिन्दु को समानुपाती सीमा भी कहते हैं। P से Q तक ग्राफ सरल रेखीय न होकर वक्रीय (Curved) है, जिससे पता चलता है कि विकृति, प्रतिबल के समानुपाती नहीं रहती परन्तु भार हटा लेने पर तार पुन: अपनी प्रारम्भिक अवस्था को प्राप्त कर लेता है अर्थात् बिन्दु Q तक प्रत्यास्थता का गुण विद्यमान रहता है इस बिन्दु को प्रत्यास्थता की सीमा कहते हैं। बिन्दु Q से आगे विकृति का मान प्रतिबल की अपेक्षा तेजी से बढ़ता है अर्थात् वस्तु की प्रत्यास्थता घटने लगती है तथा सुघट्यता बढ़ने लगती है। यदि अब भार हटा लें तो तार अपनी पूर्वावस्था में नहीं पहुँचता अर्थात् RO' पथ अपनाता है तथा तार में



चित्र 6.5

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

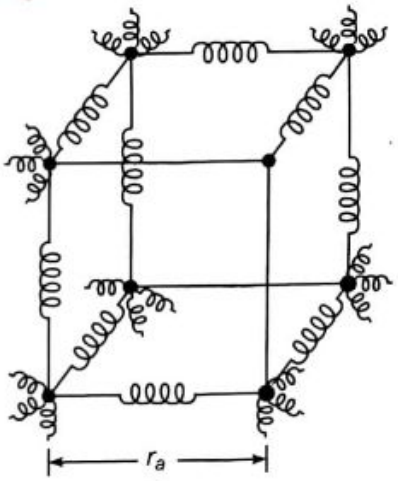
अपशिष्ट विकृति (Residual Strain) OO' आ जाती है। अर्थात् तार स्थायी रूप से विकृत हो जाता है। बिन्दु R के बाद प्रतिबल के बढ़े बिना विकृति का मान अनियमित रूप से बढ़ता है। यह बिन्दु R पराभव बिन्दु (yield point) कहलाता है। बिन्दु S तक पहुँचते-पहुँचते तार अपने आप बढ़ने लगता है तथा बिन्दु S पर तार टूट जाता है। बिन्दु S को भंजन बिन्दु (Breaking point) कहते हैं तथा इस बिन्दु पर लगे अधिकतम भार को भंजन भार (Breaking Load), विकृति को भंजन विकृति (Breaking Strain) तथा प्रतिबल को भंजन प्रतिबल (Breaking stress) कहते हैं।

बिन्दु R तथा S के बीच विस्तार को सुघट्य परास (Plastic Range) कहते हैं। अधिक सुघट्य विरूपण (Plastic deformation) वाली धातुयें भंजन बिन्दु के पूर्व तन्य (ductile) तथा कम सुघट्य विरूपण वाली धातुयें भंजन बिन्दु के पूर्व भंगुर कहलाती हैं।

धातुओं की सुघट्यता ताप के साथ बढ़ती है।

§ 6.11 परमाणवीय मॉडल के आधार पर प्रत्यास्थता की व्याख्या (Explanation of Elasticity on the Basis of Atomic Model)

प्रत्येक पदार्थ अणुओं एवं परमाणुओं से मिलकर बना होता है। ठोस क्रिस्टल के परमाणु व्यवस्थित क्रम में वैद्युत बलों द्वारा इस प्रकार बँधे रहते हैं जैसे उन्हें आपस में स्प्रिंगों द्वारा जोड़ दिया गया हो (चित्र 6.6)। जब ठोस साम्यावस्था में होता है तब परमाणुओं के बीच धन व ऋण आवेशों का वितरण इस प्रकार होता है कि उनके मध्य कोई नेट बल नहीं लगता। जब ठोस को बाह्य बल द्वारा दबाते हैं तो परमाणुओं के बीच की दूरी (r) सन्तुलनावस्था में दूरी (r_a) से कम हो जाती है इससे परमाणुओं के बीच प्रतिकर्षण बल लगने लगता है। इस बल को अन्तरापरमाणुक बल (Interatomic force) कहते हैं। जैसे ही बाह्य बल हटाते हैं, परमाणु अपनी प्रारम्भिक स्थिति में इसी प्रतिकर्षण बल द्वारा आते हैं।



चित्र 6.6

इसी प्रकार जब किसी ठोस को बाह्य बल द्वारा खींचते हैं तो परमाणुओं के बीच दूरी r बढ़ जाती है तथा आवेश वितरण इस प्रकार हो जाती है कि उनके बीच नेट आकर्षण बल कार्य करने लगता है। यह आकर्षण बल भी अन्तरापरमाणुक बल होता है। बाह्य बल के हटाने पर इसी बल द्वारा परमाणु अपनी पूर्वावस्था में आते हैं। ठोस पदार्थों के इसी गुणधर्म को प्रत्यास्थता कहते हैं।

जब ठोस को अत्यधिक बल द्वारा खींचते हैं तो परमाणुओं के बीच की दूरी ($r >> r_0$) अत्यधिक हो जाती है तथा अब परमाणुओं के बीच आकर्षण बल नगण्य रह जाता है। इस अवस्था में पदार्थ के परमाणु अपनी पूर्वावस्था में नहीं आ पाते अर्थात् ठोस अपने पूर्व आकार को प्राप्त नही कर पाता। यह सीमा प्रत्यास्थता की सीमा कहलाती है। इस सीमा से अधिक बल बढ़ाने पर ठोस पदार्थ टुकड़ों में टूट सकता है।

§ 6.12 पॉयसन का अनुपात (Poisson's Ratio)

पॉयसन ने अनेक प्रत्यास्थ वस्तुओं पर प्रयोगों के आधार पर पाया कि किसी भी तार में जितनी अधिक अनुदैर्घ्य विकृति (longitudinal strain) होती है उतनी ही अधिक पार्श्व विकृति (lateral strain) भी होती है। अत: पार्श्व विकृति तथा अनुदैर्घ्य विकृति की निष्पत्ति एक नियतांक होती है जिसे पॉयसन का अनुपात कहते हैं। इसे σ (सिग्मा) से दर्शाते हैं।

इस प्रकार,

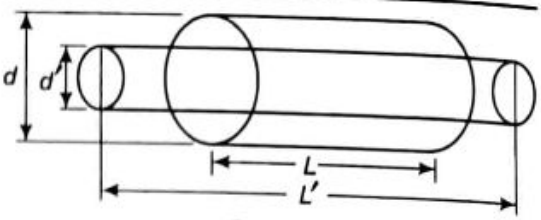
$$\text{पार्श्व विकृति} \propto \text{अनुदैर्घ्य विकृति}$$

अथवा $$\frac{\text{पार्श्व विकृति}}{\text{अनुदैर्घ्य विकृति}} = \text{नियतांक} = \sigma \text{ (पॉयसन का अनुपात)}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

चित्र 6.7 के अनुसार यदि किसी बेलन को उसके लम्बाई के अनुदिश बल लगाकर खीचा जाये तो लम्बाई में वृद्धि होने के साथ-साथ बेलन की मोटाई कम होती जाती है।



चित्र 6.7

चूँकि यह एक शुद्ध निष्पत्ति है अत: इसका कोई मात्रक नहीं होता है। यह एक विमाहीन राशि है। इसका सैद्धांतिक मान अधिकतम 0·5 तथा न्यूनतम (–1) हो सकता है। यदि किसी पदार्थ का पॉयसन अनुपात $\frac{1}{2}$ है, तो इसका तात्पर्य यह है कि उस पदार्थ के तार पर बल लगाने पर पार्श्व विकृति, अनुदैर्घ्य विकृति की तुलना में आधी होगी। अत: पदार्थ के आयतन में परिवर्तन नहीं होता है। इसलिये पदार्थ असम्पीड्य है, जो असम्भव है। इसका ऋणात्मक मान भी असम्भव है क्योंकि पॉयसन अनुपात के ऋणात्मक होने का अर्थ यह है कि बल लगाने पर तार की लम्बाई तथा व्यास दोनों बढ़ते हैं या दोनों घटते हैं जो सम्भव नहीं है।

§ 6.13 दाब (Pressure)

किसी पृष्ठ या सतह पर लगने वाला दाब उस पर आरोपित लम्बवत् बल तथा आरोपण पृष्ठ के क्षेत्रफल के अनुपात के बराबर होता है। अत:

''एकांक क्षेत्रफल पर कार्यरत बल, दाब कहलाता है।''

(Pressure is the amount of force applied perpendicular to the surface of an object per unit area.)

दाब का मात्रक (Unit of Pressure)

यदि किसी पृष्ठ या सतह पर कार्यरत लम्बवत् बल का परिमाण F न्यूटन तथा सम्पर्क पृष्ठ का क्षेत्रफल A मीटर^2 हो, तो दाब (p)

$$p = \frac{F}{A} \text{ न्यूटन/मीटर}^2 \qquad (10)$$

अत: दाब का मात्रक न्यूटन/मीटर^2 (N m^{-2} या $\text{kg·m}^{-1}\text{·s}^{-2}$) है। इसका S.I. मात्रक पास्कल **(Pa) तथा CGS मात्रक बार (Bar है जो 1 dyne. cm^{-2} या 0·1 Pa के बराबर होता है।

दाब एक अदिश राशि (Scalar quantity) है। दाब के कुछ अन्य मात्रक निम्नवत् हैं—

(i) पारे के सेन्टीमीटर—यह वह दाब है जो किसी तल पर स्थिर पारे के 1 सेमी ऊँचे स्तम्भ द्वारा आरोपित होता है। इसका उपयोग द्रवों तथा गैसों के दाब को प्रदर्शित करने में किया जाता है।

$$1 \text{ सेमी पारा} = 1{\cdot}33 \times 10^2 \text{ न्यूटन/मीटर}^2 \text{ लगभग}$$

सामान्यत: दाब को सेमी पारा में न लिख कर केवल सेमी में ही व्यक्त करते हैं, परन्तु इसका अर्थ होता है सेमी पारा। वायुदाब को जब 76 सेमी या 760 मिमी कहा जाता है तो उसका अर्थ होता है वायुमण्डल का दाब सतह पर 76 सेमी ऊँचे पारे के स्तम्भ के बराबर है।

(ii) बार तथा मिलीबार—ऋतु विज्ञान में वायुमण्डल के दाब को प्राय: बार अथवा मिलीबार से प्रदर्शित किया जाता है। वायुमण्डल दाब पारे के स्तम्भ में 76 सेमी से व्यक्त होता है; जो 1·013 बार अथवा 1013 मिलीबार के बराबर होता है।

$$1 \text{ बार} = 10^5 \text{ न्यूटन/मीटर}^2$$

$$1 \text{ मिलीबार} = 10^2 \text{ न्यूटन/मीटर}^2$$

---

* IUPAC–International Union of Pure and Applied Chemistry के अनुसार दाब का प्रतीक p (Lower case) है। परन्तु व्यवहार में P (Upper case) का वृहद इस्तेमाल होता है, जो कि मानकों के विपरीत है।

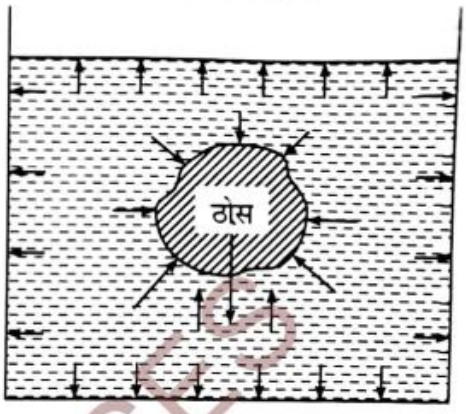
**1 Pascal = 1 newton per square metre or 1 N/m^2

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

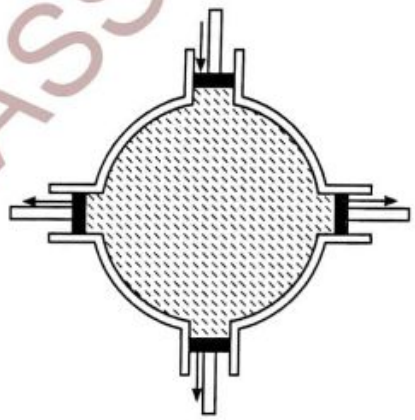
द्रव का दाब (Pressure of Liquid)

द्रवों के अणु इतने स्वतन्त्र होते हैं कि द्रव की सीमा के अन्दर विभिन्न दिशाओं में अनियमित गति (Random motion) करते रहते हैं। इस प्रकार वे परस्पर तथा बर्तन की दीवारों से टकराते रहते हैं। बर्तन की दीवार अथवा पेंदी पर अणुओं की टक्कर से बल का अनुभव होता है। दीवार अथवा पेंदी के प्रति एकांक क्षेत्रफल पर आरोपित बल द्रव का दाब कहलाता है। चूँकि अणु सभी दिशाओं में समान रूप से गति करते हैं, अत: किसी बिन्दु पर द्रव का दाब भी सभी दिशाओं में समान रूप से लगता है।

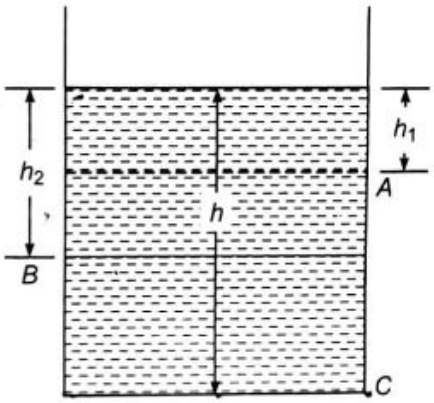


चित्र 6.8

इस तथ्य को निम्न प्रकार सिद्ध किया जा सकता है। माना एक निकाय (system) है, जिसमें द्रव भरा है तथा इसके चारों ओर जलरोधक पिस्टन लगा है। सभी पिस्टनों का परिच्छेद क्षेत्रफल बराबर है (चित्र 6.9)। जब किसी एक पिस्टन को 1 किग्रा भार से दबाया जाता है तो शेष तीनों पिस्टन भी आगे की ओर बढ़ने लगते हैं और यदि पिस्टन के आगे बढ़ने को रोकने का प्रयास किया जाये तो प्रत्येक पिस्टन पर 1 किग्रा भार का बल लगाकर ही रोका जा सकता है। इससे सिद्ध होता है कि द्रव के किसी एक पृष्ठ पर लगाया गया दाब समान रूप से चारो ओर संचारित हो जाता है।


चित्र 6.9

द्रव के भीतर किसी गहराई पर द्रव के दाब की गणना (Pressure of Liquid at any Depth Inside the Liquid)—माना कि किसी बर्तन में भरे द्रव की गहराई h है तथा बर्तन की पेंदी का परिच्छेद A है। बर्तन में भरे द्रव का घनत्व d तथा द्रव के अन्दर A तथा B बिन्दुओं पर द्रव के क्षैतिज तल की गहराइयाँ स्वतन्त्र तल से क्रमश: h_1 व h_2 हैं। A बिन्दु पर द्रव का क्षैतिज तल अपने से ऊपर द्रव के सम्पूर्ण भार के कारण बल का अनुभव करता है अत: इस सतह पर लगने वाले दाब का मान गहराई h_1 के अनुक्रमानुपाती होगा। इसी प्रकार B बिन्दु पर द्रव का क्षैतिज तल h_2 गहराई तक के सम्पूर्ण द्रव के भार के कारण आरोपित बल का अनुभव करता है जो B पर कार्य करने वाले बल से अधिक है। इसी तरह h गहराई पर बर्तन के अन्दर सम्पूर्ण द्रव के भार के कारण लगने वाला बल बर्तन की पेंदी पर कार्य करता है।



चित्र 6.10

बर्तन की पेंदी पर ऊर्ध्वाधरत: नीचे की ओर आरोपित बल

F = द्रव का सम्पूर्ण भार

= द्रव का आयतन × द्रव का घनत्व × गुरुत्वीय त्वरण

= द्रव की गहराई × बर्तन की पेंदी का क्षेत्रफल × द्रव का घनत्व × गुरुत्वीय त्वरण

$= A \times h \times d \times g$

अत: $$\text{दाब } P = \frac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}} = \frac{Ah \cdot dg}{A} = hdg$$

या, $$\boldsymbol{P = h \cdot d \cdot g} \qquad (11)$$

अर्थात् द्रव का दाब = द्रव की गहराई × द्रव का घनत्व × गुरुत्वीय त्वरण

$\therefore$ A पर द्रव का दाब $= h_1 \cdot d \cdot g$

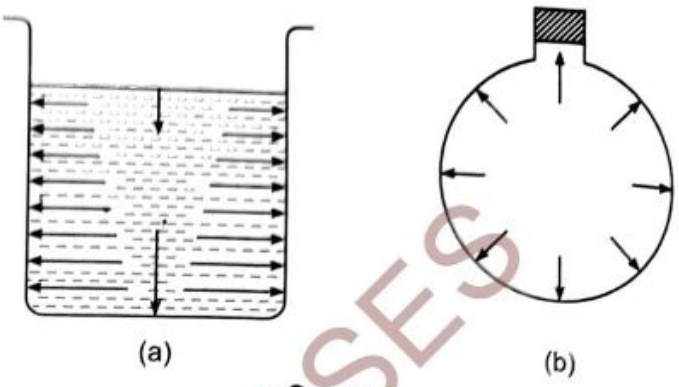
$\therefore$ B पर द्रव का दाब $= h_2 \cdot d \cdot g$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

§ 6.14 गैसीय दाब (Gaseous Pressure)

द्रव की भाँति गैसें भी जिस पृष्ठ के सम्पर्क में आती हैं उस पर अपना दाब डालती हैं। अन्तर केवल इतना है कि द्रव का दाब द्रव के अन्दर भिन्न-भिन्न गहराइयों पर अलग अलग होता है चित्र 6.11 (a), परन्तु गैस का दाब सभी ओर तथा सभी जगह समान होता है चित्र 6.10 (b)।

[चित्र 6.11 (a) के छोटे तीर कम दाब को और बड़े तीर अधिक दाब को तथा चित्र 6.11 (b) में बराबर लम्बाई के तीर समान दाब को प्रदर्शित करते हैं।]



चित्र 6.11

द्रव का दाब गहराई पर निर्भर करता है, द्रव के आयतन पर नहीं—यदि द्रव का वही आयतन एक कम परिच्छेद वाले बेलनाकार बर्तन में रखा जाये तो द्रव स्तम्भ की ऊँचाई अधिक हो जाने से आयतन समान होने पर भी पेंदी पर द्रव का दाब बढ़ जाता है। गैसों का दाब आयतन पर निर्भर करता है। यदि गैस का आयतन उसको दबा कर कम कर दिया जाये तो गैस का दाब बढ़ जाता है।

किसी बर्तन में रखे द्रव का ताप परिवर्तन करने से द्रव के दाब पर नगण्य प्रभाव पड़ता (यदि बर्तन के प्रसार को नगण्य माना जाये) है, परन्तु गैसों का ताप परिवर्तन करने से उसका दाब परिवर्तित हो जाता है।

अर्थात् किसी गैस का दाब उसके आयतन व ताप दोनों पर निर्भर करता है।

§ 6.15 वायुमण्डलीय दाब (Atmospheric Pressure)

पृथ्वी चारों ओर से वायु की अनेक पर्तों से अधिक ऊँचाई तक घिरी हुई है। वायु में मुख्यत: ऑक्सीजन, नाइट्रोजन, कार्बन डाइऑक्साइड, वाष्प तथा बहुत सूक्ष्म मात्रा में अन्य निष्क्रिय गैसें उपस्थित रहती हैं। यह गैसें तथा वायु अपने संपर्क में आने वाली सभी वस्तुओं के तलों पर दाब डालती हैं। **वायु के सम्पर्क में आने वाली किसी भी सतह के प्रति एकांक क्षेत्रफल पर जो बल आरोपित होता है उसे वायुमण्डलीय दाब कहते हैं।** समुद्रतल पर वायुदाब का मान "पारे के 76·0 सेमी" अथवा 1·013 न्यूटन/मीटर^2 अथवा 1·013 बार के बराबर होता है। समुद्रतल से ऊपर जाने पर वायु की अनेक पर्तें नीचे छूट जाने के कारण वायुमण्डलीय दाब कम तथा समुद्र तल के नीचे जाने पर दाब अधिक हो जाता है।

§ 6.16 दाब का मापन (Measurement of Pressure)

दाब मापन का तात्पर्य तरल (द्रव अथवा गैस) द्वारा किसी सतह पर आरोपित बल का विश्लेषण करना है।

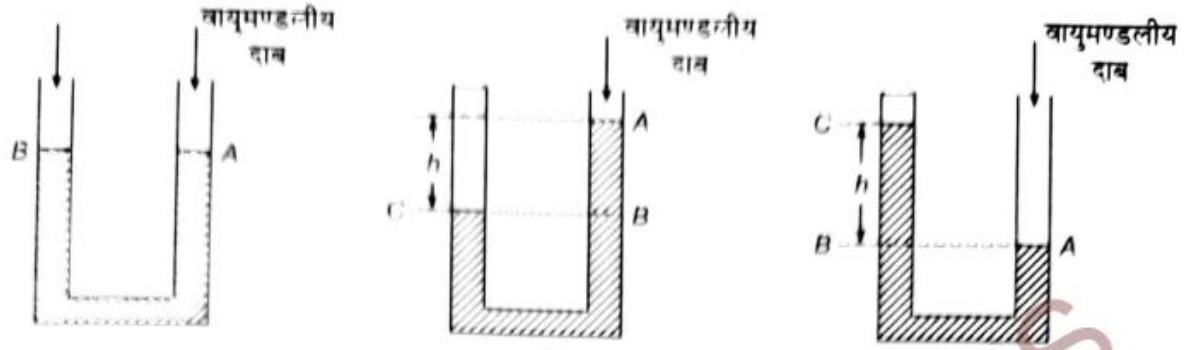
(Pressure measurement is the analysis of an applied force by a fluid (liquid or gas) on a surface.)

दाब का मापन विशेष रूप से सतह के एकांक क्षेत्रफल पर कार्यरत बल के मात्रकों के सन्दर्भ में किया जाता है।

(Pressure is typically measured in units of force per unit of surface area.)

दाब तथा निर्वात मापन के लिए विभिन्न तकनीकों का इस्तेमाल किया जाता है, इस हेतु प्रयोग किये जाने वाले उपकरण को दाब मापक (Pressure gauges) या निर्वात मापक (Vacuum gauges) कहते हैं। मैनोमीटर (manometer) उपकरण इसका श्रेष्ठ उदाहरण है जो इसके U—आकार के काँच की नली में भरे पारे के स्तम्भ की ऊँचाई के आधार पर दाब का मापन एवं प्रदर्शन करता है। [चित्र 6.12 (a), (b), (c)]

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner



चित्र 6.12

चित्र (a)—नली के दोनों सिरे खुले हैं अत: बिन्दु A तथा B दोनों वायुमण्डलीय दबाव के कारण समान ऊर्ध्व ऊँचाई पर है।

चित्र (b)—बायें तरफ की नली में कुछ अक्रिय गैस भरते हुए नली का ऊपरी सिरा बन्द कर देते हैं, दायें तरफ की नली खुली रखते हैं जिससे बिन्दु A वायुमण्डलीय दबाव पर ही रहता है। बिन्दु C बन्द सिरे में भरी गई गैस के दबाव की स्थिति को दर्शाता है।

बिन्दु B पर वायुमण्डलीय दबाव से अधिक दबाव है क्योंकि इस पर h ऊँचाई के पारे के भार का भी दबाव लगता है।

बिन्दु C तथा B की ऊँचाई बराबर हैं अत: दोनों बिन्दुओं पर दबाव समान है तथा यह बन्द सिरे में भरी गैस के दबाव के बराबर है। इस प्रकार स्पष्ट है कि बन्द सिरे पर गैस का दबाव वायुमण्डलीय दबाव एवं h ऊँचाई तक भरे पारे के द्रव्यमान के दबाव के योग के बराबर है।

चित्र (c)—बायें तरफ की नली में अत्यल्प गैस भरकर अथवा थोड़ा निर्वात (Vacuum) उत्पन्न कर नली को बन्द कर देते हैं इस प्रकार खुले सिरे में बिन्दु A वायुमण्डलीय दाब की स्थिति दर्शाता है। बिन्दु C बन्द सिरे पर अल्प गैस अथवा निर्वात की दशा में दबाव की स्थिति दर्शाता है।

चूँकि बिन्दु B तथा बिन्दु A की ऊँचाई बराबर है अत: दोनों बिन्दु समान वायुमण्डलीय दबाव की स्थिति दर्शाते हैं, परन्तु बिन्दु B पर दबाव का मान, बिन्दु C पर दबाव तथा h ऊँचाई तक भरे पारे के भार के योग के बराबर है; स्पष्ट है कि बिन्दु C पर दबाव का मान, वायुमण्डलीय दबाव एवं h ऊँचाई तक भरे पारे के भार से उत्पन्न दबाव के अन्तर के बराबर होता है।

यदि बन्द नली में निर्वात हो तो बिन्दु C पर दबाव का मान शून्य होगा, इस प्रकार वायुमण्डलीय दबाव का मान h ऊँचाई तक भरे पारे के भार से उत्पन्न दबाव के बराबर होगा। इस दशा में मैनोमीटर को वायु दाबमापी (barometer) की भाँति वायुमण्डलीय दाब ज्ञात करने के लिए प्रयोग किया जाता है।

परम, मानदंड अथवा दाब मापक (Absolute, Gauge Pressure)

वास्तव में निर्वात मापक एक दाब मापक होता है जो मुख्यतया सामान्य वायुमण्डलीय दाब से कम दाब मापने के लिए प्रयोग किया जाता है। इसे शून्य मापांक पर निर्धारित किया जाता है। अधिकांश दाब मापक, दाब का मापन वायुमण्डलीय दाब के सापेक्ष इसे शून्य बिन्दु मान कर करते हैं। अत: इस प्रकार के मापन को "मापक दाब" (Gauge Pressure) कहते हैं।

दैनिक जीवन में दाब का मापन जैसे वाहन के टायर में हवा के दबाव का मापन सामान्यतया परिवेशी वायु दबाव (Ambient air Pressure) के सापेक्ष किया जाता है।

शून्य मापांक सन्दर्भ में दाब मापन निम्न पदों में किया जाता है—

परम दाब (Absolute Pressure)

परम दाब, पूर्ण निर्वात के सापेक्ष शून्य सन्दर्भित होता है। इसमें परम पैमाने का उपयोग होता है। अत: यह दाब मापक एवं वायुमण्डलीय दाब के योग के बराबर होता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(Absolute pressure is zero-referenced against a perfect vacuum, using an absolute scale, so it is equal to gauge pressure plus atmospheric pressure.)

मानदंड अथवा दाब मापक (Gauge Pressure)

मानदंड अथवा दाब मापक, परिवेशी वायुमण्डलीय दाब के सापेक्ष शून्य सन्दर्भित होता है। अत: यह परम दाब एवं वायुमण्डलीय दाब के अन्तर के बराबर होता है।

(Gauge pressure is zero-referenced against ambient air pressure, so it is equal to absolute pressure minus atmospheric pressure.)

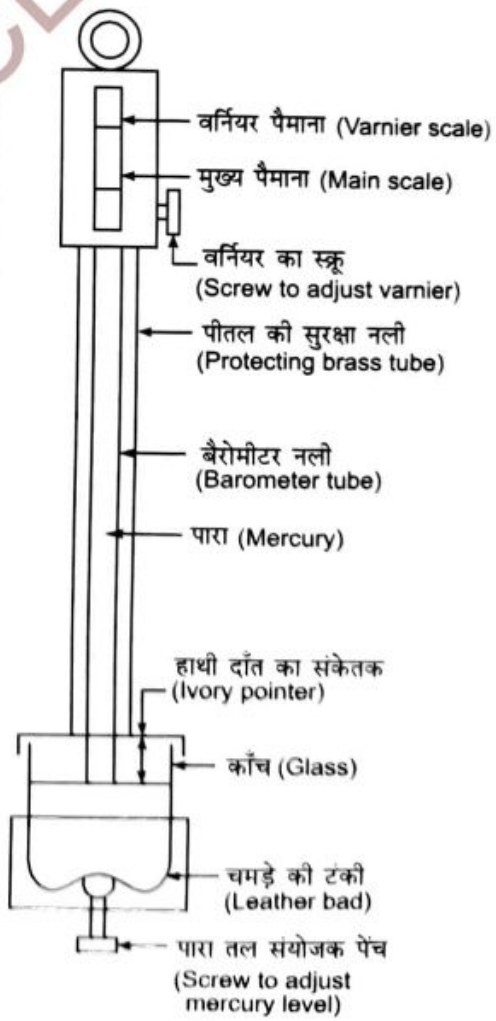
यदि दाब का मापन ऋणात्मक प्राप्त होता है तो ऋण चिन्ह को विलोपित कर देते हैं तथा ऐसे ऋणात्मक दाब के पहचान के लिए "निर्वात" शब्द लिख देते हैं। ऐसा दाब मापक निर्वात मापक कहलाता है।

§ 6.17 फोर्टिन वायुदाबमापी (Fortin's Barometer)

वायुमण्डलीय दाब का सटीक मापन करने के लिए फोर्टिन वायुदाबमापी का उपयोग किया जाता है। इस यथार्थ माप देने वाले वायुदाबमापी का अभिकल्पन एवं निर्माण अठ्ठारहवीं शताब्दी के अन्त में एक फ्रेंच वैज्ञानिक जीन निकोलस फोर्टिन (Jean Nicolas Fortin) ने किया था।

चित्रानुसार जिस नली में पारा भरा रहता है उसकी सुरक्षा के लिए एक पीतल की नली उसके ऊपर चढ़ी रहती है। पारे वाली नली का ऊपरी भाग काँच का बना होता है जिससे कि पारे का तल मापन हेतु दिखायी पड़ सके। पाठ्यांक लेने हेतु चलायमान वर्नियर कैलीपर्स का प्रयोग करते हैं जो पीतल की नली पर लगे पैमाने की पूरी लम्बाई तक चल सकता है। पैमाने का शून्यांक हाथी दाँत के बने सूचक पर अंकित होता है जो पीतल नली के सबसे निचले सिरे पर स्थित होता है। पारे की टंकी चमड़े की बनी होती है जो एक स्क्रू द्वारा ऊपर अथवा नीचे की ओर जा सकती है। पाठ्यांक लेना प्रारम्भ करने के पूर्व स्क्रू को इस प्रकार समयोजित करते हैं कि हाथी दाँत सूचक, पारे की टंकी में अपने प्रतिबिम्ब को स्पर्श करने लगे।

इस प्रकार फोर्टिन वायुदाबमापी, स्तम्भ में पारे की ऊँचाई एवं बन्द नली में दाब का मापन करता है।



चित्र 6.12

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

उदाहरण 1 : 4 किग्रा० का भार लटकाने पर एक तार की लम्बाई में वृद्धि 1% हो जाती है। तार में रेखीय विकृति की गणना कीजिये।

हल—हम जानते हैं कि

$$\text{रेखीय विकृति} = \frac{\text{लम्बाई में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}}$$

$$= \frac{l}{L} = \frac{0{\cdot}01 \times L}{L} = \mathbf{0{\cdot}01}$$

उदाहरण 2 : 6 किग्रा० भार लटकाने पर एक तार की लम्बाई 8 मिमी० बढ़ती है। यदि सब बातें वहीं रहें परन्तु तार की त्रिज्या दुगुनी हो जाये तो लम्बाई में कितनी वृद्धि होगी?

हल—हम जानते हैं कि

$$Y = \frac{MgL}{\pi r^2 l}$$

या $$l = \frac{MgL}{\pi r^2 Y}$$

∵ सभी बातें वहीं हैं किन्तु तार की त्रिज्या दुगुनी हुयी है।

∴ $$l \propto \frac{1}{r^2} \quad \text{और } r_1 = r,\ r_2 = 2r$$

या $$\frac{l_1}{l_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

$$l_2 = \frac{l_1 r_1^2}{r_2^2} = \frac{l_1 r^2}{4r^2} = \frac{1}{4}$$

अत: त्रिजया दो गुनी करने पर लम्बाई में वृद्धि एक चौथाई होगी

अर्थात् $$\text{वृद्धि} = \frac{8}{4} \text{ मिमी०} = 2 \text{ मिमी०}$$

लम्बाई में वृद्धि $= 2 \times 10^{-3}$ मीटर

उदाहरण 3 : 2 मीटर लम्बी तथा 5 सेमी०^2 अनुप्रस्थ क्षेत्रफल वाली एक छड़ को 6000 न्यूटन के बल से खींचा गया है। बल के कारण छड़ की लम्बाई में 0·382 मिमी० वृद्धि हो जाती है। छड़ का यंग प्रत्यास्थ गुणांक ज्ञात कीजिये।

हल—उदाहरणानुसार

$$Mg = 6000 \text{ न्यूटन}$$

$$A = \pi r^2 = 5 \text{ सेमी०}^2$$

$$= 5 \times 10^{-4} \text{ मीटर}^2$$

$$L = 2 \text{ मीटर}$$

$$l = 0{\cdot}382 \text{ मीटर}$$

$$= 0{\cdot}382 \times 10^{-3} \text{ मीटर}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: **यंग प्रत्यास्थ गुणांक**

$$Y = \frac{MgL}{\pi r^2 l} = \frac{6000 \times 2}{5 \times 10^{-4} \times \cdot 382 \times 10^{-3}}$$

$$= \mathbf{6 \cdot 282 \times 10^{10}} \text{ न्यूटन/मीटर}^2$$

उदाहरण 4 : रबर की 5 मीटर लम्बी डोरी ऊर्ध्व दिशा में लटकायी जाती है। डोरी में उत्पन्न अनुदैघर्य प्रतिबल की गणना कीजिये।

हल—माना रबर की डोरी की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A मीटर^2 है।

$\because$ घनत्व $= \frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}}$

$\therefore$ डोरी का द्रव्यमान = आयतन × घनत्व

$$M = V \times C$$

$$= (A \times 5) \times (1 \cdot 5 \times 10^3)$$

$$= 7 \cdot 5 \times 10^3 \times A \text{ किग्रा०}$$

डोरी के भार के कारण उत्पन्न अनुदैर्घ्य प्रतिबल $= \frac{Mg}{A}$

$$= \frac{7 \cdot 5 \times 10^3 \times A \times 10}{A}$$

$$= \mathbf{7 \cdot 5 \times 10^4} \text{ न्यूटन/मीटर}^2$$

उदाहरण 5 : स्टील के तार का प्रतिच्छेद 1 सेमी०^2 है। इसकी लम्बार्ठ को दो गुना करने के लिये कितने बल की आवश्यकता होगी? स्टील का यंग प्रत्यास्थता गुणांक 23×10^{11} डाइन/सेमी०^2 है।

हल—हम जानते हैं कि

यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y = \frac{F/A}{l/L}$

दिया है $l = 2L - L = L$

$\therefore$ $Y = \frac{F}{A}$

या $F = Y \cdot A$

$= 23 \times 10^{11}$ डाइन/सेमी०^2 1 सेमी०^2

$\therefore$ बल $F = 23 \times 10^{11}$ डाइन $= \mathbf{23 \times 10^6}$ न्यूटन

उदाहरण 6 : 5 मीटर लम्बे तथा 1·4 सेमी०^2 अनुप्रस्थ क्षेत्रफल वाले एक तार को $4 \cdot 8 \times 10^3$ न्यूटन बल द्वारा खींचा गया है। तार का यंग प्रत्यास्थता गुणांक $1 \cdot 2 \times 10^{10}$ न्यूटन/मीटर^2 है तो निम्नलिखित की गणना कीजिये—

(i) प्रतिबल, (ii) विकृति, (iii) तार की लम्बाई में वृद्धि।

हल—(i) प्रतिबल $= \frac{F}{A}$

उदाहरणानुसार, $F = 4 \cdot 8 \times 10^3$ न्यूटन

$A = 1 \cdot 4$ सेमी०^2

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$= 1\cdot4\times10^{-4}$ मीटर^2

$$\text{प्रतिबल} = \frac{4\cdot8\times10^{3}}{1\cdot4\times10^{-4}}$$

$$= \mathbf{3\cdot4\times10^{7}} \text{ न्यूटन/मीटर}^2$$

(ii) $$\text{विकृति} = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{यंग प्रत्यास्थता गुणांक}} = \frac{3\cdot4\times10^{7}}{1\cdot2\times10^{10}}$$

$$= \mathbf{2\cdot83\times10^{-3}}$$

(iii) $$\text{अनुदैर्घ्य विकृति} = \frac{\text{लम्बाई में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई}}$$

∴ **तार की लम्बाई में वृद्धि** = अनुदैर्घ्य विकृति × प्रारम्भिक लम्बाई

$$= 2\cdot83\times10^{-3}\times5\cdot0$$

$$= \mathbf{14\cdot15\times10^{-3}} \text{ मीटर}$$

उदाहरण 7 : 4·00 मीटर लम्बे तार के काट का क्षेत्रफल 1·2 सेमी०^2 है। इस तार को $4\cdot8\times10^3$ न्यूटन बल से खींचा जाता है। यदि धातु के यंग मापांक $Y = 1\cdot2\times10^{11}$ N/M^2 हो, तो ज्ञात कीजिये—

(i) प्रतिबल, (ii) विकृति, (iii) तार में वृद्धि।

हल—दिया है $L = 4\cdot0$ मीटर, $A = 1\cdot2$ सेमी०^2 $= 1\cdot2\times10^{-4}$ मीटर^2

$F = 4\cdot8\times10^3$ न्यूटन, $Y = 1\cdot2\times10^{11}$ न्यूटन/मीटर^2

(i) प्रतिबल $\left(= \frac{F}{A} = \frac{4\cdot8\times10^{3}}{1\cdot2\times10^{-4}}\right) = \mathbf{4\times10^{7}}$ **न्यूटन/मीटर^2**

(ii) हम जानते हैं

$$Y = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$$

∴ $$\text{विकृति} = \frac{\text{प्रतिबल}}{Y}$$

अत: $$\text{विकृति} = \frac{4\times10^{7}}{1\cdot2\times10^{11}} = 3\cdot3\times10^{-4}$$

(iii) ताप में वृद्धि l = विकृति × L

$$= 3\cdot3\times10^{-4}\times4$$

$$= \mathbf{13\cdot2\times10^{-4}} \text{ मीटर}$$

उदाहरण 8 : इस्पात के एक तार की अधिकतम लम्बाई ज्ञात कीजिए ज्ञात कीजिए जो बिना टूटे ऊर्ध्वाधस्त: लटक सके। इसताप का ब्रेकिंग प्रतिबल $7\cdot7\times10^8$ N/m^2 तथा घनत्व $7\cdot7\times10^3$ kg/M^3 है। ($g = 10$ M/s^2)

हल—दिया है बेकिंग प्रतिबल $= 7\cdot7\times10^8$ न्यूटन/मीटर^2

घनत्व $\rho = 7\cdot7\times10^3$ किग्रा०/मीटर^3

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

माना बिना टूटे ऊर्ध्वाधरत: लटकने वाले तार की अधिकतम लम्बाई = L

अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल = A

$\therefore$ आयतन = AL

$\therefore$ तार का द्रव्यमान = आयतन × घनत्व × g

$\therefore$ $M \cdot g = Al \times \rho \times g = Al\rho g$

टूटने की दिशा में ब्रेकिंग प्रतिबल = $\frac{Mg}{A} = \frac{Al\rho g}{A} = L \cdot \rho \cdot g$

दिया है—$L.\rho.g. = 7 \cdot 7 \times 10^8$ न्यूटन/मीटर^2

$$L = \frac{7 \cdot 7 \times 10^8}{\rho \cdot g} \text{ न्यूटर/मीटर}^2$$

$\therefore$ लम्बाई $$L = \frac{7 \cdot 7 \times 10^8}{7 \cdot 7 \times 10^3 \times 10} = \mathbf{1 \cdot 0 \times 10^4 \text{ मीटर}}$$

उदाहरण 9 : रबर की एक ठोस गेंद को 200 मीटर गहरी झील के ऊपरी तल से उसकी तली तक ले जाने में गेंद के आयतन में 0·1% की कमी हो जाती है। झील के जल का घनत्व $1 \cdot 0 \times 10^3$ किग्रा०/मी०^3 है। रबड़ के आयतनात्मक प्रत्यास्थता गुणांक का मान ज्ञात कीजिये। g = 10 मी/से०^2

हल—दिया है। $h = 200$ मीटर, $d = 1 \cdot 0 \times 10^3$ किग्रा०/मीटर^2, $g = 10$ मी०/से०^2

$$v = 0 \cdot 1\%$$

आयतन प्रत्यास्थता गुणांक $B = \frac{\text{दाब में परिवर्तन}}{\text{आयतन विकृ ति}}$

दाब में परिवर्तन = hdg

$$= 200 \times 1 \cdot 0 \times 10^3 \times 10$$

$$= 2 \times 10^6 \text{ न्यूटन/मी०}^2$$

आयतन विकृति = $\frac{v}{V} = \frac{0 \cdot 1}{100} = 10^{-3}$

$\therefore$ आयतन प्रत्यास्थता गुणांक $B = \frac{2 \times 10^6}{10^{-3}} = \mathbf{2 \times 10^9 \text{ न्यूटन/मीटर}^2}$

उदाहरण 10 : 1·0 सेमी०^2 परिछेद-क्षेत्रफल तथा 0·2 मीटर लम्बाई वाली पीतल की छड़ में ऊर्जा की वृद्धि की गणना कीजिये। जब इसको 5 किग्रा० भार के बल से लम्बाई की दिशा में दबाया जाता है। पीतल का यंग प्रत्यास्थता गुणांक $1 \cdot 0 \times 10^{11}$ न्यूटन/मीटर^2 तथा g = 9·8 मीटर/सेकेण्ड^2 है।

हल—छड़ की ऊर्जा में वृद्धि

U = छड़ की दबाने में किया गया कार्य

$$= \frac{1}{2} Fl$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

छड़ के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक

$$Y = \frac{FL}{Al}$$

$$l = \frac{FL}{AY}$$

अत: $$U = \frac{1}{2} \times F \times \frac{FL}{AY} = \frac{1}{2}\frac{F^2 L}{AY}$$

$$= \frac{(5 \times 9{\cdot}8)^2 \times 0{\cdot}2}{2 \times (1{\cdot}0 \times 10^{-4}) \times (1{\cdot}0 \times 10^{11})}$$

$$= \mathbf{2{\cdot}4 \times 10^{-15}}$$ **जूल**

उदाहरण 11 : L लम्बाई तथा A परिच्छेद-क्षेत्रफल के एक भारहील तार से M द्रव्यमान का एक पिण्ड्ड लटकाया जाता है। यदि तार का यंग प्रत्यास्थता गुणांक Y हो तो ऊर्ध्वाधर तल में पिण्ड को दोलन करने पर उसकी आवृत्ति ज्ञात कीजिये।

हल—यंग प्रत्यास्थता गुणांक $Y = \frac{Mg/A}{l/L}$

या $$l = \frac{MgL}{YA}, \frac{YA}{L} = \frac{MG}{L}$$

∵ बल नियतांक $K = \frac{\text{बल}}{\text{लम्बाई में वृद्धि}}$

$$= \frac{Mg}{l}$$

$$K = \frac{YA}{L}$$

∴ आवृत्ति $\eta = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{K}{M}\right)}$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{YA}{ML}\right)}$$

उदाहरण 12 : एक धातु के तार में 2×10^{-4} रेखीय विकृति उत्पन्न करने से $2{\cdot}4 \times 10^7$ न्यूटन/मीटर^2 का प्रतिबल उत्पन्न होता है। तार के पदार्थ का प्रत्यास्थता गुणांक ज्ञात कीजिये।

हल— रेखीय विकृति $= \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{यंग प्रत्यास्थता गुणांक}}$

उदाहरणानुसार,

रेखीय विकृति $= 2 \times 10^{-4}$

प्रतिबल $= 2{\cdot}4 \times 10^7$ न्यूटन/मीटर^2

अत: यंग प्रत्यास्थता गुणांक $= \frac{2{\cdot}4 \times 10^7}{2 \times 10^{-4}}$

$$= \mathbf{1{\cdot}2 \times 10^{11}}$$ **न्यूटन/मीटर^2**

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 13 : 0·46 मिमी० व्यास के 3·0 मीटर लटके हुए किसी तार में 1·5 किग्रा० का भार यदि 2·00 मिमी० का खिंचाव उत्पन्न करता हो तो तार के पदार्थ के यंग प्रत्यास्थता गुंणांक (Y) का मान ज्ञात करें। ($g = 9·8\ \text{ms}^{-2}$)

हल—प्रश्नानुसार $F = mg = 1·1·5\ \text{kg} \times 9·8\ \text{ms}^{-2} = 1·5 \times 9·8\ N$

$$\because \quad A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(0·46 \times 10^{-3}\ \text{m})^2}{4}$$

$$= \pi(0·23)^2 \times 10^6\ \text{m}^2$$

प्रश्नानुसार, $L = 3·0\ \text{m}$

$$l = 2·0\ \text{mm} = 2·0 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

इस प्रकार,

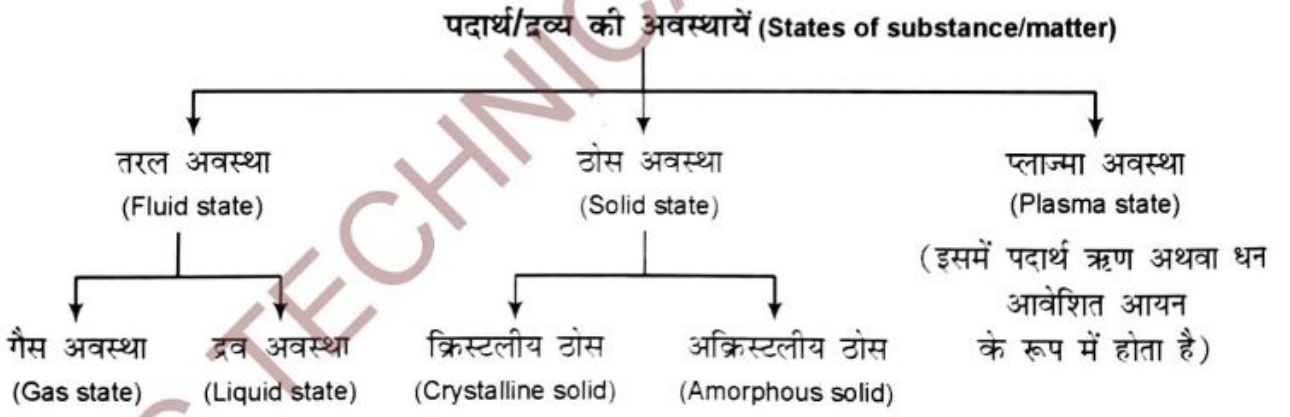
$$Y = \frac{FL}{Al} = \frac{(1·5 \times 9·8\ N)\ (3·0\ \text{m})}{\pi \times (0·23)^2 \times 10^{-6}\ \text{m}^2 \times 20 \times 10^{-3}\ \text{m}}$$

$$= 1·3 \times 10^{11}\ \text{Pa}$$

§ 6.18 परिचय (Introduction)

प्रकृति में उपस्थित पदार्थों की संरचना के अध्ययन में पाया गया कि अणुओं, परमाणुओं के मध्य परस्पर आकर्षण एवं उनके विशिष्ट आव्यूहन (Array) के कारण पदार्थ भिन्न-भिन्न गुणों को प्रदर्शित करते हैं।

पदार्थों को उनकी विशिष्टियों के आधार पर निम्न प्रकार से वर्गीकृत किया गया है—



पदार्थों की अवस्थाओं का यह वर्गीकरण उनके अणुओं के मध्य कार्य करने वाले आकर्षण बल के आधार पर किया गया—यह पाया गया कि ठोसों का आयतन व आकार निश्चित होता है क्योंकि इनके अणुओं के मध्य कार्य करने वाला बल अधिकतम होता है; परन्तु द्रवों तथा गैसों के अणुओं के मध्य कार्य करने वाला बल ठोसों की अपेक्षा कम होता है; अतः **इनमें बहने का गुण (flowing property) होता है। इस गुण के कारण इन्हें तरल पदार्थ (fluids) कहा गया।**

वास्तव में पदार्थ की अवस्थाओं की व्याख्या उनके विशिष्ट गुण **प्रत्यास्थता** (Elasticity)* के आधार पर निम्न प्रकार से की गई है—

---

* **प्रत्यास्थता**—किसी वस्तु के पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण वस्तु किसी विरूपक बल के द्वारा अपनी आकृति अथवा आकार में होने वाले परिवर्तन का विरोध करती है; तथा विरूपक बल हटा लेने पर अपनी प्रारम्भिक अवस्था में आ जाती है।

[The property of certain materials that enables them to return to their original dimensions after an applied stress (the force per unit area) on a body tends to cause it to deform) has been removed.]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

"जब किसी पदार्थ पर स्पर्शरेखीय बाह्य विरूपक बल लगाया जाता है तो स्पर्शरेखीय प्रतिबल के साथ अपरूपण विकृति भी उत्पन्न होती है; पिण्ड मे उत्पन्न रूप की विकृति अथवा अपरूपण विकृति (Shearing Strain) के लिए स्पर्शरेखीय प्रतिबल तब तक बना रहता है जब तक पदार्थ पर बाह्य विरूपक बल लगा रहता है; इस गुण को प्रदर्शित करने वाले पदार्थ की अवस्था **ठोस** कही जाती है।"

"इसके विपरीत पदार्थ की वह अवस्था जो स्थायी रूप से या अनियत काल के लिये पदार्थ पर लगाए गए बाह्य विरूपक बल का कदापि विरोध नहीं करती है अर्थात् उसमें बाह्य स्पर्शरेखीय विरूपक बल के विरुद्ध स्पर्शरेखीय प्रतिबल नहीं उत्पन्न होता है सिर्फ अपरूपण विकृति प्रभाव में आती है। ऐसे पदार्थ तरल अवस्था में कहे जाते हैं।"

तरल पदार्थ में केवल आयतन प्रत्यास्थता गुणांक (B) ही होता है, अन्य प्रत्यास्थता गुणांक (Y तथा η) नहीं।

"Unlike a solid, in which, the strain set up under a shearing stress lasts throughout the period of application of the stress, a fluid may be defined as that state of matter which cannot indefinitely or permanently oppose or resist a shearing stress. In fact it constantly and continuously yields to it.

Fluids are concerned only with Bulk Modulus of elasticity, not with Young's Modulus of elasticity (Y) or with Modulus of rigidity (η). "

यद्यपि पदार्थ की अवस्था के वर्गीकरण में वैज्ञानिक स्पष्टता है; परन्तु हम सहजता से कुछ व्यावहारिक उदाहरणों में भ्रमित होते हैं, जैसे—डामर (coaltar) जो ठोस दिखता है, जिसे हथौड़े से तोड़ा जा सकता है परन्तु मूलत: (essentially) यह एक तरल (fluid) है जो किसी ढलान पर रखे होने पर विकृत होकर धीरे-धीरे (infinitely slow) बहता है। इसी प्रकार धातु के तारों पर जब अत्यधिक तनाव बल लगाते हैं तो वह तरल की भाँति बहता है, जितने समय तक ये बहाव (तरलता) रहती है उतनी देर तक पदार्थ तरल अवस्था में होता है, तत्पश्चात् पुन: ठोस अवस्था में।

अत: सामान्य रूप से हम किसी पदार्थ को ठोस (solid) अथवा तरल (fluid) रूप में निम्न प्रकार से पृथक् करते हैं—

जिन पदार्थों में स्पर्शरेखीय बाह्य विरूपक बल के कारण उत्पन्न हुई विकृति के लिए पर्याप्त समय तक स्पर्शरेखीय प्रतिबल उत्पन्न होता है, वे पदार्थ ठोस अवस्था में अन्यथा की दशा में तरल अवस्था में कहे जाते हैं।

"The fundamental distinction between the two nevertheless remain, and we declare a substance to be a fluid or a solid according as it does or does not yield to a shearing stress applied to it over a long enough period."

तरल पदार्थों को पुन: दो वर्गों में विभक्त किया जा सकता है—

1. द्रव (Liquid)—वे तरल पदार्थ हैं जिनका कोई निश्चित आकार नहीं होता है तथा जिस बर्तन में रखे जाते हैं उसी का आकार ग्रहण कर लेते हैं। इनका आयतन निश्चित होता है जो अत्यधिक दाब पर भी प्राय: (almost) परिवर्तित नहीं होता अर्थात् असंपीड्य* होता है। इनमें एक मुक्त पृष्ठ होता है, जैसे—पानी, शहद, स्प्रिट, तेल आदि।

"A liquid is a fluid which, although it has no shape of its own, occupies a definite volume almost which cannot be altered, however great the force applied to it."

In other words, "a liquid is a fluid which is quite incompressible and has a free surface of its own, as for example : water, honey, spirit, oil, etc."

2. गैस (Gas)—वे तरल पदार्थ हैं जो न केवल सरलता से संपीडित किये जा सकते हैं वरन् लगातार दाब कम किये जाने पर उपलब्ध अनन्त विस्तारित आकाश में व्याप्त हो जाते हैं। इनका आकार एवं आयतन दोनों निश्चित नहीं होता और न ही इनका कोई मुक्त पृष्ठ होता है।

---

* आदर्श द्रव को संपीडित (compress) नहीं किया जा सकता है अर्थात् द्रव का दबाने पर उसके आयतन (अथवा घनत्व) में कोई परिवर्तन नहीं होता है। सामान्यत: सभी द्रवों को असंपीड्य (incompressible) माना जाता है, क्योंकि अत्यधिक दाब डालने पर भी उनके आयतन में नगण्य परिवर्तन होता है। उदाहरणत: जल में प्रति वायुमण्डलीय दाब (per atmospheric pressure) डालने पर उसके आयतन में केवल 0·000048 का भिन्नात्मक (fractional) परिवर्तन होता है।

AYC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

"A gas, is a fluid, which cannot only be easily compressed when subjected to pressure but with a progressive reduction of the pressure on it, can also be made to expand indefinitely, occupying all the space made available to it."

In other words, "gas is a fluid which has neither a shape and volume (or both) nor a free surface of its own."

विशेष—तरल यांत्रिकी (Fluid mechanics) (अर्थात् द्रव तथा गैस यान्त्रिकी) के इस पाठ खण्ड में द्रव यान्त्रिकी (Liquid mechanics) ही पाठ्यक्रम (Syllabus) में है। पुन: द्रव यान्त्रिकी (Liquid Mechanics) के दो भाग (i) द्रव-स्थैतिकी (Hydrostatics), तथा (ii) द्रव-गतिकी (Hydrodynamics) के वृहद् विषय-वस्तु में से प्रस्तुत सम्पूर्ण पाठ को सुगमता हेतु पाठ्यक्रमानुसार (According to syllabus) दो भागों में बाँट दिया गया है।

A-पृष्ठ तनाव (Surface Tension)

§ 6.19 परिचय (Introduction)

यह एक साधारण अनुभव की बात है कि जब काँच की साफ प्लेट पर थोड़ा सा पानी डाला जाता है तो वह काँच की प्लेट पर एक पतली फिल्म (Thin film) के रूप में फैल जाता है। परन्तु जब उसी प्लेट पर थोड़ा-सा पारा डाला जाता है, तो वह छोटी-सी बूँद का रूप धारण कर लेता है। इसी प्रकार जब चिकनाई (Grease-ग्रीस) लगी काँच की प्लेट पर थोड़ा-सा पानी डाला जाता है तो वह भी पारे की तरह छोटी-छोटी गोलाकार बूँदों का रूप धारण कर लेता है। उपरोक्त घटनाओं से स्पष्ट है कि द्रवों का व्यवहार केवल गुरुत्वीय बल (भार) से ही नियंत्रित नहीं होता बल्कि उस पर कोई अन्य बल भी कार्य करता है जो द्रव और सम्पर्क तल की प्रकृति पर निर्भर करता है।

दैनिक जीवन में घटित होने वाली ऐसी अनेक प्राकृतिक घटनाओं से यह प्रकट होता है कि प्रत्येक द्रव की स्वतन्त्र सतह (मुक्त पृष्ठ) की यह स्वाभाविक प्रकृति होती है कि वह अपने क्षेत्रफल को कम से कम (as small as possible) करने का प्रयास करती है अर्थात् एक तनी हुई प्रत्यास्थ झिल्ली (extended elastic membrane) की भाँति सिकुड़ने का प्रयास करती है। द्रव पृष्ठ की इस स्वाभाविक प्रकृति को ही पृष्ठ तनाव कहते हैं।

अत: **"किसी द्रव का पृष्ठ तनाव उस द्रव की वह स्वाभाविक प्रवृत्ति है जिसके कारण द्रव का स्वतन्त्र पृष्ठ सदैव अपने पृष्ठ क्षेत्रफल को यथासम्भव न्यूनतम करने का प्रयास करता है अथवा एक तनी हुई प्रत्यास्थ झिल्ली की भाँति व्यवहार करता है।"**

"The surface of a liquid behaves as though it were an elastic skin or membrane, having a natural tendency to contract. "

द्रव पृष्ठ का व्यवहार इस प्रकार होता है जैसे पृष्ठ पर कोई तनाव बल लगा हो, परन्तु द्रव के पृष्ठ तनाव तथा तनी हुई झिल्ली के तनाव में एक मूल अन्तर यह है कि तनी हुई झिल्ली का तनाव, झिल्ली के खिंचाव (stretching) के बढ़ने पर अथवा पृष्ठ क्षेत्रफल बढ़ने पर बढ़ता है जबकि हुक के नियमानुसार द्रव का पृष्ठ तनाव खिंचाव अथवा पृष्ठ क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता है, जब द्रव परत की मोटाई 10^{-7} सेमी से भी कम होने लगती है तब द्रव का पृष्ठ तनाव तेजी से गिरता है। किसी द्रव के पृष्ठ तनाव का मान उस द्रव पर निर्भर करता है तथा द्रव पृष्ठ के दूसरी ओर वाले माध्यम पर भी निर्भर करता है। द्रव का पृष्ठ तनाव ताप के बढ़ने पर सामान्यत: घटता है। पृष्ठ तनाव केवल द्रव का गुण है, गैस तथा ठोस का नहीं।

पृष्ठ तनाव का वर्णन (Interpretation of Surface Tension)

साधारणतया किसी भी द्रव की छोटी बूँद गोलाकार (spherical) होती है जैसे वर्षा की बूँद, साबुन के बुलबुले, काँच की प्लेट पर रखा थोड़ा सा पारा (small quantity of mercury) आदि। जिज्ञासा स्वाभाविक है कि द्रव की छोटी बूँदें गोलाकार रूप क्यों लेती हैं? वास्तव में इसका कारण द्रव के मुक्त पृष्ठ पर लगने वाला तनाव बल है, जो द्रव के पृष्ठ क्षेत्रफल को न्यूनतम करने का प्रयास करता है। चूँकि **किसी निश्चित आयतन के लिए, गोलीय पृष्ठ का क्षेत्रफल न्यूनतम होता है।**

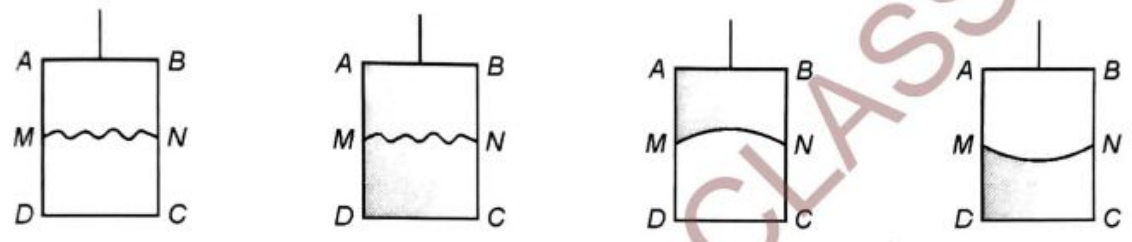
AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

बलों (गुरुत्व आदि) की अनुपस्थिति में, द्रव के निश्चित (अल्प मात्रा में) आयतन के लिए, द्रव का पृष्ठ गोलाकार (क्षेत्रफल न्यूनतम) हो जाता है।

निम्न प्रयोगों एवं उदाहरणों द्वारा इसे समझा जा सकता है—

उदाहरण 1 : तार का एक फ्रेम *ABCD* लेकर उसके किन्हीं दो बिन्दुओं (माना *M* तथा *N*) के बीच एक धागा चित्र 6.14(a) की भाँति बाँधकर इसे साबुन के घोल में डुबाकर बाहर निकालते हैं। फ्रेम पर साबुन के घोल की एक पतली फिल्म बन जाती है जिस पर गीला धागा अनिश्चित आकार में रखा होता है, चित्र 6.14 (b)। इस दशा में धागे के दोनों ओर घोल की फिल्म के कारण, धागे के प्रत्येक बिन्दु पर दोनों ओर से समान खिंचाव बल लगने के कारण, इस पर परिणामी बल शून्य होता है। अब यदि—

प्रयोग 1. फ्रेम *MNCD* भाग में पिन चुभाकर घोल का फिल्म तोड़ दें तो धागा *NBAM* फिल्म की दिशा में खिंच जाता है। फ्रेम में फिल्म एवं धागे की आकृति चित्र 6.14 (c) की भाँति होती है।

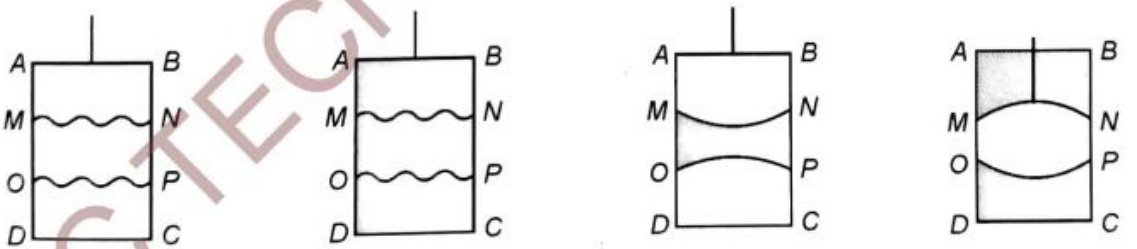


(a) फ्रेम में बंधा धागा (b) साबुन के घोल में डुबाकर निकाला गया फ्रेम (c) MNCD फिल्म तोड़ने पर (d) ABNM फिल्म तोड़ने पर

चित्र 6.14

प्रयोग 2. यदि फ्रेम के *ABNM* भाग में पिन चुभाकर घोल का फिल्म तोड़ दें तो धागा *NCDM* फिल्म की दिशा में खिंच जाता है। फ्रेम में फिल्म एवं धागे की आकृति चित्र 6.14 (d) की भाँति होती है। स्पष्ट है कि उपरोक्त दोनों प्रयोग में फिल्म अपने पृष्ठ क्षेत्रफल को यथासम्भव न्यूनतम करने का प्रयास करती है।

उदाहरण 2. फ्रेम *ABCD* में दो धागा *MN* तथा *OP* चित्र 6.15 (a) की भाँति बाँधकर उपरोक्तानुसार पुन: प्रयोग करने पर



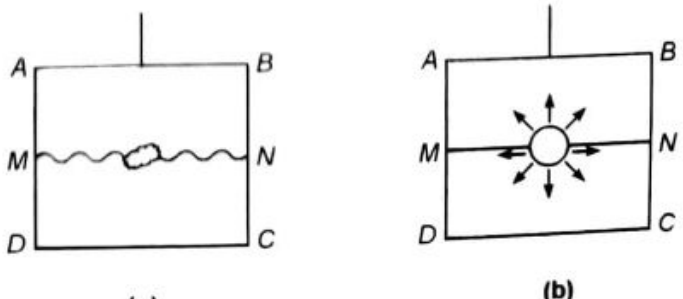
(a) फ्रेम में बंधा धागा (b) साबुन के घोल में डुबाकर निकाला गया फ्रेम (c) ABNM एवं PCDO फिल्म तोड़ने पर धागा (d) MNPO फिल्म तोड़ने पर

चित्र 6.15

प्रयोग 1. फ्रेम में *ABNM* व *PCDO* भाग में पिन चुभाकर घोल का फिल्म तोड़ दें तो धागों पर लगे पृष्ठ तनाव के कारण *NPOM* भाग में बचे फिल्म तथा धागों की आकृति चित्र 6.15 (c) की भाँति होती है।

प्रयोग 2. फ्रेम में *NPOM* भाग में पिन चुभाने पर धागों एवं फिल्म की आकृति चित्र 6.16 (d) की भाँति होती है।

प्रयोग 3. उपरोक्त प्रयोग में यदि धागा फ्रेम *ABCD* में चित्र 6.16 (a) की भाँति फन्दा बनाकर बाँधा जाये तथा धागे के



(a) (b)

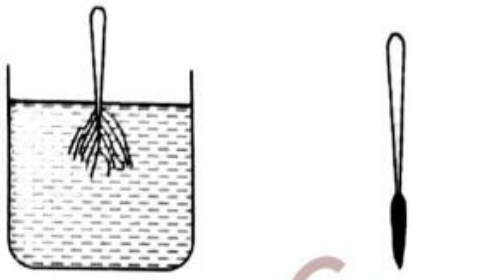
चित्र 6.16

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

फन्दे के बीच का भाग पिन चुभाकर तोड़ा जाये तो फन्दे का धागा बाहरी फिल्म के सिकुड़ने के कारण, तुरन्त ही प्रत्येक स्थान पर बाहर की ओर खिंचकर वृत्त का रूप ले लेगा।

स्पष्ट है कि उपरोक्त सभी प्रयोगों में फिल्म अपने पृष्ठ क्षेत्रफल को यथासम्भव न्यूनतम करने का प्रयास करती है।



(a) जल के अन्दर ब्रुश (b) जल के बाहर ब्रुश

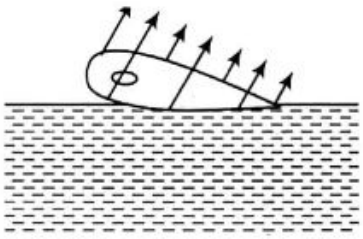
चित्र 6.17

उदाहरण 3. जब मुलायम बालों से बने ब्रुश को जल में डुबाते हैं तो उसके बाल अलग-अलग तथा ब्रुश को जल से बाहर निकालने पर बाल आपस में चिपक जाते हैं चित्र 6.17 (a) एवं (b)। इसका कारण यह है कि जब ब्रुश जल के अन्दर होता है तब इसके बालों के बीच जल होता है क्योंकि जल का मुक्त पृष्ठ वहाँ नहीं होता, अत: ब्रुश के बाल वहाँ फैले होते हैं लेकिन जल से बाहर ब्रुश के बालों के चारों ओर जल की पतली फिल्म बन जाती है जो सिकुड़ने का प्रयास करती है, फलत: ब्रुश के बाल आपस में चिपक जाते हैं।

उदाहरण 4. काँच की नली के सिरों को गर्म करने पर यह गोल हो जाती है क्योंकि गर्म करने पर काँच पिघलकर द्रव रूप में आ जाता है, जो न्यूनतम पृष्ठ क्षेत्रफल रखता है, अत: नली के सिरे गोल हो जाते हैं।

उदाहरण 5. सुई जल पर तैरती है जब चिकनाई लगी कोई सुई अथवा ब्लेड; सोखता कागज (Blotting Paper) पर रखकर जल पृष्ठ पर रखी जाती है तो सोखता कागज कुछ देर में पानी में डूब जाता है परन्तु सुई (व ब्लेड) जल पृष्ठ पर तैरती रहती है।

इसका कारण यह है कि जल पृष्ठ पर तैरती हुई सुई अपने भार से जलपृष्ठ को दबाती है जिससे जल पृष्ठ दबकर गड्ढाकार (वक्राकार) बन जाता है जिससे इस स्थान पर पृष्ठ का क्षेत्रफल कुछ बढ़ जाता है। इस बढ़े क्षेत्रफल को कम करने के लिए जल के पृष्ठ तनाव के कारण लगने वाले तनाव बल का ऊर्ध्वाधर घटक सुई के भार को सन्तुलित कर देता है, अत: सुई तैरती रहती है।



चित्र 6.18

यदि जल के पृष्ठ पर बनी झिल्ली को किसी दूसरे सुई की नोंक से चुभो दिया जाये तो जल पृष्ठ पर बनी झिल्ली के टूट जाने के कारण, तैरती सुई जल में डूब जायेगी।

उदाहरण 6. वर्षा की बूँदें तथा साबुन झाग का बुलबुला पूर्णतया गोलाकार होता है।

§ 6.20 अन्तराण्विक बल (Intermolecular Force)

आण्विक सिद्धान्त के अनुसार पदार्थ का वह छोटे से छोटा कण जो स्वतन्त्र अवस्था में रह सकता है अणु कहलाता है। **विभिन्न अणु एक दूसरे पर आकर्षण बल लगाते हैं, जिसे अन्तराण्विक बल (Intermolecular force) कहते हैं।** यह बल दो प्रकार का होता है—

1. ससंजक बल (Cohesive Force)—**एक ही पदार्थ के अणुओं के बीच लगने वाले आकर्षण बल को ससंजक बल कहते हैं।**

"Cohesion is the force of attraction between molecules of the same substance."

ठोसों के अणुओं के मध्य अत्यधिक ससंजक बल के कारण इनका रूप निश्चित रहता है। द्रवों के अणु अपेक्षाकृत क्षीण ससंजक बल के कारण द्रव के भीतर कहीं भी गति कर सकते हैं, परन्तु द्रव की सतह को छोड़ नहीं सकते हैं। इसी बल के कारण द्रव का आयतन तो निश्चित होता है परन्तु आकार नहीं। ससंजक बल का मान पदार्थ पर निर्भर करता है।

2. आसंजक बल (Adhesive Force)—**भिन्न-भिन्न पदार्थों के अणुओं के मध्य लगने वाले आकर्षण बल को आसंजक बल कहते हैं।**

"Adhesion is the force of attraction between molecules of different substances."

इस बल के कारण ही जल काँच से चिपक कर उसे गीला कर देता है, गोंद द्वारा कागज के दो टुकड़े आपस में जुड़ जाते हैं, ईंट सीमेन्ट से जुड़ती है, फेवीकॉल से लकड़ी जुड़ती है, ब्लैक बोर्ड पर चॉक से अथवा कागज पर स्याही से लिख पाते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

मशीनों में लुब्रीकेटिंग ऑयल (lubricating oil) धातु की सतह से चिपक जाते हैं जिससे मशीनों के इस्तेमाल में टूट-फूट कम होती है।

इस बल का मान विभिन्न पदार्थों के युग्मों के लिए भिन्न भिन्न होता है।

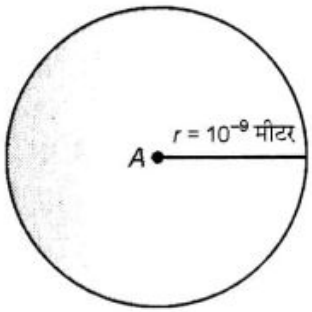
अन्तराण्विक बल, वैद्युत बल होते हैं। ये गुरुत्वाकर्षण बल से भिन्न होते हैं तथा व्युत्क्रम वर्ग के नियम (Inverse square law) $F \propto \frac{1}{r^2}$ **का पालन नहीं करते हैं। संभवत: दो अणुओं के मध्य दूरी के आठवें घात के व्युत्क्रम नियम का पालन करते हैं।**

"Intermolecular force is basically an electrical force. This force is different from the ordinary gravitational force and does not obey the ordinary inverse square law, the force varying inversely probably as the eighth power of the distance between two molecules and thus decreases rapidly with distance."

जब अणुओं के मध्य दूरी 10^{-9} मीटर से अधिक होती है, तब उनके बीच लगने वाला आकर्षण बल नगण्य होता है तथा जब आण्विक दूरी 10^{-9} मीटर से कम होती जाती है तब उनके मध्य लगने वाला आकर्षण बल तेजी से बढ़ता जाता है।

अत: **अणुओं के मध्य अधिकतम दूरी ($=10^{-9}$मीटर) जिस पर उनके मध्य आकर्षण बल कार्यरत होता है, को आण्विक परास (molecular range) कहते हैं।**

यदि किसी अणु A को केन्द्र मानकर आण्विक परास के बराबर त्रिज्या का एक गोला खींचें तो अणु A इस गोले के अन्दर सभी अणुओं पर आकर्षण बल लगायेगा तथा ये सभी अणु भी केन्द्र पर स्थित अणु A पर आकर्षण बल लगायेंगे, चित्र 6.19। इस गोले को आण्विक प्रभाव का गोला (sphere of molecular influence)* कहते हैं तथा इसकी त्रिज्या ($=10^{-9}$ मीटर) को आण्विक परास (molecular range) कहते हैं।



चित्र 6.19

"A sphere drawn around a molecule as centre, with a radius equal to its molecular range is called the sphere of molecular molecular influence."

ससंजक एवं आसंजक बल का भौतिक महत्व-उदाहरण सहित (Physical Significance of Cohesive and Adhesive Forces with Examples)

1. आसंजक बल > ससंजक बल—तो द्रव बर्तन की दीवार से चिपक जाता है अर्थात् बर्तन गीला हो जाता है। जैसे काँच के बर्तन में जल रखने पर, जल बर्तन की दीवार को भिगो देता है क्योंकि जल तथा काँच के अणुओं के मध्य का आसंजक बल, जल के अणुओं के मध्य ससंजक बल से बड़ा है। इसी प्रकार तेल की बूँद जल सतह पर फैल जाती है।

2. आसंजक बल < ससंजक बल—तो द्रव बर्तन की दीवार से नहीं चिपकता है अर्थात् बर्तन गीला नहीं होता है। जैसे काँच की परखनली में पारा रखने पर पारा नली से नहीं चिपकता है।

3. जल से भीगी काँच अथवा स्टील की दो चिपकी प्लेटों को अलग-अलग करने के लिए जल के अणुओं के बीच लगने वाले ससंजक बल के विरुद्ध काफी बल लगाना पड़ता है।

4. मशीनों द्वारा धातुओं के टुकड़ों को परस्पर इतना अधिक दबाया जा सकता है कि उनके अणु आण्विक परास के अन्दर आकर, ससंजक बलों के क्रियाशील होने के कारण परस्पर चिपक जायें। इस क्रिया को शीत वेल्डिंग (cold welding) कहते हैं।

§ 6.21 पृष्ठ तनाव का आण्विक सिद्धान्त (Molecular theory of Surface Tension)

ससंजक बलों के आधार पर पृष्ठ तनाव की सर्वप्रथम व्याख्या वैज्ञानिक **लाप्लास** (Laplace) ने निम्न प्रकार की है—

* It is also sometimes referred to as the sphere of molecular attraction or of molecular activity.

● अणुओं के अति समीप ($=10^{-10}$ मीटर से कम दूरी पर) होने पर इनके बीच लगने वाला आण्विक बल प्रतिकर्षण का हो जाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

माना चित्र 6.20 में प्रदर्शित किसी द्रव का मुक्त पृष्ठ SS है जो वायु के सम्पर्क में है। द्रव में चार भिन्न-भिन्न स्थानों पर स्थित अणुओं A, B, C व D के चारों ओर आण्विक प्रभाव अथवा सक्रियता के गोले खींचे गये हैं।

अणु A का आण्विक सक्रियता का गोला पूर्णत: द्रव के भीतर है, अत: यह अणु प्रत्येक दिशा में समान रूप से आण्विक सक्रियता के गोले के भीतर स्थित अन्य अणुओं द्वारा आकर्षित किया जायेगा। अत: इस पर परिणामी ससंजक बल शून्य होगा। अणु A में मात्र ऊष्मीय गति ही होती है।

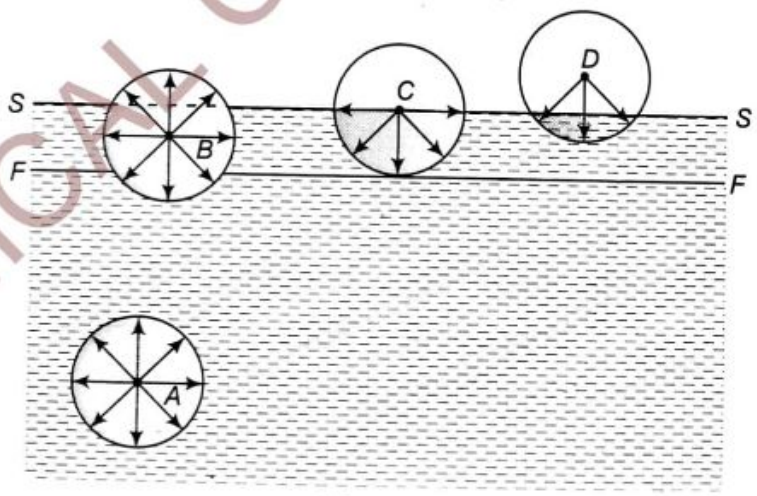
अणु B द्रव पृष्ठ के कुछ नीचे है, अत: इसकी आण्विक सक्रियता का गोला द्रव सतह से आंशिक रूप से बाहर होता है जिसमें गैस अथवा वाष्प के अत्यल्प अणु उपस्थित होते हैं, अत: अणु B नीचे की ओर (अणुओं की संख्या अधिक होने से) अधिक आकर्षित होता है तथा इस पर नीचे की ओर परिणामी बल लगता है।

अणु C द्रव के मुक्त पृष्ठ पर उपस्थित है, अत: इसकी आण्विक सक्रियता का आधा गोला द्रव सतह से बाहर तथा आधा द्रव सतह के भीतर पड़ता है। चूँकि द्रव के अणु केवल नीचे के भाग में ही हैं, ऊपर के आधे भाग में गैस अथवा वाष्प के अत्यल्प अणु उपस्थित हैं, अत: अणु C पर नीचे की ओर लगने वाला परिणामी बल अधिकतम है।

द्रव पृष्ठ पर नीचे की ओर लगने वाले इस परिणामी अधिकतम ससंजक बल के कारण द्रव पृष्ठ के प्रति एकांक क्षेत्रफल पर उत्पन्न बल को द्रव का आन्तरिक दाब या निज-दाब या ससंजक दाब कहते हैं।*

"This downward or inward force exerted per unit area of a liquid surface is called its internal, intrinsic or cohesion pressure."

अणु D द्रव के मुक्त पृष्ठ से ऊपर है। इसकी आण्विक सक्रियता के गोले का बहुत थोड़ा भाग ही द्रव के भीतर है, अत: इस पर नीचे की ओर लगने वाला परिणामी बल न्यूनतम होगा।* अर्थात् यह अणु वाष्प या गैस के रूप में द्रव तल के पास उपस्थित रहेगा। यदि आण्विक सक्रियता का गोला द्रव तल को छूकर गुजर रहा हो तो इस अणु पर नीचे की ओर लगने वाला परिणामी बल शून्य होगा अर्थात् यह अणु वाष्प या गैस रूप में द्रव तल से दूर चला जायेगा।



चित्र 6.20

द्रव के मुक्त पृष्ठ SS के समान्तर आण्विक परास की दूरी ($=10^{-9}$ मीटर) पर एक तल FF खींचा गया है। स्वाभाविक है SS और FF के बीच में स्थित सभी अणुओं पर परिणामी ससंजक बल SS की तरफ बढ़ने पर बढ़ता जाता है। FF तथा SS के मध्य की द्रव की परत पृष्ठ फिल्म (surface film) कहलाती है। इस फिल्म पर परिणामी ससंजक बल अधिकतम तथा नीचे (द्रव के अन्दर) की ओर होता है।

यदि द्रव के भीतर से एक अणु को द्रव सतह पर लाया जाये तो नीचे की तरफ कार्यकारी ससंजक बल के विरुद्ध कार्य करना पड़ेगा जिससे अणु की स्थितिज ऊर्जा बढ़ जाती है। अत: **द्रव के स्वतन्त्र पृष्ठ में स्थित अणुओं की स्थितिज ऊर्जा द्रव के भीतर स्थित अणुओं की स्थितिज ऊर्जा से अधिक होती है।**

"The potential energy of the molecules in the surface film is greater than that of those inside the liquid."

सैद्धान्तिक रूप से "**कोई भी निकाय (system) उस समय स्थायी साम्यवस्था (stable equilibrium) में होता है जब उसकी स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम होती है।**" अत: द्रव का पृष्ठ न्यूनतम स्थितिज ऊर्जा रखने के लिए अपने तल पर न्यूनतम अणु रखने की प्रवृत्ति रखता है अर्थात् सिकुड़ कर न्यूनतम क्षेत्रफल धारण करने की प्रवृत्ति रखता है। इसी प्रवृत्ति को पृष्ठ तनाव कहते हैं।

---

* यह वह दाब है जो वान्डर वाल्स गैस समीकरण (Van-der Waal's modified gas equation) में $\frac{a}{v^2}$ के पद द्वारा दिया जाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

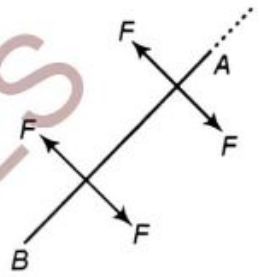
किसी द्रव पृष्ठ के प्रति इकाई क्षेत्रफल की स्थितिज ऊर्जा को पृष्ठ ऊर्जा कहते हैं।

"The Potential energy per unit area of the surface film is called its surface energy."

पृष्ठ ऊर्जा का विमीय सूत्र $[ML^0T^{-2}]$ तथा मात्रक जूल/मीटर^2 है।

§ 6.22 पृष्ठ तनाव की परिभाषा एवं मापन (Definition and Measurement of Surface Tension)

चित्र 6.21 के अनुसार, माना द्रव के मुक्त पृष्ठ पर एक काल्पनिक रेखा AB खींची गई है। यह एक रेखा पृष्ठ को दो भागों में बाँटती है, रेखा के बायीं ओर का पृष्ठ तथा रेखा के दाहिनी ओर का पृष्ठ। पृष्ठ के ये दो भाग रेखा AB को अपनी-अपनी ओर समान बल F लगाकर खींचते हैं अर्थात् पृष्ठ क्षेत्रफल कम करने का प्रयास करते हैं। अत: नेट बल शून्य होने के कारण रेखा AB संतुलन में है।



चित्र 6.21

इस बल F की दिशा, रेखा AB के लम्बवत् तथा पृष्ठ के स्पर्शरेखीय (tangential) अर्थात् पृष्ठ के तल में होती है तथा परिमाण रेखा AB की लम्बाई, l के समानुपाती होता है, अर्थात्

$$F \propto l$$

या $$F = Tl$$

जहाँ अनुक्रमानुपाती नियतांक T को द्रव का पृष्ठ तनाव कहते हैं,

अत: $$\boldsymbol{T = \frac{F}{l}} \quad \ldots (1)$$

यदि $l = 1$ तो

$$T = F$$

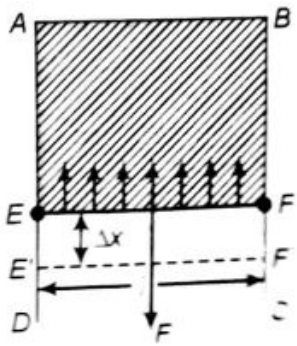
अत: **किसी द्रव का पृष्ठ तनाव उस बल के बराबर होता है जो उस द्रव के पृष्ठ पर खींची गई किसी काल्पनिक रेखा के एक ओर इसकी एकांक लम्बाई पर पृष्ठ के तल में तथा रेखा के लम्बवत् लगता है।**

पृष्ठ तनाव का SI मात्रक **न्यूटन/मीटर** तथा विमीय सूत्र $[ML^0T^{-2}]$ है। यह एक **अदिश राशि** है, क्योंकि बल की दिशा सदैव निश्चित (पृष्ठ के तल में, रेखा के लम्बवत्) होने के कारण; इसको व्यक्त करने की आवश्यकता नहीं होती है।

पृष्ठ तनाव केवल द्रव की प्रकृति पर निर्भर करता है, पृष्ठ के क्षेत्रफल अथवा रेखा की लम्बाई पर नहीं, यह पृष्ठ के दूसरी ओर के माध्यम पर भी निर्भर करता है तथा द्रव का ताप बढ़ने पर सामान्यत: घटता है। इसको प्राय: प्रतीक T अथवा S से प्रदर्शित किया जाता है।

§ 6.23 पृष्ठ ऊर्जा तथा कार्य में सम्बन्ध (Relation in between Work and Surface Energy)

माना U-आकृति के तार का एक फ्रेम $ABCD$ है जिस पर l लम्बाई का एक तार EF बिना घर्षण के नीचे अथवा ऊपर खिसक (slide) सकता है। इस फ्रेम को साबुन के घोल में डुबाकर बाहर निकालने पर इस फ्रेम तथा चलनशील तार $ABFE$ के मध्य साबुन की फिल्म बन जाती है। चूँकि पृष्ठ तनाव के कारण फिल्म का मुक्त पृष्ठ सिकुड़ने का प्रयास करता है, अत: तार EF ऊपर की ओर खिसकना शुरू कर देता है, चित्र 6.22।



चित्र 6.22

तार EF को साम्यावस्था में रखने के लिए इस पर एक समान बल F (Uniform Force F) (तार के भार सहित) नीचे की ओर (downward) लगाना पड़ेगा।

तार EF को ऊपर-नीचे खिसका कर फिल्म की भिन्न-भिन्न स्थितियों के लिए आरोपित बल F (तार EF को साम्यावस्था में रखने के लिए उस पर लगाया गया बल) फिल्म की लम्बाई l (तार EF के सम्पर्क में) के समानुपाती होता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अर्थात् $F \propto 2l^*$

(∵ फिल्म में दो मुक्त पृष्ठ हैं अत: लम्बाई = $2l$)

या $F = T2l$ ...(i)

जहाँ T समानुपाती नियतांक है जो द्रव फिल्म का पृष्ठ तनाव है। माना तार EF को एक सूक्ष्म दूरी Δx खिसकाकर $E'F'$ स्थिति में लाया जाता है। अत: बल F द्वारा क्षेत्रफल वृद्धि करने में किया गया कार्य

$$W = F \times \Delta x$$
$$= T \times 2l \times \Delta x \quad \text{(समीकरण (i) से)}$$
$$= T \times \Delta A \quad (\because 2l \times \Delta x = \text{दोनों पृष्ठों के क्षेत्रफल में वृद्धि})$$

अत: **पृष्ठ तनाव के विरुद्ध किया गया कार्य = पृष्ठ तनाव × पृष्ठ के क्षेत्रफल में वृद्धि**

अथवा $$\boldsymbol{T = \frac{W}{\Delta A}}$$ ...(2)

पृष्ठ क्षेत्रफल की वृद्धि करने से द्रव की गतिज ऊर्जा में काई परिवर्तन नहीं होता है, अत: बाह्य बल द्वारा किया गया कार्य, नये (बढ़े हुये) पृष्ठ में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है।

अत: मुक्त पृष्ठ की स्थितिज ऊर्जा में बढ़ोत्तरी

$$\Delta U = W = T.\Delta A$$

यदि $\Delta A = 1$ तब $T = W = \Delta U$

अर्थात् **किसी द्रव के पृष्ठ तनाव का आंकिक मान उस कार्य के बराबर होता है जो नियत ताप पर उस द्रव के मुक्त पृष्ठ के क्षेत्रफल में एकांक वृद्धि करने के लिये आवश्यक है।**

अत: पृष्ठ तनाव का मात्रक **जूल/मीटर^2** भी है जो **न्यूटन/मीटर** के तुल्य है।

नियत ताप पर किसी द्रव पृष्ठ के प्रति एकांक क्षेत्रफल की स्थितिज ऊर्जा को ही द्रव की पृष्ठ ऊर्जा कहते हैं। यह पृष्ठ ऊर्जा द्रव का पृष्ठ तनाव भी है क्योंकि—(समीकरण (2) से)

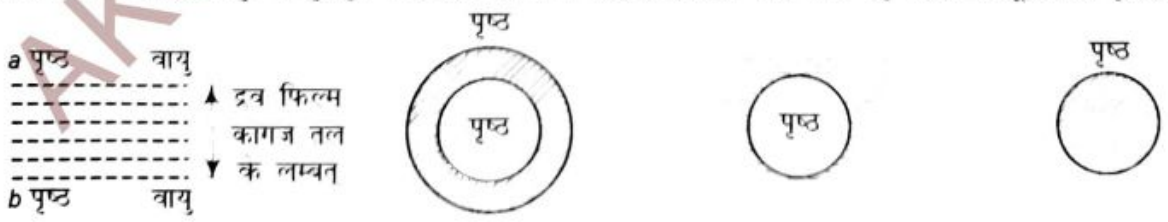
$$\text{पृष्ठ ऊर्जा} = \frac{\text{पृष्ठ क्षेत्रफल बढ़ाने में किया गया कार्य}}{\text{पृष्ठ क्षेत्रफल में वृद्धि}}$$

$$\Delta U = \frac{T\,(2l.\Delta x)}{(2l.\Delta x)}$$

या $\Delta U = T$

---

* किसी फिल्म अथवा द्रव सतह के स्वतन्त्र पृष्ठों की संख्या ज्ञात करने के लिये यह देखते हैं कि वायु उस फिल्म अथवा द्रव सतह के कितनी ओर सम्पर्क मे है। अत: किसी फिल्म मे 02, साबुन के बुलबुले में 02, द्रव के अन्दर वायु के बुलबुले मे 01 तथा वायु में द्रव की बूंद में 01 पृष्ठ होता है।



(a) 2 पृष्ठ (b) हवा में साबुन का बुलबुला 2 पृष्ठ (c) द्रव के अन्दर वायु का बुलबुला 1 पृष्ठ (d) हवा में द्रव की बूँद 1 पृष्ठ

● **जब किसी द्रव के पृष्ठ क्षेत्रफल को बढ़ाया जाता है तो द्रव के कुछ अणु द्रव के अन्दर से द्रव पृष्ठ पर आने लगते हैं। इन नये अणुओं को पृष्ठ पर आने के लिये पृष्ठ के ठीक नीचे वाले अणुओं के आकर्षण बल के विरुद्ध कार्य करना पड़ता है जिससे नये अणुओं की आन्तरिक (ऊष्मीय) ऊर्जा मे कमी आ जाती है. यह कमी अणुओं द्वारा किये गये कार्य के बराबर होती है तथा स्थितिज ऊर्जा के रूप में पृष्ठ मे, संचित हो जाती है अर्थात् द्रव पृष्ठ स्थित अणुओं को स्थितिज**

क्रमश:...

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

§ 6.24 द्रव-ठोस सम्पर्क में द्रव के मुक्त पृष्ठ की आकृति (Shape of Liquid Surface when Liquid is in Contact with Solid)

जब कोई द्रव किसी ठोस सतह (बर्तन आदि) के सम्पर्क में होता है तो ठोस सतह के समीप द्रव का मुक्त पृष्ठ सामान्यत: वक्रीय (curved) हो जाता है, चित्र 6.23। वास्तव में, द्रव के मुक्त पृष्ठ की आकृति द्रव के अणुओं के मध्य ससंजक बल तथा द्रव व ठोस के अणुओं में मध्य आसंजक बल के आपेक्षिक परिमाणों पर निर्भर करती है।

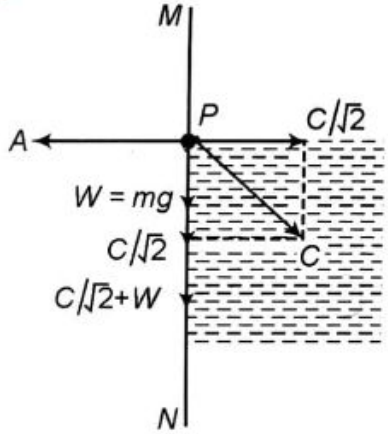
चित्र 6.23

माना किसी द्रव के मुक्त पृष्ठ पर स्थित द्रव का अणु P किसी ठोस सतह MN के सम्पर्क में है, चित्र 6.24। इस अणु पर निम्न बल आरोपित होंगे—

(i) नेट आसंजक बल (Resultant force of adhesion) A जो द्रव अणु P के समीप स्थित ठोस के अणुओं के आकर्षण के कारण, ठोस सतह के लम्बवत् दिशा में ठोस के अन्दर की ओर।

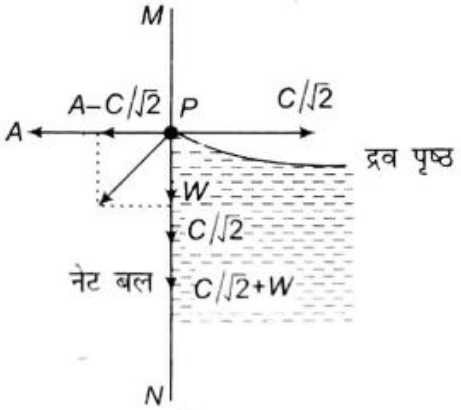
(ii) नेट ससंजक बल (Resultant force of cohesion) C, जो द्रव अणु P के समीप स्थित द्रव के अन्य अणुओं के आकर्षण के कारण, ऊर्ध्वाधर से 45° के कोण पर द्रव के अन्दर की ओर।

(iii) इसका भार $W = mg$, ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर।



चित्र 6.24

A तथा C के मान पदार्थों की प्रकृति (विशेषत: उनके घनत्वों) पर निर्भर करता है। बल C का क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर घटक $\frac{C}{\sqrt{2}}, \frac{C}{\sqrt{2}}$ चित्र 6.24 में प्रदर्शित है। **क्योंकि द्रव अपने आकार में होने वाले परिवर्तन का विरोध नहीं करता है अर्थात् द्रव में दृढ़ता नहीं होती है अत: द्रव में स्थायी रूप से स्पर्शरेखीय प्रतिबल (shearing or tangential stress) नहीं होता है, इस कारण द्रव की साम्य स्थिति में किसी भी बिन्दु पर द्रव का पृष्ठ; उस बिन्दु पर लगने वाले नेट बल के लम्बवत् होता है।** इन बलों के परिमाणों के अनुसार निम्नलिखित दशाएँ सम्भव हैं—



चित्र 6.25

(a) यदि $A > \frac{C}{\sqrt{2}}$ अथवा $0 \cdot 7\, C$ अर्थात् $C < A\sqrt{2}$ तब अणु P पर लगने वाला नेट बल द्रव से बाहर की ओर होगा अर्थात् ठोस में से गुजरेगा, चित्र 6.25। परिणामत: द्रव पृष्ठ अवतल आकृति धारण कर लेता है; जैसे काँच की केशनली

... ऊर्जा (U) तथा ऊष्मीय ऊर्जा (H) का योग नियत रहता है, अर्थात् $U + H$ = नियत $\Rightarrow \Delta U + \Delta H = 0 \Rightarrow \Delta H = -\Delta U = -W = -T\Delta A$ अत: ΔH तथा ΔU बराबर किन्तु विपरीत चिह्न के होते हैं अर्थात् यदि एक बढ़ता है तो दूसरा घटता है। इसलिए द्रव का पृष्ठ क्षेत्रफल बढ़ने पर अणुओं की स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि होती है तथा ऊष्मीय ऊर्जा में उतनी ही कमी होने के कारण पृष्ठ के ताप में कुछ कमी हो जाती है।

$\because \quad \Delta H = -\frac{W}{J}$ कैलोरी $= ms\Delta\theta \Rightarrow \Delta\theta = -\frac{W}{Jms}$

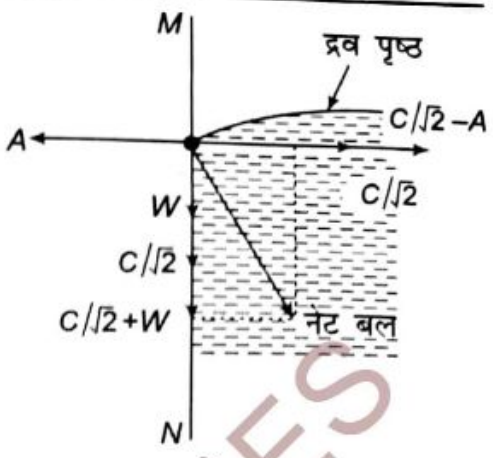
यहाँ सभी प्रतीक अपने सामान्य अर्थों में हैं। $\Delta\theta$ का मान ऋणात्मक होने के कारण ताप घट जाता है अर्थात् द्रव पृष्ठ का क्षेत्रफल बढ़ने से शीतलन (cooling) भी होता है अत: वातावरण से कुछ ऊष्मा (अणुओं की ऊष्मीय ऊर्जा में कमी के बराबर) पृष्ठ में आकर पुन: इसे प्रारम्भिक ताप पर ले आती है। स्पष्ट है कि द्रव पृष्ठ में स्थित अणु अपनी विशिष्ट स्थिति के कारण कुछ अतिरिक्त ऊर्जा रखते हैं। द्रव पृष्ठ के प्रति एकांक क्षेत्रफल की इस अतिरिक्त ऊर्जा (additional energy) को द्रव की पृष्ठ ऊर्जा कहते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

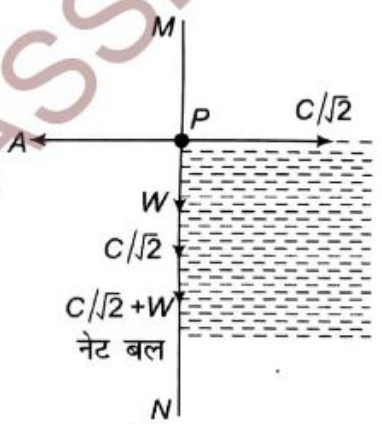
में पानी का मुक्त पृष्ठ अवतल होता है। इस स्थिति में द्रव ठोस पृष्ठ से चिपकता है अर्थात् बर्तन का पृष्ठ गीला हो जाता है।

(b) यदि $A < \frac{C}{\sqrt{2}}$ अथवा $0{\cdot}7\,C$ अर्थात् $C > A\sqrt{2}$ तब अणु P पर लगने वाला नेट बल, द्रव के अन्दर की ओर होता है, चित्र 6.26। परिणामत: द्रव पृष्ठ उत्तल आकृति धारण कर लेता है; जैसे काँच की केशनली में पारे का मुक्त पृष्ठ उत्तल होता है। इस स्थिति में द्रव ठोस से चिपकता नहीं है अर्थात् बर्तन का पृष्ठ गीला नहीं होता है।



चित्र 6.26

(c) यदि $A = \frac{C}{\sqrt{2}}$ अथवा $0{\cdot}7\,C$ अर्थात् $C = A\sqrt{2}$ तब अणु P पर लगने वाला नेट बल ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर होगा, चित्र 6.27। इस स्थिति में द्रव का मुक्त पृष्ठ समतल होता; जैसे चाँदी के बर्तन में जल का मुक्त पृष्ठ समतल होता है।



चित्र 6.27

§ 6.25 स्पर्श कोण (Angle of Contact)

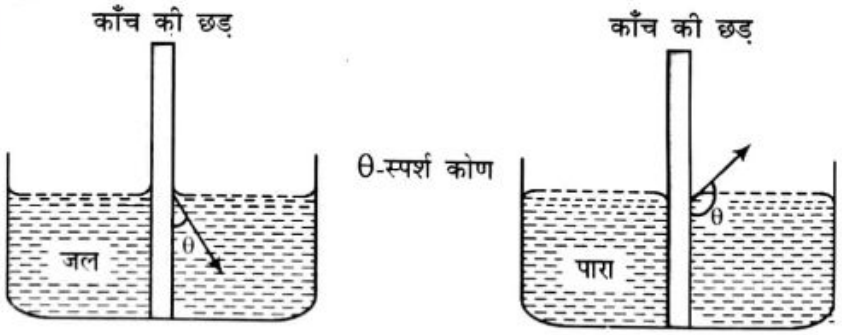
जब कोई द्रव किसी ठोस के सम्पर्क में आता है तो सामान्यत: सम्पर्क के स्थान पर द्रव पृष्ठ वक्रीय (curved) हो जाता है। जो द्रव, ठोस को भिगोते हैं (जैसे पानी तथा काँच) उनका तल अवतल (concave); तथा जो द्रव, ठोस को नहीं भिगोते हैं (जैसे पारा तथा काँच) उनका तल उत्तल (convex) हो जाता है, चित्र 6.28।

द्रव एवं ठोस के स्पर्श बिन्दु से द्रव के वक्र पृष्ठ पर खींची गयी स्पर्श रेखा तथा द्रव के अन्दर डूबी हुई ठोस की सतह के बीच बने कोण को स्पर्श कोण कहते हैं।

The angle between the tangent to the liquid surface at the point of contact and the solid surface inside the liquid, is called the angle of contact for that pair of solid and liquid.

चित्र 6.28 (a) तथा (b) से स्पष्ट है कि जो द्रव, ठोस को भिगोते हैं उनके लिए स्पर्श कोण न्यून कोण (Acute Angle < 90°) तथा जो द्रव ठोस को नहीं भिगोते हैं उनके लिए स्पर्श कोण अधिककोण (Obtuse Angle > 90°) होता है।

स्पर्श कोण का मान द्रव तथा उसके सम्पर्क में स्थित ठोस पृष्ठ की प्रकृतियों पर निर्भर करता है। किसी एक (द्रव-ठोस) युग्म के लिए इसका मान नियत रहता है। ताप बढ़ने पर द्रव का संसंजक बल घट जाता है, अत: स्पर्श कोण का मान भी घट जाता है।



(a) द्रव पृष्ठ अवतल (b) द्रव पृष्ठ उत्तल

चित्र 6.28

शुद्ध जल तथा स्वच्छ काँच के लिए स्पर्श कोण 0° तथा साधारण जल एवं काँच का स्पर्श कोण ≈ 8° जबकि पारा तथा काँच के लिए इसका मान लगभग 135° होता है। शुद्ध जल तथा चाँदी के लिए स्पर्श कोण 90° होता है।

● **Goniometer** is an instrument used to measure angle of contact as well as surface tension of any liquid or gas.

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

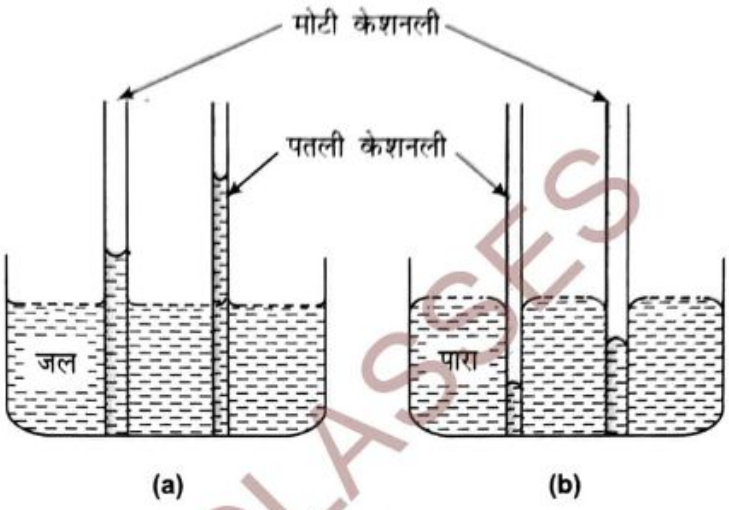
§ 6.26 केशिकात्व (Capillarity)

दोनों सिरों पर खुली तथा केश (बाल) के समान बारीक छिद्र वाली नली को केशनली (capillary tube) कहते हैं।

A glass tube of very small internal diameter and open at both the ends is called capillary tube.

जब किसी केशनली को जल में डुबाया जाता है तो जल केशनली में कुछ ऊँचाई तक चढ़ जाता है। जूरिन के नियमानुसार केशनली की त्रिज्या जितनी कम होती है जल उतनी ही अधिक ऊँचाई तक चढ़ता है, चित्र 6.29 (a)।

परन्तु जब केशनली को पारे में डुबाया जाता है तो पारा केशनली में नीचे उतर जाता है। पतली केशनली में पारा मोटी केशनली की अपेक्षा ज्यादा नीचे उतरता है, चित्र 6.29 (b)।



चित्र 6.29

केशनली में द्रव का ऊपर चढ़ना अथवा नीचे उतरना केशिकात्व (capillarity) कहलाता है।

Phenomenon of rise or depression of liquid in a capillary tube is called capillarity or capillary action.

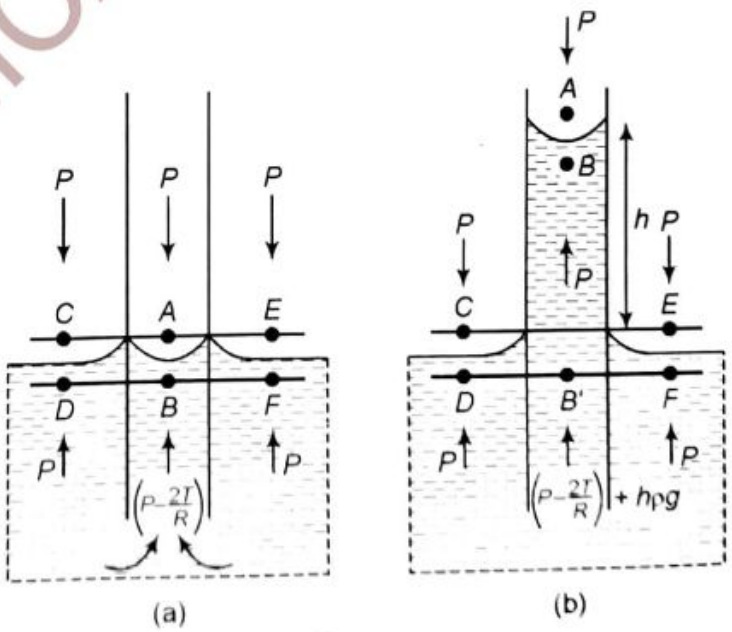
जिन द्रवों का काँच (केशनली) के साथ स्पर्श कोण न्यून कोण होता है वे द्रव केशनली में ऊपर चढ़ते हैं तथा जिनके लिए स्पर्श कोण अधिक कोण होता है वे द्रव केशनली में नीचे उतर जाते हैं।

§ 6.27 केशिकात्व का कारण (Cause of Capillarity)

केशिकात्व का मूल कारण द्रव का पृष्ठ तनाव है।

"Surface Tension of the liquid is the basic cause of capillarity."

जब काँच की केशनली को जल में खड़ा करते हैं तो केशनली में जल का मुक्त पृष्ठ अवतल (concave) होता है। माना इस समय जल केशनली में ऊपर नहीं चढ़ रहा है, चित्र 6.30 (a)। चित्र से स्पष्ट है कि केशनली में अवतल पृष्ठ के ठीक ऊपर वायु में स्थित बिन्दु A पर दाब, वायुमण्डलीय दाब P है। अत: द्रव पृष्ठ के दूसरी ओर अर्थात् उत्तल पार्श्व की तरफ पृष्ठ के ठीक नीचे द्रव में स्थित बिन्दु B पर दाब, द्रव पृष्ठ के अवतल पार्श्व वाले दाब P में $\frac{2T}{R}$ (अधिक्य दाब के कारण)* कम होगा, अर्थात् $\left(P-\frac{2T}{R}\right)$ होगा, जहाँ T द्रव का पृष्ठ तनाव है।



चित्र 6.30

* **द्रव पृष्ठ के दोनों पार्श्वों के बीच दाबान्तर**—**बूँद तथा बुलबुला** (Pressure difference across a Liquid Surface Drops and Bubbles)—द्रव के मुक्त पृष्ठ के समीप स्थित अणुओं के मध्य लगने वाले ससंजक बल के कारण द्रव का मुक्त पृष्ठ निम्न तीन स्वरूप में प्राप्त हो सकता है—

(i) समतल पृष्ठ (Plane Surface)—इस दशा में द्रव पृष्ठ पर उपस्थित अणु सभी दिशाओं में समान रूप से आकर्षित होता है। अत: अणु पर पृष्ठ तनाव के कारण लगने वाला परिणामी बल शून्य होता है; परिणामत: ससंजक दाब (Cohesion Pressure) नगण्य होता है, चित्र (i)।

(ii) अवतल पृष्ठ (Concave Surface)—इस दशा में द्रव पृष्ठ पर उपस्थित अणु पर पृष्ठ तनाव के कारण लगने वाले आकर्षण बलों का परिणामी घटक बल पृष्ठ के लम्बवत्, द्रव तल के बाहर-ऊपर की ओर लगता है; परिणामत: ससंजक-दाब (Cohesion Pressure) घट जाता है, चित्र (ii)।

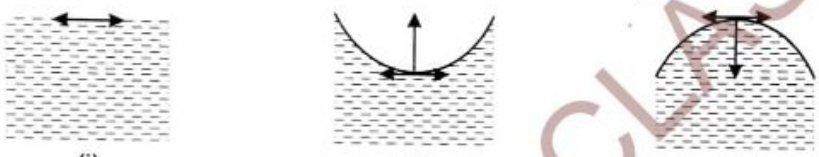
AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

चित्र 6.30 (a) से स्पष्ट है कि केशनली में जल पृष्ठ के ठीक ऊपर बिन्दु A पर तथा केशनली के बाहर समतल में बिन्दु C व E पर तथा इनके ठीक नीचे बिन्दु D व F पर दाब वायुमण्डलीय दाब P ही है। दाब की असमानता मात्र बिन्दु B पर है अर्थात् $(P_D = P_F) > P_B$, चूँकि द्रव उच्च दाब क्षेत्र से निम्न दाब क्षेत्र की तरफ बहता है तथा द्रव की साम्य अवस्था में किसी क्षैतिज तल में स्थित सभी बिन्दुओं पर दाब एक समान होता है। अत: केशनली के भीतर जल पृष्ठ के ठीक नीचे बिन्दु B पर दाब की कमी $\frac{2T}{R}$ को पूरा करने के लिए, केशनली के बाहर तथा द्रव तल के भीतर उच्च दाब क्षेत्र में जल केशनली के भीतर निम्न दाब क्षेत्र की ओर जाने लगता है। इस प्रकार केशनली में जल ऊपर चढ़ता है, परन्तु एक निश्चित ऊँचाई h पर पहुँचकर रुक जाता है, चित्र 6.30 (b); इस स्थिति में

$$P_A = P_B = P_C = P_D = P_E = P_F = P$$

तथा द्रव की संतुलन अवस्था में $P_D = P_{B'} = P_F = P$

(iii) उत्तल पृष्ठ (Convex Surface)—इस दशा में द्रव पृष्ठ पर उपस्थित अणु पर पृष्ठ तनाव के कारण लगने वाले आकर्षण-बलों का परिणामी घटक बल पृष्ठ के लम्बवत्, द्रव तल के भीतर-अन्दर की ओर लगता है; परिणामत: ससंजक-दाब (Cohesion-pressure) बढ़ जाता है चित्र (iii)।



*** गोलीय पृष्ठों के अवतल पार्श्व पर (द्रव की बूँद के भीतर) आधिक्य दाब की गणना** [Calculation of excess pressure on concave side (inside a drop of liquid) of a spherical surface]—पृष्ठ तनाव के कारण द्रव बूँद के मुक्त सतह पर स्थित अणुओं पर एक परिणामी बल पृष्ठ के अभिलम्बवत् भीतर की ओर कार्य करता है जिससे द्रव की बूँदें सिकुड़ने का प्रयास करती हैं। इस कारण अपने अन्दर के पदार्थ को संपीडित करती हैं जिससे उसका आन्तरिक दाब फलस्वरूप प्रतिक्रिया बल बढ़ जाता है। जब और अधिक संपीडन नहीं हो पाता है तब संतुलन की स्थिति आ जाती है। संतुलन की स्थिति में बूँद के अन्दर का दाब, इसके बाहर के दाब से अधिक होता है। किसी द्रव पृष्ठ के दोनों पार्श्वों पर दाबों के अन्तर को ही आधिक्य दाब कहते हैं।

माना द्रव का पृष्ठ तनाव T है तथा इसके एक बूँद की त्रिज्या r है। माना बूँद पर बाहर से भीतर की ओर दाब P तथा भीतर से बाहर की ओर प्रतिक्रिया दाब $(P + \Delta P)$ है, अत: दाब आधिक्य ΔP है, चित्र (A)।

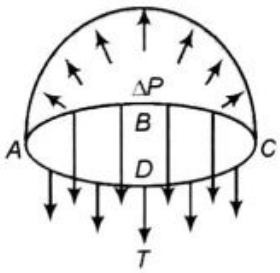
चित्र A

सन्तुलन की इस दशा में यदि द्रव बूँद को चित्र (B) के अनुसार दो बराबर गोलीय भाग (अर्द्ध बूँद या गोलार्ध) में बाँट दिया जाये तो किसी भी एक गोलार्ध (Hemisphere) माना ऊपर वाले गोलार्ध के समतल वृत्तीय सतह ABCD पर आधिक्य दाब (ΔP) के कारण ऊपर की ओर लगने वाला कुल धक्का बल $\Delta P\pi r^2$ होगा; तथा इस समतल वृत्तीय सतह ABCD के गोलीय किनारों पर पृष्ठ तनाव T के कारण नीचे की ओर लगने वाला कुल बल $T2\pi r$ होगा। चूँकि गोलार्ध सन्तुलन की दशा में है, अत:

$$\Delta P\pi r^2 = T2\pi r$$

या $$\Delta P = \frac{T2\pi r}{\pi r^2}$$

अत: $$\boldsymbol{\Delta P = \frac{2T}{r}}$$



चित्र B

साबुन के बुलबुले के अन्दर आधिक्य दाब (Excess pressure inside a soap bubble)—साबुन के बुलबुले में दो पृष्ठ सतह होती है अर्थात् यह गोलीय कोश या खोखले गोले की भाँति होता है जिसके अन्दर तथा बाहर की तरफ कुल दो पृष्ठ होते हैं। अत: इस दशा मे पृष्ठ तनाव के कारण कुल बल $2 \times 2\pi r \cdot T$ लगेगा। सन्तुलन की दशा मे बुलबुले के गोलार्ध के लिये—

$$\Delta P \cdot \pi r^2 = 2 \times 2\pi r \cdot T = 4\pi r \cdot T$$

या $$\Delta P = \frac{4\pi r \cdot T}{\pi r^2}$$

अत: $$\boldsymbol{\Delta P = \frac{4T}{r}}$$

(अवतल से उत्तल तल की ओर अर्थात् अन्दर से बाहर की ओर)

NKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अतः $$P_{B'} = \left(P - \frac{2T}{R}\right) + h\rho g = P \quad (\rho \text{ जल का घनत्व है})$$

या $$h\rho g = \frac{2T}{R} \qquad ...(i)$$

चित्र 6.31 के अनुसार, यदि केशनली के भीतर जल के वक्र तल (अवतल) की त्रिज्या R (water meniscus R) के स्थान पर केशनली की त्रिज्या r तथा काँच और जल के लिए स्पर्श कोण θ का प्रयोग करें, तब

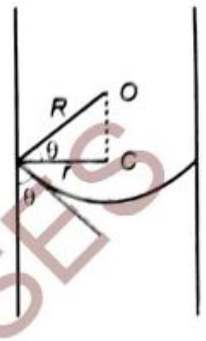
$$\cos\theta = \frac{r}{R}$$

$$\therefore \quad R = \frac{r}{\cos\theta} \qquad ... (ii)$$

समीकरण (ii) का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$h\rho g = \frac{2T}{\frac{r}{\cos\theta}} = \frac{2T\cos\theta}{r}$$

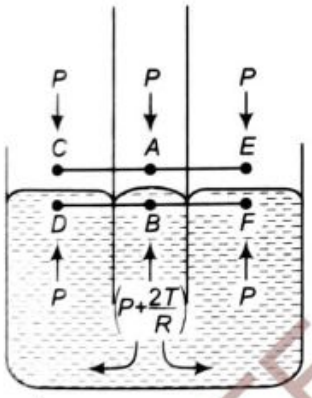
या $$\boldsymbol{h = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g}} \qquad ... (3)$$



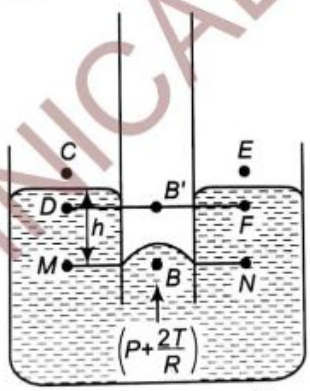
O = द्रव वक्र पृष्ठ का वक्रता केन्द्र
C = केशनली का वक्रता केन्द्र

चित्र 6.31

• **केशनली में द्रव (पारे) का उतरना** अनुच्छेद 6.27 की भाँति



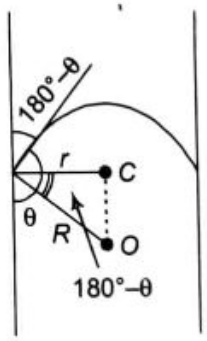
यहाँ
$P_A = P_C = P_D = P_E = P_F = P$



द्रव की संतुलन अवस्था में
$P_M = P_B = P_N$

$$P + h\rho g = P + \frac{2T}{R}$$

अर्थात् $h\rho g = \frac{2T}{R}$ ...(A)



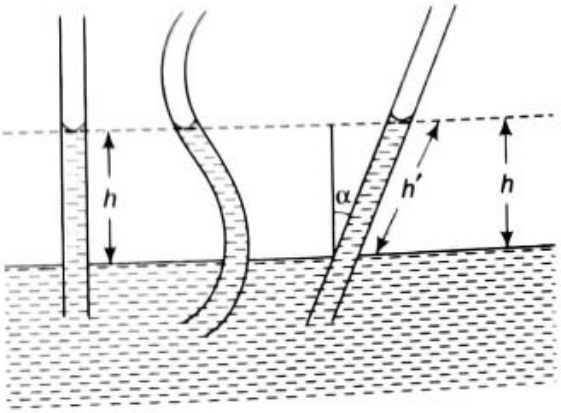
यहाँ $\frac{r}{R} = \cos(180° - \theta) = -\cos\theta$ तथा $90° < \theta < 180°$ के कारण $\cos\theta$ ऋणात्मक तथा $\frac{r}{R}$ धनात्मक होगा। अतः समीकरण (A) से $h = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g}$

•• केशिकात्व में अधिकतम दाब $\left(\frac{2T}{R}\right)$, द्रव के स्थैतिक दाब **(hydrostatic pressure)** $h\rho g$ द्वारा संतुलित होता है। अतः चित्रानुसार, द्रव के मुक्त पृष्ठ की वक्रता त्रिज्या R के समान मान के लिए, सभी केशनलियों में द्रव स्तम्भ की ऊर्ध्व ऊँचाई h समान होगी।

यदि केशनली α कोण से झुका दी जाये तो केशनली में चढ़े जल की ऊर्ध्व ऊँचाई h ही रहेगी, परन्तु नली में चढ़े द्रव की लम्बाई बढ़कर h' हो जायेगी, तब

$$\frac{h}{h'} = \cos\alpha$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{h' = \frac{h}{\cos\alpha} = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g\cos\alpha}} \qquad \begin{pmatrix} \because \cos\alpha < 1 \\ \therefore h' > h \end{pmatrix}$$



AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

समीकरण (3) से स्पष्ट है कि—

(i) r, ρ, g तथा θ का मान कम तथा T का मान अधिक होने पर h का मान अधिक होगा।

(ii) यदि $\theta > 90°$, तो $\cos\theta$ के ऋणात्मक होने के कारण h ऋणात्मक हो जायेगा अर्थात् द्रव केशनली में नीचे उतर जायेगा।

जूरिन का नियम (Jurin's Law)—समीकरण (3) से स्पष्ट है कि केशनली में जल तल की ऊँचाई, h

(i) $h \propto \frac{1}{r}$ (केशनली की त्रिज्या के व्युत्क्रमानुपाती) ... (iii)

अर्थात्, **पतली केशनली (कम r) में जल अधिक ऊँचाई तक तथा मोटी केशनलियों (ज्यादा r) में जल कम ऊँचाई तक चढ़ेगा, इसे जूरिन का नियम कहते हैं।** साथ ही

(ii) $h \propto \frac{1}{\rho}$ (जल के घनत्व के व्युत्क्रमानुपाती) तथा ... (iv)

(iii) $h \propto T$ (पृष्ठ तनाव के अनुक्रमानुपाती) होता है। ... (v)

आवश्यकता से कम लम्बी केशनली में द्रव का चढ़ना

किसी द्रव के लिए समीकरण (iii) से

$$h \propto \frac{1}{r} \text{ या } h \times r = \text{नियतांक}$$

अथवा

$$h_1 r_1 = h_2 r_2 = \text{नियतांक} \quad \text{... (vi)}$$

जब केशनली लम्बी होती है तो द्रव नली में इतनी ऊँचाई h_1 तक चढ़ जाता है कि समीकरण (vi) संतुष्ट हो जाये। परन्तु यदि केशनली की लम्बाई कम है, माना h_2 है जो आवश्यक ऊँचाई h_1 से कम है तो द्रव, नली की h_2 ऊँचाई तक चढ़कर फैल जाता है तथा इसकी वक्रता त्रिज्या बदलकर ($\because r \propto R$) इतनी हो जाती है कि सम्बन्ध $h_2 r_2 =$ नियतांक संतुष्ट हो सके। अत: द्रव छोटी केशनली के ऊपरी सिरे से फुहार के रूप में बाहर नहीं निकलेगा बल्कि ऊपरी सिरे पर फैल जायेगा।

§ 6.28 केशनली में द्रव के उन्नयन द्वारा पृष्ठ तनाव के सूत्र का निगमन (Derivation of the Formula for Surface Tension by the Rise of Liquid in a Capillary Tube)

माना r त्रिज्या की एक केशनली किसी द्रव में सीधी खड़ी की जाती है, माना केशनली में द्रव ऊपर नहीं चढ़ रहा है तथा द्रव का मुक्त पृष्ठ ACB अवतल है, चित्र 6.32 (a)। द्रव, पृष्ठ तनाव (T) के कारण नली की दीवार पर, द्रव पृष्ठ के स्पर्शरेखीय दिशा में, दीवार से θ कोण बनाते हुए, द्रव के अन्दर नीचे की ओर तनाव बल लगाता है, चित्र 6.32 (b)। प्रतिक्रिया स्वरूप नली की दीवार भी उतना ही बल द्रव के वृत्ताकार परिधि पर विपरीत दिशा में बाहर ऊपर की ओर लगाती है, चित्र 6.32 (c)। द्रव पर लगने वाले इस तनाव बल (T) का क्षैतिज घटक $T\sin\theta$, परिधि की प्रति एकांक लम्बाई पर बाहर की ओर कार्यरत है, अत: पूरी परिधि के लिए यह नेट बल शून्य होता है [चित्र 6.32 (d)] तथा ऊर्ध्वाधर घटक $T\cos\theta$, परिधि $2\pi r$ की प्रति एकांक लम्बाई पर ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर कार्य करता है, जिसका नेट बल $2\pi r \times T\cos\theta$ होता है, चित्र 6.32 (e)। द्रव केशनली में इसी बल के कारण ऊपर चढ़ता है तथा जब ऊपर चढ़े द्रव स्तम्भ का भार W (नीचे की ओर कार्यरत) का मान इस बल के बराबर हो जाता है तब द्रव का ऊपर चढ़ना रुक जाता है।

माना केशनली में चढ़े द्रव स्तम्भ की ऊँचाई h है, चित्र 6.32 (f)। यदि स्पर्श कोण θ का मान बहुत कम हो अर्थात् $\cos\theta \approx 1$ तब $r = R$ तथा मुक्त पृष्ठ मेनिस्कस को अर्द्धगोलाकार माना जा सकता है (चित्र 6.32 (g))। अत: केशनली में चढ़े द्रव स्तम्भ का आयतन

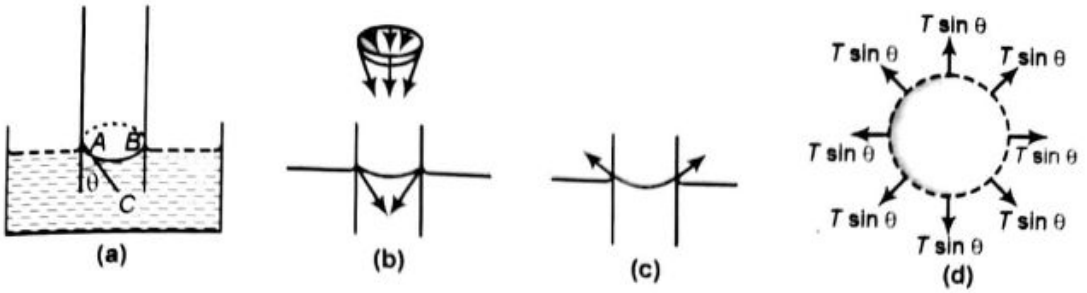
$$= h \text{ ऊँचाई के बेलन में भरे द्रव का आयतन} + \text{मेनिस्कस में भरे द्रव का आयतन}$$

$$= \pi r^2 h + (r \text{ ऊँचाई के बेलन का आयतन} - r \text{ त्रिज्या के अर्द्धगोले का आयतन})$$

$$= \pi r^2 h + \left[\pi r^2 . r - \frac{2}{3}\pi r^3\right]$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner



(a) (b) (c) (d)

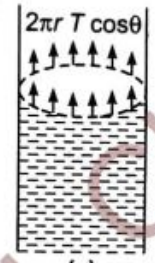
$$= \pi r^2 h + \frac{1}{3}\pi r^3$$

$$= \pi r^2\left[h + \frac{r}{3}\right]$$

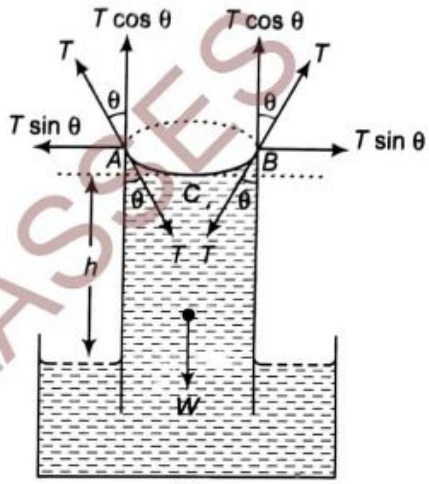
∴ केशनली में चढ़े द्रव स्तम्भ का भार

$$W = \pi r^2\left[h + \frac{r}{3}\right]\rho g$$

जहाँ ρ द्रव का घनत्व तथा g, उस स्थान पर गुरुत्वीय त्वरण है।



(e)



(f)

∴ द्रव की साम्यावस्था में,

$$2\pi r \times T\cos\theta = \pi r^2\left[h + \frac{r}{3}\right]\rho g$$

अथवा

$$h + \frac{r}{3} = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g}$$

$$h = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g} - \frac{r}{3}$$

उपरोक्त सूत्र से,

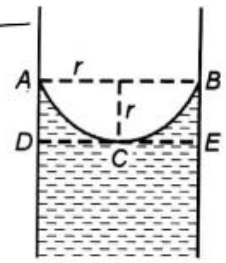
$$T = \frac{r\left[h + \frac{r}{3}\right]\rho g}{2\cos\theta}$$

$\cos\theta \approx 1$ रखने पर,

$$h = \frac{2T}{r\rho g} - \frac{r}{3} \qquad \text{तथा} \qquad T = \frac{r\left[h + \frac{r}{3}\right]\rho g}{2}$$

यदि r का मान काफी कम हो तो h का मान अधिक होगा, और तब $\frac{r}{3} << h$ होने के कारण, $\frac{r}{3}$ को छोड़ा जा सकता है; इस स्थिति में;

$$h = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g} \qquad \text{तथा} \qquad T = \frac{rh\rho g}{2\cos\theta}$$



(g)

चित्र 6.32

§ 6.29 पृष्ठ तनाव पर अन्य कारकों का प्रभाव (Effect of other factors on Surface Tension)

(i) संदूषण का प्रभाव (Effect of Contamination)—यदि जल की सतह पर धूल, ग्रीस, तेल या कोई अन्य चिकनी चीज पड़ी हो तो पृष्ठ तनाव घट जायेगा।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(ii) विलेय का प्रभाव (Effect of Solute)—यदि विलेय (Solute) बहुत घुलनशील (जैसे नमक) है तो जल का पृष्ठ तनाव बढ़ जाता है। यदि विलेय कम घुलनशील (जैसे साबुन, फिनोल आदि) है तो पृष्ठ तनाव घट जाता है।

(iii) ताप का प्रभाव (Effect of Temperature)—ताप बढ़ने पर सभी तरल बल का मान घट जाता है। अत: पृष्ठ तनाव घट जाता है।

§ 6.30 केशिकात्व के उपयोग तथा व्यावहारिक उदाहरण (Applications and Examples of Capillarity)

(i) सोखता कागज (Blotting Paper), चॉक आदि केशिकात्व के कारण ही स्याही सोखते हैं।

(ii) लालटेन (lamp) में मिट्टी का तेल, सूत की बत्ती (wick) में बनी बारीक केशनलियों (केशिकात्व) के कारण ही ऊपर चढ़ता रहता है और बत्ती जलती रहती है।

(iii) वर्षा होने पर किसान खेत की जुताई कर देते हैं ताकि मिट्टी में बनी केशनलियाँ टूट जाएँ और नमी नीचे बनी रहे। यह पौधों के काम आती है। यदि खेत की जुताई न की जाये तो मिट्टी में बनी असंख्य केशनलियों के द्वारा पानी ऊपर तक आ वाष्प बनकर उड़ जाएगा।

(iv) पानी से भरी बाल्टी में तौलिये का एक सिरा डुबा देने पर पानी तौलिये के धागों के बीच बनी असंख्य केशनलियों में चढ़ने लगता है तथा धीरे-धीरे तौलिये के दूसरे सिरे तक पहुँच जाता है और पूरा तौलिया भीग जाता है।

(v) लिखने की निब की नोंक बीच में चिरी होती है; जो केशनली की तरह व्यवहार करती है। स्याही में इसे डुबाने पर स्याही निब तक चढ़ जाती है। फलत: निब से हम सुविधापूर्वक लिखाई कर सकते हैं जबकि रिफिल पेन से लिखाई गुरुत्व के कारण होती है, पृष्ठ तनाव के कारण नहीं।

(vi) पेड़-पौधों को दिया गया पानी उनकी जड़ों तथा तनों में बनी असंख्य केशनलियों के द्वारा चढ़कर ही पेड़-पौधों की पत्तियों तथा टहनियों तक पहुँचता है।

साधित आंकिक उदाहरण (Solved Numerical Examples)

उदाहरण 14 : 12 सेमी त्रिज्या की एक प्लेट पानी में क्षैतिज डूबी हुई है। प्लेट को पानी की सतह से बाहर निकालने के लिए आवश्यक बल की गणना कीजिए। दिया है पानी का पृष्ठ तनाव $= 72 \times 10^{-3}$ न्यूटन-मीटर।

हल— प्लेट की कुल लम्बाई जो पानी के सम्पर्क में है = प्लेट का परिमाप

अत: प्रश्नानुसार, परिमाप $P = 2\pi r$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 12 \times 10^{-2}$$

$$= 0{\cdot}75 \text{ मीटर}$$

अत: आवश्यक बल = पृष्ठ तनाव × लम्बाई

या $F = 72 \times 10^{-3} \times 0{\cdot}75$

$F = 5{\cdot}4 \times 10^{-2}$ न्यूटन

उदाहरण 15 : 20 सेमी भुजा वाला एक वर्गाकार फ्रेम साबुन के घोल में डाला जाता है। बाहर निकालने पर फ्रेम पर एक फिल्म बन जाती है। यदि घोल का पृष्ठ तनाव 0·09 न्यूटन/मीटर हो तो फ्रेम पर लगने वाले बल का मान ज्ञात कीजिए।

हल—माना वर्गाकार फ्रेम के भुजा की लम्बाई l है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

चूँकि फिल्म की दो सतह होती हैं, अत: फ्रेम पर बने फिल्म की प्रभावी लम्बाई 2 (4*l*) होगी जहाँ 4 *l* फिल्म का परिमाप है।

चूँकि, $T = \frac{F}{8l}$

अत: $F = T \times 8l$

$= 0{\cdot}09 \times 8 \times 20 \times 10^{-2}$

$F = \mathbf{0{\cdot}144}$ न्यूटन

उदाहरण 16 : एक तार के छल्ले पर 3 सेमी × 4 सेमी की साबुन की फिल्म बनी हुई है। यदि फिल्म का आकार 4 सेमी × 5 सेमी कर दिया जाय तो इस क्रिया में किये गये कार्य की गणना कीजिए। घोल का पृष्ठ तनाव 42×10^{-3} न्यूटन/मीटर है।

हल—फिल्म का आरम्भिक क्षेत्रफल $A_1 = 3 \times 10^{-2} \times 4 \times 10^{-2}$ मीटर^2

$= 12 \times 10^{-4}$ मीटर^2

फिल्म का अंतिम क्षेत्रफल $A_f = 4 \times 10^{-2} \times 5 \times 10^{-2}$ मीटर^2

फिल्म के क्षेत्रफल में हुई वृद्धि $\Delta A = (A_f - A_i) = (20 \times 10^{-4}) - (12 \times 10^{-4})$ मीटर^2

$= 8 \times 10^{-4}$ मीटर^2

चूँकि फिल्म की दो सतह होती हैं, अत: फिल्म के क्षेत्रफल में हुई कुल वृद्धि

$\Delta A = 2 \times 8 \times 10^{-4}$ मीटर^2

$= 16 \times 10^{-4}$ मीटर^2

अब पृष्ठ तनाव के सूत्र $T = \frac{W}{\Delta A}$ से

किया गया कार्य $W = T \times \Delta A$

मान रखने पर, $W = 42 \times 10^{-3} \times 16 \times 10^{-4}$ जूल

$W = \mathbf{6{\cdot}72 \times 10^{-5}}$ जूल

उदाहरण 17 : किसी साबुन की फिल्म पर 6×10^{-5} जूल कार्य करके उसका क्षेत्रफल 24 सेमी^{2} से बढ़ाकर 64 सेमी^{2} कर दिया जाता है। फिल्म का पृष्ठ तनाव ज्ञात कीजिए।

हल—प्रश्नानुसार, $W = 6 \times 10^{-5}$ जूल

फिल्म का प्रारम्भिक क्षेत्रफल, $A_i = 24$ सेमी^{2}

$= 24 \times 10^{-4}$ मीटर^2

फिल्म का अन्तिम क्षेत्रफल, $A_f = 64$ सेमी^{2}

$= 64 \times 10^{-4}$ मीटर^2

चूँकि साबुन की फिल्म में दो पृष्ठ होते हैं, अत: फिल्म के क्षेत्रफल में हुई कुल वृद्धि

$\Delta A = 2 \times (A_f - A_i)$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$= 2 \times (64 \times 10^{-4} - 24 \times 10^{-4}) \text{ मीटर}^2$$
$$= 80 \times 10^{-4} \text{ मीटर}^2$$

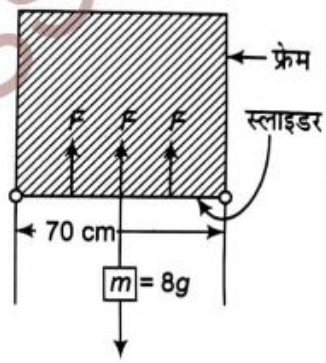
अत: पृष्ठ तनाव के सूत्र $T = \frac{W}{\Delta A}$ से

$$T = \frac{6 \times 10^{-5}}{80 \times 10^{-4}} \text{ जूल/मीटर}^2$$

$$\boldsymbol{T = 7 \cdot 5 \times 10^{-3} \text{ जूल/मीटर}^2}$$

उदाहरण 18 : एक U–आकार का (स्लाइडर) फ्रेम साबुन के घोल में डुबाकर निकाला जाता है। फ्रेम तथा स्लाइड के मध्य बने फिल्म को 8 ग्राम के द्रव्यमान (स्लाइडर द्रव्यमान सहित) द्वारा संतुलित किया जाता है। यदि स्लाइडर की लम्बाई 70 सेमी हो तो फिल्म के पृष्ठ तनाव की गणना कीजिए।

हल—चूँकि फिल्म लगाये गये द्रव्यमान द्वारा संतुलन में (अर्थात् स्थिर) है तथा फिल्म के दो पृष्ठ होते हैं। अत: पृष्ठ तनाव के कारण कुल बल



$$F = T \times 2l \quad \text{... (i)}$$

परन्तु संतुलन की दशा में

$$F = mg \quad \text{...(ii)}$$

अत: समीकरण (i) तथा (ii) से

$$T \times 2l = mg$$

या $$T = \frac{mg}{2l}$$

$$= \frac{8 \times 10^{-3} \times 9 \cdot 8}{2 \times 70 \times 10^{-2}} \text{ न्यूटन/मीटर}$$

$$\boldsymbol{T = 0 \cdot 056 \text{ न्यूटन/मीटर}}$$

उदाहरण 19 : 1 मिमी त्रिज्या वाले जल की एक बूँद का विभाजन कर समान आकार की 1000 बूँदें बना दी जाती हैं। यदि जल का पृष्ठ तनाव 0·072 न्यूटन/मीटर हो तो किए गए कार्य की गणना कीजिए।

हल— बड़ी बूँद का आयतन = 1000 × छोटी बूँद का आयतन

माना बड़ी बूँद की त्रिज्या R तथा छोटी बूँद की त्रिज्या r है, तो

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 1000 \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

या $$R^3 = 1000\, r^3 = 10^3 \times r^3$$

या $$R = 10\, r$$

या $$r = \frac{R}{10}$$

बड़ी बूँद का क्षेत्रफल $A_i = 4\pi R^2$

1000 छोटी बूँदों का पृष्ठ क्षेत्रफल $A_f = 1000 \times 4\pi r^2$

$$= 1000 \times 4\pi \left[\frac{R}{10}\right]^2$$
$$= 40\, \pi\, R^2$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: क्षेत्रफल में हुई वृद्धि $\Delta A = A_f - A_i$

$$\Delta A = 40\pi R^2 - 4\pi R^2$$
$$= \pi R^2 (40 - 4)$$
$$= \frac{22}{7} \times (10^{-3})^2 \times 36$$
$$= 1{\cdot}13 \times 10^{-4} \text{ मीटर}^2$$

अत: किया गया कार्य

$$W = T \times \Delta A$$
$$= 0{\cdot}072 \times 1{\cdot}13 \times 10^{-4}$$
$$W = \mathbf{8{\cdot}14 \times 10^{-6}} \text{ जूल}$$

उदाहरण 20 : यदि जल की बहुत-सी छोटी बूँदें जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या r है, मिलकर R त्रिज्या की एक बड़ी बूँद बनायें तो सिद्ध कीजिए कि ताप में निम्न वृद्धि होगी—

$$\frac{3S}{J}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right),$$

जहाँ S जल का पृष्ठ-तनाव तथा J ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक है।

हल—जब जल की बहुत-सी छोटी बूँदें मिलकर एक बड़ी बूँद बनाती हैं, तो जल का पृष्ठ-क्षेत्रफल घटता है जिससे पृष्ठ-ऊर्जा भी घटती है। पृष्ठ ऊर्जा में कमी घटने वाली पृष्ठ की ऊर्जा के बराबर है।

माना छोटी बूँदों की संख्या n है जो आपस में मिलती हैं।

∴ छोटी बूँदों का पृष्ठ क्षेत्रफल $= n \times 4\pi r^2$

बड़ी संयुक्त बूँदों का पृष्ठ क्षेत्रफल $= 4\pi R^2$

पृष्ठ क्षेत्रफल में कमी $= n \times 4\pi r^2 - 4\pi R^2$

यदि इस क्रिया में मुक्त होने वाली ऊर्जा W हो, तो

W = पृष्ठ क्षेत्रफल में कमी × पृष्ठ तनाव

$$= 4\pi (nr^2 - R^2) \times S \quad \text{... (i)}$$

यह ऊर्जा बूँद का ताप बढ़ाने में व्यय होती है। माना ताप में वृद्धि t है। यदि जल का घनत्व तथा विशिष्ट ऊष्मा प्रत्येक 1 है, तब संयुक्त बूँद द्वारा अवशोषित ऊष्मा H होगी

H = द्रव्यमान × विशिष्ट ऊष्मा × t

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 \times 1 \times 1 \times t$$
$$= \frac{4}{3}\pi R^3 t \quad \text{... (ii)}$$

अब W का मान समीकरण (i) से तथा H का मान समीकरण (ii) से जूल के सूत्र में रखने पर

$$W = JH$$
$$4\pi (nr^2 - R^2) \times S = J \times \frac{4}{3}\pi R^3 t$$
$$t = \frac{3S}{J}\left(\frac{nr^2}{R^3} - \frac{1}{R}\right) \quad \text{... (iii)}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

चूँकि n छोटी बूँदों का सम्पूर्ण आयतन वही है जो संयुक्त बूँद का है, अत:

$$n \times \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

या $$nr^3 = R^3$$

या $$\frac{nr^2}{R^3} = \frac{1}{r}$$

$\frac{nr^2}{R^3}$ का यह मान समीकरण (iii) में रखने पर

$$t = \frac{3S}{J}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$ इति सिद्धम्।

उदाहरण 21 : 1·0 mm त्रिज्या की बूँद को समान आकार की 10^6 बूँदों में परिवर्तित करने की क्रिया में, नियत ताप पर कितना कार्य करना पड़ेगा, यदि जल का पृष्ठ तनाव 64×10^{-3} जूल/मीटर है?

हल—माना छोटी बूँद व बड़ी बूँद की त्रिज्या क्रमश: r तथा R हैं।

10^6 छोटी बूँदों का आयतन = 1 बड़ी बूँद का आयतन

अत: $$10^6 \times \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 1 \times \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$$

या $$10^6 \times r^3 = R^3$$

$$r = \frac{R}{10^2}$$

अब, पृष्ठ क्षेत्रफल में वृद्धि $$\Delta A = 10^6 \times 4\pi r^2 - 4\pi R^2$$

$$= 4\pi\,(10^6 r^2 - R^2)$$

अब, $$= 4\pi\left[10^6\left(\frac{R}{10^2}\right)^2 - R^2\right]$$ $\left(r = \frac{R}{10^2}\right.$ रखने पर)

$$= 4\pi\,[10^2 R^2 - R^2]$$

$$= 4\pi\,(99R^2)$$

$$= 396\,\pi\,R^2$$

किया गया कार्य $$W = T \times \Delta A$$

$$= 64 \times 10^{-3} \times 396\pi\,R^2$$

$$= 64 \times 10^{-3} \times 396\pi\,(10^{-3})^2 \qquad [\because\ R = 1\text{ mm} = 10^{-3}\text{m}]$$

$$= 7{\cdot}96 \times 10^{-5}$$ जूल

उदाहरण 22 : एक केशनली में पानी 2 सेमी ऊँचा चढ़ता है। एक अन्य केशनली जिसकी त्रिज्या पहली की एक तिहाई है, उसमें पानी किस ऊँचाई तक चढ़ेगा? यदि प्रथम केशनली को ऊर्ध्वाधर रेखा से 60° झुका दें तो नली में पानी की स्थिति क्या होगी? **(UP BTE 2000)**

हल—जूरिन के नियम से,

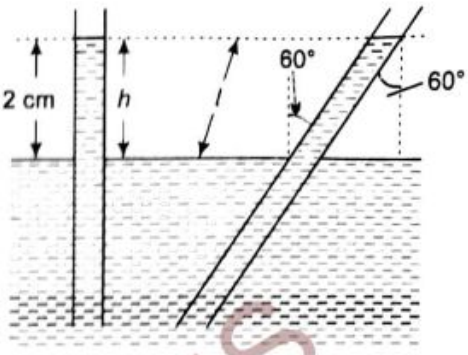
$$h_1 r_1 = h_2 r_2$$

$$h_2 = \frac{h_1 r_1}{r_2}$$ [यहाँ $r_2 = \frac{r_1}{3}$, $h_1 = 2$ सेमी]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$= \frac{2 \times r_1}{\frac{r_1}{3}} = 6 \text{ सेमी}$$



प्रथम केशनली की 60° पर झुकी स्थिति चित्र में दर्शायी गयी है। माना इस स्थिति में पानी, नली में l सेमी लम्बाई तक है, तो चित्र से

$$\frac{h}{l} = \cos 60°$$

या $$l = \frac{h}{\cos 60°} \qquad (\because\ h = 2 \text{ सेमी})$$

$$= \frac{2}{1/2} = \mathbf{4 \text{ सेमी}}$$

उदाहरण 23 : एक केशनली में जल चढ़ता है जबकि पारे का तल गिर जाता है, क्यों? पृष्ठ तनाव पर—(i) अशुद्धता (ii) ताप का क्या प्रभाव पड़ता है? **(UP BTE 2008, 2013)**

हल—केशनली में जल चढ़ता है जबकि पारा नीचे गिरता है; इसका मुख्य कारण स्पर्श कोण (contact angle) होता है। जिन द्रवों के लिए स्पर्श कोण न्यून कोण (काँच को भिगोने वाला द्रव) होता है वे केशनली में ऊपर चढ़ते हैं जबकि जिनके स्पर्श कोण, अधिक कोण (काँच को न भिगोने वाला द्रव) होता है वे केशनली में नीचे उतर जाते हैं। यही कारण है कि केशनली में जल ऊपर चढ़ जाता है जबकि पारा नीचे गिर जाता है। केशिकात्व का कारण द्रव का पृष्ठ तनाव या अन्तराण्विक बल होता है।

(i) अशुद्धता के कारण, पृष्ठ तनाव घट जाएगा क्योंकि ससंजक बल घट जाएगा।

(ii) ताप के बढ़ने पर पृष्ठ तनाव घट जाता है क्योंकि ससंजक बल घट जाता है।

§ 6.31 तरल घर्षण (Fluid Friction)

तरल पदार्थ बह सकते हैं, अत: इनकी कोई निश्चित आकृति नहीं होती है। पार्श्विक आधार (Lateral Support) देने पर यह उसी आकृति में आ जाते हैं।

यदि किसी बर्तन में कोई द्रव लेकर तेजी से घुमाया जाये तथा यदि कुछ समय पश्चात् द्रव को घुमाना बन्द कर दिया जाये तो भी द्रव थोड़ी देर तक घूमता रहता है तथा धीरे-धीरे रुक जाता है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि द्रव के विभिन्न परतों के मध्य एक प्रकार का गति का विरोधी बल कार्य करता है जो द्रव के गति का विरोध करता है तथा शीघ्र ही द्रव को विरामावस्था में ला देता है। यदि यह घर्षण बल न होता तो द्रव सदैव घूमता रहता। चूँकि यह घर्षण बल द्रव के विभिन्न पर्तों के मध्य कार्य करता है, इसलिए इसे **आन्तरिक घर्षण** (Internal Friction) या **तरल घर्षण** (Fluid Friction) कहते हैं।

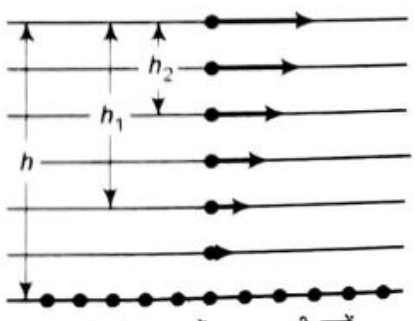
तरल घर्षण अथवा आन्तरिक घर्षण को श्यानता कहते हैं।

Fluid friction or internal friction of the fluid is known as viscosity*.

श्यानता (Viscosity)

जब किसी द्रव की एक परत उसी द्रव के अन्य परत पर फिसलती है तब दोनों परतों के मध्य एक घर्षण बल (friction force) कार्य करता है जो परतों की आपेक्षिक गति (relative motion) का विरोध करता है।

चित्र 6.33 में एक द्रव की विभिन्न परतों के स्थितियों एवं वेग को दर्शाया गया है।



विभिन्न गहराइयों पर द्रव की परतें एवं वेग वेक्टर का परिमाण

चित्र 6.33

*Viscosity—A measure of the resistance to flow that a fluid offers when it is subjected to shear stress.

AKOTECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

किसी स्थिर द्रव को द्रव कण से बने विभिन्न परतों से बना हुआ मान सकते हैं क्योंकि चित्रानुसार h गहराई पर स्थित द्रव के सभी कणों पर समान दबाव क्षेत्र (वायुमण्डलीय दाब + h गहराई तक भरे हुए द्रव का दाब $h\rho g$) होता है।

अत: एक समान दबाव क्षेत्र के ये कण एक परत का निर्माण करते हैं। इसी प्रकार भिन्न-भिन्न गहराइयों $h_1, h_2, h_3, ...$ आदि पर स्थित द्रव कण भिन्न-भिन्न परतों का निर्माण करते हैं।

स्वभाविक है द्रव की सबसे ऊपरी परत पर केवल वायुमण्डलीय दाब होता है तथा सबसे निचली परत पर वायुमण्डलीय दाब के साथ-साथ द्रव गहराई के भार का दाब भी होता है। अर्थात् द्रव परतों पर दाब ऊपर से नीचे बढ़ते क्रम में होता है।

यदि द्रव बहने के लिए स्वतन्त्र हो तो सबसे ऊपरी परत का वेग अधिकतम तथा धीरे-धीरे गहराई बढ़ने पर क्रमानुसार वेग न्यूनतर होता जाता है। द्रव प्रवाह की दशा में घर्षण बल के कारण प्रत्येक परत अपने ऊपर की परत को पीछे खींचती है। इसी प्रकार प्रत्येक परत अपने नीचे की परत को आगे की ओर खींचती है। अर्थात् परतों पर आन्तरिक स्पर्शरेखीय बल (tangential forces) कार्यरत होते हैं जो परतों के आपेक्षिक गति का विरोध करते हैं। ये बल **श्यान बल** (viscous force) कहलाते हैं।

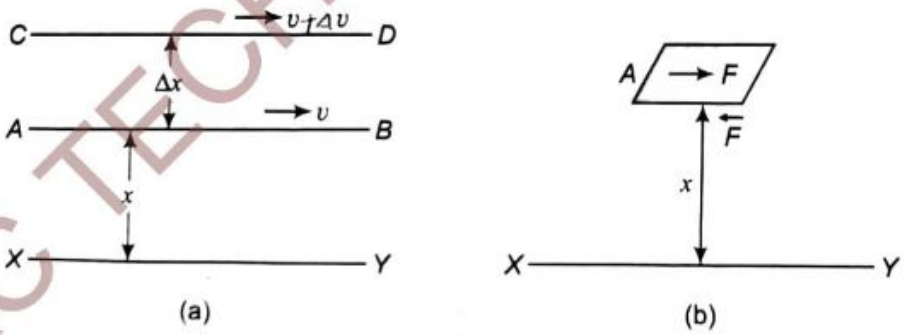
तरलों का वह गुण जिसके कारण तरल के विभिन्न सतहों के मध्य आपेक्षिक गति का विरोध होता है श्यानता कहलाता है।

Viscosity is the property of liquid by virtue of which it opposes the relative motion between its adjacent layers.

वेग प्रवणता (Velocity Gradient)

एक द्रव किसी क्षैतिज तल XY पर प्रवाहित हो रहा है चित्र (6.34)। जो परत क्षैतिज तल के सम्पर्क में है, स्थिर रहती है। जैसे-जैसे क्षैतिज तल से परतों की ऊँचाई बढ़ती जाती है, उनका वेग भी बढ़ता जाता है। द्रव की सबसे ऊपरी परत का वेग अधिकतम होता है।

माना द्रव की परत AB की क्षैतिज तल XY से ऊँचाई x है तथा परत CD की ऊँचाई $x + \Delta x$ है। परत AB तथा CD का XY दिशा में वेग क्रमश: v एवं $v + \Delta v$ है। परत AB व CD के मध्य की दूरी Δx है तथा इस Δx ऊँचाई में अभिलम्ब वेग-परिवर्तन Δv है।



चित्र 6.34 : द्रव का क्षैतिज तल XY पर प्रवाह

द्रव की सबसे ऊपर की दो परतों AB तथा CD के मध्य द्रव के प्रवाह की दिशा के अभिलम्बवत् प्रति एकांक दूरी के लिए वेग परिवर्तन $\Delta v / \Delta x$ है। यह '**वेग प्रवणता**' (velocity gradient) कहलाता है।

अत:

$$\text{वेग प्रवणता} = \frac{\Delta v}{\Delta x} \qquad ...(14)$$

श्यानता गुणांक (Coefficient of Viscosity)

न्यूटन ने श्यानता सम्बन्धी विभिन्न प्रयोगों द्वारा यह निष्कर्ष निकाला कि किसी तरल के धारा-रेखीय प्रवाह के लिए दो समान्तर परतों के मध्य उत्पन्न श्यान बल (viscous force) निम्न तीन तथ्यों पर निर्भर करता है, (चित्र 6.34 (a) तथा (b))—

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(a) यह बल उन परतों के सम्पर्क क्षेत्रफल A के समानुपाती होता है।

अर्थात् $F \propto A$ ... (i)

(b) यह बल उन परतों के बीच लम्बवत् दूरी Δx के व्युत्क्रमानुपाती होता है। अर्थात्

$$F \propto \frac{1}{\Delta x} \quad \text{... (ii)}$$

(c) यह बल उन परतों के आपेक्षिक वेग Δv के समानुपाती होता है।

अर्थात् $F \propto \pm \Delta v$ ... (iii)

उपरोक्त समकीकरण (i), (ii) तथा (iii) से—

$$F \propto \pm \frac{A \Delta v}{\Delta x}$$

अथवा $$\boxed{F = \pm \eta \frac{A.\Delta v}{\Delta x}} \quad \text{... (15)}$$

जहाँ η (ईटा) एक नियतांक है जिसे तरल का **श्यानता गुणांक** (Coefficient of viscosity) कहते हैं। इसका मान तरल पदार्थ की प्रकृति तथा ताप पर निर्भर करता है।

$\Delta v / \Delta x$ को **'दूरी के सापेक्ष वेग परिवर्तन की दर'** या **वेग प्रवणता** (velocity gradient) कहते हैं।

माना, A = इकाई क्षेत्रफल

$\frac{\Delta v}{\Delta x}$ = इकाई वेग प्रवणता

तब $F = \pm \eta$

अत: **''किसी तरल पदार्थ का श्यानता गुणांक उस तल के अन्दर इकाई क्षेत्रफल वाली दो परतों के मध्य कार्यकारी श्यान बल (viscous force) है जबकि उन परतों के मध्य इकाई वेग प्रवणता हो।''**

Therefore, coefficient of viscosity of liquid is equal to the magnitude of tangential viscous force per unit contact area of surface between two layers having unit velocity gradient between them.

समीकरण (15) में ± चिह्न यह दर्शाते हैं कि श्यान बल F दो परतों के मध्य अन्योन्य बल (mutual interaction force) है क्योंकि द्रव की किसी एक परत पर उसके ऊपर वाली परत आगे की ओर बल लगाती है तथा नीचे वाली परत उस पर पीछे की ओर बल लगाती है।

श्यानता गुणांक (η) का S.I. मात्रक

समीकरण (15) से, $$\eta = \frac{F}{\frac{A.\Delta v}{\Delta x}}$$

$$\eta \text{ के मात्रक} = \frac{\text{बल का मात्रक}}{\text{क्षेत्रफल का मात्रक} \times \text{वेग प्रवणता का मात्रक}}$$

$$= \frac{\text{न्यूटन}}{\text{मीटर}^2 \times \frac{\text{मीटर / सेकण्ड}}{\text{मीटर}}}$$

$$= \text{न्यूटन-सेकण्ड-मीटर}^{-2}$$

$$= \text{kg.m s}^{-2}\text{.s.m}^{-2}$$

$$= \text{kg.m}^{-1}\text{.s}^{-1}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$= \text{Pa s}$ (पास्कल सेकण्ड)

अथवा $1\ \text{Pa s} = \text{N m}^{-2}\text{s} = 1\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$

C.G.S. प्रणाली में, η का मात्रक poise (प्वॉज) है।

1 poise $= 1\text{g cm}^{-1}\text{s}^{-1}$ (ग्राम प्रति सेमी प्रति सेकण्ड)

1 Pa $= 10$ poise (प्वॉज)

1 Pa $= 1000$ centipoise (सेंटी प्वॉज)

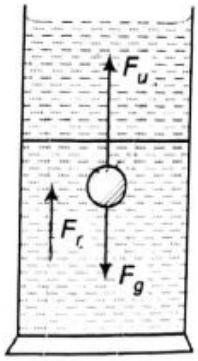
$$\eta \text{ की विमा} = \frac{[MLT^{-2}]}{[M^0L^2T^0]\dfrac{[M^0LT^{-1}]}{[M^0LT^0]}}$$

$$\eta \text{ की विमा} = [ML^{-1}T^{-1}]$$

η का मान प्रयोगशाला में ओस्टवाल्ड विस्कोमीटर या स्टोक के नियम (Stoke's law) से निकाल सकते हैं।

स्टोक के नियम (Stoke's Law)

सर जॉर्ज ग्रेबियल स्टोक नामक वैज्ञानिक ने यह सिद्ध किया कि r त्रिज्या की कोई छोटी गोली यदि किसी श्यान द्रव में गिर रही हो, तो गोली के सम्पर्क वाली द्रव की परत गोली के साथ सरकती है तथा गोली के वेग से गति करना चाहती है जबकि दूर स्थित परत विरामावस्था में रहती हैं। इस प्रकार गोली की गति से द्रव की विभिन्न परतों के मध्य आपेक्षिक गति उत्पन्न हो जाता है। फलत: द्रव में श्यान बल (viscous force) पैदा हो जाता है जो गोली की गति का विरोध करता है। इसका मान गोली के वेग के साथ-साथ बढ़ता जाता है और एक स्थिति में विरोधी श्यान बल का मान गोली को गति देने वाले बल के मान के बराबर हो जाता है। इस दशा में गोली की चाल नियत हो जाती है। इसे गोली की "अन्तिम चाल" अथवा "सीमान्त चाल (terminal speed)" कहते हैं। इस दशा में उस पर लगने वाला श्यान बल $6\pi r\eta v$ होता है, जहाँ v सीमान्त चाल है।



चित्र 6.35

उनके अनुसार, जब एक छोटी गोली जिसकी त्रिज्या r तथा घनत्व ρ_s है, ρ_L घनत्व के श्यान द्रव में स्वतन्त्रतापूर्वक गिराई जाती है, तो उस पर तीन बल कार्य करते हैं, चित्र (6.35)—

(i) गोली पर कार्यकारी गुरुत्वीय बल

$$F_g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_s\, g \downarrow \text{ (ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर)}$$

(ii) द्रव का उत्प्लावक बल (upthrust force)

$$F_u = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_L\, g \uparrow \text{ (ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर)}$$

(iii) स्टोक के नियम के अनुसार प्रतिरोधक श्यान बल (Resisting viscous force)

$$F_r = 6\pi r\eta v \uparrow \qquad \text{(ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर)}$$

सीमान्त या अन्तिम चाल (v) प्राप्त करने पर चूँकि त्वरण शून्य होता है, अत: परिणामी बल,

$$F = 0$$

अथवा $$F_g - F_u - F_r = 0$$

अथवा $$F_g = F_u + F_r$$

यदि गोली तथा द्रव बूँदों की त्रिज्या r समान हो तो ρ_s स्टील गोली का घनत्व तथा ρ_L द्रव के घनत्व के लिए

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

अथवा $$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_s g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_L g + 6\pi r \eta v$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_s - \rho_L) g = 6\pi r \eta v$$

अत: श्यानता गुणांक

$$\eta = \frac{2r^2(\rho_s - \rho_L)}{9v}.g \text{ Nm}^{-2}\text{s (Pa s)} \quad \ldots (16)$$

प्रयोग द्वारा r, v ज्ञात करके, उपरोक्त सूत्र द्वारा η की गणना की जा सकती है।

समीकरण (16) से सीमान्त चाल

$$v = \frac{2}{9}\frac{r^2(P_S - P_L)}{\eta}.g \quad \ldots (17)$$

समीकरण (17) से स्पष्ट है कि

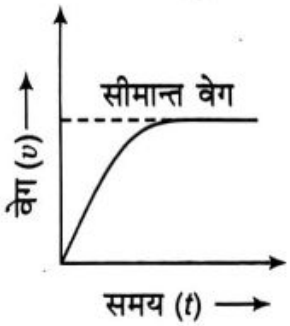
(i) किसी पिण्ड का सीमान्त चाल, उसकी त्रिज्या के वर्ग के समानुपाती होता है।

(ii) पिण्ड किसी ऊँचाई से गिर रहा है, सीमान्त चाल उस ऊँचाई पर निर्भर नहीं करता है।

(iii) सीमान्त चाल, पिण्ड व तरल पदार्थ के घनत्व के अन्तर के सीधे समानुपाती होता है।

(iv) सीमान्त चाल, श्यानता गुणांक के विलोमानुपाती होता है।

सीमान्त चाल की दशा में पिण्ड की चाल 'v' का समय 't' के साथ परिवर्तन वक्र चित्रानुसार प्राप्त होता है (चित्र 6.36)।



चित्र 6.36

सामान्यतया अन्तिम चाल या सीमान्त चाल को सीमान्त वेग (Terminal velocity) भी कहते हैं।

श्यानता पर ताप का प्रभाव (Effect of Temperature on Viscosity)

द्रवों में श्यानता का कारण अणुओं के मध्य कार्य करने वाला ससंजक बल (cohesive forces) है। यद्यपि आंतरिक घर्षण की वास्तविक प्रकृति का अधिक ज्ञान उपलब्ध नहीं है परन्तु ससंजक बल के आधार पर ही प्रयोगों के निष्कर्षों को समझाया जा सकता हैं। उदाहरण के लिए ताप बढ़ाने पर द्रवों की श्यानता कम हो जाती है। इसका कारण यह है कि ताप बढ़ाने पर अणुओं की गतिज ऊर्जा बढ़ जाती है और गतिज ऊर्जा बढ़ जाने पर उनके मध्य कार्य करने वाला ससंजक बल कम हो जाता है।

गैसों में श्यानता की व्याख्या ससंजक बलों के आधार पर नहीं कर सकते हैं क्योंकि गैसों में अणु बहुत दूर-दूर होते हैं। अत: उनके मध्य ससंजक बल शून्य होता है। गैसों में श्यानता का कारण अणुओं की एक परत से दूसरी परत में विसरण है। ताप बढ़ने पर गैसों की श्यानता बढ़ जाती है। गैसों में श्यानता द्रवों की अपेक्षा बहुत कम होती है।

(B) द्रव गति (Liquid Motion)

§ 6.32 परिचय (Introduction)

जो पदार्थ बहते हैं उन्हें तरल कहते हैं जैसे द्रव और गैस। सामान्यत: तरल (द्रव और गैस) के अणु विभिन्न दिशाओं में अनियमित गति (random motion) करते रहते हैं। परन्तु यदि तरल पर किसी एक निश्चित दिशा में बल लगायें तो अणुओं की गति लगाये गए बल की दिशा में होने लगती है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 6.33 आदर्श द्रव (Ideal Liquid)

असंपीड्य (incompressible) तथा अ-श्यान* (non-viscous) द्रव को आदर्श द्रव कहते हैं।

"Incompressible and non-viscous liquid is known as Ideal Liquid."

सामान्यतया सभी द्रवों में कुछ न कुछ श्यानता व संपीड्यता अवश्य होती है।

6.33.1 आदर्श द्रव का प्रवाह (Flow of Ideal Liquid)

आदर्श द्रव का प्रवाह दो प्रकार का होता है—

(1) धारा-रेखीय प्रवाह (Streamline Flow)

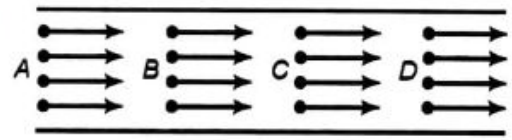
(2) विक्षुब्ध प्रवाह (Turbulent Flow)

§ 6.34 धारा-रेखीय प्रवाह (Streamline Flow)

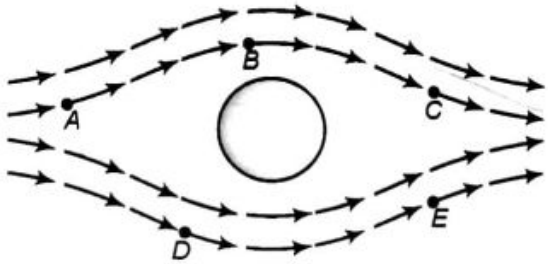
यदि किसी द्रव का प्रवाह इस तरह हो रहा हो कि किसी एक ही बिन्दु से क्रमशः होकर एक ही मार्ग से गुजरने वाले सभी कणों के वेग का परिमाण एवं दिशा एक समान रहे, तो द्रव के प्रवाह को धारा-रेखीय प्रवाह कहते हैं।

"Streamline flow of a liquid is that flow in which each particle passing through a certain point follows the same path, same magnitude of velocity and direction of its preceding particle while crossing through that point."

चित्र 6.37 में धारा-रेखीय प्रवाह के दो उदाहरण प्रदर्शित किये गये हैं। चित्र 6.37 (a) में द्रव के सभी कण परस्पर समान्तर रेखाओं में गति कर रहे हैं, परन्तु चित्र 6.37 (b) में द्रव के प्रवाह में अवरोध के कारण विभिन्न बिन्दुओं पर किसी एक द्रव कण की दिशा तो भिन्न है, परन्तु किसी एक बिन्दु से होकर क्रमशः जाने वाले सभी कण एक ही दिशा में गति कर रहे हैं।



(a)



(b)

चित्र 6.37 : धारा-रेखीय प्रवाह

धारा-रेखीय प्रवाह का यह विशेष गुण है कि **किसी कण का वेग भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर भिन्न-भिन्न तो हो सकता है परन्तु किसी एक बिन्दु पर, उससे होकर गुजरने वाले सभी कणों का वेग समान रहता है।**

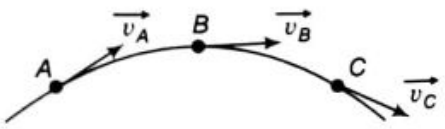
उदाहरणार्थ चित्र 6.37 (a) तथा (b) में बिन्दु *A*, *B*, *C* तथा *D* पर किसी कण का वेग भिन्न-भिन्न हो सकता है, परन्तु बिन्दु *A* (अथवा बिन्दु *B* या *C* या *D*) पर, उससे होकर गुजरने वाले सभी कणों का वेग एक ही होगा।

6.34.1 धारा-रेखा (Streamline)

तरल के कणों का प्रवाह जिस मार्ग से होता है उस मार्ग को धारा रेखा (Streamline) कहते हैं।

"Path followed by the liquid particles is called Streamline."

उदाहरणार्थ चित्र 6.38 में *ABC* धारा-रेखा है।



चित्र 6.38

• तरल के बहने के गुण को तरलता (fluidity) कहते हैं। इसका मात्रक रे (rhe) कहलाता है।
(Rhe is a unit of fluidity equal to the reciprocal of the 'poise'.)

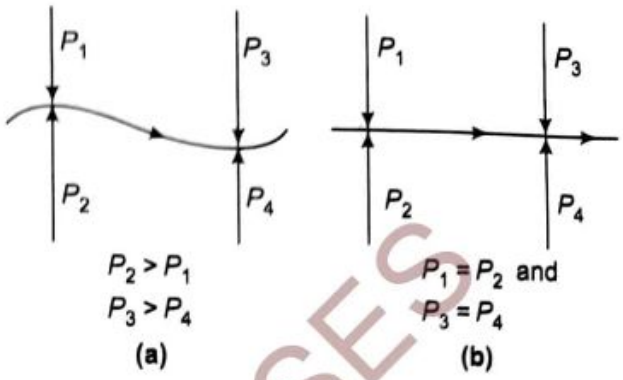
• तरल के अणुओं के मध्य आपेक्षिक गति के कारण, घर्षण बल (आन्तरिक प्रतिरोध) उत्पन्न होता है जो तरल की गति का विरोध करता है, इसे श्यानता (viscosity) कहते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

धारा-रेखा के किसी बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा उस बिन्दु पर तरल के वेग की दिशा को प्रदर्शित करती है, (चित्र 6.38)।

"Tangent drawn at any point on streamline gives the direction of velocity at that point."

धारा-रेखा से तात्पर्य सरल रेखा नहीं है। सामान्यत: किसी द्रव के प्रवाह की धारा-रेखा वक्राकार होती है (चित्र 6.39 (a)) किन्तु यदि द्रव पर पार्श्व दाब (lateral pressure) समान हो अर्थात् $P_1 = P_2$ तथा $P_3 = P_4$ तो धारा-रेखा सरल रेखा होती है (चित्र 6.39 (b))



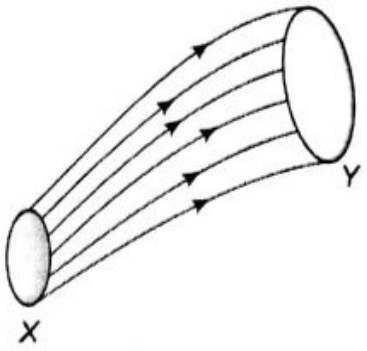
चित्र 6.39

6.34.2 धारा-रेखीय नली (Streamlined Tube)

बहुत-सी धारा-रेखाओं से बनी एक कल्पित नली (imaginary tube) को धारारेखीय नली कहते हैं।

"An imaginary tube formed by bundle of stream lines, is known as streamlined tube."

चित्र 6.40 में एक धारा-रेखीय नली प्रदर्शित है। द्रव नली की दीवारों से होकर न तो नली के अन्दर आ सकता है और न ही बाहर जा सकता है। इस प्रकार सिरे X से प्रवेश करने वाला तरल दूसरे सिरे Y से बाहर निकल जाता है।

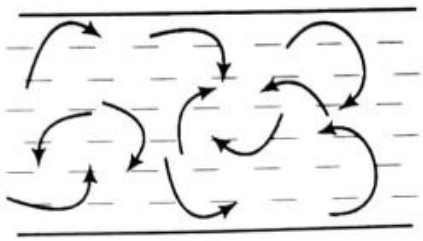


चित्र 6.40

§ 6.35 विक्षुब्ध प्रवाह (Turbulent Flow)

द्रव के विक्षुब्ध प्रवाह में कणों की गति का कोई क्रम नहीं होता अर्थात् द्रव का प्रत्येक कण किसी भी पथ पर चलने के लिए स्वतंत्र होता है। अत: इस प्रवाह में द्रव के कण उन पथों का अनुसरण नहीं करते हैं जिन पर उनके पहले के कण चलते हैं। इस प्रवाह में द्रव के अन्दर भँवर धाराएँ उत्पन्न हो जाती हैं। द्रव का यह प्रवाह मुख्यत: उसके घनत्व पर निर्भर करता है; श्यानता पर नहीं।

किसी तरल का प्रवाह केवल तब तक धारा-रेखीय (streamline) होता है जब तक उसके प्रवाह की गति एक निश्चित वेग (जिसे क्रांतिक वेग कहते हैं) से कम हो। इतना या इससे अधिक वेग होने पर, तरल के कण चक्करदार मार्ग (zig-zag path) पर गति करने लगते हैं जिससे तरल में भंवर बनने लगते हैं एवं उथल-पुथल होने लगती है। तरल के इस प्रकार के प्रवाह को **विक्षुब्ध प्रवाह** कहते हैं (चित्र 6.41)।



चित्र 6.41

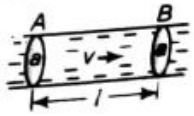
"A flow of liquid in which liquid particles travel in zig-zag direction in a disorderly manner, is called turbulent flow."

ज्वालामुखी (volcano) के फटने पर निकला लावा अत्यधिक गाढ़ा (श्यानता अधिक) होने पर भी अत्यधिक तीव्र चाल से बहता है, क्योंकि इसका प्रवाह विक्षुब्ध प्रवाह होने के कारण मुख्यत: इसके घनत्व से निर्धारित होता है। इस प्रवाह पर श्यानता का प्रभाव बहुत कम होता है। **यह एक अनियमित तथा अव्यवस्थित प्रवाह है।** (It is a disorderly zig-zag motion) **उदाहरण**—तेज बहती नदियों के जल का प्रवाह, आँधी-तूफान के समय वायु का प्रवाह।

§ 6.36 सातत्य या अविरलता का सिद्धान्त (Principle of Continuity)*

कथन (Statement)—**यदि कोई आदर्श (असंपीड्य व अश्यान) द्रव किसी नली में धारा-रेखीय प्रवाह में बह रहा**

* Principle of continuity is also known as **rate of flow of a liquid** and is defined as **the volume of it that flows across any section in unit time.**



We have, $l = v.t$, and cylindrical volume of $AB = l \times a = vt \times a$. Hence rate of flow of liquid

$$= \frac{vt \times a}{t} = a \times v$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

हो, तो नली के प्रत्येक स्थान पर अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल तथा द्रव के प्रवाह के वेग का गुणनफल सदैव नियत है।

According to this principle, rate of flow of liquid remains same at each cross-section of the pi

यदि किसी स्थान पर नली की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A हो तथा द्रव का प्रवाह वेग v हो तो अविरलता के सिद्धा अनुसार,

$$A \times v = \text{नियतांक}$$

उपपत्ति (Proof)—चित्र 6.42 के अनुसार, माना कोई आदर्श द्रव जिसका घनत्व ρ है एक असमान अनुप्रस्थ-परि वाली नली XY में धारा-रेखीय प्रवाह में बह रहा है। माना सिरे X पर नली का अनुप्रस्थ क्षेत्र A_1 तथा द्रव का वेग v_1 है एवं Y पर नली का अनुप्रस्थ क्षेत्र A_2 तथा द्रव का वेग v_2 है।

नली में जितना द्रव सिरे X से प्रवेश करता है, उतना ही द्रव सिरे Y से बाहर निकल जाता है। जो द्रव X सिरे पर प्र करता है वह 1 सेकण्ड में v_1 दूरी तय करता है, अत: X सिरे पर 1 सेकण्ड में

प्रवेश करने वाले द्रव का आयतन = $A_1 v_1$

1 सेकेण्ड में X सिरे पर प्रवेश करने वाले द्रव का द्रव्यमान = $\rho \times A_1 \times v_1$

इसी प्रकार 1 सेकण्ड में Y सिरे से निकलने वाले द्रव का द्रव्यमान = $\rho \times A_2 \times v_2$

$\because$ X सिरे पर प्रवेश करने वाले द्रव का द्रव्यमान = Y सिरे से निकलने वाले द्रव का द्रव्यमान

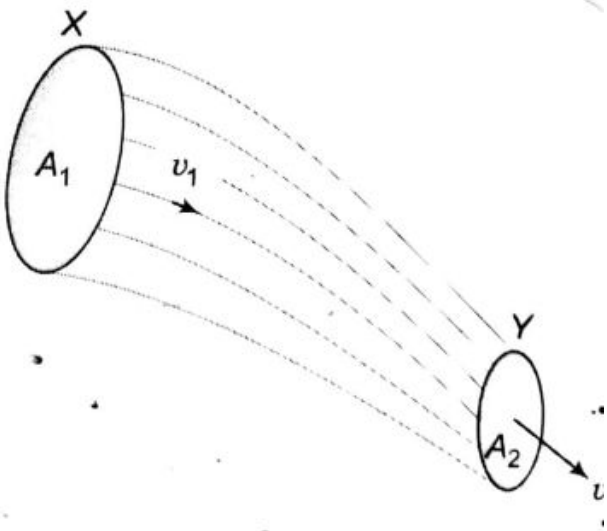
$\therefore$ $$\rho \times A_1 \times v_1 = \rho \times A_2 \times v_2$$

अथवा $$A_1 \times v_1 = A_2 \times v_2$$

अथवा $$A \times v = \text{नियतांक}$$

... (8)

यह समीकरण सातत्य अथवा अविरलता का समीकरण (equation of continuity) कहलाता है। यही अविरलता का सिद्धान्त है।



चित्र 6.42

समीकरण (4) से

$$A \propto \frac{1}{v}$$

अथवा $$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

... (9)

अर्थात् **किसी बिन्दु पर द्रव के प्रवाह का वेग उस स्थान पर नली के अनुप्रस्थ क्षेत्र के विलोमानुपाती होता है।**

समीकरण (4) से निम्न निष्कर्ष प्राप्त होता है—

(i) जहाँ पर नली का अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल अधिक है, वहाँ प्रवाह का वेग कम है तथा जहाँ अनुप्रस्थ परिच्छेद कम है वहाँ प्रवाह का वेग अधिक है।

(ii) धारा-रेखीय नली में उस सिरे पर जहाँ अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल अधिक है; धारा रेखाएँ दूर-दूर (wide apart) होंगी तथा कम क्षेत्रफल वाले सिरे पर पास-पास (crowded) होंगी। अत: **धारा-रेखाओं के परस्पर समीप आने से प्रवाह का वेग बढ़ता है तथा दूर-दूर होने पर प्रवाह का वेग घटता है।**

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

(iii) यदि $A_2 < A_1$ तब $v_2 > v_1$ अर्थात् जब हम नली में X से Y की ओर चलते हैं तब द्रव का वेग बढ़ता है। द्रव का वेग बढ़ाने वाला त्वरक बल (accelerating force) अधिकांश रूप से बिन्दु X पर अत्यधिक दाब तथा Y पर कम दाब के कारण होता है। अत: **द्रव के धारा-रेखीय (steady) प्रवाह में जिस बिन्दु पर द्रव का वेग कम होता है वहाँ दाब अधिक होता है तथा जिस स्थान पर प्रवाह का वेग अधिक होता है, वहाँ दाब कम होता है।**

§ 6.37 बहते द्रव की ऊर्जा (Energy of Flowing Liquid)

किसी बहते हुए द्रव में ऊर्जा निम्न तीन प्रकार की होती है—

(i) गतिज ऊर्जा (Kinetic Energy)

(ii) स्थितिज ऊर्जा (Potential Energy)

(iii) दाब ऊर्जा (Pressure Energy)

(i) गतिज ऊर्जा (Kinetic Energy)—**द्रव के कणों में गति के कारण निहित ऊर्जा को गतिज ऊर्जा कहते हैं।**

It is the energy possessed by the liquid particles by virtue of their motion.

यदि किसी द्रव का द्रव्यमान m तथा उसके प्रवाह का वेग v हो, तो

$$\text{द्रव की गतिज ऊर्जा} = \frac{1}{2}mv^2$$

यदि द्रव के m द्रव्यमान का आयतन V है तब द्रव के एकांक आयतन की गतिज ऊर्जा

$$= \frac{\text{कुल गतिज ऊर्जा}}{\text{आयतन}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{V}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m}{V}\right).v^2$$

$$= \frac{1}{2}\rho v^2 \qquad (\text{जहाँ } \rho = \frac{m}{v}, \text{ द्रव का घनत्व}) \quad \ldots (10)$$

(ii) स्थितिज ऊर्जा (Potential Energy)—**किसी द्रव में स्थिति (position) अथवा पृथ्वी तल के किसी आधार रेखा से ऊँचाई के कारण निहित ऊर्जा को स्थितिज ऊर्जा कहते हैं।**

It is the energy possessed by a liquid by virtue of its height or position above a datum line or earth.

यदि m द्रव्यमान तथा V आयतन का द्रव पृथ्वी तल से h ऊँचाई पर बह रहा हो, तो

$$\text{द्रव की स्थितिज ऊर्जा} = mgh$$

$$\text{द्रव के एकांक आयतन की स्थितिज ऊर्जा} = \frac{mgh}{V} = \left[\frac{m}{V}\right]gh$$

$$= \rho gh \qquad (\because \frac{m}{V} = \rho, \text{ द्रव का घनत्व}) \quad \ldots (11)$$

(iii) दाब ऊर्जा (Pressure Energy)—**किसी द्रव में दाब के कारण निहित ऊर्जा, दाब ऊर्जा कहलाती है।**

It is the energy possessed by a liquid by virtue of its pressure.

माना किसी बर्तन की तली पर, बर्तन में भरे द्रव के कारण आरोपित दाब P है (चित्र 6.43)। तली के निकट लगे पाइप में एक पिस्टन है जिसके अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A है।

अत: द्रव दाब द्वारा पिस्टन पर आरोपित बल $= PA$

$$\left[\because \text{दाब} = \frac{\text{बल}}{\text{क्षेत्रफल}}\right]$$

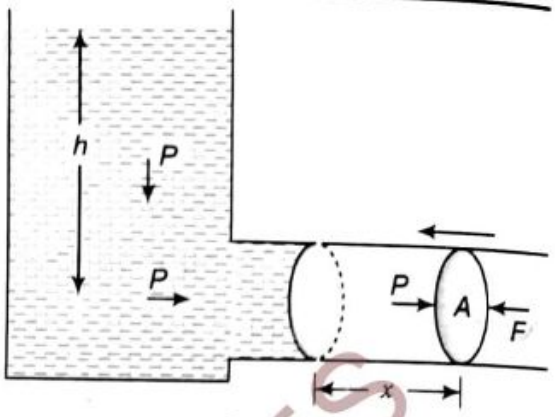
AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: पिस्टन को संतुलन में रखने के लिए पिस्टन पर एक बाह्य बल $F = (PA)$ चित्र 6.43 के अनुसार लगाना पड़ेगा। पिस्टन को x दूरी विस्थापित करने अर्थात् Ax आयतन के द्रव को बर्तन के अन्दर भेजने में बाह्य बल F द्वारा द्रव पर किया गया कार्य

$$W = Fx = PAx$$

यही कार्य $W\ (= PAx)$ द्रव के इस आयतन माना $V\ (= Ax)$ में दाब ऊर्जा के रूप मे संचित हो जाता है, अत: द्रव के आयतन $V\ (= Ax)$ की दाब ऊर्जा $= PAx = PV$



चित्र 6.43

अथवा द्रव के एकांक आयतन की दाब ऊर्जा

$$= \frac{PAx}{Ax} = P \text{ (द्रव का दाब)} \quad \ldots (12)$$

§ 6.38 बरनौली का प्रमेय (Bernoulli's Theorem)

बरनौली प्रमेय का उपयोग द्रव गतिकी में व्यापक रूप से किया जाता है। यह ऊर्जा-संरक्षण के सिद्धान्त पर आधारित है।

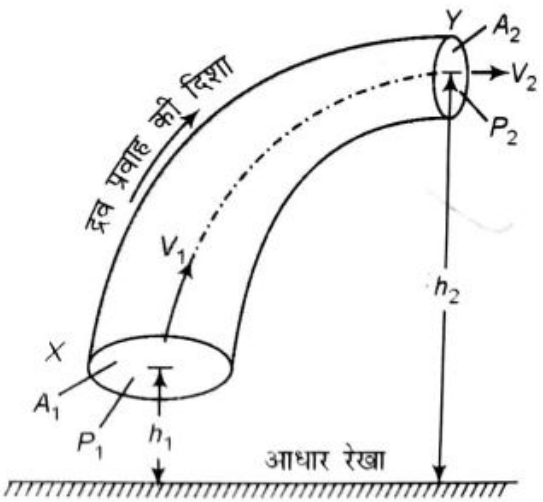
कथन (Statement)—**जब कोई असंपीड्य तथा अश्यान द्रव धारा-रेखीय प्रवाह में होता है तो उसके पथ के प्रत्येक बिन्दु पर, द्रव की कुल ऊर्जा अर्थात् दाब ऊर्जा, गतिज ऊर्जा तथा गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का योग सदैव नियत रहता है।**

द्रव के **एकांक आयतन की ऊर्जा के पदों में,** बरनौली के प्रमेय के अनुसार,

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{ नियतांक} \quad \ldots (13)$$

"Bernoulli's theorem states that for the streamline flow of an incompressible and non-viscous liquid, the total energy (sum of pressure energy, kinetic energy and potential energy) per unit volume remains constant throughtout the flow." This theorem is a consequence of principle of conservation of energy.

उपपत्ति (Proof)—माना कोई असंपीड्य तथा अश्यान द्रव किसी असमान काट वाली नली XY (चित्र 6.44) में प्रवाहित हो रहा है। प्रवाह धारा-रेखीय है। माना काट X का क्षेत्रफल A_1 तथा काट Y का क्षेत्रफल A_2 है। काट X की आधार रेखा से ऊँचाई h_1 तथा काट Y की ऊँचाई h_2 है। काट X पर प्रवाह वेग v_1 तथा काट Y पर प्रवाह वेग v_2 है। काट Y का क्षेत्रफल A_2 काट X के क्षेत्रफल A_1 से कम है, अत: सातत्य के सिद्धान्त के अनुसार काट Y पर प्रवाह वेग v_2 अधिक होगा।



चित्र 6.44

माना द्रव का प्रवाह समय (t = 1 सेकण्ड) के लिए हो रहा है तथा काट X पर दाब P_1 तथा Y पर दाब P_2 है। यदि द्रव दाबान्तर $P_1 - P_2$ के कारण X से Y की ओर बहता है तब द्रव की दाब ऊर्जा द्वारा किया गया कार्य, द्रव की गतिज एवं स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि के रूप में प्राप्त होगा।

काट X पर प्रवेश करने वाला द्रव 1 सेकण्ड में v_1 दूरी तय करता है। इस द्रव पर $(P_1 \times A_1)$ बल कार्य करता है।

अत: काट X में प्रवेश करने वाले द्रव पर 1 सेकण्ड में किया गया कार्य

$$= \text{बल} \times \text{दूरी}$$

$$= P_1 \times A_1 \times v_1$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

इसी प्रकार काट Y से निकलने वाला द्रव 1 सेकण्ड में v_2 दूरी तय करता है तथा द्रव बल $(P_2 \times A_2)$ के विरुद्ध कार्य करता है।

इसलिए काट Y से निकलने वाले द्रव द्वारा 1 सेकण्ड में किया गया कार्य

$$= \text{बल} \times \text{दूरी}$$
$$= P_2 \times A_2 \times v_2$$

अत: द्रव पर किया गया तुल्य कार्य

$$= P_1 \times A_1 \times v_1 - P_2 \times A_2 \times v_2 \quad \text{... (i)}$$

परन्तु सातत्य के समीकरण से प्रत्येक काट पर 1 सेकेण्ड में प्रवाहित आयतन समान होता है, अत:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = V \text{ (आयतन)}$$

अत: समीकरण (i) से,

$$W = (P_1 - P_2) V \quad \text{... (ii)}$$

1 सेकेण्ड में काट X पर प्रवेश करने वाले द्रव की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv_1^2$ तथा Y से निकलने वाले द्रव की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mv_2^2$ है। अत: द्रव की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \text{...(iii)}$$

काट X पर द्रव की स्थितिज ऊर्जा mgh_1 तथा काट Y पर द्रव की स्थितिज ऊर्जा mgh_2 है। अत: द्रव की स्थितिज ऊर्जा में परिवर्तन

$$\Delta U = mgh_2 - mgh_1 \quad \text{...(iv)}$$

चूँकि द्रव की यह ऊर्जा वृद्धि द्रव पर किए गए तुल्य कार्य के कारण होती है। इसलिए ऊर्जा संरक्षण सिद्धान्त (कार्य ऊर्जा प्रमेय) से

द्रव पर किया गया तुल्य कार्य = द्रव के कुल ऊर्जा में परिवर्तन

$$W = \Delta K + \Delta U$$
$$(P_1 - P_2) V = \left(\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\right) + (mgh_2 - mgh_1)$$

अथवा
$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{V}\right)v_2^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{V}\right)v_1^2 + \left(\frac{m}{V}\right)gh_2 - \left(\frac{m}{V}\right)gh_1$$
$$= \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_2 - \rho g h_1 \quad \left(\because \frac{m}{V} = \rho = \text{द्रव का घनत्व}\right)$$

अथवा
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

यह बरनौली का सिद्धान्त है, जिसे निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है—

$$\boldsymbol{P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{नियतांक}}$$

उपरोक्त समीकरण को ρg से भाग देने पर बरनौली प्रमेय का समीकरण ऊर्जा के शीर्ष के रूप में प्राप्त होता है।

... (14)

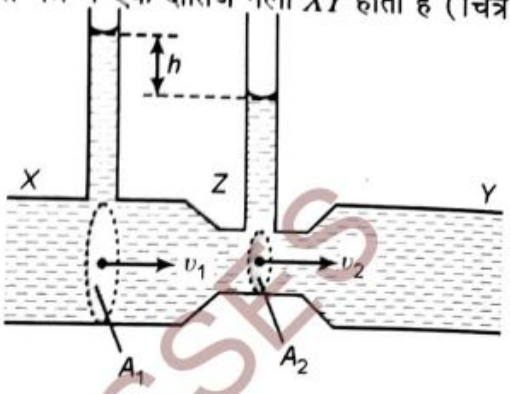
इसलिए
$$\boldsymbol{\frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + h = \text{नियतांक}}$$

दाब शीर्ष, गतिज शीर्ष तथा स्थितिज शीर्ष के योग को **सम्पूर्ण शीर्ष** (Total head) कहते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

§ 6.39 बरनॉली प्रमेय के अनुप्रयोग (Applications of Bernoulli's Theorem)

(i) वेन्च्यूरी प्रवाह मापी (Venturi flow meter)—बरनॉली सिद्धान्त पर आधारित यह एक ऐसा उपकरण (device) है जिसके द्वारा किसी नली में प्रवाहित द्रव के बहने की दर ज्ञात की जाती है। इस यंत्र में एक क्षैतिज नली XY होती है (चित्र 6.45), जिसका बीच का भाग Z संकीर्ण होता है। X व Z पर दो ऊर्ध्वाधर नलियाँ जुड़ी रहती हैं। इस प्रबन्ध को उस वांछित नली के साथ श्रेणीक्रम में जोड़ देते हैं; जिसमें द्रव के बहने की दर ज्ञात करनी है।



चित्र 6.45

जब नली XY में द्रव बहता है, तो X की अपेक्षा Z पर द्रव का वेग अधिक तथा दाब कम होता है। इनके बीच दाबान्तर ज्ञात करने के लिए ऊर्ध्वाधर नलियों में द्रव स्तम्भ की ऊँचाइयों का अन्तर ज्ञात कर लेते हैं।

माना X व Z पर नली के अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल क्रमशः A_1 व A_2 , द्रव के वेग क्रमशः v_1 व v_2 तथा दाब क्रमशः P_1 तथा P_2 हैं। माना द्रव का घनत्व ρ है। अतः द्रव प्रवाह के सातत्य के समीकरण से,

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

अथवा
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{v_2}{v_1} \qquad \ldots (i)$$

नली XY में द्रव के क्षैतिज प्रवाह में, बरनौली के प्रमेय के अनुसार,

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad \text{[क्षैतिज तल में } h \text{ नियत है]}$$

अथवा
$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\,(v_2^2 - v_1^2)$$

$$= \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left[\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 1\right]$$

$$= \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right] \qquad \{\text{चूँकि समीकरण (i) से, } \frac{v_2}{v_1} = \frac{A_1}{A_2}\}$$

यदि ऊर्ध्वाधर नलियों में द्रव की ऊँचाइयों का अन्तर h हो, तो

$$P_1 - P_2 = h\rho g$$

तब
$$h\rho g = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left[\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}\right]$$

अथवा
$$v_1^2 = A_2^2 \frac{2gh}{(A_1^2 - A_2^2)}$$

अथवा
$$v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2gh}{(A_1^2 - A_2^2)}}$$

अतः नली XY में प्रति सेकण्ड बहने वाले द्रव का आयतन,

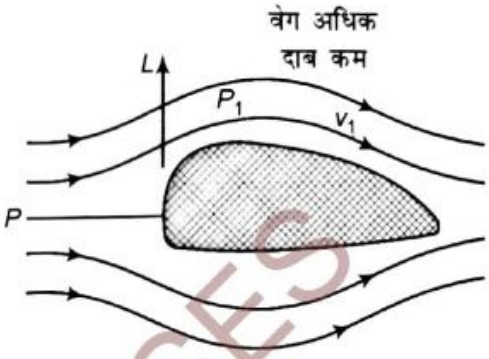
$$Q = A_1 v_1 = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2gh}{(A_1^2 - A_2^2)}} \qquad \ldots (15)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: h का मान नाप लेने तथा अन्य राशियों के मान ज्ञात होने पर नली XY में द्रव के प्रवाह की दर की गणना कर लेते हैं। वांछित नली में द्रव के प्रवाह की दर, नली XY में द्रव के प्रवाह की दर के बराबर होती है। इसका मात्रक लीटर/सेकण्ड अथवा मीटर^3/सेकण्ड होता है।

(ii) वायुयान पंखों की कार्य प्रणाली (Work system of wing of aeroplane)—यह भी बरनौली के सिद्धान्त पर आधारित है। वायुयान के पंखों की ऊपरी सतह की वक्रता (curvature) निचली सतह की वक्रता से अधिक होती है (अर्थात् वक्रता त्रिज्या कम होती है) तथा सामने का किनारा गोल और पीछे का किनारा चपटा होता है (चित्र 6.46)। जब वायुयान दौड़ता है तो पंखों की इस विशेष आकृति के कारण, पंखों के ऊपर चलने वाली वायु का वेग पंखों के नीचे वाली वायु के वेग से अधिक हो जाता है, फलत: ऊपर दाब कम हो जाता है; इस दाबान्तर $(P_2 - P_1)$ के कारण ही वायुयान ऊपर की ओर एक उत्थापक बल (lifting force) L लगाता है। जब इस बल का मान वायुयान के भार से अधिक हो जाता है तो वायुयान उड़ने लगता है।

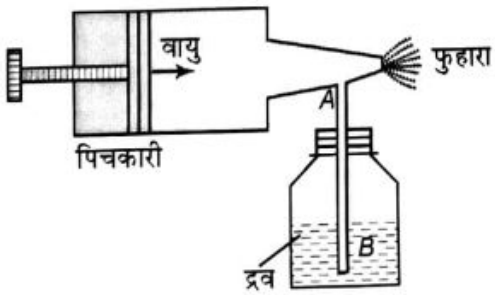


चित्र 6.46

(iii) कणित्र या स्प्रेयर (Atomiser or Sprayer)—इस नली का ऊपरी सिरा A एक क्षैतिज नली के संकीर्ण भाग में खुलता है। नली AB के समकोणिक एक साधारण पिचकारी लगी रहती है जिसका सिरा जेट के आकार का होता है (चित्र 6.47)। जब पिस्टन को पिचकारी के अन्दर की ओर चलाते हैं तो वायु क्षैतिज नली में होकर बाहर निकलती है। नली के संकीर्ण भाग में वायु का वेग बहुत अधिक होता है जिससे वहाँ वायुदाब वायुमण्डलीय दाब से कम हो जाता है। चूँकि बर्तन के अन्दर द्रव वायुमण्डलीय दाब पर अर्थात् अधिक दाब पर है, अत: बर्तन में रखा द्रव नली AB में ऊपर चढ़ता है तथा वायु के साथ मिलकर फुहार के रूप में बाहर निकलता है।

यह यंत्र कणित्र, रंग अथवा सुगन्धित द्रव छिड़कने, कीड़ों को मारने की दवा छिड़कने, फर्नीचर तथा कारों आदि पर रंग करने, जल फुहारने आदि में काम आता है।

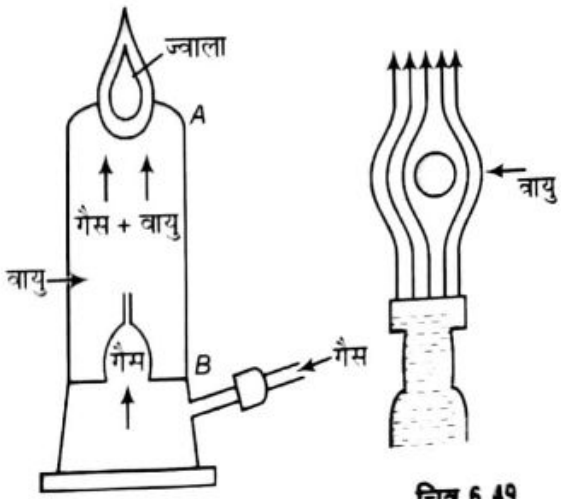
(iv) बुनसन बर्नर (Bunsen's Burner)—बुनसन बर्नर का प्रयोग ज्योतिहीन (non-luminous) ज्वाला उत्पन्न करने के लिए किया जाता है (चित्र 6.48)। इसमें एक लम्बी नली AB होती है जिसमें नीचे के एक बहुत बारीक छिद्र O के द्वारा ज्वलनशील गैस प्रवेश करती है। गैस का वेग बहुत अधिक होता है जिस कारण नली में दाब बाहर के वायुमण्डलीय दाब से कम हो जाता है। अत: बाहर की वायु नली की दीवार में बने छेदों में होकर नली में प्रवेश कर ज्वलनशील गैस के साथ मिश्रित हो जाती है तथा नली के मुँह A पर जाकर ज्योतिहीन ज्वाला उत्पन्न करती है।



चित्र 6.47

(v) फुहारे पर टिकी गेंद—फुहारे के ऊपर सेल्युलॉइड की हल्की गेंद छोड़ने पर फुहारे की धार पर ही टिकी रहती है (चित्र 6.49)। इसका कारण यह है कि जब फुहारे से जल की धाराएँ बहुत तेजी से ऊपर उठती हैं तो उनके आस-पास वायुदाब कम हो जाता है। अत: जब भी गेंद जल की धाराओं से बाहर निकलती है तभी बाहर की वायु उसे फुहारों में ही (कम दाब के क्षेत्र में) ढकेल देती है और निकलकर गिरने से रोक देती है। इस प्रकार गेंद फुहारे पर टिकी रहती है।

(vi) गहरा जल शान्त होता है (Still Water runs deep)—जहाँ जल गहरा होता है; वहाँ द्रव स्थैतिक दाब (hydrostatic pressure) अधिक होता है। बरनौली के प्रमेय के अनुसार, दाब अधिक होने पर वहाँ जल का वेग कम होगा अर्थात् जल शान्त होगा।

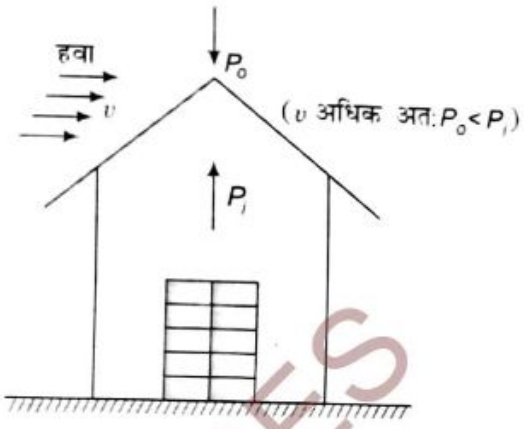


चित्र 6.48 चित्र 6.49

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

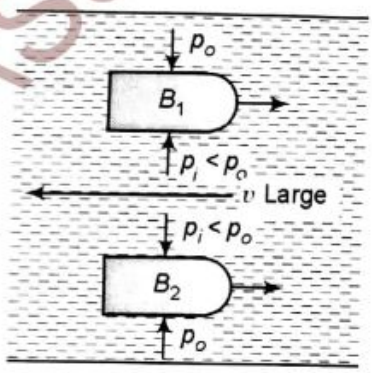
(vii) तेज आँधी-तूफान में टिन की छतों का उड़ जाना—जब छत की टीन के ऊपर से बहुत अधिक चाल से वायु बहती है तो बरनौली के प्रमेय के अनुसार, छत के ऊपर वायुदाब वायुमण्डलीय दाब से बहुत कम हो जाता है, जबकि टीन के नीचे वायुमण्डलीय दाब रहता है। इसी दाबान्तर के कारण ही टीन ऊपर उड़ जाती है (चित्र 6.50)।



चित्र 6.50

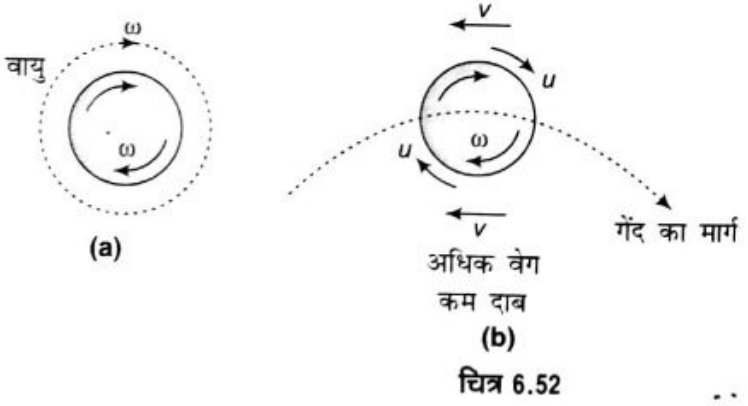
(viii) प्लेटफॉर्म पर खड़े होने पर, तेजी से आती रेलगाड़ी की ओर झुक जाना—जब रेलगाड़ी तेजी से आती है तो वहाँ वायु की चाल के बढ़ जाने के कारण, वायुदाब कम हो जाता है। प्लेटफार्म पर हमारे खड़े होने पर हमारे पीछे की वायु अधिक दाब पर होने के कारण हमें रेलगाड़ी की ओर धकेलती है। इसी कारण रेलगाड़ी के आने पर प्लेटफार्म पर पड़े तिनके व कागज आदि गाड़ी की ओर उड़ने लगते हैं।

(ix) आस-पास (Side by side) **समान्तर दिशा में जाती हुई दो नावों (अथवा बसों) के बीच आकर्षण**—जब दो नाव अथवा बसें एक दूसरे के आस-पास एक ही दिशा में चलती हैं तो उनके बीच के स्थान में जल अथवा हवा; उनके दूसरी ओर के जल अथवा हवा की अपेक्षा तेज चलते हैं। अत: बरनौली के सिद्धान्त के अनुसार उनके बीच दाब कम हो जाता है। तब दाबान्तर के कारण वे दोनों एक-दूसरे की ओर खिंच जाते हैं अर्थात् उनके बीच आकर्षण हो जाता है। (चित्र 6.51)



चित्र 6.51

(x) मैगनस प्रभाव (Magnus Effect)—क्रिकेट के खेल में खिलाड़ी जब गेंद को स्पिन (spin) कराते हुए फेंकते हैं तो गेंद वायु में सरल रेखा पर न चलकर एक वक्राकार पथ पर चलती है जिसे गेंद का स्विंग (swing) करना कहते हैं। इसका कारण यह है कि जब गेंद स्पिन करती है तो उसके साथ-साथ उसके चारों ओर की वायु भी ω वेग से घूमती है [चित्र 6.52 (a)]। माना इस वायु का रैखिक वेग u है। स्पिन करती हुई गेंद जब आगे बढ़ती है तो गेंद के आगे की वायु, गेंद द्वारा छोड़े गए खाली स्थान को भरने के लिए v वेग से पीछे की ओर दौड़ती है। गेंद के ऊपर वायु की धारा-रेखाओं की दिशा गेंद की स्पिन गति के विपरीत है; अत: गेंद के ऊपर वायु का परिणामी वेग $(v-u)$ हो जाता है। गेंद के नीचे वायु की धारा-रेखाओं की दिशा गेंद की स्पिन की गति की दिशा में है, अत: वायु का परिणामी वेग $(v+u)$ हो जाता है [चित्र 6.52 (b)]।

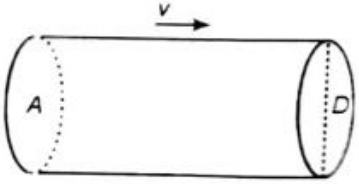


चित्र 6.52

इस प्रकार गेंद के ऊपर वायु का वेग कम तथा नीचे अधिक होता है। अत: बरनौली के सिद्धान्त के अनुसार गेंद के ऊपर वायुदाब अधिक तथा नीचे कम हो जाता है। इस दाबान्तर के कारण ही गेंद सरल रेखा में नहीं चल पाती है तथा नीचे को झुकते हुए वक्राकार पथ पर चलती है।

§ 6.40 रेनॉल्ड अंक (Reynold's Number)

वैज्ञानिक रेनॉल्ड ने यह बताया कि किसी तरल प्रवाह का धारा-रेखीय अथवा विक्षुब्ध होना एक विमाहीन अनुपात पर निर्भर करता है। इस अनुपात को रेनॉल्ड अंक (R_e) कहते हैं। यह रेनॉल्ड अंक द्रव की पर्तों के बीच एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाले जड़त्व बल तथा श्यान बल का अनुपात है—



चित्र 6.53

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अर्थात् $$R_e = \frac{\text{प्रति एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाला जड़त्व बल}}{\text{प्रति एकांक क्षेत्रफल पर लगने वाला श्यान बल}} \quad \text{... (i)}$$

माना द्रव के धारा-रेखीय प्रवाह में नली के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A तथा नली का व्यास D है, चित्र 6.53। अत: A क्षेत्रफल पर जड़त्व बल = 1 सेकण्ड में संवेग परिवर्तन

$$= P = mv = (V.\rho).v \qquad (\because\ m = V.\rho)$$

$$= (Av\rho)\,v \qquad (\because\ V = Av)$$

$$= A\rho v^2$$

$\therefore$ एकांक क्षेत्रफल पर जड़त्व बल $= \rho v^2$ ... (ii)

D व्यास की बेलनाकार नली के लिए, A क्षेत्रफल पर लगने वाला

$$\text{श्यान बल} = \eta A \frac{v}{D}$$

$\therefore$ एकांक क्षेत्रफल पर श्यान बल $= \frac{\eta v}{D}$ ...(iii)

समीकरण (i) में (ii) तथा (iii) का मान रखने पर;

$$R_e = \frac{\rho v^2}{\eta v / D}$$

या $$\boldsymbol{R_e = \frac{\rho v D}{\eta}} \quad \text{...(16)}$$

जहाँ ρ = द्रव का घनत्व, v = द्रव का वेग, η = द्रव का श्यानता गुणांक

D = उस नली का व्यास है, जिसमें द्रव बह रहा है। प्रयोगों द्वारा यह देखा गया है कि रेनॉल्ड अंक का मान

(i) 2000 तक होने पर द्रव का प्रवाह धारा-रेखीय होता है।

(ii) 2000 से 3000 के बीच होने पर तरल का प्रवाह अस्थायी रहता है अर्थात् प्रवाह नियमित से अनियमित अथवा अनियमित से नियमित प्रवाह में बदलता रहता है।

(iii) 3000 से अधिक होने पर तरल का प्रवाह विक्षुब्ध होता है।

§ 6.41 द्रव का क्रांतिक वेग (Critical Velocity of Liquid)

किसी द्रव का प्रवाह धारा-रेखीय होगा अथवा विक्षुब्ध, यह द्रव पर नहीं बल्कि द्रव के वेग पर निर्भर करता है। यदि द्रव के नियमित प्रवाह में द्रव का वेग धीरे-धीरे बढ़ाया जाये, तो वेग की एक निश्चित सीमा तक, द्रव का प्रवाह धारा-रेखीय रहता है, इस सीमा से अधिक वेग होने पर प्रवाह धारा-रेखीय न रहकर, अनियमित तथा विक्षुब्ध हो जाता है। अत: किसी **द्रव के प्रवाह का वह अधिकतम वेग, जहाँ तक द्रव का प्रवाह नियमित/धारा-रेखीय रहता है, द्रव का क्रान्तिक वेग (v_c) कहलाता है।**

Maximum velocity of a liquid upto which flow of the liquid remains streamline, is known as critical velocity.

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

वैज्ञानिक रेनॉल्ड के अनुसार,

$$R_e = \frac{\rho v D}{\eta} \quad \ldots (i)$$

जहाँ η, ρ तथा v द्रव के क्रमशः श्यानता गुणांक, घनत्व तथा औसत वेग हैं तथा D नली का व्यास है। R_e का मान प्रत्येक मापन प्रणाली में समान रहता है।

किसी निश्चित द्रव के लिए R_e का मान द्रव के वेग v के समानुपाती है; क्योंकि किसी निश्चित द्रव के लिए घनत्व (ρ) तथा श्यानता गुणांक (η) के मान नियत होंगे तथा किसी दी हुई नली के लिए D भी नियत रहेगा अर्थात् द्रव का वेग v बढ़ने पर R_e का मान भी बढ़ता है। **v के उस मान को, जिस पर R_e का मान लगभग 2000 के बराबर हो जाता है द्रव का क्रान्तिक वेग (v_c) कहते हैं।**

अतः समीकरण (i) से

$$v_c = \frac{R_e \eta}{\rho D} \quad \ldots (17)$$

अतः स्पष्ट है कि जब द्रव का वेग—

(i) $v \le v_c$ तो $R_e \le 2000$, द्रव का प्रवाह धारा-रेखीय होता है, तथा

(ii) $v > v_c$ तो R_e का मान अधिक हो जाने के कारण, द्रव का प्रवाह विक्षुब्ध होता है।

समीकरण (17) से स्पष्ट है—

(i) कम घनत्व एवं उच्च श्यानता वाला द्रव जब किसी संकीर्ण (narrow) ट्यूब में प्रवाहित होता है तब द्रव के लिए क्रांतिक वेग प्राप्त करना कठिन होता है। अतः इस प्रकार का द्रव धारा-रेखीय प्रवाह में बहता है।

(ii) इसके विपरीत कम श्यानता एवं उच्च घनत्व वाला द्रव जब अधिक व्यास (wide bore) की ट्यूब में प्रवाहित होता है तब क्रांतिक वेग का मान बहुत कम होता है। चूँकि यह वेग, द्रव सरलता से प्राप्त कर सकता है, अतः इस प्रकार के द्रव का प्रवाह प्राकृतिक रूप से विक्षुब्ध (turbulent) होता है।

स्मरणीय बिन्दु
(Points to be Remembered)

1. **प्रत्यास्थता**—किसी वस्तु के पदार्थ का वह गुण है जिसके कारण वस्तु किसी विरूपक बल के द्वारा अपनी आकृति अथवा आकार में होने वाले परिवर्तन का विरोध करती है; तथा विरूपक बल हटा लेने पर अपनी प्रारम्भिक अवस्था में आ जाती है।

[The property of certain materials that enables them to return to their original dimensions after an applied stress (the force per unit area on a body tends to cause it to deform) has been removed.]

2. **प्रतिबल** (Stress)—वस्तु की अनुप्रस्थ काट के एकांक क्षेत्रफल पर कार्यरत आन्तरिक प्रतिक्रिया बल को प्रतिबल कहते हैं।

3. प्रतिबल का मात्रक न्यूटन प्रति मीटर^2 होता है।

4. **विकृति** (Strain)—वस्तु के एकांक आकार में बाह्य बल द्वारा होने वाले परितर्वन को विकृति कहते हैं।

5. विकृति एक अनुपात है अतः यह मात्रकहीन तथा विमाहीन राशि है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

6. **हुक का नियम** (Hooke's Law)—प्रत्यास्थता की सीमा के अन्तर्गत प्रतिबल सदैव विकृति के अनुक्रमानुपाती होता है।

$$E = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$$

E को प्रत्यास्थता गुणांक (Modulus of elasticity) कहते हैं।

7. दाब (Pressure)—एकांक क्षेत्रफल पर कार्यरत बल, दाब कहलाता है। इसका मात्रक/मीटर^2 होता है।

8. फोर्टिन वायुदाबमापी (Fortin's Barometer)—वायुमण्डलीय दाब का सटीक मान ज्ञात करने के लिए प्रयोग में लाया जाता है।

9. अन्तराणविक बल दो प्रकार के होते हैं—ससंजक व आसंजक बल।

10. समान पदार्थ के अणुओं के मध्य कार्य करने वाला अन्तराणविक बल ससंजक बल कहलाता है।

11. विभिन्न पदार्थ के अणुओं के मध्य कार्य करने वाला अन्तराणविक बल आसंजक बल कहलाता है।

12. पदार्थ की तीनों अवस्थाओं, ठोस, द्रव व गैस में से ठोस के अणुओं के मध्य कार्य करने वाला बल अधिकतम होता है।

13. द्रव की मुक्त सतह पर खींची गयी काल्पनिक रेखा की एकांक लम्बाई पर कार्य करने वाला बल पृष्ठ तनाव की माप होता है।

अर्थात् $T = \frac{F}{L}$ से यदि $L = 1$ तो $T = F$

14. द्रव की पृष्ठ ऊर्जा व पृष्ठ तनाव में सम्बन्ध $T = \frac{F}{\Delta A}$, जहाँ E = पृष्ठ ऊर्जा, ΔA = द्रव के पृष्ठ का क्षेत्रफल।

15. किसी द्रव का ताप घटाये जाने पर या द्रव में अधिक घुलनशील पदार्थ मिलाने पर द्रव का पृष्ठ तनाव बढ़ जाता है।

16. ठोस व द्रव के स्पर्श बिन्दु से द्रव के पृष्ठ पर खींची गई स्पर्श रेखा तथा ठोस के पृष्ठ पर द्रव के अन्दर की ओर खींची गयी स्पर्श रेखा के मध्य बना कोण स्पर्श कोण कहलाता है।

17. केशनली में द्रव के ऊपर जाने अथवा नीचे उतरने की घटना केशिकात्व कहलाती है।

18. बरनौली के प्रमेय के अनुसार "किसी आदर्श द्रव के धारा-रेखीय प्रवाह में मार्ग के प्रत्येक बिन्दु पर द्रव के प्रति एकांक आयतन की कुल ऊर्जा नियत रहती है।"

19. बरनौली प्रमेय पर आधारित उपकरण वेच्यूरीमीटर-द्रव प्रवाह की दर मापने का यंत्र है।

20. रेनॉल्ड संख्या वह शुद्ध संख्या है जिससे यह पता चलता है कि नली में प्रवाहित द्रव का प्रवाह धारा-रेखीय है या नहीं

$$R_e = \frac{\rho v d}{\eta}$$

21. क्रान्तिक वेग $$v_c = \frac{R_e \eta}{\rho d}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

साधित आंकिक उदाहरण
(Solved Numerical Examples)

उदाहरण 24 : किसी पाइप में 16 सेमी/सेकण्ड के वेग से जल प्रवाहित हो रहा है। किसी बिन्दु पर दाब 12×10^4 पास्कल है। यदि आधार से पाइप 24 मीटर ऊँचा हो तो द्रव की सम्पूर्ण ऊर्जा प्रति एकांक आयतन ज्ञात कीजिए।

हल—बरनौली के प्रमेय से द्रव की सम्पूर्ण ऊर्जा प्रति एकांक आयतन

$$= P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h$$

$$= 12 \times 10^4 + \frac{1}{2} \times 10^3 \times (0{\cdot}16)^2 + 10^3 \times 9{\cdot}8 \times 24$$

$$= 12 \times 10^4 + 12{\cdot}8 + 235{\cdot}2 \times 10^3$$

$$= 3{\cdot}55 \times 10^5 \text{ जूल/मीटर}^3$$

$$= \mathbf{3{\cdot}55 \times 10^5 \text{ जूल/मीटर}^3}$$

उदाहरण 25 : 18 सेमी व्यास के पाइप में से जल 4 मीटर/सेकण्ड के वेग से प्रवाहित हो रहा है। पाइप का व्यास अचानक बढ़कर 36 सेमी हो जाता है। चौड़े पाइप में जल प्रवाह की गति तथा प्रवाह दर ज्ञात कीजिए।

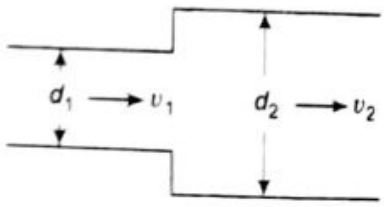
हल—दिया है :

$d_1 = 18$ सेमी $= 0{\cdot}18$ मीटर

$v_1 = 4$ मीटर/सेकण्ड

$d_2 = 36$ सेमी $= 0{\cdot}36$ मीटर

$v_2 = ?$



सातत्य के समीकरण के अनुसार,

$$a_1 v_1 = a_2 v_2$$

अत:
$$v_2 = \frac{a_1 v_1}{a_2} = \frac{\frac{\pi}{4}(0{\cdot}18)^2 \times 4}{\frac{\pi}{4}(0{\cdot}36)^2}$$

अत: वेग
$$\mathbf{v_2 = 1 \text{ मीटर/सेकण्ड}}$$

प्रवाह दर

$$Q = a_1 v_1$$

या
$$Q = \frac{\pi}{4}(0{\cdot}18)^2 \times 4$$

$$\mathbf{Q = 0{\cdot}102 \text{ मीटर}^3/\text{सेकण्ड}}$$

उदाहरण 26 : एक असमान परिच्छेद वाले क्षैतिज पाइप में जल बह रहा है। जिस स्थान पर पाइप की त्रिज्या 0 6 सेमी है, वहाँ जल के बहने की चाल 38 सेमी/सेकण्ड है। जिस स्थान पर पाइप की त्रिज्या 2·5 सेमी है, वहाँ जल की चाल ज्ञात कीजिए।

हल—प्रश्नानुसार,

$$A_1 = \pi r_1^2 = \pi\,(0{\cdot}6)^2 \text{ सेमी}^2$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$A_2 = \pi r_2^2 = \pi\,(2{\cdot}5)^2 \text{ सेमी}^2$$

$$v_1 = 38 \text{ सेमी/सेकण्ड}$$

$$v_2 = ?$$

अत: अविरलता के सिद्धान्त के अनुसार,

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

या $$v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2}$$

उपरोक्त समीकरण में A_1, v_1 तथा A_2 का मान रखने पर

$$v_2 = \frac{\pi\,(0{\cdot}6)^2 \times 38}{\pi\,(2{\cdot}5)^2} \text{ सेमी/सेकण्ड}$$

$$v_2 = \frac{0{\cdot}36 \times 38}{6{\cdot}25} \text{ सेमी/सेकण्ड}$$

$$\mathbf{v_2 = 2{\cdot}18 \text{ सेमी/सेकण्ड}}$$

उदाहरण 27 : एक क्षैतिज पाइप में जल के प्रवाह का वेग 17·0 मीटर/सेकण्ड है। जल का वेगशीर्ष ज्ञात कीजिए।

हल—प्रश्नानुसार,

$$v = 17{\cdot}0 \text{ मीटर/सेकण्ड}$$

अत: $$\text{वेग शीर्ष} = \frac{v^2}{2g} \text{ मीटर}$$

$$= \frac{(17{\cdot}0)^2}{2 \times 9{\cdot}8} \text{ मीटर} = \frac{289}{19{\cdot}6} \text{ मीटर}$$

वेग शीर्ष = 14·74 मीटर

उदाहरण 28 : असमान अनुप्रस्थ क्षेत्रफल के एक क्षैतिज पाइप में 0·6 मीटर^3/से की दर से जल का प्रवाह हो रहा है। पाइप के उस स्थान पर जल का वेग ज्ञात कीजिए जहाँ पर अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 0·03 मीटर^2 है।

हल—प्रश्नानुसार, $A_1 = 0{\cdot}03 \text{ मीटर}^2$

जल प्रवाह की दर $= 0{\cdot}6 \text{ मीटर}^3/\text{सेकण्ड}$

चूँकि, जल प्रवाह की दर $= Av$

अत: $$\text{जल का वेग } v = \frac{\text{जल प्रवाह की दर}}{A}$$

$$= \frac{0{\cdot}6}{0{\cdot}03} \text{ मीटर/सेकण्ड}$$

$$\mathbf{v = 20 \text{ मीटर/सेकण्ड}}$$

उदाहरण 29 : पानी के एक बन्द नल में दाबमापी का पाठ्यांक $3{\cdot}7 \times 10^5$ न्यूटन/मीटर^2 है। नल की टोंटी खोल देने पर दाबमापी का पाठ्यांक $2{\cdot}2 \times 10^5$ N / m^2 रह जाता है। टोंटी खोलने पर प्रवाहित पानी के वेग की गणना कीजिए, जबकि $\rho = 1 \times 10^3$ kg / m^3 है।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

हल—दिया है : $P_1 = 3{\cdot}7 \times 10^5 \text{ N/m}^2$

$P_2 = 2{\cdot}2 \times 10^5 \text{ N/m}^2$

$v_1 = 0$ (∵ नल बन्द है।)

$v_2 = ?$

अत: क्षैतिज पाइप के लिए, बरनौली प्रमेय के अनुसार,

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

या $$P_1 + 0 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

या $$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

या $$v_2^2 = \frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}$$

या $$v_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}}$$

या $$v_2 = \sqrt{\frac{2\,(3{\cdot}7 \times 10^5 - 2{\cdot}2 \times 10^5)}{1 \times 10^3}}$$

या $$v_2 = \sqrt{\frac{3 \times 10^5}{10^3}}$$

या $$v_2 = \sqrt{3 \times 10^2}$$

$v_2 = 17{\cdot}32$ मीटर/सेकण्ड

उदाहरण 30 : असमान अनुप्रस्थ काट के क्षैतिज पाइप में एक सिरे पर पानी 0·3 m / s के वेग से प्रवाहित होता है तथा दूसरे सिरे से 0·7 m / s के वेग से निकलता है। पहले सिरे पर पानी का दाब 1800 N / m² है। दूसरे सिरे पर पानी के दाब की गणना कीजिए। (पानी का घनत्व = $1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$)

हल—दिया है : $v_1 = 0{\cdot}3 \text{ m/s}$

$v_2 = 0{\cdot}7 \text{ m/s}$

$P_1 = 1800 \text{ N/m}^2$

$P_2 = ?$

अत: क्षैतिज पाइप के लिए, बरनौली के समीकरण के अनुसार,

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

या $$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho\,(v_1^2 - v_2^2)$$

$$P_2 = 1800 + \frac{1}{2} \times 10^3\,(0{\cdot}09 - 0{\cdot}49)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

या $$P_2 = 1800 + \frac{1}{2} \times 10^3 \, (-0 \cdot 4)$$

∴ $$\boldsymbol{P_2 = 1600 \, N / m^2}$$

उदाहरण 31 : एक असमान परिच्छेद वाली क्षैतिज नली AB से 0·7 ग्राम/सेमी^{3} घनत्व वाला कोई द्रव बह रहा है। नली पर स्थित किसी बिन्दु A की त्रिज्या 3 सेमी तथा B की त्रिज्या 0·75 सेमी है। बिन्दु A तथा B के मध्य दाबान्तर 9 सेमी (पारे का स्तम्भ) है। नली में बहने वाले द्रव के प्रवाह दर की गणना कीजिए। (g = 980 सेमी/सेकण्ड^2)

हल—असमान परिच्छेद वाली नली में द्रव प्रवाह की दर

$$Q = A_1 A_2 \sqrt{\left(\frac{2gh}{A_1^2 - A_2^2} \right)}$$ (वेन्च्यूरी मीटर)

यहाँ $$A_1 = \pi r_1^2 = \pi \, (3)^2 = 9\pi \text{ सेमी}^2$$

$$A_2 = \pi r_2^2 = \pi \, (0 \cdot 75)^2 = 0 \cdot 5625\pi \text{ सेमी}^2$$

$$g = 980 \text{ सेमी/सेकण्ड}^2$$

$$h = 9 \text{ सेमी (पारे का स्तम्भ)}$$

या $$Q = 9\,\pi \times 0 \cdot 5625\pi \sqrt{\frac{2 \times 980 \times 9}{(81\pi^2 - 0 \cdot 316\pi^2)}}$$

या $$Q = \frac{2 \cdot 85\,\pi^2}{\pi} \sqrt{\frac{17,640}{80 \cdot 684}}$$

या $$Q = 2 \cdot 85\pi \sqrt{218 \cdot 63}$$

∴ $$\boldsymbol{Q = 132 \cdot 388 \text{ सेमी}^3/\text{सेकण्ड}}$$

उदाहरण 32 : किसी वायुयान के मॉडल के पंख के ऊपर तथा नीचे वायु वेग 165 मीटर/सेकण्ड तथा 90 मीटर/सेकण्ड है। यदि वायु का घनत्व 1·41 किग्रा/मीटर^3 तथा दोनों पंखों की सतह का कुल क्षेत्रफल 3·6 मीटर^2 हो तो मॉडल पर ऊपर की ओर लगने वाले बल की गणना करो।

हल—बरनौली के प्रमेय के अनुसार,

पंख के ऊपर की समस्त ऊर्जाओं को योग = पंख के नीचे की समस्त ऊर्जाओं का योग

अत: $$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

पंख की मोटाई (thickness) नगण्य मानने पर,

$$h_1 = h_2$$

इसलिए $$P_1 + \frac{1}{2} \times 1 \cdot 41 \times (165)^2 = P_2 + \frac{1}{2} \times 1 \cdot 41 \times (90)^2$$

अत: दाबान्तर $$P_2 - P_1 = \frac{1}{2} \times 1 \cdot 41 \, [(165)^2 - (90)^2]$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \cdot 41 \, [19125]$$

$$= 13483 \cdot 125 \text{ पास्कल}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: ऊपर की ओर लगने वाला बल $= (P_2 - P_1) \times$ पंख की सतह का क्षेत्रफल

$= 13483 \cdot 125 \times 3 \cdot 6$

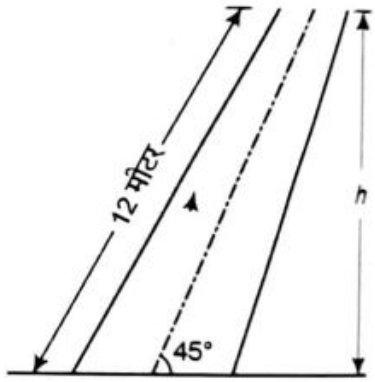
$= 48539 \cdot 25$ न्यूटन

उदाहरण 33 : घटती हुई काट के क्षेत्रफल वाले एक नल पाइप में जल प्रवाहित हो रहा है। पाइप की लम्बाई 12 मीटर तथा क्षैतिज से झुकाव 45° पर है। बड़ी काट पर क्षेत्रफल 9×10^{-2} मीटर^2 तथा छोटी काट पर क्षेत्रफल 7×10^{-3} मीटर^2 है। प्रवाह दर (विसर्जन) 1800 सेमी^{3}/सेकण्ड है। यदि बड़ी काट पर द्रव दाब 14×10^4 पास्कल हो तो छोटी काट पर दाब ज्ञात कीजिए।

हल—यदि बड़ी काट का क्षेत्रफल a_1, वेग v_1 तथा छोटी काट का क्षेत्रफल a_2 तथा वेग v_2 तथा $Q = 1800$ सेमी^{3} सेकण्ड हो तो सततता के समीकरण से

$$Q = a_1 v_1 = a_2 v_2$$

अत: $$v_1 = \frac{Q}{a_1}$$



$$v_1 = \frac{0 \cdot 0018}{9 \times 10^{-2}}$$

$$v_1 = 0 \cdot 02 \text{ मीटर/सेकण्ड}$$

और $$v_2 = \frac{0 \cdot 0018}{7 \times 10^{-3}}$$

$$v_2 = 0 \cdot 257 \text{ मीटर/सेकण्ड}$$

चित्रानुसार,

$$\frac{h}{12} = \sin 45°$$

या $$h = 12 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

या $$h = 8 \cdot 485 \text{ मीटर}$$

अब बरनौली प्रमेय से,

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

अत: $$14 \times 10^4 + \frac{1}{2} \times 10^3 \times (0 \cdot 02)^2 + 0 = P_2 + \frac{1}{2} \times 10^3 \times (0 \cdot 257)^2 + 10^3 \times 9 \cdot 8 \times 8 \cdot 485$$

$$14 \times 10^4 + 0 \cdot 2 = P_2 + 33 \cdot 025 + 83 \cdot 153 \times 10^3$$

$$P_2 = 14 \times 10^4 + 0 \cdot 2 - (33 \cdot 025 + 83 \cdot 153 \times 10^3)$$

$$P_2 = 14 \times 10^4 + 0 \cdot 2 - 83186 \cdot 025$$

$$P_2 = 56814 \cdot 175 \text{ पास्कल}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 34 : एक क्षैतिज पाइप में जल के प्रवाह का वेग 10 m/s है। जल का वेग शीर्ष ज्ञात कीजिए। ($g = 10$ m/s^2) **(UPBTE 1998)**

हल—

$$\text{वेग शीर्ष} = \frac{v^2}{2g} = \frac{10 \times 10}{2 \times 10}$$

$$= 5 \text{ मीटर}$$

अभ्यास (Exercises)

1. एक प्रत्यास्थ पदार्थ के लिये भार-खिंचाव ग्राफ खींचकर उस पर प्रत्यास्थता की सीमा (elastic limit) और पराभव बिन्दु (yield point) प्रदर्शित कीजिये।
2. प्रत्यास्थ (elastic) और सुघट्य (plastic) पदार्थों में अन्तर बताइये।
3. यंग गुणांक, आयतन गुणांक और दृढ़ता गुणांक की परिभाषा दीजिये।
4. एक प्रत्यास्थ पदार्थ के लिये भार खिंचाव वक्र खींचिये और उस पर प्रत्यास्थ सीमा, पराभव बिन्दु और भंजन बिन्दु प्रदर्शित कीजिये।
5. आयतनात्मक गुणांक (bulk-modulus) तथा अपरूपण-गुणांक (shear-modulus) को परिभाषित करें तथा इनके मात्रक ज्ञात करें।
6. निम्न प्रश्नों के उत्तर लिखें—
   (अ) पूर्ण दृढ़ (perfectly rigid) पिण्ड के पदार्थ का यंग प्रत्यास्थता गुणांक कितना होता है?
   (ब) पूर्णतया असंपडीय (incompressible) द्रव के आयतनात्मक प्रत्यस्थता गुणांक (B) का मान कितना होगा?
   (स) किसी द्रव का अपरूपण गुणांक (shear modulus) कितना होता है?
7. प्रतिबल, विकृति तथा यंग प्रत्यास्थता गुणांक को परिभाषित करें। वर्णन करें कि किसी लोहे के तार के यंग प्रत्यास्थता गुणांक (Y) का मान प्रयोग द्वारा किस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है?
8. यदि किसी तार को काट कर आधा कर दिया जाये तो समान भार लटकाने पर—
   (अ) लम्बाई में वृद्धि में क्या अन्तर आयेगा?
   (ब) विकृति में क्या अन्तर आयेगा?
   (स) भंजन प्रतिबल (breaking stress) में क्या अन्तर आयेगा?
9. यदि स्टील के लिये यंग प्रत्यास्थता गुणांक का मान पीतल से अधिक हो तो बतायें कि इसमें से किसको आसानी से खींचा जा सकता है? इनमें से कौन अधिक कठोर (stiffer) है?
10. विरूपक बल हटा लेने पर कोई विकृत पदार्थ किस प्रकार व्यवहार करता है जबकि विकृति (i) प्रत्यास्थ (elastic) तथा (ii) प्लास्टिक (plastic) हो।
11. पृष्ठ ऊर्जा तथा पृष्ठ तनाव में सम्बन्ध स्थापित कीजिए।
12. आणविक सीमा के आधार पर पृष्ठ तनाव को स्पष्ट कीजिए।
13. पृष्ठ तनाव की व्याख्या करते हुए इसकी विमा तथा मात्रक लिखिए। **(UPBTE 2011)**
14. बरनौली प्रमेय का उल्लेख कीजिए तथा उसे सिद्ध कीजिए। इस प्रमेय का व्यावहारिक उपयोग बताइए। **(UPBTE 2010, 07)**
15. क्या कारण है कि तेज आँधी में घर की छत में प्रयुक्त टीन की चादरें अथवा छप्पर आदि उड़ जाती हैं?
16. केशिकात्व के सन्दर्भ में $h = \frac{2T\cos\theta}{r\rho g}$ सूत्र की स्थापना कीजिए। **(UPBTE 2011)**

AYC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

17. रेनॉल्ड संख्या क्या है? इस संख्या से आप द्रव प्रवाह किस प्रकार ज्ञात करेंगे? **(UPBTE 2007)**

18. एक केशनली में जल ऊपर चढ़ता है परन्तु पारा थोड़ा गिर जाता है जब केशनली को ऊर्ध्वाधर थोड़ा डुबोया जाता है। समझाइए, क्यों? **(UPBTE 2013)**

19. वर्गाकार अनुप्रस्थ काट, जिसकी माप $1{\cdot}00\ \text{mm} \times 1{\cdot}00\ \text{mm}$ है, के किसी ताँबे के तार को 40 N बल से खींचने से तार में उत्पन्न तनन प्रतिबल का मान ज्ञात करें।

20. 6 cm लम्बी रजड़ के ठोस तार को इतना खींचा जाता है कि उसकी लम्बाई 9 cm हो जाये। तार में तनन विकृति को (i) अनुपात तथा (ii) प्रतिशत में ज्ञात करें।

21. $0{\cdot}20$ cm व्यास के दो $1{\cdot}5$ m लम्बे स्टील तथा फॉस्फर ब्राँज (phosphor bronze) के तारों को जोड़कर $3{\cdot}0$ m लम्बा तार बनाया गया है। इस तार में कितना तनन बल लगाया जाये ताकि कुल खिंचाव $0{\cdot}064$ cm हो? (स्टील का $Y = 2{\cdot}0 \times 10^{11}$ तथा फॉस्फर ब्राँज का $Y = 1{\cdot}2 \times 10^{11}$ pa)

22. 10 मीटर लम्बी रबड़ की डोरी को यदि एक सिरे से लटका दिया जाये तो बतायें कि वह अपने भार से कितना खिंच जायेगी? (रबड़ का घनत्व $= 1{\cdot}5 \times 10^3\ \text{kg m}^{-3}$ रबड़ का $Y = 5 \times 10^8\ \text{nm}^{-2}$ तथा $g = 10\ \text{m/s}^2$)

23. स्टील का भंजन प्रतिबल (breaking stress) $8{\cdot}0 \times 10^6\ \text{nm}^{-2}$ तथा घनत्व (density) $8{\cdot}0 \times 10^3\ \text{kgm}^{-3}$ है। अधिकतम कितनी लम्बाई का स्टील तार लटकाया जा सकता है ताकि वह अपने ही भार से न टूटे? ($g = 10\ \text{ms}^{-2}$)

24. किसी तार के पदार्थ का भंजन प्रतिबल (breaking stress) $1{\cdot}0 \times 10^9$ Pa है। ज्ञात करें कि इसे तार (अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $= 4{\cdot}0 \times 10^{-4}\ \text{cm}^2$) में 10 kg का बाँट लटकाने पर तार टूटेगा या नहीं।

25. $1500\ \text{cm}^3$ आयतन के किसी तरल (fluid) पर जब $5{\cdot}0 \times 10^6\ \text{N m}^{-2}$ दाब परिवर्तन लाया जाता है तो उसके आयतन में $3{\cdot}0 \times 10^{-7}\ \text{N m}^3$ का परितर्वन हो जाता है। तरल का बल्क-मापांक (bulk modulus) ज्ञात करें।

26. एक नायलोन (nylon) रस्सी का व्यास $2{\cdot}5$ cm तथा उसका भंजन सामर्थ्य (breaking strengh) $1{\cdot}24 \times 10^5$ N है। ठीक उसी प्रकार की रस्सी का भंजन प्रतिबल ज्ञत करें यदि व्यास (a) $1{\cdot}25$ cm तथा (b) 5 cm हो।

27. एक ऐलुमिनियम तार का व्यास 3 mm तथा लम्बाई 4 m है। इस तार से 50 kg का बाँट लटका हुआ है। तार की लम्बाई में वृद्धि ज्ञात करें। ऐलुमिनियम का यंग प्रत्यास्थता गुणांक $= 7 \times 10^{10}$ Pa

28. एक केशनली की त्रिज्या $0{\cdot}25$ मिमी है। इसे एक द्रव में जिसका घनत्व $0{\cdot}8 \times 10^3$ किग्रा/मीटर^3, पृष्ठ-तनाव $3{\cdot}0 \times 10^{-2}$ न्यूटन/मीटर तथा स्पर्श कोण की कोज्या $0{\cdot}3$ है, ऊर्ध्वाधर खड़ा किया जाता है। ज्ञात कीजिए नली में द्रव कितनी ऊँचाई तक चढ़ेगा? **[उत्तर :** $9{\cdot}1 \times 10^{-4}$ मीटर**]**

29. 10 सेमी भुजा वाला एक वर्गाकार फ्रेम साबुन के घोल में डाला जाता है। बाहर निकालने पर एक फिल्म बन जाती है, यदि घोल का पृष्ठ तनाव $0{\cdot}07$ न्यूटन/मीटर हो तो फ्रेम पर लगने वाला बल ज्ञात कीजिए। **[उत्तर :** $0{\cdot}056$ न्यूटन**]**

30. $1{\cdot}0$ मिमी त्रिज्या की बूँद को समान आकार की 10^6 बूँदों में परिवर्तित करने की क्रिया में, नियत ताप पर कितना कार्य करना पड़ेगा, यदि जल का पृष्ठ तनाव 72×10^{-3} जूल/मीटर है? **[उत्तर :** $8{\cdot}93 \times 10^{-5}$ जूल**]**

31. 8 सेमी त्रिज्या की एक प्लेट पानी में क्षैतिज डूबी हुई है। प्लेट को पानी की सतह से बाहर निकालने के लिए आवश्यक बल की गणना करो। दिया है पानी का पृष्ठ-तनाव 72×10^{-3} न्यूटन-मीटर$^{-1}$। **[उत्तर :** $3{\cdot}6 \times 10^{-2}$ जूल**]**

32. एक असमान परिच्छेद वाले क्षैतिज पाइप में जल बह रहा है। जिस स्थान पर पाइप की त्रिज्या $0{\cdot}4$ सेमी है, वहाँ जल के बहने की चाल 25 सेमी/सेकण्ड है। जिस स्थान पर पाइप की त्रिज्या $2{\cdot}0$ सेमी है, वहाँ जल की चाल ज्ञात कीजिए। **[उत्तर :** 1 सेमी/सेकण्ड**]**

33. एक क्षैतिज पाइप में जल बह रहा है। उसकी दो काटों पर प्रवाह वेग क्रमश: 1 मी०/से० तथा 4 मी/से है। यदि प्रथम काट पर दाब $3{\cdot}2 \times 10^5$ पास्कल हो, तो दूसरी काट पर दाब ज्ञात कीजिए। **[उत्तर :** $3{\cdot}125 \times 10^5$ पास्कल**]**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

34. असमान अनुप्रस्थ काट के क्षैतिज पाइप में एक सिरे पर पानी 0·4 मी/से के वेग से प्रवाहित होता है तथा दूसरे सिरे से 0·6 मीटर/सेकण्ड के वेग से निकलता है। पहले सिरे पर पानी का दाब 1500 न्यूटन/मी^{2} है। दूसरे सिरे पर पानी के दाब की गणना कीजिए। (पानी का घनत्व = $1{\cdot}0\times10^3$ किग्रा/मीटर^3)

[उत्तर : 1400 न्यूटन/मीटर^2]

आंकिक प्रश्नों के संक्षिप्त हल

(26) क्योंकि भंजन प्रतिबल (F/A) का मान सभी नायलोन रस्सियों के लिये एक ही होगा इसलिये रस्सियों के भंजन सामर्थ्य (breaking strength) का मान उनके अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल (A) के समानुपाती होगा। क्योंकि d व्यास के वेलन का अनुप्रथ काट का क्षेत्रफल $A=\pi r^2=\pi\ (d/2)^2=\pi\ (d^2/4$ इसलिये F का मान d^2 के समानुपाती होगा। इस प्रकार—

(a) 1·25 cm व्यास वाले तार का भंजन सामर्थ्य

$$=\frac{(1{\cdot}25\,\text{cm})^2}{(2{\cdot}5\,\text{cm})^2}\times 2{\cdot}5\,\text{cm}$$ व्यास वाले तार का विभंजन सामर्थ्य

$$=\frac{1}{4}\times(1{\cdot}24\times10^5\ \text{N}$$

$$=\mathbf{3{\cdot}1\times10^4\ N}$$

(b) व्यास वाले तार का भंजन सामर्थ्य

$$=\left(\frac{5\,\text{cm}}{2{\cdot}5\,\text{cm}}\right)^2\times(1{\cdot}24\times10^5\ \text{N}$$

$$=\mathbf{4{\cdot}96\times10^5\ N}$$

(27) तार के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A

$$A=\pi r^2=\pi\times(1{\cdot}5\times10^{-3}\ \text{m})^2=7{\cdot}07\times10^{-6}\ \text{m}^2$$

लगाया गया बल

$$F=mg=50\,\text{kg}\times9{\cdot}8\,\text{m/s}^2=\mathbf{490\,N}$$

(28) प्रश्नानुसार, दिये गये मानों को सूत्र $h=\dfrac{2T\cos\theta}{r\rho g}$ में रखने पर $h=\dfrac{2\times3{\cdot}0\times10^{-2}\times0{\cdot}3}{2{\cdot}5\times10^{-4}\times8{\cdot}0\times10^3\times9{\cdot}8}=\mathbf{9{\cdot}1\times10^{-4}}$ **मीटर**

(29) चूँकि फिल्म की दो सतह होती हैं अत: यदि फ्रेम की भुजा की लम्बाई l हो तो फ्रेम पर बने फिल्म की प्रभावी लम्बवाई $2(4l)$ होगी।

अत: $T=\dfrac{F}{8l}\Rightarrow F=T\times8l=0{\cdot}07\times8\times1\times10^{-1}=\mathbf{0{\cdot}056}$ **न्यूटन**

(30) प्रश्नानुसार, बड़ी बूँद का आयतन $=10^6\times$ छोटी बूँद का आयतन

यदि बड़ी बूँद की त्रिज्या R तथा छोटी बूँद की त्रिज्या r हो, तो

$$\frac{4}{3}\pi R^3=10^6\times\frac{4}{3}\pi r^3$$

या $$R=100r\Rightarrow r=\frac{R}{100}$$

बड़ी बूँद का क्षेत्रफल, $A_1=4\pi R^2$

10^6 छोटी बूँदों का पृष्ठ क्षेत्रफल, $A_f=10^6\times4\pi r^2$

$$=10^6\times4\pi\left(\frac{R}{100}\right)^2=400\,\pi R^2$$

क्षेत्रफल में हुई वृद्धि, $\Delta A=A_f-A_i$

$$=400\pi R^2-4\pi R^2=1{\cdot}24\times10^{-3}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: कृत कार्य $W = T \times \Delta A$

$$= 72 \times 10^{-3} \times 1 \cdot 24 \times 10^{-3}$$

$$= \mathbf{8 \cdot 93 \times 10^{-5}}$$ **जूल**

(31) प्रश्नानुसार, प्लेट का परिमाप $P = 2\pi r$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 8 \times 10^{-2} \text{ मीटर} = 0 \cdot 50 \text{ मीटर}$$

अत: आवश्यक बल = पृष्ठ तनाव × लम्बाई

$$= 72 \times 10^{-3} \times 0 \cdot 50 \text{ न्यूटन} = \mathbf{3 \cdot 6 \times 10^{-2}}$$ **न्यूटन**

(32) प्रश्नानुसार, $A_1 = \pi r_1^2 = \pi (0 \cdot 4)^2$ सेमी^{2} इसी प्रकार $A_2 = \pi (2 \cdot 0)^2$

$\because \quad A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \dfrac{A_1 v_1}{V_2}$

अत: $v_2 = \dfrac{\pi (0 \cdot 4)^2 \times 25}{\pi (2 \cdot 0)^2} =$ **1 सेमी/सेकण्ड**

(33) प्रश्नानुसार, क्षैतिज पाइप के लिए बरनौली प्रमेय से

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

या $3 \cdot 2 \times 10^5 + \dfrac{1}{2} \times 1000 \times (1)^2 = P_2 + \dfrac{1}{2} \times 1000 \times (4)^2$

अत: $\mathbf{P_2 = 3 \cdot 125 \times 10^5}$ **पास्कल**

(34) क्षैतिज पाइप के लिये, बरनौली प्रमेय के अनुसार,

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

या $$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho (v_1^2 - v_2^2)$$

या $$P_2 = 1500 + \frac{1}{2} \times 10^3 (0 \cdot 16 - 0 \cdot 36)$$

$$P_2 = \mathbf{1400}$$ **न्यूटन/मीटर^2** ❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Chapter 7 ऊष्मा एवं ऊष्मागतिकी (Heat and Thermodynamics)

SYLLABUS

7.1 *Difference between heat and temperature*
7.2 *Modes of transfer of heat (Conduction, convection and radiation with examples)*
7.3 *Different scales of temperature and their relationship*
7.4 *Expansion of solids, liquids and gases, coefficient of linear, surface and cubical expansions and relation amongst them.*
7.5 *Heat conduction in a metal rod, Temperature gradient, Concepts of Co-efficient of thermal conductivity, Uses and effects of Heat conduction in Daily life.*
7.6 *Isothermal and Adibatic process.*
7.7 *Zeroth, First and second law of thermodynamics, Heat engine (concept only), Carnot cycle.*
7.8 *Application of various systems of thermometry in refrigeration and air-conditioning etc.*

§7.1 परिचय (Introduction)

प्रागैतिहासिक काल से वर्तमान समय तक मनुष्य उन्नत जीवनयापन की चाह में नित नये खोज तथा नित नये प्रयोग करता रहा है।

हजारों अनुसंधानों तथा खोजों में, दो खोज युगान्तरकारी थे— 'आग' की खोज तथा 'पहिये' की खोज।

पहिये की खोज ने जहाँ पहुँच के मार्ग सरल कर दिये, मंजिलों की दूरियाँ समय के परिप्रेक्ष्य में घटा दीं, वहीं 'आग' की खोज ने मनुष्य के जीवन को उन्नत किया, प्राण रक्षा का आधार बनाया तथा पहिये को गति देकर कल-कारखानों, मशीनों को अस्तित्व में ला खड़ा किया।

तत्समय की 'आग', वर्तमान में "ऊष्मा एवं ऊष्मागतिकी" के अध्ययन की विषय-वस्तु बनी।

§7.2 ऊष्मा एवं ताप में अन्तर (Difference between Heat and Temperature)

7.2.1 ऊष्मा (Heat)

ऊष्मा एक प्रकार की ऊर्जा है जिसके कारण हमें गर्मी तथा ठण्डक का एहसास होता है। यह अधिक ताप वाली वस्तु से कम ताप वाली वस्तु की ओर तब चलती है जब दोनों वस्तुएँ परस्पर संपर्क में रखी हों। ऊष्मा के प्रवेश से वस्तु गर्म तथा निर्गमन से ठण्डी हो जाती है।

ऊष्मा को दूसरी तरह से भी परिभाषित किया जा सकता है—

'ऊष्मा' वह ऊर्जा है जो वस्तुओं की अवस्था में परिवर्तन कर सकती (change in state) है; जैसे—गर्म करने पर पानी का भाप (steam) बनना या ठण्डा होने पर पानी का बर्फ बन जाना।

"Energy in the course of being transferred from one body or system to another as a result of difference in temeperature is called heat."

ऊष्मा का मात्रक (Unit of Heat)

(i) **सेमी ग्राम सेकण्ड पद्धति (C.G.S. System)** में ऊष्मा का मात्रक कैलोरी (calorie) है जिसे हम निम्न प्रकार से परिभाषित करते है—

एक ग्राम पानी का ताप 1 °C बढ़ाने (14·5 °C से 15·5 °C) के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा 1 कैलोरी (calorie) कहलाती है। संक्षेप में इसे cal कहते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(ii) मीटर किग्रा सेकण्ड पद्धति (M.K.S. System) में ऊष्मा का मात्रक किलोकैलोरी (kilocalorie) है जिसे संक्षेप में kcal कहते है।

$$1 \text{ kcal} = 10^3 \text{ cal}$$

(iii) मात्रकों की अन्तर्राष्ट्रीय प्रणाली (S.I. Unit) में ऊष्मा का मात्रक जूल (joule) है जिसे संक्षेप में J से निरूपित करते है।

$$1 \text{ cal} = 4{\cdot}18 \text{ joule या (J)}$$

या

$$1 \text{ kcal} = 4{\cdot}18 \times 10^3 \text{ joule (J)}$$

ऊष्मा की विमा (Dimension of heat) = $[ML^2T^{-2}]$

7.2.2 ताप की अभिधारणा (Concept of Temperature)

ताप किसी वस्तु की वह ऊष्मीय अवस्था है जो हमें यह बोध कराती है कि वस्तु कितनी गर्म अथवा कितनी ठण्डी है। यदि छूने पर हमे कोई वस्तु A, किसी अन्य वस्तु B की अपेक्षा गर्म लगती है तो हम कहते हैं कि A का ताप B के ताप से अधिक है अथवा B का ताप A के ताप से कम है। **अत: किसी वस्तु का ताप उसकी गर्माहट अथवा ठण्डेपन का बोध कराती है।**

"Tempreature is the degree of hotness or coldness of the body."

यदि दो वस्तुओं A तथा B को, जिसमें A का ताप अधिक है और B का ताप कम है, एक-दूसरे के सम्पर्क में रख दिया जाए तो ऊष्मा वस्तु A से वस्तु B में बहने लगती है। ऊष्मा का प्रवाह उस समय तक होता है जब तक कि दोनों का ताप बराबर नही हो जाता। इसके पश्चात् ऊष्मा का बहना रुक जाता है। इस अवस्था में वस्तुएँ A तथा B एक-दूसरे के **'तापीय साम्य'** (Thermal Equilibrium) में कहलाती हैं।

तापीय साम्य अवस्था के सिद्धान्त से हमें ताप की अभिधारणा मिलती है। उन सभी वस्तुओं में जो एक-दूसरे के सम्पर्क में तापीय साम्य में होती हैं, एक सर्वनिष्ठ (common) गुण पाया जाता है, इस गुण को ताप (Temperature) कहते हैं। इस प्रकार, **किसी वस्तु का ताप वह गुण है जिससे हमें ज्ञात होता है कि वह वस्तु अन्य वस्तुओं के साथ तापीय साम्य में है अथवा नहीं।**

"Temperature is the inherent property of any body which shows whether the body is in thermal equilibrium with others or not."

ताप मापने के लिए ऐसे यंत्र जिनमें ताप का मापक्रम प्रयुक्त होता है तापमापी (Thermometer) कहलाते हैं। तापमापी मे ताप का मापक्रम (scale of temperature) बनाने के लिए दो ऐसे स्थिर बिन्दुओं को चुनते हैं जिन्हें किसी भी समय सरलता से प्राप्त किया जा सके। इन बिन्दुओं के बीच का ताप अन्तर जिसे प्रमाणिक अन्तर कहते हैं, बराबर-बराबर भागों में बाँट लेते हैं। इस प्रकार प्राप्त प्रत्येक भाग को **डिग्री** (Degree) कहते हैं।

§ 7.3 ऊष्मा संचरण की विधियाँ (Methods of Transmission of Heat)

ऊष्मा का एक स्थान से दूसरे स्थान अथवा एक वस्तु से दूसरे वस्तु तक तापान्तर के कारण जाना ऊष्मा का संचरण कहलाता है। ऊष्मा का संचरण उच्च ताप से निम्न ताप की ओर होता है। ऊष्मा संचरण की तीन विधियाँ हैं—

(1) चालन (Conduction) (2) संवहन (Convection) (3) विकिरण (Radiation)।

7.3.1 ऊष्मा का चालन (Conduction of Heat)

जब किसी वस्तु के विभिन्न भागों में तापान्तर होता है, तो वस्तु के उच्च ताप वाले कण निकटवर्ती निम्न ताप वाले कणों को परस्पर सम्पर्क द्वारा ऊष्मा देते हैं। फलत: उच्च ताप के स्थान से निम्न ताप के स्थान की ओर ऊष्मा का संचरण होता है। इस प्रक्रिया में माध्यम की आवश्यकता होती है, परन्तु माध्यम के कण अपने स्थान से नहीं हटते हैं।

ऊष्मा संचरण की इस विधि को जिसमें ऊष्मा एक स्थान से दूसरे स्थान तक पदार्थ के कणों के अपने स्थान से बिना हटे ही पहुँच जाती है "चालन" कहते हैं।

"Mode of heat transmission, in which particles of the body successively transfer heat from one to other nearby particles and do not leave their position, is called conduction."

ARC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरणार्थ, जब किसी धातु की छड़ के एक सिरे को आग में रखते हैं तो ऊष्मा छड़ के गर्म सिरे से ठण्डे सिरे की ओर "चालन" द्वारा ही पहुँचती है। अर्थात् कुछ समय पश्चात् दूसरा सिरा भी गर्म हो जाता है। ठोसों तथा पात्र में ऊष्मा का संचरण चालन द्वारा ही होती है।

7.3.2 ऊष्मा का संवहन (Convection of Heat)

जब किसी द्रवीय अथवा गैसीय पदार्थ के विभिन्न भागों में तापान्तर होता है, तो तापीय आयतन प्रसार के कारण उच्च ताप के स्थानों पर पदार्थ का घनत्व अपेक्षाकृत नीचे ताप के स्थानों से कम पाया जाता है। तरल के उच्च ताप वाले अंश हल्के होने से ऊपर उठने लगते हैं तथा इन भागों के कणों का स्थान लेने के लिए ऊपर के भारी कण (जिनका ताप कम होता है) नीचे आने लगते हैं। यह प्रक्रिया तब तक चलती रहती है जब तक कि सम्पूर्ण पदार्थ का ताप एक समान नहीं हो जाता है। इस प्रकार माध्यम में संवहन धारायें (Convection Currents) उत्पन्न हो जाती हैं। स्पष्ट है कि इस प्रक्रिया के लिए माध्यम के कणों का गतिमान होना आवश्यक है।

ऊष्मा के संचरण की इस विधि को, जिसमें माध्यम के कण ऊष्मा लेते हुए अपना स्थान छोड़कर स्वयं दूसरे स्थान तक जाते हैं और दूसरे कण उनके स्थान पर आ जाते हैं, "संवहन" कहते हैं।

"Mode of heat transfer in which particles of the substance leave their position is called convection."

उदाहरणार्थ—आग पर रखे बर्तन का द्रव संवहन द्वारा ही गर्म होता है। संवहन केवल तरल पदार्थों (द्रवों अथवा गैसों) में ही होता है (ठोसों में नहीं)। इसका कारण यह है कि द्रव तथा गैसों के कण एक स्थान से दूसरे स्थान तक सरलता से जा सकते हैं। द्रवों तथा गैसों में ऊष्मा का संचरण चालन द्वारा भी सम्भव है, परन्तु इसका अनुपात बहुत कम होता है।

संवहन की प्रक्रिया तभी होती है जब ताप प्रवणता नीचे से ऊपर की ओर हो। संवहन का आधार भार और उछाल (up-thrust) में अन्तर के कारण होता है। ताप प्रवणता के क्षैतिज दिशा में होने पर द्रव में संवहन क्रिया नहीं हो पाती है।

चित्र 7.1

7.3.3 ऊष्मा का विकिरण (Radiation of Heat)

किसी गर्म वस्तु से ऊष्मा विद्युत चुम्बकीय तरंगों (electromagnetic waves) के रूप में निकलती है। इसे "विकिरण" (Radiation) कहते हैं। विकिरण प्रकाश के वेग से सीधी रेखा में चलती है। गर्म वस्तु से उत्सर्जित विकिरण अपेक्षाकृत ठण्डे तल पर जब पड़ती है तो उसे गर्म कर देती है। इसके संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती तथा सम्भावित माध्यम गर्म भी नहीं होता है।

ऊष्मा के संचरण की इस विधि को जिसमें माध्यम की आवश्यकता नहीं होती है "विकिरण" कहते हैं।

"Mode of heat transfer without any assistance of material particles and without affecting the intervening medium, is called radiation."

उदाहरणार्थ—सूर्य से पृथ्वी पर ऊष्मा विकिरण द्वारा ही पहुँचती है। चालन और संवहन द्वारा ऊष्मा का संचरण धीरे-धीरे होता है, जबकि विकिरण द्वारा ऊष्मा प्रकाश की चाल से संचरित होती है। इसके अतिरिक्त चालन और संवहन में ऊष्मा संचरण का मार्ग टेढ़ा-मेढ़ा भी हो सकता है, परन्तु विकिरण का मार्ग प्रकाश की भाँति ऋजुरेखीय ही होता है।

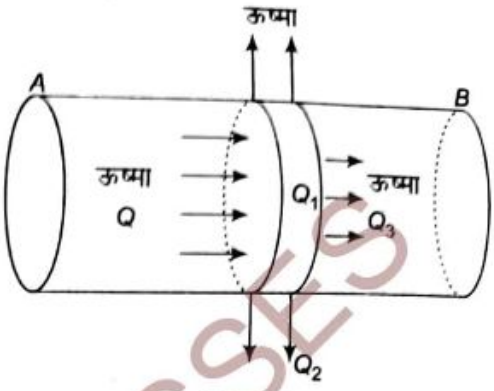
AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 7.4 चालन (Conduction)

7.4.1 धातु की छड़ में ऊष्मा का चालन (Heat Conduction in a Metal Rod)

धातु की समान परिच्छेद की किसी छड़ के एक सिरे को गर्म करने पर ऊष्मा चालन द्वारा गर्म सिरे A से ठण्डे सिरे B तक पहुँचने लगती है। छड़ को अनेक परिच्छेदों में बँटा हुआ माना जा सकता है। चालन की क्रिया में छड़ का प्रत्येक पच्छिेद अपने पीछे वाले परिच्छेद से ऊष्मा लेता है। माना यह Q है। इस ऊष्मा का कुछ भाग Q_1 वह परिच्छेद स्वयं अवशोषित कर अपना ताप बढ़ाता है। कुछ भाग Q_2 परिच्छेद के पृष्ठ से विकिरण द्वारा वातावरण में चला जाता है। केवल ऊष्मा के शेष भाग Q_3 को वह अपने से अगले परिच्छेद को संचरित करता है (चित्र 7.2)। स्पष्ट है कि



चित्र 7.2

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

छड़ की इस प्रारम्भिक अवस्था में प्रत्येक परिच्छेद का ताप समय के साथ बढ़ता है। अत: इस अवस्था को छड़ की **परिवर्ती अवस्था** (Variable State) कहते हैं।

"State of the rod in which temperature of each cross-section of the rod is increasing with time, is called the variable state."

परिवर्ती अवस्था में ऊष्मा संचरण की दर छड़ की ऊष्मा-चालकता एवं ऊष्माधारिता दोनों पर निर्भर करती है।

"In variable state the rate of conduction of heat in the rod depends upon the conductivity and thermal capacity of the material of the rod."

छड़ के सिरे A को लगातार गर्म करते रहने पर कुछ समय बाद छड़ के प्रत्येक परिच्छेद की ताप वृद्धि रुक जाती है अथवा ताप स्थिर हो जाता है। इस दशा में छड़ का प्रत्येक परिच्छेद अपने पीछे वाले परिच्छेद से जो ऊष्मा लेता है, उसका कुछ भाग परिच्छेद के पृष्ठ से संवहन तथा विकिरण द्वारा वातावरण में चला जाता है तथा शेष भाग को वह अपने से अगले परिच्छेद को संचरित कर देता है। तात्पर्य यह है कि इस अवस्था में छड़ का प्रत्येक परिच्छेद अपना ताप बढ़ाने के लिए ऊष्मा का अवशोषण नहीं करता $[Q_1 = 0]$ ।

छड़ की उस अवस्था को जिसमें छड़ का कोई भी भाग ऊष्मा का अवशोषण नहीं करता है, स्थायी अवस्था (steady state) कहते हैं।

"The state in which each cross-section stops absorption of heat and temperature of each section becomes constant, is called steady state."

स्थायी अवस्था में छड़ के प्रत्येक भाग का ताप अलग-अलग परन्तु स्थिर होता है। जैसे-जैसे छड़ के गर्म सिरे से दूर जाते हैं, ताप घटता जाता है। यदि छड़ को ऊष्मारोधी पदार्थ (जैसे रुई, ऊन इत्यादि) से ढक दिया जाए जिससे कि संवहन तथा विकिरण द्वारा ऊष्मा का क्षय न हो $(Q_2 = 0)$ तो छड़ के प्रत्येक परिच्छेद को जितनी ऊष्मा पिछले परिच्छेद से मिलेगी, स्थायी अवस्था में उतनी ही ऊष्मा अगले परिच्छेद को संचरित हो जाएगी। इस दशा में $Q = Q_3$; $Q_1 = 0$ तथा $Q_2 = 0$ । **स्थायी अवस्था में छड़ में ऊष्मा संचरण की दर केवल छड़ के पदार्थ की ऊष्मा-चालकता पर निर्भर करती है (छड़ की ऊष्माधारिता पर नहीं।)**

"In steady state the rate of conduction of heat in the rod depends only upon the conductivity (and not upon the thermal capacity) of the material of the rod."

7.4.2 समतापी पृष्ठ (Isothermal Surface)

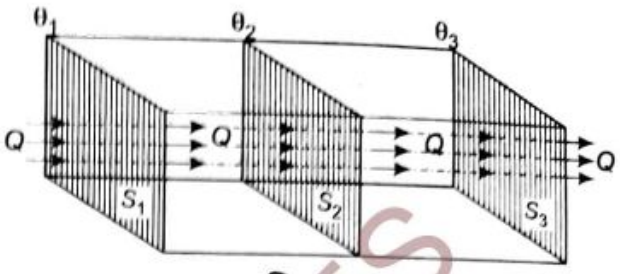
यदि स्थायी अवस्था में छड़ की लम्बाई के लम्बवत् कोई पृष्ठ काटा जाये तो इसका प्रत्येक बिन्दु समान ताप पर होगा। **ऐसा पृष्ठ जिसका प्रत्येक बिन्दु समान ताप पर होता है समतापीय पृष्ठ कहलाता है।**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

"The surface of the substance at which the temperature at every point is same is called isothermal surface."

पदार्थ में किसी बिन्दु पर ऊष्मा चालन की दिशा उस बिन्दु से जाने वाले समतापीय पृष्ठ के लम्बवत् होती है।

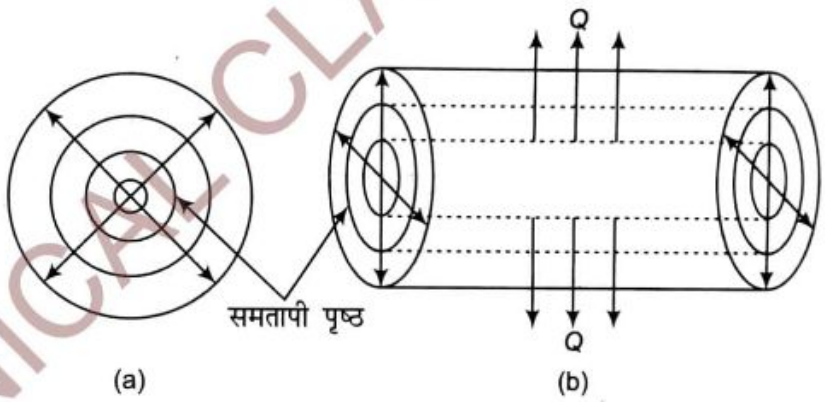


चित्र 7.3

उपरोक्त चित्र (7.3) में धातु की छड़ की स्थायी अवस्था दर्शायी गयी है। इस छड़ के पार्श्वों से संवहन या विकिरण विधियों द्वारा बाहर जाने वाली ऊष्मा नगण्य है। छड़ के किसी भी एक अनुप्रस्थ परिच्छेद पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का ताप एक है; परन्तु छड़ के विभिन्न परिच्छेदों के ताप अलग-अलग हैं, ताप गर्म सिरे से ठण्डे सिरे की ओर कम होता जाता है, अर्थात् $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3$। स्पष्ट है कि छड़ का प्रत्येक अनुप्रस्थ परिच्छेद $S_1, S_2, S_3, ...$ समतापी पृष्ठ है। चूँकि छड़ में सभी स्थानों पर ऊष्मा संचरण की दिशाएँ परस्पर समान्तर हैं, छड़ का प्रत्येक समतापी पृष्ठ एक समतल पृष्ठ है।

यदि किसी पदार्थ में ऊष्मा चालन विभिन्न दिशाओं में होता है तो समतापीय पृष्ठ वक्र होते हैं। उदाहरणत:—चालक यदि एक समान (uniform) गोले के रूप में हो तथा ऊष्मा स्रोत इसके केन्द्र पर स्थित हो तब स्थायी दशा में स्रोत से ऊष्मा का चालन त्रिज्य (radial) होगा तथा समतापीय पृष्ठ गोलीय (spherical) होंगे, चित्र 7.4 (a)।

इसी प्रकार यदि किसी नली में भाप प्रवाहित करें तो ऊष्मा नली के दीवारों में होकर संचरित होगी। इस दशा में समतापीय पृष्ठ बेलनाकार (cylindrical) होंगे, (चित्र 7.4 (b))।



चित्र 7.4

7.4.3 ताप प्रवणता (Temperature Gradient)

किसी माध्यम में दो समतापी पृष्ठों के बीच की दूरी के साथ ताप परिवर्तन की दर को ताप प्रवणता कहते हैं।

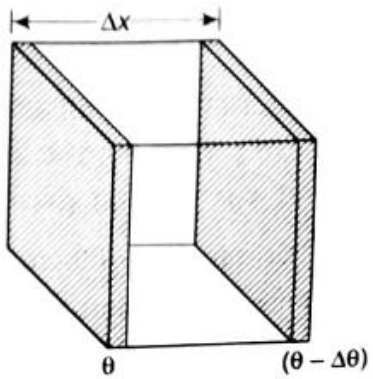
"In the steady state, temperature difference per unit length between two isothermal surfaces is called temperature gradient."

चित्र (7.5) में दो समतापी पृष्ठ दिखाये गये हैं। इनके मध्य लम्ब दूरी Δx है तथा इनके ताप क्रमश: θ व $(\theta - \Delta\theta)$ हैं। इन पृष्ठों के बीच

$$\text{ताप प्रवणता} = \frac{\text{ताप अन्तर}}{\text{दूरी}} = \frac{(\theta - \Delta\theta) - \theta}{\Delta x}$$

अत: $$\textbf{ताप-प्रवणता} = \frac{\Delta\theta}{\Delta x} \quad \text{... (1)}$$

अत: "मात्रक लम्ब दूरी पर स्थित दो समतापीय पृष्ठों के बीच तापान्तर को ताप-प्रवणता कहते हैं।"



चित्र 7.5

यह एक सदिश राशि है जिसकी दिशा कम ताप से उच्च ताप की ओर होती है। इसलिए ऊष्मा चालन की दिशा, ताप-प्रवणता की दिशा के विपरीत होती है। इसका मात्रक °C/मीटर या K/मीटर होता है।

ARC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

7.4.4 ऊष्मा चालकता गुणांक की अवधारण (Concept of Co-efficient of Thermal Conductivity)

माना कि एक लम्बी व एकसमान अनुप्रस्थ-परिच्छेद की सुचालक छड़ स्थायी अवस्था (steady state) में है। छड़ के दो समतापी समतल पृष्ठों के ताप θ व $\theta - \Delta\theta$ हैं तथा पृष्ठों के बीच लम्बवत् दूरी Δx है (चित्र 7.6)। प्रयोगों द्वारा यह देखा गया है कि समतापी पृष्ठों के अभिलम्बवत् t समय में प्रवाहित होने वाली ऊष्मा की मात्रा Q —

(i) प्रत्येक पृष्ठ के क्षेत्रफल A के अनुक्रमानुपाती होती है,

(ii) पृष्ठों के बीच ताप-प्रवणता $-\Delta\theta/\Delta x$ के अनुक्रमानुपाती होती है, तथा

(iii) समय t के अनुक्रमानुपाती होती है।

इस प्रकार, $$Q \propto -A\frac{\Delta\theta}{\Delta x}t$$

अथवा $$\boldsymbol{Q = -KA\frac{\Delta\theta}{\Delta x}t} \quad \text{... (2)}$$

जहाँ K एक नियतांक है जिसका मान छड़ के पदार्थ पर निर्भर करता है। इसे उस पदार्थ का **'ऊष्मा चालकता गुणांक'** कहते हैं। यदि छड़ के पार्श्वों से विकिरण द्वारा ऊष्मा बाहर नहीं जा रही है तो छड़ की स्थायी अवस्था में छड़ के प्रत्येक परिच्छेद को जितनी ऊष्मा पिछले परिच्छेद से मिलती है, वह पूरी की पूरी अगले परिच्छेद को दे दी जाती है। इस प्रकार Q का मान छड़ में प्रत्येक स्थान पर एक ही होगा। चूँकि छड़ एकसमान परिच्छेद की है, अत: A का मान भी सभी जगह एक ही है। समीकरण (1) के अनुसार, इस प्रकार की छड़ के लिए $\Delta\theta/\Delta x$ का मान छड़ के सभी परिच्छेदों के लिए एक ही होगा।

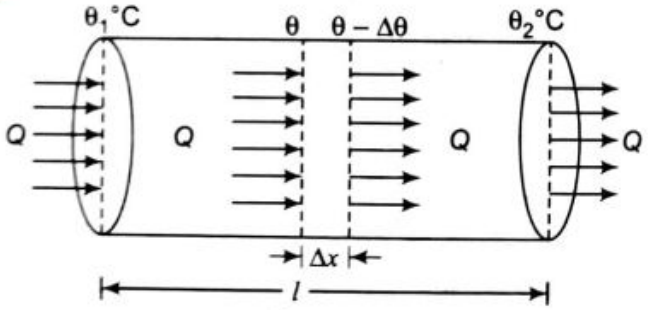
अत: यदि छड़ के सिरों के ताप क्रमश: θ_1 व θ_2 हों तथा उनके बीच दूरी l हो (चित्र 7.6), तब

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta x} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{l}$$

अथवा $$-\frac{\Delta\theta}{\Delta x} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{l}$$

$-\Delta\theta/\Delta x$ के मान को समीकरण (2) में रखने पर

$$\boldsymbol{Q = KA\frac{\theta_1 - \theta_2}{l}.t} \quad \text{... (3)}$$



चित्र 7.6

यदि प्रत्येक सिरे का क्षेत्रफल $A = 1$ मीटर^2, सिरों के बीच की दूरी $l = 1$ मी, ताप अन्तर $(\theta_1 - \theta_2) = 1$ °C तथा समय $t = 1$ सेकण्ड हो, तो समीकरण (3) से

$$Q = \frac{K \times 1 \times 1 \times 1}{1} = K$$

या $$\boldsymbol{Q = K}$$

अत: **किसी पदार्थ का ऊष्मा-चालकता गुणांक ऊष्मा की वह मात्रा है जो स्थायी अवस्था में उस पदार्थ की 1 मीटर लम्बी तथा 1 मीटर^2 अनुप्रस्थ क्षेत्रफल की छड़ में 1 सेकण्ड में प्रवाहित होती है जबकि छड़ के दोनों सिरों का ताप-अन्तर 1 °C हो तथा ऊष्मा का संचरण छड़ के सिरों के लम्बवत् हो।**

"Co-efficient of thermal conductivity of a material is defined as the amount of heat that conducts in unit time through unit area under unit temperature gradient."

ऊष्मा-चालकता गुणांक K का मात्रक : समीकरण (3) से

$$K = \frac{Q \times l}{A \times (\theta_1 - \theta_2) \times t}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$\therefore \quad K \text{ का मात्रक} = \frac{\text{किलोकैलोरी} \times \text{मीटर}}{\text{मीटर}^2 \times {}^\circ\text{C} \times \text{सेकण्ड}}$$

$$= \text{किलोकैलोरी}/(\text{मीटर-सेकण्ड } {}^\circ\text{C})$$

यदि ऊष्मा (ऊर्जा) Q को जूल में व्यक्त करें तब K का मात्रक जूल / (मीटर-सेकण्ड °C) अथवा वाट/(मीटर-°C) होगा। इसका विमीय सूत्र $[MLT^{-3}\theta^{-1}]$ है।

K का मान जितना अधिक होता है पदार्थ उतना ही अच्छा चालक कहलाता है। एक आदर्श अथवा पूर्ण चालक (Perfect Heat Conductor) के लिए K का मान अनन्त होगा तथा एक पूर्ण कुचालक अथवा पूर्ण ऊष्मारोधी (Perfect Heat Insulator) के लिए K का मान शून्य होगा।

7.4.5 ऊष्मीय प्रतिरोध (Thermal Resistance)

जिस प्रकार किसी वैद्युत परिपथ में दो बिन्दुओं के बीच विभवान्तर होने से आवेश का प्रवाह होता है, उसी प्रकार किसी वस्तु में दो बिन्दुओं के बीच तापान्तर होने से ऊष्मा का प्रवाह होता है। अत: पदार्थ के वैद्युत प्रतिरोध के सदृश ऊष्मीय प्रतिरोध भी होता है।

माना कि एक छड़ की लम्बाई l तथा अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A है तथा स्थायी दशा में इसके गर्म व ठण्डे सिरों के ताप क्रमश: θ_1 व θ_2 हैं। तब, छड़ में ऊष्मा-प्रवाह की दर,

$$H = \frac{Q}{t} = KA\frac{\theta_1 - \theta_2}{l}$$

अथवा $$\frac{\theta_1 - \theta_2}{H} = \frac{l}{KA}$$

किसी चालक में वैद्युत प्रवाह होने पर अनुपात V / i को चालक का 'वैद्युत प्रतिरोध' R कहते हैं जबकि V चालक के सिरों के बीच विभवान्तर है तथा i वैद्युत प्रवाह की दर अर्थात् वैद्युत धारा है। उपरोक्त सूत्र चालक में ऊष्मीय-प्रवाह के सम्बन्ध में है। $(\theta_1 - \theta_2)$ चालक के सिरों के बीच तापान्तर है तथा H 'ऊष्मीय-प्रवाह' की दर है। इस आधार पर $(\theta_1 - \theta_2)/H$ को चालक का 'ऊष्मीय-प्रतिरोध' R कहते हैं। इस प्रकार,

$$\boldsymbol{R = \frac{\theta_1 - \theta_2}{H} = \frac{l}{KA}} \quad \ldots (4)$$

स्पष्ट है कि **पदार्थ का ऊष्मा-चालकता गुणांक जितना अधिक होगा ऊष्मीय प्रतिरोध उतना ही कम होगा।**

"Thermal resistance of the substance is inversely proportional to the coefficient of thermal conductivity of the substance."

ऊष्मीय-प्रतिरोध का मात्रक सेकण्ड-°C प्रति किलोकैलोरी है तथा विमीय सूत्र $[M^{-1}L^{-2}T^3\theta]$ है।

7.4.6 विभिन्न पदार्थों की ऊष्मा चालकता के मान (Thermal Conductivity of various Materials)

धातुओं की ऊष्मा चालकता का मान सबसे अधिक होता है। अधातुओं (Non-metals) का कम तथा गैसों का अत्यधिक कम होता है। एक आदर्श चालक (perfect conductor) के लिये K का मान अनन्त तथा आदर्श कुचालक (perfect insulator) के लिए K का मान शून्य होगा, व्यवहार में दोनों ही बातें असम्भव हैं। नीचे की तालिका में कुछ पदार्थों के लिए ऊष्मा-चालकता गुणांक का मान **जूल/मीटर-सेकण्ड-°C** में दिया गया है।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

पदार्थ	ऊष्मा चालकता (J/m s °C)	पदार्थ	ऊष्मा चालकता (J/m s °C)
ऐल्यूमिनियम	209·3	पीतल	85·5
ताँबा	389·6	पानी	0·551 – 0·683
लोहा	74·4	एल्कोहल (ईथाइल)	0·188 – 0·177
पारा	29·1	एल्कोहल (मिथाइल)	0·214 – 0·207
चाँदी	418·7	ग्लिसरीन	0·283 – 0·288
काँच	0·74	चमड़ा	0·14 – 0·16
एस्बेस्टॉस	0·57	बर्फ	2·21
कार्ड बोर्ड	0·14 – 0·35	ईंट	0·67 – 0·87
कार्क	0·042 – 0·54	अरंडी का तेल	0·184 – 0·172
कागज	0·14	हवा	257×10^{-7}
कंक्रीट	0·698 – 1·55	हीलियम	1558×10^{-4}
सोना	312·8	हाइड्रोजन	1754×10^{-4}
स्टील	5·4	ऑक्सीजन	262×10^{-4}

7.4.7 ऊष्मा चालकों का संयोजन (Combination of Heat Conductors)

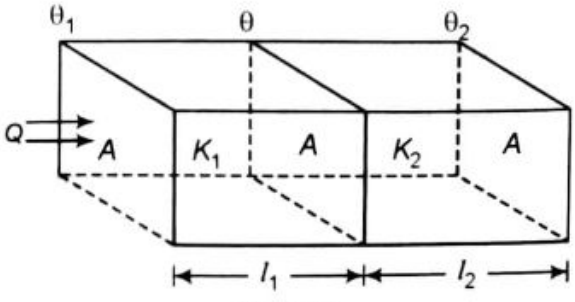
किन्हीं दो ऊष्मा चालकों में ऊष्मा प्रवाह की दर ज्ञात करने के लिए उन्हें निम्न दो प्रकार से संयोजित किया जा सकता है—

(i) श्रेणी क्रम (Series Combination)

(ii) समानान्तर क्रम (Parallel Combination)

7.4.8. श्रेणी क्रम में जुड़े चालकों में ऊष्मा-प्रवाह की दर (Rate of flow of heat through conductors in series combination)

चित्र 7.7 के अनुसार, दो चालक जिनमें प्रत्येक का अनुप्रस्थ-परिच्छेद क्षेत्रफल A है, श्रेणीक्रम में सटाकर रखे गए हैं। इनकी ऊष्मा-चालकतायें क्रमशः K_1 व K_2 तथा लम्बइयाँ l_1 व l_2 हैं। माना कि संयुक्त चालक में ऊष्मा प्रवाहित करने पर, स्थायी अवस्था में, पहले चालक के खुले पृष्ठ का ताप θ_1 है तथा दूसरे चालक के खुले पृष्ठ का ताप θ_2 है। दोनों चालकों की संयुक्त सतह का स्थायी ताप θ है। स्थायी अवस्था में प्रत्येक चालक में ऊष्मा प्रवाह की दर एक ही होगी।



चित्र 7.7

अतः
$$H = \frac{Q}{t} = K_1 A \frac{(\theta_1 - \theta)}{l_1} = K_2 A \frac{(\theta - \theta_2)}{l_2} \quad \ldots (i)$$

$$\therefore \quad \frac{K_1}{l_1}(\theta_1 - \theta) = \frac{K_2}{l_2}(\theta - \theta_2)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अथवा $$\frac{K_1\theta_1}{l_1} + \frac{K_2\theta_2}{l_2} = \theta\left(\frac{K_1}{l_1} + \frac{K_2}{l_2}\right)$$

अथवा $$\theta = \frac{\frac{K_1\theta_1}{l_1} + \frac{K_2\theta_2}{l_2}}{\frac{K_1}{l_1} + \frac{K_2}{l_2}}$$

या $$\theta = \frac{K_1\theta_1 l_2 + K_2\theta_2 l_1}{K_1 l_2 + K_2 l_1} \quad \ldots (5)$$

यह दोनों चालकों की संयुक्त सतह के ताप का समीकरण है। θ का यह मान समीकरण (i) में रखने पर, संयुक्त चालक में ऊष्मा-प्रवाह की दर

$$H = \frac{K_1 A}{l_1}\left[\theta_1 - \frac{K_1\theta_1 l_2 + K_2\theta_2 l_1}{K_1 l_2 + K_2 l_1}\right]$$

$$= \frac{K_1 A}{l_1}\left(\frac{K_2 l_1\theta_1 - K_2\theta_2 l_1}{K_1 l_2 + K_2 l_1}\right)$$

$$= \frac{K_1 K_2 A(\theta_1 - \theta_2)}{K_1 l_2 + K_2 l_1}$$

या $$H = \frac{A(\theta_1 - \theta_2)}{\frac{l_1}{K_1} + \frac{l_2}{K_2}} \quad \ldots (6)$$

संयुक्त चालक का (तुल्य) ऊष्मीय प्रतिरोध

$$R = \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{H}$$

या $$R = \frac{1}{A}\left(\frac{l_1}{K_1} + \frac{l_2}{K_2}\right) \quad \ldots (7)$$

परन्तु चालकों के अलग-अलग ऊष्मीय प्रतिरोध

$$R_1 = \frac{l_1}{K_1 A} \quad \text{तथा} \quad R_2 = \frac{l_2}{K_2 A}$$

उपरोक्त समीकरण की तुलना करने पर

$$R = R_1 + R_2 \quad \ldots (8)$$

तुल्य ऊष्मा-चालकता—यदि संयुक्त चालक की तुल्य ऊष्मा चालकता K हो, तब

$$H = \frac{KA(\theta_1 - \theta_2)}{(l_1 + l_2)}$$

इसकी समीकरण (6) से तुलना करने पर

$$K = \frac{l_1 + l_2}{\frac{l_1}{K_1} + \frac{l_2}{K_2}} \quad \ldots (9)$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

यदि दोनो चालकों की लम्बाइयाँ समान हों तो $l_1 = l_2 = l$ (माना)

तब, $$K = \frac{l+l}{\frac{l}{K_1}+\frac{l}{K_2}} = \frac{2}{\frac{1}{K_1}+\frac{1}{K_2}}$$

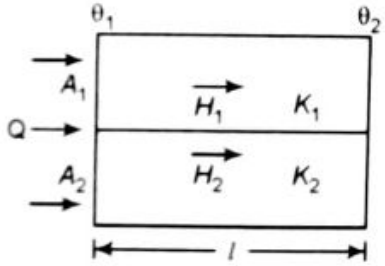
$$\boldsymbol{K = \frac{2K_1K_2}{K_1+K_2}} \quad \text{... (10)}$$

यदि विभिन्न लम्बाइयों के n चालक श्रेणी-क्रम में जुड़े हों तब तुल्य ऊष्मा-चालकता

$$\boldsymbol{K = \frac{l_1+l_2+l_3+.....+l_n}{\frac{l_1}{K_1}+\frac{l_2}{K_2}+\frac{l_3}{K_3}+.....+\frac{l_n}{K_n}}} \quad \text{... (11)}$$

7.4.9. समान्तर क्रम में जुड़े दो चालकों में ऊष्मा प्रवाह की दर
(Rate of flow of heat through conductors in parallel combination)

माना कि समान लम्बाई l, अनुप्रस्थ-परिच्छेदो A_1 व A_2 तथा ऊष्मा-चालकताओं K_1 व K_2 के दो चालक समान्तर क्रम में जुड़े हैं (चित्र 7.8)। माना ऊष्मा बायीं ओर से दायीं ओर प्रवाहित हो रही है तथा स्थायी अवस्था में, चालकों के बायें तथा दायें पृष्ठों के ताप क्रमशः θ_1 व θ_2 हैं। दोनो चालको मे ऊष्मा-प्रवाह की दरे अलग-अलग होंगी।



चित्र 7.8

पहले चालक में ऊष्मा-प्रवाह की दर

$$H_1 = \frac{K_1A_1(\theta_1-\theta_2)}{l}$$

दूसरे चालक में ऊष्मा-प्रवाह की दर

$$H_2 = \frac{K_2A_2(\theta_1-\theta_2)}{l}$$

संयुक्त चालक में ऊष्मा-प्रवाह की दर

$$H = H_1 + H_2 = \frac{K_1A_1(\theta_1-\theta_2)}{l} + \frac{K_2A_2(\theta_1-\theta_2)}{l}$$

$$\boldsymbol{H = (\theta_1-\theta_2)\left[\frac{K_1A_1}{l}+\frac{K_2A_2}{l}\right]} \quad \text{... (12)}$$

$$= (\theta_1-\theta_2)\left[\frac{1}{l/K_1A_1}+\frac{1}{l/K_2A_2}\right]$$

$$\boldsymbol{H = (\theta_1-\theta_2)\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]} \quad \text{... (13)}$$

जहाँ R_1 व R_2 चालकों के क्रमशः ऊष्मीय प्रतिरोध हैं। यदि दोनों चालकों का संयुक्त तुल्य ऊष्मीय प्रतिरोध R हो, तब

$$H = \frac{(\theta_1-\theta_2)}{R} \quad \text{... (iii)}$$

समीकरण (13) व (iii) की तुलना करने पर

$$\boldsymbol{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} \quad \text{... (14)}$$

तुल्य ऊष्मा-चालकता—यदि दोनो चालकों की तुल्य ऊष्मा-चालकता K हो, तो

$$H = \frac{K(A_1+A_2)(\theta_1-\theta_2)}{l} \quad \text{... (A)}$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

इसकी समीकरण (i) से तुलना करने पर

$$K(A_1 + A_2) = K_1A_1 + K_2A_2$$

अथवा
$$K = \frac{K_1A_1 + K_2A_2}{A_1 + A_2} \quad \ldots (15)$$

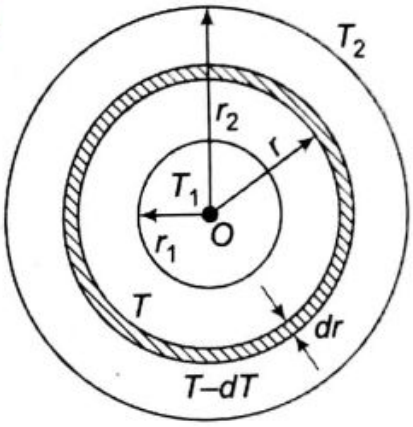
यदि समान्तर क्रम में जुड़े चालकों की लम्बाई समान होने के साथ-साथ अनुप्रस्थ-क्षेत्रफल भी समान हों, तब

$$K = \frac{K_1 + K_2}{2} \quad \ldots (16)$$

7.4.10 ऊष्मा का त्रिज्य प्रवाह (Radial Flow of Heat)

(1) **गोलीय कोश** (Spherical Shell)—यदि किसी गोले के केन्द्र पर एक ऊष्मा-स्रोत (जैसे कोई तप्त तन्तु) रखा हो तब इस दशा में तन्तु से ऊष्मा का प्रवाह, गोले की त्रिज्या के अनुदिश होता है। यह ऊष्मा का त्रिज्य प्रवाह कहलाता है। इस अवस्था में समतापी पृष्ठ गोलीय होते हैं (चित्र 7.9)।

माना एक गोलाकार कोश (spherical shell), जिसकी आन्तरिक त्रिज्या r_1 तथा बाह्य त्रिज्या r_2 है, के केन्द्र O पर एक ऊष्मा का स्रोत रखा है। स्रोत से ऊष्मा त्रिज्य रूप में (radially) प्रवाहित होती है तथा बाहरी सतह से वातावरण में चली जाती है। माना अन्दर वाले गोले का ताप T_1 तथा बाहरी गोले का ताप T_2 है। तब ऊष्मा प्रवाह की दर हम निम्न प्रकार ज्ञात कर सकते हैं—



चित्र 7.9

गोले के अन्दर r त्रिज्या तथा dr मोटाई का एक अतिरिक्त गोलीय कोश लेते हैं। माना इस कोश के अन्दर की सतह का ताप T तथा बाहर की सतह का ताप $T - dT$ है।

इस कोश से प्रवाह होने वाली ऊष्मा की दर

$$\frac{dQ}{dt} = -KA.\frac{dT}{dr}$$

यहाँ K गोले के पदार्थ की चालकता तथा A क्षेत्रफल है।

$$\therefore \quad \frac{dQ}{dt} = -K(4\pi r^2)\frac{dT}{dr}$$

$$\therefore \quad dT = -\frac{1}{4\pi K}\left(\frac{dQ}{dt}\right)\frac{dr}{r^2} \quad \ldots (i)$$

साम्यावस्था (steady state) प्राप्त होने पर $\frac{dQ}{dt}$ नियत (constant) हो जाता है तथा r पर निर्भर नहीं करता। समीकरण (i) का T_1 से T_2 तक समाकलन (Integration) करने पर

$$\int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{1}{4\pi K}\frac{dQ}{dt}\left[\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2}$$

$$\therefore \quad T_2 - T_1 = \frac{dQ}{dt}\left(\frac{1}{4\pi K}\right)\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$= -\frac{dQ}{dt}\left(\frac{1}{4\pi K}\right)\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: ऊष्मा प्रवाह की दर

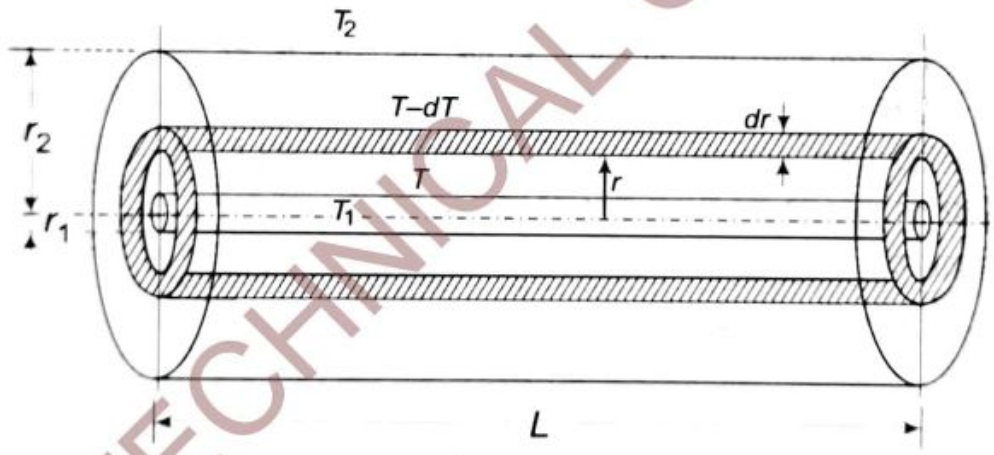
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{4\pi K\, r_1 r_2 (T_1 - T_2)}{r_2 - r_1} \quad \ldots (17)$$

इसी प्रकार दो समाक्षीय बेलनों (coaxial cylinders) में दोनों बेलनों के मध्य रखे गये पदार्थ में ऊष्मा के त्रिज्य प्रवाह की दर ज्ञात की जा सकती है।

(2) समाक्षीय बेलन (Coaxial Cylinders)—माना एक समाक्षीय बेलन की आन्तरिक त्रिज्या r_1, बाहरी त्रिज्या r_2 तथा लम्बाई l है। दोनों बेलनों के मध्य पदार्थ की ऊष्मा चालकता K है। यदि बेलन की अक्ष पर कोई ऊष्मा का स्रोत रख दिया जाए तो प्रत्येक स्थान पर ऊष्मा अक्ष के लम्बवत् (त्रिज्या के अनुदिश) बाहर की ओर प्रवाहित होती है। कुछ समय पश्चात् बेलन के आन्तरिक एवं बाह्य तलों के ताप स्थिर हो जाते हैं। माना आन्तरिक सतह का ताप T_1 तथा बाह्य सतह का ताप T_2 है ($T_1 > T_2$) (चित्र 7.10)। गणना हेतु बेलन की दोनों सतहों के मध्य एक अतिरिक्त बेलनाकार कोश (shell) लेते हैं। माना कोश की त्रिज्याएँ क्रमश: r एवं $r + dr$ तथा ताप T एवं T एवं $T - dT$ है। अत:

$$\text{कोश पर ताप प्रवणता} = \frac{dT}{dr}$$

बेलनाकार कोश की मोटाई (dr) बहुत कम है। अत: इसे एक पतले समानान्तर भुजाओं के गुटके के समान मान सकते हैं। बेलनाकार कोश में ऊष्मा प्रवाह की दर



चित्र 7.10

$$\frac{dQ}{dt} = -2\pi r l K \frac{dT}{dr} \quad \ldots (i)$$

यहाँ $2\pi rl$ बेलनाकार कोश का पृष्ठ क्षेत्रफल तथा $\frac{dT}{dr}$ ताप प्रवणता है।

साम्यावस्था में,

$$\frac{dQ}{dt} = \text{नियत}$$

समीकरण (i) से

$$\frac{dr}{r} = -\frac{2\pi l K\, dT}{\frac{dQ}{dt}}$$

समाकलन करने पर

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\frac{2\pi l K}{dQ/dt} \int_{T_1}^{T_2} dT$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$\therefore \quad \log \frac{r_2}{r_1} = \frac{2\pi LK}{dQ/dt}(T_1 - T_2)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{2\pi LK\,(T_1 - T_2)}{\log (r_2 / r_1)} \qquad \ldots (18)$$

§ 7.5 अलग-अलग धातुओं की ऊष्मा चालकता ज्ञात करने की इन्जन हौज विधि (Ingen-Hauz Experiment for Determination of Thermal Conductivity of Different Materials)

अलग-अलग धातुओं की ऊष्मा चालकता का तुलनात्मक अध्ययन इन्जन-हौज उपकरण द्वारा करते हैं। अलग-अलग धातुओं की एक समान व्यास व लम्बाई की छड़ों को एक आयताकार डिब्बे में चित्र 7.11 के अनुसार लगा देते हैं। इन पर समान मोटाई की मोम की पर्त चढ़ा देते हैं। डिब्बे में गर्म तेल अथवा गर्म पानी भर देते हैं। इससे प्रत्येक छड़ में ऊष्मा संचारित होती है तथा मोम पिघलने लगता है जो कि असमान है।

चित्र 7.11

माना छड़ों पर मोम के पिघलने की लम्बाइयाँ $l_1, l_2, \ldots\ldots$ आदि हैं तथा उनकी ऊष्मा चालकताएँ क्रमश: $K_1, K_2, \ldots\ldots$ आदि हैं, तब यह दर्शाया जा सकता है कि

$$K_1 : K_2 : K_3 : \ldots\ldots = l_1^2 : l_2^2 : l_3^2 : \ldots\ldots$$

या, केवल दो छड़ों के लिए $$\frac{K_1}{K_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2} \qquad \ldots (19)$$

अर्थात् स्थायी दशा में विभिन्न पदार्थों की ऊष्मा चालकताएँ छड़ों पर पिघले हुए मोम की लम्बाई के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होती हैं।

§ 7.6 दैनिक जीवन में ऊष्मा चालकता के प्रभाव तथा उपयोग (Uses and Effects of Heat Conduction in Daily Life)

1. चाय के प्याले चीनी मिट्टी से बनाए जाते हैं—चीनी मिट्टी ऊष्मा की कुचालक है। इससे प्याले में रखी गर्म चाय गर्म ही बनी रहती है। उसकी ऊष्मा का संचरण कम हो जाता है।

2. बर्फ को पिघलने से बचाने के लिए इसे जूट की बोरी तथा लकड़ी के बुरादे से ढक कर रखते हैं—इनकी कुचालकता के कारण बाहर की ऊष्मा बर्फ तक नहीं पहुँच पाती है, अत: बर्फ ठोस अवस्था में ही बनी रहती है।

3. मोटे काँच के गिलास में गर्म जल भरने पर गिलास टूट जाता है—जब काँच के गिलास में गर्म जल डालते हैं, तो गिलास की भीतरी सतह गर्म होकर फैलने लगती है। परन्तु भीतर की ऊष्मा गिलास के बाहर की सतह पर शीघ्र नहीं पहुँचती क्योंकि काँच ऊष्मा का कुचालक है। अत: बाहर की सतह नहीं फैलती है और इस कारण गिलास टूट जाता है। गिलास को टूटने से बचाने के लिए इसमें गरम जल डालने से पहले धातु की चम्मच डाल देनी चाहिए।

4. जाड़ों में एक मोटी कमीज की अपेक्षा, दो पतली कमीजें पहनना अधिक उपयुक्त है—दो कमीजों के बीच कुचालक वायु की परत आ जाती है, जो शरीर की ऊष्मा को बाहर संचरित नहीं होने देती है जिससे ठण्ड कम लगती है।

5. जाड़ों में ऊनी कपड़ों, कम्बलों तथा धुनी हुई रुई से भरी रजाइयों का उपयोग किया जाता है—ऊनी कपड़ों से ठण्ड नहीं लगती है, इसके दो कारण यह हैं—एक तो ऊन ऊष्मा की कुचालक है तथा दूसरा महत्वपूर्ण कारण यह है कि इन वस्त्रों में रेशे (fibres) होते हैं, जिससे उनके बीच वायु भरी होती है। वायु ऊष्मा की कुचालक है। अत: चालन द्वारा ऊष्मा का

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

संचरण नहीं होता है तथा इसमे संवहन धाराएँ नही बन सकती हैं क्योंकि वायु रेशों के बीच होने के कारण चलायमान नहीं है। अत: संवहन द्वारा भी ऊष्मा बाहर नही जाती है। इस प्रकार वायु से भरे वस्त्र हमारे शरीर की ऊष्मा को बाहर जाने से रोक लेते हैं जिससे शरीर गर्म बना रहता है। रजाई को बहुत दिनों तक ओढ़ते रहने पर उसकी रुई दब जाती है, जिससे रेशों के बीच की वायु निकल जाती है जिससे पुरानी रजाई में गर्माई कम हो जाती है। तब रुई को निकलवाकर धुनवाकर दोबारा भरवा देते हैं जिससे रेशों के बीच दूरी बढ़ने से उनके बीच पुन: वायु भर जाती है।

6. ग्रीष्म ऋतु में संध्या के समय जब बाहर का ताप घटने लगता है, तब कमरे के अन्दर दीवारों का ताप इनकी बाहरी सतहों की अपेक्षा अधिक होता है—दिन में धूप के कारण दीवार के बाहर का ताप धीरे-धीरे बढ़ता है। संध्या समय सूर्य के छिप जाने पर बाहर का ताप शीघ्रता से गिरता है। चूँकि दीवार ऊष्मा की कुचालक है, अत: कमरे के भीतर की ऊष्मा बाहर नहीं जा पाती है। अत: कमरे के भीतर की दीवारें गर्म ही बनी रहती हैं।

§ 7.7 संवहन (Convection)

ऊष्मा संचरण की वह विधि जिसमें पदार्थ के कण ऊष्मा ग्रहण करने के बाद स्वयं एक स्थान से दूसरे स्थान पर जाकर ऊष्मा पहुँचाते हैं संवहन कहलाता है। यह क्रिया तरल (द्रव तथा गैसों) में होती है। इसका कारण घनत्व परिवर्तन है। गर्म करने पर द्रव के कण हल्के होकर ऊपर उठ जाते हैं और इनका स्थान लेने के लिए ऊपर के भारी (अधिक घनत्व वाले) कण नीचे आ जाते हैं। इस प्रकार द्रव में संवहन धाराएँ (Convection Currents) चलने लगती हैं। संवहन दो प्रकार का होता है—

(i) प्राकृतिक संवहन (Natural Convection)
(ii) बलित संवहन (Forced Convection)।

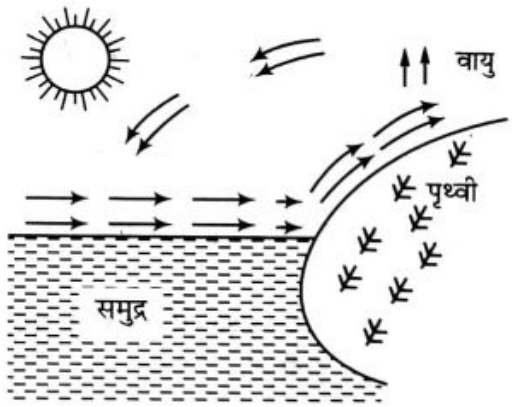
7.7.1 प्राकृतिक संवहन (Natural Convection)

वह संवहन की क्रिया जो ऊष्मा द्वारा स्वत: होने लगती है, प्राकृतिक संवहन कहलाती है। यह क्रिया घनत्व परिवर्तन के कारण स्वत: होती है।

उदाहरण 1 : जब द्रव को किसी बर्तन में रखकर गर्म करते हैं तो तली में स्थित द्रव कण ऊष्मा ग्रहण हो जाने के कारण उठ जाते हैं और इनके स्थान पर ऊपर के भारी कण नीचे आ जाते हैं।

उदाहरण 2 : भूमि तथा समुद्री वायु (Land and Sea Breezes)

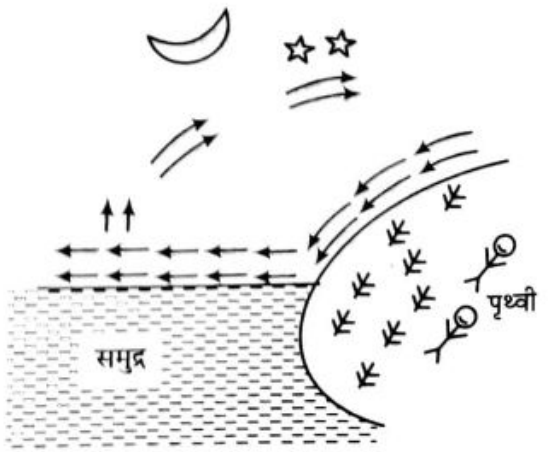
समुद्री वायु (Sea Breeze)—दिन में सूर्य की गर्मी का प्रभाव समुद्र के जल तथा पृथ्वी की मिट्टी दोनों पर पड़ता है। परन्तु मिट्टी की विशिष्ट ऊष्मा जल से कम होने के कारण वह सूर्य की गर्मी को जल्दी शोषित कर लेती है तथा गरम हो जाती है जिससे उसके सम्पर्क में रहने वाली वायु हल्की होकर जल से ऊपर उठ जाती है, और इसका स्थान लेने के लिए समुद्र की ओर से ठण्डी हवा पृथ्वी की ओर बहने लगती है, जिसे समुद्री वायु (Sea Breeze) कहते हैं, चित्र 7.12 (a)।



समुद्री वायु (Sea breeze)

चित्र 7.12 (a)

भूमि वायु (Land Breeze)—रात्रि में पृथ्वी की विशिष्ट ऊष्मा जल से कम होने के कारण ठण्डी होने में कम ऊष्मा देती है तथा शीघ्र ही ठण्डी हो जाती है, परन्तु अधिक ऊष्मा के साथ समुद्री जल गर्म रहता है। अत: समुद्री जल के सम्पर्क में आने वाली वायु हल्की होने के कारण ऊपर उठ जाती है और उसका स्थान लेने के लिए भारी वायु पृथ्वी से समुद्र की ओर चलने लगती है जिसे भूमि वायु (Land breeze) कहते हैं, चित्र 7.12 (b)।



भूमि वायु (Land breeze)

चित्र 7.12 (b)

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

7.7.2 बलित संवहन (Forced Convection)

जब बल प्रयोग द्वारा घनत्व परिवर्तन करके संवहन धाराएँ उत्पन्न की जाएँ या बल लगाकर द्रव की मात्रा स्थिर दर से किसी गर्म वस्तु में गुजारी जाए तो संवहन को बलित संवहन कहते हैं।

1. कमरे मे खिड़की व रोशनदानों (Ventilators) का बनाया जाना।
2. लालटेन के ऊपर व नीचे सुराख होना।
3. जाड़ो मे गर्म पानी से कमरों को गर्म रखा जाना।

§ 7.8 विकिरण (Radiation)

ऊष्मा संचरण की वह विधि जिसमें किसी माध्यम की आवश्यकता नहीं होती विकिरण कहलाती है।

ऊष्मा संचरण की इस विधि में गर्म वस्तु से ऊष्मा का संचरण विद्युत-चुम्बकीय तरंगों (electromagnetic waves) के रूप मे होता है। ये प्रकाश की चाल (3×10^8 मीटर/सेकण्ड) से चलती हैं तथा ये तरंगें किसी वस्तु पर पड़ती हैं तो यह आंशिक रूप मे या पूर्णरूपेण अवशोषित हो जाती हैं और इनकी ऊर्जा ऊष्मा में परिवर्तित हो जाती है।

इस ऊर्जा को विकिरण ऊर्जा (Radiant Energy) या ऊष्मीय विकिरण (Heat Radiation) कहते हैं।

सूर्य के प्रकाश के साथ-साथ ऊष्मीय ऊर्जा भी निर्वात में होकर हमारे पास पहुँचती है।

7.8.1 ऊष्मीय विकिरणों का संसूचन (Detection of Heat Radiation)

ऊष्मीय विकिरण दिखाई नहीं देता परन्तु हमारे शरीर पर इस विकिरण के पड़ने पर हमें गर्मी का अनुभव होता है। ऊष्मीय विकिरण का अनुमान निम्न उपकरणों द्वारा भी होता है—

1. काला बल्ब थर्मामीटर (Black End Bulb Thermometer)
2. भेददर्शी वायु तापमापी (Differential Air Thermometer)
3. क्रुक का विकिरणमापी (Crooke's Radiometer)
4. बोलोमीटर (Bolometer)
5. थर्मोपाइल (Thermopile)

7.8.2 ऊष्मीय विकिरण के गुण (Properties of Heat Radiation)

इसके मुख्य गुण निम्नलिखित हैं—

1. प्रकाश की भाँति ये सरल रेखा में चलती हैं।
2. प्रकाश की भाँति ये निर्वात् में संचारित हो सकता है।
3. ऊष्मीय विकिरण प्रकाश के वेग 3×10^8 मी/सेकण्ड में ही चलते हैं।
4. प्रकाश की भाँति ऊष्मीय विकिरण व्युत्क्रम वर्ग नियम (inverse square law) का पालन करते हैं।
5. ऊष्मीय विकिरण प्रकाश की ही भाँति परावर्तित होते है तथा उन्हीं नियमों का पालन करते है।
6. ऊष्मीय विकिरण भी विभिन्न माध्यमों में अपवर्तित होते है।
7. ऊष्मीय विकिरण में भी व्यतिकरण (interference) तथा विवर्तन (diffraction) होता है।
8. ऊष्मीय विकिरणों का ध्रुवण भी किया जा सकता है।

7.8.3 ऊष्मीय विकिरण की प्रकृति (Nature of Thermal Radiation)

ऊष्मीय विकिरण व प्रकाश समरूप (identical) हैं अर्थात् दोनों की प्रकृति समान होती है। **ऊष्मीय विकिरण को अवरक्त विकिरण भी कहते हैं।**

AKG TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

प्रकाश तथा ऊष्मीय विकिरण दोनों ही विकिरण ऊर्जा (radiant energy) के विभिन्न रूप हैं।

विकिरण ऊर्जा का जो अंश हमारी आँखों द्वारा देखा जाता है उसे प्रकाश (4000 Å से 7500 Å) कहते हैं तथा जो अंश हमारी त्वचा द्वारा गर्मी के रूप में अनुभव किया जाता है उसे ऊष्मीय विकिरण कहते हैं।

ऊष्मीय विकिरणों में तरंगों (waves) की तरंग लम्बाई 3 मिमी से $7{\cdot}8 \times 10^{-4}$ मिमी या 7800 A.U. के बीच में होती है।

§ 7.9 ताप मापक्रम के विभिन्न पैमाने एवं उनमें सम्बन्ध (Different scales of Temperature and their Relationship)

अणुगति सिद्धान्त के अनुसार किसी वस्तु का ताप उसके अणुओं की गतिज ऊर्जा पर निर्भर करता है। गतिज ऊर्जा बढ़ने पर ताप बढ़ जाता है तथा गजित ऊर्जा घटने पर ताप घट जाता है।

भौतिकी की वह शाखा जिसके अन्तर्गत ताप को मापा जाता है, तापमिति (thermometry) कहलाती है तथा जिस उपकरण को तापमापन के लिए प्रयोग करते हैं, उसे तापमापी (thermometer) कहते हैं।

ताप का मापक्रम बनाने के लिए पदार्थ की दो ऐसी अवस्थाओं को चुना जाता है जिन्हें सरलता से प्राप्त किया जा सकता हो। इनमें से एक प्रामाणिक वायुमण्डलीय दाब पर गलते हुए बर्फ की अवस्था है तथा दूसरी उबलते हुए जल की अवस्था है। गलते हुए बर्फ के ताप को हिमांक (ice point) तथा उबलते हुए जल की भाप के ताप को भाप बिन्दु या क्वथनांक (boiling point) कहते हैं। इन तापों को स्वेच्छिक (arbitrary) आंकिक मान दे देते हैं तथा इन मानों के अन्तर को बराबर-बराबर भागों में बाँट देते हैं। प्रत्येक भाग को डिग्री (degree) कहते हैं जो कि ताप का मात्रक है।

हिमांक तथा भाप—बिन्दु को स्वेच्छिक मान देने के आधार पर ताप मापन के लिए विभिन्न पैमानों का निर्माण किया गया है। उदाहरण के लिए, सेल्सियम अथवा सेन्टीग्रेड पैमाने पर हिमांक को शून्य डिग्री तथा भाप-बिन्दु को 100° मानकर इनके बीच के अन्तर को 100 बराबर भागों में बाँटा जाता है। प्रत्येक भाग को 1°C कहते हैं। फारेनहाइट पैमाने पर हिमांक को 32° तथा भाप-बिन्दु को 212° मानकर इनके बीच के अन्तर को 180 बराबर भागों में बाँटा जाता है जिनमें प्रत्येक भाग को 1°F कहते हैं। रियूमर पैमाने पर हिमांक को शून्य तथा भाप-बिन्दु को 80° मानकर इनके बीच के अन्तर को 80 बराबर भागों में बाँटा जाता है। प्रत्येक भाग को 1°R कहते हैं। केल्विन पैमाने पर हिमांक को 273° तथा भाप-बिन्दु को 373° लेकर इनके बीच के अन्तराल को 100 बराबर भागों में बाँटा जाता है जिनमें प्रत्येक भाग को 1°K कहते हैं। इन चारों पैमानों में परस्पर निम्नलिखित सम्बन्ध है—

$$\frac{C}{100} = \frac{F-32}{180} = \frac{R}{80} = \frac{K-273}{100}$$

अथवा

$$\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9} = \frac{R}{4} = \frac{K-273}{5} \qquad (20)$$

ताप मापने के लिए पदार्थ के किसी ऐसे गुण का उपयोग किया जाता है जो ताप के साथ निरन्तर नियमित रूप से बदलता हो। इसे **तापमापक गुण** (Thermometric property) कहते हैं। तापमापक गुणों तथा उन पर आधारित तापमापियों को निम्न प्रकार विभाजित किया जा सकता है—

(i) द्रव तापमापी (जैसे पारा तापमापी एवं एल्कोहल तापमापी), द्रवों के ऊष्मीय प्रसार पर आधारित हैं। ताप वृद्धि से द्रव के आयतन में प्रसार होता है।

(ii) गैस तापमापी (जैसे स्थिर आयतन गैस तापमापी), गैसों के ऊष्मीय प्रसार पर आधारित हैं। स्थिर आयतन पर गैस की निश्चित मात्रा का दाब ताप बढ़ने पर बढ़ता है।

(iii) प्रतिरोध तापमापी (प्लेटिनम प्रतिरोध तापमापी) ताप बढ़ने पर वैद्युत प्रतिरोध बढ़ने के सिद्धान्त पर आधारित है।

(iv) तापयुग्म तापमापी, ताप बढ़ने पर ताप वैद्युत वाहक बल बढ़ने के सिद्धान्त पर आधारित है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(v) विकिरण तापमापी, ताप बढ़ने पर विकिरण की मात्रा पर आधारित है।

(vi) ताप तन्तु तापमापी, प्रदीप्ति समानता पर आधारित है।

(vii) वाष्प दाब तापमापी, संतृप्त वाष्प दाब पर आधारित है।

माना कि ताप मापन के लिए चुने गये पदार्थ के किसी गुण X का मान ताप के अनुक्रमानुपाती है। यदि X के मान हिमांक (0°C), भाप बिन्दु (100°C) तथा किसी अज्ञात ताप (t °C) पर क्रमशः X_0, X_{100} व X_t हों, तो

$$t = \left[\frac{(X_t - X_0)}{X_{100} - X_0} \times 100\right] °C \qquad \ldots(21)$$

इस सूत्र से अज्ञात ताप t की गणना कर सकते हैं।

§ 7.10 ऊष्मीय प्रसार (Thermal Expansion)

सामान्यतः पदार्थ का ताप बढ़ाने पर पदार्थ के अणुओं के बीच की औसत दूरी बढ़ जाती है। ठोस पदार्थों का ताप बढ़ाने पर ठोस पदार्थों के किन्हीं दो बिन्दुओं के बीच की दूरी बढ़ जाने के कारण उनके किनारों की लम्बाई, पृष्ठों का क्षेत्रफल एवं आयतन भी बढ़ जाता है। ठोस पदार्थों के लिए इन प्रभावों को क्रमशः

(1) दैर्घ्य या रेखीय प्रसार (Linear Expansion)

(2) सतही प्रसार (Surface Expansion)

(3) आयतन प्रसार (Volume Expansion) कहते हैं।

7.10.1 ठोस का रेखीय प्रसार (Linear Expansion of Solids)

किसी छड़ को गर्म करने पर उसकी लम्बाई बढ़ती है। माना कि किसी निश्चित ताप पर छड़ की लम्बाई L है। उसके ताप में Δt की वृद्धि करने पर छड़ की लम्बाई में वृद्धि ΔL होती है। प्रयोगों के आधार पर यह देखा गया है कि छड़ की लम्बाई में वृद्धि निम्न बातों पर निर्भर करती हैं:—

(1) **छड़ की प्रारम्भिक लम्बाई (L) पर**—यदि उसी पदार्थ की भिन्न-भिन्न लम्बाई की छड़ों के ताप में समान वृद्धि की जाय तो लम्बाई की वृद्धि ΔL छड़ों की प्रारम्भिक लम्बाई L के अनुकमानुपाती होती है।

$$\Delta L \propto L \qquad \ldots(i)$$

(2) **ताप की वृद्धि (t) पर**—छड़ की लम्बाई में वृद्धि (ΔL) ताप वृद्धि (Δt) के अनुकमानुपाती होती है।

$$\Delta L \propto \Delta t \qquad \ldots(ii)$$

समीकरण (1) व (2) से,

$$\Delta L \propto L \cdot \Delta t$$

या

$$\Delta L = \alpha L \cdot \Delta t$$

यहाँ α (ऐल्फा) एक नियतांक है। इसको छड़ के पदार्थ का रेखीय प्रसार गुणांक (Coefficient of Liner Expansion) कहते हैं। इसका मान केवल छड़ के पदार्थ पर निर्भर करता है।

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L \times \Delta t} \quad \begin{matrix}\text{लम्बाई में वृद्धि} \\ \text{प्रारम्भिक लम्बाई} \times \text{ताप में वृद्धि}\end{matrix} \qquad (22)$$

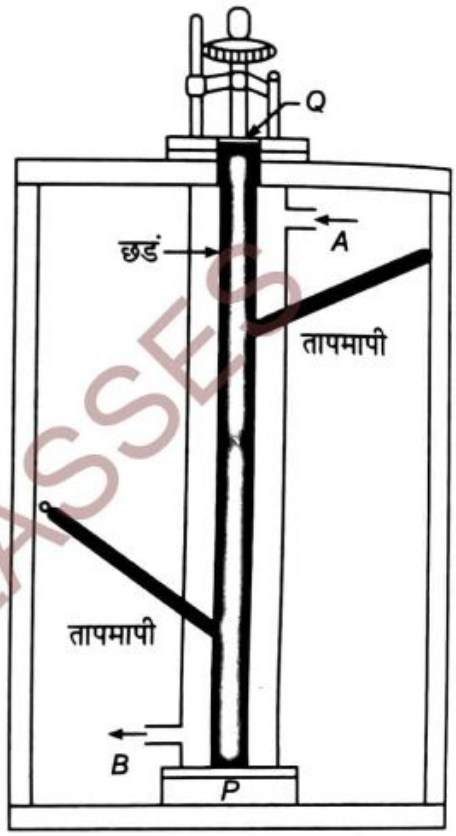
यदि $L = 1$ और $\Delta t = 1°C$ तो $\alpha = \Delta L$

अतः किसी पदार्थ की एकांक लम्बाई की छड़ का ताप 1°C बढ़ाने पर उसकी लम्बाई में जो वृद्धि होती है, उसे उस पदार्थ का दैर्घ्य या रेखीय प्रसार गुणांक कहते हैं। इसका मात्रक प्रति °C होता है।

प्रयोग द्वारा किसी धातु का रेखीय प्रसार गुणांक ज्ञात करना—जिस धातु का रेखीय प्रसार गुणांक ज्ञात करना हो, उस धातु की 1 मीटर लम्बी छड़ PQ लेते हैं। इस छड़ को एक खोखले बेलन में रखकर भाप प्रवाहित करके छड़ को गर्म करते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

खोखले बेलन के भाग A से भाप प्रवेश करती है और छड़ के चारों ओर फैलकर भाग B से बाहर आ जाती है। छड़ का सिरा P एक स्थिर पेंच के सहारे टिका रहता है। दूसरे सिरे (Q) पर छड़ की लम्बाई में वृद्धि व्यक्त होती है। इस वृद्धि को गोलाई मापी की सहायता से ज्ञात करते हैं।



चित्र 7.13

प्रयोग—कमरे के ताप पर गोलाईमापी के पेंच के सिरे को छड़ के (Q) सिरे से स्पर्श कराके पाठ्यांक ज्ञात कर लेते हैं। तत्पश्चात् बेलन में माप प्रवाहित करते हैं, जिससे छड़ गर्म होने लगती है और तापमापी में पाठ्यांक बढ़ने लगता है। लगभग 10 मिनट तक गर्म करने पर जब छड़ का ताप दोनों तापमापियों में स्थिर हो जाता है तब पेंच को पुन: छड़ के सिरे (Q) से स्पर्श कराके पाठ्यांक ज्ञात कर लेते हैं। गोलाईमापी के दोनों पाठ्यांकों का अंतर ही छड़ की लम्बाई में वृद्धि ΔL है। बेलन में लगे तापमापी के प्रारम्भिक एवं अन्तिम तापों का अन्तर Δt है। छड़ की प्रारम्भिक लम्बाई (L) पहले से प्राप्त कर ली जाती है। अत: सूत्र $\alpha = \frac{\Delta L}{L \cdot \Delta T}$ की सहायता से रेखीय प्रसार गुणांक ज्ञात कर लेते हैं।

7.10.2 सतही प्रसार गुणांक (Coefficient of Surface Expansion)

यदि वस्तु का आकार आयताकार पटल के रूप में हो तो गर्म करने पर लम्बाई व चौड़ाई दोनों में वृद्धि होगी। फलत: उसके क्षेत्रफल में भी वृद्धि होगी।

किसी वस्तु के एकांक क्षेत्रफल का ताप 1°C बढ़ाने पर उसके क्षेत्रफल में जो वृद्धि होती है उसे उस वस्तु का क्षेत्रीय प्रसार गुणांक कहते हैं। इसका मात्रक प्रति °C होगा।

रेखीय प्रसार गुणांक की भाँति परिभाषित करने पर—

$$\text{क्षेत्रीय प्रसार गुणांक } (\beta) = \frac{\text{क्षेत्रफल में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक क्षेत्रफल} \times \text{ताप वृद्धि}}$$

$$\beta = \frac{\Delta A}{A \times \Delta t} \qquad (23)$$

7.10.3 आयतन प्रसार गुणांक (Coefficient of Volume Expansion)

किसी ठोस वस्तु को गर्म करने पर उसके आयतन में वृद्धि होती है।

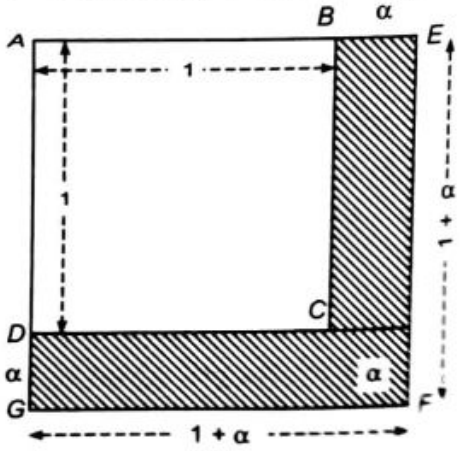
किसी वस्तु के एकांक आयतन का ताप 1°C बढ़ाने पर उसके आयतन में जो वृद्धि होती है उसे उस वस्तु का आयतन प्रसार गुणांक कहते हैं। इसका मात्रक भी प्रति °C होता है। रेखीय अथवा क्षेत्रीय प्रसार गुणांक की भाँति परिभाषित करने पर—

$$\text{आयतन प्रसार गुणांकक } (\gamma) = \frac{\text{आयतन में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक आयतन} \times \text{ताप वृद्धि}}$$

$$\gamma = \frac{\Delta V}{V \times \Delta t} \qquad (24)$$

7.10.4 रेखीय प्रसार गुणांक (α) तथा क्षेत्रीय प्रसार गुणांक (β) में सम्बन्ध

किसी वस्तु के एक आयताकार पटल को अनेक वर्गाकार क्षेत्रों में विभाजित किया जा सकता है। कल्पना कीजिए कि किसी वर्गाकार क्षेत्र की प्रत्येक भुजा की



चित्र 7.14

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

लम्बाई 1 मीटर है, अत: इसका क्षेत्रफल 1 वर्ग मीटर होगा। 1°C गर्म करने पर प्रत्येक भुजा की लम्बाई $(1+\alpha)$ तथा वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $(1+\alpha)^2$ हो जायेगा।

अत: क्षेत्रफल में वृद्धि $= (1+\alpha)^2 - 1$

$$= 1 + 2\alpha + \alpha^2 - 1$$

$$= 2\alpha + \alpha^2$$

α बहुत छोटी राशि होती है अत: α^2 अत्यधिक छोटी होने के कारण नगण्य होगी।

अत: क्षेत्रफल में वृद्धि $= 2\alpha$

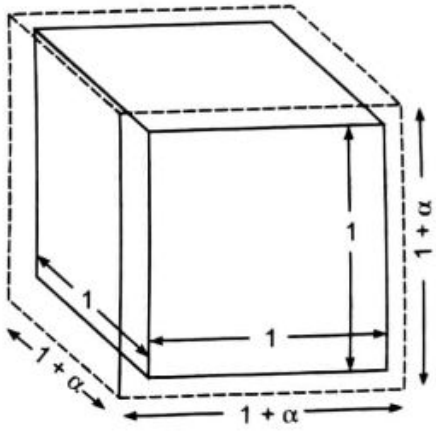
सूत्र के अनुसार, $\beta = \dfrac{\text{क्षेत्रफल में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक क्षेत्रफल} \times \text{ताप में वृद्धि}}$

$$\beta = \frac{2\alpha}{1 \times 1} = 2\alpha$$

$$\beta = 2\alpha \qquad (25)$$

7.10.5 रेखीय प्रसार गुणांक (α) तथा आयतन प्रसार गुणांक (γ) में सम्बन्ध

किसी ठोस वस्तु के आयतन को कई घनों से मिलकर बना समझा जा सकता है। एक घन की कल्पना कीजिए जिसकी भुजा 1 मीटर हो। इस घन का प्रारम्भिक आयतन 1 घन मीटर होगा। इस घन का ताप 1°C बढ़ाने पर प्रत्येक भुजा की लम्बाई $(1+\alpha)$ तथा घन का आयतन $(1+\alpha)^3$ हो जायेगा।



चित्र 7.15

अत: आयतन में वृद्धि $= (1+\alpha)^3 - 1$

$$= 1 + 3\alpha + 3\alpha^2 + \alpha^3 - 1$$

α एक छोटी राशि होने के कारण α^2 तथा α^3 का मान नगण्य माना जा सकता है

अत: आयतन में वृद्धि $= 3\alpha$

सूत्रानुसार, आयतन प्रसार गुणांक $= \dfrac{\text{आयतन में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक आयतन} \times \text{ताप वृद्धि}}$

या $$\gamma = \frac{3\alpha}{1 \times 1} = 3\alpha$$

$$\gamma = 3\alpha$$

अत: $$\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3 \qquad (26)$$

7.10.6 ठोस पदार्थों के प्रसार का व्यावहारिक उपयोग

1. रेल की पटरियाँ लोहे की बनी होती हैं, इसलिए रेल की दो पटरियों के जोड़ पर थोड़ा रिक्त स्थान छोड़ दिया जाता है, जिसमें गर्मी के दिनों में ताप बढ़ने के कारण पटरियों के लम्बाई बढ़ने के लिए खाली स्थान मिल सके, अन्यथा पटरियाँ तिरछी हो जायेंगी और रेल दुर्घटना हो सकती है।

2. काँच की बोतल में डाट फँसने पर बोतल की गर्दन को गरम पानी में रखकर गरम करते हैं, जिससे बोतल की गर्दन का व्यास बढ़ जाता है और डाट बाहर निकल आता है।

3. लकड़ी के पहिये पर लोहे का हाल चढ़ाने के लिए, हाल का व्यास पहिये की छोटा रक्खा जाता है। गर्म करने पर लाल तप्त लोहे का हाल बढ़ जाता है और पहिये पर सरलता से चढ़ जाता है तथा ठंडा होने पर लकड़ी के पहिये को भली-भाँति जकड़ लेता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

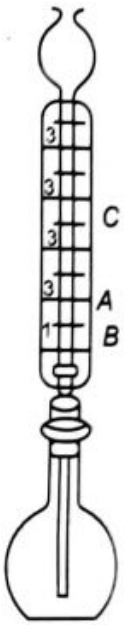
Scanned with CamScanner

4. टेलीफोन के तारों को कसकर नहीं बाँधा जाता ताकि सर्दी के दिनों में तार सिकुड़ कर टूट न जायें।

5. मोठे काँच के गिलास में खौलता पानी डालने से गिलास चटक जाता है, क्योंकि जब गिलास में गर्म पानी डाला जाता है तो गिलास की भीतरी सतह तो गर्म होकर फैलती है परन्तु काँच ऊष्मा का कुचालक होने के कारण, गिलास की बाहरी सतह पर उसका प्रभाव नहीं पड़ता है। फलस्वरूप काँच चटक जाता है।

§ 7.11 द्रवों में आयतन प्रसार (Volume Expansion of Liquids)

द्रव पदार्थों की कोई निश्चित आकृति नहीं होती, अत: इसमें केवल आयतन प्रसार ही संभव है। द्रव को गर्म करने के लिए उसे किसी बर्तन में रखना पड़ता है, अत: गर्म करने पर पहले बर्तन का प्रसार होता है, और फिर बाद में द्रव का।



चित्र 7.16

इसलिए द्रव में दो प्रकार के प्रसार गुणांक होते हैं—

(1) द्रव का वास्तविक प्रसार गुणांक (Coefficient of Real or Absolute Expansion of Liquid)

(2) द्रव का आभासी प्रसार गुणांक (Coefficient of Apparent Expansion of Liquid)

उदाहरण : चित्रानुसार एक काँच के फलास्क में द्रव रखकर गर्म करते हैं। द्रव के सतह को ध्यान से देखने पर स्पष्ट होता है कि पहले द्रव का तल घटता है और बाद में बढ़ने लगता है।

जब फ्लास्क को गर्म किया जाता है, तो ऊष्मा पहले काँच को मिलती है। अत: पहले केवल काँच का ताप बढ़ता है, इसलिए पहले काँच के बर्तन (फ्लास्क) का प्रसार होता है और द्रव का ताप स्थिर रहता है। अत: द्रव का तल A से B पर आ जाता है। थोड़ी देर बाद द्रव को ऊष्मा मिलने लगती है, और द्रव में भी प्रसार प्रारम्भ हो जाता है। जिससे द्रव का तल किसी निश्चित ताप के लिए B से C पर पहुँच जाता है।

$$BC = AC + AB$$

द्रव का वास्तविक प्रसार = द्रव का आभासी प्रसार + बर्तन के आयतन का प्रसार

सामान्यत: हम द्रव का जो तापीय प्रसार देखते हैं, वह द्रव के वास्तविक प्रसार एवं बर्तन के प्रसार का अंतर होता है। इसे द्रव का आभासी प्रसार कहते हैं।

द्रव का आभासी प्रसार गुणांक (γ_a)—किसी द्रव का ताप 1°C बढ़ने पर द्रव के एकांक आयतन में जितनी वृद्धि का आभास होता है, उसे द्रव का आभासी प्रसार गुणांक कहते हैं।

$$\text{आभासी प्रसार गुणांक } (\gamma_a) = \frac{\text{द्रव के आयतन में आभासी वृद्धि}}{\text{द्रव का प्रारम्भिक आयतन} \times \text{वृद्धि}} \quad (27)$$

द्रव का वास्तविक प्रसार गुणांक (γ_r)—किसी द्रव का ताप 1°C बढ़ाने पर द्रव के एकांक आयतन में जितनी वास्तविक वृद्धि होती है, उसे द्रव का वास्तविक प्रसार गुणांक कहते हैं।

$$\text{वास्तविक प्रसार गुणांक } (\gamma_r) = \frac{\text{द्रव के आयतन में वास्तविक वृद्धि}}{\text{द्रव का वास्तविक आयतन} \times \text{वृद्धि}} \quad (28)$$

द्रव का वास्तविक प्रसार गुणांक = द्रव का आभासी प्रसार गुणांक + बर्तन का आयतन प्रसार गुणांक

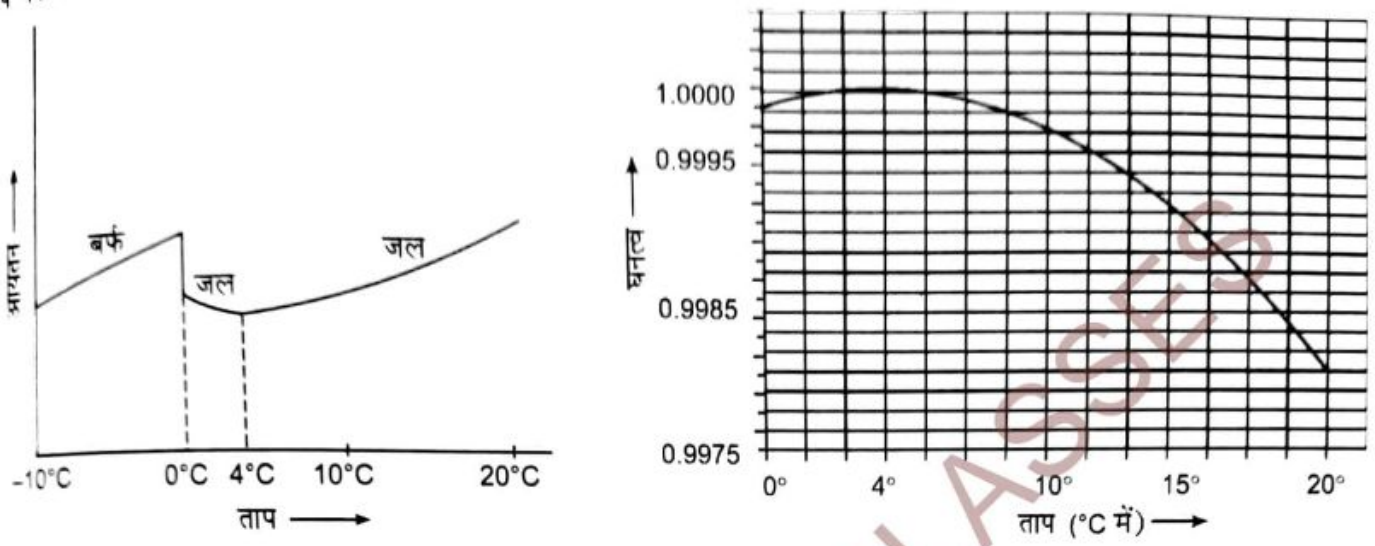
$$\gamma_r = \gamma_a + \gamma \quad (29)$$

7.11.1 जल का असामान्य प्रसार

सामान्यत: गर्म करने पर सभी द्रवों का आयतन बढ़ता है और घनत्व घटता है परन्तु 0°C से 4°C के बीच जल का व्यवहार सामान्य द्रवों के विपरीत होता है। इस ताप अन्तराल में ताप बढ़ाने पर जल का आयतन घटता है और घनत्व बढ़ता है। जल की यह विचित्रता चित्र 7.17 (अ) तथा 7.6 (ब) से स्पष्ट है।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

चित्र 7.17 (अ) और 7.17 (ब) से स्पष्ट है कि 4°C पर जल का घनत्व अधिकतम होता है। इससे अधिक या कम ताप पर पानी का घनत्व घटने लगता है।



चित्र 7.17

7.11.2 जल के असामान्य प्रकार का व्यावहारिक उपयोग

1. ठण्डे प्रदेशों में तालाबों में जल के जम जाने पर भी मछलियाँ आदि जीवित रहती हैं—वायुमंडल का ताप गिरने से जल की ऊपर पर्त ठंडी होती है और उसका घनत्व बढ़ता है। जल ऊष्मा का कुचालक है, इसलिए तालाब के जल की निचली पर्त अपेक्षाकृत गर्म होती है और हल्की होकर ऊपर आती है। यह क्रिया तब तक होती है जब तक तालाब का सारा जल 4°C ताप पर नहीं आ जाता। अब यदि वायुमंण्लीय ताप और अधिक गिरता है तो तालाब के जल के ऊपर की पर्तों का ताप तो और गिरता है, परन्तु 4°C से कम ताप पर जल के असामान्य प्रसार के कारण तालाब के जल की ऊपरी पतों का घनत्व बढ़ने के बजाय कम होने लगता है। फलस्वरूप यह ठंडी पर्त ऊपर ही रहती है और क्रमश: 0°C तक ठंडा होने पर बर्फ बन जाती है। परन्तु नीचे का जल 4°C पर ही द्रव अवस्था में रहता है। इससे तालाबों में बर्फ के नीचे 4°C का जल रहता है जिसमें मछलियाँ जीवित रहती हैं।

2. जाड़े की रातों में जल के नल कभी-कभी फट जाते हैं—0°C के जल के जमने पर आयतन में प्रसार होता है, अत: बर्फ बनने पर जल का आयतन बढ़ जाता है, फलस्वरूप नल में आन्तरिक दबाव सीमा से अधिक बढ़ने से वे फट जाते हैं।

§ 7.12 गैसों के प्रसार (Expansion of Gases)

अन्तर आणविक बल कम होने के कारण गैस के अणु ठोस व द्रव के अणुओं की अपेक्षा अधिक स्वतन्त्रतापूर्वक घूम सकते हैं अत: गर्म करने पर गैसों का प्रसार ठोसों और द्रवों की अपेक्षा अधिक होता है। गैसों की कोई अपनी आकृति नहीं होती है, अत: इसमें केवल आयतन प्रसार ही सम्भव है। जिस बर्तन में गैस को गर्म किया जाता है, उसका प्रसार गैस के प्रसार की अपेक्षा नगण्य होता है, अत: गैस में वास्तविक एवं आभासी प्रसार समान होते हैं। किसी गैस का आयतन गेस के दाब पर भी निर्भर करता है। अत: गैस का तापीय प्रसार निम्न तीन परिस्थितियों में अध्ययन किया जाता है—

1. स्थिर ताप पर
2. स्थिर दाब पर
3. स्थिर आयतन पर

7.12.1 बॉयल का नियम (Boyle's Law)

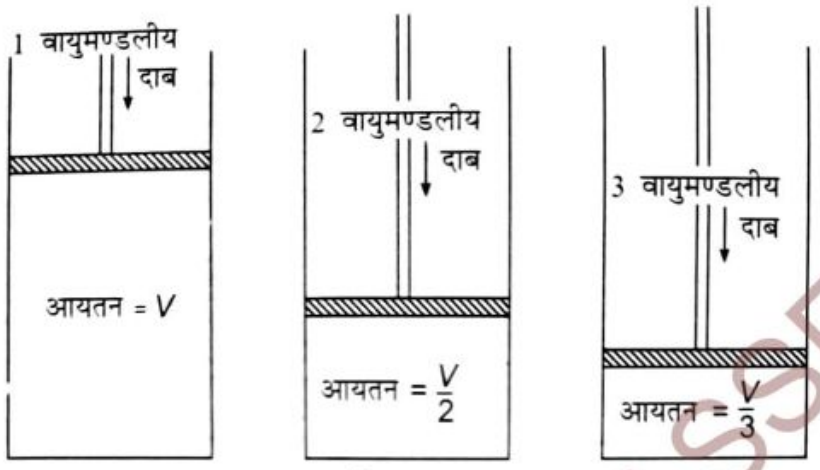
यदि नियत ताप पर किसी गैस के निश्चित द्रव्यमान का आयतन कम करते है, तो बर्तन की दीवार के एकांक क्षेत्रफल पर प्रति सेकेंड टकराने वाले अणुओं की संख्या बढ़ जाती है। इससे गैस का दाब बढ़ जाता है।

उदाहरणार्थ यदि नियत ताप पर गैस के किसी निश्चित द्रव्यमान का आयतन आधा कर दिया जाय, तो बर्तन की दीवार के एकांक खेत्रफल पर टक्करों की संख्या दुगनी हो जायेगी अर्थात् गैस का दाब दूना हो जायगा।

AYC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

इसके विपरीत यह भी कहा जा सकता है कि यदि गैस का दाब दोगुना या तीन गुना कर दिया जाय तो गैस का आयतन पहले का क्रमश: $\frac{1}{2}$ या $\frac{1}{3}$ रह जायगा। इसे चित्र 7.18 की सहायता से समझा जा सकता है।



चित्र 7.18

चित्र 7.18 में धातु के बेलनाकार बर्तन में एक भारहीन तथा वायुरोधक पिस्अन की कल्पना की गयी है जो बल लगाने पर बिना घर्षण के ऊपर-नीचे चल सकता है। स्थिति 1 में पिस्टन पर केवल वायुमण्डल का दाब कार्य कर रहा है जो लगभग $1{\cdot}013 \times 10^5$ न्यूटन/मी^{2} के बराबर होता है। इस अवस्था में माना गैस का आयतन V है। स्थिति 2 में पिस्टन के ऊपर इतना बल लगाते हैं कि दाब 2 वायुमण्डल के बराबर हो जाये। ऐसा करने पर गैस का आयतन पूर्व आयतन का आधा अर्थात् $\frac{V}{2}$ रह जाता है। अब स्थिति 3 में दाब वायुमण्डल के दाब का 3 गुना कर दिया जाता है तो गैस का आयतन घट कर पूर्व आयतन का एक-तिहाई अर्थात् $\frac{V}{3}$ रह जाता है।

अत: स्थिर ताप पर किसी गैस के निश्चित द्रव्यमान का आयतन (V) उसके दाब (P) के व्युत्क्रमानुपाती होता है। यही बॉयल का नियम है।

यदि निश्चित द्रव्यमान की किसी गैस का दाब P और आयतन V हो तो ताप के नियत रहने पर

$$V \propto \frac{1}{P}$$

या

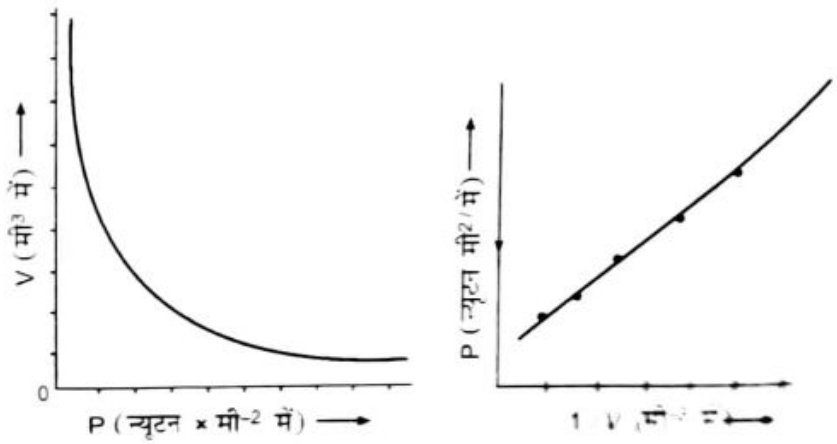
$$PV = \text{नियतांक } (K)$$

नियतांक (K) का मान गैस के द्रव्यमान तथा ताप पर निर्भर करता है।

यदि ताप को नियत रखते हुए किसी गैस के निश्चित द्रव्यमान का प्रारम्भिक आयतन (V_1) तथा दाब (P_1) बदलकर क्रमश: V_2 और P_2 कर दिया जाय, तो

$$P_1V_1 = P_2V_2 = K$$

बॉयल का नियम केवल कम दाब और अधिक ताप पर ही सत्य होता है। निश्चित ताप पर गैस के दाब (P) तथा आयतन (V) के सम्बन्ध को, V तथा P, $1/V$ ग्राफ से व्यक्त किया जा सकता है। प्रथम ग्राफ में एक वक्र (समकोणिक अतिपरवलय) तथा दूसरे ग्राफ में एक ऋजु रेखा प्राप्त होती है। (चित्र 7.19)



चित्र 7.19

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

7.12.2 दाब का नियम (Law of Pressure)

किसी गैस के नियत आयतन पर गैस का ताप बढ़ाने से अणुओं की औसत गतिज ऊर्जा बढ़ जाती है क्योंकि अणुओं की औसत गतिज ऊर्जा ताप पर निर्भर करती है। अणुओं की गतिज ऊर्जा बढ़ने के कारण दीवार पर अणुओं की टक्करों की दर बढ़ जाती है, इसलिए संवेग परिवर्तन की औसत दर तथा दीवार पर लगने वाला दाब भी बढ़ जाता है। इस प्रकार गैस का ताप बढ़ाने पर उसका दाब बढ़ जाता है।

स्थिर आयतन पर किसी गैस के निश्चित द्रव्यमान का ताप 1°C बढ़ाने अथवा घटाने पर गैस के दाब में उसके 0°C वाले दाब का लगभग $\frac{1}{273}$ वाँ भाग बढ़ता अथवा घटता है।

यदि किसी गैस के एक निश्चित द्रव्यमान का 0°C पर दाब P_0 हो तो स्थिर आयतन पर t°C ताप बढ़ाने से दाब में वृद्धि $P_0 \times \frac{1}{273} \times t$ होगी।

अत: t°C पर गैस का दाब

$$P_t = P_0 + P_0 \times \frac{1}{273} \times t$$

या $$P_t = P_0 \left(1 + \frac{1}{273} t\right)$$

यहाँ $\frac{1}{273}$ सभी गैसों के लिए नियत है, इसलिए इसे गैसों का दाब प्रसार गुणांक (Pressure Coefficient) कहते हैं और इसे γ_v से निरूपित किया जाता है।

अत: $$P_t = P_0(1 + \gamma_v t)$$

इस नियम से स्थिर आयतन पर दाब और परम ताप में सम्बन्ध ज्ञात कर सकते हैं।

$$P_t = P_0 \left(1 + \frac{1}{273} t\right)$$

$$P_t = P_0 \left(\frac{273 + t}{273}\right)$$

$$P_t = P_0 \frac{T}{T_0}$$

जहाँ $T = 273 + t$ तथा $T_0 = 273$

$$\frac{Pt}{T} = \frac{P_0}{T_0}$$

अत: $$P_t \propto T$$

अत: निश्चित द्रव्यमान की गैस का आयतन स्थिर रहने पर उसका दाब उसके परम ताप के अनुक्रमानुपाती होता है।

7.12.3 चार्ल्स का नियम (Charles' Law)

गैस के अणुओं की औसत गतिज ऊर्जा ताप बढ़ाने से बढ़ती तथा ताप घटाने से घटती है। यदि किसी गैस के निश्चित द्रव्यमान का आयतन तथा ताप समानुपातिक रूप से बढ़ाया जाय तो गैस का दाब स्थिर रहेगा।

स्थिर दाब पर किसी गैस के निश्चित द्रव्यमान का ताप 1°C बढ़ाने अथवा घटाने पर इसके आयतन में, गैस के 0°C वाले आयतन का लगभग $\frac{1}{273}$ वाँ भाग बढ़ता अथवा घटाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

यदि किसी गैस के एक निश्चित द्रव्यमान का 0°C पर आयतन V_0 हो, तो स्थिर दाब पर t°C ताप बढ़ाने से आयतन में वृद्धि $V_0 \times \frac{1}{273} \times t$ होगी।

अत: t°C पर गैस का आयतन

$$(V_t) = V_0 + V_0 \times \frac{1}{273} \times t$$

या

$$V_t = V_0\left(1 + \frac{1}{273} \cdot t\right)$$

यहाँ $\frac{1}{273}$ सभी गैसों के लिए नियत रहने के कारण आयतन प्रसार गुणांक (Coeffcient of Volume Expansion) कहलाता है। इसको γ_p से प्रदर्शित करते हैं।

अत:

$$V_t = V_0(1 + \gamma_p)$$

इस नियम की सहायता से गैस के आयतन और परम ताप में सम्बन्ध भी ज्ञात कर सकते हैं।

$$V_t = V_0\left(1 + \frac{t}{273}\right)$$

$$V_t = V_0\left(\frac{273 + t}{273}\right)$$

या

$$V_t = V_0 \cdot \frac{T}{T_0}$$

या

$$\frac{V_t}{T} = \frac{V_o}{T_0}$$

अत:

$$V_r \propto T$$

अर्थात् स्थिर दाब पर, किसी गैस के निश्चित द्रव्यमान का आयतन, गैस के परम ताप के अनुक्रमानुपाती होता है।

7.12.4 आयतन प्रसार गुणांक और दाब प्रसार गुणांक में सम्बन्ध

चार्ल्स के नियमानुसार स्थिर दाब (P_0) पर

$$V_t = V_0\,(1 + \gamma_p \cdot t)$$

जहाँ

$V_t = t$°C पर गैस का आयतन

$V_0 = 0$°C पर गैस का आयतन

$P_0 = 0$°C पर गैस का दाब

यदि गैस का आयतन V_0 स्थिर रखते हुए ताप t°C कर दे जिससे दाब P_0 से P_t हो जाये, तो दाब के नियमानुसार—

$$P_t = P_0(1 + \gamma_p)$$

पहली स्थिति में t°C पर आयतन V_t और दाब P_0 है। दूसरी स्थिति में t°C पर आयतन V_0 और दाब P_t है। अत: बॉयल के नियमानुसार—

$$P_0 \times V_t = P_t \times V_0$$

या

$$P_0 \times V_0\,(1 + \gamma_p \cdot t) = P_0\,(1 + \gamma_v \cdot t) \times V_0$$

या

$$1 + \gamma_p \cdot t = 1 + \gamma_v t$$

अत:

$$\gamma_p = \gamma_v$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 1 : एक धात्वीय छड़ की लम्बाई 0°C पर 5·00 मीटर है जो 100°C तक गर्म करने पर 5·01 मीटर हो जाती है। धातु का आयतन प्रसार गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल—प्रश्न के अनुसार,

0°C पर छड़ की लम्बाई = 5·00 मीटर

100°C पर छड़ की लम्बाई = 5·01 मीटर

छड़ की लम्बाई में वृद्धि = 5·01 − 5·00 = 0·01 मीटर

छड़ के ताप में वृद्धि = 100° − 0° = 100°C

अत: सूत्र $\alpha = \frac{\Delta L}{L \cdot \Delta t}$ से

$$\alpha = \frac{0 \cdot 01}{5 \cdot 00 \times 100} = \frac{1}{50000}$$

$$= 2 \cdot 0 \times 10^{-5} \text{ प्रति °C}$$

∴ आयतन प्रसार गुणांक = 3 × रेखीय प्रसार गुणांक

$$= 3 \times 2 \cdot 0 \times 10^{-5}$$

$$= 6 \cdot 0 \times 10^{-5} \text{ प्रति °C}$$

उदाहरण 2 : ताँबे की एक छड़ की लम्बाई 2·5 मी तथा काट का क्षेत्रफल 6 सेमी^{2} है। छड़ का सिरा 30 °C तथा दूसरा सिरा 210 °C तापमान पर है। ताँबे के लिए K = 385 J / m-°C - s है। ज्ञात कीजिए–(i) ऊष्मा प्रवाह की दर (ii) 7 मिनट में प्रवाहित ऊष्मा की मात्रा।

हल—यहाँ $d = 2 \cdot 5$ मी, $A = 6$ सेमी$^2 = 6 \times 10^{-4}$ मी^{2}

$\theta_1 = 210$ °C, $\theta_2 = 30$ °C, $K = 385$ J / m-°C-s

अत: (i) ऊष्मा प्रवाह की दर—

$$\frac{Q}{t} = \frac{KA\,\Delta\theta}{d}$$

$$\frac{Q}{t} = \frac{385 \times 6 \times 10^{-4} \times (210 - 30)}{2 \cdot 5}$$

$$\frac{Q}{t} = 16 \cdot 632 \text{ जूल/से}$$

ऊष्मा प्रवाह की दर = 16·632 जूल/से

(ii) यदि $t = 7$ मिनट $= 7 \times 60 = 420$ से

तो कुल प्रवाहित ऊष्मा

$$Q = \frac{KA\,\Delta\theta}{d} \times t$$

$$Q = 16 \cdot 632 \times 420 \text{ जूल}$$

कुल प्रवाहित ऊर्जा Q = 6985·44 जूल

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

उदाहरण 3 : विभिन्न पदार्थों के दो बर्तनों में, जिनका आकार समान है, 0 °C पर बर्फ भरी है। यदि दोनों की बर्फ पिघलने में समय 25 मिनट और 20 मिनट लगता है तो उनकी ऊष्मा चालकताओं की तुलना कीजिए।

(UPBTE 1992)

हल—माना दोनो बर्तनो की ऊष्मा चालकता गुणांक K_1 तथा K_2 हैं। समान मात्रा की बर्फ को पिघलाने के लिए समान ऊष्मा की आवश्यकता पड़ेगी। यदि पहले बर्तन में t_1 समय में तथा दूसरे बर्तन में t_2 समय में बर्फ पिघलती है तो—

पहले बर्तन के लिए $$Q = \frac{K_1 A \theta}{d} \times t_1 \quad \text{... (i)}$$

दूसरे बर्तन के लिए $$Q = \frac{K_2 A \theta}{d} \times t_2 \quad \text{...(ii)}$$

समीकरण (i) व (ii) से—

$$\frac{K_1 A \theta}{d} \times t_1 = \frac{K_2 A \theta}{d} \times t_2$$

$$K_1 t_1 = K_2 t_2$$

अत: $$\frac{K_1}{K_2} = \frac{t_2}{t_1}$$

या $$\frac{K_1}{K_2} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

या $$\boldsymbol{\frac{K_1}{K_2} = \frac{4}{5}}$$

उदाहरण 4 : एक चालक को दो चादरों से जोड़कर बनाया गया है जिनकी मोटाई क्रमश: 0·05 मी तथा 0·03 मी और ऊष्मा चालकताएँ 0·3 तथा 0·4 इकाई हैं। यदि प्रथम चादर के स्वतन्त्र तल का ताप 90 °C तथा दूसरे के स्वतन्त्र तल का ताप 10 °C हों तो सम्पर्क तल का तापमान ज्ञात कीजिए।

(UPBTE 1995)

हल—चित्रानुसार, चादरों का श्रेणी क्रम में संयोजन है। माना सम्पर्क तल का ताप θ है। स्थायी अवस्था में दोनों से प्रवाहित ऊष्मा की दर समान होती है। इसलिए—

$$\frac{Q}{t} = K_1 A \frac{\Delta\theta_1}{d_1} = K_2 A \frac{\Delta\theta_2}{d_2}$$

या $$\frac{0{\cdot}3\,(90-\theta)}{0{\cdot}05} = 0{\cdot}4 \times \frac{\theta - 10}{0{\cdot}03}$$

या $$6\,(90-\theta) = 13{\cdot}33\,(\theta - 10)$$

या $$540 - 6\theta = 13{\cdot}33\theta - 133{\cdot}3$$

या $$19{\cdot}33\theta = 673{\cdot}3$$

$\therefore$ $$\theta = \frac{673{\cdot}3}{19{\cdot}33} = \mathbf{34{\cdot}83\ °C}$$

उदाहरण 5 : विभिन्न पदार्थों की दो समान प्लेट जिसकी ऊष्मा चालकताएँ K_1 व K_2 हैं। श्रेणीक्रम में सम्पर्क में रखी हैं। संयुक्त प्लेट के लिए ऊष्मीय चालकता गुणांक ज्ञात कीजिए।

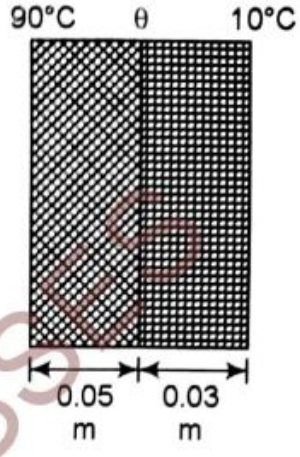
(UPBTE 1996)

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

हल—श्रेणीक्रम संयोजन में तुल्य ऊष्मीय चालकता गुणांक

$$K = \frac{l_1 + l_2}{\frac{l_1}{K_1} + \frac{l_2}{K_2}}$$



चूँकि दोनों प्लेटों के आकार समान हैं, अत:—

$l_1 = l_2 = l$ रखने पर

$$K = \frac{l_1 + l_2}{\frac{l_1}{K_1} + \frac{l_2}{K_2}}$$

या $$\boldsymbol{K = \frac{2K_1K_2}{K_1 + K_2}}$$

उदाहरण 6 : A अनुप्रस्थ परिच्छेद और T मोटाई की एक पट्टिका K ऊष्मीय चालकता वाले पदार्थ से बनी है। पट्टिका के ऊष्मीय प्रतिरोध की गणना कीजिए। **(UPBTE 2005)**

हल—किसी चालक का ऊष्मीय प्रतिरोध

$$R = \frac{l}{KA}$$

उपरोक्त समीकरण में $l = T$ रखने पर

$$\boldsymbol{R = \frac{T}{KA}}$$

उदाहरण 7 : 90 सेमी लम्बी धातु की छड़ के दोनों सिरों के मध्य तापान्तर 55 °C का है। ताप प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल—

$$\text{ताप प्रवणता} = \frac{\Delta\theta}{d}$$

$$= \frac{55}{90}\,°\text{C / cm}$$

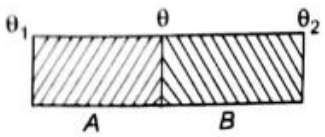
$$= \frac{55}{0{\cdot}9}\,°\text{C / m}$$

∴ **ताप प्रवणता = 61·11 °C/m**

उदाहरण 8 : चित्र में दिखाई गयी छड़ों की लम्बाइयाँ तथा काट के क्षेत्रफल समान हैं। यदि A व B के ऊष्मा चालकता गुणांक क्रमश: 480 जूल/सेमी °C तथा 715 जूल/सेमी °C हों तो संयुक्त सतह का तापमान ज्ञात कीजिए।

हल—स्थायी अवस्था में

$$\frac{Q}{t} = \frac{K_1 A\Delta\theta_1}{d} = \frac{K_2 A\Delta\theta_2}{d}$$



या $$\frac{K_1 A(100-\theta)}{d} = \frac{K_2 A(\theta - 0)}{d}$$

या $$480\,(100-\theta) = 715\,(\theta - 0)$$

या $$48000 - 480\theta = 715\,\theta$$

$$1195\theta = 48000$$

∴ $$\boldsymbol{\theta = 40{\cdot}16\,°C}$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

उदाहरण 9 : दो विभिन्न धातुओं की छड़ें आपस में एक-दूसरे के सिरों से जुड़ी हैं। पहली धातु का एक सिरा बर्फ में स्थित है जबकि दूसरी धातु का दूसरा सिरा भाप कक्ष में स्थित है। दोनों छड़ों की लम्बाइयाँ तथा परिच्छेद के क्षेत्रफल समान हैं। यदि दूसरी धातु का ऊष्मा चालकता गुणांक पहले से तीन गुना हो तो दोनों छड़ की संयुक्त सतह का तापमान ज्ञात कीजिए।

हल—चित्रानुसार दोनों छड़े आपस में जुड़ी हुयी हैं। ऊष्मा का प्रवाह भाप कक्ष में स्थित सिरे से बर्फ में स्थित सिरे की ओर होगा। माना दोनों छड़ों के संयुक्त सतहों का तापमान θ है।

अतः स्थायी अवस्था में ऊष्मा प्रवाह की दर समान होने पर—

$$\frac{Q}{t} = \frac{2KA(100-\theta)}{d} = \frac{KA(\theta-0)}{d}$$

या $\quad 2(100-\theta) = \theta$

या $\quad 3\theta = 200$

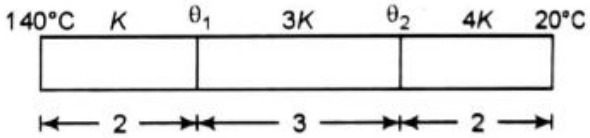
$\therefore \quad \theta = 66 \cdot 66\ °C$

उदाहरण 10 : धातु की तीन छड़ें जिनके परिच्छेद समान हैं, आपस में श्रेणीक्रम में जुड़ी हैं। तीनों छड़ों के पदार्थों के ऊष्मा चालकता गुणांकों का अनुपात 1 : 3 : 4 तथा लम्बाइयाँ 2 : 3 : 2 के अनुपात में हैं। यदि पहली छड़ का मुक्त सिरा 140 °C तथा तीसरी छड़ का मुक्त सिरा 20 °C पर हो तो छड़ों के जुड़ाव बिन्दु का तापमान ज्ञात कीजिए।

हल—चित्र में तीनों छड़ों का संयोजन दिखाया गया है। माना जुड़ाव बिन्दु के तापमान क्रमशः θ_1 तथा θ_2 हैं तो स्थायी अवस्था में—

$$\frac{Q}{t} = \frac{KA(140-\theta_1)}{2l} = \frac{3KA(\theta_1-\theta_2)}{3l} = \frac{4KA(\theta_2-20)}{2l}$$

या $\quad \frac{(140-\theta_1)}{2} = \frac{3(\theta_1-\theta_2)}{3} = \frac{4(\theta_2-20)}{2}$



पहले तथा दूसरे पद को लेने पर—

या $\quad 140-\theta_1 = 2\theta_1 - 2\theta_2$

या $\quad 3\theta_1 - 2\theta_2 = 140 \quad \ldots$ (i)

दूसरे तथा तीसरे पद को लेने पर—

$$\theta_1 - \theta_2 = 2\theta_2 - 40$$

$$\theta_1 - 3\theta_2 = -40 \quad \ldots \text{(ii)}$$

समीकरण (i) तथा (iii) से—

$$\theta_1 = 71 \cdot 42\ °C$$

तथा $\quad \theta_2 = 37 \cdot 14\ °C$

§ 7.13 ऊष्मागतिकी (Thermodynamics)

ऊष्मागतिकी विज्ञान की वह शाखा है जिसमें ऊष्मीय ऊर्जा का अन्य ऊर्जाओं (यान्त्रिक, वैद्युत, रासायनिक, चुम्बकीय आदि) में रूपान्तरण का अध्ययन किया जाता है या इसका विलोमतः। (Thermodynamics is that branch of science which deals with conversion of heat energy into other forms of energy and vice versa.)

7.13.1 ऊष्मागतिक निकाय (Thermodynamic System)

ऊष्मागतिक निकाय वह निकाय है जिसकी अवस्था को दाब (P), आयतन (V), ताप (T) तथा आन्तरिक ऊर्जा (U) के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। जैसे घर्षणरहित पिस्टनयुक्त सिलिण्डर में बन्द गैस को ऊष्मागतिक निकाय कहते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner
Scanned with CamScanner

ऊष्मागतिक निकाय निम्न प्रकार के होते हैं—

(i) **स्थूल निकाय** (Macroscopic System)—इसमें कणों की संख्या अत्यधिक होती है तथा इसका अध्ययन P, V, T तथा आन्तरिक ऊर्जा U के आधार पर किया जाता है, जैसे—सिलिण्डर में बन्द गैस।

(ii) **सूक्ष्म निकाय** (Microscopic System)—इसमें कणों की संख्या बहुत कम होती है। जैसे एक अणु या परमाणु।

(iii) **खुला निकाय** (Open System)—वह निकाय जिसमें ऊष्मा तथा पदार्थ दोनों का आदान-प्रदान हो सकता है।

(iv) **बन्द निकाय** (Closed System)—इसमें केवल ऊष्मा का आदान-प्रदान होता है।

(v) **विलगित निकाय** (Isolated System)—वह निकाय जो न तो कार्य कर सकता है न ही उसमें ऊष्मा का आदान-प्रदान सम्भव है अर्थात् इसके आन्तरिक ऊर्जा में परिवर्तन शून्य होता है, अतः $\Delta U = 0$।

7.13.2 ऊष्मागतिक निकाय की अवस्था तथा ऊष्मागतिक चर (State of Thermodynamic System and Thermodynamic Variables)

निकाय के विभिन्न गुणों के आधार पर निकाय की ऊष्मागतिक अवस्था का वर्णन किया जाता है। जैसे दाब, आयतन, ताप, संरचना (composition) आदि। ये गुण निकाय के ऊष्मागतिक चर कहलाते हैं। गैस अवस्था में ये चर P, V, T आदि होते हैं तथा द्रव अवस्था में घनत्व, पृष्ठ, तनाव, ताप आदि हो सकते हैं। ठोस अवस्था में प्रत्यास्थता, क्षेत्रफल, आयतन, ताप आदि हो सकते हैं।

उपरोक्त के अतिरिक्त आन्तरिक ऊर्जा (U) तथा एन्ट्रॉपी (entropy) (S), आदि भी चर हो सकते हैं। लेकिन **सभी ऊष्मागतिकी चरों को निश्चित द्रव्यमान के लिए दाब (P), आयतन (V), तथा ताप (T) के पदों में व्यक्त किया जाता है।**

§ 7.14 विभिन्न ऊष्मागतिकीय प्रक्रम (Various Thermodynamical Processes)

किसी निकाय की अवस्था परिवर्तित कर विभिन्न ऊष्मागतिकीय प्रक्रम प्राप्त किये जा सकते हैं। निकाय की अवस्था अनेक विधियों द्वारा परिवर्तित की जा सकती है। अवस्था परिवर्तन की सरलतम विधि वह है जिसमें किसी एक प्राचल (Parameter) को नियत (Constant) रखा जाता है। इस प्रकार की विभिन्न विधियाँ निम्न हैं—

(i) **समदाबी प्रक्रिया** (Isobaric Process)—इस विधि में दाब P को स्थिर रखा जाता है अर्थात् $\Delta P = 0$

(ii) **समआयतनिक प्रक्रिया** (Isochoric Process)—इस विधि में आयतन V को नियत रखा जाता है, अर्थात् $\Delta V = 0$

(iii) **समतापी प्रक्रिया** (Isothermal Process)—इस विधि में ताप T को नियत रखा जाता है, अर्थात् $\Delta T = 0$

(iv) **रुद्धोष्म प्रक्रिया** (Adiabatic Process)—इस विधि में ऊष्मा स्थानान्तरण (heat transfer) को नियत रखा जाता है अर्थात् $\Delta Q = 0$।

यहाँ हम केवल आदर्श गैस के लिए समतापी एवं रुद्धोष्म प्रक्रियाओं का अध्ययन करेंगे।

§ 7.15 कार्य तथा ऊष्मा की तुल्यता (Equivalence of Work and Heat)

किसी वस्तु का ताप दो प्रकार से बढ़ाया जा सकता है, पहला वस्तु को सीधे ऊष्मा देकर (अर्थात् गर्म करके), दूसरा वस्तु पर यांत्रिक कार्य करके। उदाहरण के लिए हम अपने हाथों को गर्म जल में डुबाकर गर्म कर सकते हैं, अथवा हाथों को आपस में रगड़कर भी गर्म कर सकते हैं।

दैनिक जीवन में ऐसे अन्य उदाहरण हैं जिनमें कार्य करने से ताप वृद्धि होती है। साइकिल में हवा भरते समय पम्प का बैरल गर्म हो जाता है, मोटरकार में ब्रेक लगाने पर ब्रेक ड्रम गर्म हो जाता है।

किसी वस्तु में अवस्था-परिवर्तन भी दो प्रकार से किया जा सकता है, वस्तु को ऊष्मा देकर अथवा यांत्रिक कार्य करके। उदाहरणतः बर्फ का टुकड़ा गर्म करने पर पिघल जाता है परन्तु यदि गर्म न करके बर्फ के टुकड़ों को आपस में रगड़ा जाये तब भी वे पिघल जायेंगे।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

उपरोक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि ऊष्मा तथा कार्य (यांत्रिक ऊर्जा) दोनों से ताप वृद्धि अथवा अवस्था परिवर्तन किया जा सकता है। किसी वस्तु में तापवृद्धि अथवा अवस्था परिवर्तन हो जाने के बाद यह पता नहीं लगाया जा सकता है कि यह ताप वृद्धि अथवा अवस्था-परिवर्तन वस्तु को गर्म करके किया गया है अथवा यांत्रिक ऊर्जा व्यय करके। यदि बर्तन में गर्म जल रखा है तो किसी भी प्रयोग द्वारा यह ज्ञात नहीं किया जा सकता है कि जल को आग से गर्म किया गया है अथवा बिलोकर। इस प्रकार ऊष्मा तथा कार्य (यांत्रिक ऊर्जा) एक-दूसरे के तुल्य हैं। दूसरे शब्दों में **कार्य, ऊष्मीय ऊर्जा का ही एक रूप है।**

ऊष्मा तथा कार्य की तुल्यता के सम्बन्ध में जूल (Joule) ने प्रयोगों द्वारा सिद्ध किया कि $4{\cdot}18 \times 10^3$ जूल कार्य से उतनी ही ताप-वृद्धि होती है जितनी कि 1 किलो-कैलौरी* ऊष्मा से,

अर्थात् **$4{\cdot}18 \times 10^3$ जूल कार्य 1 किलोकैलोरी ऊष्मा के तुल्य है।**

$$\textbf{1 किलोकैलोरी} = 4{\cdot}18 \times 10^3 \textbf{ जूल}$$

अथवा $$1 \text{ कैलोरी} = 4{\cdot}18 \text{ जूल}$$

अथवा $$Q \text{ कैलोरी} = 4{\cdot}18\ Q \text{ जूल}$$

अत: Q कैलोरी ऊष्मा को जूल में व्यक्त करने के लिए इसे 4·18 से गुणा करेंगे। इस प्रकार 4·18 एक 'परिवर्तन गुणक' (conversion factor) है। यह भौतिक राशि नहीं है। इसे ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक (mechanical equivalent of heat) भी कहते हैं तथा J से प्रदर्शित करते हैं। अत: उपरोक्त समीकरण को इस प्रकार लिख सकते हैं—

$$W = JQ$$

जहाँ $J = 4{\cdot}18$ J/cal या 4·18 जूल/किलोकैलोरी

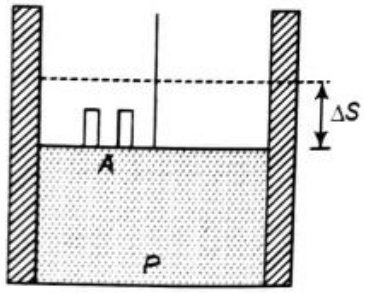
§ 7.16 किसी ऊष्मागतिक निकाय द्वारा कृत कार्य (Work done by a Thermodynamic System)

माना एक सिलिण्डर जिसमें चलनशील पिस्टन लगी है तथा गैस भरी है, के पिस्टन पर कुछ बाट रखे हुए हैं। सिलिण्डर की तली एक ऊष्मा-चालक पदार्थ की बनी है जिसके द्वारा ऊष्मा सिलिण्डर के भीतर जा सकती है अथवा सिलिण्डर से बाहर आ सकती है। यदि पिस्टन पर से बाट उठा लें तो गैस फैलेगी तथा पिस्टन द्वारा आरोपित बल के विरुद्ध कार्य करेगी। इसके विपरीत यदि पिस्टन पर और अधिक बाट रखें तो गैस सम्पीडित होगी तथा इस दशा में पिस्टन द्वारा गैस पर कार्य किया जायेगा।

माना कि गैस का प्रारम्भिक दाब P है, चित्र (7.20), यदि पिस्टन के अनुप्रस्थ-काट का क्षेत्रफल A हो तो गैस द्वारा पिस्टन पर लगने वाला

$$\text{बल} = \text{दाब} \times \text{क्षेत्रफल}$$

$$F = P \times A$$



चित्र 7.20

यदि पिस्टन पर से एक छोटा-सा बाट उठा लें तो गैस फैलेगी तथा पिस्टन पर कार्य करके उसे ऊपर की ओर विस्थापित कर देगी।

माना पिस्टन के विस्थापित होने पर गैस के आयतन में ΔV की अल्प वृद्धि हो जाती है। यदि इस प्रक्रम में पिस्टन का अल्प विस्थापन ΔS हो, तब गैस द्वारा किया गया कार्य—

या $$\Delta W = \text{बल} \times \text{विस्थापन}$$

या $$\Delta W = F \times \Delta S$$

या $$\Delta W = P \times A \times \Delta S$$

$$\Delta W = P \times \Delta V \quad \ldots (20)$$

* 1 किलो-कैलोरी वह ऊष्मा है जो 1 किग्रा जल का ताप 1 °C (14·5 °C से 15·5 °C तक) बढ़ाने के लिए आवश्यक है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: गैस द्वारा V_1 से V_2 आयतन तक फैलने में किया गया कुल कार्य W समीकरण (30) के समान सभी पदों के योग के बराबर होगा। इस प्रकार

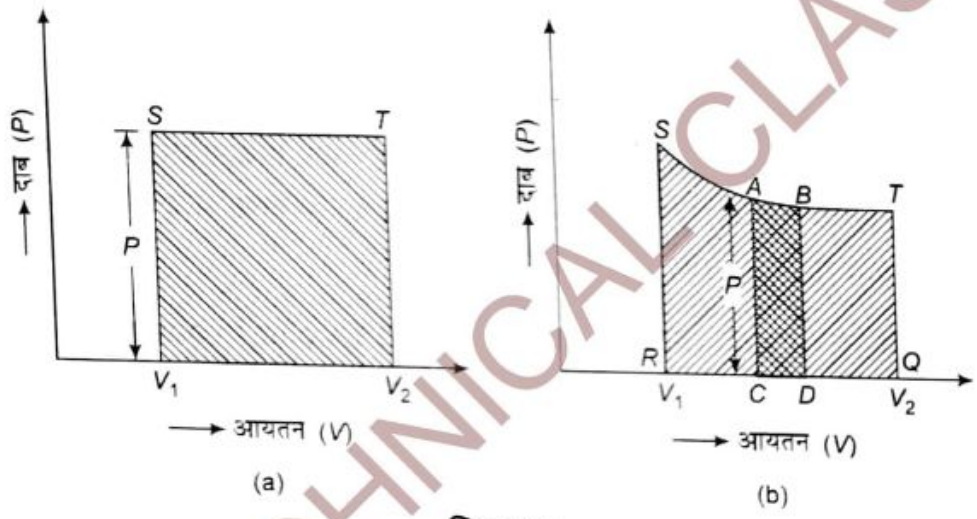
$$W = \sum_{V_1}^{V_2}(P \times \Delta V)$$

इसका मान P तथा V के बीच ग्राफ खींचकर ज्ञात किया जा सकता है। यदि गैस के फैलने के दौरान गैस का दाब (P) अचर रहता है तो P–V ग्राफ आयतन अक्ष के समान्तर एक सीधी रेखा ST के रूप में होगी। चित्र 7.21(a) तब—

$$W = P\sum_{V_1}^{V_2}\Delta V$$

$$W = P\,(V_2 - V_1) \qquad (\because P \text{ अचर है})$$

परन्तु चित्र (7.21 (a)) के अनुसार यह P–V ग्राफ (ST रेखा) के नीचे V_1 व V_2 के बीच छायांकित क्षेत्रफल है। इस क्षेत्रफल को नापकर गैस द्वारा किया गया कार्य ज्ञात किया जा सकता है।



चित्र 7.21

यदि गैस का दाब लगातार बदल रहा हो तब P–V ग्राफ एक वक्र ST के रूप में चित्र (7.21) (b) होगा। इस दशा में $\sum_{V_1}^{V_2}(P \times \Delta V)$ का मान ज्ञात करने के लिए मान लिया वक्र पर कोई बिन्दु A है जिसके संगत दाब तथा आयतन क्रमश: P तथा V है। माना बिन्दु A के अन्यन्त समीप B बिन्दु है जिसके संगत आयतन $(V + \Delta V)$ है। अत: यह माना जा सकता है कि A से B तक दाब P का मान नियत रहता है। इस प्रकार पट्टी $ABCD$ का क्षेत्रफल $P \times \Delta V$ होगा। परन्तु यही गैस के ΔV आयतन प्रसार के दौरान किया गया कुल कार्य भी है। अत: वक्र ST तथा V_1 से V_2 तक आयतन अक्ष के बीच घिरा सम्पूर्ण क्षेत्रफल $QRST$, $\sum_{V_1}^{V_2}(P \times \Delta V)$ के बराबर होगा, जोकि गैस के V_1 से V_2 तक फैलने के दौरान किया गया कुल कार्य है। इस प्रकार

"P-V वक्र तथा आयतन अक्ष से घिरे क्षेत्रफल से गैस अथवा किसी भी निकाय द्वारा किया गया कार्य सीधे प्राप्त हो जाता है।" अत:—

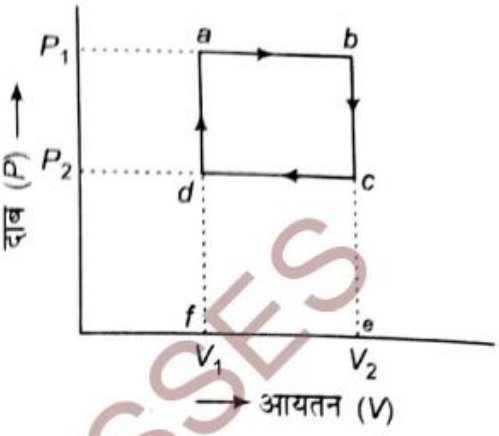
1. **यदि किसी प्रक्रम में निकाय का आयतन बढ़ता है, तो कार्य निकाय द्वारा किया जाता है, तब उसे धनात्मक माना जाता है।**
2. **यदि प्रक्रम में आयतन घटता है तो कार्य निकाय पर किया जाता है तथा उसे ऋणात्मक माना जाता है।**

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 7.17 कार्य की प्रक्रिया के पथ पर निर्भरता (Dependency of Work upon the Path of Process)

किसी प्रक्रम में निकाय द्वारा किये गये कार्य का मान न केवल निकाय की प्रारम्भिक तथा अन्तिम अवस्थाओं पर निर्भर करता है, बल्कि उस मार्ग पर भी निर्भर करता है जिसके द्वारा वह प्रक्रम किया जाता है। उदाहरणत: चित्र (7.22) में किसी निकाय को अवस्था a से अवस्था c में दो विभिन्न मार्गों abc तथा adc द्वारा ले जाया जा सकता है। मार्ग abc में a से b तक ले जाने में निकाय द्वारा किया गया कुल कार्य $abef$ के क्षेत्रफल के बराबर होगा, अत: b से c तक ले जाने मे किया गया कार्य शून्य होगा (क्योंकि ΔV शून्य है अर्थात् V स्थिर है।) अत: मार्ग abc के लिए निकाय द्वारा किया गया कार्य—



चित्र 7.22

$$W = \text{आयत } abef \text{ का क्षेत्रफल}$$

मार्ग adc में a से d तक ले जाने में किया कार्य शून्य होगा क्योंकि V स्थिर है तथा d से c तक जाने में किया गया कार्य

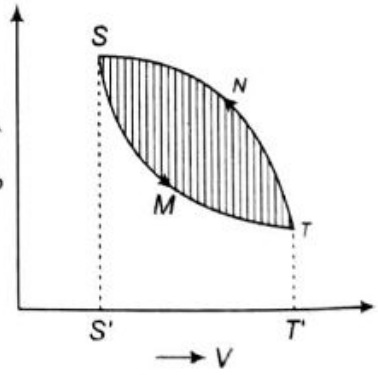
$$W' = \text{आयत } dcef \text{ का क्षेत्रफल}$$

चूँकि आयत $abef$ का क्षेत्रफल, आयत $dcef$ के क्षेत्रफल से बड़ा है। अत: निकाय द्वारा मार्ग, abc में किया गया कार्य W मार्ग adc में किये गये कार्य W' से अधिक है। स्पष्ट है कि निकाय द्वारा एक अवस्था से दूसरी अवस्था में जाने में किया गया कार्य निकाय द्वारा अपनाये गये मार्ग पर निर्भर करता है।

§ 7.18 चक्रीय प्रक्रम में किया गया कार्य (Work Done in Cyclic Process)

जब कोई निकाय विभिन्न अवस्थाओं से गुजरता हुआ अपनी प्रारम्भिक अवस्था में लौट आता है तो इसे चक्रीय प्रक्रम कहते हैं।

माना कि कोई गैस दाब व आयतन की एक प्रारम्भिक अवस्था S (चित्र (7.23)) में है तथा फैलकर एक अन्य अवस्था T में पहुँच जाती है। माना कि गैस के इस प्रसार का दाब आयतन वक्र SMT है। तब गैस द्वारा अवस्था S से अवस्था T तक जाने में किया गया कार्य—



चित्र 7.23

$$W_{ST} = \text{क्षेत्रफल } SMTT'S' \quad \ldots \text{(i)}$$

माना गैस को संपीड़ित करके पुन: S में लाया जाता है तथा इस प्रक्रम में दाब-आयतन वक्र SNT आता है। अब गैस को अवस्था T से S तक लाने में किया गया कार्य

$$W_{TS} = \text{क्षेत्रफल } TNSS'T' \quad \ldots \text{(ii)}$$

चूँकि क्षेत्रफल $TNSS'T'$ क्षेत्रफल $SMTT'S'$ से बड़ा है, अत: गैस पर किया गया कार्य W_{TS} गैस द्वारा किये गये कार्य W_{ST} से अधिक है। अत: गैस पर किया गया कुल कार्य—

$$W = W_{TS} - W_{ST}$$

या $$W = \text{क्षेत्रफल } TNSS'T' - \text{क्षेत्रफल } SMTT'S'$$

या $$W = \text{क्षेत्रफल } SMTNS$$

अत: यदि कोई निकाय दाब तथा आयतन की विभिन्न अवस्थाओं से गुजरकर पुन: अपनी प्रारम्भिक अवस्था में आ जाये (चक्रीय प्रक्रम) तब दाब-आयतन वक्र एक बन्द वक्र (closed curve) होगा। इस दशा में निकाय द्वारा किया गया कुल कार्य अथवा निकाय पर किया गया कुल कार्य वक्र के क्षेत्रफल से घिरे क्षेत्रफल के बराबर होगा।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

यदि दाब-आयतन वक्र का अनुरेखण (tracing) दक्षिणावर्त (clockwise) दिशा में है तो कार्य निकाय द्वारा किया जाता है, यदि अनुरेखण वामावर्त दिशा में है तो कार्य निकाय पर किया जाता है।

§ 7.19 ऊष्मागतिकी के नियम (Laws of Thermodynamics)

ऊष्मागतिकी के निम्न तीन नियम हैं—

(1) ऊष्मीय संतुलन—ऊष्मागतिकी का शून्यवाँ नियम (Thermal equilibrium—The zeroth law of thermodynamics)

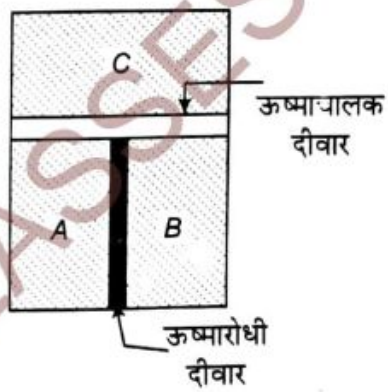
(2) ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम—ऊर्जा संरक्षण का नियम (First law of thermodynamics—Law of energy conservation)

(3) ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम (Second law of thermodynamics)

7.19.1 ऊष्मीय संतुलन, ऊष्मागतिकी का शून्यवाँ नियम (Thermal Equilibrium, the Zeroth Law of Thermodynamics)

"ऊष्मागतिकी के शून्यवाँ नियम के अनुसार यदि कोई दो निकाय *A* व *B* किसी तीसरे निकाय *C* के साथ अलग-अलग ऊष्मीय साम्यावस्था में हैं तो निकाय *A* व *B* भी आपस में ऊष्मीय साम्यावस्था में होंगे।"

"If two systems *A* and *C* are in thermal equilibrium and *C* is in thermal equilibrium with *B*, then *A* and *B* will also be in thermal equilibrium with each other."



चित्र 7.24

चित्र (7.24) में तीन निकाय *A*, *B* व *C* दर्शाये गये हैं। निकाय *A* तथा *B* को एक ऊष्मारोधी दीवार (Adiabatic Wall) विभाजित करती है, जबकि निकाय *A* व *B* को निकाय *C* से एक ऊष्मा चालक दीवार द्वारा विभाजित किया गया है। माना इस प्रबंध (arrangement) के आंरभ में *A*, *B* व *C* के ताप भिन्न हैं। अत: तीनों निकायों के मध्य ऊष्मीय साम्यावस्था नहीं है। परन्तु प्रबन्ध में आने के कुछ देर बाद निकाय *A* निकाय *C* के साथ ऊष्मीय साम्यवास्था को प्राप्त कर लेता है। इसी प्रकार निकाय *B* भी निकाय *C* के साथ ऊष्मीय साम्यावस्था प्राप्त कर लेता है। इस प्रकार निकाय *A* व *B* आपस में ऊष्मीय साम्यवस्था को प्राप्त कर लेते हैं।

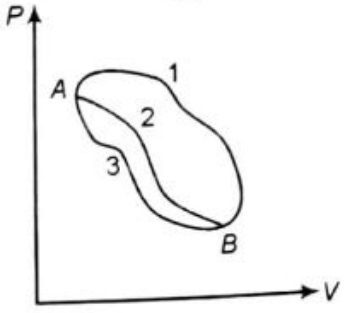
7.19.2 ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम (First Law of Thermal Dynamics)

ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम ऊर्जा संरक्षण के नियम का ही रूप है।

"First law of thermodynamics is another form of the principle of conservation of energy."

यह नियम दो रूपों में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है—

(A) इस नियम का पहला रूप यांत्रिक कार्य तथा ऊष्मीय ऊर्जा में तुल्यता (equivalence) व्यक्त करता है। इसे जूल का नियम कहते हैं। इस नियम के अनुसार "जब यांत्रिक कार्य को ऊष्मा में अथवा ऊष्मा को यांत्रिक कार्य में रूपान्तरित किया जाता है, तो प्रत्येक दशा में यांत्रिक कार्य तथा रूपान्तरित ऊष्मा के बीच एक निश्चित अनुपात होता है।" माना *W* कार्य करने से *Q* ऊष्मा की मात्रा उत्पन्न होती है, तो



चित्र 7.25

$$\frac{W}{Q} = \text{Constant} = J$$

अत: $W = JQ$, जहाँ J एक सार्वत्रिक नियतांक (universal constant) है जिसे ऊष्मा का यांत्रिक गुणांक कहते हैं। इसका मान $J = 4{\cdot}186 \times 10^3 \text{ J / kcal}$ होता है। नियम का यह रूप तभी सत्य है जबकि सम्पूर्ण कार्य ऊष्मा में या सम्पूर्ण ऊष्मा कार्य में रूपान्तरित होता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(B) इस नियम का दूसरा कथन ऊर्जा के संरक्षण (conversion of energy) के सामान्य नियम का विशिष्ट रूप है। किसी ऊष्मागतिक निकाय के दाब, ताप तथा आयतन की अवस्था में परिवर्तन यांत्रिक कार्य के द्वारा अथवा ऊष्मा-हस्तान्तरण के द्वारा अथवा दोनों के द्वारा कर सकते हैं।

माना कि एक निकाय की प्रारम्भिक अवस्था (A) है तथा प्रक्रम (1) के द्वारा इसे अवस्था (B) में लाया जाता है। माना A से B तक जाने में निकाय द्वारा ली गई ऊष्मा Q_1 तथा किया गया कार्य W_1 तथा प्रकम (2) में ली गयी ऊष्मा Q_2 तथा किया गया कार्य W_2 है। यदि A से B तक जाने में प्रत्येक प्रक्रम में $Q - W$ का मान निकाला जाये तो यह पाया जाता है कि

$$Q_1 - W_1 = Q_2 - W_2 = Q_3 - W_3$$

अत: $$Q - W = \text{नियतांक}$$

अत: किसी निकाय की दो निश्चित अवस्थाओं के लिए अन्तर $Q - W$, केवल उनकी अवस्थाओं पर निर्भर करता है। यह अन्तर इस बात पर निर्भर नहीं करता कि एक अवस्था से दूसरी अवस्था किस प्रकार प्राप्त की गयी है।

अत: $Q - W$, निकाय की दो निश्चित अवस्थाओं में उसके किसी ऐसे गुण का अन्तर है जो कि निकाय की केवल अवस्था पर निर्भर करता है, पथ पर नहीं। इस गुण को निकाय की आन्तरिक ऊर्जा कहते हैं तथा इसे 'U' से प्रदर्शित करते हैं। यह निकाय की केवल अवस्था पर निर्भर करता है। अत: यह एक 'अद्वितीय फलन' या 'एकल फलन' (Unique Function) है।

यहाँ यह बताना असंभव है कि निकाय ने अपनी आंतरिक ऊर्जा यांत्रिक कार्य के द्वारा प्राप्त की है अथवा ऊष्मा हस्तान्तरण के द्वारा, अथवा दोनों के द्वारा। **यदि कोई निकाय एक अवस्था से चलकर विभिन्न अवस्थाओं से गुजरते हुए पुन: अपनी प्रारम्भिक अवस्था में आ जाये तो उसकी आंतरिक ऊर्जा में परिवर्तन शून्य होगा।**

यदि निकाय को प्रारंभिक अवस्था i (i - initial) से अन्तिम अवस्था f (f-final) तक ले जाने में ऊष्मा (Q) प्रदान की जाती है तो यह ऊष्मा सामान्यत: तीन प्रकार से व्यय होती है—

(i) इसका कुछ भाग वस्तु (निकाय) का ताप बढ़ाने में व्यय होता है; जिससे इसकी आंतरिक गतिज ऊर्जा में वृद्धि होती है। इसे ΔU_K से प्रदर्शित करते हैं।

(ii) कुछ भाग अन्तराणविक आकर्षण बलों के विरुद्ध कार्य करने में अर्थात् वस्तु की आन्तरिक स्थितिज ऊर्जा बढ़ाने में व्यय होती हैं इसे ΔU_P से प्रदर्शित करते हैं।

अत: कुल आन्तरिक ऊर्जा में परिवर्तन $\Delta U = U_f - U_i = \Delta U_K + \Delta U_P$ होता है। U_f अन्तिम अवस्था में तथा U_i प्रारम्भ में निकाय की आन्तरिक ऊर्जा है।

(iii) ऊष्मा का शेष भाग वस्तु द्वारा बाह्य दाब के विरुद्ध प्रसार करने में; अर्थात् बाह्य कार्य करने में व्यय हो जाता है।

गणितीय रूप में—निकाय को कुल दी गई ऊष्मा गैस के आन्तरिक ऊर्जाओं में वृद्धि तथा निकाय द्वारा बाह्य कार्य में व्यय होती है।

$$Q = \Delta U_K + \Delta U_P + W$$

$$Q = \Delta U + W \qquad \ldots (31)$$

यह ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम की गणितीय समीकरण है।

इस का उपयोग करते समय निम्न बातों का ध्यान रखना चाहिए—

1. Q, W तथा ΔU तीनो राशियों को एक ही मात्रक में लेना चाहिये अर्थात् तीनों को या तो जूल या कैलोरी या किलो कैलोरी या अर्ग या eV आदि में ले सकते हैं।

2. Q वह ऊष्मा है जो केवल बाह्य कार्य (W) तथा आन्तरिक ऊर्जा (ΔU) में व्यय होती है। यदि कुछ ऊष्मा अन्य रूप में जैसे चालन, संवहन या विकिरण द्वारा प्रवाहित हो जाती है या उत्सर्जित हो जाती है तो उसे Q में से घटाना होगा अत:

$$Q = Q_{\text{total}} - Q_{\text{lost}}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

3. Q, W तथा ΔU को चिह्न सहित प्रयोग करना चाहिए।

(i) Q = +ve, यदि वस्तु या निकाय ने ऊष्मा लिया हो तथा Q = − ve, यदि वस्तु या निकाय ने ऊष्मा दिया हो Q = शून्य, यदि वस्तु या निकाय ने ऊष्मा न लिया हो और न दिया हो।

(ii) $W = +\text{ve}$ यदि $U_f > U_i$; $W = -\text{ve}$ यदि $U_f < U_i$; $W = 0$ यदि $U_f = U_i$

(iii) $\Delta U = U_f - U_i = +\text{ve}$ यदि $U_f < U_i$; $\Delta U = U_f - U_i = -\text{ve}$ यदि $U_f < U_i$; $\Delta U = U_f - U_i = 0$ यदि $U_f = U_i$ ।

1. ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम का भौतिक महत्व (Physical Significance of First Law of Thermodynamics)

ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम में तीन तथ्य निहित हैं—

(i) ऊष्मा ऊर्जा का ही एक रूप है,

(ii) ऊष्मागतिक निकाय में ऊर्जा संरक्षित रहती है, तथा

(iii) प्रत्येक ऊष्मागतिकीय निकाय में आंतरिक ऊर्जा होती है जो केवल निकाय की अवस्था पर निर्भर करती है।

इस प्रकार प्रथम नियम ऊष्मा तथा ऊर्जा में अन्य रूपों के बीच सही सम्बन्ध स्थापित करता है। उदाहरण के लिए इस नियम के अनुसार जब ऊष्मा उत्पन्न करने के लिए यांत्रिक कार्य किया जाता है तो किये गये कार्य की एक निश्चित मात्रा से ऊष्मा की एक निश्चित मात्रा प्राप्त होती है। इस नियम से स्पष्ट है कि अन्य प्रकार की ऊर्जा की एक तुल्य मात्रा खर्च किये बिना कार्य करना असम्भव है; अत: ऐसी तापीय मशीन असम्भव है जो ईंधन खर्च किये बिना कार्य करे। इस मशीन को अविरल प्रकार की मशीन (perpetual machine) कहते हैं। ऊष्मागतिकी के प्रथम सिद्धान्त के अनुसार इस प्रकार की मशीन का होना असम्भव है।

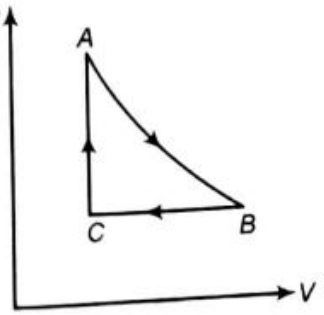
2. ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम की सीमायें (Limitations of First Law of Thermodynamics)

(1) ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम यांत्रिक कार्य तथा ऊष्मा की तुल्यता बताता है जबकि उनमें से एक-दूसरे में पूर्णतया परिवर्तित हो। परन्तु व्यवहार में यह असम्भव है। किसी पदार्थ से ली गयी ऊष्मा का केवल कुछ भाग की कार्य में परिवर्तित किया जा सकता है। सम्पूर्ण ऊष्मा को नहीं, शेष ऊष्मा अन्यत्र स्थानान्तरित होती है। अत: ऊष्मा का कितना भाग कार्य में बदला जा सकता है, इसके बारे में प्रथम नियम कुछ नहीं बताता है।

(2) यह नियम यह भी नहीं बताता कि प्रक्रम सम्भव भी है या नहीं। उदाहरणत: यह हमें इस बारे में कुछ नहीं बताता कि ऊष्मा गर्म वस्तु से ठण्डी वस्तु की तरफ जायेगी या ठण्डी से गर्म की तरफ।
प्रथम नियम केवल यह बताता है कि प्रक्रम में ऊर्जा संरक्षित रहती है। व्यवहार में ऊष्मा को कार्य में पूर्णत: नहीं बदला जा सकता है जबकि कार्य को ऊष्मा में पूर्णत: बदला जा सकता है।

3. ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम के अनुप्रयोग (Application of First Law of Thermodynamics)

(1) चक्रीय प्रक्रम (Cyclic Process)—जब कोई निकाय विभिन्न अवस्थाओं से गुजरता हुआ पुन: अपनी प्रारम्भिक अवस्था में वापिस आ जाता है तो यह 'चक्रीय प्रक्रम' कहलाता है (चित्र 7.26)। इस प्रक्रम में निकाय की आन्तरिक ऊर्जा में कोई परिवर्तन नहीं होता है क्योंकि प्रारम्भिक तथा अन्तिम अवस्था एक ही है अत:



चित्र 7.26

$U_i = U_f$

अर्थात् $dU = U_f - U_i = 0$

ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम $dQ = dU + dW$ के अनुसार

$dQ = 0 + dW$

अर्थात् $dQ = dW$

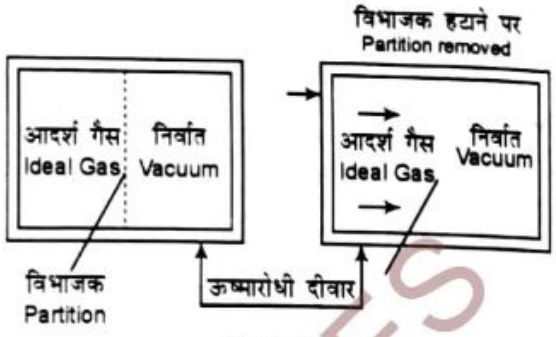
$= P\,dV$ अर्थात् $Q = W = \int P\,dV$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

इसका अर्थ है किसी चक्रीय प्रक्रम में किसी निकाय को दी गई ऊष्मा निकाय द्वारा किये गये नेट कार्य के बराबर होती है।

(2) विलग निकाय (Isolated System)—वह निकाय जो न तो कोई कार्य कर सकता है तथा न ही वातावरण से ऊष्मा का आदान-प्रदान कर सकता है विलग निकाय कहलाता है (चित्र 7.27)।



चित्र 7.27

अत: $Q = W = 0$

अत: ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम

$(dQ = dU + dW)$ के अनुसार

$dU = 0$ अत: $U_f - U_i = 0$

या $U_f = U_i = \text{Constant}$

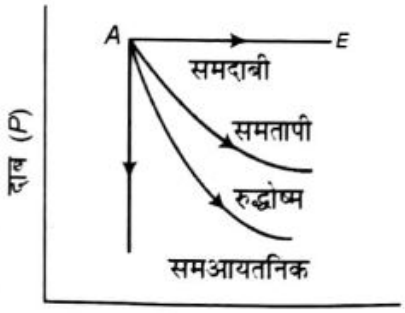
अत: एक विलग निकाय की आन्तरिक ऊर्जा स्थिर रहती है। इसे निकाय के भीतर होने वाले किसी भी प्रक्रम द्वारा नहीं बदला जा सकता। इसमें ताप नियत रहता है। गैस के प्रसार को मुक्त प्रसार (free expansion) कहते हैं।

(3) समआयतनिक प्रक्रम (Isochoric Process)—यदि कोई निकाय ऐसे प्रक्रम से गुजरे, जिसमें आयतन का परिवर्तन न हो तो ऐसा प्रक्रम 'समआयतनिक प्रक्रम' कहलाता है। किसी अप्रसारित कक्ष (non-expanding chamber) में उपस्थित किसी कार्यकारी पदार्थ जैसे गैस, को ऊष्मा देकर उसमें दाब व ताप वृद्धि करना समआयतनिक प्रक्रम का उदाहरण है। चूँकि इस प्रक्रम में आयतन स्थिर रहता है, $(dV = 0)$ अत: ऐसे प्रक्रम में निकाय द्वारा कोई कार्य नहीं किया जाता है; $(dW = P\,dV = 0)$ । इसलिए ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम से

$$dQ = dU = nC_v \Delta T$$

अत: ऐसे प्रक्रम में निकाय को दी गयी ऊष्मा (अथवा ली गई ऊष्मा) निकाय की आन्तरिक ऊर्जा में वृद्धि (अथवा कमी) करने में व्यय होती है। यहाँ n गैस के मोल की संख्या तथा C_v एक मोल गैस की स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा तथा ΔT निकाय का ताप परिवर्तन है।

(4) समदाबी प्रक्रम (Isobaric Process)—किसी निकाय में होने वाले किसी प्रक्रम के दौरान दाब स्थिर रहे तो उस प्रक्रम को 'समदाबी प्रक्रम' कहते हैं। उदाहरण के लिए नियत दाब पर (तथा नियत ताप पर भी) जल का उबलकर भाप बनना, तथा भाप अतितप्त होना, जल का जमकर बर्फ बनना, इत्यादि। ऐसे प्रक्रमों में गैस नियत दाब बनाये रखने के लिए या तो संकुचित होती हैं या फिर प्रसारित होती है तथा निकाय पर कार्य किया जाता है या निकाय कार्य करता है, अत: इस प्रक्रम में निकाय को दी गई ऊष्मा का कुछ भाग (dQ) निकाय का ताप (dT) बढ़ाने में तथा शेष भाग बाह्य कार्य करने में प्रयुक्त होता है, चित्र 7.28।



चित्र 7.28

ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम के अनुसार,

$$dQ = dU + dW$$

$(\because n$ मोल गैस के लिए)

$\because$ $dU = nC_v dT$

तथा $dQ = nC_P dT$

या $$\boldsymbol{nC_p dT = nC_v dT + PdV} \quad \ldots (32)$$

C_p तथा C_v एक मोल गैस के लिए क्रमश: स्थिर दाब तथा स्थिर आयतन पर गैस की विशिष्ट ऊष्मायें हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(5) समतापी प्रक्रम (Isothermal Process)—**जब किसी ऊष्मागतिक निकाय (thermodynamic system) में भौतिक परिवर्तन (दाब तथा आयतन में) इस प्रकार हो कि पूर्ण प्रक्रिया में निकाय का ताप स्थिर रहे, तो इस प्रकार के प्रक्रम को समतापी प्रक्रम कहते हैं।**

इस प्रकार की प्रक्रिया के लिए यह आवश्यक है कि निकाय किसी उत्तम चालकीय पदार्थ (conducting material) से बना हो, जिससे कि प्रक्रिया (अवस्था परिवर्तन) में उत्पन्न होने वाली ऊष्मा निकाय से वातावरण को स्थानान्तरित हो जाए अथवा निकाय द्वारा अवशोषित किसी ऊष्मा की पूर्ति, वातावरण से हो जाए जिससे निकाय का ताप नियत (constant) बना रहे।

व्यवहार में कोई भी पदार्थ पूर्ण चालक नहीं होता अत: पूर्ण समतापी (perfectly isothermal) प्रक्रिया सम्भव नहीं है। यथासम्भव पूर्ण समतापी प्रक्रम प्राप्त करने हेतु परिवर्तन को इतना धीरे करते हैं कि निकाय और वातावरण के मध्य ऊष्मा के आदान-प्रदान के लिए पर्याप्त समय मिल जाये और निकाय का ताप स्थिर रहे।

उदाहरणार्थ—यदि हम आदर्श गैस से भरे एक ऐसे सिलिण्डर तथा पिस्टन को लें जिसकी दीवारें पूर्ण सुचालक धातु की बनी हों, पिस्टन द्वारा गैस को धीरे-धीरे सम्पीडित करें तो गैस पर किये गये कार्य से ऊष्मा उत्पन्न होगी और गैस का ताप बढ़ेगा। चूँकि सिलिण्डर की दीवारें पूर्णत: सुचालक धातु की बनी होती हैं, अत: निकाय की ऊष्मा वातावरण में चली जाती हैं, अत: निकाय का ताप नहीं बढ़ेगा। इसी प्रकार यदि गैस पर दाब घटाकर गैस का प्रसार होने दिया जाये तो निकाय का ताप घटेगा। निकाय वातावरण से ऊष्मा शोषित कर अपना प्रारम्भिक ताप (मूल ताप) प्राप्त कर लेता है।

उक्त विवरण से स्पष्ट है कि प्रक्रम को समतापी होने के लिए निकाय की दीवारें पूर्ण सुचालक हों तथा प्रक्रम अत्यन्त धीमा हो। ज्ञातव्य है कि समतापीय परिवर्तन के लिए उक्त शर्त आवश्यक नहीं है। यदि निकाय की दीवारें अनन्त चालकता की पदार्थ की हो तो शीघ्रता से किया गया परिवर्तन भी समतापी होगा।

आदर्श गैस में समतापी परिवर्तन के लिए बॉयल का नियम (Boyle's Law) लागू होता है अर्थात् **स्थिर ताप पर किसी गैस के एक निश्चित द्रव्यमान का आयतन V उसके दाब P के व्युत्क्रमानुपाती होता है।** अर्थात्

"The volume (V) of a given mass of gas at constant temperature is inversely proportional to its pressure (P)."

$$P \propto \frac{1}{V}$$

या
$$PV = \text{Constant (नियतांक)} \quad \ldots (33)$$

यदि निकाय (बर्तन) में भरी गैस के प्रारम्भिक दाब व आयतन क्रमश: P_1 व V_1 तथा अन्तिम दाब व आयतन क्रमश: P_2 व V_2 हों तो—

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

आदर्श गैस की आन्तरिक ऊर्जा (Internal Energy) के ताप पर निर्भर रहने के कारण, समतापी प्रक्रम में गैस की आन्तरिक ऊर्जा स्थिर (अर्थात् $\Delta U = 0$) रहती है।

(6) रुद्धोष्म प्रक्रम (Adiabatic Process)—**पॉयसन का नियम :** जब किसी ऊष्मागतिक निकाय में परिवर्तन (दाब तथा आयतन में) इस प्रकार होता है कि पूरी प्रक्रिया में निकाय द्वारा न तो बाह्य वातावरण से ऊष्मा ली जाती है और न ही बाह्य वातावरण को ऊष्मा दी जाती है, भले ही निकाय (गैस) का ताप बदल जाये। इस प्रकार के प्रक्रम को रुद्धोष्म प्रक्रम कहते हैं।

इस प्रक्रम के लिए यह आवश्यक है कि निकाय बाह्य वातावरण से पूर्णत: ऊष्मारोधी हो तथा प्रक्रम अत्यन्त तीव्र हो। इस दशा में यदि निकाय में ऊष्मा उत्पन्न होती है, तो वह निकाय की दीवारों के ऊष्मारोधी होने के कारण, निकाय से बाहर नहीं जा पाती। फलस्वरूप निकाय का ताप बढ़ जाता है। इसी प्रकार यदि निकाय द्वारा ऊष्मा अवशोषित की जाती है तो निकाय की दीवारों के पूर्णतया ऊष्मारोधी होने के कारण बाह्य वातावरण से ऊष्मा, निकाय के अन्दर नहीं आ पाती, फलस्वरूप निकाय का ताप गिर जाता है।

प्रकृति में कोई भी पदार्थ पूर्णतया ऊष्मारोधी नहीं है, अत: पूर्ण रुद्धोष्म प्रक्रम व्यवहार में सम्भव नहीं है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

यदि किसी गैस को तीव्र गति से सम्पीडित कर दिया जाये तो उसका ताप बढ़ जाता है, कारण कि गैस को सम्पीडित करने में गैस पर जो कार्य किया जाता है, वह ऊष्मा में बदल जाता है निकाय के ऊष्मारोधी होने के कारण यह ऊष्मा बाहर नहीं जा पाती है, अत: यह ऊष्मा गैस की आन्तरिक ऊर्जा से जुड़ जाती है जिससे निकाय का ताप बढ़ जाता है।

इसके विपरीत यदि किसी गैस को तीव्र गति से फैलने दिया जाये तब निकाय के अन्दर गैस का दाब वायुमण्डलीय दाब से कम हो जाता है और गैस तेजी से फैलने लगती है, जिससे गैस के अणुओं के मध्य दूरी बढ़ जाती है। इस कार्य में जो ऊर्जा व्यय होती है वह गैस से ही ली जाती है, अत: उसका ताप गिर जाता है।

ज्ञातव्य है कि रुद्धोष्म परिवर्तन के लिए प्रक्रम का बहुत तीव्र गति से होना कोई सैद्धान्तिक शर्त नहीं है।

यदि निकाय की दीवारें शून्य चालकता (absolute insulated) के पदार्थ की हों, तो मन्द (slow) गति से किया गया परिवर्तन भी रुद्धोष्म होगा।

चूँकि परिवर्तन के दौरान गैस ताप स्थिर नहीं रहता, अत: रुद्धोष्म परिवर्तन में आदर्श गैस, बॉयल के नियम (Boyle's Law) का अनुपालन नहीं करती है।

रुद्धोष्म परिवर्तन पॉयसन के नियम (Poisson's Law) के अनुसार होता है जो निम्न है—

$$PV^{\gamma} = \text{Constant (नियतांक)} \quad \ldots (34)$$

यहाँ γ = गैस की दो विशिष्ट ऊष्माधारिताओं C_P तथा C_v का अनुपात होता है—

$$\gamma = \frac{C_P}{C_v} \quad \ldots (35)$$

रुद्धोष्म परिवर्तन के उदाहरण—

(i) पम्प से साइकिल के ट्यूब में हवा भरते समय पम्प के बैरल का गर्म हो जाना।

(ii) साइकिल की ट्यूब से अचानक वाल्व निकालने पर साइकिल की ट्यूब से निकली वायु का ठण्डा होना।

(iii) कार्बन डाइऑक्साइड (CO_2) के सिलिण्डर के अचानक खोलने पर CO_2 का शुष्क बर्फ बन जाना।

रुद्धोष्म प्रक्रम हेतु दाब-आयतन, ताप-आयतन तथा ताप-दाब के मध्य सम्बन्ध

(i) दाब (P)-आयतन (V) सम्बन्ध

$$PV^{\gamma} = \text{नियतांक} \qquad \left(\text{जहाँ } \gamma = \frac{C_P}{C_v} \text{ है।}\right)$$

(ii) ताप (T)-आयतन (V) सम्बन्ध—

$\because$ $PV = RT$

या $P = \frac{RT}{V}$

समीकरण (24) से $\left(\frac{RT}{V}\right)V^{\gamma} = K$

या $$TV^{\gamma-1} = \frac{K}{R} = \text{नियतांक} \quad \ldots (36)$$

(iii) ताप (T)-दाब (P) सम्बन्ध—

पुन: $V = \frac{RT}{P}$ का मान समीकरण (24) में रखने पर

$$P\left(\frac{RT}{P}\right)^{\gamma} = K$$

या $$P^{1-\gamma}T^{\gamma} = \frac{K}{R^{\gamma}}$$

या $$\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = \text{नियतांक} \quad \ldots (37)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

रुद्धोष्म प्रक्रम में गैस की विशिष्ट ऊष्माधारिता—

$$C = \frac{Q}{m \times \Delta\theta}$$

$$C = \frac{0}{m \times \Delta\theta} \qquad (\text{यहाँ } Q = 0)$$

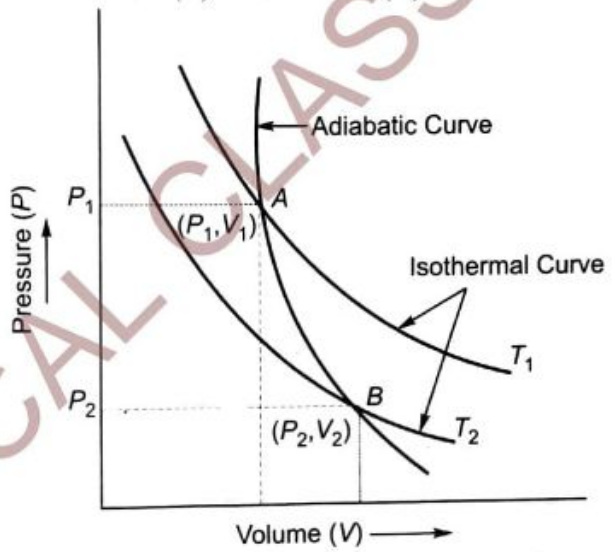
अत: $\boldsymbol{C = 0}$

अत: **रुद्धोष्म परिवर्तन में गैस की विशिष्ट ऊष्माधारिता शून्य होती है।**

§7.20 समतापी एवं रुद्धोष्म वक्र (Isothermal and Adiabatic Curves)

समतापी परिवर्तन में किसी गैस के एक निश्चित द्रव्यमान के किसी निश्चित ताप पर दाब *(P)* तथा आयतन *(V)* के मध्य वक्र को समतापी वक्र कहते हैं तथा रुद्धोष्म परिवर्तन के समय गैस के दाब *(P)* तथा आयतन *(V)* के मध्य वक्र को रुद्धोष्म वक्र कहते हैं।

चित्र 7.29 में एक आदर्श गैस के दो नियत तापों T_1 तथा T_2 पर समतापी वक्र प्रदर्शित किये गये हैं। माना गैस का प्रारंभिक दाब, आयतन तथा ताप क्रमश: P_1, V_1 तथा T_1 हैं। गैस की यह अवस्था चित्र में समतापी वक्र (T_1) पर बिन्दु A के द्वारा प्रदर्शित की गयी है।



चित्र 7.29 : एक आदर्श गैस के समतापी तथा रुद्धोष्म वक्र

यदि नियत ताप T_1 पर गैस का समतापीय विधि द्वारा प्रसार किया जाये तब इसी वक्र पर विभिन्न बिन्दु गैस की अवस्था प्रदर्शित करते हैं।

परन्तु यदि गैस का बिन्दु A से रुद्धोष्म प्रसार किया जाये जिससे कि यह बाहर से ऊष्मा न ले सके तब इसका ताप तथा दाब दोनों कम हो जायेंगे।

माना गैस का अन्तिम दाब, आयतन तथा ताप क्रमश: P_2, V_2 तथा T_2 हैं। गैस की यह अवस्था समतापी वक्र T_2 पर बिन्दु B के द्वारा प्रदर्शित की गयी है। चूँकि गैस का A से B तक का प्रसार रुद्धोष्म है, अत: बिन्दुओं A तथा B को मिलाने वाला वक्र रुद्धोष्म वक्र है।

चित्र से स्पष्ट है कि इन दोनों वक्रों में रुद्धोष्म वक्र की ढाल अधिक है। इसका कारण यह है कि समतापी तथा रुद्धोष्म दोनों प्रसारों में गैस का दाब कम होता है। परन्तु दाब में इस कमी के लिए रुद्धोष्म प्रसार में गैस के आयतन में वृद्धि समतापी प्रसार में वृद्धि की तुलना में कम है क्योंकि रुद्धोष्म प्रसार में गैस का ताप भी कम होता है।

एक आदर्श गैस के लिए रुद्धोष्म तथा समतापी वक्रों के ढालों का अनुपात γ के बराबर होता है।

इसकी निष्पत्ति इस प्रकार है—

आदर्श गैस के समतापी वक्र के समीकरण

$$PV = \text{Constant}$$

इस समीकरण का अवकलन करने पर

$$P\,dV + V\,dP = 0$$

अथवा $$\frac{dP}{dV} = -\frac{P}{V}$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

अत: समतापी वक्र का बिन्दु $A \to (P_1, V_1)$ पर ढाल निम्न है—

$$\left(\frac{dP}{dV}\right)_{\text{समतापी}} = -\frac{P_1}{V_1} \quad \text{... (i)}$$

पुन: आदर्श गैस के रुद्धोष्म वक्र के समीकरण

$$PV^{\gamma} = \text{Constant} \qquad \left(\text{जहाँ } \gamma = \frac{C_p}{C_v}\right)$$

अवकलन करने पर—

$$dP\,V^{\gamma} + P\gamma V^{\gamma-1}dV = 0$$

अथवा $$\frac{dP}{dV} = -\gamma\frac{PV^{\gamma-1}}{V^{\gamma}} = -\gamma\frac{P}{V}.$$

अत: बिन्दु (P_1, V_1) पर रुद्धोष्म वक्र का ढाल

$$\left(\frac{dP}{dV}\right)_{\text{रुद्धोष्म}} = -\gamma\frac{P_1}{V_1} \quad \text{.... (ii)}$$

समीकरण (ii) को समीकरण (i) से भाग देने पर

$$\frac{\left(\frac{dP}{dV}\right)_{\text{रुद्धोष्म}}}{\left(\frac{dP}{dV}\right)_{\text{समतापी}}} = \gamma$$

इस प्रकार $$\frac{\text{रुद्धोष्म वक्र का ढाल}}{\text{समतापी वक्र का ढाल}} = \gamma$$

रुद्धोष्म वक्र का ढाल $= \gamma \times$ **समतापी वक्र का ढाल** ... (38)

γ का मान 1 से अधिक होता है। इसका मान एक परमाण्विक गैस के लिए $\gamma = 1{\cdot}67$ तथा द्वि-परमाण्विक गैस के लिए 1·41 होता है। यही कारण है कि किसी बिन्दु पर रुद्धोष्म वक्र, उसी बिन्दु पर समतापी वक्र की तुलना में गहरा होता है।

§ 7.21 गैसों की आयतन प्रत्यास्थतायें (Volume Elasticities of Gases)

गैसों में आयतन प्रत्यास्थता का गुण पाया जाता है। यदि किसी गैस के एक निश्चित द्रव्यमान के दाब में परिवर्तन हो जाए तो उसके आयतन में परिवर्तन हो जाता है।

माना किसी आदर्श गैस के निश्चित द्रव्यमान का प्रारम्भिक दाब P तथा आयतन V है। जब दाब को बढ़ाकर $(P + \Delta P)$ किया जाता है तो आयतन घटकर $(V - \Delta V)$ हो जाता है। स्पष्ट है दाब वृद्धि ΔP से आयतन परिवर्तन ΔV होता है।

अत: अभिलम्ब प्रतिबल $= \Delta P$

आयतन विकृति $= \Delta V / V$

∴ प्रत्यास्थता गुणांक $E = \dfrac{\text{प्रतिबल}}{\text{विकृति}}$

$$\boldsymbol{E = \frac{\Delta P}{(\Delta V / V)}} \quad \text{... (39)}$$

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

7.21.1 गैस का समतापी प्रत्यास्थता गुणांक (Isothermal Elastic Constant of a Gas)

यदि गैस के दाब व आयतन में परिवर्तन इस प्रकार किया जाये कि गैस का ताप स्थिर रहे तो गैस का प्रत्यास्थता गुणांक, समतापी प्रत्यास्थता गुणांक कहलाता है। इसे E_T से प्रदर्शित करते हैं। यदि दाब P से बढ़कर $P+\Delta P$ तथा आयतन घटकर V से $V-\Delta V$ हो जाये, तब

$$E_T = \frac{\Delta P}{\left(\frac{\Delta V}{V}\right)} = \frac{V\Delta P}{\Delta V} \quad \ldots (i)$$

बॉयल के नियम से

$$PV = \text{नियतांक}$$

उपरोक्त परिवर्तन लगाने पर

$$PV = (P+\Delta P)(V-\Delta V)$$

$$PV = PV - P\Delta V + V\Delta P - \Delta P.\Delta V$$

$$V\Delta P = P\Delta V + \Delta P.\Delta V$$

$$\frac{V\Delta P}{\Delta V} = P + \Delta P$$

समीकरण (i) से

$$\boldsymbol{E_T = P + \Delta P} \quad \ldots (40)$$

यदि $\Delta P \to 0$

$$\boldsymbol{E_T = P} \quad \ldots (41)$$

अत: **आदर्श गैस का समतापी प्रत्यास्थता गुणांक उसके दाब के बराबर होता है।**

7.21.2 गैस का रुद्धोष्म प्रत्यास्थता गुणांक (Adiabatic Elastic Constant of a Gas)

यदि गैस के दाब व आयतन में परिवर्तन के समय गैस द्वारा बाहर से ऊष्मा का आदान-प्रदान न हो तो इस परिवर्तन में गैस का ताप बदल जाता है। तब गैस की प्रत्यास्थता गुणांक रुद्धोष्म प्रत्यास्थता गुणांक कहलाता है। इसे E_S से प्रदर्शित करते हैं।

$$E_S = \frac{\Delta P}{\Delta V/V} = \frac{V\Delta P}{\Delta V} \quad \ldots (i)$$

पॉयसन के नियम से,

$$PV^\gamma = \text{नियतांक} \qquad \left(\text{जहाँ } \gamma = \frac{C_p}{C_v}\right)$$

उपरोक्त परिवर्तन लगाने पर

$$PV^\gamma = (P+\Delta P)(V-\Delta V)^\gamma$$

$$PV^\gamma = (P+\Delta P)V^\gamma\left(1-\frac{\Delta V}{V}\right)^\gamma$$

$$P = (P+\Delta P)\left(1-\frac{\Delta V}{V}\right)^\gamma$$

$\left(1-\frac{\Delta V}{V}\right)^\gamma$ को द्विपद सिद्धान्त से हल करने पर छोटी राशि $\frac{\Delta V}{V}$ की दूसरी तथा उच्च घातों को छोड़ने पर—

$$P = (P+\Delta P)\left(1-\gamma\frac{\Delta V}{V}\right)$$

$$P = P - \gamma\frac{P.\Delta V}{V} + \Delta P - \gamma\frac{\Delta P\Delta V}{V}$$

$$\Delta P = \gamma\frac{P.\Delta V}{V} + \gamma\frac{\Delta P\Delta V}{V}$$

$$\frac{V\Delta P}{\Delta V} = \gamma P + \gamma\Delta P = \gamma(P+\Delta P)$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

समीकरण (i) से—

$$E_S = \gamma(P + \Delta P)$$

यदि $\Delta P \to 0$

$$\boldsymbol{E_S = \gamma P} \quad \ldots (42)$$

अत: आदर्श गैस का रुद्धोष्म प्रत्यास्थता गुणांक उसके दाब का γ गुना होता है। समीकरण (32) को समीकरण (31) से भाग देने पर

$$\frac{E_S}{E_T} = \frac{\gamma P}{P}$$

$$\boldsymbol{\frac{E_S}{E_T} = \gamma = \frac{C_P}{C_v} = \frac{M_{C_P}}{M_{C_v}}} \quad \ldots (43)$$

अत: आदर्श गैस की प्रत्यास्थताओं में वही अनुपात होता है जो उसकी ग्राम अणुक विशिष्ट ऊष्माओं में होता है।

$\because \quad \gamma > 1$

अत: $\boldsymbol{E_S > E_T}$

क्योंकि दाब में समान कमी होने पर; गैस के आयतन में रुद्धोष्म प्रक्रम में समतापी प्रक्रम की अपेक्षा कम वृद्धि होती है।

§ 7.22 समतापी प्रक्रम में कृत कार्य (Work done in an Isothermal Process)

जब एक आदर्श गैस में समतापीय प्रसार होता है तब गैस द्वारा कार्य किया जाता है। माना किसी गैस के n मोल का प्रारंभिक दाब P_1, आयतन V_1 तथा ताप T है। गैस का समतापी प्रसार होने पर गैस का दाब P_2 तथा आयतन V_2 होता है। माना पिस्टन का क्षेत्रफल A तथा किसी क्षण गैस द्वारा पिस्टन पर लगने वाला दाब P है (चित्र 7.30) तो गैस द्वारा पिस्टन पर लगने वाला बल

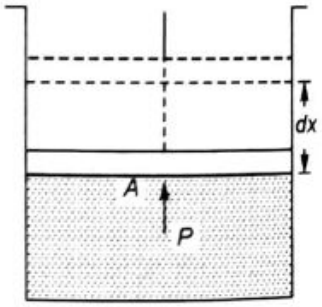
$$F = P \times A$$

इसलिये प्रसार में dx विस्थापन के लिए गैस द्वारा किया गया कार्य

$$dW = F \times dx$$

$$dW = P \times A \times dx$$

$$dW = P\,(dV)$$



चित्र 7.30

जहाँ $A \times dx = dV$ गैस के आयतन में हुई सूक्ष्म वृद्धि है। अत: समतापी प्रसार में गैस का आयतन V_1 से V_2 होने के लिए गैस द्वारा किया गया कार्य

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,(dV) \quad \ldots (i)$$

गैस समीकरण $PV = nRT$ से P का मान समीकरण (i) में रखने पर—

$$W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = nRT\,[\log_e V]_{V_1}^{V_2}$$

$$W = nRT\,[\log_e V_2 - \log_e V_1]$$

$$W = nRT \log_e \left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$\boldsymbol{W = 2 \cdot 3026\, nRT \log_{10} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \quad \ldots (44)$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

चूँकि समतापी प्रक्रम में $P_1V_1 = P_2V_2$ या $\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$ इसलिए

$$W = 2 \cdot 3026\, nRT \log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \quad \ldots (45)$$

अत: समतापी प्रसार में व्यय ऊष्मा ऊर्जा का कैलोरी मान

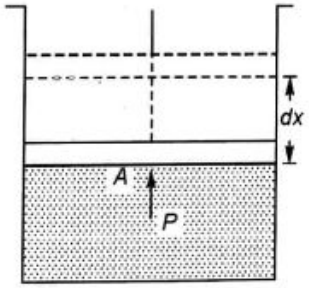
$$H = \frac{W}{J} = 2 \cdot 3026 \frac{RT}{J} \log_{10}\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \quad \ldots (46)$$

अत: गैस को वातावरण से इतनी ही ऊष्मा मिल जाती है जिससे कि गैस का ताप समान बना रहता है।

"यदि कार्य (W) का मान धनात्मक है तो इसका अर्थ है कि गैस द्वारा कार्य किया जा रहा है अर्थात् गैस का प्रसार हो रहा है ($V_2 > V_1$)। यदि W का मान ऋणात्मक है तो इसका अर्थ है कि गैस पर कार्य किया जा रहा है अर्थात् गैस का संपीडन हो रहा है ($V_2 < V_1$)। "

§7.23 रुद्धोष्म प्रक्रम में कृत कार्य (Work done in an Adiabatic Process)

माना किसी रुद्धोष्म निकाय में भरे आदर्श गैस के n मोल का प्रारंभिक दाब P_1, आयतन V_1 तथा ताप T_1 है। गैस का रुद्धोष्म प्रसार होने पर दाब P_2, आयतन V_2 तथा ताप T_2 हो जाता है। माना पिस्टन की काट का क्षेत्रफल A तथा किसी क्षण गैस द्वारा पिस्टन पर लगने वाला दाब P है (चित्र 7.31) तो गैस द्वारा पिस्टन पर लगने वाला बल



चित्र 7.31

$$F = P \times A$$

इसलिये प्रसार में विस्थापन के लिए गैस द्वारा किया गया कार्य

$$dW = F \times dx$$

$$dW = P \times A \times dx$$

$$dW = P\,(dV)$$

जहाँ $A \times dx = dV$ गैस के आयतन में हुई सूक्ष्म वृद्धि है। अत: रुद्धोष्म प्रसार में गैस का आयतन V_1 से V_2 करने के लिए गैस द्वारा किया गया कुल कार्य

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV \quad \ldots (i)$$

पॉयसन के नियम से रुद्धोष्म प्रसार के समीकरण $PV^\gamma =$ नियतांक में यदि नियतांक को K माना जाये तो

$$PV^\gamma = K$$

अत: $$P = \frac{K}{V^\gamma} = KV^{-\gamma}, \text{ जहाँ } \lambda = \frac{C_p}{C_v} = \text{गैस की ग्राम-अणुक विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात}$$

P का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$W = \int_{V_1}^{V_2} K\, V^{-\gamma} dV$$

$$W = K \int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma} dV$$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

$$= K\left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_{V_1}^{V_2}$$

$$= \frac{K}{1-\gamma}\left[V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}\right]$$

$$W = \frac{1}{1-\gamma}\left[K V_2^{1-\gamma} - K V_1^{1-\gamma}\right]$$

चूँकि रुद्धोष्म प्रक्रम में $P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} = K$ (नियतांक) होता है। अत:

$$W = \frac{1}{1-\gamma}\left[P_2V_2^{\gamma} V_2^{1-\gamma} - P_1V_1^{\gamma} V_1^{1-\gamma}\right]$$

या $$\boldsymbol{W = \frac{1}{1-\gamma}\left[P_2V_2 - P_1V_1\right]} \quad \text{... (47)}$$

उपरोक्त सूत्र में गैस के मोलों की संख्या n शामिल नहीं है।

गैस के मानक समीकरण को गैस की प्रारंभिक व अन्तिम स्थितियों के लिए प्रयोग करने पर

$$P_1V_1 = nRT_1 \quad \text{तथा} \quad P_2V_2 = nRT_2$$

अत: कार्य $$W = \frac{1}{1-\gamma}\left[nRT_2 - nRT_1\right]$$

$$\boldsymbol{W = \frac{nR}{1-\gamma}(T_2 - T_1)} \quad \text{... (48)}$$

अत: रुद्धोष्म प्रसार में व्यय ऊष्मा ऊर्जा का कैलोरी मान

$$H = \frac{W}{J} = \frac{nR\,(T_2 - T_1)}{(1-\gamma)\,J} \quad \text{... (49)}$$

पुन: समीकरण (38) से, $$W = \frac{nR}{\gamma - 1}\left[T_1 - T_2\right]$$

$$= \frac{n\,(C_P - C_v)}{\frac{C_P}{C_v} - 1}(T_1 - T_2) \qquad (\because\ R = C_P - C_v \text{ तथा } \gamma = \frac{C_P}{C_v})$$

अत: गैस के नियत द्रव्यमान के लिए $$\boldsymbol{W = n\,C_v\,(T_1 - T_2)} \quad \text{... (50)}$$

अत: किया गया कार्य केवल गैस के प्रारंभिक परमताप T_1 तथा अंतिम परमताप T_2 पर निर्भर करता है। जब—

(i) **रुद्धोष्म प्रसार में** कार्य गैस द्वारा किया जाता है अर्थात् W धनात्मक होता है। अत: $(T_1 - T_2)$ भी धनात्मक होता है अर्थात् $T_2 < T_1$। इसलिए प्रसार में गैस ठण्डी हो जायेगी।

(ii) **रुद्धोष्म संपीडन में** कार्य गैस पर किया जाता है अर्थात् W ऋणात्मक होता है। अत: $(T_1 - T_2)$ भी ऋणात्मक होगा अर्थात् $T_2 > T_1$। इसलिए संपीडन में गैस का ताप बढ़ जायेगा अर्थात् गैस गर्म हो जायेगी।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

आंतरिक ऊर्जा (Internal Energy)

प्रत्येक ऊष्मागतिक निकाय में, उसके अन्दर ऊर्जा की एक मात्रा होती है। ऊर्जा का वह संग्रह जिसका निकाय द्वारा प्रत्यक्ष आभास नहीं होता है, लेकिन जो कार्य करने में समर्थ होती है, आंतरिक ऊर्जा (Internal Energy) कहलाती है।

द्रव्य के अणुगति मॉडल के अनुसार प्रत्येक पदार्थ छोटे-छोटे कणों से मिलकर बना होता है जो पदार्थ के भीतर निरन्तर गति करते रहते हैं। इस प्रकार अणुओं में गतिज ऊर्जा होती है। अणुओं की कुल गतिज ऊर्जा आंतरिक गतिज ऊर्जा (U_K) कहलाती है। जबकि अणुओं के बीच अंतराणविक बलों के कारण स्थितिज ऊर्जा होती हैं जिसे आंतरिक स्थितिज ऊर्जा (U_P) कहते हैं।

किसी पिण्ड या निकाय के अणुओं की गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जाओं के योग को आंतरिक ऊर्जा (U) कहते हैं। अर्थात् **किसी निकाय की आणविक गति, स्थिति तथा आणविक संरचना के कारण निकाय में उपस्थित ऊर्जा को आंतरिक ऊर्जा कहते है। आंतरिक ऊर्जा के बारे में मुख्य तथ्य निम्न हैं—**

(i) आंतरिक ऊर्जा (U) दो प्रकार की होती है। एक आंतरिक ऊर्जा U_K तथा दूसरी आंतरिक ऊर्जा U_P अत:

$$U = U_K + U_P$$

$$U = U_{\text{translational}} + U_{\text{rotational}} + U_{\text{vibrational}} + U_P$$

जहाँ $$U_K = U_{\text{translational}} + U_{\text{rotational}} + U_{\text{vibrational}}$$

(ii) यह निकाय की अवस्था का अद्वितीय फलन (Unique Function) है अर्थात् आन्तरिक ऊर्जा केवल प्रारंभिक तथा अन्तिम अवस्था पर निर्भर करती है तथा उस पथ या प्रक्रम पर निर्भर नहीं करती है जिस पर होकर परिवर्तन किया गया है।

(iii) आन्तरिक ऊर्जा ताप पर निर्भर करती है। आदर्श गैस के एक अणु की आन्तरिक ऊर्जा $U = \frac{3}{2}KT$ होती है।

(iv) आन्तरिक ऊर्जा ऊष्मागतिक अवस्था का फलन (function) है। इसके पथ के अन्तिम व प्रारम्भिक मानों का अन्तर $(U_f - U_i)$ निश्चित होता है तथा किसी प्रक्रम में इसका मान $(Q - W)$ के बराबर होता है। अत: $\Delta U = Q - W$ होता है। इस फलन $U = U(P, V, T)$ को आन्तरिक ऊर्जा का फलन कहते हैं।

(v) यदि कोई निकाय विभिन्न अवस्थाओं से होकर अपनी प्रारम्भिक अवस्था में लौट आता है तो आन्तरिक ऊर्जा परिवर्तन $(U_f - U_i)$ का मान शून्य होगा तथा विलग निकाय (isolated system) या मुक्त प्रसार (free expansion) में $\Delta U = 0$; क्योंकि $T_i = T_f$

(vi) किसी आदर्श गैस को स्थिर आयतन पर दी गई ऊष्मा केवल आन्तरिक ऊर्जा बढ़ाती है; अत: $\Delta U = (Q)_v = nC_v\Delta T$ होती है। n ग्राम मोल संख्या है। अत: आन्तरिक ऊर्जा में परिवर्तन अणुओं की संख्या तथा ताप परिवर्तन पर निर्भर करता है।

(vii) संपीडित वास्तविक गैस की कुल आन्तरिक ऊर्जा उसी ताप पर विरलित गैस की कुल आन्तरिक ऊर्जा से कम होती है।

(viii) किसी दिए हुए ताप व द्रव्यमान के लिए गैसों की आन्तरिक ऊर्जा अधिकतम तथा ठोसों की न्यूनतम होती है अर्थात्

$$U_{\text{gas}} > U_{\text{liquid}} > U_{\text{solid}}$$

(ix) 0 °C के पानी के अणुओं की आन्तरिक ऊर्जा 0 °C के बर्फ के अणुओं की आन्तरिक ऊर्जा से अधिक होती है क्योंकि 0 °C के बर्फ को 0 °C के पानी में बदलने के लिए 80 कैलोरी/ग्राम अधिक ऊर्जा देनी होती है।

(x) अवस्था परिवर्तन की स्थिति में आन्तरिक ऊर्जा में परिवर्तन होता है।

(xi) किसी आदर्श गैस के लिए $U = \frac{PV}{\gamma - 1}$ होती है, जहाँ $\gamma = \frac{C_P}{C_v}$ है तथा $\Delta U = nC_v\Delta T = \frac{nR\,\Delta T}{\gamma - 1} = \frac{P_fV_f - P_iV_i}{\gamma - 1}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 7.25 विशिष्ट ऊष्मा (Specific Heat)

जब किसी वस्तु को गर्म किया जाता है तब उसका ताप बढ़ता है। ताप बढ़ाने के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा वस्तु के द्रव्यमान तथा ताप वृद्धि पर निर्भर करती है। प्रयोगों द्वारा ज्ञात हुआ कि यदि किसी वस्तु का द्रव्यमान m तथा आवश्यक ताप वृद्धि Δt हो तो वस्तु को दी जाने वाली ऊष्मा Q, द्रव्यमान तथा ताप वृद्धि के गुणनफल के समानुपाती होती है। अर्थात्

$$Q \propto m\Delta t$$

$$\boldsymbol{Q = Sm\Delta t} \quad \ldots (51)$$

जहाँ S एक नियतांक है जिसका मान वस्तु के पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करता है। S को पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा कहते हैं।

$$S = \frac{Q}{m \times \Delta t}$$

If $m = 1$ kg, $\Delta t = 1\,°C$ तो

$$S = Q$$

अत: **किसी वस्तु के इकाई द्रव्यमान की इकाई ताप वृद्धि करने के लिए आवश्यक ऊष्मा वस्तु के पदार्थ की विशिष्ट ऊष्मा कहलाती है।**

"Specific heat of material of a body is numerically equal to the heat supplied to the unit mass of the material for rise of temperature by unity *i.e.* 1°C. "

विशिष्ट ऊष्मा का S.I. मात्रक—

$$= \frac{\text{जूल}}{\text{किग्रा} \times °\text{C}}$$

$$= \frac{\text{जूल}}{\text{किग्रा} \times \text{केल्विन}}$$

$$= \frac{\text{J}}{\text{kg} \times \text{K}}$$

विशिष्ट ऊष्मा का सामान्य मात्रक $= \frac{\text{कैलोरी}}{\text{ग्राम} \times °\text{C}}$

$$= \frac{\text{cal}}{\text{g} \times °\text{C}}$$

या $$= \frac{\text{कैलोरी}}{\text{ग्राम} \times \text{केल्विन}} = \frac{\text{cal}}{\text{g} \times \text{K}}$$

दोनों मात्रकों में S का मान समान होता है।

चूँकि 1 kcal = 4180 joule तथा 1 °C तापान्तर 1 K के तुल्य होता है, अत:

$$1\text{cal g}^{-1}\text{°C}^{-1} = 1\text{kcal kg}^{-1}\text{°C}^{-1} = 4180\text{ J kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$$

विशिष्ट ऊष्मा की विमा $= \frac{Q}{m \times \Delta t}$

$$= \frac{\text{ऊष्मा की विमा}}{\text{द्रव्यमान की विमा} \times \text{ताप की विमा}}$$

$$= \frac{[ML^2T^{-2}]}{[M][\theta]}$$

$$= [M^0L^2T^{-2}\theta^{-1}]$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

§ 7.26 ऊष्माधारिता (Heat Capacity)

यदि m द्रव्यमान की वस्तु का ताप Δt °C तक बढ़ाने के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा Q है, तो

$$Q \propto m\,\Delta t$$

$$Q = mS\,\Delta t$$

यहाँ (mS) अर्थात् द्रव्यमान व विशिष्ट ऊष्मा के गुणनफल को वस्तु की ऊष्माधारिता (heat capacity) कहते हैं। इसका मात्रक कैलोरी/°C होता है।

If $m = 1, \Delta t = 1$ °C तथा $S = Q$

किसी वस्तु में एकांक ताप वृद्धि के लिए आवश्यक कुल ऊष्मा की मात्रा को उस वस्तु की ऊष्माधारिता (mS) कहते हैं। यह परिभाषा ठोस तथा द्रव के लिए पर्याप्त है परन्तु गैसों के लिए नहीं।

"Heat capacity of an object is the amount of heat supplied to it to its consequent rise in temperature by unity, *i.e.*, 1°C."

§ 7.27 ठोसों तथा द्रवों की विशिष्ट ऊष्मायें (Specific Heats of Solids and Liquids)

ठोसों तथा द्रवों के प्रसार गुणांक (expansion coefficient) का मान अत्यन्त कम होता है। इसलिए ठोसों तथा द्रवों की विशिष्ट ऊष्मा का मान नियत होता है।

§ 7.28 गैसों की विशिष्ट ऊष्मायें (Specific Heats of Gases)

किसी गैस की विशिष्ट ऊष्मा शून्य से लेकर अनन्त तक कुछ भी हो सकती है। माना किसी गैस के m द्रव्यमान को गर्म करने पर

Δt °C ताप वृद्धि होती है (या ΔT K ताप वृद्धि होती है, Δt °C = ΔT K) अत:

$Q = m\,\Delta t = m\,\Delta T$ लिख सकते हैं तथा

$$S = \frac{Q}{m\Delta t}\,\frac{\text{किलोकैलोरी}}{\text{किग्रा °C}} = \frac{Q}{m\Delta T}\,\frac{\text{किलोकैलोरी}}{\text{किग्रा K}}$$

(1) गैस को कोई ऊष्मा Q नहीं दी गई है, तब

$$S = \frac{0}{m\Delta T} = 0$$

अत: रुद्धोष्म प्रक्रम में गैस की विशिष्ट ऊष्मा शून्य होती है।

(2) समतापीय प्रक्रम में $\Delta T = 0$ अत: $S = \frac{Q}{m \times 0} = \infty$

अत: समतापीय प्रक्रम में गैस की विशिष्ट ऊष्मा अनन्त होती है।

अत: **गैस की विशिष्ट ऊष्मा का मान इस बात पर निर्भर करता है कि गैस को ऊष्मा देने अथवा गैस का ताप परिवर्तन किस प्रक्रम के अन्तर्गत किया गया है।** इस आधार पर गैस की दो प्रमुख विशिष्ट ऊष्मायें होती हैं—

(1) स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा (c_v)

(2) स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा (c_p)

1. स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा (c_v) (Specific Heat at Constant Volume)

$$c_v = \left(\frac{Q}{m\Delta t}\right)_{V = \text{स्थिर}} \quad \ldots (52)$$

$m = 1, \Delta t = 1$ K $= 1$ °C तब $c_v = (Q)_{V = \text{स्थिर}}$ अर्थात्

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

''स्थिर आयतन पर किसी गैस के 1 ग्राम द्रव्यमान का ताप 1 °C बढ़ाने (या 1 K बढ़ाने) के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा को उस गैस की स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा कहते हैं।''

"It is amount of heat required to raise the temperature of 1 gram of the gas by 1 °C (or 1 K), at constant volume."

इसे c_v से प्रदर्शित कर सकते हैं। इसका मात्रक कैलोरी/ग्राम °C या कैलारी/ग्राम °K होता है।

2. स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा (c_P) (Specific Heat at Constant Pressure)

$$c_P = \left(\frac{Q}{m\Delta t}\right)_{P\ =\ \text{constant}} \quad \ldots (53)$$

यदि $m = 1, \Delta T = 1\,°C = 1\,K$ तब $c_P = (Q)_{P\ =\ \text{constant}}$

अर्थात् **''स्थिर दाब पर किसी गैस के 1 ग्राम द्रव्यमान का ताप 1 °C बढ़ाने (या 1 K बढ़ाने) के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा को उस गैस की स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा कहते हैं।''**

"It is amount of heat required to raise the temperature of 1 gram of the gas by 1 °C (or 1 K), at constant pressure."

इसे c_P से प्रदर्शित करते हैं। इसका मात्रक cal/g °C या cal/g °K है।

§ 7.29 गैसों की मोलर (ग्राम-अणुक) विशिष्ट ऊष्मायें (Molar Specific Heats of Gases) C_p leLee C_v

7.29.1 गैस की स्थिर आयतन पर ग्राम-अणुक विशिष्ट ऊष्मा (C_v) (Molar Specific Heat of Gas at Constant Volume)

गैस के 1 ग्राम अणु *(1 मोल) का स्थिर आयतन पर ताप 1 °C = 1 K बढ़ाने के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा को गैस की स्थिर दाब पर ग्राम अणुक विशिष्ट ऊष्मा कहते हैं। इसे C_v या MC_v से प्रदर्शित करते हैं जहाँ M, गैस का अणुभार है तथा C_v, एक ग्राम गैस के लिए स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा है। इसकी इकाई कैलोरी/मोल °C या किलो-कैलोरी/किलोमोल °C है।

"It is amount of heat required to raise the temperature of 1 mole of atom or molecules of gas by 1 °C at constant volume."

7.29.2 गैस की स्थिर दाब पर ग्राम-अणुक विशिष्ट ऊष्मा (C_p) (Molar Specific Heat of Gas at Constant Pressure)

गैस के 1 ग्राम अणु * (मोल) का स्थिर दाब पर ताप 1 °C (= 1K) बढ़ाने के लिए आवश्यक ऊष्मा की मात्रा को गैस की स्थिर दाब पर ग्राम अणुक विशिष्ट ऊष्मा कहते हैं। इसे C_P या MC_P से प्रदर्शित करते हैं। यहाँ M गैस का अणुभार है तथा C_P एक ग्राम गैस के लिए स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा है। इसकी इकाई कैलोरी/मोल °C या किलोकैलोरी/किलोमोल °C है।

---

* एक ग्राम अणु (1 g mole) = M ग्राम, जहाँ M गैस का अणुभार (Molecular weight) है।

] किग्रा अणु (1 kg mole) = M किग्रा, जहाँ M गैस का अणुभार है।

$Q = m$ (ग्राम) $\times S \frac{\text{कैलोरी}}{\text{ग्राम °C}} \times \Delta t°C = ms\,\Delta t$ कैलोरी

$Q = m$ किग्रा $\times S \frac{\text{किलोकैलोरी}}{\text{किग्रा °C}} \times \Delta t°C = ms\,\Delta t$ किलोकैलोरी

$Q = nC_v\,\Delta T$ या $Q = nC_P\,\Delta T$, जहाँ n मोल संख्या है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

"It is amount of heat required to raise the temperature of 1 mole of atom or molecules of gas by 1 °C at constant pressure."

§ 7.30 C_p का मान C_v से अधिक होता है ($C_p > C_v$)

जब किसी गैस को स्थिर दाब पर गर्म करते हैं तो उसका ताप व आयतन दोनों बढ़ता है। अर्थात् गैस को दी गई ऊष्मा का कुछ भाग ताप (अर्थात् आन्तरिक ऊर्जा) बढ़ाने के काम में आता है तथा कुछ भाग गैस के प्रसार में बाह्य दाब के विरुद्ध कार्य करने में व्यय होता है। यदि गर्म करते समय आयतन स्थिर रखा जाये ($\Delta V = 0$) तो गैस को दी ऊष्मा केवल ताप बढ़ाने में काम आती है। अत: यदि 1 ग्राम अणु (1 g mole) गैस को स्थिर आयतन पर 1 °C ताप बढ़ाने में दी गई ऊष्मा (C_v) केवल ताप बढ़ाने के काम में आती है, लेकिन 1 ग्राम अणु (1 g mole) गैस को स्थिर दाब पर 1 °C ताप बढ़ाने में दी गई ऊष्मा (C_P) ताप बढ़ाने के साथ-साथ आयतन बढ़ने के कारण ऊष्मा का कुछ भाग बाह्य दाब के विरुद्ध कार्य करने में भी व्यय होता है। अत: स्थिर दाब पर बाह्य दाब के विरुद्ध किए गए कार्य के बराबर अधिक ऊष्मा देनी पड़ती है, अत: $C_P > C_v$ **अर्थात् स्थिर दाब पर गैस की आणविक विशिष्ट ऊष्मा (C_P), स्थिर आयतन पर आणविक विशिष्ट ऊष्मा (C_v) से अधिक होती है, तथा यह अन्तर गैस द्वारा बाह्य दाब के विरुद्ध किए गए कार्य के बराबर होती है।**

§ 7.31 आदर्श गैस की ग्राम-अणुक विशिष्ट ऊष्माओं C_p तथा C_v में सम्बन्ध–मेयर का सूत्र

माना एक आदर्श गैस के n ग्राम अणु (n मोल) द्रव्यमान का दाब (P), आयतन (V) तथा ताप (T) है; जो चित्र 7.32 (b) में खींचे गए दाब-आयतन वक्र के बिन्दु से प्रदर्शित है।

(i) माना गैस को स्थिर आयतन पर ताप T से $T + \Delta T$ तक गर्म किया जाता है (चित्र 7.32 (a)) जिससे गैस अवस्था A से अवस्था C में पहुँच जाती है (चित्र 7.32 (b))। अवस्था A से अवस्था C तक आयतन नियत रहता है, अत: $\Delta V = 0$ तथा $W = 0$। ऊष्मागतिकी के प्रथम नियमानुसार ($Q = \Delta U + W$) से $(Q)_V = \Delta U$ अथवा

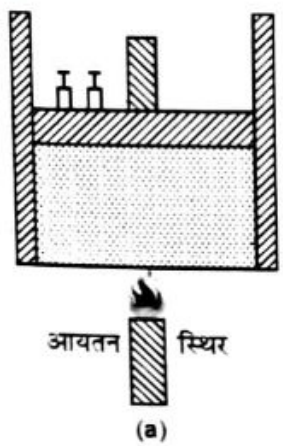
$$nc_v\Delta T = U_C - U_A \quad \text{... (i)}$$

$[\because (Q)_V = nc_v \Delta T]$

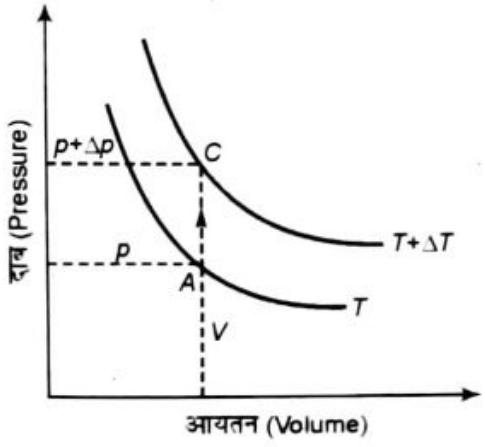
(ii) माना गैस को स्थिर दाब पर ताप T से ताप $T + \Delta T$ तक बढ़ाया जाता है (चित्र 7.32 (c)) जिससे कि गैस अवस्था A से अवस्था B में आ जाती है (चित्र 7.32 (d))। इस अवस्था में दाब स्थिर है, अत: दी गई कुल ऊष्मा

$$Q_P = nc_v\Delta T \quad \text{... (ii)}$$

तथा किया गया बाह्य कार्य $W = P\Delta V$।

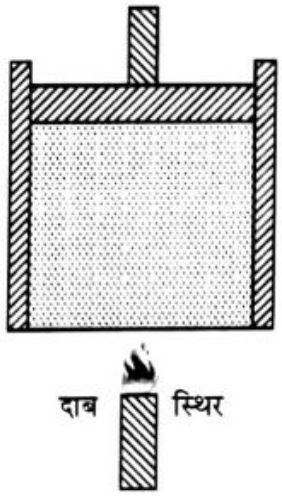


(a)

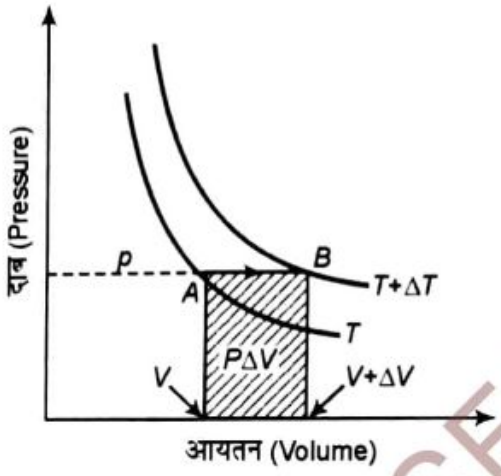


(b)

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner



(c)



(d)

चित्र 7.32

अत: ऊष्मागतिकी के प्रथम नियमानुसार,

$$Q_P = \Delta U + W$$

[क्योंकि आदर्श गैस की आन्तरिक ऊर्जा केवल ताप पर निर्भर करती है, अत: $U_B = U_C$ बिन्दु B व C समतापीय वक्र पर हैं]

$$= U_B - U_A + W$$

$$= U_C - U_A + W$$

अथवा $$nC_P\Delta T = U_C - U_A + W$$

समीकरण (i) का प्रयोग करने पर,

$$nC_P\Delta T = nC_v\Delta T - P\Delta V$$

अत: $$n(C_P - C_v)\,\Delta T = P\Delta V \quad \text{... (iii)}$$

अवस्था A पर n मोल के लिए आदर्श गैस समीकरण

$$PV = nRT \quad \text{... (iv)}$$

तथा B पर

$$P\,(V + \Delta V) = nR\,(T + \Delta T) \quad \text{... (v)}$$

अत: समीकरण (v) में से समीकरण (iv) को घटाने पर;

$$P\,\Delta V = nR\Delta T \quad \text{... (vi)}$$

समीकरण (vi) से $P\Delta V$ का मान समीकरण (iii) में रखने पर;

$$n(C_P - C_v)\,\Delta T = nR\Delta T$$

अत: $$\boldsymbol{C_P - C_v = R} \quad \text{... (54)}$$

यह मेयर का सूत्र (Mayers's Formula) कहलाता है। इस सूत्र में C_P, C_v तथा R तीनों के मान एक ही मात्रक में रखने चाहिएँ। तीनों ही जूल/मोल K में अथवा तीनों ही कैलोरी/मोल °C में होने चाहिएँ।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

वैकल्पिक विधि—C_P तथा C_v का अन्तर उस कार्य के बराबर है जो स्थिर दाब पर 1 मोल गैस का ताप 1 °C (1K) बढ़ाने में बाह्य दाब के विरुद्ध करना होता है। माना 1 मोल गैस का ताप T_1 तथा आयतन V_1 तथा दाब स्थिर रखकर ताप $(T_2 = T_1 + 1)$ तथा आयतन V_2 हो जाता है। तब $C_P - C_v$ = स्थिर दाब पर 1 मोल गैस का ताप 1 °C बढ़ाने में बाह्य दाब के विरुद्ध किया गया कार्य

$$= P\Delta V$$

आदर्श गैस समीकरण से $(PV_1 = RT_1)$

$$= P(V_2 - V_1)$$

$$= PV_2 - PV_1$$

$(PV_2 = R(T_1 + 1))$

$$= R(T_1 + 1) - RT_1$$

$$\boldsymbol{C_P - C_v = R}$$

यह मेयर का सूत्र है।

§ 7.32 ग्राम-अणुक विशिष्ट ऊष्माओं का अनुपात C_P / C_v (Ratio of Molar Specific Heats)

स्थिर दाब पर ग्राम-अणुक विशिष्ट ऊष्मा तथा स्थिर आयतन पर ग्राम अणुक विशिष्ट ऊष्मा का अनुपात γ के बराबर होता है। अत:

$$\gamma = \frac{C_P}{C_v}$$

चूँकि C_P का मान C_v से अधिक होता है, अत: गामा (γ) का मान 1 से अधिक होता है।

	गैस के प्रकार	c_v	c_P	γ
(i)	एकल परमाणुक गैस (Monoatomic Gas) He, Ne, Ar आदि	$\frac{3R}{2}$	$\frac{5R}{2}$	$\frac{5}{3} = 1{\cdot}67$
(ii)	द्विपरमाणुक गैस (Diatomic Gas) H_2, N_2, O_2 आदि	$\frac{5R}{2}$	$\frac{7R}{2}$	$\frac{7}{5} = 1{\cdot}4$
(iii)	त्रिपरमाणुक गैस (Triatomic Gas) CO_2, NH_3 आदि	$3R$	$4R$	$\frac{8}{3} = 1{\cdot}33$

§ 7.33 ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम (Second Law of Thermodynamics)

ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम की सीमाओं के सन्दर्भ में ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम प्रथम नियम का पूरक है। इसके अनुसार ऊष्मा का **सम्पूर्ण रूप से यांत्रिक ऊर्जा में परिवर्तन असम्भव है।** ऊष्मा के कार्य में आंशिक रूप में परिवर्तन के लिए यह भी आवश्यक है कि उच्च ताप पर स्रोत से ऊष्मा ली जाए और उस ऊष्मा का कुछ भाग, कार्य में परिवर्तित हो तथा शेष भाग, निम्न ताप पर सिंक (sink) को दिया जाए अर्थात् ऊष्मा के कार्य में रूपान्तरण के लिए ऊष्मा का प्रवाह होना आवश्यक प्रतिबन्ध है, जो स्रोत तथा सिंक के तापान्तर के कारण ही होता है। तब प्रवाहित ऊष्मा का कुछ भाग कार्य में रूपान्तरित हो जाता है। ऊष्मा के इस भाग का मान स्रोत तथा सिंक के तापों पर निर्भर करता है; कार्यकारी पदार्थ पर नहीं। इस नियम को व्यक्त करने के लिए निम्न कथन मुख्य हैं—

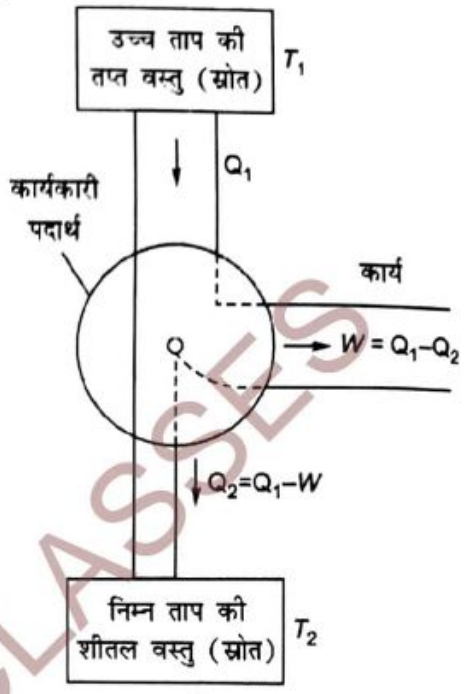
(1) केल्विन-प्लांक कथन (Kelvin-Planck Statement)—यह कथन ऊष्मा इंजन के कार्य करने के सिद्धान्त पर आधारित है।

NYC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

ऐसी युक्ति जो ऊष्मा को कार्य में परिवर्तित कर सके ऊष्मा इन्जन कहलाता है।

ऊष्मा इन्जन में, कार्यकारी पदार्थ, उच्च ताप (T_1 K) के कुण्ड (स्रोत) से ऊष्मा Q_1 लेता है; इसके एक भाग को कार्य W ($= Q_1 - Q_2$) में परिवर्तित करता है तथा शेष ऊष्मा $Q_2 = (Q_1 - W)$ को निम्न ताप कुण्ड (sink) या शीतल वस्तु (ताप T_2 K) को दे देता है (चित्र 7.33) इस प्रक्रम में ऊष्मा तप्त वस्तु से शीतल वस्तु की ओर प्रवाहित होती है, जिसके परिणामस्वरूप ऊष्मा इंजन से यांत्रिक कार्य W प्राप्त होता है अर्थात् ऊष्मा को कार्य में बदलने के लिए स्रोत तथा सिंक में तापान्तर का होना आवश्यक है।



चित्र 7.33

ऊष्मीय इन्जन की दक्षता (Efficiency of Heat Engine)—किसी ऊष्मीय इन्जन की दक्षता η इस प्रकार होती है—

$$\eta = \frac{\text{एक चक्र में किया गया कार्य}}{\text{एक चक्र में ली गयी ऊष्मा}} = \frac{W}{Q_1}$$

या $$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad \ldots (55)$$

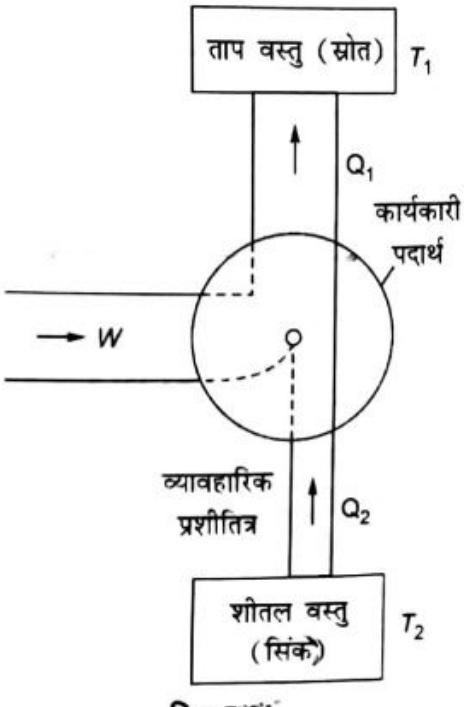
या $$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \ldots (56)$$

तथा **प्रतिशत** $$\eta = \frac{W}{Q_1} \times 100\% = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \times 100\% = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \times 100\%$$

यदि $Q_2 = 0$ या सिंक का ताप $T_2 = 0$ K हो तो $\eta = 100\%$ होगी जो कि असम्भव है। अब तक कोई भी ऐसा इन्जन नहीं बन सका है, जो स्रोत से ली गई सम्पूर्ण ऊष्मा को कार्य में बदल दे तथा सिंक को कुछ भी ऊष्मा न दे। अर्थात् **स्रोत से ऊष्मा लेकर सिंक को कुछ भी ऊष्मा दिए बिना सम्पूर्ण ऊष्मा को कार्य में बदलना असम्भव है।**

किसी वस्तु (स्रोत) को उसके चारों ओर की वस्तुओं (परिवेश) में सबसे ठण्डी वस्तु के ताप से नीचे तक ठण्डा करके अविरल रूप से (continuously) कार्य प्राप्त करना असम्भव है। इसका अर्थ है कि ऊष्मा के कार्य रूपान्तरण के लिए स्रोत के साथ-साथ एक अपेक्षाकृत **कम ताप वाले सिंक का होना आवश्यक है।**

(2) क्लॉसियस का कथन (Clausius Statement)—यह कथन प्रशीतित्र (refrigerator) के सिद्धान्त पर आधारित है। प्रशीतित्र विपरीत दिशा में कार्य करने वाला ऊष्मा इंजन होता है। प्रशीतित्र में कार्यकारी पदार्थ ठण्डी वस्तु (सिंक) से ऊष्मा (Q_2) लेता है और अधिक ताप वाली वस्तु (तप्त स्रोत) को अधिक मात्रा में ऊष्मा (Q_1) देता है (चित्र 7.34)। ऐसा करने में कार्यकारी पदार्थ पर किसी अन्य बाह्य ऊर्जा स्रोत द्वारा कार्य किया जाता है। इस प्रकार यह बाह्य ऊर्जा स्रोत के द्वारा शीतल वस्तु (cold body या sink) से ऊष्मा तप्त वस्तु (hot body) को भेजता है, यदि तप्त स्रोत का ताप T_1 K तथा शीतल वस्तु का ताप T_2 K हो तो प्रशीतित्र का कार्यशीलता गुणांक (coefficient of performance)



चित्र 7.34

$$\beta = \frac{Q_2}{W}$$

या $$\beta = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \quad \ldots (57)$$

या $$\beta = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \quad \ldots (58)$$

ARC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अब तक ऐसा कोई प्रशीतित्र नहीं बनाया जा सका है जो किसी बाह्य ऊर्जा स्रोत की सहायता के बिना ऊष्मा को ठण्डी वस्तु से गर्म वस्तु पर पहुँचा सके। इस तथ्य के आधार पर क्लॉसियस ने द्वितीय नियम को निम्न कथन के रूप में व्यक्त किया—

किसी भी स्वत: चालित (self acting) मशीन के द्वारा, बिना किसी बाह्य ऊर्जा स्त्रोत की सहायता के ऊष्मा का किसी शीतल वस्तु से, तप्त वस्तु को हस्तान्तरण असम्भव है।

ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम को सीधे तौर पर सिद्ध नहीं किया जा सकता है। इसकी सत्यता का प्रमाण यही है कि अब तक कोई मशीन ऐसी नहीं बन सकी है जो इस नियम का उल्लंघन करती हो।

7.33.1 द्वितीय नियम से निकाले गए कुछ तथ्य

(i) परिमित तापान्तर पर ऊष्मा स्थानान्तरण अनुत्क्रमणीय (irreversible) है। $T_1 > T_2$ होने पर ऊष्मा T_1 से T_2 तक अपने आप प्रवाहित हो सकती है, लेकिन T_2 से T_1 की ओर नहीं। इस प्रकार ऊष्मा चालन एक अनुत्क्रमणीय घटना (irreversible phenomenon) है।

(ii) सिंक का ताप परम शून्य होने ($T_2 = 0$ K) पर $Q_2 = 0$ होता है। अत: $W = Q_1$ सम्पूर्ण कार्य को ऊष्मा में बदला जा सकता है। परन्तु व्यवहार में परम शून्य ताप का सिंक सम्भव नहीं है, अत: $T_2 \neq 0, \therefore Q_2 \neq 0, \therefore W \neq Q_1$ अत: $\eta \neq 1$ यही कारण है कि सम्पूर्ण ऊष्मा को कार्य में नहीं बदला जा सकता है।

(iii) परम मापक्रम पर ताप का ऋणात्मक मान नहीं हो सकता क्योंकि यदि T_2 ऋणात्मक होता तो दक्षता

$$\eta = 1 - \left[\frac{-T_2}{T_1}\right] = 1 + \frac{T_2}{T_1}$$

अत: $\eta > 1$ होगी जो असम्भव है।

(iv) किसी ऊष्मीय इंजन की दक्षता 100% नहीं हो सकती है, क्योंकि $T_2 = 0$ सम्भव नहीं है, अर्थात् **सम्पूर्ण ऊष्मा को कार्य में नहीं बदला जा सकता है। लेकिन सम्पूर्ण कार्य को ऊष्मा में बदला जा सकता है।**

(v) किसी प्रशीतित्र (refrigerator) का दरवाजा खुला रखकर कमरे को ठण्डा नहीं किया जा सकता है क्योंकि दरवाजे के खुले रहने पर कार्यकारी पदार्थ द्वारा प्रत्येक चक्र में कमरे को दी गई ऊष्मा ($Q_2 + W$), कमरे से ली गई ऊष्मा Q_2 से अधिक है, जहाँ W विद्युत शक्ति द्वारा प्रत्येक चक्र में कार्यकारी पदार्थ पर किया गया कार्य है।

(vi) आदर्श ऊष्मीय इन्जन के लिए $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$.

§ 7.34 कारनॉट ऊष्मा इन्जन (Carnot Heat Engine)

सन् 1824 ई० में वैज्ञानिक सैडी कारनॉट (Sadi Carnot) ने आदर्श ऊष्मा इन्जन की परिकल्पना प्रस्तुत की थी। परिकल्पना के अनुसार इन्जन द्वारा अवशोषित ऊष्मा की अधिकतम मात्रा को कार्य में बदला जा सकता था, परन्तु इस इन्जन की दक्षता भी शत-प्रतिशत नहीं थी। कारनॉट के गर्म कुण्ड (hot reservoir) के ताप T_1 तथा ठंडे कुण्ड (cold reservoir) के ताप T_2 के मध्य कार्य करने वाले आदर्श ऊष्मा इन्जन की क्रियाविधि जिस आदर्श चक्र (ideal cycle) पर आधारित थी उसे कारनॉट चक्र (Carnot cycle) कहते हैं।

कारनॉट ऊष्मा इन्जन के चार चक्र

कारनॉट ऊष्मा इन्जन उत्क्रमणीय चक्र (reversible cycle) पर आधारित एक प्रक्रम है। इस चक्र द्वारा ऊष्मा को कार्य में परिवर्तित करने की क्षमता की सीमा निर्धारित होती है। इस प्रणाली में एक कार्यकारी पदार्थ (कोई आदर्श गैस) होती है तथा यह चक्र दो समतापी (isothermal) तथा दो रुद्धोष्म उत्क्रमणीय (adiabatic reversible) प्रक्रियाओं द्वारा निर्मित होता है, चित्र (7.35)।

(i) समतापी प्रसार (Isothermal Expansion)

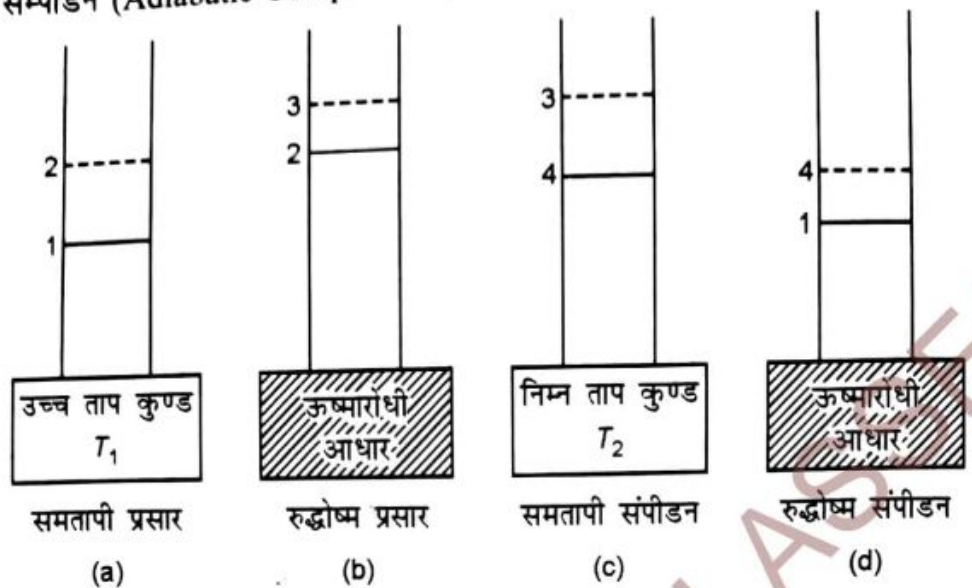
(ii) रुद्धोष्म प्रसार (Adiabatic Expansion)

MKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(iii) समतापी सम्पीडन (Isothermal Compression)

(iv) रुद्धोष्म सम्पीडन (Adiabatic Compression)



चित्र 7.35

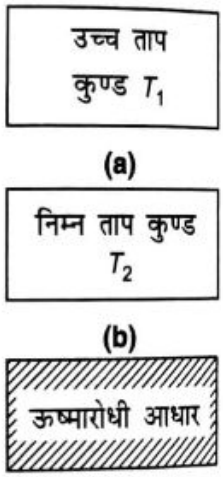
कारनॉट ऊष्मा इन्जन के प्रमुख अवयव—

(i) ऊष्मा स्रोत उच्च ताप (T_1) का ऊष्मा कुण्ड जिससे कार्यकारी पदार्थ कितनी ही मात्रा में ऊष्मा लेता है परन्तु T_1 ताप पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है (चित्र 7.36 (a))।

(ii) अनन्त ऊष्माधारिता अर्थात् निम्न ताप (T_2) का कुण्ड जिसे कार्यकारी पदार्थ द्वारा कितनी ही मात्रा में ऊष्मा दे दी जाए परन्तु इसका ताप स्थिर रहता है, चित्र 7.36 (b)।

(iii) निकाय व आदर्श गैस निकाय के अन्तर्गत एक ऐसा सिलिण्डर जिसकी दीवारें पूर्णत: ऊष्मारोधी तथा आधार पूर्ण ऊष्मा सुचालक होता है। पिस्टन घर्षणहीन होता है। कार्यकारी पदार्थ एक आदर्श गैस है।

(iv) एक ऊष्मारोधी आधार जिस पर यदि सिलेण्डर को रख दिया जाए तो सिलिण्डर का आधार भी ऊष्मारोधी हो जाता है, चित्र 7.36 (c)।



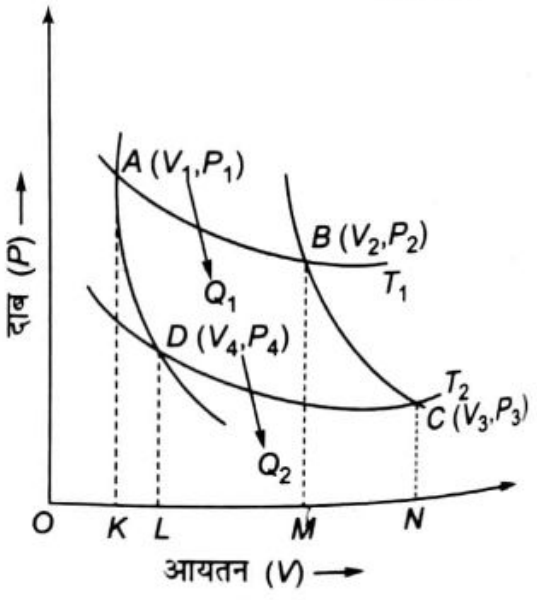
चित्र 7.36

कारनॉट ऊष्मा इन्जन का कार्य सिद्धान्त

माना कि एक सिलिण्डर में 1मोल आदर्श गैस भरी है। यदि गैस का प्रारम्भिक दाब, आयतन तथा ताप क्रमश: P_1, V_1 तथा T_1 हों तो इनकी स्थितियाँ चित्र 7.37 में PV वक्र के बिन्दु A से प्रदर्शित की जा सकती हैं। माना प्रक्रम के चारों चक्र स्थिर प्राय* (quasi-static) तथा उनकी दो अवस्थाओं (चरणों) की उत्क्रमणीयता में कोई ऊष्मा व्यय नहीं होती है।

कॉरनाट ऊष्मा इन्जन में एक पूर्ण चक्र की क्रियाविधि का सिद्धान्त निम्न प्रकार से सम्पादित होता है—

(i) प्रथम चरण (समतापी प्रसार)—सिलिण्डर को ऊष्मा स्रोत पर रखते हैं। गैस का धीरे-धीरे प्रसार होने के कारण पिस्टन ऊपर की ओर चलता है, क्योंकि सिलिण्डर में भरी आदर्श गैस (कार्यकारी पदार्थ) स्रोत से ऊष्मा को अवशोषित करती है। यह प्रसार समतापी प्रसार (isothermal expansion) कहलाती है। इसे चित्र में वक्र AB से प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 7.37

* **स्थिरप्राय** (Quasi-static)—जिसे सभी व्यावहारिक पक्षों के लिए स्थिर माना जा सके स्थिरप्राय कहलाता है।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

इस प्रसार के बाद माना गैस का दाब P_2 व आयतन V_2 हो जाता है। यदि इस प्रक्रिया में अवशोषित ऊष्मा Q_1 हो व गैस के प्रसार में गैस द्वारा किया कार्य W_1 हो, तो

$$Q_1 = W_1$$

$$= \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$$

$$= \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_1}{V}\, dV$$

$$= RT_1 \log_e \frac{V_2}{V_1} \quad \text{... (i)}$$

$= ABMKA$ का क्षेत्रफल (+ve मान)

(ii) द्वितीय चरण (रुद्धोष्म प्रसार)—अब सिलिण्डर को स्टैण्ड पर रखते हैं। चूँकि सिलिण्डर की दीवारें व स्टैण्ड की सतह पूर्ण कुचालक हैं जिससे गैस का रुद्धोष्म प्रसार (adiabatic expansion) होता है। इस प्रक्रिया में गैस का ताप कम होकर T_2 हो जाता है। इस रुद्धोष्म प्रसार को वक्र BC द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

इस प्रसार के बाद माना गैस का दाब P_3 व आयतन V_3 हो जाता है। यदि इस प्रक्रिया में गैस द्वारा किया गया कार्य W_2 हो, तो

$$W_2 = \int_{V_2}^{V_3} P\, dV$$

$$W_2 = \frac{R}{1-\gamma}(T_2 - T_1) \quad \text{... (ii)}$$

$W_2 = BCNMB$ का क्षेत्रफल (+ve मान)

(iii) तृतीय चरण (समतापी सम्पीडन)—अब आदर्श गैस का ताप T_2 हो चुका है। पुन: सिलिण्डर को स्टैण्ड पर से हटाकर T_2 ताप वाले सिंक पर रखकर पिस्टन को तब तक दबाते हैं जब तक कि आदर्श गैस के सम्पीडन से आयतन V_4 व दाब P_4 न हो जाए (बिन्दु D)। चूँकि सिलिण्डर का तल पूर्ण चालक है। अत: गैस को सम्पीडित करने से उत्पन्न ऊष्मा सिंक में चली जाती है जिससे आदर्श गैस का ताप नियत (T_2) बना रहता है। अत: यह प्रक्रिया समतापी सम्पीडन (isothermal compression) कहलाती है। इस प्रक्रिया को वक्र CD द्वारा प्रदर्शित किया गया है।

यदि इस प्रक्रिया में सिंक को दी गई ऊष्मा Q_2 व गैस पर किया गया कार्य W_3 हो, तो

$$Q_2 = W_3$$

$$W_3 = \int_{V_3}^{V_4} -P\, dV$$

$$W_3 = \int_{V_3}^{V_4} -\frac{RT_2}{V}\, dV$$

$$= -RT_2 \log_e \frac{V_4}{V_3}$$

$$W_3 = RT_2 \log_e \frac{V_3}{V_4}$$

$= CDLNC$ का क्षेत्रफल (−ve मान)

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(iv) चतुर्थ चरण (रुद्धोष्म सम्पीडन)—अब सिलिण्डर को पुनः कुचालक स्टैण्ड पर रख देते हैं तथा पिस्टन द्वारा गैस को इतना सम्पीडित करते हैं कि गैस का आयतन पुनः V_1 तथा दाब P_1 हो जाता है। चूँकि गैस व वातावरण के मध्य ऊष्मा का आदान-प्रदान नही होता है। अतः गैस का ताप बढ़कर T_2 हो जाता है।

यह प्रक्रिया रुद्धोष्म सम्पीडन (adiabatic compression) है। इस प्रक्रिया को वक्र DA द्वारा प्रदर्शित किया गया है। यदि इस प्रक्रिया में गैस पर किया गया कार्य W_4 हो, तो

$$W_4 = \int_{V_4}^{V_1} -P\,dV$$

$$= \frac{-R}{1-\gamma}(T_2 - T_1) \quad \text{... (iv)}$$

$= DAKLD$ का क्षेत्रफल (–ve मान)

ऊष्मा इन्जन द्वारा प्रति चक्र किया गया कार्य (Work done by the heat engine per cycle)

गैस द्वारा प्रथम एवं द्वितीय चरण में किया गया कार्य

$$= W_1 + W_2$$

गैस पर तृतीय एवं चतुर्थ चरण में किया गया कार्य

$$= W_3 + W_4$$

∴ आदर्श गैस द्वारा प्रति चक्र किया गया कार्य (W)

$$= (W_1 + W_2) - (W_3 + W_4)$$

समीकरण (ii) एवं (iv) से;

$$W_2 = W_4$$

अतः $$W = W_1 - W_3$$

या $$\boldsymbol{W = Q_1 - Q_3}$$

∵ $W = ABMKA$ का क्षेत्रफल + $BCNMB$ का क्षेत्रफल

$-$ $CDLNC$ का क्षेत्रफल $-$ $DAKLD$ का क्षेत्रफल

अतः $$\boldsymbol{W = ABCDA}$$ **का क्षेत्रफल**

स्मरणीय बिन्दु (Points to be Remembered)

1. ऊष्मा के किसी वस्तु में एक स्थान से दूसरे स्थान तक अथवा एक वस्तु से दूसरी वस्तु में जाने को ऊष्मा संचरण कहते हैं। ऊष्मा का संचरण तापान्तर के कारण होता है।
2. ऊष्मा संचरण तीन प्रकार से होता है—(i) चालन (ii) संवहन (iii) विकिरण
3. चालन के द्वारा ऊष्मा का संचरण मुख्यतः ठोसों में तथा तरल में भी आंशिक रूप से होता है।
4. धातुओं में ऊष्मा चालन का अधिकतर भाग मुक्त इलेक्ट्रॉनों के द्वारा होता है। लेकिन ऊष्मा के कुछ भाग का चालन धातुओं में तथा अधिकांश अधात्विक (non-metallic) ठोसों में ताप बढ़ने से अणुओं में कम्पन के आयाम के बढ़ने के कारण उनकी पारस्परिक क्रिया द्वारा होता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

5. तरल पदार्थों में ऊष्मा का चालन अणुओं की टक्कर के साथ-साथ माध्यम में गर्म अणुओं की वास्तविक गति के कारण, व संवहन में अणुओं के सामूहिक हस्तान्तरण से भी होता है।
6. चालन तथा संवहन में संचरित ऊष्मा माध्यम को प्रभावित करती है जबकि विकिरण में संचरित ऊष्मा माध्यम को प्रभावित किये बिना सीधे ही स्रोत से प्रेक्षक तक प्रकाश के वेग से पहुँचती है। यदि द्रव्यात्मक माध्यम में विकिरण का अवशोषण हो, तो माध्यम का ताप बढ़ जाता है।
7. चालन द्वारा पिण्ड के एक भाग से दूसरे भाग तक ऊष्मा संचरण तब तक होता रहता है, जब तक कि इन भागों के ताप समान नहीं हो जाते।
8. तरल में संवहन के द्वारा ऊष्मा संचरण धाराओं के रूप में तब तक होता रहता है, जब तक तरल का ताप उसके क्वथनांक के बराबर न हो जाये।
9. चालन तथा संवहन के द्वारा ऊष्मा के संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता है लेकिन विकिरण द्वारा निर्वात् में भी ऊष्मा का संचरण हो सकता है। अर्थात् विकिरण के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती है।
10. छड़ की अवस्था को जिसमें छड़ का कोई भी भाग ऊष्मा का अवशोषण नहीं करता 'अचर अवस्था' अथवा 'स्थायी अवस्था' कहते हैं।
11. यदि चालक छड़ के परिच्छेद के पार्श्वों से संवहन तथा विकिरण द्वारा ऊष्मा की कोई हानि न हो अर्थात् छड़ पूर्ण ऊष्मारोधी पदार्थ से ढकी हो तो छड़ में लम्बाई के अनुदिश ताप-प्रवणता समान होती हैं अन्यथा घटती जाती है।
12. **समतापी पृष्ठ**—किसी पदार्थ के भीतर व पृष्ठ पर स्थित सभी बिन्दु एक ही ताप पर हों, समतापी पृष्ठ कहलाता है। पदार्थ में किसी बिन्दु पर ऊष्मा चालन की दिशा उस बिन्दु से गुजरने वाले समतापी पृष्ठ के लम्बवत् होती हैं। समतापी पृष्ठ समतल, गोलीय, बेलनाकार आदि हो सकते हैं।
13. **ताप-प्रवणता**—दो समतापी पृष्ठों के बीच दूरी के साथ ताप-परिवर्तन की अधिकतम दर ताप-प्रवणता कहलाती है।

$$\text{ताप-प्रवणता} = -\frac{\Delta\theta}{\Delta x} = -\frac{T}{\Delta x}$$

ताप प्रवणता का ऋणात्मक होना यह दर्शाता है कि ऊष्मा संचरण की दिशा में दूरी x मीटर के बढ़ने पर ताप T K (या θ °C) घटता है। इसकी इकाई K/मीटर या °C/सेमी होती है।

14. **ऊष्मा चालकता गुणांक**—स्थायी अवस्था में t समय में ऊष्मा प्रवाह की मात्रा—

$$Q = KA\frac{T_1 - T_2}{l} = KA\frac{(\theta_1 - \theta_2)}{l}t$$

ऊष्मा प्रवाह की दर—

$$H = \frac{Q}{t} = -KA\frac{dT}{dx} = -KA\frac{d\theta}{dx}$$

ताप T_1 व T_2 केल्विन में एवं θ_1 व θ_2 °C में हैं।

15. **K का मात्रक**—किलो-कैलोरी/मीटर-सेकण्ड °C

K का विमीय सूत्र = $[M^1L^1T^{-3}\Theta^{-1}]$

16. **ऊष्मीय प्रतिरोध**—

$$R_H = \frac{T_1 - T_2}{H} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{H} = \frac{L}{KA}\ \frac{\text{केल्विन}}{\text{वॉट}}$$

17. **श्रेणीक्रम में जुड़े चालकों के लिए**—

ऊष्मा प्रवाह की दर—

$$H = \frac{A(\theta_1 - \theta_2)}{\frac{l_1}{K_1} + \frac{l_2}{K_2}} = \frac{A(T_1 - T_2)}{\frac{l_1}{K_1} + \frac{l_2}{K_2}}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

सम्पर्क तल का ताप—

$$T = \frac{K_1 T_1 l_1 + K_2 T_2 l_2}{K_1 l_2 + K_2 l_1} \text{ K}$$

या $$\theta = \frac{K_1 \theta_1 l_1 + K_2 \theta_2 l_2}{K_1 l_2 + K_2 l_1} \ ^\circ\text{C}$$

संयुक्त प्रतिरोध या तुल्य प्रतिरोध—

$$R = R_1 + R_2$$

या $$\frac{l_1 + l_2}{KA} = \frac{l_1}{K_1 A} + \frac{l_2}{K_2 A}$$

या तुल्य चालकता—

$$K = \frac{l_1 + l_2}{\frac{l_1}{K_1} + \frac{l_2}{K_2}}$$

18. समान्तर क्रम में जुड़े चालकों के लिए—

$$H = H_1 + H_2 = \frac{K_1 A_1 (T_1 - T_2)}{l} + \frac{K_2 A_2 (T_1 - T_2)}{l}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

तुल्य चालकता—

$$K = \frac{K_1 A_1 + K_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

19. इंजन हौज का प्रयोग—

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2} \text{ या } \frac{K_1}{l_1^2} = \frac{K_2}{l_2^2} = \text{.....} = \frac{K_n}{l_n^2}$$

20. जूल के नियमानुसार ऊष्मा तथा कार्य का परस्पर रूपान्तरण सम्भव है।

21. $J = \frac{W}{Q}$, जहाँ J ऊष्मा का यांत्रिक तुल्यांक कहलाता है।

22. $J = 4{\cdot}186 \times 10^3$ जूल/किलो-कैलोरी $= 4{\cdot}186$ जूल/कैलोरी

23. $Q = \frac{W}{J} = \frac{mgh}{J} \times x$

$Q = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{J} x$

$Q = mL$

$Q = ms\Delta T$

x = यांत्रिक ऊर्जा का भाग जो ऊष्मा में परिवर्तित होता है।

$x = 1$, सम्पूर्ण यांत्रिक ऊर्जा का ऊष्मा में रूपान्तरण

$x < 1$, स्थितिज अथवा गतिज ऊर्जा का ऊर्जा में आंशिक रूपान्तरण, तथा

Q = अवस्था परिवर्तन अथवा ताप परिवर्तन के समय दी गयी या ली गयी ऊष्मा

24. आन्तरिक ऊर्जा—

$$dU = dU_K + dU_P$$

$$dU = dU_t + dU_\gamma + dU_V + dU_P$$

25. ऊष्मागतिकी का प्रथम नियम—

(a) $W = JH$

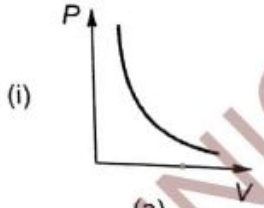
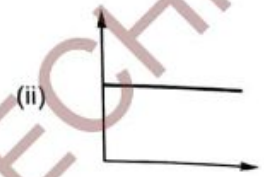
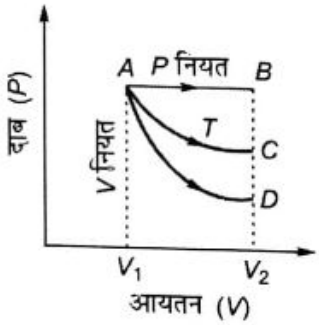
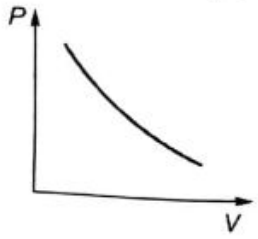
(b) $\Delta U = Q - W$

26. $C_P - C_V = R$ तथा $\frac{C_P}{C_V} = \gamma$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

27. ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम पर आधारित विभिन्न प्रक्रमों का तुलनात्मक अध्ययन—

राशियाँ	समतापीय	रुद्धोष्म
dQ	$dQ = dW$	शून्य
dU	शून्य	$-dW$
dW	(i) $2{\cdot}3026\,\mu RT\log_{10}\frac{V_2}{V_1}$	(i) $\frac{\mu R\,(T_1-T_2)}{\gamma-1}$
	(ii) $2{\cdot}3026\,P_1V_1\log_{10}\frac{V_2}{V_1}$	(ii) $\frac{P_1V_1-P_2V_2}{\gamma-1}$
	(iii) $2{\cdot}3026\,P_1V_1\log_{10}\frac{P_1}{P_2}$	(iii) $\mu C_v\,(T_1-T_2)$
अवस्था समीकरण	(i) $PV =$ नियतांक या $P_1V_1 = P_2V_2$	(i) $PV^\gamma =$ नियतांक
	(ii) $PV = nRT$	(ii) $TV^{\gamma-1} =$ नियतांक
		(iii) $P^{1-\gamma}T^\gamma =$ नियतांक
		(iv) $PV = nRT$
सूचक आरेख	(i)  (a) (ii)  (b)	 
सूचक वक्र का ढाल	$-\frac{P}{V}$	$-\frac{\gamma P}{V}$
प्रयुक्त नियम	बॉयल का नियम	पॉयसन का नियम
प्रथम नियम का स्वरूप	$dQ = dW = PdV$	(i) $dW = -dU$ (ii) $dU = -dW$
विशिष्ट ऊष्मा	अनन्त	शून्य
आयतन प्रत्यास्थता गुणांक	P	γP
कार्य की परिभाषा	समदाबीय से कम परन्तु रुद्धोष्म से अधिक	न्यूनतम लेकिन शून्य नहीं
आवश्यक शर्तें	(i) परिवर्तन धीरे-धीरे होने चाहिएँ।	(i) परिवर्तन तेजी से (अचानक) होने चाहिएँ।

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

उदाहरण	(ii) बेलन की दीवारें ऊष्मा की सुचालक होनी चाहिएँ। (i) 100 °C के पानी का 100 °C भाप में बदलना। (ii) 0 °C के बर्फ को 0 °C में पानी में बदलना।	(ii) बेलन की दीवारें ऊष्मा की कुचालक होनी चाहिएँ। (i) ऊष्मा इंजन (ii) वाहन के ट्यूब का अचानक फटना (iii) वायुयुक्त गुब्बारे का अचानक फटना (iv) प्रशीतित्र (रेफ्रीजरेटर)

साधित आंकिक उदाहरण
(Solved Numerical Examples)

उदाहरण 1 : इन्जन हौज के प्रयोग में लोहे और चाँदी की छड़ों पर मोम क्रमशः 6 cm और 12 cm दूर तक पिघलता है। यदि चाँदी की ऊष्मा चालकता 1·2 हो तो लोहे की ऊष्मा चालकता ज्ञात कीजिए।

हल—सूत्र, $\frac{K_1}{K_2} = \frac{l_1^2}{l_2^2}$ से

$K_2 = 1{\cdot}2 \quad K_1 = ?$ (माना K_1 = लोहे की ऊष्मा-चालकता)

$l_2 = 12$ cm, $l_1 = 6$ cm

$\therefore \quad \frac{K_1}{1{\cdot}2} = \frac{6^2}{12^2}$

$K_1 = \frac{36 \times 1{\cdot}2}{144}$

अत: $\boldsymbol{K_1 = 0{\cdot}3}$ **मात्रक**

उदाहरण 2: यदि एक कमरे की खिड़की के 3 mm मोटे शीशे को 7 mm मोटे शीशे से बदल दिया जाए, और यदि कमरे के अन्दर का तापक्रम बाहर के तापक्रम से 10 °C अधिक हो, तो कमरे के बाहर कितनी ऊष्मा प्रति घण्टा कम बहेगी? खिड़की के शीशे का कुल क्षेत्रफल 5 वर्ग मीटर है और उसकी ताप चालकता 0·0025 cal / cm - s °C है।
(UPBTE 1999)

हल— काँच का क्षेत्रफल, $A = 5$ वर्ग मीटर $= 5 \times 10^4$ वर्ग सेमी

तापान्तर $\theta_1 - \theta_2 = 10°C$, $K = 0{\cdot}0025 \text{ cal cm}^{-1}\text{s}^{-1} \text{ °C}^{-1}$

$t = 1$ घण्टा $= 60 \times 60$ सेकेण्ड

प्रथम तथा द्वितीय अवस्था में क्रमशः $d_1 = 3$ मिमी $= 0{\cdot}3$ सेमी

$d_2 = 7$ मिमी $= 0{\cdot}7$ सेमी

3 मिमी मोटे शीशे से बाहर जाने वाली ऊष्मा की मात्रा

$$Q_1 = \frac{K.A(\theta_1 - \theta_2).t}{d} \text{ calorie} = \frac{0{\cdot}0025 \times 5 \times 10^4 \times 10 \times 60 \times 60}{0{\cdot}3}$$

$$= 15 \times 10^6 \text{ calorie}$$

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

7 मिमी मोटे शीशे से बाहर जाने वाली ऊष्मा की मात्रा

$$Q_2 = \frac{K.A(\theta_1-\theta_2).t}{d} \text{ calorie} = \frac{0{\cdot}0025\times5\times10^4\times10\times60\times60}{0{\cdot}7}$$

$$= 6{\cdot}43\times10^6 \text{ calorie}$$

तो कमरे के बाहर प्रति घण्टा कम बहने वाली ऊष्मा की मात्रा

$$= Q_1 - Q_2 = (15\times10^6 - 6{\cdot}43\times10^6) \text{ calorie}$$

$$= \mathbf{8{\cdot}57\times10^6 calorie}$$

उदाहरण 3 : 45 cm लम्बी धातु की छड़ का एक सिरा भाप में तथा दूसरा सिरा बर्फ में है। यदि 18 ग्राम बर्फ प्रति मिनट पिघलती हो तो धातु की ऊष्मा चालकता ज्ञात करो। छड़ की अनुप्रस्थ काट = 6 वर्ग सेमी, बर्फ की गुप्त ऊष्मा = 80 cal/g.

हल—धातु की छड़ में, t सेकण्ड में प्रवाहित होने वाली ऊष्मा की मात्रा,

$$Q = \frac{K.A(\theta_1-\theta_2).t}{d} \text{ जहाँ प्रतीकों के अर्थ सामान्य हैं}$$

यदि t सेकेण्ड में m ग्राम बर्फ पिघलती है, तो

$$Q = m.L \qquad (\text{जहाँ } L = \text{बर्फ की गुप्त ऊष्मा})$$

अत:

$$m.L = \frac{K.A(\theta_1-\theta_2).t}{d}$$

दिया है, $m = 18\text{ g}$, $A = 6\text{ cm}^2$, $d = 45\text{ cm}$

$t = 60\text{ s}$, $L = 80\text{ cal g}^{-1}$, $\theta_1 - \theta_2 = 100\,^\circ\text{C}$

$$18\times80 = \frac{K\times6\times100\times60}{45}$$

$$K = \frac{18\times80\times45}{6\times100\times60}$$

अत:

$$\boldsymbol{K = 1{\cdot}8 \text{ cal cm}^{-1}\text{s}^{-1}\,^\circ\text{C}^{-1}}$$

उदाहरण 4 : एक आयताकार टुकड़ा दो धातु चादरों को जोड़ने से बना है, जिनकी मोटाइयाँ क्रमश: 6 cm तथा 4 cm हैं तथा ऊष्मा चालकताएँ 0·76 तथा 0·48 हैं। यदि सिरों के ताप 100 °C तथा 0 °C हों तो दोनों धातुओं के सम्पर्क तल का ताप ज्ञात करें।

हल—प्रश्नानुसार, $\dfrac{K_1A(\theta_1-\theta)}{d_1} = \dfrac{K_2A(\theta-\theta_2)}{d_2}$

यहाँ $K_1 = 0{\cdot}76$, $K_2 = 0{\cdot}48$, $d_1 = 6\text{ cm}$, $d_2 = 4\text{ cm}$

तथा $\theta_1 = 100°\text{C}$ व $\theta_2 = 0°\text{C}$ (अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल समान है)

अत:

$$\frac{0{\cdot}76\,A(100°-\theta)}{6} = \frac{0{\cdot}48\,A(\theta-0°)}{4}$$

या

$$0{\cdot}76\times100 - 0{\cdot}76\,\theta = 0{\cdot}48\,\theta \times \frac{6}{4} = 0{\cdot}48\,(\theta)\times\frac{3}{2}$$

या

$$1{\cdot}52\times100 - 1{\cdot}52\,\theta = 1{\cdot}44\theta$$

$$152 = 2{\cdot}96\,\theta$$

$\therefore$

$$\theta = \mathbf{51{\cdot}35\,°C}$$

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उदाहरण 5 : एक दीवार विभिन्न पदार्थों की परन्तु समान मोटाई की दो पर्तों A व B से बनी है। A की ऊष्मा चालकता B से दुगुनी है। स्थायी ऊष्मीय अवस्था में दीवार के दोनों ओर के बीच तापान्तर 48 °C है। पर्त A के दोनों ओर कितना तापान्तर है?

हल—माना दीवार की भीतरी उभयनिष्ठ पर्त का ताप $= \theta$ °C तथा पहली और अन्तिम पर्त के बाह्य ताप क्रमश: θ_1 व θ_2 हैं। पदार्थ A तथा B की ऊष्मा चालकताएँ क्रमश: K_1 व K_2 हैं। दोनों पर्तों की मोटाई, माना d है।

स्थायी अवस्था मे सटाकर रखने पर दोनों पर्तों में ऊष्मा प्रवाह की दर समान होगी।

$$\therefore \quad \frac{K_1 A(\theta_1 - \theta)}{d} = \frac{K_2 A(\theta - \theta_2)}{d}$$ (जहाँ A प्रत्येक पर्त का क्षेत्रफल है)

दिया है, $K_1 = 2K_2$

$$\therefore \quad 2K_2(\theta_1 - \theta) = K_2(\theta - \theta_2)$$

या $$3\theta = 2\theta_1 + \theta_2 \quad \ldots (1)$$

दिया है, $$\theta_1 - \theta_2 = 48\ °C \quad \ldots (2)$$

$\therefore$ $\theta_2 = \theta_1 - 48°$ यह मान समीकरण (1) में रखने पर

अत: $$3\theta = 2\theta_1 + \theta_1 - 48°$$

यह $$\theta_1 - \theta = 16\ °C$$

$\therefore$ **पर्त A के दोनों ओर तापान्तर = 16 °C**

उदाहरण 6 : भिन्न-भिन्न धातुओं से बने दो बर्तन आकार और नाप में समान हैं। ये 0 °C की बर्फ से पूरी तरह भरे हैं। यदि बर्फ एक बर्तन में 20 मिनट में तथा दूसरे बर्तन में 25 मिनट में पूर्णतया पिघल जाती है तो दोनों बर्तनों की धातुओं की ऊष्मा चालकताओं की तुलना कीजिए। **(UPBTE 1995)**

हल—माना दोनों बर्तनों के क्षेत्रफल A, मोटाई d तथा उनकी धातुओं की ऊष्मा चालकताएँ क्रमश: K_1 तथा K_2 हैं। माना K_1 तथा K_2 ऊष्मा चालकताओं वाले बर्तनों में बर्फ क्रमश: t_1 तथा t_2 समय में पिघल जाती है। प्रत्येक बर्तन में प्रवाहित होने वाली ऊष्मा की मात्राएँ समान होंगी, अर्थात्

$$Q = \frac{K_1 A(\theta_1 - \theta_2)\, t_1}{d} = \frac{K_2 A(\theta_1 - \theta_2)\, t_2}{d}$$

जहाँ θ_1 = बर्तन की सबसे बाहरी सतह का ताप

तथा θ_2 = बर्तन की सबसे अन्दर की सतह का ताप

अत: $$K_1 . t_1 = K_2 . t_2$$

या $$\frac{K_1}{K_2} = \frac{t_2}{t_1}$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{25}{20}$$

$$\boldsymbol{\frac{K_1}{K_2} = \frac{5}{4}}$$

उदाहरण 7 : एक ऊष्मा इन्जन की दक्षता ज्ञात कीजिए जो 27 °C और 100 °C के मध्य कार्य कर रहा है।

हल—दिया है $$T_2 = 27\ °C$$

या $$= 273 + 27 = 300\ K$$

$$T_1 = 100\ °C = 273 + 100 = 373\ K$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अत: दक्षता, $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

$= 1 - \frac{300}{373}$

$= \frac{373 - 300}{373} = \frac{73}{373}$

$= 0{\cdot}2$ लगभग

अर्थात् $\eta = \mathbf{20\%}$

उदाहरण 8 : ऑक्सीजन गैस की स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा 27 जूल/(मोल °C) तथा स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा 18·6 जूल/(मोल °C) है। 1 मोल ऑक्सीजन का ताप 2 °C बनाने में उसकी आन्तरिक ऊर्जा में कितना परिवर्तन होगा?

हल—स्थिर आयतन पर, $\Delta V = 0$

अत: ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम से $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$

$= \Delta U + P \times \Delta V$ $(\because\ W = P \times \Delta V)$

$= \Delta U + 0$ $(\because\ V = 0)$

$\Delta U = \Delta Q$

परन्तु $\Delta Q = C_V \times \Delta\theta$

$\Delta U = C_V \times \Delta\theta$

$= 18{\cdot}6 \times 2$ $(C_V = 18{\cdot}6$ तथा $\Delta\theta = 2\,°C)$

$\Delta U = 37{\cdot}2$

$\therefore$ आन्तरिक ऊर्जा में परिवर्तन = **37·2 जूल**

उदाहरण 9 : वायुमण्डलीय दाब पर एक गैस का आयतन 4 लीटर है। इसे 850 जूल ऊष्मा देने पर उतने ही दाब पर गैस का आयतन 6·5 लीटर हो जाता है। गैस की आन्तरिक ऊर्जा में परिवर्तन ज्ञात कीजिए।

(वायुमण्डलीय दाब $= 1{\cdot}0 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2}$)

हल—प्रश्नानुसार, $V_1 = 4{\cdot}0$ लीटर, $V_2 = 6{\cdot}5$ लीटर

$P = 1{\cdot}0 \times 10^5\ \mathrm{N/m^2}, \Delta Q = 850$ जूल

ऊष्मागतिक निकाय द्वारा कृत कार्य

$W = P \times \Delta V$

$W = P \times (V_2 - V_1)$ $(\because \Delta V = V_2 - V_1)$

$= (1{\cdot}0 \times 10^5) \times (6{\cdot}5 - 4{\cdot}0) \times 10^{-3}$

$= 10^5 \times 2{\cdot}5 \times 10^{-3}$

या $W = 250$ जूल (J)

ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम से,

$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$

$\Delta U = 850 - 250$

या $\Delta U = \mathbf{600\ J}$

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

उदाहरण 10 : वायु के किसी द्रव्यमान को जो 27 °C ताप पर है और जिसके लिए $\gamma = 1{\cdot}4$ है (i) धीरे-धीरे (ii) फिर अचानक तेजी से एक-तिहाई आयतन तक संपीडित किया जाता है। दोनों स्थितियों में ताप परिवर्तन ज्ञात कीजिए। दिया है $(3)^{0{\cdot}4} = 1{\cdot}552$

हल—

(i) परिवर्तन समतापीय है, अत: माप में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

(ii) परिवर्तन रुद्धोष्म है।

माना वायु का प्रारम्भिक आयतन V_1 है तो संपीडन के बाद आयतन $V_1/3$ होगा।

अत: सम्बन्ध $T_1.V_1^{\gamma-1} = T_2.V_2^{\gamma-1}$ (ताप-आयतन सम्बन्ध $TV^{\gamma-1}$ = नियतांक से)

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

यहाँ $T_1 = (273+27) = 300$

$$V_2 = \frac{V_1}{3}$$

$$\therefore \quad T_2 = 300\left(\frac{V_1}{V_1/3}\right)^{1{\cdot}4-1}$$

$$= 300\,(3)^{0{\cdot}4} = 300 \times 1{\cdot}552$$

अत: $\boldsymbol{T_2 = 456{\cdot}6\ K}$

उदाहरण 11 : R त्रिज्या तथा K ऊष्मा चालकता का एक बेलन एक दूसरे, $2K$ ऊष्मा चालकता वाले समान लम्बाई के समअक्षीय बेलन से घिरा है जिसकी आन्तरिक तथा बाहरी त्रिज्याएँ क्रमश: R और $2R$ हैं। संयोग की ऊष्मा चालकता ज्ञात कीजिए। **(UPBTE 2004)**

हल—प्रश्नानुसार, माना दोनों बेलनों की लम्बाई l समान हैं

जिसमें पहले बेलन की त्रिज्या $= R$

तथा दूसरे बेलन की आन्तरिक त्रिज्या $= R$

तथा बाहरी त्रिज्या $= 2R$

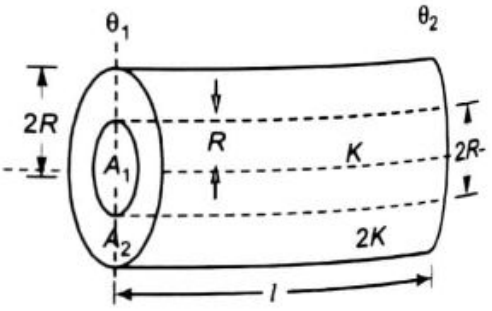
पहले बेलन की ऊष्मा चालकता $= K$

तथा दूसरे बेलन की चालकता $= 2K$

माना संयोग की ऊष्मा चालकता K_C तथा बेलन के आन्तरिक काट का क्षेत्रफल तथा बाहरी काट का क्षेत्रफल क्रमश: A_1 तथा A_2 हैं तथा दोनों बेलन में बहने वाली ऊष्मा की मात्रा Q_1 तथा Q_2 है।

अब $$Q_1 = \frac{K\,A_1(\theta_1-\theta_2)\,t}{l}$$

तथा $$Q_2 = \frac{2K\,A_2(\theta_1-\theta_2)\,t}{l}$$



जहाँ पर θ_1 तथा θ_2 दोनों सिरों पर स्थायी तापक्रम हैं।

अब संयुक्त निकाय में ऊष्मा की मात्रा,

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$= \frac{K\,A_1(\theta_1-\theta_2)\,t}{l} + \frac{2K\,A_2(\theta_1-\theta_2)\,t}{l}$$

$$\frac{Q}{t} = \frac{(K\,A_1 + 2K\,A_2)\,(\theta_1-\theta_2)}{l}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

किन्तु $$\frac{Q}{t} = \frac{K_C (A_1 + A_2)(\theta_1 - \theta_2)}{l} \quad \text{... (ii)}$$

समीकरण (i) व (ii) को बराबर रखने पर,

$$\frac{(KA_1 + 2KA_2)(\theta_1 - \theta_2)}{l} = \frac{K_C (A_1 + A_2)(\theta_1 - \theta_2)}{l}$$

$$KA_1 + 2K A_2 = K_C (A_1 + A_2)$$

या $$K_C = \frac{K (A_1 + 2A_2)}{A_1 + A_2} = \frac{K (\pi R^2 + 2 \times 3\pi R^2)}{\pi R^2 + 3\pi R^2}$$

$$K_C = \frac{K.7\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{7}{4}K$$

अत: संयोग की ऊष्मा चालकता, $\boldsymbol{K_C = \frac{7}{4}K}$

उदाहरण 12 : समतापीय और रुद्धोष्म प्रक्रमों में भेद कीजिए। एक आदर्श गैस को पहले समतापीय और फिर रुद्धोष्म रीति से समान आयतन पर सम्पीडित किया जाता है। किस दशा में—

(i) अधिक दाब की आवश्यकता होगी? (ii) अधिक कार्य करना होगा? **(UPBTE 2010)**

हल—समतापी प्रक्रम तथा रुद्धोष्म प्रक्रम में भेद

1. समतापी प्रक्रम में, आदर्श गैस बॉयल के नियम (Boyle's Law) (PV = स्थिरांक) का पालन करती है लेकिन रुद्धोष्म प्रक्रम में, आदर्श गैस, बॉयल के नियम का पालन नहीं करती है।

2. समतापी प्रक्रम में, आपेक्षिक ऊष्मीय धारिता अनन्त है जबकि रुद्धोष्म प्रक्रम में, आपेक्षिक ऊष्मीय धारिता शून्य है।

3. समतापी में, आदर्श गैस की आन्तरिक ऊर्जा के ताप पर निर्भर होने के कारण, गैस की आन्तरिक ऊर्जा स्थिर होती है। (ΔV = स्थिरांक) लेकिन रुद्धोष्म प्रक्रम में ऐसा नहीं होता है।

प्रश्नानुसार, (i) समतापी प्रक्रम में, $P_1V_1 = P_2V_2$ अत: सम्पीडित समान आयतन पर $(V_1 = V_2)$, $P_1 = P_2$ इसी प्रकार रुद्धोष्म प्रक्रम में सम्पीडित करने पर $P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}$, अत: समान आयतन तक सम्पीडित करने पर $P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$, अत: रुद्धोष्म प्रक्रम में समतापी प्रक्रम की तुलना में दाब अधिक होगा।

(ii) समतापी प्रक्रम की तुलना में रुद्धोष्म प्रक्रम के अन्तर्गत समान आयतन तक सम्पीडित करने पर अधिक कार्य करना पड़ेगा।

4. समतापी प्रक्रम में ताप (T) स्थिर होता है ($\Delta T = 0$) तथा रुद्धोष्म प्रक्रम में ताप न तो बाहरी वातावरण से लिया जाता है और न ही दिया जाता है अर्थात् ऊष्मा का स्थानान्तरण शून्य होता है ($Q = 0$)

5. समतापी प्रक्रम में, प्रणाली की दीवारें, पूरी तरह से सुचालक होनी चाहिए तथा प्रक्रम बहुत मन्द होना चाहिए जबकि रुद्धोष्म प्रक्रम में प्रणाली की दीवारें ऊष्मारोधित होती हैं तथा ऐसी कोई शर्त नहीं है कि प्रक्रम अधिक तीव्रता से होना चाहिए।

उदाहरण 13 : एक गर्म ठोस की स्थायी अवस्था से आप क्या समझते हैं? d तथा $2d$ मोटाई वाली दो पट्टिकाएँ A तथा B की ऊष्मा चालकताएँ क्रमश: $2K$ तथा K हैं और इन्हें सम्पर्क में रखा गया है। A का स्वतंत्र पृष्ठ 100 °C तथा B का स्वतंत्र पृष्ठ 20 °C ताप पर है। सम्पर्क तल के ताप की गणना करें। **(UPBTE 2011)**

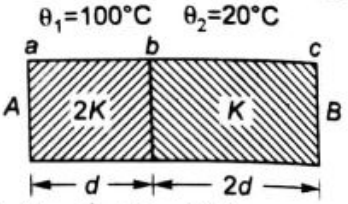
हल—आंकिक खण्ड—

प्रश्नानुसार, दिया है :

A पट्टिका की मोटाई $= d$, स्वतंत्र सिरे का ताप $= 100\,°C$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner



तथा ऊष्मीय चालकता $= 2K$

B पट्टिका की मोटाई $= 2d$, स्वतंत्र सिरे का ताप $= 20\ °C$

तथा ऊष्मीय चालकता $= K$

माना सम्पर्क सतह का ताप $\theta°$ है तथा संयुक्त पट्टिका की काट का क्षेत्रफल A वर्ग मीटर है। चित्र देखें।

पट्टिका A में a से b की ओर ऊष्मा के संचरण की दर

$$\frac{Q}{t} = \frac{2K.A(100-\theta)}{d} \quad \text{... (i)}$$

इसी प्रकार, पट्टिका B में b से c की ओर ऊष्मा के संचरण की दर

$$\frac{Q}{t} = \frac{2K.A(\theta-20)}{2d} \quad \text{... (ii)}$$

स्थायी अवस्था में, a से b की ओर ऊष्मा का संचरण b से c की ओर ऊष्मा के संचरण के समान होगा।

अत: समीकरण (i) तथा (ii) आपस में बराबर होंगे।

$$\frac{2K.A(100-\theta)}{d} = \frac{K.A(\theta-20)}{2d}$$

या $$200 - 2\theta = \frac{\theta - 20}{2}$$

या $$400 - 4\theta = \theta - 20 \text{ या } 5\theta = 420$$

या $$\theta = \frac{420}{5} = 84\ °C$$

$\therefore$ **सम्पर्क सतह का ताप = 84 °C**

उदाहरण 14 : एक गर्म ठोस की स्थायी अवस्था से आप क्या समझते हैं? 0·5 मीटर लम्बी छड़ के चारों ओर लम्बाई में 4 mm मोटी रबड़ की पर्त लगी है और इसके सिरों पर 50 °C तापान्तर स्थापित हो जाए तो इससे होकर ऊष्मा संचरण की दर ज्ञात करो।

$$K_{\text{metal}} = 0\cdot08 \times \text{joule metre}^{-1}\ ^{-1}\text{K}$$

$$K_{\text{rubber}} = 12 \times 10^{-2} \text{ joule metre}^{-1}\ ^{-1}\text{K}$$

(UPBTE 2007)

हल—यदि t समय में धातु की छड़ से प्रवाहित ऊष्मा की मात्रा Q_1 तथा रबड़ की पर्त से प्रवाहित ऊष्मा की मात्रा Q_2 हो, तो t समय में कुल प्रवाहित ऊष्मा (ऊष्मा संचरण) की दर

$$\frac{Q}{t} = \frac{Q_1}{t} + \frac{Q_2}{t}$$

या $$\frac{Q}{t} = K_{\text{metal}} \times A_1 \times \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{l} + K_{\text{rubber}} \times A_2 \times \frac{(\theta_1 - \theta_2)}{l} \quad \text{...(1)}$$

प्रश्न में छड़ के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल (Area of cross-section) नहीं दिया है।

माना छड़ की त्रिज्या $= r$ mm $= r \times 10^{-3}$ m, तो

$$A_1 = \pi (r \times 10^{-3})^2\ \text{m}^2 = \pi r^2 \times 10^{-6}\text{m}^2$$

तथा $$A_2 = \pi [(r+4)^2 - r^2] \times 10^{-6}\text{m}^2$$

समी० (1) में $K_{\text{metal}}, K_{\text{rubber}}$ के मान $\theta_1 - \theta_2 = 50°$ तथा $l = 0\cdot5$ m रखने पर

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$$\frac{Q}{t} = \frac{0{\cdot}08 \times 10^{2} \times A_1 \times 50^{\circ}}{0{\cdot}50} + \frac{12 \times 10^{-2} \times A_2 \times 50^{\circ}}{0{\cdot}50}$$

$$= 800\, A_1 + 12\, A_2$$

जहाँ $A_1 = \pi r^2 \times 10^{-6} \text{m}^2$ तथा $A_2 = \pi[(r+4)^2 - r^2] \times 10^{-6} \text{m}^2$

अभ्यास (Exercises)

1. रेखीय प्रसार से आप क्या समझते हैं? रेखीय प्रसार गुणांक की परिभाषा लिखिए।
2. प्रयोगशाला में किसी धातु का रेखीय प्रसार गुणांक कैसे ज्ञात करेंगे?
3. क्षेत्रीय प्रसार गुणांक का क्या तात्पर्य है? इसके सूत्र लिखिए।
4. आयतन प्रसार गुणांक का क्या तात्पर्य है? इसके सूत्र लिखिए।
5. किसी ठोस रेखीय प्रसार गुणांक, क्षेत्र प्रसार गुणांक और आयतन प्रसार गुणांक सम्बन्ध स्थापित कीजिए।
6. ठोस पदार्थों के प्रसार का एक व्यावहारिक उपयोग समझाइए।
7. द्रव में आयतन प्रसार कितने प्रकार का होता है और क्यों?
8. द्रव के आभासी एवं वास्तविक प्रसार गुणांक में क्या सम्बन्ध है?
9. द्रव के आभासी एवं वास्तविक प्रसार गुणांक की परिभाषा लिखिए।
10. पानी गर्म करने पर पानी के असामान्य व्यवहार का वर्णन कीजिए।
11. गैस में कितने प्रकार के प्रसार संभव है और क्यों?
12. गैस के आयतन प्रसार गुणांक एवं दाब प्रसार गुणांक में सम्बन्ध स्थापित कीजिए।
13. सेल्सियस पैमाना, फारेनहाइट पैमाना तथा केल्विन पैमाने में सम्बन्ध स्थापित कीजिए।
14. धातु का रेखीय प्रसार गुणांक 12×10^{-5} प्रति °C है। इस कथन का अर्थ समझाइए।
15. ठण्डे देशों में झीलों में पानी जम जाता है परन्तु फिर भी उसमें मछलियाँ जीवित रहती है। कारण बताइए।
16. तुषार वाली रातों में जल के नल कभी-कभी फट जाते हैं। ऐसा क्यों होता है?
17. काँच के बर्तन में रखकर जब किसी द्रव को गर्म किया जाता है तो द्रव का तल पहले नीचे गिरता है और फिर ऊपर चढ़ने लगता है। ऐसा होने का कारण बताइए।

प्रश्न सं० 18, 19 में उत्तर के तीन विकल्प दिये गये हैं। सही विकल्प को छाँटिए—

18. ताँबे के आयताकार प्लेट में एक गोल छेद किया गया है। पलेट को गर्म करने पर प्लेट का आकार—
(क) उतना ही रहेगा (ख) बढ़ेगा (ग) घटेगा।
19. लोहे की एक गेंद को गर्म करने पर प्रतिशत वृद्धि किसमें अधिक होगी?
(क) त्रिज्या में (ख) क्षेत्रफल में (ग) आयतन में।
20. ऊष्मा संचरण की विधियाँ संक्षेप में समझाइए।
21. निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए—
(i) ताप प्रवणता (ii) समतापीय पृष्ठ (iii) अस्थायी अवस्था **(UPBTE 2001)**
22. ऊष्मा चालकता गुणांक से आप क्या समझते हैं?
23. क्या समतापीय पृष्ठ गोलीय तथा बेलनाकार भी हो सकते हैं?
24. इन्जन हौज के प्रयोग का वर्णन कीजिए।
25. निम्नलिखित को समझाइए—
(i) हिम (snow) बर्फ (ice) से अधिक ऊष्मारोधी क्यों है?
(ii) जाड़ों में एक मोटी कमीज की अपेक्षा दो पतली कमीजें पहनना अधिक आरामदेह है, क्यों?
(iii) ताँबे व काँच के टुकड़े को समान ताप पर गर्म करने पर ताँबे का टुकड़ा अधिक गर्म प्रतीत होता है, क्यो?

AKC TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

26. भिन्न पदार्थों की बनी दो पट्टियों की मोटाइयाँ d_1, d_2 और चालकताएँ क्रमशः K_1 और K_2 हैं। यदि इन्हें सम्पर्क में रखा गया तो संयोग (combination) की ऊष्मा चालकता के लिए सूत्र स्थापित कीजिए। **(UPBTE 2000)**

27. स्थायी अवस्था (steady state) से आप क्या समझते हैं? ऊष्मा चालकता गुणांक की परिभाषा दीजिए तथा इनकी इकाई व विमा बताइए।

28. विभिन्न पदार्थों की दो समान प्लेटें जिनके ऊष्मा चालकता गुणांक क्रमशः K_1 एवं K_2 हैं, सम्पर्क में रखे हैं। संयुक्त प्लेट के लिए ऊष्मीय चालकता गुणांक ज्ञात कीजिए।

29. विकिरण ऊर्जा का क्या अर्थ है? इसके गुणों की तुलना प्रकाश के गुणों से करो।

30. संवहन किसे कहते हैं? यह विकिरण से किस प्रकार भिन्न है?

31. ऊष्मागतिकी से क्या तात्पर्य है? ऊष्मागतिक निकाय से आप क्या समझते हैं?

32. निम्नलिखित का अर्थ बताइए—
(i) समतापी प्रक्रम (ii) रुद्धोष्म प्रक्रम (iii) समदाबी प्रक्रम (iv) समआयतनिक प्रक्रम

33. गैस की दो विशिष्ट ऊष्मायें क्यों होती हैं? इन दोनों में क्या सम्बन्ध है?

34. समतापी प्रक्रम से आप क्या समझते हैं? सिद्ध कीजिए कि समतापी प्रक्रम में गैस की विशिष्ट ऊष्मा अनन्त होती है।

35. रुद्धोष्म प्रक्रम क्या होता है? इसकी व्याख्या कीजिए।

36. समतापी तथा रुद्धोष्म प्रक्रमों के वक्र खींचकर उनकी व्याख्या कीजिए।

37. गैस की प्रत्यास्थता से आप क्या समझते हैं?

38. आन्तरिक ऊर्जा से आप क्या समझते हैं? इसके विभिन्न स्वरूपों को समझाइए।

39. ऊष्मागतिकी के प्रथम नियम का उल्लेख करते हुए उसके प्रमुख अनुप्रयोगों का वर्णन कीजिए।

40. ऊष्मागतिकी का द्वितीय नियम क्या है? द्वितीय नियम तथा प्रथम नियम में क्या अन्तर है?

41. कारनॉट ऊष्मा इंजन का वर्णन करते हुए, कार्नॉट चक्र की व्याख्या कीजिए।

42. कारनॉट ऊष्मा इंजन की दक्षता का सूत्र स्थापित कीजिए।

43. ऊष्मागतिकी के द्वितीय नियम का उल्लेख कीजिए। कार्नो-चक्र का वर्णन कीजिए और इसका महत्व समझाइए।

44. 27°C का मान केल्विन पैमाने पर लिखिए।

45. – 15°C तथा –133°C ताप को परम ताप में लिखिए।

46. हिम मिश्रण का ताप केल्विन पैमाने पर 250 K है। इसका ताप सेल्सियस पैमाने में ज्ञात कीजिए।

47. किसी प्रयोग में लोहे की छड़ की लम्बाई 100 सेमी है। छड़ का ताप 25°C से 100°C बढ़ाया जाता है। जिससे छड़ की लम्बाई 0·15 सेमी की वृद्धि होती है। धातु का रेखीय प्रसार गुणांक ज्ञात कीजिए।

48. यदि लोहे का रेखीय प्रसार गुणांक $1{\cdot}9 \times 10^{-5}$ प्रति °C हो, तो 0·70 मीटर लम्बी छड़ में 70°C ताप वृद्धि के होने पर लम्बाई में वृद्धि तथा अन्तिम लम्बाई बताइये।

49. काँच का क्षेत्रीय प्रसार गुणांक 0·0001 प्रति °C है। इसके रेखीय प्रसार की गणना कीजिए।

50. 25 सेमी लम्बी धातु की छड़ का एक सिरा भाप में तथा दूसरा बर्फ में है। यदि 12 ग्राम बर्फ प्रति मिनट पिघलती है तो धातु की ऊष्मा चालकता ज्ञात कीजिए। छड़ की अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल 5 सेमी^{2} है और बर्फ की गुप्त ऊष्मा 80 कैलोरी/ग्राम है।
(उत्तर : 0·8 cal-cm-°C)

51. ऊष्मा चालन की स्थायी अवस्था में 20 सेमी लम्बी छड़ के दोनों सिरों के ताप 100 °C तथा 0 °C हैं। छड़ के गर्म सिरे से 6 सेमी दूरी पर ताप की गणना कीजिए।
(उत्तर : 70 °C)

52. 40 सेमी लम्बी छड़ के सिरों का तापान्तर 80 °C तथा 60 सेमी लम्बी दूसरी छड़ के सिरों का तापान्तर 90 °C है। दोनों छड़ों के अनुप्रस्थ काट समान हैं। यदि दोनों छड़ों में ऊष्मा चालन की दर बराबर हो तो उनकी ऊष्मा चालकताओं में अनुपात ज्ञात कीजिए।
(उत्तर : 3 : 4)

AKO TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

53. एक कुचालक दीवार में, 4·0 सेमी मोटी परत (layer) K ऊष्मा चालकता वाले तथा 8·0 सेमी मोटी दूसरी परत $4K$ ऊष्मा चालकता वाले पदार्थ की है। यदि सबसे अन्दर तथा सबसे बाहर की सतहों के ताप क्रमशः $-10\ °C$ तथा $76\ °C$ हों तो अन्तरापृष्ठ का ताप ज्ञात करो।

(उत्तर : 47·3 °C)

54. समान क्षेत्रफल की दो प्लेटें सटाकर रखी गई हैं। प्लेटों की मोटाई क्रमशः 2·0 सेमी तथा 3·0 सेमी है। पहली प्लेट का बाहरी तल $-25\ °C$ तथा दूसरी प्लेट का बाहरी तल $25\ °C$ पर है। प्लेटों के उभयनिष्ठ भीतरी तल का ताप क्या होगा, यदि दोनों प्लेटें (i) एक ही पदार्थ की हों (ii) प्लेटों की ऊष्मा चालकताओं का अनुपात 2 : 3 हो?

(उत्तर : (i) $\theta = -5\ °C$ (ii) $\theta = 0°C$)

55. एक छड़ के लिए, ऊष्मा चालन के संबंध में निम्नलिखित की व्याख्या कीजिए—
(i) स्थायी अवस्था (ii) ताप प्रवणता (iii) ऊष्मा चालकता गुणांक **(UPBTE 2000)**

56. ऊष्मा संचरण की विभिन्न रीतियों का उल्लेख कीजिए। निम्नलिखित में से कौन, समान ताप पर अधिक ऊष्मा विकीर्ण करेगा—
(i) समान-क्षेत्रफल की श्वेत चिकनी सतह अथवा काली खुरदरी सतह?
(ii) समान धातु एवं द्रव्यमान का ठोस गोला अथवा खोखला गोला? कारण सहित समझाइए। **(UPBTE 2006)**

(50) ऊष्मा चालकता, $Q = \dfrac{KA\,(\theta_1 - \theta_2)}{d} . t = mL$

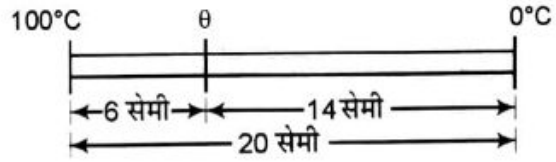
दिया है, $m = 12$ ग्राम, $t = 60$ सेकण्ड, $d = 25$ सेमी, $L = 80$ कैलोरी/ग्राम

तथा $\theta_1 - \theta_2 = 100°C$, $A = 5$ सेमी^{2}

अतः $\dfrac{K \times 5 \times 100 \times 60}{25} = 12 \times 80$

अतः $\boldsymbol{K = 0 \cdot 8\ \text{cal-cm-°C}}$

(51) चित्रानुसार, ऊष्मा चालन की स्थायी अवस्था के लिये



$$\frac{KA\,(100-\theta)}{6} = \frac{KA\,(\theta - 0°)}{14}$$

या $\boldsymbol{\theta = 70°C}$

(52) प्रश्नानुसार, $\dfrac{K_1 \times 80}{40} = \dfrac{K_2 \times 90}{60}$

अतः $\dfrac{K_1}{K_2} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \mathbf{3 : 4}$

(53) प्रश्नानुसार, $\dfrac{KA\,(-10-\theta)}{4} = \dfrac{4KA\,(\theta - 76)}{8}$

अतः $\boldsymbol{\theta = 47 \cdot 3°C}$

(54) (i) प्रश्नानुसार, $\dfrac{KA\,(-25-\theta)}{2} = \dfrac{KA\,(\theta - 25)}{3}$

अतः $\boldsymbol{\theta = -5°C}$

(ii) प्रश्नानुसार, $\dfrac{2A\,(-25-\theta)}{2} = \dfrac{3A\,(\theta - 25)}{3}$

अतः $\boldsymbol{\theta = 0°C}$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

प्रयोगात्मक भाग (Practical Section)

प्रयोगात्मक कार्य का महत्व (Importance of Practical Work)

"Practical means—Learning by doing."

विज्ञान-अध्ययन के दो पहलू हैं—(1) सैद्धान्तिक (Theoretical), तथा (2) प्रयोगात्मक (Practical)।

विज्ञान की उन्नति का प्रमुख तथा मूल कारण इसका प्रयोगात्मक अध्ययन है, अत: यह विज्ञान के अध्ययन में विशिष्ट स्थान रखता है। प्रयोगात्मक अध्ययन से ही युगान्तरकारी-महत्वपूर्ण खोजें हुई हैं। एडीसन, फैराडे, मदाम क्यूरी, सर सी० वी० रमन आदि अनेक वैज्ञानिकों की जीवनी से पता चलता है कि उन्होंने अपनी सभी प्रमुख खोजें प्रयोगशाला में ही की थीं। इसलिए प्रारम्भ से ही विज्ञान के छात्रों में सैद्धान्तिक अध्ययन के साथ-साथ प्रयोगात्मक अध्ययन की भी रुचि उत्पन्न की जानी चाहिए।

प्रयोग की तैयारी (Preparation for the Experiment)

प्रयोग आरम्भ करने से पूर्व विद्यार्थी को प्रयोग सम्बन्धी सिद्धान्त एवं सूत्र का पूर्ण ज्ञान होना चाहिए। सिद्धान्त को समझने से विद्यार्थी क्यों और कैसे का उत्तर दे सकता है। इसके साथ-साथ विद्यार्थी को प्रयोग में प्रयुक्त उपकरणों की पूर्ण जानकारी होनी चाहिए जिनके बिना प्रयोग करना अर्थहीन है। यह भी जानना चाहिए कि प्रयोग को सुचारु रूप से करने के लिए कौन-कौन सी सावधानियाँ आवश्यक हैं।

प्रयोग करने की विधि (Procedure of the Experiment)

सिद्धान्त एवं उपकरण का अध्ययन करके विद्यार्थी को प्रयोगशाला में प्रयोग सम्बन्धी उपकरण की जाँच करने के पश्चात् ही प्रयोग आरम्भ करना चाहिए। उपकरण का समायोजन करने के बाद प्रेक्षण लेने चाहिए। प्राप्त प्रेक्षणों को इधर-उधर न लिखकर प्रायोगिक पुस्तिका में सारणी बनाकर क्रम से लिखना चाहिए। प्रयोग से सम्बन्धित स्वच्छ तथा स्पष्ट आरेख अपनी प्रायोगिक पुस्तिका के बायें पृष्ठ पर बनाना चाहिए। आरेख केवल प्रयोग के सिद्धान्त का बनाना चाहिए परन्तु कुछ प्रयोगों में प्रयुक्त उपकरण का भी आरेख देना आवश्यक होता है। आरेख बनाते समय सदैव पैंसिल तथा पैमाने का उपयोग करना चाहिए।

प्रयोग को प्रायोगिक पुस्तिका में निम्न शीर्षकों के अन्तर्गत लिखना चाहिए—

दिनांक **प्रयोग संख्या** **पृष्ठ संख्या**

1. उद्देश्य (Object)
2. आवश्यक उपकरण (Required Apparatus)
3. उपकरण का संक्षिप्त वर्णन (Short Description of the Apparatus)
4. सिद्धान्त (Theory)
5. प्रयोग विधि (Procedure)
6. प्रेक्षण (Observation)
7. परिकलन (Calculation)
8. प्रतिशत त्रुटि (Percentage Error)
9. परिणाम (Result)
10. सावधानियाँ (Precautions)
11. सम्भावित त्रुटियाँ (Probable Errors)

उपरोक्त शीर्षकों में निम्न बातों का समावेश होना चाहिए—

दिनांक, प्रयोग संख्या तथा पृष्ठ संख्या—प्रायोगिक पुस्तिका में सबसे ऊपरी रेखा पर बायीं ओर दिनांक तथा मध्य में प्रयोग संख्या तथा दाहिनी ओर पृष्ठ संख्या लिखनी चाहिए।

उद्देश्य—जो प्रयोग करना होता है, उसे सूक्ष्म शब्दों में स्पष्ट रूप से लिखना चाहिए। उद्देश्य कभी भी अधूरा नहीं होना चाहिए तथा इसमें संकेतों का प्रयोग नहीं करना चाहिए।

आवश्यक उपकरण—इस शीर्षक के अन्तर्गत प्रयोग सम्बन्धी जिस सामग्री की आवश्यकता होती है, उसे लिखना चाहिए।

उपकरण का वर्णन—यदि प्रयोग में कोई मुख्य उपकरण आता है, तो उसका स्पष्ट चित्र पुस्तिका के बायें पृष्ठ पर बनाकर संक्षिप्त वर्णन करना चाहिए।

ARC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

सिद्धान्त—जिन प्रयोगों में मुख्य नियमों का सत्यापन करना होता है उनमें इस शीर्षक के अन्तर्गत उस नियम की स्पष्ट व्याख्या कर देनी चाहिए। उदाहरणार्थ, किरचॉफ के प्रथम तथा द्वितीय नियम में केवल नियम की व्याख्या देनी चाहिए। इसके अतिरिक्त जिन प्रयोगों में भौतिक स्थिरांकों का मान ज्ञात करना होता है, उनमें इस शीर्षक के अन्तर्गत तत्सम्बन्धी सूत्र लिखना चाहिए और उसमें प्रयुक्त सभी संकेताक्षरों का अर्थ लिख देना चाहिए।

प्रयोग विधि—इस शीषर्क के अन्तर्गत विद्यार्थी को यह लिखना चाहिए कि उसने अपने उपकरण का समायोजन किस प्रकार किया है। इसके पश्चात् उसने जिस क्रम में प्रेक्षण लिये हैं, उन सबका उल्लेख करना चाहिए।

प्रेक्षण—प्रेक्षण लेना ही प्रयोग का सबसे महत्वपूर्ण अंग है। प्रेक्षणों की शुद्धता पर ही प्रयोग की सफलता निर्भर करती है। इसलिए प्रेक्षण सावधानीपूर्वक तथा एकाग्रचित्त होकर लेना चाहिए। प्रेक्षणों में सभी भौतिक राशियों के मात्रक (units) लिखना अत्यावश्यक होता है।

जिस उपकरण से प्रेक्षण लिया जा रहा है, उसका अल्पतमांक अवश्य लिखना चाहिए। यन्त्र के अल्पतमांक से कम पाठ लेना माप में अशुद्धता है।

उदाहरणार्थ—यदि वोल्टमीटर का अल्पतमांक 0·1 वोल्ट है तो प्रेक्षणों में 0·24 या 0·37 वोल्ट आदि लिखना अशुद्ध होगा तथा 0·3 या 0·9 वोल्ट लिखना ठीक होगा।

परिकलन—परिकलन का पूर्ण कार्य प्रायोगिक पुस्तिका के बायें पृष्ठ पर स्वच्छ और सुव्यवस्थित ढंग से **लघुगणक की सहायता से करना चाहिए।**

प्रतिशत त्रुटि—परिकलन से प्राप्त मान वास्तविक नहीं होता है इसमें प्रयोग सम्बन्धी त्रुटियाँ होती हैं। इन त्रुटियों की गणना संभाव्य प्रतिशत त्रुटि अथवा प्रायोगिक प्रतिशत त्रुटि के रूप में अवश्य कर लेनी चाहिए जिससे कि प्रयोग करते समय किस पद का मान ज्ञात करने में अत्यधिक त्रुटि हुई है, की जानकारी मिल सके जिससे कि अगली बार प्रेक्षण लेने में उस पद के मापन में विशेष सावधानी बरती जाये ताकि त्रुटि कम से कम आये।

परिणाम—परिकलन के पश्चात् जो परिणाम प्राप्त होता है, उसे उचित मात्रक सहित इस शीर्षक के अन्तर्गत लिखना चाहिए। यदि उस भौतिक स्थिरांक जिसका मान प्रयोग में निकाला गया है, का प्रमाणिक मान ज्ञात है तो उसे भी लिख देना चाहिए साथ ही प्राप्त परिणाम में कितने प्रतिशत प्रायोगिक अथवा अनुमेय प्रतिशत त्रुटि हुई है इसे भी लिखना चाहिए।

सावधानियाँ—इस शीर्षक के अन्तर्गत विद्यार्थी को वे सावधानियाँ लिखनी चाहिएँ, जिन्हें प्रयोग करते समय ध्यान में रखना आवश्यक है। प्रेक्षण और परिणाम की यथार्थता सावधानियों पर ही निर्भर करती है।

सम्भावित त्रुटियाँ —प्रयोग करते समय कुछ न कुछ त्रुटियाँ अवश्य रह जाती हैं जिनका वर्णन इस शीर्षक में किया जाना चाहिए।

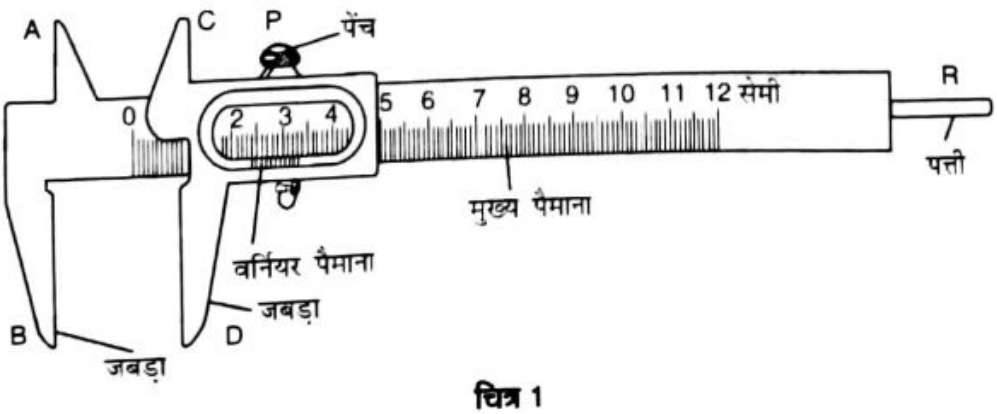
अल्प लम्बाइयों का मापन (Measurement of small lengths)

यदि अल्प लम्बाइयों के मापन में मीटर स्केल का प्रयोग किया जाये तो सामान्य मीटर पैमाने पर बने सबसे छोटे खाने मिलीमीटर तक ही शुद्ध माप की जा सकती है। यदि किसी वस्तु की लम्बाई पूर्णांक मिलीमीटर से कम हो तो इसका मापन वर्नियर कैलीपर्स (Vernier callipers) अथवा स्क्रूगेज (Screw gauge) आदि के प्रयोग से करते हैं।

वर्नियर कैलीपर्स (Vernier Callipers)

1. **आविष्कारक**—पियरे वर्नियर (फ्रांस-17 वीं शताब्दी)
2. **संरचना**—यह यन्त्र चित्र 1 में दिखाया गया है। इसमें निम्न भाग होते हैं—

(a) **मुख्य पैमाना**—सामान्यतया 15 सेमी लम्बा स्टील का स्थिर पैमाना जिस पर मिमी (या उससे भी छोटे पैमाने) तथा सेमी के चिह्न बने होते हैं। अंशांकित पैमाने के पाठ को मुख्य पैमाने का पाठ (Main Scale Division-MSD) कहते हैं।



चित्र 1

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

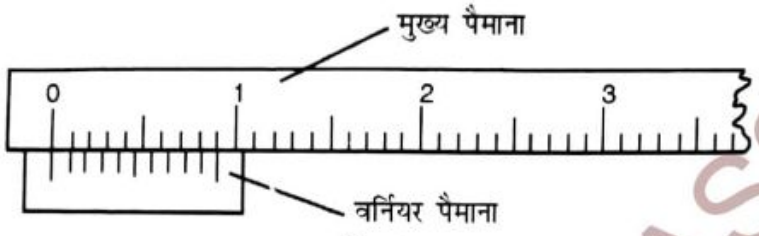
(b) **वर्नियर पैमाना**—यह मुख्य पैमाने के सहारे खिसकता है। इस पर बने पैमानों की संख्या यदि n हो तो यह मुख्य पैमाने पर बने $(n - 1)$ खानों के बराबर होते हैं। वर्नियर का अंशांकित खाना जो किसी MSD के ठीक सीध में हो उसे वर्नियर पैमाने का पाठ्यांक (Vernier Scale Division-VSD) कहते हैं (चित्र 2)।

(c) **ऊपरी आंतरिक जबड़ा** (Upper Inner Jaw)—गोल वस्तु के अन्दरूनी माप के लिए।

(d) **नीचे का वाह्य जबड़ा** (Lower Outerside Jaw)—वस्तु की बाहरी लम्बाई की माप के लिए।

(e) **पत्ती या पूँछ** (Strip or tail)—गहराई मापन के लिए।

3. **मापन एवं गणना**—मापन निम्न चरणों में करते हैं—



चित्र 2

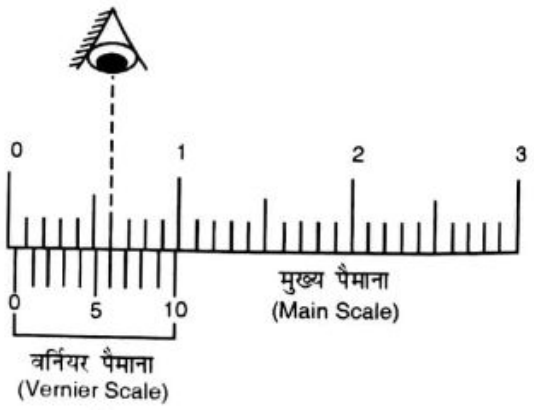
(a) **अल्पतमांक**—निम्न सूत्र से ज्ञात करते हैं—

$$\text{वर्नियर का अल्पतमांक} = \frac{\text{मुख्य पैमाने के एक भाग की लम्बाई } (s)}{\text{वर्नियर पैमाने पर अंकित भागों की संख्या } (n)} \quad \ldots (1)$$

उदाहरण के लिए चित्र 2 के अनुसार वर्नियर कैलीपर्स का अल्पतमांक 0·1 मिमी या 0·01 सेमी है।

(b) **शून्यांक त्रुटि** (Zero Error)—वर्नियर कैलीपर्स के दोनों जबड़ों को आपस में स्पर्श करा कर देखते हैं कि क्या मुख्य पैमाने की शून्य रेखा, वर्नियर पैमाने की शून्य रेखा की ठीक सीध में है अथवा नहीं। यदि सीध में है तो शून्यांक त्रुटि नहीं है, चित्र 2; यदि सीध में नहीं है तो यंत्र में शून्यांक त्रुटि है। यह शून्यांक त्रुटि दो प्रकार की होती हैं—

(i) **धनात्मक शून्यांक त्रुटि** (Positive Zero Error)—यदि वर्नियर पैमाने का शून्यांक मुख्य पैमाने के शून्यांक रेखा के दायीं ओर हो तो शून्यांक त्रुटि धनात्मक होती है। इस स्थिति में शून्यांक त्रुटि का मान ज्ञात करने के लिए हम देखते हैं कि वर्नियर पैमाने की कौन-सी रेखा मुख्य पैमाने के किसी भी रेखा के बिल्कुल सीध में है। वर्नियर पैमाने के इस रेखा की संख्या को वर्नियर अल्पतमांक से गुणा करने पर शुन्यांक त्रुटि प्राप्त हो जाती हैं (चित्र 3)। अर्थात्



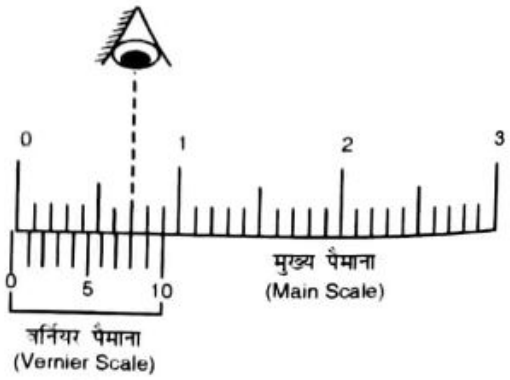
चित्र 3 : धनात्मक शून्यांक त्रुटि

धनात्मक शून्यांक त्रुटि
= वर्नियर पैमाने की मुख्य पैमाने से मिलने वाली रेखा की संख्या × वर्नियर अल्पतमांक ... (2)

उदाहरण के लिए चित्र 3 के अनुसार वर्नियर की 6 वीं रेखा मुख्य पैमाने के किसी भी रेखा की सीध में है अत: समीकरण (2) के अनुसार धनात्मक शून्यांक त्रुटि

$= 6 \times 0 \cdot 01$ सेमी $= 0 \cdot 06$ सेमी

(ii) **ऋणात्मक शून्यांक त्रुटि** (Negative Zero Error)—यदि वर्नियर पैमाने का शून्यांक मुख्य पैमाने के शून्यांक के बायीं ओर हो तो शून्यांक त्रुटि ऋणात्मक होती है (चित्र 4)। इस त्रुटि के आकलन में वर्नियर की मुख्य पैमाने से मिलने वाली रेखा संख्या को वर्नियर पर बने कुल भागों की संख्या से घटाकर प्राप्त संख्या को वर्नियर अल्पतमांक से गुणा करने पर शून्यांक त्रुटि प्राप्त हो जाती है। यह त्रुटि -ve चिह्न सहित लिखी जाती है। अर्थात्



चित्र 4 : ऋणात्मक शून्यांक त्रुटि

AKG TECHNICAL CLASSES
Scanned with CamScanner

ऋणात्मक शून्यांक त्रुटि = – (*n* – वर्नियर पैमाने की मुख्य पैमाने से मिलने वाली रेखा की संख्या) × वर्नियर अल्पतमांक ... (3)

उदाहरण के लिए चित्र 4 के अनुसार वर्नियर की 8वीं रेखा मुख्य पैमाने के किसी भी रेखा की सीध में है। अत: समीकरण (3) के अनुसार,

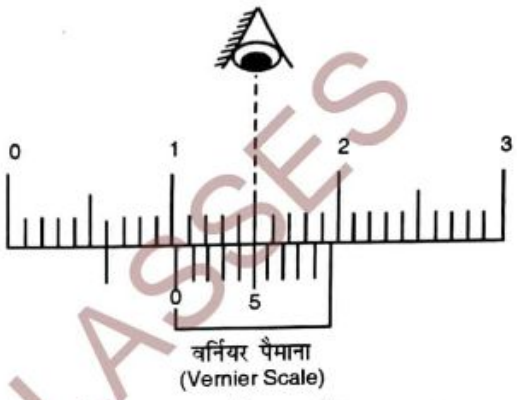
ऋणात्मक शून्यांक त्रुटि $= -[(10-8)\times 0\cdot 01]$ सेमी

$= -0\cdot 02$ सेमी

(c) **लम्बाई का मापन** (Measurement of length—जिस वस्तु की लम्बाई या बाह्य व्यास ज्ञात करना है उसे यन्त्र के नीचे के जबड़े में तथा आन्तरिक व्यास ज्ञात करने के लिए ऊपर के जबड़े में रखते हैं, गहराई ज्ञात करने के लिए वस्तु में यन्त्र का पूँछ डालकर पूँछ पूरी गहराई तक पहुँचाते हैं, वर्नियर पर पैमानों की स्थिति चित्र 5 की भाँति प्राप्त हो सकती है। अब—

(1) मुख्य पैमाने की वह दूरी पढ़ते हैं जो वर्नियर पैमाने के शून्य के ठीक पहले होती है। यह मुख्य पैमाने का पाठ्यांक (MSD) होता है।

(2) वर्नियर पैमाने के उस रेखा की संख्या पढ़ते हैं जो मुख्य पैमाने के किसी भी रेखा के ठीक सीध में हो, इसे यन्त्र के अल्पतमांक से गुणा करते हैं। प्राप्त मान वर्नियर का पाठ्यांक VSD होता है।



चित्र 5 : लम्बाई/गहराई का मापन

प्रेक्षित लम्बाई इस प्रकार होती है—

प्रेक्षित लम्बाई = MSD + (VSD × अल्पतमांक) ... (4)

उदाहरण के लिए चित्र 5 के अनुसार, वस्तु की प्रेक्षित लम्बाई

$= 1\cdot 0$ सेमी $+ (5\times 0\cdot 01)$ सेमी

$= 1\cdot 05$ सेमी

प्राप्त प्रेक्षित मान को यथार्थ रूप में प्राप्त करने के लिए संशोधित करते हैं। संशोधन करने के लिए प्रेक्षित माप में शून्यांक त्रुटि चिह्न सहित घटा देते हैं। अर्थात्

यथार्थ लम्बाई = प्रेक्षित लम्बाई – चिह्न सहित शून्यांक त्रुटि ... (5)

उपरोक्त लिये गये उदाहरणों के लिए यदि यन्त्र में शून्यांक त्रुटि धनात्मक होती तो

यथार्थ मान $= (1\cdot 05 - 0\cdot 06)$ सेमी

$= 0\cdot 99$ सेमी

तथा यदि यन्त्र में शून्यांक त्रुटि ऋणात्मक होती तो

यथार्थ मान $= 1\cdot 05 - (-0\cdot 02)$ सेमी

$= 1\cdot 07$ सेमी

स्क्रू-गेज (Screw Gauge)

इसको माइक्रोमीटर स्क्रू-गेज भी कहते हैं। सामान्य वर्नियर कैलीपर्स द्वारा मिलीमीटर के दसवें भाग तक ठीक-ठीक लम्बाई ज्ञात की जा सकती है। इससे छोटी लम्बाई को यथार्थतापूर्वक नापने के लिए स्क्रू-गेज का प्रयोग किया जाता है।

1. **संरचना**—यह यन्त्र चित्र 1 में दिखाया गया है। इसमें निम्न भाग होते हैं—

(a) **U-फ्रेम**—इसमें एक तरफ स्क्रू (screw) तथा दूसरी तरफ स्टड (stud) होता है जो स्थिर जबड़े का काम करता है।

(b) **नट एवं स्क्रू (पेंच)**—नट में स्क्रू (पेंच) आगे-पीछे घूम सकता है।

(c) **थिम्बल या वृत्तीय सिलिण्डर** (Thimble or circular cylinder)—स्क्रू इससे जुड़ा होता है; यह एक खोखला सिलिण्डर (C) होता है।

(d) **स्लीव सिलिण्डर** (Sleeve Cylinder)—यह नट से जुड़ा होता है।

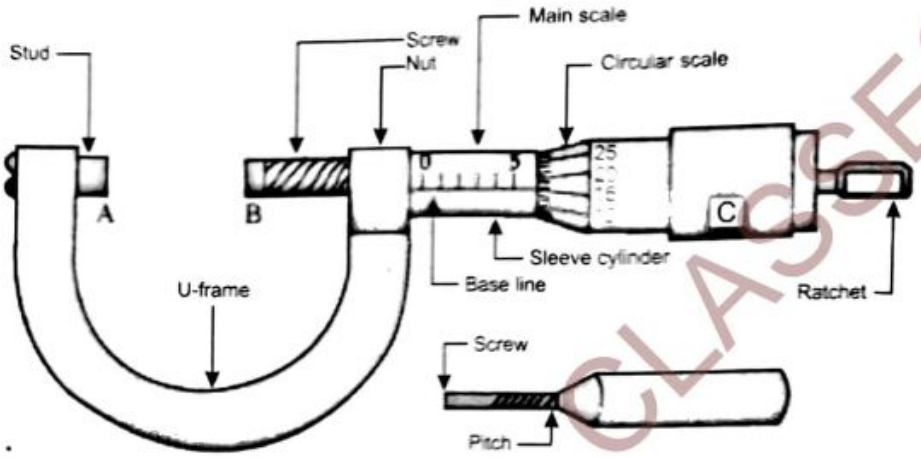
AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(e) **आधार अथवा निर्देश रेखा** (Base or reference Line)—एक निर्देश रेखा जिस पर मिमी में पैमाना अंशांकित होता है। इसे **मुख्य पैमाना (Main Scale - MS)** कहते हैं।

(f) **वृत्तीय पैमाना या थिम्बल पैमाना** (Circular scale or thimble scale)—खोखले सिलिण्डर के झुके भाग पर 50 या 100 खाने बने होते हैं जिन्हें **वृत्तीय पैमाना (Circular scale-CS)** कहते हैं।

(g) **रैचेट** (Ratchet)—वस्तु की माप करने हेतु उसे स्टड तथा स्क्रू के बीच रखकर रैचेट पकड़कर सिलिण्डर को घुमाते हैं वस्तु के स्टड तथा स्क्रू के बीच कस जाने पर रैचेट मुक्त (free) हो जाता है तथा कर्र-कर्र की ध्वनि उत्पन्न करता है।



चित्र 1 : Screw gauge

(2) **मापन एवं गणना**—मापन निम्न चरणों में करते हैं—

(a) **अल्पतमांक**—निम्न सूत्र से ज्ञात करते हैं—

$$\text{पेंच (स्क्रू) का अल्पतमांक} = \frac{\text{पेंच (स्क्रू) का चूड़ी अन्तराल } (s)}{\text{पेंच के वृत्तीय पैमाने पर बने भागों की संख्या } (n)} \quad \ldots (1)$$

पेंच की नोंक को एक पूरा चक्कर घुमाने में उसकी नोंक जितनी दूरी आगे या पीछे विस्थापित होती है उस दूरी को पेंच का चूड़ी अन्तराल (pitch) कहते हैं।

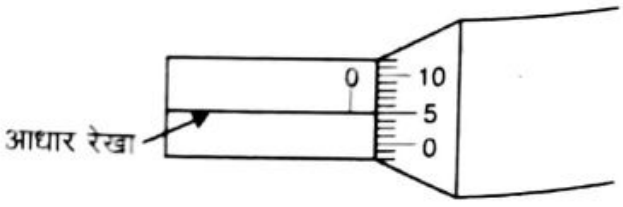
उदाहरणत: यदि पेंच (screw) का चूड़ी अन्तराल 1 मिमी तथा वृत्तीय पैमाने पर अंकित भागों की संख्या 100 हो, तो

$$\text{पेंच का अल्पतमांक} = \frac{S}{n} = \frac{1}{100} \text{ मिमी} = 0{\cdot}01 \text{ मिमी}$$

$$= 0{\cdot}001 \text{ सेमी}$$

(b) **शून्यांक त्रुटि** (Zero Error)—पेंच को घुमाकर समतल सिरों A तथा B को मिलाते हैं। यदि वृत्ताकार पैमाने की शून्यांक रेखा मुख्य पैमाने की आधार रेखा (base line) के ठीक सामने है तथा वृत्तीय सिरा मुख्य पैमान के शून्यांक रेखा को आच्छादित किये है तो यन्त्र में शून्यांक त्रुटि नहीं है और यदि ऐसा नहीं है तो यन्त्र में शून्यांक त्रुटि है। यह त्रुटि दो प्रकार की होती है।

(i) **धनात्मक शून्यांक त्रुटि** (Positive Zero Error)—यदि वृत्ताकार पैमाने की शून्यांक रेखा, मुख्य पैमाने की आधार रेखा के नीचे रह जाती है तो शून्यांक त्रुटि धनात्मक होती है (चित्र-2)। इसका मान ज्ञात करने के लिए हम देखते हैं कि वृत्ताकार पैमाने का कौन-सा चिह्न, मुख्य पैमाने की आधार रेखा के ठीक सीध में है। इस चिह्न की संख्या को अल्पतमांक से गुणा करने पर शून्यांक त्रुटि ज्ञात हो जाती है। अर्थात्



चित्र 2

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

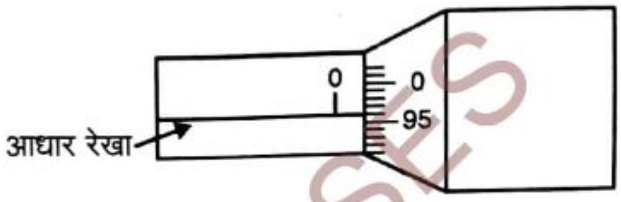
धनात्मक शून्यांक त्रुटि = C.S. के मिलने वाले खानों की संख्या × अल्पतमांक ... (2)

उदाहरण के लिए चित्र 2 के अनुसार वृत्तीय पैमाने की 5वीं रेखा, आधार रेखा के सीध में है अत: समीकरण (2) के अनुसार,

धनात्मक शून्यांक त्रुटि $= 5 \times 0 \cdot 001$ सेमी

$= 0 \cdot 005$ सेमी

(ii) **ऋणात्मक शून्यांक त्रुटि** (Negative Zero Error)—यदि वृत्ताकार पैमाने की शून्यांक रेखा मुख्य पैमाने की आधार रेखा के ऊपर हो जाती है तो शून्यांक त्रुटि ऋणात्मक होती है (चित्र-3)। इस त्रुटि के आकलन में वृत्तीय पैमाने के मुख्य पैमाने के आधार रेखा से मिलने वाली रेखा संख्या को वृत्तीय पैमाने पर बने कुल भागों से घटाकर प्राप्त संख्या को पेंच के अल्पतमांक से गुणा करने पर ऋणात्मक शून्यांक त्रुटि प्राप्त हो जाती है। यह त्रुटि – ve चिह्न सहित लिखी जाती है। अर्थात्



चित्र 3

ऋणात्मक शून्यांक त्रुटि = – (n – CS के मिलने वाले खानों की संख्या) × अल्पतमांक ... (3)

उदाहरण के लिए चित्र 3 के अनुसार वृत्तीय पैमाने का 96 वाँ खाना आधार रेखा के सीध में है अत: समीकरण (3) के अनुसार—

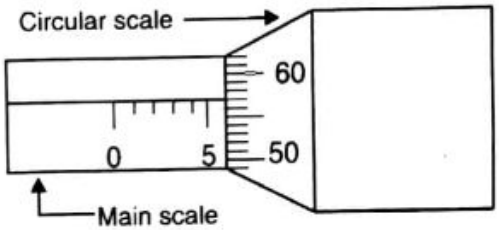
ऋणात्मक शून्यांक त्रुटि $= -[(100 - 96) \times 0 \cdot 001]$ सेमी

$= 0 \cdot 004$ सेमी

(c) **लम्बाई का मापन** (Measurement of Length)—जिस वस्तु की लम्बाई ज्ञात करनी होती है उसे समतल पृष्ठ A तथा B के बीच रखकर रैचेट के सहारे कस देते हैं, चित्र 4, अब—

(1) मुख्य पैमाने पर दिखने वाले पैमानों को पढ़ लेते हैं। यह मुख्य पैमाने का पाठ (Main Scale Reading–MSR) होता है।

(2) मुख्य पैमाने के आधार रेखा के ठीक सीध में मिलने वाले वृत्तीय पैमाने के खाने को पढ़कर इसे यन्त्र के अल्पतमांक से गुणा करते हैं। प्राप्त मान वृत्तीय पैमाने का पाठ्यांक (Circular Scale Reading – CSR) होता है।



चित्र 4

प्रेक्षित लम्बाई इस प्रकार होती है—

प्रेक्षित लम्बाई = MSR + (CS × अल्पतमांक) ... (4)

उदाहरण के लिए चित्र 4 के अनुसार, वस्तु की प्रेक्षित लम्बाई

$= 5 \cdot 0$ मिमी $+ (57 \times 0 \cdot 001)$ सेमी

$= 0 \cdot 5$ सेमी $+ 0 \cdot 057$ सेमी

$= 0 \cdot 557$ सेमी

प्राप्त प्रेक्षित मान का यथार्थ मान प्राप्त करने के लिए प्रेक्षित मान में शून्यांक त्रुटि चिह्न सहित घटा देते हैं अर्थात्

यथार्थ लम्बाई = प्रेक्षित लम्बाई – चिह्न सहित शून्यांक त्रुटि ... (5)

उपरोक्त लिये गये उदाहरण के लिए—

यदि यन्त्र में शून्यांक त्रुटि धनात्मक होती तो

यथार्थ मान $= 0 \cdot 557 - 0 \cdot 005$ सेमी

$= 0 \cdot 552$ सेमी

तथा यदि यन्त्र में शून्यांक त्रुटि ऋणात्मक होती तो—

यथार्थ मान $= 0 \cdot 557 - (-0 \cdot 004)$ सेमी

$= 0 \cdot 557 + 0 \cdot 004$ सेमी

$= 0 \cdot 561$ सेमी

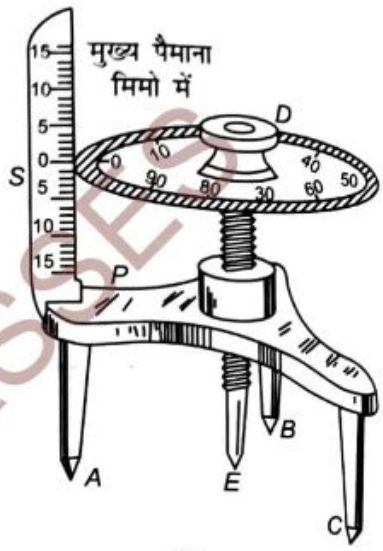
AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

गोलाईमापी (Spherometer)

यह यन्त्र पेंच के सिद्धान्त पर कार्य करता है अर्थात् चकती का कोणीय घुमाव पेंच द्वारा मुख्य पैमाने पर चली रेखीय दूरी के अनुक्रमानुपाती होता है। यह पतली प्लेटों की मोटाई तथा गोलीय सतहों की वक्रता-त्रिज्या मापने के काम आता है। चूँकि यह गोलीय तलों की वकता-त्रिज्या ज्ञात करने के लिये प्रयुक्त किया जाता है, अत: इसे **गोलाईमापी** (Spherometer) कहते हैं।

संरचना—गोलाईमापी धातु के एक त्रिभुजाकार फ्रेम से बना होता है। (चित्र 1) जिसकी तीन टांगें A, B और C एक समत्रिबाहु त्रिभुज बनाती हैं। इन टांगों की नोकें एक ही समतल में स्थित होती हैं फ्रेम के मध्य मे एक गोल छेद होता है जिसमें चूड़ियाँ कटी रहती हैं। इसमें होकर एक पेंच ऊपर लगी गोल चकती D की सहायता से घुमाने पर ऊपर या नीचे गति करता है। यन्त्र की रचना इस प्रकार की होती है कि पेच की नोक बाहर की तीनों टांगों की नोकों से बने समत्रिबाहु त्रिभुज के मध्य केन्द्र (centroid) पर पड़ती है। फ्रेम में टाँग A के ऊपर एक ऊर्ध्वाधर धातु की पत्ती लगी रहती है जिस पर प्राय: मिमी मे या अर्द्ध-मिमी में चिह्न अंकित होते हैं। यह मुख्य पैमाना कहलाता है तथा इसका शून्य चिन्ह् बीच मे होता है। गल चकती D का तल ऊर्ध्व पैमाने के अभिलम्बवत् रहता है। इस चकती की परिधि पर बराबर दूरी पर प्राय: 50 या 100 चिन्ह् अंकित रहते हैं जब पेंच को घुमाया जाता है, तो चकती D मुख्य पैमाने S के सहारे ऊपर अथवा नीचे लगती है।



चित्र 1

चूड़ी-अन्तराल (Pitch)—गोलाईमापी की चकती को एक पूरा चक्कर घुमने में पेंच जितनी दूरी ऊपर या नीचे तय करती है, वह दूरी पेंच का 'चूड़ी-अन्तराल' कहलाती है। इसका मान पेंच के प्रत्येक स्थान पर एक-सा रहता है। यह किन्हीं भी दो पास वाली चूड़ियों के बीच की दूरी के बराबर होता है, क्योंकि पेंच में चूड़ियाँ समान दूरी पर काटी जाती हैं। इसे ज्ञात करने के लिये वृत्ताकार चकती को दो अथवा चार चक्कर घूमाते हैं। मुख्य पैमाने पर चली गई दूरी को माप कर दो या चार से भाग कर देते हैं। यही पेंच की चूड़ी का अन्तराल है।

अल्पतमांक (Least Count)—माना गोलाईमापी की चकती पर बराबर दूरी पर n चिन्ह् अंकित हैं और पेंच का चूड़ी अन्तराल S है। इसका अर्थ यह हुआ कि पेंच का सिरा एक चक्कर (n भाग) पूरा करने में S दूरी तय करता है। अत: पेंच का सिरा एक भाग घुमाने से S/n दूरी तय करेगा। **यह वह छोटी से छोटी दूरी है, जिसे गोलाईमापी शुद्धतापूर्वक माप सकता है। अत: इसे गोलाईमापी का अल्पतमांक कहते हैं। अत:**

$$\text{अल्पतमांक} = \frac{S}{n} = \frac{\text{पेंच का चूड़ी-अन्तराल}}{\text{गोल पैमाने पर अंकित खानों की संख्या}}$$

उदाहरणार्थ, यदि पेंच का चूड़ी-अन्तराल 1 मिमी हो तथा गोल पैमाने पर 100 खाने हों तो

$$\text{अल्पतमांक} = \frac{1\,\text{मिमी}}{100} = \frac{0{\cdot}1\,\text{सेमी}}{100} = 0{\cdot}001 \text{ सेमी} = 10^{-5} \text{ मीटर।}$$

शून्यांक-त्रुटि (Zero Error)—गोलाईमापी को घिसे हुए काँच की समतल प्लेट पर रखकर गोल चकती D को इतना घुमाते हैं कि इसके पेंच की नोक प्लेट को ठीक स्पर्श करने लगे। इस दशा में नोक और प्लेट से परावर्तन के कारण बना इसका प्रतिबिम्ब ठीक एक-दूसरे को स्पर्श करने लगते हैं। अब, यदि गोल चकती का शून्य और मुख्य पैमाने का शून्य चिन्ह् एक सीधी रेखा में आ जाते हैं, तो यन्त्र में किसी प्रकार की शून्यांक त्रुटि नहीं होती है। यदि दोनों शून्यांक एक सीधी रेखा में नहीं आते हैं, तो यन्त्र में शून्यांक त्रुटि होती है। प्राय: दोनों पैमानों के शून्यांकों में थोड़ा अन्तर रहता है। इस अन्तर को ही 'शून्यांक-त्रुटि' कहते हैं। यह दो प्रकार की होती है—धनात्मक (+) तथा ऋणात्मक (−)।

(अ) धनात्मक (Positive) शून्यांक त्रुटि—जब वृत्ताकर चकती का ऊपरी तल मुख्य पैमाने के शून्यांक से ऊपर रहता है, तो त्रुटि धनात्मक होती है। इसका मान ज्ञात करने के लिये चकती का जो चिन्ह मुख्य पैमाने से मिला होता है उसे पढ़ लेते हैं और अल्पतमांक से गुणा करके मुख्य पैमाने के पाठ मे जोड़ देते हैं।

धनात्मक शून्यांक त्रुटि = मुख्य पैमाने पर पाठ + चकती का मुख्य पैमाने से मिलने वाला भाग × अल्पतमांक]

(ब) ऋणात्मक (Negative) **शून्यांक त्रुटि**—जब वृत्ताकार चकती का ऊपरी तल मुख्य पैमाने के शून्यांक से नीचे रहता है, तो त्रुटि ऋणात्मक होती है। इसका मान ज्ञात करने के लिये वृत्ताकार चकती पर पढ़ी गई चिन्ह संख्या को उस पर अंकित चिन्हों के कुल संख्या में से घटाकर अल्पतमांक से गुणा करते हैं और फिर मुख्य पैमाने के पाठ में जोड़ देते हैं।

ऋणात्मक शून्यांक त्रुटि = मुख्य पैमाने पर पाठ + (चकती पर अंकित चिन्हों की संख्या − चकती का मुख्य पैमाने से मिलने वाला भाग) × अल्पतमांक)

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

2. पिच्छट त्रुटि (Backlash Error)—पेंच के सिद्धान्त के अनुसार पेंच को जितना घुमाया जाता है, उतना ही वह आगे या पीछे हटता है। प्राय: यह देखा जाता है कि पेंच की चूड़ियों तथा जिस छेद में पेंच घूमता है उसकी चूड़ियों के बीच कुछ ढील रहती है। इसलिये जब पेंच को एक दिशा में घुमाते हुए, यदि उसकी दिशा विपरीत कर दी जाये, तो वह एकदम विपरीत दिशा में नहीं हटता, बल्कि थोड़े समय के लिये स्थिर हो जाता है अर्थात् पेंच अपने स्थान पर ही घूमता रहता है। यह **'पिच्छट त्रुटि'** कहलाती है जो पेंच और ढिबरी की चूड़ियों के घिस जाने के कारण यन्त्र में आती है।

इस त्रुटि को दूर करने के लिये माप लेते समय पेंच को सदैव एक ही दिशा में घुमाना चाहिये। यदि किसी समय ऐसा प्रतीत हो कि पेंच एक दिशा में अधिक घूम गया है और उसे थोड़ा पीचे हटाना अनिवार्य है, तो उसे कुछ अधिक दूर तक पीछे हटाकर पुन: उसी दिशा में घुमाकर पेंच का पाठ ज्ञात करना चाहिये।

ग्राफ (Graph)

"प्रयोगकर्ता द्वारा प्रेक्षण से प्राप्त किन्हीं दो भौतिक चर राशियों का चित्र में प्रदर्शन ग्राफ कहलाता है।"

"A pictorial representation of two physical variables, recorded by an experimenter is called graph."

ग्राफ खींचते समय निम्न तथ्यों का ध्यान रखते हैं—

(A) अक्षों का चयन (Choosing Axes)—प्रत्येक ग्राफ दो राशियों पर आधारित होता है, जिन्हें **चल राशियाँ** (Variable Quantities) कहते हैं। इनमें से एक राशि को विद्यार्थी अपनी इच्छानुसार बदल सकता है। इसलिए इसे **स्वतंत्र चल राशि** (Independent variable) कहते हैं। दूसरी राशि पहली राशि के बदलने पर किसी निश्चित क्रम में स्वत: ही बदल जाती है अर्थात् यह पहली राशि पर निर्भर करती है। इसलिए इसे **आश्रित चल राशि** (dependent variable) कहते हैं।

प्रचलित परिपाटी के अनुसार स्वतंत्र चल राशि को क्षैतिज अक्ष (X-अक्ष) पर तथा आश्रित चल राशि को ऊर्ध्वाधर अक्ष (Y-अक्ष) पर लेना चाहिए; जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।

Generally amongst the two variables, one variable is independent, whereas other variable is dependent. The independent variable is generally plotted on x-axis and the dependent variable is generally plotted on y-axis.

(B) यथोचित पैमाने का चुनाव—पैमाना इस प्रकार चुनना चाहिए कि सम्पूर्ण ग्राफ-पेपर उपयोग में आ जाए।

इस हेतु निम्न तथ्यों का ध्यान रखते हैं—

(1) यदि प्रेक्षित राशि पूर्णांक है तो इसे पैमाने के लिए दस के पूर्णांश में, प्रेक्षित अधिकतम मान से निकटतम आगे अथवा प्रेक्षित न्यूनतम मान से निकटतम पीछे के अंक पर राउन्ड ऑफ कर लेते हैं।

(2) यदि प्रेक्षण दशमलव में है तो इसे परिमेय संख्या बना लेते हैं। जैसे किसी विद्युत परिपथ के प्रयोग में यदि विभव तथा धारा के प्रेक्षित मान निम्नवत् हों—

धारा (ऐम्पियर)	$0\cdot20 = 20\times10^{-2}$	$0\cdot45 = 45\times10^{-2}$	$0\cdot87 = 87\times10^{-2}$	$0\cdot95 = 95\times10^{-2}$	$1\cdot25 = 125\times10^{-2}$
विभव (वोल्ट)	$0\cdot24 = 24\times10^{-2}$	$0\cdot54 = 54\times10^{-2}$	$1\cdot05 = 105\times10^{-2}$	$1\cdot12 = 112\times10^{-2}$	$1\cdot50 = 150\times10^{-2}$

उपरोक्त मानों में धारा के अधिकतम मान 125×10^{-2}A को 140×10^{-2}A में राउन्ड ऑफ कर लेते हैं।

इसी प्रकार विभव का न्यूनतम मान 24×10^{-2}V है इसे निकटतम निम्न पूर्णांश, 20×10^{-2}V में राउन्ड ऑफ कर लेते है।

(3) X-अक्ष पर पैमाना—

(i) X-अक्ष पर उपलब्ध सबसे छोटे वर्ग 1 मिमी^{2} खाने को गिन लेते हैं।

(ii) प्रेक्षण से प्राप्त संख्याओं को गिन लेते हैं; जिन्हें ग्राफ पर अंकित करना है।

(iii) निम्न सूत्र का प्रयोग करते हैं—

$$\text{पैमाना} = \frac{\text{उपलब्ध सूक्ष्मतम वर्गाकार खाने}}{\text{प्रेक्षित संख्याओं की संख्या}}$$

उपरोक्त लिए गए उदाहरण के अनुसार, माना 60 छोटे खाने (वर्ग) उपलब्ध हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

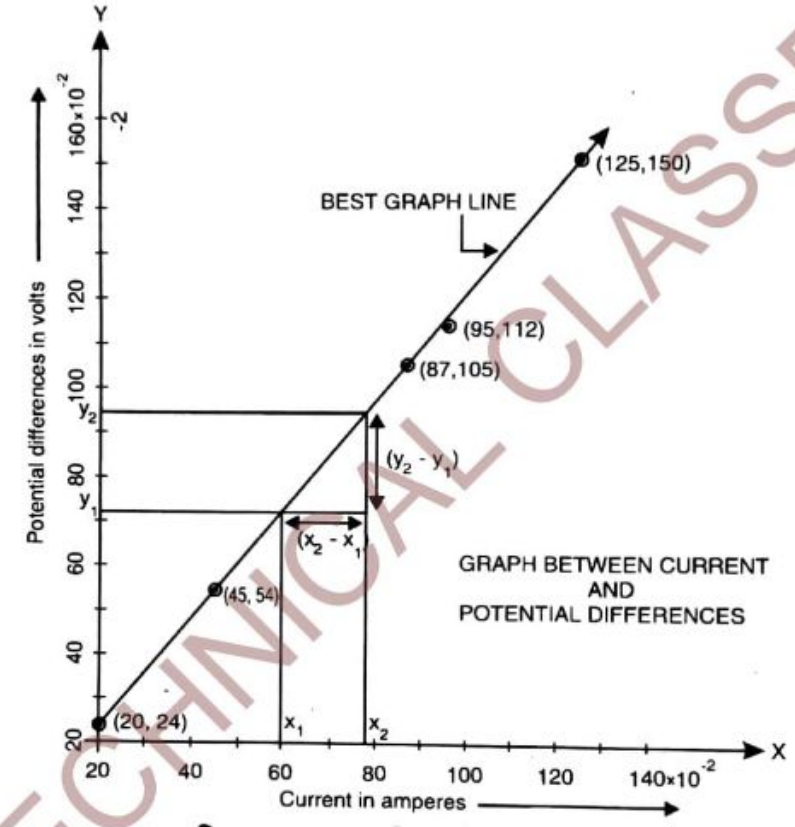
Scanned with CamScanner

$$X\text{-अक्ष का पैमाना} = \frac{60}{(140-20)} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

अत: x-अक्ष पर एक छोटा खाना $= 2 \times 10^{-2}$ A इसी प्रकार y अक्ष के लिए पैमाना चुन लेते हैं। लिए गए उदाहरण का धारा तथा विभव के मध्य ग्राफ चित्र 1 के अनुसार प्राप्त होता है।

(C) ग्राफ पेपर पर मूल बिन्दु का चयन—यदि दोनों चल राशियों का मान समस्त प्रेक्षणों में धनात्मक रहता है तो मूल बिन्दु को ग्राफ पेपर के नीचे की ओर बाएँ कोने में लेना चाहिए। यदि चल राशियों के मान धनात्मक और ऋणात्मक रहते हैं तो मूल बिन्दु ग्राफ पेपर के बीच मे लेना चाहिए।

(D) ग्राफ पेपर पर बिन्दुओं को अंकित करना—प्रेक्षणों के एक जोड़े के लिए ग्राफ पेपर पर बिन्दु निर्धारित करके उस पर बिन्दु (dot) लगा देते हैं तथा इसके चारों ओर एक गोला (⊙) बना देते हैं।



चित्र : धारा तथा विभव के मध्य ग्राफ

(E) वक्र खींचना—नुकीली पेंसिल की सहायता से एक निष्कोण वक्र (smooth curve) खींच देना चाहिए। यदि ग्राफ की आकृति एक सरल रेखा है तो मीटर पैमाने से ही रेखा खींच लेते हैं।

(F) ग्राफ पेपर पर लिखना—

(a) ग्राफ पेपर के ऊपर बीच में स्पष्ट तथा स्वच्छ शब्दों में ग्राफ का उद्देश्य तथा प्रयोग संख्या लिखना चाहिए।

(b) ग्राफ पेपर के दायीं ओर X-अक्ष और Y-अक्ष पर प्रदर्शित चल राशियों के माने हुए पैमाने लिखना चाहिए।

(c) दोनों अक्षों पर प्रदर्शित की गई राशियों को तीर का चिह्न लगा कर लिखना चाहिए।

(d) अपने माने हुए पैमाने के अनुसार दोनों अक्षों का अंशांकन करके प्राप्त संगत संख्या लिखना चाहिए।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

प्रयोग संख्या-1 (A)
EXPERIMENT No. -1 (A)

दिनांक ..... पृष्ठ संख्या .....

उद्देश्य (Object)

वर्नियर कैलीपर्स की सहायता से किसी तार की त्रिज्या तथा उसका आयतन ज्ञात करना।

आवश्यक उपकरण (Apparatus)

वर्नियर कैलीपर्स, आयताकार/बेलनाकार ठोस।

प्रयोग विधि (Method)

निम्न चरणों में मापन प्रक्रिया पूर्ण करते हैं—

(1) वर्नियर कैलीनर्स के मुख्य पैमाने पर एक विभाजन का मान ज्ञात करते हैं।

(2) वर्नियर पैमाने पर विभाजनों की कुल संख्या ज्ञात करते हैं।

(3) कैलीपर्स के दोनों जबड़ों को परस्पर मिला कर यंत्र की शून्यांक त्रुटि ज्ञात करते हैं।

(4) जिस ठोस की माप लेनी है, उसे कैलीपर्स के जबड़ों के बीच इस प्रकार फँसाते हैं कि न तो जबड़े बहुत अधिक कसे रहें और न ही वस्तु जबड़ों के बीच ढीली रहे।

(5) इस स्थिति में नोट करते हैं कि वर्नियर पैमाने की शून्य रेखा, मुख्य पैमाने की किस रेखा तक पहुँच जाती है। इस रेखा का पाठ मुख्य पैमाने का पाठ्यांक है।

(6) अब यह देखते हैं कि वर्नियर पैमाने की कौन-सी रेखा मुख्य पैमाने की किसी रेखा की ठीक सीध में है। यह वर्नियर पैमाने का पाठ्यांक है।

(7) उपर्युक्त क्रियाओं को कम से कम तीन बार दुहराते हैं।

प्रेक्षण (Observation)

(1) मुख्य पैमाने के एक विभाजन का मान s = ... सेमी

(2) वर्नियर पैमाने पर विभाजनों की कुल संख्या (n) = ...

अत: वर्नियर का अल्पतमांक = $\frac{s}{n}$

= ..... सेमी

(3) शून्यांक त्रुटि हेतु प्रेक्षण :

(क) मुख्य पैमाने का पाठ्यांक = ... सेमी

(ख) वर्नियर पैमाने का पाठ्यांक = ... सेमी

अत: शून्यांक त्रुटि = ... सेमी

(4) ठोस के ..... हेतु प्रेक्षण तालिका :

क्रमांक	मुख्य पैमाने का पाठ्यांक (सेमी)	वर्नियर पैमाने का पाठ्यांक		संपूर्ण माप (सेमी)
		विभाजन संख्या	माप (सेमी)	
(1)	(2)	(3)	(4) = (3) × अल्पतम माप	(5) = (2) + (4)
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

मध्यमान = ... सेमी

शुद्ध मान (प्रेक्षित मान – शून्यांक त्रुटि) = ... सेमी

गणना (Calculation)

प्रयोग हेतु प्रयुक्त वस्तु की आकृति के आधार पर सूत्र का प्रयोग एवं गणना करें।

परिणाम (Result)

दिये गये ठोस की ..... = ... सेमी

त्रुटियाँ एवं सावधानियाँ (Sources of Errors and Precautions)

(1) ठोस को जबड़ों के बीच न तो ढीला रखना चाहिए और न ही बहुत कसा हुआ।

(2) ठोस की किसी माप (जैसे लम्बाई) को उसके विभिन्न स्थानों पर लेकर मध्यमान ज्ञात करना चाहिए।

(3) मुख्य पैमाने का पाठ्यांक लेने में यह देखना चाहिए कि वर्नियर की शून्य-रेखा मुख्य पैमाने की किस रेखा को ठीक पार कर गयी है अथवा किस रेखा तक ठीक सीध में है। यदि यह रेखा मुख्य पैमाने की किसी रेखा तक केवल लगभग पहुँची हुई प्रतीत हो, तो पैमाने की पिछली रेखा को ही मुख्य पैमाने का पाठ्यांक मानना चाहिए।

टिप्पणी : किसी ठोस की लम्बाई, चौड़ाई, व्यास आदि नाप कर ठोस के आयतन अथवा उसके पृष्ठों के क्षेत्रफल की गणना उचित सूत्रों से की जा सकती है। इस हेतु कुछ ठोस आकृतियों के क्षेत्रफल एवं आयतन के सूत्र प्रयोग संख्या 1 (B) के अन्त में दिये गये हैं।

प्रयोग संख्या–1 (B)
EXPERIMENT NO-1 (B)

उद्देश्य (Object)

स्क्रूगेज (पेंचमापी) की सहायता से किसी (पतली छड़, अथवा तार की त्रिज्या एवं उसका आयतन ज्ञात करना।

आवश्यक उपकरण (Apparatus)

स्क्रू गेज, छड़/तार/प्लेट।

प्रयोग विधि (Method)

निम्न चरण में मापन प्रक्रिया पूर्ण करते हैं—

(1) वृत्तीय पैमाने को पीछे घुमाकर, मुख्य पैमाने के कम से कम पाँच चिह्नों को देखते हैं तथा किसी मीटर पैमाने से तुलना करके ज्ञात करते हैं कि मुख्य पैमाने के एक विभाजन की माप कितनी है। सामान्यत: यह माप 1 मिमी अथवा 0·5 मिमी होती है।

(2) वृत्तीय पैमाने को एक पूरा चक्कर घुमाकर देखते हैं कि यह मुख्य पैमाने पर कितनी दूरी चलता है। इसे नोट कर लेते हैं। यह स्क्रू गेज का पिच है।

(3) वृत्तीय पैमाने पर विभाजनों की कुल संख्या ज्ञात करते हैं।

(4) वृत्तीय पैमाने को आगे घुमाकर चल बेलन के सिरे को स्थिर बेलन (stud) के सिरे से मिलाकर उपकरण की शून्यांक त्रुटि ज्ञात करते हैं।

(5) वृत्तीय पैमाने को पीछे घुमाकर दोनों बेलनों के सिरों के बीच पर्याप्त स्थान में दिये गये तार को इनके बीच रख कर वृत्तीय पैमाने को इतना घुमाते हैं कि दिया गया तार दोनों सिरों के बीच फँस जाये।

(6) इस दशा में देखते हैं कि वृत्तीय पैमाने का कोर (edge) मुख्य-पैमाने के किस रेखा को पार कर चुका है। इस रेखा का पाठ मुख्य पैमाने का पाठ्यांक है।

(7) अब यह देखते हैं कि वृत्तीय पैमाने को कौन-सी रेखा मुख्य पैमाने की आधार-रेखा की सीध में है। इस रेखा का पाठ वृत्तीय पैमाने का पाठ्यांक है।

(8) उपर्युक्त क्रिया को कम से कम तीन बार दुहराते हैं।

प्रक्षेण (Observation)

(1) स्क्रूगेज का पिच (S) = ... मिमी

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(2) वृत्तीय पैमाने पर विभाजनों की कुल संख्या (n) = ...

अत: स्क्रू-गेज का अल्पतमांक $= \frac{S}{n}$

(3) शून्यांक त्रुटि हेतु प्रेक्षण :

(क) मुख्य पैमाने का पाठ्यांक = ... मिमी

(ख) वृत्तीय पैमाने का पाठ्यांक = ... मिमी

अत: शून्यांक त्रुटि = ... मिमी (चिन्ह सहित)

(4) तार के व्यास (अथवा प्लेट की मोटाई) हेतु प्रेक्षण

क्रमांक	मुख्य पैमाने का पाठ्यांक (मिमी)	वृत्तीय पैमाने का पाठ्यांक		संपूर्ण माप (मिमी)
		विभाजन संख्या	माप (मिमी)	
(1)	(2)	(3)	(4) = (3) × अल्पतम माप	(5) = (2) + (4)
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

मध्यमान माप = ... मिमी

शुद्ध माप = (प्रेक्षित माप – शून्यांक त्रुटि) = ... मिमी

= ..... सेमी

गणना (Calculation)

प्रयोग हेतु प्रयुक्त वस्तु की आकृति के आधार पर सूत्र का प्रयोग करते हैं।

परिणाम (Result)

दिये गये तार का व्यास (अथवा प्लेट की मोटाई) = ... सेमी

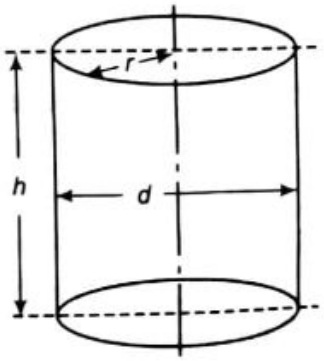
त्रुटियाँ एवं सावधानियाँ (Sources of Errors and Precautions)

(1) प्रेक्षणों को दुहराते समय प्रत्येक बार वृत्तीय पैमाने को काफी पीछे ले जाना चाहिए और फिर आगे लाकर तार या प्लेट को फंसाना चाहिए। ऐसा करने से पेंच की पिच्छट-त्रुटि (Backlash error) का निवारण हो जाता है।

(2) वृत्तीय-पैमाने को रैचेट द्वारा ही घुमाना चाहिए तथा रैचेट के मुक्त (free) होने पर घुमाना बंद कर देना चाहिए अन्यथा वस्तु पर अधिक दबाव पड़ने से उसकी माप कम हो सकती है।

(3) किसी स्थान पर तार के व्यास को उसी जगह दो लम्बवत दिशाओं में नापना चाहिए तथा इसे भिन्न-भिन्न स्थानों पर दुहराना चाहिए।

टिप्पणी : तार के व्यास की नाप से उसकी त्रिज्या, अनुप्रस्थ-काट के क्षेत्रफल, दी गयी लम्बाई के टुकड़े का आयतन आदि उचित सूत्रों द्वारा गणना करके ज्ञात किये जा सकते हैं।



कुछ ठोस आकृतियों के क्षेत्रफल तथा आयतन का सूत्र

(1) पतले एवं लम्बे तार के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$

आयतन $V = \pi r^2 L$

जहाँ r - तार की त्रिज्या एवं L - तार की लम्बाई है।

(2) बेलन (Cylinder) का पृष्ठ क्षेत्रफल $A = \pi \cdot d \cdot h \; 2\pi r^2$

आयतन $V = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h$ या $\pi r^2 h$

(3) गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

प्रयोग संख्या-2
(EXPERIMENT No-2)

दिनांक ..... पृष्ठ संख्या .....

उद्देश्य (Object)

सरल लोलक द्वारा प्रयोगशाला में गुरुत्वीय त्वरण (g) का मान ज्ञात करना।

उपकरण (Apparatus)

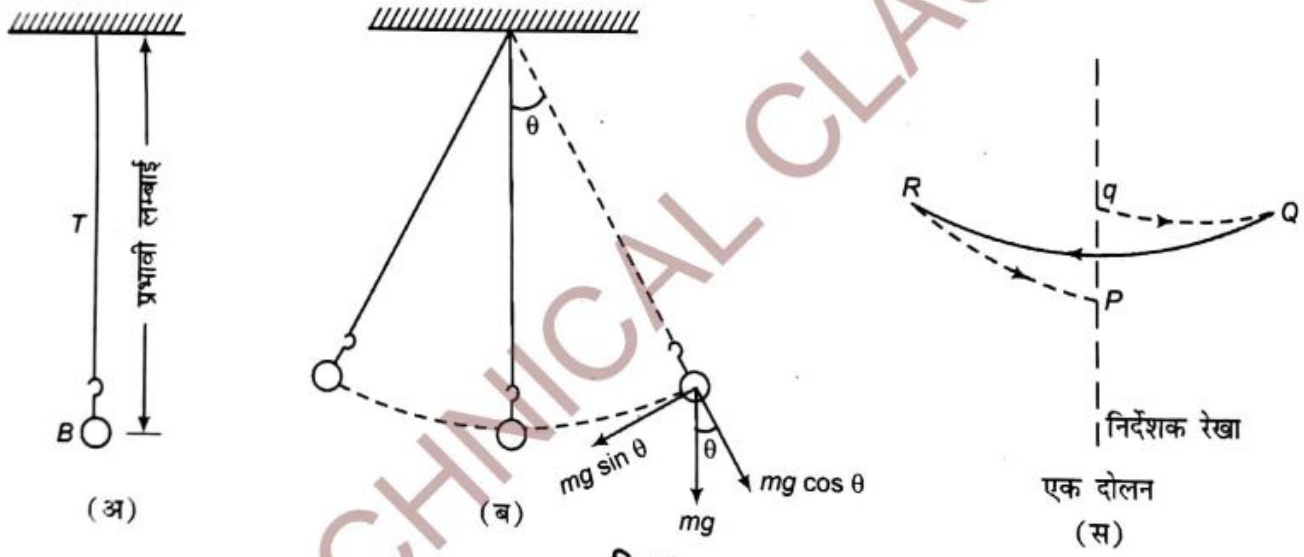
धातु का भारी छोटा गोला (Bob) जिसमें हुक लगा हो, क्लैम्प स्टैण्ड, धागा, मीटर स्केल, स्टॉप वाच, वर्नियर कैलिपर, चॉक इत्यादि।

उपकरण का विवरण (Description of Apparatus)

B = धातु का एक भारी परन्तु छोटा गोला जिसका द्रव्यमान 'm' है।

T = पतला तथा मजबूत धागा

सिद्धान्त (Theory)



चित्र 1

सरल लोलक (simple pendulum) के लिये आवर्तकाल (time period) के सूत्र $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ से

गुरुत्वीय त्वरण $$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

यदि l मीटर में तथा T सेकण्ड में हो तो g का मान मीटर/सेकण्ड^2 में ज्ञात होता है, जहाँ l सरल लोलक की प्रभावी लम्बाई है तथा T आवर्तकाल है।

प्रयोग विधि (Procedure)

(1) सर्वप्रथम वर्नियर कैलिपर्स की सहायता से गोले का व्यास ज्ञात कर उसकी त्रिज्या निकाल लेते हैं।

(2) अब धागे के एक सिरे को गोले के हुक पर बाँध देते हैं।

(3) धागे के दूसरे सिरे को कॉर्क के टुकड़ों के मध्य से निकाल कर स्टैण्ड से बाँध देते हैं।

(4) स्टैंड से गोले तक की दूरी मीटर स्केल से ज्ञात कर इसमें गोले की त्रिज्या को जोड़ देते हैं जिससे लोलक की प्रभावी लम्बाई ज्ञात हो जाती है।

(5) अब गोले की साम्यावस्था के ठीक नीचे जमीन पर चॉक से रेखा खींच देते हैं जिसे निर्देशक रेखा कहते हैं।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(6) गोले को एक तरफ हल्का-सा विस्थापित कर दोलन प्रारम्भ कर दिया जाता है। गोले के साम्यावस्था से गुजरते समय स्टॉप वाच आरम्भ कर देते हैं। कुछ नियत दोलनों की संख्या के लिये समय नोट कर लिया जाता है। ज्ञात समय को दोलनों की संख्या से भाग देने पर आवर्तकाल ज्ञात हो जाता है।

(7) यही प्रयोग धागे की लम्बाई को 10-10 सेमी घटाकर या बढ़ाकर बार-बार दोहराते हैं।

प्रेक्षण (Observation)

(1) गोले की त्रिज्या के लिए सारणी

वर्नियर कैलीपर्स का अल्पतमांक (LC) = ... सेमी

चिन्ह सहित शून्यांक त्रुटि = ... सेमी

क्रम सं०	मुख्य पैमाने का पाठ्यांक a सेमी	वर्नियर पैमाने के मिलने वाले खाने की संख्या N	वर्नियर पाठ्यांक $b = N \times LC$ सेमी	गोले का व्यास $d = a + b$ सेमी	गोले का संशोधित व्यास $d \pm$ शून्यांक त्रुटि सेमी	माध्य व्यास d सेमी	गोले की त्रिज्या $r = \frac{d}{2}$ सेमी
1.							
2.							
3.							

प्रभावी लम्बाई (Effective length) व आवर्तकाल (Time Period) के लिए सारणी

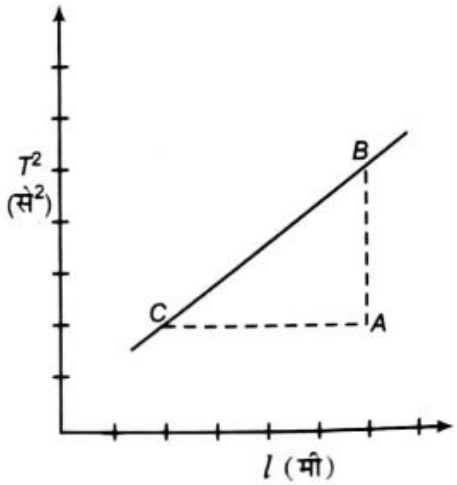
क्रम सं०	धागे की लम्बाई हुक सहित L मी	प्रभावी लम्बाई $l = L + r$ मी	दोलनों का समय t से	आवर्तकाल (T) $T = \frac{t}{N}$ से	T^2 से^{2}	$\frac{l}{T^2}$ मी/से^{2}
1.						
2.						
3.						

गणना (Calculation)

प्रभावी लम्बाई (l) तथा आवर्तकाल के वर्ग (T^2) के मध्य खींचा ग्राफ चित्र-2 की भाँति प्राप्त होता है। अत: ग्राफ से

$$\frac{l}{T^2} = \frac{CA}{AB}$$

अत: गुरुत्वीय त्वरण $g = 4\pi^2\left(\frac{CA}{AB}\right)$ मीटर/सेकेण्ड^2



चित्र 2

प्रतिशत त्रुटि (Percentange Error)

गुरुत्वीय त्वरण का प्रामाणिक मान 9·81 मीटर/सेकण्ड^2 होता है।

अत: प्रायोगिक प्रतिशत त्रुटि $= \frac{\text{प्रामाणिक मान} \sim \text{प्रायोगिक मान}}{\text{प्रामाणिक मान}} \times 100$

$= .....\%$

परिणाम (Result)

प्रयोगशाला में सरल लोलक द्वारा गुरुत्वीय त्वरण (g) का मान ..... मीटर/सेकण्ड^2 प्राप्त हुआ। प्रयोग में ..... % प्रायोगिक प्रतिशत त्रुटि है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

सावधानियाँ (Precautions)

(1) प्रयोग शांत हवा में करना चाहिये।
(2) दोलनों की गिनती साम्यावस्था से आरंभ करनी चाहिये।
(3) धागा मजबूत (inextensible) तथा पतला होना चाहिये।
(4) दोलनों के आयाम अधिक नहीं होने चाहियें।
(5) वर्नियर कैलिपर्स तथा स्टॉप वाच की शून्य त्रुटि का ध्यान रखना चाहिये।

मौखिक प्रश्न

1. गुरुत्वीय त्वरण से क्या तात्पर्य है?
2. C.G.S. पद्धति में g का मान कितना होता है? [उत्तर : $981 cm/s^2$]
3. 'g' तथा 'G' के मध्य क्या सम्बन्ध होता है? [उत्तर : $g=\frac{GM}{R^2}$]
4. 'g' का विमीय सूत्र बताइये। [उत्तर : LT^{-2}]
5. पृथ्वी की सतह पर 'g' के मान पर क्या प्रभाव पड़ेगा, यदि आप विषुवत् रेखा से ध्रुव की ओर जा रहे हैं? [उत्तर : बढ़ता है]
6. पृथ्वी की सतह से ऊपर जाने पर 'g' के मान में क्या परिवर्तन होता है? [उत्तर : घटता है]
7. पृथ्वी की सतह से नीचे जाने पर 'g' के मान में क्या परिवर्तन होता है? [उत्तर : घटता है]
8. पृथ्वी के केन्द्र पर 'g' का मान कितना होता है? [उत्तर : शून्य]
9. सरल लोलक की गति किस प्रकार की होती है? [उत्तर : SHM]
10. डोरी की लम्बाई बढ़ाने पर आवर्तकाल बढ़ता है। यदि डोरी की लम्बाई अनन्त कर दी जाये तो क्या आवर्तकाल भी अनन्त हो जायेगा? यदि नहीं, तो कितना हो जायेगा? [उत्तर : नहीं, 5075 सेकण्ड]
11. 'सेकेंड पैन्डुलम' किसे कहते हैं? [उत्तर : जिसका आवर्तकाल $T=2 s2$ हो]
12. a त्वरण से ऊपर जाती हुई लिफ्ट में लोलक का दोलन कराने पर आवर्तकाल पर क्या प्रभाव पड़ेगा? [उत्तर : घट जायेगा]
13. एक समान गति से नीचे आती हुई लिफ्ट में दोलन काल पर क्या प्रभाव पड़ेगा? [उत्तर : कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा]
14. डोरी की लम्बाई चार गुनी कर देने पर आवर्तकाल का मान क्या होगा? [उत्तर : दो गुना]
15. दोलनों का आयाम धीरे-धीरे घटने लगता है। क्यों? [उत्तर : घर्षण इत्यादि कारणों से]
16. यदि निर्वात में दोलन कराया जाये तो दोलनों के आयाम पर क्या प्रभाव पड़ेगा? [उत्तर : दोलनों का आयाम नियत रहेगा]
17. अवमन्दित दोलनों के आयाम के लिये सूत्र बताइये। [उत्तर : $a=a_0e^{-bt/2m}$]
18. एक पेन्डुलम घड़ी पहाड़ों पर ..... हो जाती है। (सुस्त/तेज) [उत्तर : सुस्त]
19. सर्दी की अपेक्षा गर्मी में पेन्डुलम घड़ी ..... हो जाती है। (सुस्त/तेज) [उत्तर : सुस्त]
20. क्या सरल लोलक का आवर्तकाल का सूत्र बड़े आयामों के लिये भी सत्य है? [उत्तर : नहीं]
21. एक मीटर लम्बी डोरी से 12 kg द्रव्यमान का दोलन कराने पर आवर्तकाल क्या होगा? [उत्तर : 2 s]
22. एक मीटर लम्बी डोरी से 49 kg द्रव्यमान का दोलन कराने पर आवर्तकाल क्या होगा? [उत्तर : 2 s]
23. किसी खोखली गेंद में पानी भर कर दोलन कराया जाता है। यदि गेंद की तली पर एक छोटा छिद्र कर दिया जाये तो दोलन के आवर्तकाल पर क्या प्रभाव पड़ेगा? [उत्तर : पहले बढ़ेगा फिर वही हो जायेगा]

AYC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

24. क्या अंतरिक्ष यान के भीतर दोलन हो सकते हैं? [उत्तर : नहीं]

25. एक सरल लोलक का दोलन विषुवत् वृत्त तथा ध्रुव पर कराया जाता है। कहाँ पर आवर्तकाल अधिक होगा? [उत्तर : विषुवत वृत्त पर]

26. मुक्त रूप से गिरती हुई लिफ्ट में सरल लोलक के दोलनों पर क्या प्रभाव पड़ेगा? [उत्तर : दोलन नहीं होंगे]

27. आवर्तकाल निकालने के लिये अधिकतम दोलनों का समय क्यों लिया जाता है? [उत्तर : प्रतिशत त्रुटि न्यूनतम रखने के लिये]

28. निर्वात में 1 kg स्टील की गेंद तथा 1 kg प्लास्टिक की गेंद को समान लम्बाई की डोरियों से बाँध कर दोलन कराया जाता है। किसका दोलनकाल अधिक होगा व क्यों?
[उत्तर : प्लास्टिक, घनत्व कम होने के कारण प्लास्टिक की गेंद का आकार बड़ा होगा, जिससे प्रभावी लम्बाई अधिक होगी]

29. किसी सरल लोलक को द्रव में डुबो देने पर आवर्तकाल पर क्या प्रभाव पड़ेगा? [उत्तर : बढ़ जायेगा]

30. किसी आवेशित गोले का प्रयोग सरल लोलक के रूप में किया जाता है। दोलनकाल पर क्या प्रभाव पड़ेगा यदि क्षेत्र में क्षैतिज विद्युत क्षेत्र विद्यमान है? [उत्तर : दोलनकाल घट जायेगा]

31. पृथ्वी की घूर्णन गति रुक जाने पर किस स्थान पर गुरुत्वीय त्वरण का मान अपरिवर्तित रहेगा? [उत्तर : ध्रुव पर]

32. चन्द्रमा की सतह पर g का मान कितना होता है? [उत्तर : $g/6$]

33. चन्द्रमा की सतह पर सेकेंड पेन्डुलम की लम्बाई कितनी है? [उत्तर : 0·165 m]

34. एक लड़का झूला झूल रहा है। इसके बगल में एक अन्य लड़का आकर बैठ जाता है। झूले के आवर्तकाल पर क्या प्रभाव पड़ेगा? [उत्तर : कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा]

35. यदि दोलनकाल का मान 2 s है तो आवृत्ति का मान क्या होगा? [उत्तर : 0·5 Hz]

36. अनन्त लम्बाई के सरल लोलक का दोलन काल कितना होता है? [उत्तर : 84·6 min]

37. 'G' का मान बताइये। [उत्तर : $6{\cdot}67\times10^{-11}\ \text{N-m}^2\text{-kg}^{-2}$]

38. सरल आवर्त गति करते हुये पिण्ड की सम्पूर्ण ऊर्जा का मान बताइये। [उत्तर : $\frac{1}{2}m\omega^2a^2$]

39. सरल आवर्त गति करते हुये पिण्ड की अधिकतम गतिज ऊर्जा का मान तथा स्थिति बताइये। [उत्तर : $\frac{1}{2}m\omega^2a^2$, साम्य स्थिति पर]

40. सरल आवर्त गति करते हुये पिण्ड की अधिकतम स्थितिज ऊर्जा का मान तथा स्थिति बताइये। [उत्तर : $\frac{1}{2}m\omega^2a^2$, अधिकतम विस्थापन पर]

41. पृथ्वी के केन्द्र पर किसी सरल लोलक का आवर्तकाल कितना होता है? [उत्तर : दोलन नहीं होंगे]

42. किसी सरल लोलक की लम्बरई में 'n' गुना वृद्धि की जाती है। आवर्तकाल में कितनी वृद्धि होगी? [उत्तर : $\sqrt{n}$ गुना]

43. सरल लोलक की गति कैसी होनी चाहिये? वह गति क्या है?
[उत्तर : इसकी गति सरल आवर्ती (simple harmonic motion, S.H.M.) होनी चाहिये। वस्तु की वह रेखीय गति, जिसमें रेखीय त्वरण, वस्तु के विस्थापन के समानुपाती हो तथा सदैव मध्यमान स्थिति की ओर संकेत करे, रैखिक सरल आवर्त गति कहलाती है।]

44. प्रभावकारी लम्बाई क्या है? [उत्तर : लटकने वाले बिन्दु से गोले के केन्द्र तक की दूरी]

45. गोलक गोल ही क्यों लेते हैं?
[उत्तर : जिससे हवा के प्रतिरोध का कोई प्रभाव न पड़े]

❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

प्रयोग संख्या-3
(EXPERIMENT No. 3)

दिनांक ..... पृष्ठ संख्या .....

उद्देश्य (Object)

गोलाईमापी की सहायता से (i) उत्तल दर्पण एवं (ii) अवतल दर्पण की वक्रता त्रिज्या ज्ञात करना।

आवश्यक उपकरण (Apparatus)

गोलाईमापी, घिसे हुए काँच की एक समतल प्लेट तथा एक उत्तल दर्पण तथा एक अवतल दर्पण।

उपकरण का वर्णन

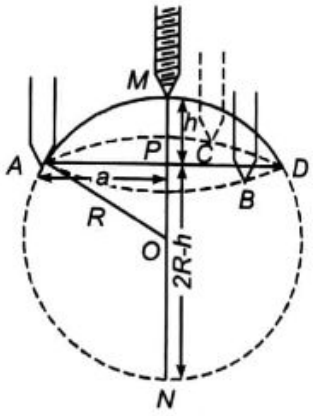
गोलाईमापी की रचना।

सिद्धान्त (Theory)

किसी गोलीय तल की वक्रता त्रिज्या उस गोले की त्रिज्या के बराबर होती है जिसमें से काटकर वह गोला बनाया गया है। यदि गोलाईमापी की तीनों टाँगें किसी समबाहु त्रिभुज के शीर्ष पर पड़ती हैं, तथा बीच का पेंच इस त्रिभुज की माध्यिकाओं (medians) के कटान बिन्दु पर पड़ता है, तो दिए हुए गोलीय तल की वक्रता-त्रिज्या

$$R = \frac{l^2}{6h} + \frac{h}{2}$$

जहाँ l गोलाईमापी की स्थिर टाँगों के बीच की मध्यमान दूरी है, तथा h गोलीय तल की गहराई (यदि तल अवतल है) अथवा ऊँचाई (यदि तल उत्तल) है।



चित्र 1

वक्रता त्रिज्या ज्ञात करने के लिये गोलाईमापी की तीनों टाँगों को गोलीय धरातल पर रख देते हैं व मध्यवर्ती पेंच को इतना घुमाते हैं कि उसकी नोक तल को ठीक स्पर्श करने लगे। यन्त्र का पाठ उचित चिन्ह् सहित पढ़ लिया जाता है। माना इस पाठ्यांक और शून्यांक त्रुटि का अन्तर h है, अर्थात् दूरी h समतल से उभरे हुए तल तक की ऊँचाई है। चित्र-1 में गोलाईमापी का एक उत्तल गोलीय तल पर समंजन दिखाया गया है। चित्र में O उस गोले का केन्द्र है जिसमें से दिये गये गोलीय तल को काटा गया है। माना R गोले की वक्रता त्रिज्या है। यदि गोलाईमापी की मध्यवर्ती और बाहरी टाँग के बीच की दूरी $AP = a$ हो, तो स्पष्ट है कि

$$(OA)^2 = (AP)^2 + (PO)^2$$

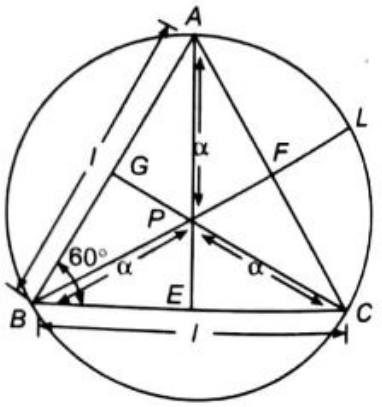
अथवा $$R^2 = a^2 + (R-h)^2 = a^2 + R^2 + h^2 - 2Rh$$

अथवा $$2Rh = a^2 + h^2$$

अथवा $$R = \frac{a^2}{2h} + \frac{h}{2} \quad \ldots(1)$$

उपरोक्त सूत्र द्वारा गोलीय तल की वक्रता त्रिज्या ज्ञात की जा सकती है। यदि गोलाईमापी की किन्हीं दो बाहरी टाँगों के बीच की दूरी l हो तो $AB = BC = CA = l$

चित्र-2 में A, B, C और P क्रमश: गोलाईमापी की तीनों बाहरी टांगों और मध्यवर्ती पेंच की नोकों की सापेक्ष स्थितियाँ हैं। P त्रिभुज ABC की मध्यगत रेखाओं का कटाना बिन्दु है। अत:



चित्र 2

$$AP = \frac{2}{3} AE$$

$$= \frac{2}{3} l \sin 60^\circ = \frac{2}{3} l \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because \Delta ABC \text{ समत्रिबाहु त्रिभुज है।})$$

$$\therefore \quad a = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

समीकरण (1) में a का मान रखने पर

$$R = \frac{l^2}{6h} + \frac{h}{2}$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

उपरोक्त सूत्र में l और h का मान रखने पर R के मान का परिकलन किया जा सकता है।

प्रयोग विधि (Procedure)

(1) सबसे पहले गोलाईमापी का चूड़ी अन्तराल ज्ञात करते हैं। इसके लिये वृत्ताकार पैमाने को चार पूरे चक्कर घुमाते हैं। इस क्रिया में मुख्य पैमाने पर चली गई दूरी को चार से भाग कर देते हैं। यह चूड़ी अन्तराल है।

(2) वृत्ताकार पैमाने पर अंकित कुल चिन्हों की संख्या में चूड़ी अन्तराल को भाग देने पर अल्पतमांक ज्ञात हो जाता है।

(3) अब गोलाईमापी को काँच की समतल प्लेट पर रखकर बीच के पेंच को इतना घुमाते हैं कि वह प्लेट को ठीक स्पर्श करने लगे। इस समय मुख्य पैमाने और वृत्ताकार पैमाने पर पाठ्यांक ले लेते हैं। इस स्थिति के पूर्ण पाठ्यांक को यन्त्र की 'शून्यांक त्रुटि' कहते हैं। इस प्रक्रिया को कई बार दोहरा कर शून्यांक त्रुटि का मध्यमान उचित चिन्हों के साथ ज्ञात कर लेते हैं।

(4) अब गोलाईमापी को दिये हुये गोलीय तल पर इस प्रकार रखते हैं कि यन्त्र की तीनों टाँगें इस पर ही रहें। इसके पश्चात् बीच के पेंच को इतना घुमाते हैं कि उसकी नोंक गोलीय तल को 'ठीक' स्पर्श करने लगे। ठीक स्पर्श की स्थिति में मुख्य पैमाने पर और वृत्ताकार पैमाने पर माप पढ़ लेते हैं।

(5) द्वितीय पाठ्यांक में से प्रथम पाठ्यांक घटा देते हैं। इस प्रकार h का मान ज्ञात हो जाता है।

(6) अब गोलाईमापी की तीनों टाँगों को प्रायोगिक पुस्तिका पर हल्का-सा दबा देते हैं। कागज पर तीन चिन्ह A, B, C बन जाते हैं, जिन्हें मिलाने पर एक समत्रिबाहु ΔABC बन जाता है। त्रिभुज की तीनों भुजाओं AB, BC, और CA की लम्बाइयों को जोड़कर तीन से भाग कर देते हैं। इस प्रकार l का मान ज्ञात हो जाता है।

(7) अन्त में सूत्र में h और l का मान रखकर परिकलन द्वारा R का मान ज्ञात कर लेते हैं।

प्रेक्षण (Observation)

(1) अल्पतमांक के लिये—

गोलाईमापी के पेंच का चूड़ी अन्तराल = ... सेमी

वृत्ताकार पैमाने पर अंकित चिन्हों की संख्या = ...

$$\text{गोलाईमापी की अल्पतमांक} = \frac{\text{चूड़ी अन्तराल}}{\text{चकती पर चिन्हो की संख्या}} = \text{.....} \text{ सेमी}$$

(2) काँच की समतल प्लेट पर पाठ्यांक के लिये सारणी (शून्यांक त्रुटि के लिये) :

क्रम संख्या	मुख्य पैमाने की माप (सेमी)	वृत्ताकार पैमाने पर माप		पूर्ण पाठ्यांक (सेमी)	माध्य पाठ्यांक (सेमी)
		मिलने वाले चिन्ह की संख्या	मान (सेमी)		
1.					
2.					
3.					चिन्ह सहित
4.					

(3) गोलीय तल पर पाठ्यांक के लिए सारणी (h के लिए) :

क्रम संख्या	मुख्य पैमाने की माप (सेमी)	वृत्ताकार पैमाने पर माप		पूर्ण पाठ्यांक (सेमी)	माध्य पाठ्यांक (सेमी)
		मिलने वाले चिन्ह की संख्या	मान (सेमी)		
1.					
2.					
3.					चिन्ह सहित
4					

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(4) गोलाईमापी की टाँगों के बीच की दूरी—

AB =..... सेमी।

BC =..... सेमी।

CA =..... सेमी।

परिकलन (Calculation)

(अ) गोलीय तल की ऊँचाई

h = वक्र तल पर पाठ्यांक – समतल प्लेट पर पाठ्यांक

=(.....)–(.....) सेमी

=..... सेमी

(ब) दो टाँगों के बीच की माध्य दूरी

$$l = \frac{AB + BC + CA}{3} = \text{..... सेमी।}$$

(स) गोलीय तल की वक्रता त्रिज्या

$$R = \frac{l^2}{6h} + \frac{h}{2} = \text{..... सेमी।}$$

परिणाम (Result)

दिये हुये गोलीय तल की वक्रता त्रिज्या =..... सेमी

सावधानियाँ (Precautions)

(1) प्रयोग करने से पहले घिसे हुये काँच की समतल प्लेट की और प्रायोगिक प्लेट को अच्छी तरह से साफ कर लेना चाहिये।

(2) माप लेते समय पेंच की नोंक, प्लेट अथवा गोलीय तल को 'ठीक' स्पर्श करनी चाहिये। इस स्थिति में पेंच की नेंक प्लेट में बने अपने प्रतिबिम्ब की नोंक को ठीक स्नर्श करेगी।

(3) काँच की समतल प्लेट तथा गोलीय तल पर लिये गये प्रेक्षण चिन्ह् सहित लिखने चाहियें।

(4) शून्यांक त्रुटि की माप चिन्ह् सहित लेकर मुख्य माप में से बीजगणितीय रीति से घटा देना चाहिये।

(5) ऋणात्मक दिशा में वृत्ताकार पैमाने के मिलने वाले भाग को कुल अंकित भाग में से घटाकर अल्पतमांक से गुणा करना चाहिये।

(6) माप उसी समय लेना चाहिये जबकि पेंच प्लेट से ठीक स्पर्श की स्थिति में हो। अर्थात्, पेंच की नोंक प्लेट में अपने प्रतिबिम्ब की नोंक को ठीक स्पर्श करे।

(7) पेंच को एक ही दिशा में घुमाना चाहिये जिससे पिच्छट त्रुटि दूर हो जाये।

(8) प्लेट पर प्रेक्षण, पेंच को विभिन्न स्थानों पर स्पर्श कराकर लेने चाहिये (हो सकता है तल ठीक से गोलीय न हो) तथा बाद में माध्य ज्ञात करना चाहिये।

(9) l का मान ज्ञात करने के लिये बने हुये त्रिभुज की दोनों भुजाओं का माध्य ज्ञात करना चाहिये क्योंकि कुछ यन्त्रों में त्रिभुज समत्रिबाहु नहीं रह जाता है। l का मान यथार्थता से मापना चाहिये क्योंकि परिकलन में l का वर्ग आता है।

(10) l और h के मान एक ही मात्रक में होने चाहिये।

(11) मुख्य पैमाना ऊर्ध्वाधर रहना चाहिये, तिरछा नहीं।

(12) मुख्य पैमाने का प्रेक्षण लेते समय आँख को गोल पैमाने की परिधि के तल में रखना चाहिये। यदि ऐसा न किया गया तो प्रेक्षण में त्रुटि आ सकती है।

सम्भावित त्रुटियाँ

(1) यह हो सकता है कि पेंच की चूड़ियों के बीच की दूरी बराबर न हो। इससे चूड़ी अन्तराल का मान स्थिर नहीं होगा तथा परिणाम मे त्रुटि हो जायेगी।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(2) अधिक प्रयोग से पेंच की चूड़ियाँ घिस सकती हैं जिससे पेंच ढीला हो जायेगा और वृत्ताकार पैमाना एक ओर झुक जायेगा। इस कारण प्रेक्षण में त्रुटि हो सकती है।

(3) प्रेक्षण लेते समय पेंच की नोंक ठीक स्पर्श स्थिति में नहीं हो सकती।

(4) कमरे का ताप भी बदल सकता है, जिससे प्रेक्षण में त्रुटि होने की सम्भवना बनी रहती है।

(5) यह हो सकता है कि गोलाईमापी की तीनों टाँगें एक समत्रिबाहु त्रिभुज न बनाती हों तथा पेंच की नोंक उस त्रिभुज की माध्यिकाओं के कटान बिन्दु पर न हों, तो दिया गया सूत्र नहीं लगाया जा सकता।

विवेचना

गोलाईमापी से समतल की वक्रता त्रिज्या ज्ञात करने के सूत्र में l वर्ग के रूप में होता है तथा h का मान भी बहुत कम है। अत: प्रेक्षण लेते समय बहुत सावधानी बरतनी चाहिये। यदि प्रेक्षण में तनिक-सी भी त्रुटि रह जाती है तो वक्रता त्रिज्या R के मान में बहुत अधिक त्रुटि आ जाती हैं।

मौखिक प्रश्न

1. गोलाईमापी का क्या सिद्धान्त है?
[**उत्तर :** यह पेंच के सिद्धान्त पर कार्य करता है।]

2. गोलाईमापी के पिच तथा अल्पतमांक से तुम क्या समझते हो?
[**उत्तर :** पिच या चूड़ी अन्तराल वृत्ताकार पैमाने के पूरा एक चक्कर घूमाने में रेखीय पैमाने पर चली दूरी के तुल्य होता है। यह दो क्रमागत चूड़ियों के बीच की लम्बावत् दूरी होती है।
अल्पतमांक—यह वह छोटी से छोटी दूरी है जिसे गोलाईमापी शुद्धतापूर्वक माप सकता है।]

3. इसे गोलाईमापी क्यों कहते हैं?
[**उत्तर :** क्योंकि इसका प्रयोग किसी गोले अथवा उसके किसी भाग की वक्रता त्रिज्या ज्ञात करने में होता है।]

4. अच्छे गोलाईमापी में क्या विशेषतायें होनी चाहिये?
[**उत्तर : विशेषतायें**—(अ) वृत्तीय चकती का घूर्णन तल पेंच की अक्ष के पूर्णतया लम्बवत् होना चाहिये। (ब) पेंच की अक्ष तीनों टांगों A, B, C से बने सम्बाहु त्रिभुज के तल के पूर्णतया लम्बवत् होनी चाहिये और पेंच की नीचे की नोंक इस त्रिभुज के केन्द्र पर होनी चाहिये। (स) रैखिक पैमाने की लम्बाई पेंच को गति की दिशा में समान्तर रहनी चाहिये।]

5. पिच्छट त्रुटि किसे कहते हैं?
[**उत्तर :** पेंच की चूड़ियों के घिसने के कारण पेंच को जब एक ही दिशा में घुमाते-घुमाते उल्टा घुमाते हैं तो डिबरी के कुछ घूम लेने के पश्चात् ही पेंच पीछे लौटना प्रारम्भ करता है। इसके कारण पाठ्यांक में होने वाली त्रुटि को पिच्छट त्रुटि कहते हैं।]

6. इसे दूर करने के लिये क्या सावधानी बरती जाती है?
[**उत्तर :** सावधानी—पेंच को सदैव एक ही दिशा में घुमाना चाहिये और यदि पीछे घुमाना पड़े, तो थोड़ा अधिक पीछे घुमाना चाहिये।]

7. वक्रता और वक्रता त्रिज्या में क्या अन्तर हैं?
[**उत्तर :** वक्रता त्रिज्या का व्युत्क्रम, तल की वक्रता कहलाता है।]

8. किसी समतल सतह की वक्रता त्रिज्या कितनी होती है और क्यों?
[**उत्तर :** समतल सतह की वक्रता त्रिज्या अनन्त होती है क्योंकि समतल सतह की वक्रता शून्य होती है।]

9. क्या गोलाईमापी की सहायता से यह जाँच की जा सकती है, कि कोई तल एक-समान है?
[**उत्तर :** हाँ, यदि कोई गोलाईमापी का पाठ्यांक तल के विभिन्न भागों पर समान आता है, तो वह तल एक समान है अन्यथा नहीं।]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

10. गोलाईमापी से लेंस की फोकस दूरी कैसे निकालते हैं?

[उत्तर : लेंस की फोकस-दूरी का मान निम्न सूत्र से प्राप्त होता है—

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

इस प्रकार यदि अपवर्तनांक n का मान ज्ञात हो, तो गोलाईमापी की सहायता से R_1 एवं R_2 के मान ज्ञात करके लेंस की फोकस-दूरी ज्ञात की जा सकती है।]

11. क्या गोलाईमापी से पृथ्वी की वक्रता-त्रिज्या माप सकते हैं?

[उत्तर : नहीं, क्योंकि पृथ्वी की वक्रता-त्रिज्या इतनी अधिक है कि गोलाईमापी के नीचे पृथ्वी की सतह समतल होगी और h का मान शून्य आयेगा।]

12. किसी वाच ग्लास की मोटाई कैसे ज्ञात करोगे?

[उत्तर : वाच ग्लास के दोनों तलों की वक्रता-त्रिज्या निकालकर उनका अन्तर ज्ञात कर लेंगे। यही वाच ग्लास की मोटाई होगी।]

13. गोलाईमापी का उपयोग दूसरे किन उपकरणों में किया जाता है?

[उत्तर : यंग प्रत्यास्थता गुणांक ज्ञात करने के उपकरण में, रेखीय प्रसार गुणांक ज्ञात करने के उपकरण में, चश्में का पावर ज्ञात करने के यन्त्र 'डायोप्टर मीटर' में।]

14. गोलाईमापी का उपयोग दूसरे किन प्रयोगों में किया जाता है?

[उत्तर : अन्य प्रयोग—(1) उत्तल और अवतल दर्पण की फोकस दूरी ज्ञात करना। (2) उत्तल और अवतल लेंस की फोकस दूरी ज्ञात करना। (3) किसी ठोस गोले का घनत्व ज्ञात करना।]

15. गोलाईमापी में तीन टाँगें ही क्यों होती हैं?

[उत्तर : क्योंकि किसी भी तल को कम से कम तीन बिन्दुओं द्वारा निर्धारित किया जा सकता है जो एक ही रेखा में न हों।]

16. क्या यह आवश्यक है कि तीनों टाँगों के बीच की दूरी बराबर हो, क्यों?

[उत्तर : हाँ! अन्यथा $R=\frac{l^2}{6h}+\frac{h}{2}$ सूत्र का उपयोग नहीं कर सकते।]

17. दो वक्र तलों में एक के लिये $h=0\cdot015$ सेमी तथा दूसरे के लिये $h=0\cdot025$ सेमी है तो बताओं कौन से तल की वक्रता-त्रिज्या अधिक है?

[उत्तर : पहले तल की वक्रता-त्रिज्या अधिक है।]

❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

प्रयोग संख्या-4
(EXPERIMENT No.4)

दिनांक ..... पृष्ठ संख्या .....

उद्देश्य (Object)

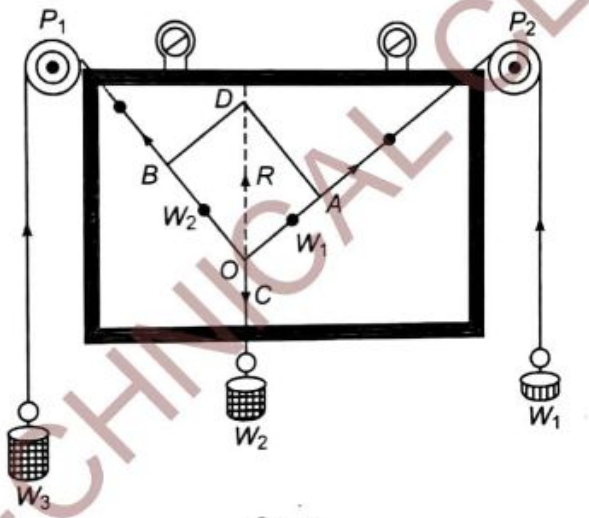
बलों के समान्तर चतुर्भुज के नियम का सत्यापन करना।

आवश्यक उपकरण (Apparatus)

नियम सत्यापन करने वाला उपकरण (ग्रीव सेंड का उपकरण), सफेद कागज, बाट, ज्यामितीय बक्स, समतल दर्पण की पट्टी इत्यादि।

उपकरण का विवरण (Description of Apparatus)

चित्र में बलों के समान्तर चतुर्भुज के नियम का सत्यापन करने के लिये उपयुक्त उपकरण दिखाया गया है। इसमें लकड़ी का एक ऊर्ध्वाधर बोर्ड होता है जिसके दोनों कोनों पर दो घर्षण रहित घिरनियाँ (pulleys) P_1 और P_2 लगी रहती हैं। तीन पतले धागों को एक बिन्दु O पर बांध कर चित्र में दिखाई गई विधि से घिरनियों पर लगा देते हैं और उनके दूसरे सिरों पर तीन पलड़े W_1, W_2 और W_3 लटका देते हैं। इस बोर्ड को दीवार पर ऊर्ध्वाधर लटका देते हैं।



चित्र 1

सिद्धान्त (Theory)

बलो के समान्तर चतुर्भुज नियम के अनुसार, यदि बिन्दु O पर एक साथ लगे हुये बलों W_1 और W_2 परिमाण और दिशा में समान्तर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाओं OA और OB से प्रदर्शित जायें, तो उनका परिणामी बल R परिमाण और दिशा में दोनों आसन्न भुजाओं के कटान बिन्दु O से जाने वाले विकर्ण OD से प्रदर्शित होगा। यदि OA और OB के बीच का कोण α हो, तो परिणामी बल

$$R = \sqrt{(W_1^2 + W_2^2 + 2W_1W_2\cos\alpha)}$$

प्रयोग विधि (Procedure)

(1) सबसे पहले उपकरण की घिरनियों को घर्षण रहित कर लेते हैं तथा एक सफेद कागज को मोम अथवा चार पिनों की सहायता से बोर्ड पर डोरी के पीछे चिपका देते हैं।

(2) अब तीनों पलड़ों पर इतने बाट रखते हैं कि उनका मिलान बिन्दु कागज के लगभग बीच में पड़े। यदि बीच वाले पलड़े को नीचे की ओर खींचकर छोड़ देने से मिलान बिन्दु उसी स्थान पर आ जाता है, तो सन्तुलन ठीक है और घिरनियों में घर्षण नगण्य है। यदि मिलान बिन्दु प्रत्येक बार छोड़ने से एक ही बिन्दु (स्थान पर नहीं ठहरता है, तो घिरनियों में घर्षण अधिक है; तब घिरनियों में तेल डालकर घर्षण कम कर लेते हैं।

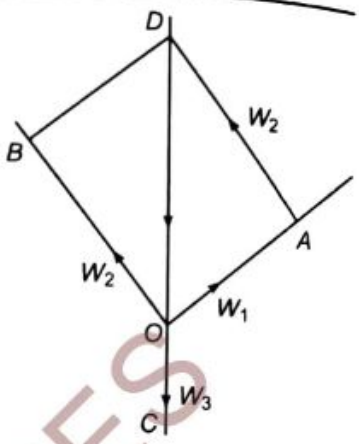
AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(3) समतल दर्पण की पट्टी को डोरी के नीचे लम्बवत् रखकर आँख को इस स्थिति मे लाते हैं कि डोरी और उनका प्रतिबिम्ब एक दूसरे के ऊपर आ जाये। इस समय घर्षण में डोरी के प्रतिबिम्ब के दोनों सिरों पर दो बिन्दु अंकित कर लेते है। इसी प्रकार प्रत्येक डोरी के नीचे दो बिन्दु लगा देते हैं।

(4) तीनों पलड़ों पर लटकाये गये बाटों को पलड़े सहित जोड़कर W_1, W_2 और W_3 का मान ज्ञात कर लेते है।

(5) अब कागज को बोर्ड पर से हटाकर बिन्दुओं को मिलाकर आगे बढ़ाते हैं। ये तीनों रेखायें एक बिन्दु O पर मिलती हैं। उन तीनो रेखाओं पर बल की दिशा दिखाने के लिये तीर के चिन्ह लगा देते हैं। (चित्र-2)



चित्र 2

(6) इसके पश्चात् एक उचित पैमाना (जैसे 10 ग्राम = 1 सेमी) मान लेते हैं। OA रेखा भार W_1 के तुल्य और OB रेखा भार W_2 के तुल्य काट लेते हैं। OA और OB के समान्तर रेखायें खींचकर समान्तर चतुर्भुज $OADB$ को पूरा कर लेते हैं। O से D को मिलाकर विकर्ण OD की लम्बाई का तुल्य भार W_3' ज्ञात कर लेते हैं।

(7) अब इस तुल्य भार W_1' और तीसरे भार W_3 की तुलना करते हैं। हम देखते हैं कि दोनों का मान बराबर है, किन्तु दिशा विपरीत है, इससे नियम का सत्यापन हो जाता है। अब CO को पीछे की ओर बढ़ाते हैं, तो यह विकर्ण OD के ऊपर ही पड़ता है, परन्तु कभी-कभी थोड़ा-सा हट जाता है। यह अन्तर प्रायोगिक त्रुटि के कारण होता है। इस कोण का मान जितना कम होता है त्रुटिरहित होता है।

प्रेक्षण (Observation)

पैमाना ..... ग्राम भार =1 सेमी

क्रम सं०	OA दिशा में लगा भार (पलड़ा + बाट) W_1 (ग्राम)	OB दिशा में लगा भार (पलड़ा + बाट) W_2 (ग्राम)	OC दिशा में लगा भार (पलड़ा + बाट) W_3 (ग्राम)	भार के अनुपात में लम्बाई			परिणामी बल के तुल्य भार W_3' (ग्राम)	परिणामी बल तथा तुल्य बल में अन्तर	
				OA (सेमी)	OB (सेमी)	OD (सेमी)		मान में (ग्राम भार)	दिशा में (डिग्री)
1.									
2.									
3.									
4.									

परिणाम (Result)

सारणी के अन्तिम दो स्तम्भों को देखने से पता चलता है कि प्रायोगिक परिणामी बल W_3 और समान्तर चतुर्भुज के नियम से प्राप्त परिणामी बल W_3' का मान प्रायोगिक त्रुटियों की सीमा के भीतर लगभग समान आता है। अत: बलों के समान्तर चतुर्भुज का नियम सत्य है।

सावधानियाँ

(1) घिरनियाँ हल्की तथा घर्षण रहित होनी चाहिये।
(2) बोर्ड ऊर्ध्वाधर होना चाहिये तथा घिरनियों पर लटका धागा हल्का, बारीक और गाँठ रहित होना चाहिए।
(3) पलड़े तथा धागे बोर्ड को नहीं छूने चाहिये।
(4) पैमाना ऐसा मानना चाहिये कि समान्तर चतुर्भुज बन सके।
(5) भार ज्ञात करते समय पलड़ों का भार भी जोड़ना चाहिये।
(6) सन्तुलन की जाँच करने के पश्चात् ही कागज पर बिन्दु अंकित करने चाहिये।
(7) बलों की दिशाओं को कागज पर अंकित करते समय धागा तथा उसका प्रतिबिम्ब ठीक एक-दूसरे के ऊपर आ जाने पर ही कागज पर बिन्दु अंकित करने चाहिये।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

सम्भावित त्रुटियाँ

(1) घिरनियों में घर्षण के कारण लगाये गये बल का कुछ भाग खर्च हो जाता है।

(2) धागा भारहीन नहीं हो सकता।

(3) धागों के नीचे बिन्दु अंकित करते समय कुछ त्रुटि रह सकती है।

(4) बाटों के परिमाण में भी अन्तर हो सकता है।

विवेचना—इस प्रयोग में परिणाम का ठीक न आना घिरनियों के घर्षण पर निर्भर करता है। यह घर्षण कुछ न कुछ रहता अवश्य है। यद्यपि इसे स्नेहक (lubricant) लगाकर कम किया जा सकता है। इस घर्षण बल के कारण लगाये गये बल का मान कम हो जाता है जिसका संशोधन नहीं किया जाता है। फलस्वरूप परिणाम में थोड़ी-बहुत त्रुटि अवश्य रह जाती है। हल्की घिरनियों के प्रयोग से भी परिणाम की शुद्धता बढ़ायी जा सकती है।

मौखिक प्रश्न

1. अदिश और सदिश राशियों में क्या अन्तर हैं?
[**उत्तर** : अदिश राशि में केवल परिमाण होता है, जबकि सदिश राशि में परिमाण एवं दिशा दोनों ही होते हैं।]

2. बल से क्या समझते हो?
[**उत्तर** : बल वह बाह्य कारक है, जो किसी वस्तु की गति अवस्था को बदल देता है या बदलने का प्रयत्न करता है।]

3. बल का क्या मात्रक है?
[**उत्तर** : बल का मात्रक 'न्यूटन' है।]

4. बल की विमा बताओ।
[**उत्तर** : MLT^{-2}]

5. न्यूटन किस राशि का मात्रक है?
[**उत्तर** : सदिश राशि बल का।]

6. एक न्यूटन में कितने डाइन होते हैं?
[**उत्तर** : 1 न्यूटन $=10^5$ डाइन।]

7. बल के निरपेक्ष एवं गुरुत्वीय मात्रक से क्या समझते हो? इनमें क्या सम्बन्ध होता है?
[**उत्तर** : बल का निरपेक्ष (absolute) मात्रक न्यूटन है तथा गुरुत्वीय (gravitational) मात्रक ग्राम-भार अथवा किग्रा-भार है। 1 किग्रा $=9{\cdot}8$ न्यूटन बल]

8. बल को प्रदर्शित करने के लिये किन बातों की आवश्यकता होती है?
[**उत्तर** : तीन बातों की आवश्यकता होती है—(अ) वह बिन्दु जहाँ पर बल लगाया जाता है, (ब) बल का परिमाण और (स) बल की दिशा।]

9. समान्तर चतुर्भुज के बल के नियम का उल्लेख करो।
[**उत्तर** : यदि किसी बिन्दु पर एक साथ लगे हुए दो बलों को, परिमाण व दिशा में, किसी समान्तर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं से प्रदर्शित करें तो उनका परिणामी बल, परिमाण और दिशा में, समान्तर चतुर्भुज के उस विकर्ण से प्रदर्शित होगा, जो दोनों भुजाओं के कटान-बिन्दु से होकर जाता है।]

10. बलों के त्रिभुज नियम क्या है?
[**उत्तर** : यदि किसी बिन्दु पर एक साथ लगे हुए तीन बलों को, परिमाण व दिशा में, किसी त्रिभुज की चक्रीय क्रम में ली गई भुजाओं द्वारा प्रदर्शित किया जा सके, तो वह बिन्दु सन्तुलन में होगा।]

11. त्रिभुज नियम के विलोम की परिभाषा दो।
[**उत्तर** : यदि किसी बिन्दु पर एक साथ लगे हुए तीन बल उस बिन्दु को सन्तुलन अवस्था में रखें, तो उन्हें एक त्रिभुज की चक्रीय क्रम में ली गई भुजाओं द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं।]

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

12. क्या ये नियम वेगों के लिए भी सत्य है?
[**उत्तर :** चूँकि वेग सदिश राशि है, अत: ये नियम वेगों के लिये भी सत्य है।]

13. घिरनियों में अधिक घर्षण होने से क्या हानि है?
[**उत्तर :** अधिक घर्षण होने से धागे में उत्पन्न तनाव लटकाये गये भार से कम होगा, जिससे परिणामी बल का मान कुछ कम हो जायेगा।]

14. यदि घिरनियों में घर्षण अधिक हो, तो इसे कैसे कम किया जा सकता है?
[**उत्तर :** बॉल बियरिंग तथा स्नेहक (lubricant) आदि का प्रयोग करके।]

15. समान्तर चतुर्भुज के नियम के सत्यापन में दो विशेष सावधानियों का वर्णन करो।
[**उत्तर :** (i) बोर्ड ऊर्ध्वाधर होना चाहिये तथा घिरनियों पर लटका धागा हल्का, बारीक और गाँठ रहित होना चाहिये, (ii) पलड़े तथा धागे बोर्ड को नहीं छूने चाहिये।]

16. बलों के त्रिभुज के नियम की सहायता से किसी पिण्ड का अज्ञात भार कैसे ज्ञात करोगे?
[**उत्तर :** जिस पिण्ड का भार ज्ञात करना होता है, उसे धागे के बीच में लटका देते हैं। फिर समान्तर चतुर्भुज अथवा त्रिभुज पूरा करके विकर्ण की लम्बाई नाप कर वस्तु का भार ज्ञात कर लेते हैं।]

17. बलों के त्रिभुज के नियम से किसी ठोस का आपेक्षिक घनत्व कैसे ज्ञात करोगे?
[**उत्तर :** पहले ठोस को बीच के धागे से लटका कर उसका वायु में भार ज्ञात कर लेते हैं। फिर उसी लटके हुए ठोस को बीकर के जल में डुबोकर त्रिभुज नियम के उपकरण से उसका जल में भार ज्ञात कर लेते हैं।]

$$\text{ठोस का आ०घ०} = \frac{\text{ठोस का वायु में भार}}{\text{जल में ठोस के भार में कमी}}$$

18. बलों के नियम का प्रयोग व्यावहारिक रूप में कहाँ देखने को मिलता है?
[**उत्तर :** क्रेन में तथा पतंग उड़ाने में।]

19. पतंग के तीनों धागों के मिलान बिन्दु पर कितने बल कार्य करते हैं?
[**उत्तर :** तीन बल कार्य करते हैं।]

20. प्रयोग में समतल दर्पण की पट्टी का काम क्या है?
[**उत्तर :** प्रतिबिम्ब की यथार्थ स्थिति ज्ञात करने में।]

21. आप कैसे बता सकते हैं कि घिरनियों में घर्षण है?
[**उत्तर :** सन्तुलन की अवस्था में किसी भार को थोड़ा नीचे खींचकर छोड़ने पर यदि वह भार अपनी पूर्व स्थिति पर न आये तो इससे विदित है कि घिरनियों में घर्षण है।]

22. क्या इस उपकरण में धागे के स्थान पर धातु का तार प्रयुक्त किया जा सकता है?
[**उत्तर :** नहीं, क्योंकि तार भारहीन नहीं होता तथा भार रखने पर लम्बाई में बढ़ता है।]

23. जब मनुष्य चलता है, तो घर्षण कहाँ लगता है?
[**उत्तर :** आगे की ओर, क्योंकि जब मनुष्य एड़ी उठाता है तो पैर का आगला भाग पीछे को खिसकाता है। अत: पैर को रोकने के लिये घर्षण बल आगे की ओर कार्य करता है।]

24. प्रयोग में धागा पतला तथा मजबूत क्यों होना चाहिए?
[**उत्तर :** पतला, इसलिये कि उसके भार का प्रयोग पर कोई प्रभाव न पड़े तथा मजबूत इसलिये कि पलड़ों व बाटों के भार को संभाल सकें।]

❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

प्रयोग संख्या-5
(EXPERIMENT No. 5)

दिनांक ..... पृष्ठ संख्या .....

उद्देश्य (Object)

अवनत तल पर नीचे लुढ़कते हुए गेंद की ऊर्जा के संरक्षण का अध्ययन करना (दो अवनत तल का प्रयोग करते हुए)

उपकरण (Apparatus)

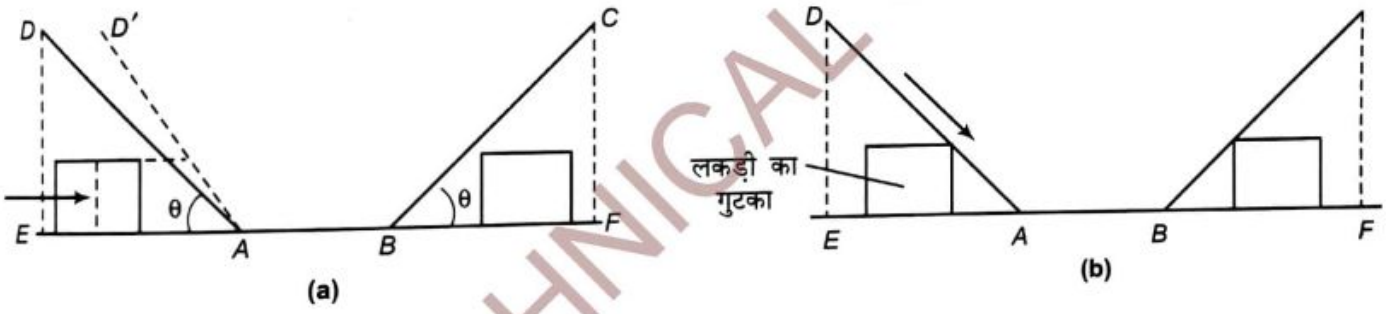
दो अवनत तल (ट्रेक), लगभग 20 cm की स्टील गेंद, दो लकड़ी के गुटके (2·5 cm लम्बाई के), 1 kg के दो भार, विराम घड़ी, साहुल रेखा, मीटर स्केल, स्प्रिट लेवल।

सिद्धान्त (Theory)

किसी अवनत तल के ऊपरी सतह पर स्थिर गेंद के पास केवल स्थितिज ऊर्जा ही होती है तथा गजित ऊर्जा शून्य होती है। जब गेंद ट्रैक पर नीचे की तरफ लुढ़कती है तो इसकी स्थितिज ऊर्जा घटती है तथा गतिज ऊर्जा बढ़ती जाती है। ट्रैक के निचले हिस्से पर गेंद के पास केवल गतिज ऊर्जा होती है तथा शून्य स्थिजित ऊर्जा होती है।

यदि उसी गेंद को दूसरी ट्रैक से ऊपर की तरफ भेजा जाए जाये तो इसकी गजित ऊर्जा घटती है तथा स्थितिज ऊर्जा बढ़ती है। जब गेंद दूसरी ट्रैक के ऊपरी हिस्से पर कहीं रूकती है तो इसके पास केवल स्थितिज ऊर्जा ही होती है तथा गजित ऊर्जा शून्य हो जाती है।

गेंद, दूसरी टैक से वापस आएगी तथा यह प्रक्रिया चलती रहेगी।



क्रियाविधि (Method)

(1) प्रयोगशाला की मेज को स्प्रिट लेवल से जाँचकर उसके सतह को क्षैतिज कर लें।

(2) द्वि-अवनत ट्रेक को मेज पर रखें तथा ट्रैक के किनारे भार को रखकर इसे स्थिर कर लें।

(3) प्रत्येक अवनत तल के नीचे लकड़ी के गुटके डाल दें। दोनों अवनत तलों के झुकाव का कोण असमान हो सकता है।

(4) स्टील की गेंद को लें तथा इसे ट्रैक-I बिन्दु D पर रखें तथा धीरे से छोड़ दें।

(5) दूसरे अवनत तल पर जहाँ तक गेंद ऊपर जाती है, बिन्दु C की स्थिति को साहुल तथा मीटर स्केल की सहायता से लिख लें।

(6) साहुल रेखा व मीटर स्केल का प्रयोग करते हुए ऊर्ध्वाधर ऊचाईयों DF तथा CE माप लें।

(7) बिन्दु D की स्थिति या कोण को परिवर्तित करें तथा क्रमांक 4, 5 व 6 को तीन बार और दुहराएँ।

(8) प्राप्त मानों को तालिका में भरें।

क्रमांक	बिन्दु की स्थिति		ऊर्ध्वाधर ऊँचाई		अन्तर
	ट्रेक-I पर D	ट्रेक--II पर C	DF	CE	$DF-CE$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

गणना (Calculation)

प्रायोगिक त्रुटि की सीमा में प्रारम्भिक व अन्तिम ऊँचाई का अन्तर समान है।

परिणाम (Result)

उपरोक्त के अनुसार, यह स्पष्ट है कि किसी निकाय (लुढ़कती गेंद) के पास प्रारम्भिक व अन्तिम स्थितिज ऊर्जा समान होती है यद्यपि कि ऊर्जा गेंद के लुढ़कने के दौरान गतिज ऊर्जा में परिवर्तित होती रहती है। अन्य शब्दों में, प्रायोगिक त्रुटि की सीमा के अन्तर्गत गेंद की स्थितिज व गतिज ऊर्जाओं का योग नियत होगा। यह सिद्ध करता है कि ऊर्जा, स्थितिज से गतिज तथा गतिज से स्थितिज में हस्तांतरित हो रही है। यह न तो उत्पन्न की जा सकती है और न ही नष्ट की जा सकती है। यह ऊर्जा के संरक्षण के नियम को सत्यापित करता है।

त्रुटियाँ एवं सावधानियाँ (Sources of Errors and Precautions)

(1) अवनत तल को सूती कपड़े या रुई द्वारा साफ करना चाहिए।

(2) दोनों ट्रैक समान ऊर्ध्वाधर तल में होने चाहिए।

(3) दूरी AB को गेंद द्वारा ट्रैक पर चली दूरी की तुलना में नगण्य मानना चाहिए।

(4) ट्रैक-II पर गेंद के बिन्दु 'C' की स्थिति को ठीक से लिखना चाहिए।

त्रुटि के स्रोत

(1) अवनत तल घर्षण-रहित नहीं हो सकता है।

(2) अवनत तल अस्थिर हो सकते हैं।

❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

प्रयोग संख्या-6
(EXPERIMENT No. 6)

दिनांक .....

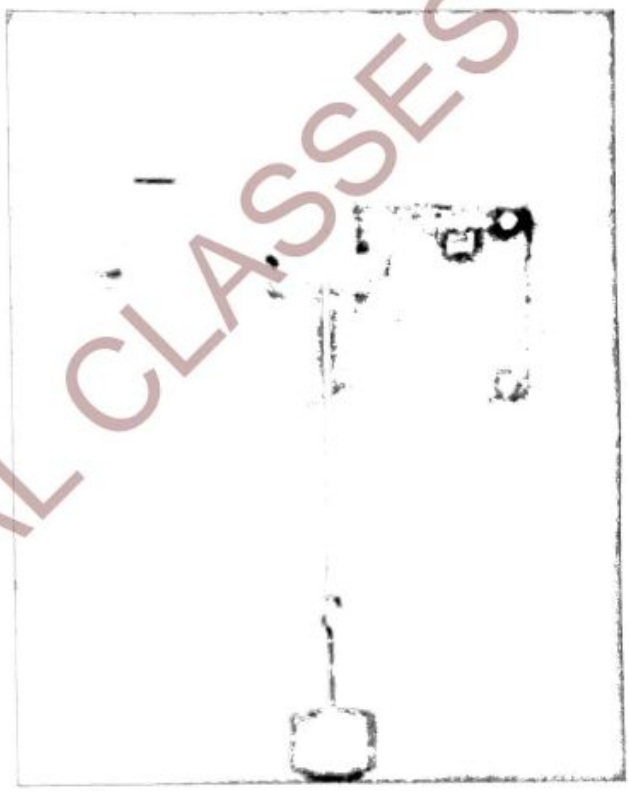
पृष्ठ संख्या .....

उद्देश्य

गतिपालक चक्र (flywheel) का उसके घूर्णन अक्ष के परित: जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना।

उपकरण (Apparatus)

गतिपालक चक्र, हैंगर के साथ कुछ ज्ञात परिमाण के द्रव्यमान, एक मजबूत पतला धागा अथवा तार, विराम घड़ी, वर्नियर कैलीपर्स मीटर-पैमाना आदि।



सूत्र (Formula used)

गतिपालक चक्र का जड़त्व-आघूर्ण निम्न सूत्र से ज्ञात करते हैं—

$$I = \frac{N}{n+N} \times m\left(\frac{2gh}{\omega^2} - r^2\right)$$

जहाँ $\omega = \frac{4\pi N}{t}$

अत: $I = \frac{mgh\,t^2}{8\pi^2 N\,(n+N)} - \frac{mr^2}{1+n/N}$

जहाँ r = धुरी की त्रिज्या

m = डोरी से लटके हैंगर सहित हैंगर पर रखे ज्ञात परिमाण का कुल द्रव्यमान

h = गतिपालक चक्र के शाफ्ट से लटके हैंगर की धरातल से ऊँचाई

n = धुरी पर लपेटे हुए धागे के फेरों की संख्या

N = द्रव्यमान से अलग होने के बाद विरामावस्था में आने तक गतिपालक चक्र के पहिए के द्वारा लगाये गये चक्करों की कुल संख्या

$t = N$ चक्कर लगाने में पहिए द्वारा लिया गया कुल समय

उपकरण का वर्णन एवं सामान्य सिद्धान्त (Experimental set-up and basic principle involved)

गतिपालक चक्र एक बड़ा तथा भारी पहिया होता है जो एक दृढ़-मजबूत फ्रेम में लम्बे बेलनाकर क्षैतिज धुरे पर लगा होता है। यह धुरा दोनों सिरों पर बहुत ही कम घर्षण वाले बियरिंग पर टिका होता है। धुरे पर एक तरफ, धागे को फंसाने के लिए महीन छेद अथवा एक कीली लगी होती है। इस छेद अथवा कील का सहारा लेकर धागे का एक सिरा धुरे पर लपेटते हैं जिसके दूसरे सिरे पर ज्ञात परिमाण के द्रव्यमान सहित हैंगर बँधा होता है जो धागे पर mg बल लगाता है।

गतिपालक चक्र को मुक्त छोड़ने पर धुरे पर लिपटा धागा खुलता जाता है तथा साथ-साथ गतिपालक चक्र का पहिया घूमना शुरू कर देता है। जैसे ही mg भार धुरे से अलग होता है यह अपना स्थितिज ऊर्जा रूपान्तरित करते हुए कुछ अंशों में हैंगर सहित द्रव्यमान को गतिज ऊर्जा प्रदान करने में तथा कुछ अंशों में गतिपालक चक्र के पहिये को घूर्णन गति प्रदान करने में व्यय होता है।

यदि धुरे से धागा अलग होते समय हैंगर सहित ज्ञात द्रव्यमान का वेग v तथा गतिपालक चक्र के पहिये का घूर्णन वेग ω हो, तो

$$v = r\omega$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

जहाँ r गतिपालक चक्र के धुरे की त्रिज्या है। यदि हैंगर सहित द्रव्यमान h ऊँचाई से धरातल पर गिरता है तो स्थितिज ऊर्जा mgh का कुछ अंश $KE = \frac{1}{2}mv^2$ तथा $KE_{rotational} = \frac{1}{2}I\omega^2$ के रूप में प्राप्त होता है। अर्थात्

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + nF \quad \ldots (2)$$

जहाँ F प्रति इकाई चक्कर में कार्यशील बल के क्षय ऊर्जा का मान है तथा n धुरे पर लिपटे धागे के चक्करों की संख्या है। गतिपालक चक्र $\frac{1}{2}I\omega^2$ घूर्णन गतिज ऊर्जा के साथ बियरिंग एवं माध्यम के घर्षण के कारण ऊर्जा क्षय एवं इस प्रकार स्थिर होने तक N चक्कर लगाता है। अत: ऊर्जा संरक्षण के नियम से—

$$\frac{1}{2}I\omega^2 = NF \quad \ldots (3)$$

समी० (3) से F का मान समी० (2) में रखने पर

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2\left(1 + \frac{n}{N}\right) \quad \ldots (4)$$

समी० (1) का मान समी० (4) में रचाने पर

$$I\left(1 + \frac{n}{N}\right)mgh = \left(\frac{2mgh}{\omega^2}\right) - mr^2 \quad \ldots (5)$$

धुरे से धागा छूटने के बाद यदि गतिपालक चक्र की t समय तक कोणीय वेग ω हो तो स्थिर होने पर चक्र का औसत कोणीय वेग $\left(\frac{\omega + 0}{2} = \frac{1}{2}\omega\right)$ होगा।

अत: $$\frac{1}{2}\omega = \frac{2\pi N}{t}$$

या $$\omega = \frac{4\pi N}{t}$$

उपरोक्त मान समी० (5) में प्रतिस्थापित करने पर

$$I = \frac{mgh\,t^2}{8n^2N(n+N)} - \left(\frac{mr^2}{1 + n/N}\right)$$

प्रयोग विधि (Procedure)

(1) सबसे पहले वर्नियर कैलीपर्स की सहायता से गतिपालक चक्र के धुरे की त्रिज्या का मान ज्ञात करते हैं।

(2) हैंगर को धागे के एक सिरे से बाँध कर दूसरे सिरे को धुरे के छेद में अथवा कील में फंसाते हुए धुरे पर लपेट देते हैं। धागा कम लम्बाई का लेते हैं। धागे के फेरों की संख्या n ज्ञात कर लेते है। गति पालक चक्र को हाथ के सहारे से रोक कर रखते हैं।

(3) घूर्णन संख्या N ज्ञात करने के लिए गतिपालक चक्र के पहिये पर एक स्पष्ट निशान लगा देते हैं।

(4) गतिपालक चक्र के मुक्त करते हैं। धुरे के छेद में अथवा कील में फंसा धागा छूटते ही विराम घड़ी चला देते है साथ ही गतिपालक चक्र के चक्करों की संख्या की गणना शुरू कर देते हैं।

(5) गतिपालक चक्र के रुकते ही विराम घड़ी बन्द कर देते हैं

इस प्रकार गतिपालक चक्र द्वारा लगाये गये कुल चक्करों की संख्या N तथा N चक्करों में लगा समय t ज्ञात कर लेते हैं।

प्रेक्षण (Observation)

(A) धुरे की त्रिज्या के लिए तालिका

वर्नियर कैलीपर्स का अल्पतमांक = ... सेमी

शून्यांक त्रुटि = +ve या − ve ..... सेमी

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

क्रम सं०	धुरे का किसी भी दिशा में व्यास (a) सेमी	धुरे के लम्बवत दिशा में व्यास (b) सेमी	औसत व्यास $\frac{a+b}{2}$ सेमी	शून्यांक त्रुटि सहित औसत व्यास सेमी	औसत त्रिज्या सेमी
1.					
2.					
3.					

(B) गतिपालक चक्र के जड़त्व-आघूर्ण के लिए तालिका

क्रम संख्या	हैंगर का द्रव्यमान + हैंगर पर रखा द्रव्यमान	धरातल से हैंगर की ऊँचाई	धुरे पर लिपटे धागे के चक्करों की संख्या	धुरे से भार छूटने के पश्चात् चक्र के चक्करों की संख्या			N चक्कर में लगा समय		
	m (g)	h (cm)	n	1	2	औसत N	1 (s)	2 (s)	औसत t (s)
1.									
2.									
3.									

गणना (Calculation)

कोणीय वेग $\omega = \frac{4\pi N}{t}$ रेडियन/सेकण्ड

अत: $\omega_1 = \ldots\ldots\ldots$ rad/s

$\omega_2 = \ldots\ldots\ldots$ rad/s

$\omega_3 = \ldots\ldots\ldots$ rad/s

गतिपालक चक्र का जड़त्व आघूर्ण

$$I = \frac{N}{n+N} \times m\left(\frac{2gh}{\omega^2} - r^2\right) \text{ g-cm}^2$$

अत: $I_1 = \ldots\ldots\ldots$ g - cm^2

$I_2 = \ldots\ldots\ldots$ g - cm^2

$I_3 = \ldots\ldots\ldots$ g - cm^2

औसत $I = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{3}$ g-cm^2

संभाव्य त्रुटि (Probable error)

$$I = \frac{mgh\,t^2}{8\pi^2 N\,(n+N)}$$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$$\log I = \log m + \log g + \log h + 2\log t - \log 8 - 2\log \pi - \log N - \log (n+N)$$

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

अवकलन (Differentiate) करने पर

$$\frac{dI}{I} = \frac{dm}{m} + \frac{dg}{g} + \frac{dh}{h} + \frac{2dt}{t} - \frac{dh}{N} - \frac{d(n+N)}{n+N}$$

चूँकि $dm = dg - 0$; $dn = 0$ तथा $dN = 1$

dh = मीटर पैमाने का अल्पतमांक

dr = विराम घड़ी का अल्पतमांक

यदि N की गणना में त्रुटि न हो, तो

$$\frac{dI}{I} = \frac{dh}{h} + \frac{2dt}{t} + \frac{1}{N} - \frac{1}{(n+N)}$$

उपरोक्त सूत्र की सहायता से संभाव्य त्रुटि की गणना कर लेते हैं।

परिणाम (Result)

गतिपालक चक्र का उसके घूर्णन अक्ष (धुरे) के परित: जड़तव आघूर्ण I =.....g - cm^2 है जिसमें ..... सम्भाव्य प्रतिशत त्रुटि है।

त्रुटियाँ एवं सावधानियाँ (Sources of Errors and Precautions)

(1) धुरे पर धागा एकसमान लिपटा होना चाहिए। फेरे एक के ऊपर दूसरे नहीं लिपटे होने चाहिए।

(2) m एवं h का मान अधिक होना चाहिए।

(3) व्यावाहिरक रूप से N का मान ज्ञात करने के लिए $n+N$ का मान ज्ञात करना चाहिए।

(4) विराम घड़ी का अल्पतमांक कम होना चाहिए।

❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

प्रयोग संख्या-7
(EXPERIMENT No. 7)

दिनांक ..... पृष्ठ संख्या .....

उद्देश्य (Object)

फोर्टिस बैरोमीटर (Fortins' Barometer) की सहायता से (किसी स्थान) का वायुमण्डलीय दाब ज्ञात करना।

उपकरण (Apparatus)

फोर्टिस बैरोमीटर (Fortins' Barometer)

सैद्धान्तिक परिचर्चा (Discussion)

वायुमण्डलीय दाब

(a) **वायुमण्डल**—गैसीय आवरण, जो पृथ्वी को चारों तरफ से घेरे हुए है, वायुमण्डल कहलाता है। यह लगभग 400 किमी तक फैला हुआ है जिसमें 72% नाइट्रोजन, 21% ऑक्सीजन तथा कार्बन डाई-ऑक्साइड व हाइड्रोजन अल्प मात्रा में मिश्रित होते हैं।

(b) **वायुमण्डलीय दाब**—वायु में भार होता है अत: दाब उत्पन्न करता है। किसी बिन्दु पर वायुमण्डलीय दाब वह लम्ब बल है जो उसके ऊपर स्थित वायु स्तंभ की कुल ऊंचाई के कारण उस बिन्दु के एकांकी क्षेत्रफल पर कार्य करता है।

इसका मान समुद्री तल पर अधिकतम तथा ऊँचाई के साथ घटता जाता है।

वायुमण्डलीय दाब का मापन

वायुमण्डलीय दाब का मापन मर्करी बैरोमीटर में पारे स्तम्भ की ऊँचाई के पदों में एक प्रयोग के माध्यम से टोरीसैली द्वारा किया गया था।

$$\text{वायुमण्डलीय दाब} = 1 \text{ वायुमण्डल}$$
$$= 0 \cdot 76 \text{ mm Hg} = 0 \cdot 76 \times 13 \cdot 6 \times 10^3 \times 9 \cdot 8$$
$$= 1 \cdot 01 \times 10^5 \text{ N m}^{-2} = 105 \text{ Pa}$$

फोर्टिन बैरोमीटर

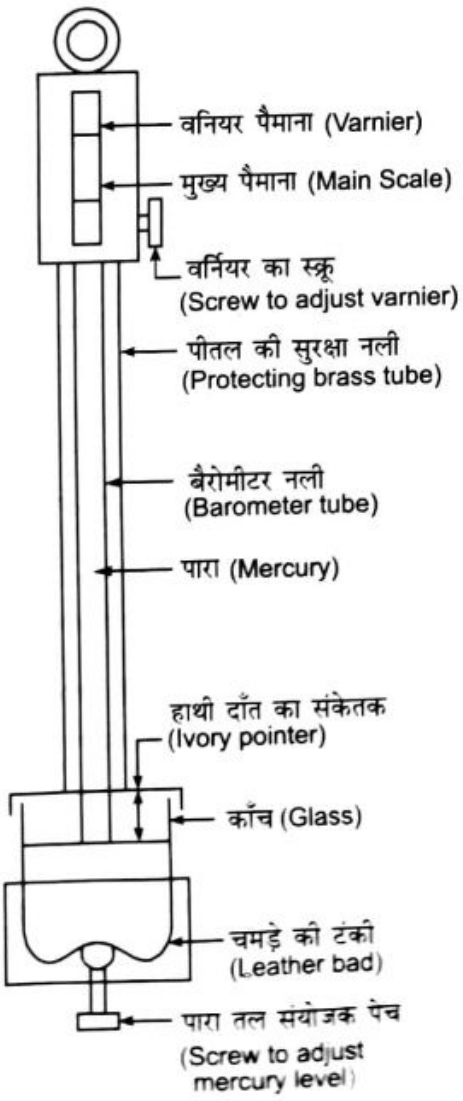
बैरोमीटर एक ऐसा उपकरण है जो वायुमण्डलीय दाब मापन हेतु प्रयोग किया जाता है। प्रयोगशालाओं में फोर्टिन बैरोमीटर का प्रयोग सबसे अधिक किया जाता है।

बनावट/रचना

यह एक संकीर्ण व्यास के शीशे के ट्यूब का बना होता है तथा 1 मीटर लम्बा होता है। ऊपर की तरफ यह बंद होता है तथा नीचे जेट तक गया होता है तथा निचला सिरा मुड़ा होता है।

ऊपर का एक-तिहाई हिस्सा, पृष्ठ तनाव के प्रभाव से बचने के लिए बंद सिरे की तरफ बड़े व्यास का बनाया जाता है। यह शुद्ध, शुष्क वायुरहित पारे से पूर्णत: भरा होता है तथा इसे शुद्ध, शुष्क व वायुरहित पारे से भरे हौज में उलट दिया जाता है।

हौज का लम्ब हिस्सा काँच का बना होता है तथा निचला सिरा चमड़े का बना होता है जिसे स्क्रू द्वारा ऊपर या नीचे किया जा है, जैसे-जैसे स्क्रू को ऊपर किया जाता है, चमड़े के बैग का निचला सिरा ऊपर उठने लगता है तथा हौज में पारे का स्तर बढ़ने लगता है। जैसे-जैसे स्क्रू को नीचे की तरफ घुमाया जाता है, बैग का निचला सिरा नीचे आने लगता है तथा हौज में पारे का स्तर नीचे आने लगता है। आइवरी पिन 'P' हौज के कवर के नीचे लगा होता है तथा हौज में पारे के स्तर को स्क्रू की सहायता से समायोजित किया जाता है, जिससे कि आइवरी पिन के सिरे को छुआ जा सके।



चित्र : फोर्टिन बैरोमीटर

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(b) चार्ल्स का नियम—इस नियम के अनुसार "एक निश्चित द्रव्यमान के गैस का आयतन (V) उसके परमताप के समानुपाती होता है, यदि दाब नियत हो।"

$$V \propto T$$

या $$\frac{V}{T} = \text{नियत}$$

(c) गे-लुसैक का नियम या दाब का नियम—इस नियम के अनुसार "नियत आयतन पर निश्चित द्रव्यमान के गैस का दाब इसके परमताप के समानुपाती होता है।"

$$P \propto T$$

या $$\frac{P}{T} = \text{नियत}$$

गैस का नियम

एक आदर्श गैस के लिए गैस का समीकरण $PV = \mu RT$

R, एक मोल गैस के लिए गैस नियतांक है। यह सभी गसों के लिए समान होता है। अत: इसे सार्वभौमिक गैस नियतांक कहते हैं।

❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

प्रयोग संख्या-8 .....
(EXPERIMENT No.8)

दिनांक ..... पृष्ठ संख्या .....

उद्देश्य (Object)

दिये गये द्रव ..... का श्यानता गुणांक (Coefficient of viscosity) स्टोक विधि द्वारा ज्ञात करना।

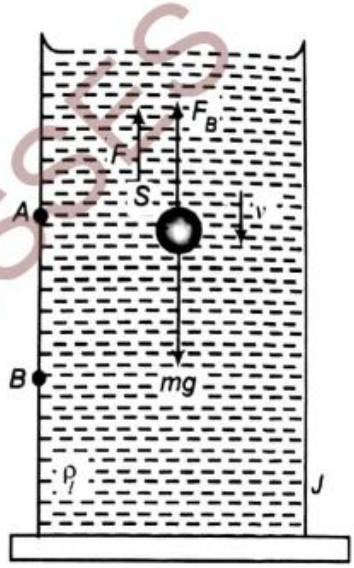
उपकरण (Apparatus)

काँच का बेलनाकार लम्बा जार जिस पर मिलीमीटर के खाने बने हों, पारदर्शी श्यान द्रव (ग्लिसरीन, मोबिल ऑयल इत्यादि), स्टॉप वाच, स्टील की छोटी-छोटी गोलियाँ, स्क्रू गेज, थर्मामीटर इत्यादि।

उपकरण का विवरण (Description of Apparatus)

J = एक काँच का लम्बा अंशांकित बेलनाकार जार

S = स्टील की छोटी गोली जिसे श्यान द्रव में गिराया जाता है।



चित्र 1

सिद्धान्त (Theory)

यदि गोली द्रव के भीतर सीमांत वेग (terminal velocity) से गिर रही है तो स्टोक के नियम से गोली पर ऊपर की ओर लगने वाला श्यान बल

$$F = 6\pi\eta rv$$

जहाँ η द्रव का श्यानता गुणांक, r गोली की त्रिज्या तथा v गोली का सीमांत वेग है।

यदि गोली के पदार्थ का घनत्व ρ_s हो तो गोली का भार

$$mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \rho_s \times g$$

यदि द्रव का घनत्व ρ_l हो तो गोली पर ऊपर की ओर लगने वाला उत्प्लावन बल

$$F_B = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \rho_l \times g$$

परन्तु गोली के सीमांत वेग से गिरने की स्थिति में

$$F + F_B = mg$$

या $$6\pi\eta rv + \frac{4}{3}\pi r^3 \times \rho_l \times g = \frac{4}{3}\pi^3 \times \rho_s \times g$$

अत: श्यानता गुणांक $$\eta = \frac{2}{9}\frac{r^2 g}{v}(\rho_s - \rho_l)$$

प्रयोग विधि (Procedure)

(1) काँच के जार पर सुविधानुसार ग्लास पेन्सिल से निशान लगा दिये जाते हैं। यह निशान बराबर दूरी पर लगे होने चाहियें।

(2) जार में वह द्रव भर देते हैं जिसका श्यानता गुणांक निकालना होता है।

(3) अब गोली को धीरे से द्रव पर रख दिया जाता है। शीघ्र ही गोली सीमांत वेग से नीचे गिरने लगती है। जार पर लगे निशान की दूरियाँ तय करने में लगे समय को स्टॉप वाच से ज्ञात कर लिया जाता है।

(4) यह प्रयोग एक से अधिक बार दोहराना चाहिये। अब दूरी को समय से भाग देकर सीमांत वेग ज्ञात कर लेते हैं।

(5) स्क्रू गेज की सहायता से गोली का व्यास ज्ञात कर उसकी त्रिज्या निकाल लेते हैं।

(6) यह प्रयोग अलग-अलग व्यास की गोलियों पर किये जाते हैं।

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

प्रेक्षण (Observation)

(i) गोली के पदार्थ का घनत्व ρ_s = ... ग्राम/सेमी^{3}

(ii) प्रायोगिक द्रव का घनत्व ρ_l = ... ग्राम/सेमी^{3}

(iii) गोली की त्रिज्या के लिये सारणी—

क्रम सं०	मुख्य पैमाना (सेमी)	गोल पैमाने के मिलने वाले खानों की संख्या	गोल पैमाना (सेमी)	गोली का प्रेक्षित व्यास (सेमी)	गोली का वास्तविक व्यास (सेमी)	गोली की त्रिज्या $(r)=\frac{\text{व्यास}}{2}$ (सेमी)	त्रिज्या का वर्ग $(r)^2$
1.							
2.							
3.							

(iv) सीमांत वेग हेतु सारणी—

क्रम सं०	दूरी AB (सेमी)	समय t (सेकण्ड)	सीमांत वेग (सेमी/से)	औसत सीमान्त वेग (सेमी/से)
1.				
2.				
3.				

गणना (Calculation)

$$\eta=\frac{2}{9}\times\frac{r^2g}{v}(\rho_s-\rho_l)$$

= ..... poise

परिणाम (Result)

दिये गये द्रव ..... का ..... °C ताप पर श्यानता गुणांक ..... poise है।

चूँकि 1 poise = $\frac{1}{10}$ पास्कल-सेकेंड, अत: ज्ञात श्यानता ..... पास्कल-सेकेंड है जहाँ पास्कल-सेकेंड, श्यानता गुणांक का S.I. मात्रक है।

सावधानियाँ (Precautions)

(1) द्रव पारदर्शी होना चाहिये।

(2) गोलियाँ गोलाकार (spherical) होनी चाहियें।

(3) वेग मापन नियत वेग पर करना चाहिये।

(4) प्रयोग के समय तापमान स्थिर रहना चाहिये।

(5) गोली की सतह को द्रव से गीला करने के बाद द्रव के भीतर डालना चाहिये।

AKG TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

मौखिक प्रश्न

1. इस प्रयोग का क्या महत्व है?
   [**उत्तर** : मशीन के अनेक पुर्जों के बीच घर्षण कम करने के लिये तेल एवं अन्य पदार्थों का प्रयोग किया जाता है। किस मशीन में किस प्रकार का चिकना पदार्थ प्रयोग करना चाहिये, यह तय करने के लिये द्रव की श्यानता गुणांक का मान जानना जरूरी है। यह विधि गाढ़े तेलों के लिये काफी संतोषजनक परिणाम देती है।]
2. श्यानता से आप क्या समझते हैं?
   [**उत्तर** : द्रवों का वह गुण जिसके कारण द्रव की विभिन्न पर्तों के मध्य आपेक्षिक गति का विरोध होता है, श्यानता कहलाता है।]
3. श्यान बल (Viscous Force) किसे कहते हैं?
   [**उत्तर** : जब कोई द्रव बहता है, तो उसकी विभिन्न पर्तों में एक सापेक्ष गति होती है। इस सापेक्ष गति के कारण दो पर्तों के बीच एक घर्षण बल कार्य करने लगता है, जो इस सापेक्ष गति का विरोध करता है, इसे श्यान बल कहते हैं।]
4. श्यानता गुणांक किसे कहते हैं?
   [**उत्तर** : किसी तल पर लगने वाले श्यान बल (Viscous Force) का मान उस तल के क्षेत्रफल (A) तथा वेग (v) के समानुपाती तथा स्थिर तल से उसकी दूरी (x) के विलोमानुपाती होता है।]
   $F \propto -v$, $F \propto A$, $F \propto \frac{1}{x}$ या $F \propto -\frac{A.v}{x}$ या $F = -\eta\frac{A.v}{x}$
   यहाँ η एक स्थिरांक है जिसे श्यानता गुणांक कहते हैं।
5. वेग प्रवणता किसे कहते हैं?
   [**उत्तर** : $\frac{v}{x}$ या $\frac{dv}{dx}$ को 'दूरी के सापेक्ष वेग परिवर्तन की दर' या वेग प्रवणता कहते हैं।]
6. श्यानता गुणांक के मात्रक बताओ।
   [**उत्तर** : C.G.S. system में η का मात्रक poise है।
   1 poise = $g\,cm^{-1}\,s^{-1}$
   M.K.S. (या S.I.) system में η का मात्रक Pa s (Pascal second) है।
   1 Pa s = $kg\,m^{-1}\,s^{-1}$ और 1 Pa s = 10 poise]
7. अन्तिम वेग प्राप्त करने पर स्टील की गोली पर कौन-कौन से बल कार्य करते हैं? और यह क्यों कहा जाता है कि उनका सदिश योग शून्य है ?
8. पानी की बूँद जब हवा में गिरती है तो उसका वेग स्थिर क्यों हो जाता है?
   [**उत्तर** : स्टोक के नियामानुसार जब पानी की बूँद का भार, उस पर हवा के श्यान बल के बराबर हो जाता है, तो बूँद का वेग नियत हो जाता है।]
9. एक फ्लास्क में ग्लिसरीन है और दूसरे फ्लास्क में पानी है। दोनों को तेजी से हिलाया जाता है और मेज पर रख दिया जाता है। किस फ्लास्क का द्रव पहले विरामावस्था में आ जायेगा और क्यों?
   [**उत्तर** : गतिशील द्रवों के पर्तों के बीच आपेक्षिक गति होती है और उनके बीच परस्पर विरोधी श्यान बल लगते हैं। क्योंकि ग्लिसरीन की श्यानता पानी की अपेक्षा अधिक होती है, अत: उसकी पर्तों के बीच अधिक श्यान बल लगने से ग्लिसरीन पहले विरामावस्था में आ जायेगी।]
10. श्यानता गुणांक की परिभाषा दीजिये। [**उत्तर** : कर्तन प्रतिबल तथा वेग प्रवणता का अनुपात]
11. श्यानता का कारण स्पष्ट कीजिये। [**उत्तर** : द्रव की परतों के मध्य उपस्थित घर्षण बल]
12. श्यानता गुणांक का विमीय सूत्र लिखिये। [**उत्तर** : $ML^{-1}T^{-1}$]
13. S.I. तथा C.G.S. मात्रक में श्यानता गुणांक के मध्य सम्बन्ध बताइये। [**उत्तर** : 1 Pa s = 10 P]

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

14. तापमान बढ़ने पर द्रव की श्यानता पर क्या प्रभाव पड़ता है? [उत्तर : श्यानता घटती है]
15. तापमान बढ़ने पर गैसों की श्यानता पर क्या प्रभाव पड़ता है? [उत्तर : बढ़ती है]
16. सीमांत वेग का कारण स्पष्ट कीजिये। [उत्तर : गोली का आभासी भार शून्य हो जाता है।]
17. सीमांत वेग प्राप्त कर लेने के पश्चात् गोली पर लगने वाला तुल्य बल कितना रह जाता है? [उत्तर : शून्य]
18. स्टोक का नियम बताइये। किसी श्यान द्रव में गिर रही हो तो उस पर लगने वाला श्यान बल $F = 6\pi\eta r v$ होता है।] [उत्तर : r त्रिज्या की छोटी गोली v सीमान्त वेग से
19. गोली की त्रिज्या दूनी कर देने पर सीमांत वेग कितना हो जायेगा? [उत्तर : चार गुना]
20. गोली का सीमांत वेग तथा द्रव की श्यानता आपस में किस तरह से सम्बन्धित होते हैं? [उत्तर : $v \propto \frac{1}{\eta}$]
21. यदि गोली के पदार्थ का घनत्व, द्रव्य (माध्यम) के घनत्व के समान हो तो सीमांत वेग का मान क्या होगा? [उत्तर : शून्य]
22. सीमांत वेग का सूत्र बताइये। [उत्तर : $v = \frac{2r^2(\rho_s - \rho_l)g}{9\eta}$]
23. समान आकार की आठ गोलियों से एक बड़ी गोली बनायी जाती है। यदि किसी छोटी गोली का सीमांत वेग v है तो उसी माध्यम में बड़ी गोली का सीमांत वेग कितना होगा? [उत्तर : $4v$]
24. पैराशूट पहने हुये हवा में गिरता व्यक्ति पृथ्वी से किस वेग से टकराता है? [उत्तर : सीमांत वेग]
25. वेग प्रवणता का S.I.मात्रक बताइये। [उत्तर : s^{-1}]
26. किसी नाली में बहते हुये जल की किस सतह पर द्रव का वेग शून्य होता है? [उत्तर : आधार की सतह पर]
27. नाली में बहते द्रव में कहाँ पर अधिकतम वेग होता है? [उत्तर : सबसे ऊपर]
28. आदर्श द्रव की श्यानता कितनी होती है? [उत्तर : शून्य]
29. क्या स्टोक का नियम घनाकार वस्तु के लिये भी सत्य है? [उत्तर : नहीं]
30. स्थिर द्रव की श्यानता कितनी होती है? [उत्तर : शून्य]
31. शहद व जल में किसकी श्यानता अधिक होती है? [उत्तर : शहद]
32. वेग प्रवणता का विमीय सूत्र बताइये। [उत्तर : $M^0L^0T^{-1}$]

❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

प्रयोग संख्या-9
(EXPERIMENT No.9)

दिनांक ..... पृष्ठ संख्या .....

उद्देश्य (Object)

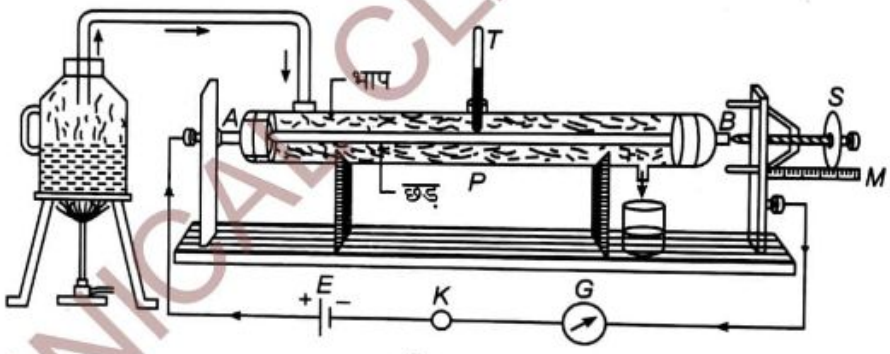
पुलिंजर के उपकरण की सहायता से किसी दिये हुए पदार्थ (.....) का रेखीय प्रसार गुणांक (Coefficient of Linear Expansion) ज्ञात करना।

आवश्यक उपकरण (Apparatus)

पुलिंजर का उपकरण, जल-वाष्प बनाने के लिये बॉयलर, 100°C तक पढ़ने वाले दो तापमापी, मीटर पैमाना, लेक्लांशी सेल, धारामापी या LED बल्ब, संयोजक तार, इत्यादि।

उपकरण का विवरण (Description of Apparatus)

गंथर का उपकरण चित्र-1 में दिखाया गया है। इसमें दोहरी दीवार वाला एक खोखला बेलन P होता है जिसमें क्षैतिज अक्ष पर प्रायोगिक छड़ AB रखी जाती है। बेलन P के सिरों पर लगे कार्कों के छेद में से छड़ बाहर निकली रहती है। छड़ का एक सिरा A किसी दृढ़ आधार पर टिका रहता है तथा सिरा B छड़ को गर्म करने पर होने वाले प्रसार के लिये स्वतन्त्र छोड़ दिया जाता है। चूँकि छड़ में होने वाला प्रसार बहुत कम होता है, अत: इसे नापने के लिये एक गोलाईमापी का प्रबन्ध किया जाता है। (चित्र-1)। बेलन P की बाहरी दीवार के दोनों सिरों पर दो छेद विपरीत दिशा में होते हैं जिनमें रबड़ की नलियाँ लगी रहती हैं। पहली नली का सम्बन्ध बॉयलर से होता है जिसमे भाप आती है तथा दूसरी नली एक बीकर में डाल दी जाती है जिसमें से भाप बाहर निकलती है। बेलन के बीच में भी एक छेद होता है जिसमें छड़ का ताप पढ़ने के लिये एक तापमापी T लगा रहता है। गोलाईमापी और छड़ के सिरे B से स्पर्श की सही स्थिति ज्ञात करने के लिये गोलाईमापी और छड़ के बीच विद्युत परिपथ द्वारा सम्बन्ध स्थापित करते हैं। इस परिपथ में एक सेल, कुन्जी तथा धारामापी लगा होता है। जैसे ही गोलाईमापी का पेंच छड़ को स्पर्श करता है, धारामापी में विक्षेप आ जाता है। धारामापी के स्थान पर विद्युत बल्ब भी लगाया जा सकता है।



चित्र 1

पुलिंजर का उपकरण

यह उपकरण भी गंथर के उपकरण के समान है। इसमें प्रायोगिक छड़ क्षैतिज न रखकर ऊर्ध्वाधर रखी जाती है। यह चित्र-2 में दिखाया गया है।

सिद्धान्त (Principle)

किसी पदार्थ की एकांक लम्बाई की छड़ का ताप 1°C बढ़ाने में उसकी लम्बाई में जितनी वृद्धि होती है उसे उस छड़ के पदार्थ का रेखीय प्रसार गुणांक कहते हैं। अत: किसी छड़ का रेखयीय प्रसार गुणांक

$$\alpha = \frac{\text{लम्बाई में वृद्धि}}{\text{प्रारम्भिक लम्बाई} \times \text{ताप वृद्धि}}$$

यदि किसी छड़ की लम्बाई t_1°C तथा t_2°C पर क्रमश: l_1 तथा l_2 सेमी हो, तो

$$\alpha = \frac{l_2 - l_1}{l_1 (t_2 - t_1)} \text{ प्रति °C}$$

इस प्रकार किन्हीं दो तापों पर छड़ की लम्बाई नाप कर रेखीय प्रसार गुणांक का मान ज्ञात किया जा सकता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

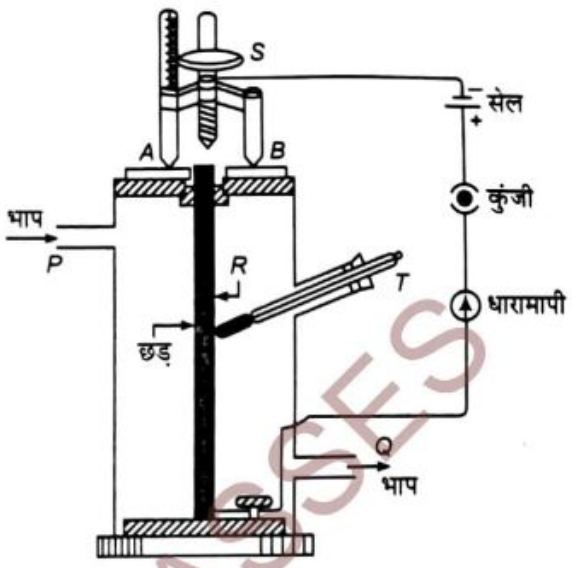
प्रयोग विधि (Procedure)

(1) सर्वप्रथम प्रायोगिक छड़ को बेलन से निकालकर कमरे के ताप t_1 °C पर उसकी प्रारम्भिक लम्बाई L_1 मीटर पैमाने की सहायता से ज्ञात करते हैं तथा फिर बेलन में ही लगा देते हैं।

(2) अब बेलन में बीच वाले छेद में तापमापी इस प्रकार लगाते हैं कि इसकी घुण्डी छड़ को स्पर्श करने लगे। गोलाईमापी और छड़ को विद्युत परिपथ द्वारा सम्बन्धित कर देते हैं।

(3) तापमापी का ताप t_2 °C पढ़ लेते हैं तथा गोलाईमापी का अल्पतमांक ज्ञात कर लेते हैं।

(4) इसके पश्चात् विद्युत परिपथ के कुन्जी K लगाकर गोलाईमापी के पेंच को धीरे-धीरे घुमाकर छड़ के ऊपरी सिरे से स्पर्श कराते हैं। ठीक स्पर्श की स्थिति में धारामापी में प्रेक्षण होता है या LED बल्ब जल उठता है। इस समय गोलाईमापी का पाठ्यांक ले लेते हैं। इसी क्रिया को कई बार दोहरा कर t_1 °C पर कई प्रेक्षण ज्ञात कर लेते हैं।



चित्र 2

(5) अब गोलाईमापी के पेंच को धीरे-धीरे घुमाकर पीछे की ओर खिसका देते हैं तथा बेलन के ऊपर के छिद्र में लगी रबड़ की नली को बायॅलर में लगा देते हैं जिससे बेलन की दोहरी दीवार में से होकर भाप बहने लगती है और दूसरी रबड़ की नली द्वारा निकलकर बीकर में संघनित होती रहती है।

(6) इस समय तापमापी का ताप बढ़ने लगता है। जब उपकरण में लगे थर्मामीटर का पाठ बढ़ना बन्द हो जाता है और अगले 10 मिनट तक यही रहता है, तब यह पाठ पढ़ लेते हैं।

(7) अब गोलाईमापी के पेंच को घुमाकर छड़ से स्पर्श कराते हैं। ठीक स्पर्श की स्थिति में धारामापी में विक्षेप आ जाता है या बल्ब जल उठता है। इस समय गोलाईमापी का पाठ्यांक पढ़ लेते हैं। इस प्रेक्षण को भी दोहराकर माध्य प्रेक्षण ज्ञात कर लेते हैं।

(8) द्वितीय पाठ्यांक में से प्रथम पाठ्यांक घटाने पर छड़ की लम्बाई में वृद्धि ज्ञात हो जाती है।

प्रेक्षण (Observation)

(1) छड़ की प्रारम्भिक लम्बाई L_1 =..... सेमी।

(2) छड़ का प्रारम्भिक ताप t_1 =.....°C

(3) छड़ के रेखीय प्रसार के लिये सारणी—

गोलाईमापी का चूड़ी अन्तराल =..... सेमी

गोल चकती पर अंकित भागों की संख्या =.....

गोलाईमापी का अल्पतमांक =.....

विवरण	क्रम संख्या	मुख्य पैमाने का पाठ (सेमी)	वृत्ताकार पैमाने का पाठ		पूर्ण पाठ (सेमी)	माध्य पाठ (सेमी)	लम्बाई में प्रसार Δl/ सेमी
			भागों की संख्या	मान (सेमी)			
प्रारम्भिक ताप पर पाठ्यांक	1.	—	—	—	—	a_1	—
	2.	—	—	—	—	—	$a_2 - a_1$
	3.	—	—	—	—	—	—
अन्तिम ताप पर पाठ्यांक	1.	—	—	—	—	a_2	—
	2.	—	—	—	—	—	—
	3.	—	—	—	—	—	—

(4) छड़ का अन्तिम ताप t_2 =.....°C

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

परिकलन (Calculation)

छड़ की लम्बाई में वृद्धि $(L_2 - L_1) = a_2 - a_1$ सेमी

ताप में वृद्धि $(t_2 - t_1)$ = अन्तिम ताप – प्रारम्भिक ताप

= ..... °C

अत: $\alpha = \dfrac{a_2 - a_1}{L_1 (t_2 - t_1)}$

$= \dfrac{\text{.....}}{\text{.....}} =$ ..... प्रति °C

परिणाम (Result)

प्रायोगिक छड़ के पदार्थ (.....) का रेखीय प्रसार गुणांक

$\alpha =$ ..... प्रति°C

प्रमाणिक मान— $\alpha =$ ..... प्रति °C

प्रतिशत त्रुटि— $\alpha = \dfrac{\text{प्रमाणिक मान} \approx \text{प्रायोगिक मान}}{\text{प्रायोणिक मान}} \times 100 =$ .....%

अनुमेय त्रुटि

$$\alpha = \frac{a_2 - a_1}{L_1 (t_2 - t_1)}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर,

$$\log \alpha = \log (a_2 - a_1) - \log L_1 - \log (t_2 - t_1))$$

आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\Delta \alpha}{\alpha} = \frac{\Delta (a_2 - a_1)}{a_2 - a_1} - \frac{\Delta L_1}{L} - \frac{\Delta (t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{\Delta a_2}{a_2 - a_1} - \frac{\Delta a_1}{a_2 - a_1} - \frac{\Delta L_1}{L_1} - \frac{\Delta t_2}{t_2 - t_1} + \frac{\Delta t_1}{t_2 - t_1}$$

सभी त्रुटियों को एक ही दिशा में लेने पर

$$\left|\frac{\Delta a_2}{\alpha}\right|_{\max} = \frac{\Delta a_2}{a_2 - a_1} + \frac{\Delta a_1}{a_2 - a_1} + \frac{\Delta L_1}{L_1} + \frac{\Delta t_2}{t_2 - t_1} + \frac{\Delta t}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{2\Delta a}{a_2 - a_1} + \frac{\Delta L_1}{L_1} + \frac{2\Delta t}{t_2 - t_1}$$

$\Delta_a, \Delta L_1$ तथा Δt क्रमश: गोलाईमापी, पैमाने और तापमापी की अल्पतम माप हैं।

$\therefore$ अधिकतम अनुमेय त्रुटि $= \left|\dfrac{\Delta \alpha}{\alpha}\right|_{\max} \times 100 =$ .....%

त्रुटियाँ एवं सावधानियाँ (Sources of Errors and Precautions)

(1) छड़ का एक सिरा दृढ़ आधार पर टिका होना चाहिये ताकि गर्म करने पर छड़ में प्रसार केवल स्वतन्त्र सिरे की ओर हो।

(2) तापमापी बीच वाले छिद्र में इस प्रकार लगाना चाहिये कि उसकी घुण्डी प्रायोगिक छड़ को स्पर्श करे। तापमापी में अन्तिम ताप का पाठ तभी लेना चाहिये जबकि वह लगभग 10 मिनट तक स्थिर हो जाये।

(3) गोलाईमापी पर पाठ्यांक उसी समय लेना चाहिये जबकि उसका पेंच छड़ को ठीक स्पर्श करे। इसके लिये पेंच को धीरे-धीरे घुमाकर लाते हैं और जैसे ही यह छड़ को स्पर्श करता है, धारामापी में विक्षेप आ जाता है या बल्ब जल उठता है।

(4) गोलाईमापी पर प्रथम पाठ्यांक लेने के पश्चात् उसके पेंच को काफी पीछे घुमा देना चाहिये ताकि छड़ को प्रसार के लिये स्थान मिल जाये। यदि ऐसा नहीं किया जाता है, तो गोलाईमापी पेंच गर्म होकर कुछ फैल जायेगा जिससे पाठ्यांक में त्रुटि आ जायेगी।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(5) गोलाईमापी के पेंच को एक ही दिशा में घुमाकर प्रेक्षण लेने चाहिये ताकि पिच्छट त्रुटि दूर हो जाये।

(6)) छड़ की लम्बाई और उसके प्रसार के लिये एक ही मात्रक का प्रयोग करना चाहिये।

(7) लम्बाई से वृद्धि एक बहुत छोटी राशि है जो गोलाईमापी के दोनों पाठ्यांकों के अन्तर के बराबर होती है अत: इसे कम अल्पतमांक वाले गोलाईमापी से सावधानीपूर्वक पढ़ना चाहिये।

(8) जैकेट में भाप सदैव ऊपर वाली नली से प्रवेश करनी चाहिये और नीचे वाली नली से बाहर निकलनी चाहिये। निकलने वाली भाप को पानी से भरे बीकर में द्रवित करना चाहिये।

(9) पेंच की छड़ से स्पर्श होने की सही स्थिति का पता लगाने के लिये धारामापी या विद्युत बल्ब को प्रयोग अवश्य करना चाहिये।

सम्भावित त्रुटियाँ

(1) गोलाईमापी का पेंच छड़ के सिरे से दूर रहने के उपरान्त भी ऊष्मा पाकर लम्बाई में बढ़ सकता है जिससे पेंच का चूड़ी-अन्तराल बदल जाता है अत: पाठ्यांक में त्रुटि की सम्भावना बनी रहती है।

(2) छड़ का ऊपरी सिरा भाप जैकेट से बाहर निकला रहता है, जिससे इसका ताप छड़ के अन्य भाग की अपेक्षा कम रहता है, अत: लम्बाई में प्रसार कुछ कम होगा।

(3) जिस काँच की प्लेट पर छड़ का निचला सिरा टिका होता है वह भी गर्म होकर कुछ ऊपर को बढ़ती है जिससे छड़ कुछ ऊपर को उठ जाती है।

विवेचना

प्रायोगिक छड़ का कुछ भाग बेलन से बाहर निकला रहता है जिससे उस भाग का ताप छड़ के अन्य भागों की अपेक्षा कम रह जाता है। परन्तु सूत्र निकालते समय समस्त छड़ के ताप को एक समान मान लिया जाता है। छड़ का एक सिरा जिस दृढ़ आधार पर टिका रहता है वह आधार भी ऊष्मा पाकर बढ़ जाता है जिससे छड़ की लम्बाई के प्रसार में त्रुटि आ जाती है और परिणाम अशुद्ध हो जाता है। यदि प्रयोग में गोलाईमापी के स्थान पर प्रकाशिक लीवर (optical lever) का प्रयोग किया जाये तो छड़ की लम्बाई में वृद्धि अधिक यथार्थता से ज्ञात की जा सकती है।

मौखिक प्रश्न

1. रेखीय प्रसार गुणांक से क्या अभिप्राय है?
   [**उत्तर :** किसी पदार्थ की एकांक लम्बाई की छड़ का ताप 1°C बढ़ाने पर उसकी लम्बाई में जितनी वृद्धि होती है, उसे छड़ के पदार्थ का रेखीय प्रसार गुणांक कहते हैं।]
2. इसका क्या मात्रक है?
   [**उत्तर :** प्रति डिग्री सेन्टीग्रेड]
3. एक ही पदार्थ के लिये CGS तथा MKS पद्धति में रेखीय प्रसार गुणांक का मान क्या भिन्न-भिन्न होगा?
   [**उत्तर :** नहीं]
4. यदि छड़ को पतला लें या उसकी लम्बाई दुगुनी कर दें तो रेखीय प्रसार गुणांक पर क्या प्रभाव पड़ेगा?
   [**उत्तर :** कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा क्योंकि इसका मान एक विशेष पदार्थ के लिये नियत होता है।]
5. लम्बाई की वृद्धि नापने के लिये गोलाईमापी को क्यों प्रयोग किया जाता है?
   [**उत्तर :** क्योंकि गोलाईमापी का अल्पमांक बहुत कम (0·001 सेमी) है।]
6. विद्युत परिपथ का प्रयोग करने से क्या लाभ है?
   [**उत्तर :** छड़ की लम्बाई वृद्धि अधिक यथार्थता से मापी जा सकती है क्योंकि इसके प्रयोग से व्यक्तिगत त्रुटि कम हो जाती है।]
7. ऊष्मा प्रसार गुणांक कितने प्रकार के होते हैं तथा उनमें परस्पर क्या सम्बन्ध है?
   [**उत्तर :** तीन प्रकार के होते हैं—रेखीय प्रसार गुणांक (α), 'क्षेत्र प्रसार गुणांक' (β) तथा आयतन प्रसार गुणांक (γ)। इनमें परस्पर निम्न सम्बन्ध होता है—

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

$\beta = 2\alpha$ तथा $\gamma = 3\alpha$]

8. रेखीय प्रसार गुणांक का दैनिक जीवन में क्या उपयोग है?
[**उत्तर :** इसका उपयोग टेलीफोन के तारों को ढीला रखने, रेल की पटरियों के बीच जगह छोड़ने तथा पहियों पर हाल आदि चढ़ाने में होता है।]
9. दो धातुओं में किसका रेखीय प्रसार गुणांक अधिक है, कैसे ज्ञात करोंगे?
[**उत्तर :** दो धातुओं को एक निश्चित ताप पर गर्म करने पर जिसका प्रसार अधिक होगा, उसी का रेखीय प्रसार गुणांक अधिक होगा।]
10. क्या सभी पदार्थ गर्म करने पर बढ़ते हैं?
[**उत्तर :** नहीं। केवल वे ही पदार्थ जिनके रेखीय प्रसार गुणांक धनात्मक होते हैं।]
11. क्या कोई ऐसा पदार्थ जानते हो जो गर्म करने पर सिकुड़ता हो?
[**उत्तर :** रबड़, सिल्वर आयोडाइड 80°—142°C के बीच, जल 0–4°C के बीच तथा सिलिका गर्म करने पर सकुड़ते हैं।]
12. रेल की दो पटरियों के बीच जगह क्यों छोड़ी जाती है?
[**उत्तर :** क्योंकि ऊष्मा पाकर पटरियाँ बढ़ती हैं। यदि जगह न छोड़ी जाये तो पटरियाँ पलट जायेंगी और गाड़ी उलटने का डर रहेगा।]
13. टेलीफोन के तार कुछ ढीले क्यों रखे जाते हैं?
[**उत्तर :** तारों को ढीला न रखने पर जाड़ों में वे सिकुड़ कर टूट सकते हैं]
14. यदि आप सेन्टीग्रेड में न नापकर फारेनहाइट में नापते हैं तब क्या होगा?
[**उत्तर :** रेखीय प्रसार गुणांक α का मान कम होगा। दूसरे शब्दों में सेन्टीग्रेड ताप के मान का $\frac{5}{9}$ गुना हो जायेगा।]
15. प्रतिकारित लोलक क्या होता है, उसका क्या उपयोग है?
[**उत्तर :** लोलक घड़ी में की गई ऐसी व्यवस्था को जिससे ताप के बदलने पर उसकी लम्बाई में परिवर्तन न हो, 'प्रतिकारित लोलक' कहते हैं। इससे लोलक का आवर्त काल प्रयोग में प्रतिशत त्रुटि का मान कम हो जाता है।]
16. छड़ की लम्बाई कम रखनी चाहिये या अधिक, और क्यों?
[**उत्तर :** लम्बाई अधिक रखनी चाहिये, इससे एक निश्चित ताप की छड़ की लम्बाई में वृद्धि अधिक होती है जिसे अधिक यथार्थता से मापा जा सकता है। इस प्रकार प्रयोग में प्रतिशत त्रुटि का मान कम हो जाता है।]
17. किसी ऐसे पदार्थ का नाम बताओ जिसका रेखीय प्रसार गुणांक ऋणात्मक हो?
[**उत्तर :** ऐसे सभी पदार्थ जो ऊष्मा पाकर सिकुड़ते हैं, जैसे—रबड़, सिल्वर आयोडाइड (80°C से 142°C के बीच), जल (0°C से 4°C के बीच) इत्यादि।]
18. परिणाम की यथार्थता किन बातों पर निर्भर करती है?
[**उत्तर :** छड़ की लम्बाई अधिक होनी चाहियें तथा प्रयुक्त किये जाने वाले तापमापी सुग्राही हों।]
19. क्या कोई ऐसा पदार्थ है जिस पर ताप का कोई प्रभाव नहीं पड़ता ?
[**उत्तर :** पायरेक्स का काँच, इनवार स्टील आदि।]
20. रेखीय प्रसार गुणांक का विमीय सूत्र बताओं।
[**उत्तर :** θ^{-1}]

❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

प्रयोग संख्या-10
(EXPERIMENT No.)

दिनांक .....

पृष्ठ संख्या .....

उद्देश्य (Object)

किसी स्प्रिंग का बल नियतांक (Force constant) ज्ञात करना।

उपकरण (Apparatus)

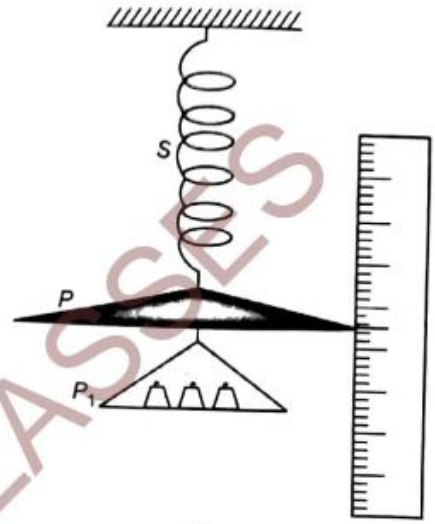
स्प्रिंग, संकेतक, पलड़ा, 50-50 ग्राम के बाट, पैमाना इत्यादि।

उपकरण का विवरण (Description of Apparatus)

S = एक हल्की स्प्रिंग जिसका बल नियतांक ज्ञात करना है। इसे किसी दृढ़ आधार से लटका देते हैं।

P = संकेतक (pointer), जिसकी सहायता से स्प्रिंग की लम्बाई में होने वाली वृद्धि पढ़ी जाती है।

P_1 = पलड़ा जिस पर बाट रखे जाते हैं। एक मीटर स्केल (पैमाना)



चित्र 1

सिद्धान्त (Theory)

जब किसी स्प्रिंग की लम्बाई में x वृद्धि करनी होती है तो स्प्रिंग पर बाह्य बल F लगाया जाता है। तब

$$F \propto x$$

या

$$F = Kx$$

जहाँ K स्प्रिंग का बल नियतांक है।

अत:

$$K = \frac{F}{x}$$

प्रयोग विधि (Procedure)

(1) सर्वप्रथम चित्र के अनुसार प्रयोग व्यवस्था कर लेते हैं। उसके पश्चात् संकेतक द्वारा पैमाने पर दिखाया मान पढ़ लेते हैं।

(2) अब 50 ग्राम का बाट रखकर संकेतक द्वारा दर्शाया गया मान पढ़ते हैं। इस क्रिया द्वारा 50 ग्राम के बाट एक-एक करके बढ़ाते हैं तथा प्रत्येक के लिये स्प्रिंग के संकेतक द्वारा दर्शाया गया मान पढ़ते हैं।

(3) अब पलड़े से 50 ग्राम के बाटों को एक-एक करके उतारते हैं तथा पुन: कुछ देर रुक कर पैमाने को पढ़ते जाते हैं। बाट के चढ़ाते समय तथा उतारते समय संकेतक की स्थिति के मानों का माध्य निकाल लेते हैं।

प्रेक्षण (Observation)

पलड़े पर रखे गये बाट (बाह्य बल-F) तथा स्प्रिंग की लम्बाई में होने वाली वृद्धि (x) के लिये तालिका

क्रम सं०	पलड़े पर भार (F) ग्राम	संकेतक की स्थिति			स्प्रिंग की लम्बाई में वृद्धि x सेमी
		भार चढ़ाते समय (a)	भार उतारते समय (b)	मध्यमान $l = \frac{a+b}{2}$	
1.	0			$l_1 =$	$l_1 - l_1 = 0$
2.	50			$l_2 =$	$l_2 - l_1 =$
3.	100			$l_3 =$	$l_3 - l_1 =$

क्रमश:

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

4.	150			$l_4 =$	$l_4 - l_1 =$
5.	200			$l_5 =$	$l_5 - l_1 =$
6.	250			$l_6 =$	$l_6 - l_1 =$
7.	300			$l_7 =$	$l_7 - l_1 =$

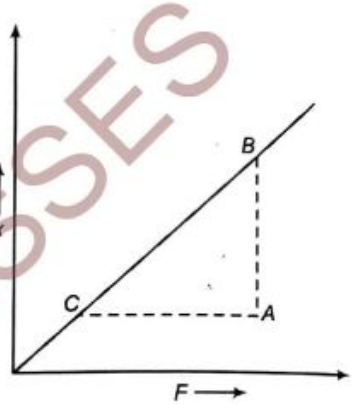
गणना (Calculation)

सारणी से F तथा x दोनो के मध्य चित्र की भाँति ग्राफ प्राप्त होता है। अब ग्राफ से

$$\frac{CA}{AB} = \frac{F}{x}$$

अत: स्प्रिग का बल नियतांक

$$K = \left(\frac{CA}{AB}\right) \text{ ग्राम/सेमी}$$



चित्र 2

परिणाम (Result)

दिये गये स्प्रिग का बल नियतांक ..... ग्राम /सेमी है।

सावधानियाँ (Precautions)

(1) स्प्रिग हल्की (light) होनी चाहिये।

(2) स्प्रिग पर लगाया बाह्य भार प्रत्यास्थता सीमा के भीतर होना चाहिये।

(3) स्प्रिग को दृढ़ आधार से लटकाया जाना चाहिये।

(4) संकेतक के स्थिर (at rest) हो जाने पर ही माप ली जानी चाहिये।

❑

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

SEMESTER EXAMINATION, (U.P.) 2018

अनुप्रयुक्त भौतिकी-I

(Applied Physics–I)

Code : 2042(A)

1st Semester

Time : 2.30 Hours] **[Maximum Marks : 50**

Notes :

(i) Attempt all questions.

(ii) Students are advised to specially check the Numerical Data of question paper in both versions. If there is any difference in Hindi translation of any question, the students should answer the question according to the English version.

(iii) Use of Pager and Mobile Phone by the students is not allowed.

नोट—सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. किन्हीं दस खण्डों के उत्तर दीजिए।

Answer any Ten parts : **[10 × 1 = 10]**

(i) निम्न में से किस भौतिक राशि की विमा नहीं होती है, लेकिन मात्रक होता है।

(अ) विकृति (ब) कोण (स) ऊर्जा

Of the following, which physical quantity has unit but no dimension.

(a) strain (b) angle (c) energy

(ii) मापी गयी राशि 20.030 से कितने सार्थक अंक हैं?

(अ) 2 (ब) 4 (स) 5

How many significant figures are there in measured quantity 20.030?

(a) 2 (b) 4 (c) 5

(iii) निम्न भौतिक राशियों में कौन-सी सदिश राशि नहीं है?

(अ) आवेग (ब) संवेग (स) सामर्थ्य

Among the following physical quantity which one is not a vector quantity?

(a) Impulse (b) Momentum (c) Power

(iv) रेखीय और कोणीय त्वरण में संबंध लिखिए।

Write down relation between linear and angular accelerations.

(v) एक कण 'r' त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर समान चाल V से गति करता है। एक चौथाई आतर्व काल में इसका विस्थापन कितना होगा?

A particle moves along circular path of radius 'r' with uniform speed v. What is it's displacement in quarter time of period?

(vi) निम्नलिखित में कौन-सा कथन सत्य है?

Which one of the following statements is correct?

(अ) वृत्तीय गति में शक्ति क्षय नहीं होता है।

No power is wasted in circular motion.

(ब) घर्षण बल सम्पर्क सतहों के क्षेत्रफल के अनुक्रमानुपाती होता है।

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

The force of friction is proportional to the area of surfaces in contact.

(स) वस्तु द्वारा किया गया कार्य (ΔW) और इसकी ऊर्जा में परिवर्तन (ΔU) के मध्य संबंध $\Delta W = \Delta U$ होता है।
The work done (ΔW) by a body and change in its energy (ΔU) are related as, $\Delta W = \Delta U$.

(vii) स्थैतिक घर्षण गुणांक (μ_s), गतिज घर्षण गुणांक (μ_k) और घूर्णन घर्षण गुणांक (μ_r) में संबंध है।

(अ) $\mu_s > \mu_k > \mu_r$ (ब) $\mu_s > \mu_r > \mu_k$

(स) $\mu_k > \mu_r > \mu_s$

The coefficients of static friction (μ_s), kinetic friction (μ_k) and rolling friction (μ_r) are related as

(a) $\mu_s > \mu_k > \mu_r$ (b) $\mu_s > \mu_r > \mu_k$

(c) $\mu_k > \mu_r > \mu_s$

(viii) जब एक वस्तु ऊर्ध्वाधर अक्ष के परित: घूर्णन गति करती है तो इसकी कोणीय संवेग और आरोपित बल-आघूर्ण के मध्य कोण कितना होता है?
When a body rotates about a vertical axis, what is the angle between it's angular momentum and applied torque vectors?

(ix) "घूर्णन गति में, किसी वस्तु की घूर्णन त्रिज्या (K) उसके द्रव्यमान पर निर्भर करती है।" यह कथन सत्य है अथवा असत्य?
"Radius of gyration (K) of a body in rotational motion depends on it's mass". This statement is true or false?

(x) पृथ्वी तल पर m द्रव्यमान वाली वस्तु की पलायन ऊर्जा का सूत्र लिखिए।
Write down the formula for escape energy of body of mass 'm' on the surface of earth.

(xi) द्रवों की श्यानता पर ताप वृद्धि का क्या प्रभाव पड़ता है?
What is the effect of temperature rise on viscosity of liquids?

(xii) ऊष्मागतिकी का कौन-सा नियम तापीय संतुलन से संबंधित है?
Which Law of thermodynamics is related to thermal equilibrium?

2. किन्हीं पाँच खण्डों के उत्तर दीजिए।
Answer any five questions [5 × 2 = 10]

(i) विमीय विश्लेषण की सीमाओं का उल्लेख कीजिए।
Mention limitations of Dimensional analysis.

(ii) दो सदिशों के अदिश और सदिश गुणनफल से आप क्या समझते हैं?
What do you understand by scalar and vector product of two vectors?

(iii) क्षैतिज से, 30° ढलान वाले नत तल पर एक गुटका ठीक स्थिर अवस्था में स्थित है। गुटके और तल के मध्य घर्षण गुणांक कितना है? ($g = 10\ m/s^2$)
A block is at just rest on an inclined plane of slope 30° with the horizontal. What is coefficient of friction between block and plane? ($g = 10\ m/s^2$).

(iv) उन कारकों का उल्लेख कीजिए जिन पर घूर्णन करते हुए दृढ़ पिण्ड का जड़त्व आघूर्ण निर्भर करता है? जड़त्व आघूर्ण का भौतिक महत्व बताइये।
State the factors on which moment of inertia of a rigid body in rotation depends?

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

Give physical significance of moment of Inertia.

(v) 'ध्रुवीय उपग्रह' क्या है? इसके उपयोग बताइये।

What is a 'Polar Satellite'? Mention its uses.

(vi) सम्पर्क कोण की परिभाषा कीजिए। केशनली में द्रव के उन्नयन को यह किस प्रकार प्रभावित करता है?

Define angle of contact. How does it affect the rise of liquid in capillary?

(vii) समतापीय और स्थिरोष्म प्रक्रियाओं में अन्तर बताइये।

Differentiate between isothermal and adiabatic process.

3. किन्हीं दो खण्डों को हल कीजिए।

Attempt any Two parts: **[2 × 5 = 10]**

(i) ρ घनत्व और T पृष्ठ तनाव वाले द्रव की सतह पर बनी लघु तरंगों की चाल $V = \sqrt{\frac{2\pi T}{\rho\lambda}}$ है, जहाँ λ तरंग दैर्ध्य है। विमीय विधि द्वारा इसकी प्रमाणिकता की पुष्टि कीजिए।

The speed (V) of short waves formed on a liquid surface having density ρ and surface tension T is given by $V = \sqrt{\frac{2\pi T}{\rho\lambda}}$, where λ is wavelength verify it's validity using method of dimensions.

(ii) अभिकेन्द्रीय त्वरण की परिभाषा कीजिए।

'r' त्रिज्या के वृत्तीय पथ पर 'v' चाल से घूमते हुए एक कण के लिए अभिकेन्द्रीय त्वरण का व्यंजक प्राप्त कीजिए।

Define centripetal acceleration. Obtain an expression for centripetal acceleration of a particle revolving along circle of radius 'r' with uniform speed 'v'.

(iii) कार्य ऊर्जा प्रमेय का उल्लेख कीजिए।

किए गए कार्य की गणना कीजिए जब 2.0 kg का एक गुटका 10 N का बल लगा कर एक खुरदरे क्षैतिज सतह पर 5 m तक खींचा जाता है?

(गतिज घर्षण गुणांक, $\mu_k = 0.1$, $g = 10\ m/s^2$)

State work energy Theorem. Calculate the work done when 2.0 kg block is pulled along rough horizontal surface through 5 m by applying a force of 10 N? (Coeff. of Kinetic friction, $\mu_k = 0.1$, $g = 10\ m/s^2$)

4. किन्हीं दो खण्डों को हल कीजिए।

Attempt any Two parts : **[2 × 5 = 10]**

(i) 'R' त्रिज्या का एक गोला क्षैतिज से $\angle\theta$ कोण पर झुके हुए तल पर घूर्णन गति प्रारम्भ करता है। इसके रेखीय त्वरण के लिए व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए।

A sphere of radius 'R' starts rolling down a plane, inclined at $\angle\theta$ to the horizontal. Derive an expression for it's linear acceleration.

(ii) एक कृत्रिम उपग्रह के घूमने के आवर्तकाल का व्यंजक प्राप्त कीजिए।
भू-स्थैतिक उपग्रह क्या होता है?

Obtain an expression for Time period of rotation of an artificial satellite What is a geostationary satellite?

AKS TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner

(iii) 1.2 m लम्बाई और 1×10^{-3} m त्रिज्या के एक ऊर्ध्वाधर लटके हुए तार को 15 N बल लगाकर लम्बाई के अनुदिश खींचा जाता है। गणना कीजिए—

A vertically suspended wire of length 1.2 m and radius 1×10^{-3} in pulled along length by a force 15 N. Calculate

(a) उत्पन्न प्रतिबल (Stress produced and)

(b) तार की लम्बाई में वृद्धि (Increase in length of wire) ($Y = 12 \times 10^{10}$ N/m^2)

5. किन्हीं दो खण्डों को हल कीजिए।

Attempt any two parts : **[2 × 5 = 10]**

(i) द्रवों से सम्बन्धित 'पृष्ठ तनाव' और 'श्यानता' गुणों को समझाइये।
द्रवों के प्रवाह में 'रेनोल्ड संख्या' का क्या महत्त्व है?

Explain the properties of 'surface tension' and 'Viscosity' related to a liquids.
What is importance of 'Reynold's number' in flow of liquids?

(ii) ऊष्मीय प्रसार गुणांक को परिभाषित कीजिए। रेखीय प्रसार, क्षेत्रीय प्रसार तथा आयतन प्रसार गुणांकों में संबंध स्थापित कीजिए।

Define coefficient of Thermal expansion and derive the relation between coefficients of linear, surface and volume expansions.

(iii) ऊष्मीय चालकता गुणांक से आप क्या समझते है? इसका S.I. मात्रक और विमा बताइये।
1×10^{-4} m^2 अनुप्रस्थकाट वाले एक समरूप छड़ मे, जिसमे ताप प्रवणता 5 केल्विन/मी है, 4×10^{-4} J/s ऊष्मा प्रवाहित होती है। इसके पदार्थ की ऊष्मीय चालकता गुणांक ज्ञात कीजिए।

What do you mean by coefficient of thermal conductivity? Give its S.I unit and dimension.
4×10^{-4} J/s heat is conducted through a rod of uniform cross-section 1×10^{-4} m^2 which has temperature gradient 5 Kelvin/m. Find coefficient of thermal conductivity of it's material.

O

AKC TECHNICAL CLASSES

Scanned with CamScanner