सार्थक

प्राविधिक शिक्षा परिषद उत्तर प्रदेश द्वारा
स्वीकृत नवीनतम् पाठ्यक्रमानुसार

अनुप्रयुक्त
गणित-III
Applied Mathematics-III

द्वितीय वर्ष (तृतीय सेमेस्टर) : डिप्लोमा इंजीनियरिंग के विद्यार्थियों के लिए

लेखक :

अजय कुमार

एम० एस–सी० (गणित)
व्याख्याता (भू०पू०)

कु० मायावती रा० म० पॉली०
बादलपुर (गौतमबुद्धनगर)

परामर्शदाता

श्रीमती अनुला
व्याख्याता (गणित)
राजकीय पालीटेक्निक,
बरेली

डा० सुभाष विश्वकर्मा
व्याख्याता (गणित)
राजकीय पालीटेक्निक,
गोरखपुर

श्री राम भवन
व्याख्याता (गणित)
चंदौली पालीटेक्निक,
चंदौली

डा० आर०एस० पुण्डीर
व्याख्याता (गणित)
आर०बी०एस० पॉलीटेक्निक
बिचपुरी (आगरा)

श्री हिमाँशु श्रीवास्तव
व्याख्याता (गणित)
लिटिल फ्लावर पॉलीटेक्निक
गोरखपुर

श्री ब्रजेश कुमार
(प्रधानाचार्य)
हंडिया पालीटेक्निक,
हंडिया (प्रयागराज)

प्रकाशक :

जयप्रकाश नाथ पब्लिकेशन्स

गाँधी आश्रम चौराहा
नौचन्दी रोड, मेरठ — 250 002 (यू० पी०)

www.polytechnicpdf.com

SYLLABUS
Applied Mathematics-III

■ Rationale :

Contents of this course provide understanding of some elementary and advanced mathematics algorithms and their applications of solving engineering problems. Content of this course will enable students to use some advanced techniques like Beta-Gamma function, Fourier series, Laplace transform and probability distributions in solving complex engineering problems.

■ Learning Outcomes

After undergoing this course, the students will be able to :

- Understand matrix operations and uses of matrix in different problems.
- Apply elementary row and column operations in finding inverse of a matrix.
- Find Eigen values, Eigen vectors of a matrix and their different properties.
- Understand degree/order of differential equations and their solution techniques.
- Use differential equations in engineering problems of different areas.
- Find fourier series expansion of a function.
- Apply Laplace transform and their applications in solving engineering problems.
- Understand concept of probability distribution and their applications.

DETAILED CONTENTS

1. MATRICES (16 Periods)

1.1 Algebra of Matrices, Inverse :
Addition, Multiplication of matrices, Null matrix and a unit matrix, Square matrix, Symmetric, Skew Symmetric, Hermitian, Skew Hermition, Orthogonal, Unitary, Diagonal and Triangular Matrix, Determinant of a matrix.
Definition and Computation of inverse of a matrix.

1.2 Elementary Row/Column Transformation :
Meaning and use in computing inverse and rank of a matrix.

1.3 Linear Dependence, Rank of a matrix :
Linear dependence/independence of vectors, Definition and computation of rank of matrix. Computing rank through determinants, Elementary row transformation and through the concept of a set of independent vectors, Consistency of equations.

1.4 Eigen Pairs, Cayley-Hamilton Theorem :
Definition and evaluation of eigen values and eign vectors of a matrix of order two and three, Cayley-Hamilton theorem (without Proof) and its verification, Use in finding inverse and powers of a matrix.

2. DIFFERENTIAL CALCULUS (15 Periods)

2.1 Function of two variables, identification of surfaces in space, conicoids.

2.2 Partial Differentiation :
Directional derivative, Gradient, Use of gradient f, Partial derivatives, Chain rule, Higher order derivatives, Euler's theorem for homogeneous functions, Jacobians.

2.3 Vector Calculus :
Vector function, Introduction to double and triple integral, differentiation and integration of vector functions, gradient, divergence and curl, differential derivatives.

3. DIFFERENTIAL EQUATIONS (15 Periods)

3.1 Formation, order, Degree, Types, Solution :
Formation of differential equations through physical, geometrical mechanical and electrical considerations, Order, Degree of a differential equations, Linear, Non-linear equations.

www.techpdf.com

3.2 First Order Equations :
Variable seperable, equations reducible to seperable forms, Homogeneous equations, equations reducible to homogeneous forms, Linear and Bernoulli form exact equation and their solutions.

3.3 Higher Order Linear Equation :
Property of solution, Linear differential equation with constant coefficients (PI for $X = e^{ax}$, $\sin ax$, $\cos ax$, X^n, $e^{ax}V$, XV.

3.4 Simple Applications :
LCR circuit, Motion under gravity, Newton's law of cooling, radioactive decay, Population growth, Force vibration of a mass point attached to spring with and without damping effect. Equivalence of electrical and mechanical system.

4. INTEGRAL CALCULUS-II (12 Periods)

4.1 Beta and Gamma Functions :
Definition, Use, Relation between the two, their use in evaluating integrals.

4.2 Fourier Series :
Fourier series of $f(x)$, $-n < x < n$, odd and even function, Half range series.

4.3 Laplace Transform :
Definition, Basic theorem and properties, Unit step and Periodic functions, inverse laplace transform, Solution of ordinary differential equations.

5. PROBABILITY AND STATISTICS (12 Periods)

5.1 Probability :
Introduction, Addition and Multiplication theorem and simple problem.

5.2 Distribution :
Discrete and continuous distribution, Binomial Distribution, Poisson Distribution, Normal Distribution.

■ Instructional Strategy

The content of this course is to be taught on conceptual basis with plenty of real world example. The basic elements of Laplace transform, Differential equations and Applications of differential can be taught with engineering of relevant branch.

Means of Assessment

- Assignments and Quiz/Class Tests
- Mid-term and End-term Written Test
- Model/Prototype Making

SUGGESTED DISTRIBUTION OF MARKS

Topic	Time Allotted (Periods)	Marks Allotted (%)
1.	16	24
2.	15	20
3.	15	20
4.	12	18
5.	12	18
Total	**70**	**100**

www.polytechnicpdf.com

विषय सूची

खण्ड-1 : आव्यूह 1-64

1. आव्यूह
2. प्रारम्भिक पंक्ति/स्तंभ रूपांतरण
3. आइगेन मान तथा कैले-हैमिलटन प्रमेय

खण्ड-2 : अवकल समीकरण 65-140

4. प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के अवकल समीकरण
5. उच्च क्रम के रैखिक अवकल समीकरण
6. अवकल समीकरण के अनुप्रयोग

खण्ड-3 : अवकल गणित 141-226

7. दो तथा तीन चरों के फलन तथा अन्तरिक्ष में पृष्ठों की पहचान
8. आंशिक अवकलन
9. जैकोबियन
10. सदिश अवकलन
11. ग्रेडिएंट, डाइवर्जेन्स तथा कर्ल
12. द्विगुण एवं त्रिगुण समाकलन : परिचय
13. सदिशों का समाकलन

www.polytechnicpdf.com

खण्ड-4 : समाकलन गणित 227-310

14. लाप्लास रूपांतरण 229
15. प्रतिलोम लाप्लास रूपांतरण 252
16. फोरियर श्रेणी 272
17. बीटा तथा गामा फलन 292

खण्ड-5 प्रायिकता एवं सांख्यिकी 311-374

18. प्रायिकता 313
19. द्विपद, प्वायसन तथा प्रसामान्य बंटन 332
20. न्यूनतम वर्ग विधि से वक्र आसंजन 367

परिशिष्ट 375-404

A. रेखा, पृष्ठ तथा आयतन समाकल 375
B. ग्रीन, गौस एवं स्टोक के प्रमेय 390

अनुप्रयुक्त गणित-द्वितीय, प्रश्न-पत्र

www.polytechnicpdf.com

पूज्य माताजी व पिताजी
की पुण्य स्मृति को
"सादर समर्पित"

www.polytechnicpdf.com

खण्ड : 1

आव्यूह

1. आव्यूह 3

2. प्रारंम्भिक पंक्ति/स्तंभ रूपांरतरण 31

3. आइगेन मान तथा कैले-हैमिल्टन प्रमेय 52

www.polytechnicpdf.com

1

आव्यूह

CHAPTER

(Matrices)

1.1. परिभाषा (Definition)

आव्यूह संख्याओं या फलनों का आयताकार क्रमित सारणी (Ordered Rectangular Array) है।

यदि mn संख्याओं (वास्तविक या सम्मिश्र) के समुच्चय के अवयवों को m पंक्तियों (rows) तथा n स्तंभों (columns) के एक आयताकार क्रमित सारणी (array) के रूप में व्यवस्थित किया जाए तो इसे $m \times n$ (m by n) क्रम का आव्यूह कहा जाता है तथा mn संख्याओं में से प्रत्येक इसका अवयव (element) या तत्व कहलाता है।

सामान्यत: किसी आव्यूह को अंग्रेजी के बड़े अक्षर, (Capital Letter) से व्यक्त किया जाता है।

यदि $A[m \times n]$ क्रम का आव्यूह हो तो इसे निम्न रूप में व्यक्त करते हैं :

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

यहाँ क्षैतिज रेखायें (Horizontal lines) पंक्ति (Rows) तथा ऊर्ध्वाधर रेखायें (Vertical lines) स्तंभ (Column) कहलाती हैं।

यहाँ $a_{11}, a_{12}, \ldots a_n, a_{21}, \ldots a_{m1}, \ldots a_{mn}$ आदि आव्यूह के तत्व है। व्यापक रूप में a_{ij} उस अवयव को प्रदर्शित करता है, जो किसी आव्यूह में iवीं पंक्ति तथा jवें स्तंभ के प्रतिच्छेदन बिन्दु पर है। जैसे a_{12} वह अवयव है जो प्रथम पंक्ति तथा द्वितीय स्तंभ के परिच्छेद बिन्दु पर है।

उदाहरण : यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, तो इसके अवयव 1, 2, 3, 4, , 5, 6 हैं, तथा $a_{12} = 2$ प्रथम पंक्ति तथा दूसरे स्तम्भ का अवयव है।

नोट :

- किसी आव्यूह $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ को $(a_{ij})_{m \times n}$ या $\| a_{ij} \|_{m \times n}$ से भी व्यक्त किया जा सकता है।

1.2. आव्यूहों के प्रकार (Types of Matrices)

1. स्तंभ आव्यूह (Column Matrix) : यदि किसी आव्यूह में केवल एक स्तम्भ हो तो इसे स्तंभ आव्यूह कहते हैं। इसमें पंक्तियों की संख्या एक से अधिक हो सकती है।

www.polytechnicpdf.com

जैसे $A=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ एक 3×1 क्रम का स्तम्भ आव्यूह है।

व्यापक रूप में $A=[a_{ij}]_{m\times1}$ $m\times1$ क्रम का स्तंभ आव्यूह है। इसे स्तंभ सदिश (Row vector) भी कहते हैं।

2. पंक्ति आव्यूह (Row Matrix) : यदि किसी आव्यूह में केवल एक पंक्ति हो तो उसे पंक्ति आव्यूह कहते हैं। इसमें स्तंभों की संख्या 1 से अधिक हो सकती है।

जैसे $B=[1\,2\,3]_{1\times3}$ एक 1×3 क्रम का पंक्ति आव्यूह है। जिसमें एक पंक्ति तथा तीन स्तंभ हैं।

व्यापक रूप में $B=[b_{ij}]_{1\times n}$, $1\times n$ क्रम का पंक्ति आव्यूह है। जिसमें एक पंक्ति तथा n स्तंभ हैं। इसे पंक्ति सदिश (column vector) भी कहा जाता है।

3. क्षैतिज आव्यूह (Horizontal Matrix) : जिस आव्यूह में पंक्तियों की संख्या स्तंभों से कम हो उसे क्षैतिज आव्यूह कहते हैं।

जैसे $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}_{2\times3}$ एक क्षैतिज आव्यूह है क्योंकि इसमें 2 पंक्तियाँ तथा 3 स्तम्भ हैं।

4. ऊर्ध्वाधर आव्यूह (Vertical Matrix) : जिस आव्यूह में स्तंभों की संख्या पंक्तियों से कम हो उसे ऊर्ध्वाधर आव्यूह कहते हैं।

जैसे $B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\\e&f\end{bmatrix}_{3\times2}$ एक ऊर्ध्वाधर आव्यूह है क्योंकि इसमें 2 स्तंभ तथा 3 पंक्तियाँ हैं।

5. वर्ग आव्यूह (Square Matrix) : जिस आव्यूह में पंक्ति तथा स्तंभों की संख्या बराबर हों उसे वर्ग आव्यूह कहते हैं। अतः $n\times n$ क्रम का आव्यूह, एक वर्ग आव्यूह है जिसका क्रम n है

जैसे : $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}_{2\times2}$, $B=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&5\\6&2&3\end{bmatrix}_{3\times3}$ आदि।

6. (i) मुख्य विकर्ण एवं इसके अवयव (Principal Diagonal and Diagonal elements) : यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ एक n आव्यूह हो तो आव्यूह के वे अवयव जिनके लिए $i=j$ हो तो मुख्य विकर्ण के अवयव कहलाते है। अतः $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots a_{nn}$ आदि विकर्ण के अवयव हैं।

विकर्ण के अवयव जिस रेखा पर होते हैं, वह आव्यूह का मुख्य विकर्ण कहलाता है—

जैसे—$A=\begin{bmatrix}3&4&5\\6&7&8\\2&3&1\end{bmatrix}$ मुख्य विकर्ण में A के विकर्ण अवयव 3, 7 तथा 1 हैं।

(ii) विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix) : यदि किसी वर्ग आव्यूह $[a_{ij}]_{n\times n}$ में मुख्य विकर्ण को छोड़कर शेष सभी अवयव शून्य हों तो उसे विकर्ण आव्यूह कहते हैं।

अतः $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ विकर्ण आव्यूह होगा, यदि $a_{ij}=0$ जब $i\neq j$ तथा इसे निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है :
$A=\text{diag}[a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}]$

जैसे—$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ एक विकर्ण आव्यूह है।

7. अदिश आव्यूह (Scalar Matrix) : जिस विकर्ण आव्यूह के विकर्ण के सभी अवयव बराबर हों (शेष शून्य हों) उसे अदिश आव्यूह कहते हैं।

www.polytechnicpdf.com

अतः $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ अदिश आव्यूह होगा, जहाँ $b_{ij}=0$ यदि $i\neq j$
तथा $b_{ij}=k$ यदि $i=j$, जहाँ k कोई अचर है।

जैसे $A=[4], B=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$

क्रमशः प्रथम, द्वितीय व तृतीय क्रम के अदिश आव्यूह हैं।

8. इकाई आव्यूह या तत्समक आव्यूह (Unit Matrix or Indentity Matrix) : एक वर्ग आव्यूह जिसमें मुख्य विकर्ण के सभी अवयव 1 तथा शेष सारे अव्यव शून्य हो, इकाई आव्यूह या तत्समक आव्यूह कहलाता है।

स्पष्ट है आव्यूह $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ इकाई आव्यूह होगा यदि

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$$

सामान्यतः nवें क्रम के इकाई आव्यूह को I_n से सूचित करते हैं। यदि क्रम ज्ञात हो तो इसे I से भी व्यक्त किया जाता है।

जैसे : $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ तथा $I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ क्रमशः द्वितीय व तृतीय क्रम के इकाई आव्यूह हैं।

9. शून्य या रिक्त आव्यूह (Zero or Null Matrix) : यदि किसी आव्यूह के सारे तत्व शून्य हों तो इसे शून्य या रिक्त आव्यूह (Zero or Null Matrix) कहते हैं। इसे O से सूचित करते हैं

जैसे $[0], \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ आदि शून्य आव्यूह हैं।

10. त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular Matrix) : यदि किसी वर्ग आव्यूह में मुख्य विकर्ण के ऊपर अथवा नीचे के सभी अवयव शून्य हों तो आव्यूह त्रिभुजीय आव्यूह कहलाता है। **[2015]**

उच्च तथा निम्न त्रिभुजीय आव्यूह (Upper and Lower Triangular Matrices) : यदि किसी त्रिभुजीय आव्यूह के मुख्य विकर्ण के नीचे के सारे अवयव शून्य हों तो उसे उच्च त्रिभुजीय आव्यूह कहते हैं तथा यदि मुख्य विकर्ण के ऊपर के सभी अवयव शून्य हों तो उसे निम्न त्रिभुजीय आव्यूह कहते हैं।

जैसे $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ उच्च त्रिभुजीय तथा $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 3 & 0\\3 & 6 & 1\end{bmatrix}$ निम्न त्रिभुजीय आव्यूह है।

11. उपआव्यूह (Sub-matrix) : किसी आव्यूह के कुछ पंक्तियों या कुछ स्तम्भों या दोनों को छोड़ने से प्राप्त आव्यूह को उपआव्यूह कहते हैं।

जैसे $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\5 & 6 & 7 & 8\end{bmatrix}$ के उपआव्यूह $\begin{bmatrix}1 & 2\\5 & 6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 4\\7 & 8\end{bmatrix}, [1], [2], \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\5 & 6 & 7\end{bmatrix}$ आदि हैं।

12. समान आव्यूह (Equal Matrices) : दो आव्यूह समान कहे जाते हैं यदि

(i) वे समान क्रम के हैं।

(ii) दोनों आव्यूहों के संगत अवयव बराबर हों।

अर्थात् यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}, B=[b_{ij}]_{m\times n}$ तो $A=B$ होगा यदि i तथा j के सभी मानों के लिए $a_{ij}=b_{ij}$

जैसे $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$ तो $A=B$.

www.polytechnicpdf.com

1.3 आव्यूहों पर संक्रियायें (Operations on Matrices)

आव्यूहों का योग (Addition of Matrices) : यदि A तथा B समान क्रम के आव्यूह हों तो उनका योग $A+B$ संगत अवयवों को जोड़ने से प्राप्त होता है।

अतः $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$

जैसे : $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}$ तो $A+B=\begin{bmatrix}1+5 & 2+6\\ 3+7 & 4+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 10 & 12\end{bmatrix}$

आव्यूहों का अंतर : यदि A तथा B समान क्रम के आव्यूह हों तो उनका अंतर $(A-B)$ उनके संगत अवयवों के अंतर से प्राप्त होता है। अतः $A-B=A+(-B)$

जैसे $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

तो $A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix}1-4 & 2-5 & 3-6\\ 4-1 & 5-2 & 6-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -3 & -3\\ 3 & 3 & 3\end{bmatrix}$. $\left[\because -B=\begin{bmatrix}-4 & -5 & -6\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}\right]$

आव्यूहों के योग के गुण (Properties of Matrix Addition) :

(i) एक ही क्रम के आव्यूह जोड़े या घटाये जा सकते हैं।

(ii) क्रम विनिमेय नियम (Commutative Law) : आव्यूहों का योग क्रम विनिमेय नियम का पालन करता है।

अतः $A+B=B+A$, जहाँ A तथा B समान क्रम के आव्यूह हैं।

(iii) साहचर्य नियम (Associative Law) : आव्यूहों का योग साहचर्य नियम का पालन करता है।

अतः $A+(B+C)=(A+B)+C$

(iv) यदि शून्य आव्यूह O तथा आव्यूह A का क्रम समान हो तो $A+O=O+A=A$

जैसे : $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ तथा $O=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ तो $A+O=O+A=A$

1.3.1 आव्यूहों का अदिश गुणज (Seclar Multiple of Matrices)

यदि किसी आव्यूह को अदिश k से गुणा किया जाए तो आव्यूह के प्रत्येक अवयव में k से गुणा हो जाता है।

अर्थात् $kA=k[a_{ij}]=[k\,a_{ij}]$

जैसे : यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ तो $2A$ का मान बतायें। **[2012]**

उत्तर

$$2A=2\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12\end{bmatrix}$$

1.3.2 अदिश गुणन के गुण (Properties of Scalar Multiplication) :

1. यदि k तथा l दो अदिश हों तथा A कोई आव्यूह हों, तो

(i) $(k+l)A=kA+lA$ (ii) $k(lA)=(kl)A$

(iii) $(-k)A=-(kA)=k(-A)$

2. वितरण नियम (Distribution Law) : $k(A+B)=kA-kB$

जहाँ A तथा B समान क्रम के आव्यूह हैं।

1.4 आव्यूहों का गुणन (Multiplication of Matrices)

दो आव्यूहों A तथा B का गुणन तभी संभव है, जब A में स्तंभों की संख्या, B में पंक्तियों की संख्या के बराबर हों।

परिभाषा : यदि $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ तथा $B=[b_{jk}]_{n\times p}$

www.polytechnicpdf.com

दो आव्यूह हों तो A तथा B का गुणनफल $m \times p$ क्रम का आव्यूह $[C_{ik}]_{m\times p}$ होगा जिसका (i, k) वाँ अवयव आव्यूह A की iवीं पंक्ति तथा आव्यूह B के kवें स्तंभ के संगत अवयवों को गुणा कर जोड़ने से प्राप्त होगा।

अतः $AB = [C_{ik}]_{m\times p}$, जहाँ $C_{ik} = \Sigma\, a_{ij} b_{jk}$

उदाहरण : यदि $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

यहाँ AB परिभाषित है क्योंकि A में स्तंभों की संख्या $= 2 = B$ में पंक्तियों की संख्या

अब
$$AB = \begin{array}{c} \\ R_1 \\ R_2 \end{array}\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{bmatrix} 6\times 2+9\times 7 & 6\times 6+9\times 9 & 6\times 0+9\times 8 \\ 2\times 2+3\times 7 & 2\times 6+3\times 9 & 2\times 0+3\times 8 \end{bmatrix} \quad \ldots(1)$$

$$= \begin{bmatrix} 12+63 & 36+81 & 0+72 \\ 4+21 & 12+27 & 0+24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 117 & 72 \\ 25 & 39 & 24 \end{bmatrix} = C \text{ (माना)}$$

(1) में दिखायी गई गणना को निम्न रूप में किया गया है।

पहली पंक्ति	द्वितीय पंक्ति
(i) प्रथम अवयव $[6\ \ 9]\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = 6\times 2+9\times 7$	(i) $[2\ \ 3]\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = 2\times 2+3\times 7$
(ii) द्वितीय अवयव $[6\ \ 9]\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = 6\times 6+9\times 9$	(ii) $[2\ \ 3]\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} = 2\times 6+3\times 9$
(iii) तृतीय अवयव $[6\ \ 9]\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} = 6\times 0+9\times 8$	(iii) $[2\ \ 3]\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} = 2\times 0+3\times 8$

नोट

- (i) यदि AB परिभाषित हो तो BA भी परिभाषित हो आवश्यक नहीं है, ऊपर के उदाहरण में B में 3 स्तंभ है जबकि A में 2 पंक्तियाँ हैं। अतः BA परिभाषित नहीं है।
- (ii) $A \times A = A^2$; $A \times A \times A = A^3$; ... $A \times A \times A \times \ldots n$ बार $= A^n$, जहाँ A एक वर्ग आव्यूह है।
- (iii) $I^2 = I^3 = \ldots I^n = I$, जहाँ I इकाई आव्यूह है।
- (iv) $A.I = I.A = A$, जहाँ I, A के समान क्रम का इकाई आव्यूह है।

1.4.1 आव्यूह गुणन के गुण (Properties of Matrix Multiplication)

1. **साहचर्य नियम :** यदि A, B तथा C तीन आव्यूह हों तो $(AB)C = A(BC)$, जहाँ दोनों पक्ष परिभाषित हैं।
2. **वितरण नियम :** यदि A, B, C तीन आव्यूह हों तो $A(B+C) = AB + AC$ जहाँ दोनों पक्ष परिभाषित हैं।
3. यदि A कोई वर्ग आव्यूह हो तथा I उसी क्रम का इकाई आव्यूह हो तो $AI = IA = A$
4. यदि $AB = O$, अर्थात् AB शून्य आव्यूह है तो A अथवा B अथवा दोनों का शून्य होना आवश्यक नहीं है।

1.5 अन्य परिभाषायें :

(i) परिवर्त आव्यूह (Tranopose Matrix) : यदि किसी दिए गए आव्यूह A की पंक्तियों को स्तंभों तथा स्तंभों को पंक्तियों में बदल दिया जाए तो प्राप्त आव्यूह A का परिवर्त आव्यूह कहलाता है तथा इसे A^T या A^t या A' से सूचित किया जाता है।

यदि A, $m \times n$ क्रम का आव्यूह है तो A', $n \times m$ क्रम का आव्यूह होगा।

www.Polytechnicpdf.com

उदाहरण : यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{bmatrix}$ तो इसका परिवर्त आव्यूह ज्ञात करें। [2012]

हल : इसका परिवर्त आव्यूह $A' = \begin{bmatrix} 3 & 1-2i \\ 1+2i & 2 \end{bmatrix}$

(ii) सममित आव्यूह (Symmetric Matrix) : यदि किसी वर्ग आव्यूह का परिवर्त आव्यूह उसके बराबर हो तो आव्यूह सममित कहलाता है। अर्थात् यदि $A = A'$ हो तो A सममित होगा।

स्पष्टत: A सममित है $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$

उदाहरण : आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}$

सममित आव्यूह हैं क्योंकि $A = A'$ तथा $B = B'$.

(iii) विषम सममित आव्यूह (Skew Symmetric Matrix) : यदि किसी वर्ग आव्यूह के लिए $A = -A'$ हो तो उसे विषम सममित आव्यूह कहते हैं।

स्पष्ट है इस दशा मे i तथा j के प्रत्येक मान के लिए $a_{ij} = -a_{ji}$

यदि $i = j$ ले।

पुन: $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$

अत: इस विषम सममित आव्यूह के मुख्य विकर्ण के अवयव शून्य होते हैं।

उदाहरण : $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & h & g \\ -h & 0 & f \\ -g & -f & 0 \end{bmatrix}$ आदि विषम सममित हैं।

सममित तथा विषम सममित आव्यूह के गुण (Properties of Symmetric and Sken symmetric Matrices)

सममित : (i) यदि A सममित आव्यूह है, तो $A^2, A^2, \ldots A^n$ सममित होंगे

(ii) यदि A सममित आव्यूह है तो $A + A'$ सममित अव्यूह होगा।

(iii) यदि A तथा B सममित हैं तो AB सममित होगा यदि $A = B$

(iv) यदि A तथा B सममित आव्यूह हैं, तो $A + B$ तथा $AB + BA$ सममित होगा।

विषम सममित : (i) यदि A विषम सममित है तो $A - A'$ विषम सममित होगा।

(ii) यदि A तथा B सममित हैं तो $AB - BA$ विषम सममित होगा।

2. प्रत्येक वर्ग आव्यूह A को सममित तथा विषम सममित आव्यूह के योग (sum) के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

(iv) लांबिक आव्यूह या लम्ब कोणीय आव्यूह (Orthogonal Matrix) : यदि A एक वर्ग आव्यूह हो तथा

$$AA' = A'A = I$$

हो तो A लांबिक आव्यूह कहलाता है। **[2008, 2014]**

उदाहरण : यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तो $A' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad AA' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

www.polytechnicpdf.com

$$=\begin{bmatrix} \cos^2\alpha+\sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha+\sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha+\cos^2\alpha \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

अत: A एक लांबिक आव्यूह है।

(v) सम्मिश्र आव्यूह (Complex Matrix) : यदि किसी आव्यूह के अवयव सम्मिश्र संख्यायें हों तो वह सम्मिश्र आव्यूह कहलाता है।

उदाहरण : $A=\begin{bmatrix} 2+i & \\ 3+2i & 2-i \end{bmatrix}$ एक सम्मिश्र आव्यूह है ।

(vi) संयुग्मी आव्यूह (Conjugate Matrix) : किसी सम्मिश्र आव्यूह A के अवयवों को उसके संगत संयुग्मी अवयवों से बदलने से प्राप्त आव्यूह संयुग्मी आव्यूह कहलाता है। इसे $\bar{A}$ से सूचित किया जाता है।

जैसे $A=\begin{bmatrix} 1-2i & 3+4i \\ 4-i & 2+3i \end{bmatrix}$ तो $\bar{A}=\begin{bmatrix} 1+2i & 3-4i \\ 4+i & 2-3i \end{bmatrix}$

(vii) संयुग्मी परिवर्त आव्यूह (Conjugate Transpose Matrix) : सम्मिश्र आव्यूह A के संयुग्मी आव्यूह $\bar{A}$ के परिवर्त आव्यूह को A का संयुग्मी परिवर्त आव्यूह कहा जाता है। इसे $(\bar{A})^T$ या A^θ या A^* से सूचित किया जाता है।

जैसे : यदि $A=\begin{bmatrix} 1-2i & 3+4i \\ 4-i & 2+3i \end{bmatrix}$

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} 1+2i & 3-4i \\ 4+i & 2-3i \end{bmatrix}$$

अत: $(\bar{A})^T$ या A^θ या $A^*=\begin{bmatrix} 1+2i & 4-i \\ 3-4i & 2-3i \end{bmatrix}$

(viii) हरमिटियन आव्यूह (Hermitian Matrix) : यदि कोई सम्मिश्र आव्यूह A अपने संयुग्मी परिवर्त आव्यूह के बराबर हो अर्थात् $A^\theta=(\bar{A})^T=A$ हो तो उसे हरमिटियन आव्यूह कहते हैं।

स्पष्ट है हरिमिटियन आव्यूह के लिए i तथा j के सभी मानों के लिए $a_{ij}=c_{ji}$ तथा इसके मुख्य विकर्ण के सभी अवयव वास्तविक होते हैं।

उदाहरण : सिद्ध करें $\begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 3+4i \\ 2-3i & 0 & 4-5i \\ 3-4i & 4+5i & 2 \end{bmatrix}$

हरमिटियन आव्यूह है। **[2013]**

हल : माना $A=\begin{bmatrix} 1 & 2-3i & 3+4i \\ 2-3i & 0 & 4-5i \\ 3-4i & 4+5i & 2 \end{bmatrix}$ तो $\bar{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2-3i & 3-4i \\ 2+3i & 0 & 4+5i \\ 3+4i & 4-5i & 2 \end{bmatrix}$

अब $A^\theta=(\bar{A})^T=\begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 3+4i \\ 2-3i & 0 & 4-5i \\ 3-4i & 4+5i & 2 \end{bmatrix}=A \quad \therefore \quad A^\theta=A$

अत: A हरमिटियन आव्यूह है।

(ix) विषम हरमिटियन आव्यूह (Skew Harmitian Matrix) : यदि A कोई वर्ग आव्यूह है, तो A को विषम हरमिटियन आव्यूह कहा जाता है। यदि

$$A^\theta=-A \text{ या } (\bar{A})^T=-A$$

स्पष्ट है $[a_{ij}]_{m\times n}$ विषम हरमिटियन होगा यदि i तथा j के सभी मानों के लिए

$$a_{ij}=-\bar{a}_{ji}$$

www.polytechnicpdf.com

या $a_{ij} + a_{ji} = 0$

यदि $i = j$ हो तो $a_{ii} = 0$

अतः विषम हरमिटियन आव्यूह में मुख्य विकर्ण के अवयव काल्पनिक होंगे अथवा शून्य होंगे।

उदाहरण : $A = \begin{bmatrix} 0 & -3+4i \\ 3+4i & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3-4i \\ 3-4i & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad A^\theta = (\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 0 & 3-4i \\ -3-4i & 0 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 0 & -3+4i \\ 3+4i & 0 \end{bmatrix} = -A$$

अतः A विषम हरमिटियन है।

(x) ऐकिक या एकल आव्यूह (Unitary Matrix) : वर्ग आव्यूह A ऐकिक या एकल आव्यूह कहलाता है यदि

$$AA^\theta = A^\theta A = I.$$

उदाहरण : सिद्ध कीजिए आव्यूह $A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$ ऐकिक आव्यूह है। **[2010]**

हल : $A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$ .. संयुग्मी आव्यूह $\bar{A} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}$

अतः परिवर्त आव्यूह $A^\theta = (\bar{A})^T = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$

अब
$$A^\theta A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1\times 1+(1+i)(1-i) & 1\times(1+i)+(1+i)(-1) \\ (1-i)\times 1+(-1)(1-i) & (1-i)(1+i)+(-1)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+1-i^2 & 1+i-1-i \\ 1-i+i-1 & 1-i^2+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1+1+1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\times 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= I$$

अतः आव्यूह ऐकिक आव्यूह है।

(xi) अव्युत्क्रमणीय आव्यूह (Singular Matrix) : यदि किसी वर्ग आव्यूह के सारणिक का मान शून्य हो अर्थात् $|A| = 0$, तो A को अव्युत्क्रमणीय आव्यूह कहा जाता है।

जैसे : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ तो $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6-6 = 0$

अतः यह अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

ऐसे आव्यूहों का व्युत्क्रम (Inverse) नहीं निकाला जा सकता।

(xii) व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Non-Singular Matrix) : यदि किसी वर्ग आव्यूह के सारणिक का मान अशून्य अर्थात् $|A| \neq 0$ हो तो A को व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Invertible Matrix) कहा जाता है।

जैसे $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ तो $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4-6 = -2 \neq 0$

अतः A व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

www.polytechnicpdf.com

यदि A व्युत्क्रमणीय है, तो इसका व्युत्क्रम निकाला जा सकता है।

(xiv) सहखण्ड आव्यूह (Cofactor Matrix) : किसी आव्यूह A के अवयवों को उसके संगत सारणिक $|A|$ के अवयवों के संगत सहखंडों (cofactors) से प्रतिस्थापित करके बने आव्यूह को सहखंड आव्यूह कहते हैं। इसे A^c या $[A_{ij}]$ से निरूपित किया जाता है। अत:

जैसे : $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ तो $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

$A_{11} = 5$ का सहखण्ड $= 8$; $A_{12} = 6$ का सहखण्ड $= -7$;

$A_{21} = 7$ का सहखण्ड $= -6$; $A_{22} = 8$ का सहखण्ड $= 5$

अत: सहखण्ड आव्यूह $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$

(xv) सहखण्डज आव्यूह (Adjoint Matrix) : किसी आव्यूह A के सहखंड आव्यूह (Cofactor Matrix) A^C के परिवर्त (Transpose) आव्यूह को सहखण्डज आव्यूह कहा जाता है। इसे Adj. A से निरूपित करते हैं।

अत: Adj. $A = (A^C)^T$ या $[A_{ij}]^T$,

उदाहरण : यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तो $|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

$A_{11} = \cos\alpha$ का सहखण्ड $= \cos\alpha$; $A_{12} = \sin\alpha$ का सहखण्ड $= \sin\alpha$;

$A_{21} = -\sin\alpha$ का सहखण्ड $= -\sin\alpha$;

$A_{22} = \cos\alpha$ का सहखण्ड $= \cos\alpha$

$\therefore$ सहगुणनखण्ड आव्यूह $A^C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

अत: Adj. $A = (A^C)^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ उत्तर

सहखण्डज आव्यूह के गुण : यदि A, n क्रम का वर्ग आव्यूह है

(i) $A\,(\text{Adj. } A) = (\text{Adj. } A)\,A = I$, जहाँ I, n क्रम का इकाई आव्यूह है।

(ii) यदि $|A| \neq 0$ तो $\dfrac{A\,(\text{Adj. } A)}{|A|} = \dfrac{(\text{Adj. } A)\,A}{|A|} = I$

(iii) Adj. $(AB) =$ Adj. B . Adj. A

(xvi) (a) व्युत्क्रम या प्रतिलोम आव्यूह (Inverse of a Matrix)

यदि A व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह (non-singular matrix) हो तथा B उसी क्रम का ऐसा आव्यूह हो, जिसके लिए

$$AB = BA = I$$

तो B को A का व्युतक्रम या प्रतिलोम आव्यूह रहते हैं तथा इसे A^{-1} से सूचित करते हैं।

इसी तरह A^{-1} का प्रतिलोम आव्यूह A होगा।

सहखण्डज आव्यूह की सहायता से प्रतिलोम आव्यूह A^{-1} को निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है :

$$\mathbf{A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,Adj.\,A}$$

व्युत्क्रम आव्यूह निकालने की क्रियाविधि :

Step I. $|A|$ ज्ञात करें।

Step II. यदि $|A| = 0$ तो आव्यूह A का व्युत्क्रम नहीं होगा। यदि $|A| \neq 0$ तो A व्युत्क्रमणीय है।

www.Polytechnicpdf.com

Step III. A के संगत अवयवों के सहगुणनखंड (Cofactor) प्राप्त करें तथा इसे आव्यूह के रूप में लिखें।

Step IV. प्राप्त आव्यूह का परिवर्त आव्यूह निकालकर Adj. A प्राप्त करें।

Step V. फिर $A^{-1} = \frac{\text{Adj. } A}{|A|}$ का प्रयोग कर व्युत्क्रम निकालें।

उदाहरण : आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम आव्यूह ज्ञात करें।

हल : यहाँ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1 \neq 0$, अतः A व्युत्क्रमणीय है।

तथा $A_{11} = 3, A_{12} = -1, A_{21} = -1, a_{22} = 3$

$\therefore$ सहखण्ड आव्यूह $= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

अतः Adj. $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad A^{-1} = \frac{\text{Adj. } A}{|A|} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ उत्तर

(c) व्युत्क्रम आव्यूह के गुण

(1) किसी वर्ग आव्यूह A का व्युत्क्रम A^{-1} अद्वितीय (Unique) होता है।

(2) $(A^{-1})^{-1} = A$

(3) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

(4) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

1.5 आव्यूह तथा सारणिक में अन्तर

आव्यूह और सारणिक में अंतर को निम्नलिखित तालिका में दिखाया गया है :

	सारणिक	आव्यूह
1.	सारणिक $n \times n$ संख्याओं की लंब सारणी है। इसमें पंक्तियों तथा स्तंभों की संख्या समान होती है।	आव्यूह $m \times n$ संख्याओं की लंब सारणी है जिसमें m पंक्तियाँ तथा n स्तम्भ होते हैं। इसमें पंक्तियों तथा स्तंभों का बराबर होना आवश्यक नहीं है।
2.	सारणिक किसी व्यंजक को वर्ग सारणी के रूप में व्यक्त करता है।	आव्यूह किसी सूचनाओं अथवा तत्त्वों को आयताकार लम्ब सारणी के रूप में व्यक्त करने का विशेष प्रकार है।
3.	इसका मान निश्चित होता है।	इसका कोई मान नहीं होता।
4.	सारणिक में अवयवों की संख्या n^2 होती है।	इसमें अवयवों की संख्या $m \times n$ होती है। यदि यह n क्रम का तथा वर्गाकार है तो अवयवों की संख्या n^2 होगी।
5.	इसके किसी अदिश से गुणा करने पर किसी एक पंक्ति या स्तंभ के अवयवों में गुणा होता है।	इसमें किसी अदिश से गुणा करने पर प्रत्येक अवयव में गुणा होता है।
6.	इसमें किसी एक पंक्ति या स्तंभ के उभयनिष्ठ को पूरी सारणी के उभयनिष्ठ के रूप में निकाला जा सकता है।	इसमें किसी संख्या को उभयनिष्ठ के रूप में तभी निकाला जा सकता है, जबकि यह सारे अवयवों में उभयनिष्ठ हो।
7.	इसे व्यक्त करने के लिए | | चिन्ह का प्रयोग होता है	इसे व्यक्त करने के लिए [ ] या ( ) या { } या || || का प्रयोग होता है।

www.polytechnicpdf.com

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ तो $A+B$ एवं $A-B$ का मान ज्ञात करें। **[2010]**

हल : $A-B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-1 & 2-0\\ 2-2 & -1-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ उत्तर

तथा $A+B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1 & 2+0\\ 2+2 & -1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि $P=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 7\\ 0 & 8 & 9\end{bmatrix}$ तथा $Q=\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ 3 & 0 & 5\\ 5 & 7 & 0\end{bmatrix}$ तो $2P-3Q$ का मान ज्ञात करें। **[U.P. 2009]**

हल : $2P-3Q=2\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 7\\ 0 & 8 & 9\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}2 & 0 & 3\\ 3 & 0 & 5\\ 5 & 7 & 0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 10 & 14\\ 0 & 16 & 18\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 0 & 9\\ 9 & 0 & 15\\ 15 & 21 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2-6 & 4-0 & 6-9\\ 0-9 & 10-0 & 14-15\\ 0-15 & 16-21 & 18-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 4 & -3\\ -9 & 10 & -1\\ -15 & -5 & 18\end{bmatrix}$$ उत्तर

उदाहरण 3. यदि $\begin{bmatrix}x+3 & 2y+x\\ z-1 & 4a-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -7\\ 3 & 2a\end{bmatrix}$ तो x, y, z तथा a का मान प्राप्त करें जो दिए गए समीकरण को संतुष्ट करता है।

हल : प्रश्न से

$$\begin{bmatrix}x+3 & 2y+x\\ z-1 & 4a-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -7\\ 3 & 2a\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $x+3=0$ [$\because$ समान आव्यूह के संगत पद बराबर होते हैं]

$2y-x=-7$

$z-1=3$ तथा $4a-6=2a$

अत: $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

$z-1=3 \Rightarrow z=1+3=4$

$4a-6=2a \Rightarrow 4a-2a=6 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$

तथा $2y+x=-7 \Rightarrow 2y-3=-7$ [x का मान रखने पर]

$\Rightarrow$ $2y=-7+3=-4 \Rightarrow y=-\frac{4}{2}=-2$

अत: $x=-3, y=-2, z=4$ तथा $a=3$ उत्तर

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 5. (i) A^2 का मान निकालिये, यदि आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

[B.T.E., U.P. 1994, 2015]

(ii) $A^2 - 2A$ का मान ज्ञात करें।

हल : (i) $$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+2\times4+3\times3 & 1\times2+2\times3+3\times1 & 1\times3+2\times2+3\times4 \\ 4\times1+3\times4+2\times3 & 4\times2+3\times3+2\times1 & 4\times3+3\times2+2\times4 \\ 3\times1+1\times4+4\times3 & 3\times2+1\times3+4\times1 & 3\times3+1\times2-4\times4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+8+9 & 2+6+3 & 3+4+12 \\ 4+12+6 & 8+9+2 & 12+6+8 \\ 3+4+12 & 6+3+4 & 9+2+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 11 & 19 \\ 22 & 19 & 26 \\ 19 & 13 & 27 \end{bmatrix}$$ उत्तर

(ii) $$A^2 - 2A = \begin{bmatrix} 18 & 11 & 19 \\ 22 & 19 & 26 \\ 19 & 13 & 27 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18-2 & 11-4 & 19-6 \\ 22-8 & 19-6 & 26-4 \\ 19-6 & 13-2 & 27-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 7 & 13 \\ 14 & 13 & 22 \\ 13 & 11 & 19 \end{bmatrix}$$ उत्तर

उदाहरण 5. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ तो दिखायें $AB \neq BA$.

[BTE 2008]

हल : यहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}_{2\times2}$

A में पंक्तियों की संख्या $= B$ में स्तंभों की संख्या $= 2$

अत: AB परिभाषित है। इसी तरह BA भी परिभाषित है।

अब $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times5+2\times7 & 1\times6+2\times8 \\ 3\times5+4\times7 & 3\times6+4\times8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

तथा $$BA = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\times1+6\times3 & 5\times2+6\times4 \\ 7\times1+8\times3 & 7\times2+8\times4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

(1) तथा (2) से, $AB \neq BA$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 6. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तथा आव्यूह $B = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$ तो सिद्ध करो कि $AB = BA$.

[BTE, UP, 1993]

हल : $$AB = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta & \cos\alpha . \sin\beta + \sin\alpha . \cos\beta \\ \sin\alpha . \cos\beta + \cos\alpha . \sin\beta & \sin\alpha . \sin\beta + \cos\alpha . \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha-\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

$$BA = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\beta \cos\alpha + \sin\beta \sin\alpha & \cos\beta . \sin\alpha + \sin\beta . \cos\alpha \\ \sin\beta \cos\alpha + \cos\beta \sin\alpha & \sin\beta . \sin\alpha + \cos\beta . \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha-\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

समीकरण (1) व (2) से स्पष्ट है कि $AB = BA$. यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 7. सिद्ध करो कि दो आव्यूहें $\begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$ तथा $\begin{pmatrix} \cos^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \cos\phi\sin\phi & \sin^2\phi \end{pmatrix}$ का गुणनफल शून्य होगा यदि θ तथा ϕ का अन्तर $\frac{\pi}{2}$ का विषम गुणित हो।

[B.T.E., U.P. 1998]

हल : $\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \cos\phi\sin\phi & \sin^2\phi \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta . \cos^2\phi + \cos\theta . \sin\theta . \cos\phi . \sin\phi & \cos^2\theta . \cos\phi . \sin\phi + \cos\theta . \sin\theta . \sin^2\phi) \\ \cos\theta . \sin\theta . \cos^2\phi + \sin^2\theta . \cos\phi . \sin\phi & \cos\theta . \sin\theta . \cos\phi . \sin\phi + \sin^2\theta . \sin^2\phi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta . \cos\phi (\cos\theta . \cos\phi + \sin\theta . \sin\phi & \cos\theta . \sin\phi (\cos\theta . \cos\phi + \sin\theta \sin\phi) \\ \sin\theta \cos\phi (\cos\theta . \cos\phi + \sin\theta . \sin\phi) & \sin\theta . \sin\phi (\cos\theta . \cos\phi + \sin\theta . \sin\phi) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta . \cos\phi \{\cos(\theta-\phi)\} & \cos\theta . \sin\phi \{\cos(\theta-\phi)\} \\ \sin\theta . \sin\phi \{\cos(\theta-\phi)\} & \sin\theta . \sin\phi \{\cos(\theta-\phi)\} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta . \cos\phi \cos(\theta-\phi) & \cos\theta . \sin\phi \cos(\theta-\phi) \\ \sin\theta . \sin\phi \cos(\theta-\phi) & \sin\theta . \sin\phi \cos(\theta-\phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ उत्तर

क्योंकि यदि $\theta - \phi$, $\frac{\pi}{2}$ का विषम गुणित हो तो $\cos(\theta-\phi)$ का मान शून्य होगा जिससे गुणनफल शून्य हो जायेगा।

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 8. यदि $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ और $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ तो दिखाइये कि $E^2 F + F^2 E \neq E$.

[B.T.E., U.P. 1999]

हल : $\because E^2 = E \times E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad E^2 . F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

www.polytechnicpdf.com

तथा $$F^2 = F \times F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad F^2 . E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

अतः $$E^2 . F + F^2 . E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq E$$

$\therefore \quad E^2 . F + F^2 . E \neq E.$ यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 8. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & q & r \end{bmatrix}$ तथा I_3, क्रम 3 का एक आव्यूह हो, तो सिद्ध करें कि

$$A^3 = p . I_3 + q . A + r . A^2$$ **[B.T.E., U.P. 2002]**

हल : $$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & q & r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p & q & r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\times0+1\times0+0\times p & 0\times1+1\times0+0\times q & 0\times0+1\times1+0\times r \\ 0\times0+0\times0+1\times p & 0\times1+0\times0+1\times q & 0\times0+0\times1+1\times r \\ p\times0+q\times0+r\times p & p\times1+q\times0+r\times q & p\times0+q\times1+r\times r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p & q & r \\ pr & p+qr & q+r^2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^3 = A^2 . A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p & q & r \\ pr & p+qr & q+r^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & q & r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p & q & r \\ pr & p+qr & q+r^2 \\ p(q+r^2) & pr+q(q+r^2) & p+rq+r(q+r^2) \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

अतः $$pI_3 + qA + rA^2 = p\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ p & q & r \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ p & q & r \\ pr & p+qr & q+r^2 \end{bmatrix}$$

[I_3, A तथा A^2 का मान रखने पर]

$$= \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \\ qp & q^2 & qr \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & r \\ pr & qr & r^2 \\ pr^2 & r(p+qr) & r(q+r^2) \end{bmatrix}$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \begin{bmatrix} p & q & r \\ pr & p+qr & q+r^2 \\ p(q+r^2) & q^2+r(p+qr) & p+qr+r(q+r^2) \end{bmatrix} = A^3$$ [1 से]

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 10. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध करो $A^2 - 5A + 7I = 0$ जबकि I एक इकाई आव्यूह, आर्डर 2×2 की है। **[B.T.E., U.P. 1995]**

हल : यहाँ $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3\times3+1\times-1 & 3\times1+1\times2 \\ -1\times3+2\times-1 & -1\times1+2\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad A^2 - 5A + 7I = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-15-7 & 5-5+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$ यही सिद्ध करना था।

उदाहरण 11. $A^2 - 4A - 5I$ का मान निकालिये,

जहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **[B.T.E., U.P. 2003]**

हल : यहाँ $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ [गुणन से]

अतः $A^2 - 4A - 5I = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 9-4-5 & 8-8-0 & 8-8-0 \\ 8-8-0 & 9-4-5 & 8-8-0 \\ 8-8-0 & 8-8-0 & 9-4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$\therefore \quad A^2 - 4A - 5I = 0$ उत्तर

उदाहरण 12. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो $A^3 - 2A^2 + A - I$ का मान ज्ञात कीजिये। **[B.T.E., U.P. 2004]**

हल : $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

www.polytechnicpdf.com

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+3\times2+2\times1 & 1\times3+3\times0-2\times(-1) & 1\times2-3\times3+2\times(-1) \\ 2\times1+0\times2+3\times1 & 2\times3+0\times0+3\times(-1) & 2\times2+0\times3+3\times(-1) \\ 1\times1+(-1)\times2+(-1)\times1 & 1\times3+(-1)\times0+(-1)\times(-1) & 1\times2+(-1)\times3+(-1)\times(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+6-2 & 3+0-2 & 2+9-2 \\ 2+0+3 & 6+0-3 & 4+0-3 \\ 1-2-1 & 3+0+1 & 2-3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 9 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

तथा $$A^3 = A^2 . A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 9 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9+2+9 & 27+0-9 & 18+3-9 \\ 5+6+1 & 15+0-1 & 10+9-1 \\ -2+8+0 & -6+0+0 & -4+12+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 18 & 12 \\ 12 & 14 & 18 \\ 6 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

तथा $$2A^2 = 2\begin{bmatrix} 9 & 1 & 9 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 2 & 18 \\ 10 & 6 & 2 \\ -4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ $A^3 - 2A^2 + A - I$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 18 & 12 \\ 12 & 14 & 18 \\ 6 & -6 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 & 2 & 18 \\ 10 & 6 & 2 \\ -4 & 8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 20-18+1-1 & 18-2+3-0 & 12-18+2-0 \\ 12-10+2-0 & 14-6-0-1 & 18-2+3-0 \\ 6-4+1-0 & -6-8-1-0 & 8-0-1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 19 & -4 \\ 4 & 7 & 19 \\ 11 & -15 & 6 \end{bmatrix}$$ उत्तर

उदाहरण 13. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ को सममित तथा विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त करें।

हल : प्रश्न से, $$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

अतः $$\frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 6 & 10 & 7 \\ 5 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$ = सममित आव्यूह

तथा $$\frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\left\{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}\right\} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ = विषम सममित आव्यूह

अब $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$

www.polytechnicpdf.com

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & 6 & 5\\ 6 & 10 & 7\\ 5 & 7 & 10\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}=$$ सममित आव्यूह + विषम सममित आव्यूह

उदाहरण 14. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 4 & 5\\ 0 & -6 & -7\end{bmatrix}$, तो Adj. A (सहखण्डज आव्यूह) ज्ञात कीजिए।

[B.T.E., U.P. 2004]

हल : प्रश्नानुसार, $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 4 & 5\\ 0 & -6 & -7\end{bmatrix}$ $\therefore$ $|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 4 & 5\\ 0 & -6 & -7\end{vmatrix}$

माना A के अवयवों के सहखण्ड क्रमशः $A_{11}, A_{12}, A_{13}, \ldots A_{33}$ हैं तो
माना आव्यूह A के सह-गुणनखण्डों (co-factors) का आव्यूह

$$=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}$$

अब $|A|$ के अवयवों के सहखण्ड

अतः $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4 & 5\\ -6 & -7\end{vmatrix}=+(-28+30)=\mathbf{2}$; $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 5\\ 0 & -7\end{vmatrix}=-(-21-0)=\mathbf{21}$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & -6\end{vmatrix}=+(-18-0)=\mathbf{-18}$; $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & -1\\ -6 & -7\end{vmatrix}=-(0-6)=\mathbf{6}$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -7\end{vmatrix}=+(-7-0)=\mathbf{-7}$; $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -6\end{vmatrix}=-(-6-0)=\mathbf{6}$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}=+(0+4)=\mathbf{4}$; $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-(5+3)=\mathbf{-8}$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{vmatrix}=+(4-0)=\mathbf{4}$ [$\because$ $A_{ij}=(-1)^{i+j}\,a_{ij}$ का लघुघटक]

अतः सहखण्डों से बना आव्यूह, $B=\begin{bmatrix}2 & 21 & -18\\ 6 & -7 & 6\\ 4 & -8 & 4\end{bmatrix}$

$\therefore$ Adj. $A=B'=\begin{bmatrix}2 & 6 & 4\\ 21 & -7 & -8\\ -18 & 6 & 4\end{bmatrix}$ उत्तर

उदाहरण 15. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$, तो A का सहखण्डज आव्यूह (Adjoint matrix) ज्ञात करें।

[B.T.E., U.P. 2005]

हल : प्रश्नानुसार $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$ $\therefore$ $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 4\end{vmatrix}$

माना A के आवयवों के सहखण्ड (cofactors) क्रमशः $A_{11}, A_{12}, A_{13} \ldots A_{33}$ हैं तो सहखण्ड आव्यूह

www.polytechnicpdf.com

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

अब $|A|$ के अवयवों के सहखण्ड

अतः $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = +(9-16) = -7;$ $\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3-4) = 1$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +(4-3) = 1;$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(6-12) = 6$

$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = +(3-3) = 0;$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-2) = -2$

[$\because A_{ij} = (-1)^{i+j} \times a_{ij}$ का लघुघटक]

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +(8-9) = -1;$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1$

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = +(3-2) = 1$

अतः $$B = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ [(1) से]

अतः $$\text{Adj. } A = B' = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$ उत्तर

उदाहरण 16. आव्यूह A का प्रतिलोम (inverse) ज्ञात करें यदि

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

[B.T.E., U.P. 1995]

हल : $|A| = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

$= \cos^2\alpha - (-\sin^2\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$

अतः इसका व्युत्क्रम आव्यूह होगा।

अब $\cos\alpha$ का सहखण्ड $A_{11} = \cos\alpha$; $\sin\alpha$ का सहखण्ड $A_{12} = -(-\sin\alpha) = \sin\alpha$

$-\sin\alpha$ का सहखण्ड $A_{21} = -\sin\alpha$; $\cos\alpha$ का सहखण्ड $A_{22} = \cos\alpha$

A का सह-गुणनखण्ड आव्यूह (Matrix of Co-factors),

$$B = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \therefore \quad B' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \text{Adj. } A$$

अतः A का व्युत्क्रम आव्यूह,

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$ उत्तर

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 17. आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिये।

[B.T.E., U.P. 2015, 2000]

हल : माना $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

तो $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(1-4) - 5(3-2) + 3(6-1)$$

$= -6 - 5 + 15 = 4 \neq 0$, अतः इसका व्युत्क्रम आव्यूह होगा।

अब $|A|$ के अवयवों के सहखण्ड

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13$$

सह-खण्ड (co-factor) आव्यूह $B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & AA_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -13 \end{bmatrix}$

$\therefore$ Adj. $A = B' = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -13 \end{bmatrix}$

अतः व्युत्क्रम आव्यूह $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj. } A}{|A|} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{13}{4} \end{bmatrix}$ उत्तर

उदाहरण 18. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिये।

[B.T.E., U.P. 2010]

हल : $A = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

$$= 7\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 7(4-3) + (-20-6) - (30+12) = 7 - 26 - 42 = -61 \neq 0$

अतः व्युत्क्रम आव्यूह होगा।

www.polytechnicpdf.com

अब आव्यूह के सहगुणनखंड

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=1,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}10 & 1\\ 6 & -2\end{vmatrix}=26,\ A_{13}=\begin{vmatrix}10 & -2\\ 6 & 3\end{vmatrix}=42$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-5,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}7 & -1\\ 6 & -2\end{vmatrix}=-8,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}7 & -1\\ 6 & 3\end{vmatrix}=-27$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}7 & -1\\ 10 & 1\end{vmatrix}=-17,\ A_{33}=\begin{vmatrix}7 & -1\\ 10 & -2\end{vmatrix}=-4$$

अत: सह-खण्ड आव्यूह (Matrix of co-factors),

$$B=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 26 & 42\\ -5 & -8 & -27\\ -3 & -17 & -4\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad \text{Adj } A=B'=\begin{bmatrix}1 & -5 & -3\\ 26 & -8 & -17\\ 42 & -27 & -14\end{bmatrix}$$

पुन: A का व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse of a matrix)

$$A^{-1}=\frac{\text{Adj. }A}{|A|}=-\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & -5 & -3\\ 26 & -8 & -17\\ 42 & -27 & -4\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & -5 & -3\\ 26 & -8 & -17\\ 42 & -27 & -4\end{bmatrix}$$ उत्तर

उदाहरण 19. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिये। **[B.T.E., U.P. 1999]**

हल : $|A|=\begin{vmatrix}3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}-(-3)\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix}$

$$=3(-3+4)+3(2+0)+4(-2+0)=3-6-8=1\neq 0$$

$\because\quad |A|\neq 0$ (शून्य नहीं है।)

अत: इसका व्युत्क्रम आव्यूह होगा।

अब सह-गुणनखण्ड

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-2,\qquad A_{13}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1;\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=3$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & 4\\ -3 & 4\end{vmatrix}=0,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-4,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -3\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-3$$

www.polytechnicpdf.com

अतः सहखण्डों से बना आव्यूह (Matrix of Cofactors) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad \text{Adj } A = B' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

अतः A का व्युत्क्रम आव्यूह

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{|A|} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix} \qquad [\because |A| = 1]$$

$$\therefore \quad \text{व्युत्क्रम आव्यूह} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$ उत्तर

उदाहरण 20. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & a & 1 \end{bmatrix}$; $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & c \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ तो, a और c के मान ज्ञात कीजिये।

[B.T.E., U.P. 2002]

हल : $A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & a & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & c \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

या $$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c+1 \\ 0 & 1 & 2c+2 \\ (-4a+4) & (3a-3) & (ac+2) \end{bmatrix} \quad ...(1)$$

परन्तु $$A \times A^{-1} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ...(2)$$

या $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & (c+1) \\ 0 & 1 & (2c+2) \\ (-4a+4) & (3a-3) & (ac+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

अतः $c + 1 = 0$; $-4a + 4 = 0$

$\therefore \quad c = -1$ तथा $a = 1$ उत्तर

1.6 गुणांक आव्यूह तथा संवर्द्धित आव्यूह (Coefficient Matrix and Augmented Matrix)

माना रैखिक समीकरण-निकाय निम्न है :

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1;\ a_2x + b_{2y} + c_2z = d_2;\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

इन समीकरणों को आव्यूह के रूप में लिखने पर

www.polytechnicpdf.com

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

या $AX = B$, जहाँ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$ ...(1)

यहाँ आव्यूह A को, जो x, y, z के गुणांकों को क्रमबद्ध करने से बना है, गुणांक आव्यूह कहते हैं। A के साथ अचर पदों के आव्यूह B के अवयवों d_1, d_2, d_3 को सम्मिलित करने से बने आव्यूह

$$C = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 : d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 : d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 : d_3 \end{bmatrix}$$ को समीकरण निकाय का संवृद्धित आव्यूह

(Agumented Matrix) कहा जाता है तथा इसे $[A : B]$ से व्यक्त करते हैं।

अब रैखिक समीकरण (1) से हल

1.6.1 रैखिक समीकरण के निकाय का आव्यूह विधि से हल व्युत्क्रम के प्रयोग (Solution of Simultaneous Linear Equations by Matrix Method Using Inverse)

(1) में A^{-1} से गुणा करने पर

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \text{या} \quad IX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \qquad [\because A^{-1}A = I]$$

अब दोनों पक्षों की तुलना से x, y तथा z का मान प्राप्त किया जा सकता है।

क्रिया विधि : Step I. समीकरणों को आव्यूह रूप में व्यक्त करें।

Step II. गुणांक आव्यूह को A, चरों के आव्यूह को X तथा दायें पक्ष में अचर को B के रूप में लेकर समीकरण $AX = B$ का रूप दें।

Step III. A^{-1} प्राप्त करें।

Step IV. $X = A^{-1}B$ ज्ञात करके दोनों तरफ तुलना कर x, y, z के मान प्राप्त करें।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1 : आव्यूह विधि से हल करें :

$$3x + 2y + 4z = 7;\ 2x + y + z = 4;\ x + 3y + 5z = 2$$ **[BTE 2005]**

हल : समीकरणों को आव्यूह रूप में लिखने पर $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

या $AX = B$, जहाँ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

अब $A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 3(5-3) - 2(10-1) + 4(6-1) = 6 - 18 + 20 = 8 \neq 0$

अत: इसका व्युत्क्रम आव्यूह होगा।

www.polytechnicpdf.com

अब $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (5-3) = 2;$ $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -(10-1) = -9$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6-1 = 5;$ $A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(10-12) = 2$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15-4 = 11;$ $A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(9-2) = -7$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-4) = -2;$ $A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(3-8) = 5$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-4 = -1$ $\because$ सहखण्ड गुणांक $A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$]

$\therefore$ सहखंड आव्यूह $C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -9 & 5 \\ 2 & 11 & -7 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

अतः $\text{Adj. } A = C' = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -9 & 11 & 5 \\ 5 & -7 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $\overline{A}^1 = \dfrac{\text{Adj. } A}{|A|} = \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -9 & 11 & 5 \\ 5 & -7 & -1 \end{bmatrix}$

अब $X = \overline{A}^1 B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -9 & 11 & 5 \\ 5 & -7 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 14+8-4 \\ -63+44+10 \\ 35-28-2 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 18 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$

अर्थात् $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{18}{8} \\ -\frac{9}{8} \\ \frac{5}{8} \end{bmatrix}$

$\therefore$ $x = \dfrac{18}{8} = \dfrac{9}{4}; y = -\dfrac{9}{8}; z = \dfrac{5}{8}$ उत्तर

उदाहरण 2. आव्यूह विधि से समीकरण हल कीजिए।

$$x + 2y + 3z = 1;\ 2x + 3y + 2z = 2;\ 3x + 3y + 4z = 1$$ **[BTE 2002]**

हल : समीकरणों को आव्यूह रूप में व्यक्त करने पर $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

या $AX = B,$ जहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

www.Polytechnicpdf.com

अब $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(12-6) - 2(8-6) + 3(6-9) = 5 - 4 - 9 = -7 \neq 0$

अत: A व्युत्क्रमणीय है।

अब $|A|$ के अवयवों के सहखण्ड

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 6 = 6;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(8-6) = -2;\ A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 9 = -3$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -(8-9) = 1;\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5 \quad \text{तथा} \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -(3-6) = 3$$

तथा $A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4;\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2$

$\therefore$ सहखण्ड आव्यूह $C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $\text{Adj. } A = C' = \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

अत: $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj. } A}{|A|} = \dfrac{1}{-7}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

अब $X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \dfrac{1}{-7}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 6+2-5 \\ -2-10+4 \\ -3+6-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/7 \\ -8/7 \\ -2/7 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $x = -\dfrac{3}{7}, y = -\dfrac{8}{7}, z = -\dfrac{2}{7}$ उत्तर

प्रश्नावली 1.1

1. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ तो $A + B$ का मान ज्ञात करें। [BTE 1976]

2. (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \\ 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ तो $3A - 2B$ का मान बतायें।

   (ii) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ तो $2A$ का मान ज्ञात करें। [U.P. 2012]

www.polytechnicpdf.com

3. (i) यदि $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & 4 & -5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 3\\ 4 & -5 & 6\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}4 & 7 & -2\\ 0 & -5 & 1\end{bmatrix}$

तो दिखाइये के $(A+B)+C=A+(B+C)$.

(ii) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ और $B=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 4 & 8\end{bmatrix}$ तो दिखायें कि $A+B=B+A$. [BTE 2006]

4. यदि $3\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 6\\ -1 & 2w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & x+y\\ z+w & 3\end{bmatrix}$, तो x, y, z तथा w का मान बतायें।

5. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & -5\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ तथा $D=\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\\ t & u\end{bmatrix}$ तथा $A+B-D=O$ हो तो p, q, r, s, t तथा u का मान बतायें जो समीकरण को संतुष्ट करते हैं।

6. (i) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ तो A^2 का मान बतायें।

(ii) यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, A^3 का मान ज्ञात कीजिये। [U.P. 2013]

(iii) यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$, A^2+3A का मान ज्ञात करें। [U.P. 2014]

(iv) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$ तो A^2-2A का मान ज्ञात करें। [U.P. 2015]

(v) यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}$, तो A^2 का मान ज्ञात करें। [1994, 2010]

7. यदि I, 2×2 क्रम का इकाई आव्यूह है तो सिद्ध करें कि

$$I\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}I=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}.$$

8. (i) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$ तो दिखाइये कि $AB\neq BA$.

(ii) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}$ तो दिखायें $AB\neq BA$ [U.P. 2008]

9. यदि $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ तो AB का मान ज्ञात करें तथा बतायें क्यों BA संभव नहीं है।

10. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 4\\ 3 & -2 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 6 & 12 & 6\\ 5 & 10 & 5\end{bmatrix}$ तो दिखायें कि $AB=O$, किन्तु $A\neq O, B\neq O$.

www.polytechnicpdf.com

11. यदि $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ तो (i) $A^2 + B^2$ (ii) AB तथा BA का मान बतायें।

12. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि $(AB)' = B'A'$.

13. यदि $A(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि $A(\theta) . A(\beta) = A(\theta + \beta)$.

14. यदि $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ तो दिखायें $A^2 - 9A + 14I = 0$, जहाँ I द्वितीय क्रम का इकाई आव्यूह है।

15. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ है और I इकाई आव्यूह है तो $A^2 - 3A + 9I$ का मान निकालिये।

[B.T.E., U.P. 1997]

16. यदि $f(x) = x^2 - 5x + 6$ तो $f(A)$ का मान बतायें।

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

[संकेत : $f(A) = A^2 - 5A + 6$]

17. दिखायें समीकरण $A^2 - 5A + 7I = 0$ का हल A होगा, यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

[U.P. 1995]

18. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ तो दिखायें—

(i) $(A + B)' = A' + B'$ (ii) $(A - B)' = A' - B'$

19. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध करें कि $A + A'$ एक सममित आव्यूह है।

20. (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध करें कि $A - A^T$ विषम सममित आव्यूह है।

(ii) दिखाइये आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है।

[2011]

21. आव्यूह $\begin{bmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ को सममित तथा विषम सममित आव्यूहों के योग के रूप में व्यक्त करें।

[संकेत : $A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$]

22. यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तो दिखायें कि A लांबिक आव्यूह है।

[BTE-2008]

[संकेत : $AA' = I = A'A$]

www.polytechnicpdf.com

23. दिखायें कि $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}$ एक लंबकोणीय आव्यूह है।

[U.P. 2007]

24. (i) यदि $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ तो Adj A प्राप्त करें।

(ii) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 4 & 5\\ 0 & -6 & -7\end{bmatrix}$, तो Adj. A (सहखण्डज आव्यूह) ज्ञात कीजिए।

[B.T.E., U.P. 2004]

(iii) यदि $A=\begin{bmatrix}3 & 1+2i\\ 1-2i & 2\end{bmatrix}$ तो इसका परिवर्त आव्यूह ज्ञात करें।

[2012]

25. (i) यदि $A=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ तो Adj A ज्ञात करें।

(ii) आव्यूह $A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिये

[B.T.E., U.P. 1999]

(iii) आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$ का प्रतिलोम ज्ञात कीजिये।

[B.T.E., U.P. 1997]

26. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$ तो दिखायें कि $A\,(\text{Adj } A)=(\text{Adj } A)\,A=|A|\,I$.

27. (i) यदि $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात करें।

(ii) यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ तो A का प्रतिलोम ज्ञात करें।

[U.P. 1993]

28. (i) यदि $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात करें। (ii) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$ तो A^{-1} का ज्ञात करें।

[U.P. 1997]

(iii) $\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ तो A^{-1} का ज्ञात करें।

[2010, 12, 15]

(iv) $\begin{bmatrix}7 & -1 & -1\\ 10 & -2 & 1\\ 6 & 3 & -2\end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात करें।

[2014]

29. यदि $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात करें।

www.polytechnicpdf.com

30. (i) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ तो दिखायें कि $A^{-1}=A^2$

[संकेत : यदि $A^{-1}=A^2$ तो $A^2A=A^{-1}A=I$ अतः $A^2A=I$ दिखायें।

(ii) यदि $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ तो सिद्ध करें $A^{-1}=A$

[U.P. 2011]

31. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ तो दिखायें कि $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

32. (i) यदि $A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 6 & 5\end{bmatrix}$ तो सिद्ध करें कि $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

[U.P. 2006]

(ii) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात करें।

[U.P. 2006]

33. सिद्ध कीजिए $A=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & 1+i\\ 1-i & -1\end{bmatrix}$ ऐकिक आव्यूह है।

[U.P. 2010]

[संकेत : $(\bar{A})^T A=I$]

34. सिद्ध कीजिए : $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & i\\ -i & -1\end{bmatrix}$ ऐकिक आव्यूह है।

35. यदि $2x-3y+5z=6; 3x+2y-4z=7; 5x+7y-3z=8$ तो इसके लिए गुणांक आव्यूह तथा संवर्द्धित आव्यूह लिखें।

36. निम्न समीकरणों को आव्यूह विधि से हल करें :

(i) $x-2y+2z=3;\ x+2y+3z=5;\ 2x-4y-5z=-13$

(ii) $x+2y+3z=3;\ 2x-y+z=6;\ 3x+y-z=4$

(iii) $x+y+z=6,\ 2x-y+2z=6;\ x+y-z=0$

(iv) $x+3y+3z=1; x+4y+3z=0; x+3y+4z=2$ [BTE 1996]

(v) $3x+y+2z=3; 2x-3y-z=-3; x+2y+z=4$

37. निम्न पदों को उदाहरण के साथ परिभाषित कीजिए—

(i) सममित आव्यूह (ii) विषम सममित आव्यूह [BTE 2005, 06]

(iii) हरमिटियन आव्यूह (iv) विषम हरमिटियन आव्यूह

(v) लांबिक आव्यूह [BTE 2004, 05, 13, 14]

(vi) ऐकिक आव्यूह [BTE 2005, 07, 13, 14]

(vii) विकर्ण आव्यूह [BTE 2007S 2015]

(viii) त्रिभुजीय आव्यूह [BTE 2004, 05, 06]

(ix) सहखण्डज आव्यूह (x) इकाई आव्यूह [BTE 2004]

(xi) शून्य आव्यूह [U.P. 2014]

38. आव्यूह तथा सारणिक में अंतर स्पष्ट करें। [U.P. 1989, 94]

www.polytechnicpdf.com

उत्तरमाला

1. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$

2. (i) $\begin{bmatrix} 0 & 9 & 2 \\ -10 & 6 & 14 \\ 15 & 16 & 13 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$

4. $x = 2, y = 4, z = 1, w = 3$

5. $p = -1, q = 0, r = 4, s = -1, t = 9, u = 3$

6. (i) $\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 12 & 14 & 14 \\ 14 & 12 & 14 \\ 14 & 14 & 9 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 16 & 7 & 13 \\ 14 & 13 & 22 \\ 13 & 11 & 19 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 18 & 11 & 19 \\ 22 & 19 & 26 \\ 19 & 13 & 27 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}$

11. अस्तित्व नहीं है।

15. $\begin{bmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \\ -2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

21. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 9 & 6 \\ 9 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

24. (i) $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 21 & -7 & -8 \\ -18 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

27. (i) $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

28. (i) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 8 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 7/2 & -3 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$ (iii) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 1 & 7 \\ -1 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & -13 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

35. गुणांक आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & 7 & -3 \end{bmatrix}$; संवर्द्धित आव्यूह $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & 7 \\ 5 & 7 & -3 & 8 \end{array}\right]$

36. (i) $x = -1, y = 0, z = 2$ (ii) $x = 2, y = -1, z = 1$

(iii) $x = 1, y = 2, z = 3$ (iv) $x = 1, y = -1, z = 1$

(v) $x = 1, y = 2, z = -1$

www.polytechnicpdf.com

2

CHAPTER

प्रारंभिक पंक्ति/स्तंभ रूपांतरण (Elementary Row/Column Transformation)

2.1 परिचय (Introduction)

किसी आव्यूह पर किए गए निम्न रूपान्तरणों को प्रारम्भिक रूपान्तरण (Elementary Transformation) के नाम से जाना जाता है।

1. किन्हीं दो पंक्तियों या दो स्तम्भों का परस्पर परिवर्तन : यदि किसी आव्यूह की iवीं पंक्ति तथा jवीं पंक्ति को परस्पर परिवर्तित किया जाता है तो इसे R_{ij} या $R_i \leftrightarrow R_j$ से तथा iवें स्तंभ व jवें स्तंभ को परस्पर परिवर्तित करने पर परिवर्तन को C_{ij} या $C_i \leftrightarrow C_j$ से निरूपित किया जाता है।

2. किसी पंक्ति या स्तंभ का किसी अशून्य संख्या से गुणन : आव्यूह के iवीं पंक्ति को अशून्य संख्या K से गुणा करने पर इसे $K R_i$ तथा jवें स्तंभ को K से गुणा करने पर इसे $K C_j$ से सूचित किया जाता है।

3. आव्यूह की iवीं पंक्ति को jवीं पंक्ति में अचर K से गुणा करके जोड़ा जाए तो इसे $R_i \to R_i + K R_j$ से सूचित करते हैं। इसी तरह iवें स्तंभ को jवें स्तंभ में अचर K से गुणा करके जोड़ा जाए तो इसे $C_i \to C_i - K C_j$ से सूचित किया जाता है।

2.1.1 परिभाषायें (Definitions)

तुल्य आव्यूह (Equivalent Matrices) : आव्यूह A पर की गई एक या अधिक पंक्ति/स्तंभ रूपान्तरण से प्राप्त आव्यूह B, A का तुल्य (Equivalent) आव्यूह कहलाता है तथा इसे $B \sim A$ लिखा जाता है।

तुल्य आव्यूह समान क्रम के होते हैं।

उदाहरण 1. प्रारम्भिक रूपान्तरण द्वारा निम्न आव्यूह का उच्च त्रिभुजीय आव्यूह में परिवर्तित कीजिए।

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

हल : $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 + 5R_2$$

प्रारम्भिक आव्यूह (Elementary Matrices) : इकाई आव्यूह में पंक्ति या स्तंभ के एक रूपान्तरण से प्राप्त आव्यूह प्रारंभिक आव्यूह कहलाते हैं।

उदाहरण 2. $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ को प्रारम्भिक आव्यूह में परिवर्तित कीजिए।

www.polyphicpdf.com

हल : $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_2 \to R_2 + 5R_1$

नोट :

- I में यदि कोई अन्य रूपान्तरण यथा $R_2 \to R_2 + 3R_1$ से भी प्रारम्भिक आव्यूह प्राप्त होता है।

2.2 प्रारम्भिक रूपान्तरण द्वारा किसी व्युत्क्रमणीय आव्यूह का व्युत्क्रम ज्ञात करना (गौस-जॉरडान विधि) (To Compute Inverse of a Matrix by Elementary Transformation : Gauss-Zordan Method)

यदि A, n क्रम का वर्ग आव्यूह हो तो $A = IA$ ...(1)

(1) में प्रारंभिक रूपान्तरण द्वारा बायें पक्ष (L.H.S.) में A को I में तथा दायें पक्ष (R.H.S.) में I को B में परिवर्तित किया जाए तो

$$I = BA \quad \text{तथा} \quad B = A^{-1} \qquad [\because A^{-1}A = I]$$

कार्य विधि : (1) $A = IA$ लिखें।

(2) अब बायें ओर A तथा दाहिनी ओर I पर एक साथ प्रारम्भिक रूपान्तरण कर A को इकाई आव्यूह में परिवर्तित करें।

(3) इससे $I = BA$, प्राप्त होगा।

अब $BA = I \Rightarrow B = A^{-1}$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 10 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ को उच्च त्रिभुजीय आव्यूह के रूप में व्यक्त करें।

हल : $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 10 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{matrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} R_2 \to -\frac{1}{2}R_2 \quad \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} R_3 \sim R_2 + R_3$ उत्तर

उदाहरण 2. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ को निम्न त्रिभुजीय आव्यूह में रूपांतरित करें।

हल : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} C_2 \to C_2 - 2C_1 \\ C_3 \to C_3 - 3C_1 \end{matrix}$

www.polytechnicpdf.com

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 3 & -1 & -3\end{bmatrix} R_2 \to 3R_2 - R_3$$ उत्तर

उदाहरण 3. आव्यूह $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}$ को इकाई आव्यूह में परिवर्तित कीजिए।

हल : $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \begin{matrix}R_2 \to R_2 \to R_1\\ R_3 \to R_3 - 2R_1\end{matrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} R_1 \to R_1 - R_2$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} R_1 \to R_1 + 2R_3 \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} R_3 \to (-1)R_3$$ उत्तर

उदाहरण 4. यदि $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ तो A^{-1} ज्ञात करें। [2006]

हल : $A = I \times A$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \times A \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \times A \quad [R_1 \to R_1 - R_2]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \times A \quad \begin{bmatrix}R_1 \to R_1 + R_3\\ R_2 \to R_2 - R_3\end{bmatrix}$$

या $I = B \times A$ $\therefore$ $B = A^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ उत्तर

प्रश्नावली 2.1

1. प्रारंभिक रूपान्तरण द्वारा निम्न आव्यूहों को उच्च त्रिभुजीय आव्यूह में परिवर्तित करें—

(i) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$

2. प्रारम्भिक रूपान्तरण द्वारा इन आव्यूहों को निम्न त्रिभुजीय आव्यूह में परिवर्तित करें—

(i) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & 8 & 10\\ 3 & 6 & 8\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}3 & -4 & -5\\ -9 & 1 & 4\\ -5 & 3 & 1\end{bmatrix}$

www.polytechnicpdf.com

3. निम्न आव्यूहों को इकाई आव्यूह में परिवर्तित करें—

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

4. प्रारम्भिक रूपान्तरण द्वारा निम्न आव्यूहों का व्युत्क्रम (Inverse) ज्ञात करें—

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ [2000]

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ [2002]

उत्तरमाला

1. (i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 2. (i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -11 & 0 & 0 \\ 11 & -11 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

3. (i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. (i) $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -4 & 3 & -1 \\ 5/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -2 & 1/2 & 1 \\ 11 & 01 & -6 \\ 4 & -1/2 & -2 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

2.3 उप-आव्यूह (Sub-matrix)

दिए हुए $m \times n$ क्रम के आव्यूह A में से कुछ पंक्तियों या कुछ स्तंभों अथवा दोनों को छोड़कर बनाये गए आव्यूहों को उप-आव्यूह कहते हैं।

जैसे : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ के उपआव्यूह $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ आदि।

आव्यूह A का एक उप-आव्यूह स्वयं A है क्योंकि यह उसके किसी भी पंक्ति या स्तम्भ को न छोड़ने से प्राप्त होता है। यदि उप-आव्यूह में पंक्ति तथा स्तंभ की संख्या बराबर हो तो यह उपवर्ग आव्यूह (square sub-matrix) कहलाता है।

2.4 आव्यूह का लघु सारणिक (Minor of a Matrix)

यदि $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ क्रम आव्यूह हो तो इसके सभी उपवर्ग आव्यूहों के सारणिकों को जो $r \times r$ क्रम का हो, A का लघु सारणिक कहते हैं।

www.polytechnicpdf.com

जैसे : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

प्रत्येक अवयव से बना सारणिक यथा [1], [3], [4] आदि इसका 1×1 क्रम के लघु सारणिक, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 12 \end{vmatrix}$ आदि 2×2 क्रम के तथा $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}$ आदि 3×3 क्रम के लघु सारणिक हैं।

2.5 आव्यूह की कोटि (Rank of a Matrix)

(a) किसी आव्यूह A की कोटि (Rank) उसके उच्चतम क्रम के अशून्य लघु सारणिक का क्रम होता है। इसे $\rho(A)$ या r से निरूपित किया जाता है।

अतः किसी धनात्मक पूर्णांक संख्या r को A की कोटि कहते हैं यदि—

(i) आव्यूह A का कम से कम एक r क्रम का अशून्य लघु सारणिक हो।

(ii) आव्यूह A के $(r+1)$ या उससे ऊँचे क्रम के सभी लघु सारणिकों (r से बड़े क्रम के) का मान शून्य हो।

नोट :

- यदि $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ एक अशून्य आव्यूह हो तो कोटि

(i) $r \le m$ यदि $m \le n$ (ii) $r \le n$ यदि $n \le m$

अर्थात् r का मान m अथवा n में जो छोटा हो उसके बराबर या उससे कम होगा। जैसे : यदि A, 3×4 क्रम का आव्यूह हो तो $r \le 3$

(b) शून्य आव्यूह की कोटि शून्य होती है तथा अशून्य आव्यूह की कोटि r एक या एक से अधिक हो सकती है। अर्थात् अशून्य आव्यूह के लिए $r \ge 1$

(c) इकाई आव्यूह की कोटि उसके क्रम के बराबर होता है।

(d) किसी उच्च त्रिभुजीय आव्यूह में कोटि उसके अशून्य पंक्तियों की संख्या के बराबर होती है।

(e) आव्यूह A तथा परिवर्त आव्यूह A' की कोटि समान होती है।

(f) किसी आव्यूह के प्रारम्भिक रूपान्तरण से आव्यूह की कोटि में कोई परिवर्तन नहीं होता।

2.6 आव्यूह की शून्यता (Nullity of a Matrix)

यदि A कोई n क्रम का वर्गाकार आव्यूह है और उसकी कोटि r है, जहाँ $r \le n$, तब $n-r$ को आव्यूह की शून्यता कहते हैं। इसे $N(A)$ से सूचित किया जाता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ की कोटि (Rank) ज्ञात करें।

[2009]

हल : दिए गए आव्यूह A का सारणिक $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 1(24-25) - 2(8-10) + 3(5-6)$

$= -1 + 4 - 3 = 0$, अतः कोटि $r < 3$

www.polytechnicpdf.com

अब द्वितीय क्रम का लघु सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$

अत: कोटि $r = \rho(A) = 2$

उदाहरण 2. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ की कोटि तथा शून्यता ज्ञात करें।

हल : प्रश्न से, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1(6-8) - 2(4-0) + 3(4-0) = -2 - 8 + 12 = 2 \neq 0$

$\therefore$ अत: $\rho(A) = 3$ उत्तर

शून्यता $= N(A) = n - r = 3 - 3 = 0$ उत्तर

2.7 आव्यूह का सोपानक रूप (Echelon Form of a Matrix)

कोई आव्यूह A सोपानक रूप का होता है यदि

(i) सभी अशून्य पंक्तियाँ शून्य पंक्तियों (यदि कोई हो) से पहले हों

(ii) किसी पंक्ति में प्रथम अशून्य अवयव से पहले शून्यों की संख्या अगली पंक्ति में अशून्य अवयव से पहले शून्यों की संख्या से कम हो।

(iii) प्रत्येक अशून्य पंक्ति में प्रथम अशून्य अवयव इकाई हो।

नोट : तृतीय शर्त आवश्यक नहीं है।

2.8 सोपानक रूप के आव्यूह की कोटि (Rank of a Matrix in Echelon Form)

यदि किसी आव्यूह A को प्रारंभिक रूपान्तरण द्वारा सोपानक रूप में परिवर्तित कर दिया जाए तो सोपानक रूप में अशून्य पंक्तियों की संख्या आव्यूह A की कोटि होती है।

जैसे : $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ सोपानक रूप का आव्यूह है जिसमें अशून्य पंक्तियों की संख्या = 2 अत: इसकी कोटि = 2

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & -8 & 5 & 2 \\ 5 & -12 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ की कोटि तथा शून्यता ज्ञात करें।

हल : $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 3 & -8 & 5 & 2 \\ 5 & -12 & -1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 14 & -4 \\ 0 & -2 & 14 & -4 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} R_2 \to R_2 + 2R_1 \\ R_3 \to R_3 + 3R_1 \\ R_4 \to R_4 + 5R_1 \end{matrix}$

www.polytechnicpdf.com

$$\sim\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3 & -2\\ 0 & -1 & 7 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}R_3 \to R_3 - 2R_2\\ R_4 \to R_4 - 2R_2\end{matrix} \quad ...(1)$$

इसमें अशून्य पंक्तियों की संख्या = 2 अन्तः कोटि $r = \rho(A) = 2$

शून्यता = वर्गाकार आव्यूह का क्रम – आव्यूह की कोटि = 4 – 2 = 2 उत्तर

उदाहरण 2. आव्यूह $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & 6 & 5\end{bmatrix}$ की कोटि ज्ञात करें। **[2008]**

हल : माना $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 2\\ 2 & 6 & 5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}\begin{matrix}R_2 \to R_2 - R_1\\ R_3 \to R_3 - 2R_1\end{matrix}$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1/2\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix} R_2 \to \frac{1}{2}R_2 \quad \sim\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} R_3 \to R_3 - 2R_2$$

यह सोपानक रूप का है।

अतः कोटि $\rho(A)$ = अशून्य पंक्तियों की संख्या = 2 उत्तर

उदाहरण 3. निम्न आव्यूह की कोटि ज्ञात करें :

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 6\\ 0 & 6 & 9\end{bmatrix}$$ **[2005, 06]**

हल : माना $A = \begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 6\\ 0 & 6 & 9\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 4 & 0\\ 9 & 6 & 0\end{bmatrix} \quad C_1 \leftrightarrow C_3$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}C_1 \to \frac{1}{3}C_1\\ C_2 \to \frac{1}{2}C_2\end{matrix} \quad \sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}R_2 \to R_2 - 2R_1\\ R_3 \to R_3 - 3R_1\end{matrix}$$

$\therefore$ कोटि $\rho(A)$ = अशून्य पंक्तियों की संख्या = 1 उत्तर

उदाहरण 4. आव्यूह $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ को सोपानक रूप में बदलकर कोटि तथा शून्यता प्राप्त करें।

हल : $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & -7 & 6 & -11\\ 0 & -7 & 4 & -7\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{bmatrix}\begin{matrix}R_2 \to R_2 - 4R_1\\ R_3 \to R_3 - 3R_1\\ R_4 \to R_4 - R_1\end{matrix}$

www.polytechnicpdf.com

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & -7 & 6 & -11\\ 0 & 0 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{bmatrix} R_3 \to R_3 - R_2 \quad \sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -6/7 & 11/7\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{bmatrix} \begin{matrix}R_2 \to -\frac{1}{7}R_2\\ R_3 \to -\frac{1}{2}R_3\end{matrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -6/7 & 11/7\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} R_4 \to R_4 - R_3$$

यह सोपानक रूप का है, जिनमें अशून्य पंक्तियों की संख्या = 3

$\therefore \quad r = \rho(A) = 3$ उत्तर

तथा शून्यता $N(A) = n - r = 4 - 3 = 1$

2.9 आव्यूह का सामान्य रूप (Normal Form or Canonical Form)

प्रत्येक अशून्य आव्यूह A को प्रारम्भिक रूपान्तरण द्वारा निम्न में से किसी एक तुल्य आव्यूह में बदला जा सकता है—

(i) I_r (ii) $[I_r \vdots O]$ (iii) $\begin{bmatrix}I_r\\ \cdots\\ O\end{bmatrix}$ (iv) $\left[\begin{array}{c:c}I_r & O\\ \hdashline O & O\end{array}\right]$

जहाँ I_r, r क्रम का इकाई आव्यूह है।

इस प्रकार प्राप्त r (इकाई आव्यूह के मुख्य विकर्ण में इकाई अवयवों की संख्या) का मान आव्यूह की कोटि के बराबर होता है।

जैसे :

$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = I_3$ की कोटि 3 है, $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ की कोटि 2 है तथा $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ की कोटि 1 है।

उदाहरण 1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$ को सामान्य रूप में बदलकर कोटि तथा शून्यता प्राप्त करें।

हल : $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$ या $A \sim \left[\begin{array}{c:cc}1 & 0 & 0\\ \hdashline 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{array}\right] \begin{matrix}C_2 \to C_2 - C_1\\ C_3 \to C_3 - 2C_1\end{matrix}$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix} R_2 \to R_2 - R_1$$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} R_3 \to R_2 + R_3 \qquad \sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} C_3 \to C_3 - C_2$$

अतः $A \sim \begin{bmatrix}I_2 & O\\ O & 0\end{bmatrix}$ $\quad \therefore \quad r = \rho(A) = 2$

शून्यता $N(A) = n - r = 3 - 2 = 1$ उत्तर

www.polytechnicpdf.com

प्रमुख तथ्य (Important Facts)

1. **आव्यूह का सामान्य रूप (Normal Form) :** प्रारम्भिक रूपांतरण द्वारा आव्यूह को निम्न में से किसी एक रूप में रूपांतरित किया जा सकता है :

(i) I_r (ii) $[I_r \vdots O]$ (iii) $\begin{bmatrix} I_r \\ \cdots \\ O \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} I_r & \vdots & O \\ \cdots & & \cdots \\ O & \vdots & O \end{bmatrix}$

जहाँ r इकाई आव्यूह का क्रम है।

2. **आव्यूह का सोपानक या एशलॉन रूप :** आव्यूह सोपानक रूप का होगा यदि—
   (i) उसमें सभी अशून्य पंक्तियाँ शून्य पंक्तियों (यदि कोई है) से पहले हों
   (ii) अशून्य पंक्तियों में शून्य अवयवों की संख्या पूर्व की अशून्य पंक्तियों से अधिक हो।
   (iii) अशून्य पंक्तियों में पहला अशून्य अवयव इकाई हो।

3. **कोटि (Rank) :** (i) आव्यूह के सामान्य रूप (Normal Form) में कोटि इकाई आव्यूह का क्रम अर्थात् I_r में r का मान होता है।
   (ii) सोपानक रूप में कोटि अशून्य पंक्तियों की संख्या के बराबर होती है।

प्रश्नावली 2.2

1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ की कोटि ज्ञात करें। **[2008]**

2. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ की कोटि तथा शून्यता ज्ञात करें।

3. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ की कोटि तथा शून्यता ज्ञात करें।

निम्न कोटि ज्ञात करें।

4. (i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$ **[2009]**

   (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ **[2005, 06]**

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ की कोटि ज्ञात करें।

www.polytechnicpdf.com

निम्न आव्यूहों को सोपानक (Echelon Form) में रूपान्तरित कर कोटि ज्ञात करें :

6. $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -5 & 8 \\ 5 & -7 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

निम्न आव्यूहों को सामान्य रूप (Normal Form) में रूपान्तरित कर कोटि तथा शून्यता ज्ञात करें।

9. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

उत्तरमाला

1. $\rho(A) = 2$ 2. $\rho(A) = 2, N(A) = 1$ 3. $\rho(A) = 2, N(A) = 1$
4. (i) 2 (ii) 2 (iii) 1 5. कोटि 3, शून्यता = 1 6. 2
7. 2 8. 3 9. कोटि = 3, शून्यता = 0 10. कोटि = 3, शून्यता = 1

सदिशों का रैखिक परतंत्रता, स्वतंत्रता एवं कोटि
(Linear Dependence, Independence of Vectors and Rank of Matrices)

2.10 परिभाषायें

2.10.1 पंक्ति सदिश (Row Vector) या पंक्ति आव्यूह (Row Matrix) :

यदि किसी आव्यूह में केवल एक पंक्ति तथा n स्तंभ हों तो उसे पंक्ति आव्यूह या पंक्ति सदिश कहते हैं तथा निम्न रूप में व्यक्त करते हैं :

$$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]_{1\times n} \text{ या } A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

2.11 स्तंभ सदिश (Column Vector) या स्तंभ आव्यूह (Column Matrix)

यदि किसी आव्यूह में केवल एक स्तंभ तथा m पंक्तियाँ हों, तो उसे स्तंभ आव्यूह या स्तंभ सदिश कहते हैं तथा निम्न रूप में व्यक्त करते हैं :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1} \text{ या } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ या } [b_{11}, b_{12}, \dots b_m]^T$$

www.polytechnicpdf.com

2.12 किसी आव्यूह के पंक्ति तथा स्तंभ सदिश (Row and Column Vectors of a Matrix)

माना $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$

$m \times n$ क्रम का आव्यूह है तो

$$R_1 = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \cdots \quad a_{1n}]_{1 \times n}$$
$$R_2 = [a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \quad \cdots \quad a_{2n}]_{1 \times n}$$
$$\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$
$$\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$
$$R_m = [a_{m1} \quad a_{m2} \quad a_{m3} \quad \cdots \quad a_{mn}]_{1 \times n}$$

आव्यूह A के पंक्ति सदिश कहलाते हैं।

स्तंभ सदिश (Column Vector)

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m \times 1}, C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}_{m \times 1} \cdots, C_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

आव्यूह A के स्तंभ सदिश कहलाते हैं।

2.12.1 सदिशों का योग तथा अदिश गुणन (Sum of Vectors)

यदि $X = (x_1, x_2, \ldots x_n), Y = (y_1, y_2, \ldots y_n)$

तो $X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots, x_n + y_n)$

तथा $KX = K(x_1, x_2, \ldots x_n) = (Kx_1, Kx_2, \ldots Kx_n)$

जहाँ K अदिश है।

जैसें : $X = (1, 2, 3, 4), Y = (2, 0, 5, 5)$ तो

$X + Y = (1 + 2, 2 + 0, 3 + 5, 4 + 6) = (3, 2, 8, 10)$

तथा $2X = 2(1, 2, 3, 4) = (2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 4) = (2, 4, 6, 8)$

$0X = 0(1, 2, 3, 4) = (0, 0, 0, 0)$

2.12.2 सदिशों की रैखिक स्वतंत्रता तथा परतंत्रता (Linear Dependence and Independence of Vectors)

यदि $X_1, X_2, \ldots X_n$ समान क्रम के n पंक्ति सदिशों (या n स्तंभ सदिशों) का निकाय हो तो, तथा

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n = 0$$

जहाँ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ अदिश राशियाँ (सभी शून्य नहीं) तथा $0 = (0, 0, 0 \ldots 0)$ शून्य सदिश है तो सदिशों का निकाय रैखिक परतंत्र कहलाता है।

तथा यदि $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots \lambda_n X_n = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$

तो सदिशों का निकाय रैखिक स्वतंत्र कहलाता है।

www.polytechnicpdf.com

2.13 सदिशों का एकघात संचय (Linear Combination of Vectors)

यदि $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, n आव्यूह सदिश है तथा X एक ऐसा सदिश है, जिसे $X = a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, तो X को सदिशों $X_1, X_2, \ldots, X_n$ का एकघात संचय कहा जाता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. दिखायें सदिश $\bar{X}_1 = (3, 1, -4)$ तथा $\bar{X}_2 = (2, 2, -3)$ परिमेय संख्याओं के लिए रैखिक स्वतंत्र है। **[BTE 2004]**

हल : प्रश्न से $\bar{X} = (3, 1, -4), \bar{X}_2 = (2, 2, -3)$

यदि k_1 तथा k_2 अदिश राशियाँ इस प्रकार हों कि $k_1\bar{X}_1 + k_2\bar{X}_2 = O$

या $k_1(3, 1, -4) + k_2(2, 2, -3) = O = (0, 0, 0)$

या $(3k_1 + 2k_2, k_1 + 2k_2, -4k_1 - 3k_2) = (0, 0, 0)$

$\therefore \quad 3k_1 + 2k_2 = 0 \quad \ldots(1)$

$k_1 + 2k_2 = 0 \quad \ldots(2)$

$-4k_1 - 3k_2 = 0 \quad \ldots(3)$

समीकरण (2) से $k_1 = -2k_2$

(1) में यह मान रखने पर

$3(-2k_2) + 2k_2 = 0$ या $-4k_2 = 0$ $\therefore$ $k_2 = 0$ तथा $k_1 = -2k_2 = 0$

अतः $k_1 = 0, k_2 = 0$

अतः दिए गए सदिश रैखिक स्वतंत्र हैं।

उदाहरण 2. दिखायें सदिश $\bar{X}_1 = (1, 2, 4)$ और सदिश $\bar{X}_2 = (3, 6, 12)$ रैखिक परतंत्र (Linear dependent) हैं। **[BTE 2005]**

हल : $\bar{X}_1 = (1, 2, 4), \bar{X}_2 = (3, 6, 12)$

माना k_1 तथा k_2 ऐसी अदिश राशियाँ हैं, जिससे $k_1(1, 2, 4) + k_2(3, 6, 12) = O = (0, 0, 0) \quad \ldots(1)$

निरीक्षण से (1) में $k_1 = 3, k_2 = -1$ लेने पर

$$3(1, 2, 4) + (-1)(3, 6, 12)$$
$$= (3, 6, 12) + (-3, -6, -12)$$
$$= (3-3, 6-6, 12-12)$$
$$= (0, 0, 0)$$

यहाँ $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$, तथा $k_1X_1 + k_2X_2 = 0$

अतः $\bar{X}_1$ तथा $\bar{X}_2$ रैखिक परतंत्र हैं।

उदाहरण 3. सिद्ध करें $\bar{X}_1 = (2, 3); \bar{X}_2 = (4, -2)$ तथा $\bar{X}_3 = (-3, 6)$ रैखिक परतंत्र हैं।

हल : प्रश्न से $\bar{X}_1 = (2, 3), \bar{X}_2 = (4, -2), \bar{X}_3 = (-3, 6)$

माना k_1, k_2 तथा k_3 ऐसी अदिश राशियाँ हैं, जिससे $k_1\bar{X}_1 + k_2\bar{X}_2 + k_3\bar{X}_3 = 0$

$\Rightarrow \quad k_1(2, 3) + k_2(4, -2) + k_3(-3, 6) = O = (0, 0)$

$\Rightarrow \quad (2k_1 + 4k_2 - 3k_3, 3k_1 - 2k_2 + 6k_3) = (0, 0)$

$\Rightarrow \quad 2k_1 + 4k_2 - 3k_3 = 0 \quad \ldots(1)$

$3k_1 - 2k_2 + 6k_3 = 0 \quad \ldots(2)$

www.polytechnicpdf.com

$\Rightarrow \quad \frac{k_1}{18} = \frac{k_2}{-21} = \frac{k_3}{-16}$ [वज्र गुणन से]

$k_1 = 18, k_2 = -21, k_3 = -16$

समीकरण (1) तथा (2) को संतुष्ट करता है तथा ये मान अशून्य हैं।

अतः $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ तथा $\bar{X}_3$ रैखिक परतंत्र हैं।

उदाहरण 4. दिखाये शून्य सदिशों का समुच्चय रैखिक परतंत्र होते हैं।

हल : माना $\bar{X} = O = (0, 0, 0, \ldots, 0)$ जिसके सभी अवयव शून्य हैं।

तथा k कोई अदिश राशि है तो $k\bar{X} = O$

k के सभी अशून्य मानों के लिए सत्य है

जैसे $2\bar{X} = 0$ तथा $2 \neq 0$

अतः सदिश O रैखिक परतंत्र है।

उदाहरण 5. यदि $\bar{X}_1 = (3, 1, -4), \bar{X}_2 = (2, 2, -3)$ और $\bar{X}_3 = (0, -4, 1)$ हों, तो दिखायें सदिश, परिमेय संख्याओं के क्षेत्र पर परस्पर स्वतंत्र है। [2007]

हल : प्रश्न से $\bar{X}_1 = (3, 1, -4), \bar{X}_2 = (2, 2, -3)$ और $\bar{X}_3 = (0, -4, 1)$

माना k_1, k_2 तथा k_3 ऐसी अदिश राशियाँ है, $k_1\bar{X}_1 + k_2\bar{X}_2 + k_3\bar{X}_3 = 0$

या $\quad k_1 (3, 1, -4) + k_2 (2, 2, -3) + k_3 (0, -4, 1) = O = (0, 0, 0)$

या $\quad 3k_1 + 2k_2 + 0k_2 + 0k_3, k_1 + 2k_2 + (-4) k_3, (-4) (k_1 + k_3) = (0, 0, 0)$

या $\quad 3k_1 + 2k_2 = 0 \quad \ldots(1)$

$k_1 + 2k_2 - 4k_3 = 0 \quad \ldots(2)$

$-4k_1 - 3k_2 + k_3 = 0 \quad \ldots(3)$

(1), (2) तथा (3) से $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0$

$k_1 = k_2 = k_3 = 0$

तथा $\quad k_1\bar{X}_1 + k_2\bar{X}_2 + k_3\bar{X}_3 = 0$

अतः $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ तथा $\bar{X}_3$ परस्पर स्वतंत्र हैं।

उदाहरण 4. सिद्ध कीजिए कि सदिश (2, 3, 4), (0, 1, 2), (–1, 1, –1) एक घात स्वंतत्र हैं। [2008]

माना $\quad \bar{X}_1 = (2, 3, 4), \quad \bar{X}_2 = (0, 1, 2), \quad \bar{X}_3 = (-1, 1, -1)$

माना k_1, k_2 तथा k_3 ऐसे अदिश हैं जिससे $k_1\bar{X}_1 + k_2\bar{X}_2 + k_3\bar{X}_3 = O$

या $\quad k_1 (2, 3, 4) + k_2 (0, 1, 2) + k_3 (-1, 1, -1)$

या $\quad (2k_1 + 0k_2 - k_3, 3k_1 + k_2 + k_3), 4k_1 + 2k_2 - k_3) = (0, 0, 0)$

अतः $\quad 2k_1 - k_3 = 0; \quad 3k_1 + k_2 + k_3 = 0; \quad 4k_1 + 2k_2 - k_3 = 0$

इन समीकरणों को हल करने पर

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

अतः सदिश एक घात स्वतंत्र हैं।

उदाहरण 5. क्या निम्न सदिश-निकाय रैखिक स्वतंत्र है ?

$$\bar{X}_1 = [2\ 2\ 1]^T, \bar{X}_2 = [1\ 3\ 1]^T, \bar{X}_3 = [1\ 2\ 2]^T$$

www.polytechnicpdf.com

प्रश्न से, $\bar{X}_1 = [2 \quad 2 \quad 1]^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\bar{X}_2 = [1 \quad 3 \quad 1]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\bar{X}_3 = [1 \quad 2 \quad 2]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

माना k_1, k_2, k_3 ऐसी राशियाँ हैं, जिससे कि $k_1\bar{X}_1 + k_2\bar{X}_2 + k_3\bar{X}_3 = 0$

या $$k_1\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{या} \quad \begin{bmatrix} 2k_1 + k_2 + k_3 \\ 2k_1 + 3k_2 + 2k_3 \\ k_1 + k_2 + k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

यह समघात निकाय है अत:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{या} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [R_{13} \text{ से}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{bmatrix}$$

या $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [R_3 \to R_3 + R_2]$$

या $$k_1 + k_2 + 2k_3 = 0; \quad k_2 - 2k_3 = 0; \quad -5k_3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} k_3 &= 0 \\ k_2 &= 0 \\ k_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

अत: स्तंभ सदिशें का निकाय रैखिक स्वतंत्र हैं।

प्रश्नावली 2.3

1. यदि $X_1 = (1, 2, 3)$ तथा $X_2 = (2, -2, 6)$ तो दिखायें X_1 तथा X_2 रैखिक स्वतंत्र हैं।
2. सिद्ध करें $(1, 0, 0), (0, 0 1), (1, 1, 1)$ रैखिकत: स्वतंत्र हैं।
3. सिद्ध करें $X_1 = (1, 2, 3)$ तथा $X_2 = (4, -2, 7)$ एकघात स्वतंत्र समुच्चय बनाते हैं।
4. दिखायें कि $(1, -1, 1), (2, 1, 1)$ तथा $(3, 0, 2)$ रैखिकत: परतन्त्र हैं।
5. $X_1 = (3, 1, -4)$, $X_2 = (2, 2, -3)$ तथा $X_3 = (0, -4, 1)$ रैखिक परतंत्र हैं।

2.14 रैखिक समीकरण (Linear Equations)

यदि

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = b_m$$

n अज्ञात राशियों में m समीकरण हैं जो रैखिक समीकरण निकाय (System of Linear Equations) कहलाते हैं। इन्हें आव्यूह रूप में लिखने पर

www.polytechnicpdf.com

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

या $AX = B$, जहाँ $A = [a_{ij}]_{m \times n}, X = [x_i]_{n \times 1}$ तथा $B = [b_i]_{m \times 1}$

यदि समीकरण निकाय $AX = B$, में $B = 0$ हो तो यह समघात रेखीय समीकरण निकाय (System of Homogeneous Linear Equations) तथा यदि $B \neq 0$ हो तो असमघात रेखीय समीकरण निकाय (System of Non-homogeneous Linear Equations) कहलाता है।

जैसे : $2x + 3y + 4z = 5;\ 3x + 5y + 7z = 6;\ 4x + 6y + 9z = 7$

या $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ असमघातीय रेखीय समीकरण निकाय है ...(1)

तथा $\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 0 \\ 3x + 5y + 7z &= 0 \\ 4x + 6y + 9z &= 0 \end{aligned}$ या $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ समघातीय रेखीय समीकरण निकाय है।

नोट :

(1) में गुणांक आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ तथा संवर्द्धित आव्यूह $C = [A \vdots B] = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 6 \\ 4 & 6 & 9 & 7 \end{array}\right]$ है।

2.14.1 रैखिक समीकरण निकाय : संगतता, असंगतता एवं उनका हल (Linear Equations : Consistency, inconsistency)

(i) संगत रैखिक समीकरण (Consistent Linear Equation)

यदि समीकरण निकायों का एक या अधिक हल हो तो उसे संगत (Cosistent) रैखिक समीकरण कहते हैं।

जैसे : (i) $x + y = 8$

$x - y = 4$ का अद्वितीय (unique) हल होगा।

(ii) $x + 3y = 9$

$3x + 9y = 27$ के अनन्त हल (Infinite Solutions) होंगे।

(ii) असंगत रैखिक समीकरण (Inconsistent Linear Equation) : ऐसे समीकरणों का निकाय जिनका कोई हल नहीं होता असंगत (Inconsistent) रैखिक समीकरण कहलाते हैं।

जैसे : $x + y = 5$

$2x + 2y = 11$ असंगत हैं।

2.14.2 रेखीय समीकरण की संगतता एवं असंगतता (Condition for Consistency and non-consistency of System of Linear Equations) :

(A) असमघातीय रेखीय समीकरण : समीकरण निकाय $AX = B$ संगत होगा यदि और केवल यदि गुणांक आव्यूह (Coefficient Matrix) A तथा संवर्द्धित आव्यूह (Augmented matrix) $[A : B]$ की कोटियाँ बराबर हों अर्थात् $\rho(A) = \rho(A : B)$

(a) अद्वितीय (Unique) होगा, यदि कोटि A = कोटि $[A : B] = n$, जहाँ n अज्ञात राशियों की संख्या

(b) अनन्त (Infinite) होगा, यदि कोटि A = कोटि $[A : B] < n$

www.polytechnicpdf.com

(B) समघातीय रेखीय समीकरण : n अज्ञात राशियों वाला समघातीय समीकरण निकाय $AX = 0$ संगत होगा यदि $\rho(A) = \rho(A:B)$

यदि m = समीकरणों की संख्या तथा n = अज्ञात राशियों की संख्या हो, तो इनका हल

(i) अद्वितीय होगा यदि $\rho(A) = \rho(A:B) = n$ तथा हल $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ से दिया जाता है, जिसे निरर्थक हल (Trivial Solution) कहते हैं।

(ii) अनन्त होंगे यदि $\rho(A) = \rho(A:B) = r < n$, जो अशून्य हल (Non-trivial Solution) कहलाते हैं।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. सिद्ध कीजिए कि समीकरण

$$x - 4y + 7z = 14;\quad 3x + 8y - 2z = 13;\quad 7x - 8y + 26z = 5 \text{ असंगत है।}$$

हल : समीकरणों को $AX = B$ रूप में लिखने पर

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 3 & 8 & -2 \\ 7 & -8 & 26 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 13 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ जहाँ } A \text{ गुणांक आव्यूह है।}$$

$$\therefore \quad \text{संवर्द्धित आव्यूह } [A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 3 & 8 & -2 & 13 \\ 7 & -8 & 26 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 0 & 20 & -23 & -29 \\ 0 & 20 & -23 & -93 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 7R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & 14 \\ 0 & 20 & -23 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & -64 \end{array}\right] \quad R_3 \to R_3 - R_2$$

जो सोपानक रूप में है, जिसमें तीन अशून्य पंक्तियाँ हैं। अतः $\rho[A:B] = 3$

अब, गुणांक आव्यूह $\quad A \sim \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 20 & -23 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \rho(A) = 2$ [$\because$ यहाँ अशून्य पंक्तियों की संख्या = 2]

अतः $\rho(A) \neq \rho(A:B)$

अतः समीकरण निकाय असंगत है।

उदाहरण 2. निम्न समीकरण निकाय की संगतता की जाँच कीजिए। यदि संगत है तो उनका हल ज्ञात करें।

$$x + y + z = 8,\quad x - y + 2z = 6,\quad 3x + 5y - 7z = 14$$

हल : $AX = B$ रूप में लिखने पर, जहाँ A गुणांक आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad \text{संवर्द्धित आव्यूह } [A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & -7 & 14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -10 & -10 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -12 \end{array}\right] \quad R_3 \to R_3 + R_2$$

www.polytechnicpdf.com

जो सोपानक रूप में है, जिसमें अशून्य पंक्तियों की संख्या तीन है, अतः $\rho[A:B]=3$

तथा गुणांक आव्यूह $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

$[A:B]$ को $AX=B$ के रूप में लिखने पर

इसमें अशून्य पंक्तियों की संख्या 3 है। अतः $\rho(A)=3$

$\therefore \quad \rho(A)=\rho(A:B)=3$

अतः समीकरण निकाय संगत है तथा इसका अद्वितीय हल होगा।

अब $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -12 \end{bmatrix}$ [$\because$ $[A:B]$ को $AX=B$ के रूप में लिखने पर]

$\Rightarrow \quad x+y+z=8 \quad \ldots(1)$

$-2y+z=-2 \quad \ldots(2)$

$-9z=-12 \quad \ldots(3)$

अतः $-9z=-12 \quad \Rightarrow \quad z=\dfrac{-12}{-9}=\dfrac{4}{3}$

$-2y+\dfrac{4}{3}=-2$ [(2) से]

$\Rightarrow \quad -2y=-2-\dfrac{4}{3} \quad \Rightarrow -2y=-\dfrac{10}{3} \quad \Rightarrow y=\dfrac{5}{3}$

तथा (1) से $x+\dfrac{5}{3}+\dfrac{4}{3}=8 \Rightarrow x=8-\dfrac{9}{3}=8-3=5 \quad \therefore \quad x=5, y=\dfrac{5}{3}, z=\dfrac{4}{3}$ उत्तर

उदाहरण 3. निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए—

$$2x+3y-z=0;\ x-y-2z=0;\ 3x+y+3z=0$$ **[2007]**

हल : आव्यूह रूप $AX=B$ में लिखने पर $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

या $AX=O$, जहाँ $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

अब $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_2$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2-2R_1 \\ R_3 \to R_3-3R_1 \end{matrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \quad R_2 \to \dfrac{1}{5}R_2$

www.polytechnicpdf.com

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 33/5 \end{bmatrix} \quad R_3 \to R_3 - 4R_2$$

जो आव्यूह A का सोपानक रूप है।

स्पष्ट है $\rho(A)$ = अशून्य पंक्तियों की संख्या $= 3 =$ अज्ञात चरों की संख्या

अतः समीकरण निकाय का अद्वितीय हल होगा तथा कोई अशून्य हल नहीं होगा।

अतः $x = 0, y = 0, z = 0$

उदाहरण 4. दिए गए समीकरण निकाय की सुसंगतता की जाँच कीजिए तथा यदि संभव है तो हल ज्ञात करें।

$$4x - 2y + 6z = 8; \quad x + y - 3z = -1; \quad 15x - 3y + 9z = 21$$

हल : समीकरण निकाय को $AX = B$ रूप में लिखने पर $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 15 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 21 \end{bmatrix}$

अतः संवर्द्धित आव्यूह (Augmented Matrix)

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -2 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 15 & -3 & 9 & 21 \end{array}\right] \quad \ldots(1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 4 & -2 & 6 & 8 \\ 0 & 3/2 & -9/2 & -3 \\ 0 & 9/2 & -27/2 & -9 \end{array}\right] \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - \frac{1}{4}R_1 \\ R_3 \to R_3 - \frac{15}{4}R_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 & 8 \\ 0 & 3/2 & -9/2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_3 \to R_3 - 3R_3 \quad \ldots(2)$$

$\because$ अशून्य पंक्तियों की संख्या $= 2$ $\quad \therefore \quad \rho(A:B) = 2$

पुनः $A \sim \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & 3/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, इसमें अशून्य पंक्तियों की संख्या $= 2$

$\therefore \quad \rho(A) = 2$

अतः $\rho(A) = \rho(A:B) = 2$ अतः समीकरण निकाय संगत है किन्तु अज्ञात चरों की संख्या $= 3 > 2$

अतः इसके अनन्त हल होंगे।

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & 3/2 & -9/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [(1) \text{ तथा } (2) \text{ से}]$$

$\therefore \quad 4x - 2y + 6z = 8 \quad \ldots(3)$

$$\frac{3}{2}y - \frac{9}{2}z = -3 \quad \text{तथा} \quad \frac{3}{2}y = \frac{9}{2}z - 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3z - 2$$

माना $z = k$ तो $y = 3k - 2$

अतः (3) से

$$4x - 2(3k - 2) + 6k = 8 \Rightarrow 4x - 6k + 4 + 6k = 8 \Rightarrow 4x = 8 - 4 \Rightarrow x = 1$$

अभीष्ट हल $x = 1, y = 3k - 2$ तथा $z = k$

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 5. λ तथा μ के कौन मानों के लिए निम्न समीकरणों का

$$x+y+z=6, \quad x+2y+3z=10, \quad x+2y+\lambda z=\mu$$

(i) कोई हल नहीं होगा (ii) अद्वितीय हल होगा (iii) अनन्त हल होगा।

हल : $AX=B$ के रूप में लिखने पर $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&2&\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\10\\\mu\end{bmatrix}$

अतः संवर्द्धित आव्यूह (Augmented Matrix)

$$[A:B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\1&2&3&10\\1&2&\lambda&\mu\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&1&2&4\\0&1&\lambda-1&\mu-6\end{array}\right] \quad \begin{array}{l}R_2\to R_2-R_1\\R_3\to R_3-R_1\end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&1&2&4\\0&0&\lambda-3&\mu-10\end{array}\right] \quad R_3\to R_3-R_2$$

अतः (i) समीकरण-निकाय का कोई हल नहीं होगा यदि $\rho(A)\neq\rho(A:B)$

यह तभी संभव है जब $\lambda-3=0$ या $\lambda=3$ तथा $\mu-10\neq0$ या $\mu\neq10$

(ii) अद्वितीय हल होगा यदि $\rho(A)=\rho(A:B)=3$ [$\because$ अज्ञात चरों की संख्या $=3$]

यह तभी संभव है जब $\lambda-3\neq0$ या $\lambda\neq3$ तथा μ के कोई भी मान संभव है।

(iii) अनन्त हल होगा यदि $\rho(A)=\rho[A:B]=2$

यह तभी संभव है जब $\lambda-3=0$ या $\lambda=3$ तथा $\mu-10=0$ या $\mu=10$

प्रमुख तथ्य (Important Facts)

1. यदि $a_1x+b_1y+c_1z=d_1;\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2;\ a_3x+b_3y-c_3z=d_3$

तो (i) गुणांक आव्यूह (Coefficient Matrix) $A=\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}$

(ii) संवर्द्धित आव्यूह (Augmentred Matrix) $C=[A:B]=\left[\begin{array}{ccc|c}a_1&b_1&c_1&d_1\\a_2&b_2&c_2&d_2\\a_3&b_3&c_3&d_3\end{array}\right]$

तथा (iii) समीकरण निकाय का आव्यूह रूप $AX=B$ $\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{bmatrix}$,

जहाँ $A=$ गुणांक आव्यूह; $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{bmatrix}$

2. समीकरणों की संगतता : यदि n अज्ञात राशियों वाले समीकरण निकाय $AX=B$ में $\rho(A)=\rho[A:B]=n$ तो समीकरण संगत होंगे तथा इनका अद्वितीय हल होगा।

(ii) $\rho(A)=\rho[A:B]<n$ तो समीकरण संगत होंगे तथा इनके अनंत हल होंगे।

(iii) $\rho(A)\neq\rho(A:B)$ तो समीकरण असंगत होंगे तथा इनका कोई हल नहीं होगा,

जहाँ $\rho(A)=A$ की कोटि $\rho[A:B]=$ संवर्द्धित आव्यूह की कोटि।

www.polytechnicpdf.com

प्रश्नावली 2.3

1. निम्न समीकरणों की संगतता की जाँच कीजिए—

$$x + y + z = -3;\ 3x + y - 2z = -2;\ 2x + 4y + 7z = 7$$

2. दिखायें कि निम्न समीकरण निकाय असंगत है—

$$x - 4y + 7z = 14;\ 3x + 8y - 2z = 13;\ 7x - 8y + 26z = 5$$

3. दिखायें कि समीकरण $2x + 6y = -11,\ 6x + 20y - 6z = -3;\ 6y - 18z = -1$ असंगत हैं।

4. निम्न समीकरणों की संगतता की जाँच कीजिए तथा यदि संभव हो तो उनका हल ज्ञात करें—

$$2x + 3y + 4z = 14;\quad x + 5y + 7z = 15;\quad 3x + 11y + 13z = 29$$

[संगत, $x = 4, y = -2, z = 3$]

5. निम्न समीकरणों की संगतता की जाँच करें तथा यदि संभव हो तो हल ज्ञात करें—

$$5x + 3y + 7z = 4;\quad 3x + 26y + 2z = 9;\quad 7x + 2y + 10z = 5$$

6. k का मान ज्ञात करें जिसके लिए $3x - y + 2z = 1;\quad 2x + y + 3z = 1;\quad x - 3y + kz = 0$ का अद्वितीय हल होगा तथा दिखायें यदि $k = -2$ तो निकाय असंगत होगा।

7. k के किन मानों के लिए समीकरण निकाय $3x - y + kz = 1;\ 2x + y + z = 2;\ x + 2y - kz = -1$ संगत है? **[2003]**

8. λ तथा μ का वह मान प्राप्त करें जिसके लिए निम्न समीकरण निकाय $2x + 3y + 5z = 9;\quad 7x + 3y - 2z = 8;\ 2x + 3y - \lambda z = \mu$ के (i) अद्वितीय हल हों (ii) कोई हल न हो।

9. समीकरण निकाय $2x + 6y - 3z = 0;\quad 2x + 10y - 25z = 0;\quad x + 6y - 18z = 0$ की सुसंगतता की जाँच कीजिए तथा हल ज्ञात करें।

10. λ का मान ज्ञात करें जिसके लिए समीकरण निकाय $2x + y + 2z = 0;\ x + y + 3z = 0,\ 4x + 3y + \lambda z = 0$ का अशून्य हल होगा।

[संकेत : $\rho(A) = \rho(A : B) < 3 =$ अज्ञात चरों की संख्या]

उत्तरमाला

4. संगत, $x = 4, y = -2, z = 3$

5. $x = -\dfrac{16k + 7}{11},\ y = \dfrac{k + 3}{11},\ z = k$

6. $k \neq -2$

7. $k = -\dfrac{7}{2}$

8. (i) $\lambda \neq 5, \mu \neq 9$ (ii) $\lambda = 5, \mu = 9$

9. संगत, $x = y = z = 0$

□□□

www.polytechnicpdf.com

3

CHAPTER

आइगेन मान तथा कैले-हैमिल्टन प्रमेय (Eigen Values and Cayley-Hamilton Theorem)

3.1 परिभाषायें (Definition)

(1) अभिलाक्षणिक आव्यूह (Characteristic Matrix) : यदि $A=[a_{ij}]$, n क्रम का वर्ग आव्यूह हो, I उसी क्रम का इकाई आव्यूह तथा λ कोई अदिश राशि हो तो आव्यूह $A-\lambda I$ को आव्यूह A का अभिलाक्षणिक आव्यूह कहा जाता है।

जैसे $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&5\\6&7&8\end{bmatrix}$ तथा $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

तो $A-\lambda I=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&5\\6&7&8\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\lambda&2&3\\3&4-\lambda&5\\6&7&8-\lambda\end{bmatrix}$

यह आव्यूह A का अभिलाक्षणिक आव्यूह है।

स्पष्ट है कि किसी आव्यूह A का अभिलाक्षणिक आव्यूह उसके मुख्य विकर्ण के प्रत्येक अवयव से अदिश λ घटाकर प्राप्त किया जाता है।

(2) अभिलाक्षणिक सारणिक (Characteristic Determinant) : अभिलाक्षणिक आव्यूह $A-\lambda I$ के सारणिक $|A-\lambda I|$ को अभिलाक्षणिक सारणिक कहते हैं।

(3) अभिलाक्षणिक बहुपद (Characteristic Matrix) : अभिलाक्षणिक आव्यूह $A-\lambda I$ के सारणिक $|A-\lambda I|$ के विस्तार को अभिलाक्षणिक बहुपद कहते हैं।

यदि $A=\begin{bmatrix}a&h&g\\0&b&0\\0&0&c\end{bmatrix}$ तो $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}a-\lambda&h&g\\0&b-\lambda&0\\0&0&c-\lambda\end{vmatrix}$ अभिलाक्षणिक आव्यूह तथा

$$|A-\lambda I|=(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$$

आव्यूह A का अभिलाक्षणिक बहुपद है, जो त्रिघात में है।

नोट :

- **आव्यूह की कोटि :** अभिलाक्षणिक बहुपद की घात उसकी कोटि को बताता है।

उपरोक्त उदाहरण में आव्यूह A की कोटि 3 है।

(3) अभिलाक्षणिक समीकरण (Characteristic Equation) : आव्यूह A के अभिलाक्षणिक बहुपद को शून्य के बराबर करने से उसका अभिलाक्षणिक समीकरण प्राप्त होता है।

www.polytechnicpdf.com

अतः यदि A, n क्रम कर वर्ग आव्यूह हो, तो अभिलाक्षणिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0$ होगा।

उपरोक्त उदाहरण में $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda) = 0$ अतः यह दिये गये आव्यूह A का अभिलाक्षणिक समीकरण है।

(4) आइगेन मान या अभिलाक्षणिक मूल (Eigen value or Characteristic root) : किसी आव्यूह A के अभिलाक्षणिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0$ के मूल उसके आइगेन मान या अभिलाक्षणिक मूल कहलाते हैं।

उपरोक्त उदाहरण में

$$(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = a, b, c$$

अतः a, b तथा c आव्यूह A के अभिलाक्षणिक मूल या आइगेन मान हैं।

(5) स्पेक्ट्रम (Spectrum) : किसी आव्यूह A के सभी अभिलाक्षणिक मूलों (या आइगेन मानों) को समुच्चय के रूप में व्यक्त करने से उसका स्पेक्ट्रम प्राप्त होता है।

उपरोक्त उदाहरण में आव्यूह A का स्पेक्ट्रम $\{a, b, c\}$ है।

(6) आइगेन सदिश या अभिलाक्षणिक सदिश (Eigen vector or Characteristic vector) : यदि $A, n \times n$ क्रम का आव्यूह है तथा λ इसका अभिलाक्षणिक मूल है, तो स्तंभ सदिश

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, X \neq 0$$

जो समीकरण $AX = \lambda X$

$$\Rightarrow \qquad (A - \lambda I)X = 0 \qquad \Rightarrow \qquad AX = \lambda IX$$

को संतुष्ट करता है, को अभिलाक्षणिक मूल λ के सापेक्ष आव्यूह A का अभिलाक्षणिक सदिश कहते हैं।

सभी अभिलाक्षणिक सदिशों के समुच्चय को **आइगेन समष्टि (Eigen space)** कहते हैं।

3.2 अभिलाक्षणिक मूल या आइगेन मानों के गुण

1. किसी वर्गाकार आव्यूह A का आइगेन मान तथा उसके परिवर्त आव्यूह A' के आइगेन मान बराबर होते हैं।
2. किसी आव्यूह A के आइगेन मानो का गुणनफल उसके संगत सारणिक $|A|$ के मान के बराबर होता है।
3. किसी वर्गाकार आव्यूह के मुख्य त्रिकर्णों के अवयवों का योग उसके आइगेन मानों के योग, जिसे ट्रेस (Trace) कहते हैं, के बराबर होता है।
4. यदि आव्यूह A के आइगेन मान $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ हों तो
   (i) A^{-1} के आइगेन मान $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}$ होंगे।
   (ii) $k\lambda_1, k\lambda_2, \ldots, k\lambda_n$ आव्यूह kA के आइगेन मान होंगे
   (iii) A^m के आइगेन मान $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_n^m$ होंगे, जहाँ m धनात्मक पूर्णांक है।

3.3 अभिलाक्षणिक सदिश या आइगेन सदिशों के गुण (Properties of Characteristic Vectors or Eigen Vectors)

1. वर्गाकार आव्यूह के आइगेन सदिश अद्वितीय (unique) नहीं होते।
2. वर्गाकार आव्यूह के आइगेन मूलों $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ के संगत आइगेन सदिश $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ रैखिक स्वतंत्र समुच्चय बनाते हैं।
3. किसी सममित आव्यूह के आइगेन मानों के संगत आइगेन सदिशों के युग्म लांबिक होते हैं।

www.polytechnicpdf.com

3.4 कैले-हैमिल्टन प्रमेय (Caley-Hamilton Theorem)

कथन (Statement) : प्रत्येक वर्ग आव्यूह अपने अभिलाक्षणिक समीकरण को संतुष्ट करता है। (Every square matrix satisfies its own characteristic equation)

इस प्रमेय का उपयोग वर्ग आव्यूह के व्युत्क्रम आव्यूह (Inverse matrix) तथा उसकी घातों का मान ज्ञात करने में होता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -5 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$ के

(i) अभिलाक्षणिक आव्यूह, (ii) अभिलाक्षणिक समीकरण,
(iii) अभिलाक्षणिक मूल, एवं (iv) स्पेक्ट्रम ज्ञात करें।

हल : दिया गया आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -5 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$

यह तृतीय क्रम का वर्ग आव्यूह है।

$\therefore$ (i) अभिलाक्षणिक आव्यूह $=A-\lambda I_3$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -5 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 0 & -5-\lambda & 2\\ 0 & 0 & 6-\lambda\end{bmatrix}$$ उत्तर

(ii) A का अभिलाक्षणिक बहुपद $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 0 & -5-\lambda & 2\\ 0 & 0 & 6-\lambda\end{vmatrix}$ [(i) से]

$\therefore$ अभिलाक्षणिक समीकरण $|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 0 & -5-\lambda & 2\\ 0 & 0 & 6-\lambda\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow (1-\lambda)(-5-\lambda)(6-\lambda)=0$ उत्तर

(iii) अभिलाक्षणिक मूल :

(ii) से $(1-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=1$

$-5-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=-5$

$6-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=6$

अत: अभिलाक्षणिक मूल $1, -5$ तथा 6 हैं।

(iv) स्पेक्ट्रम $=\{1, -5, 6\}$

उदाहरण 2. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ के आइगेन मान ज्ञात करें। **[BTE 2009]**

हल : दिया गये आव्यूह का अभिलाक्षणिक आव्यूह

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-\lambda & 2-0\\ -1-0 & 0-\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-\lambda & 2\\ -1 & -\lambda\end{bmatrix}$$

www.polytechnicpdf.com

$\therefore$ अभिलाक्षणिक समीकरण $|A-\lambda I|=0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow \quad -\lambda(3-\lambda)-2=0 \quad \Rightarrow \quad -3\lambda+\lambda^2+2=0$

$\Rightarrow \quad \lambda^2-2\lambda-\lambda+2=0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-2)(\lambda-1)=0 \qquad ...(1)$

(1) से, $\lambda-2=0 \Rightarrow \lambda=2$ तथा $\lambda-1=0 \Rightarrow \lambda=1$

$\therefore$ अभीष्ट आइगेन मान $=2, 1$ उत्तर

उदाहरण 3. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान ज्ञात करें। **[2012]**

हल : यदि दिया गया आव्यूह A हो, तो अभिलाक्षणिक समीकरण $|A-\lambda I_3|=0$ जहाँ I_3 तृतीय क्रम का इकाई आव्यूह है।

या $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda & 0 \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \begin{bmatrix} C_2 \to C_2-C_1 \\ C_3 \to C_3-C_2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad (1-\lambda)\{\lambda^2-0\}-\lambda\{-\lambda-\lambda\}+0=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2(1-\lambda)+2\lambda^2=0$

या $\quad \lambda^2\{1-\lambda+2\}=0 \quad$ या $\quad \lambda^2\{3-\lambda\}=0$

$\therefore \quad \lambda^2=0 \quad \Rightarrow \lambda=0, 0 \quad$ तथा $\quad 3-\lambda=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=3$

अतः अभीष्ट आइगेन मान $=0, 0, 3$ उत्तर

उदाहरण 4. निम्न आव्यूह के अभिलाक्षणिक मूल ज्ञात करें।

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

[BTE 2007]

हल : माना $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ जो तृतीय क्रम का वर्ग आव्यूह है।

अतः अभिलाक्षणिक समीकरण $|A-\lambda I_3|=0$,

जहाँ λ अभिलाक्षणिक मूल है तथा I_3 तृतीय क्रम का इकाई आव्यूह है।

या $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad$ या $\quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0$

या $\quad (2-\lambda)\{(2-\lambda)^2+1\}+1\{-1(2-\lambda)-1\}+1\{1-(2-\lambda)\}=0$

या $\quad (2-\lambda)\{4-2\lambda+\lambda^2+1\}+\{-2+\lambda-1\}+\{1-2+\lambda\}=0$

या $\quad (2-\lambda)\{\lambda^2-4\lambda+5\}+(\lambda-3)+(\lambda-1)=0$

या $\quad 2\lambda^2-8\lambda+10-\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2\lambda-4=0$

या $\quad -\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6=0 \quad$ या $\quad \lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0 \qquad ...(1)$

(1) में $\lambda=1$ रखने से समीकरण संतुष्ट होता है।

अतः (1) का $(\lambda-1)$ एक गुणनखंड होगा।

www.polytechnicpdf.com

अतः (1) से, $\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda^2 + 5\lambda + 6\lambda - 6 = 0$

या $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$ या $(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$ $\therefore \lambda = 1, 2, 3$

अतः अभीष्ट अभिलाक्षणिक मूल 1, 2, 3 हैं। उत्तर

उदाहरण 5. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ के आभिलाक्षणिक मूल तथा अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात करें।

हल : A का अभिलाक्षणिक समीकरण $|A - \lambda I| = 0$ या $\begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ $(-2-\lambda)(4-\lambda) - (5)(-1) = 0$ $\Rightarrow$ $-8 + 2\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 5 = 0$

$\Rightarrow$ $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ $\Rightarrow$ $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$ $\therefore \lambda = 3, -1$

अतः अभीष्ट अभिलाक्षणिक मूल 3, – 1 हैं।

▸अभिलाक्षणिक सदिश :

(1) λ के संगत अभिलाक्षणिक सदिश $(A - \lambda I)X = 0$ का अशून्य हल होगा।

या $\begin{bmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ...(1)

(1) में $\lambda = -1$ रखने पर

$$\begin{bmatrix} -2+1 & -1 \\ 5 & 4+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

या $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $[R_2 = R_2 + 5R_1]$

या $-x_1 - x_2 = 0$ या $\dfrac{x_1}{1} = \dfrac{x_2}{-1}$

$\therefore$ $\lambda = -1$ के संगत अभिलाक्षणिक सदिश $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ लिया जा सकता है।

(1) में $\lambda = 3$ रखने पर

$$\begin{bmatrix} -2-3 & -1 \\ 5 & 4-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

या $\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ या $\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $[R_2 = R_2 + R_1]$

$\therefore$ $5x_1 - x_2 = 0$ या $\dfrac{x_1}{1} = \dfrac{x_2}{-5}$

अतः $\lambda = 3$ के संगत अभिलाक्षणिक सदिश $X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ लिया जा सकता है।

उदाहरण 6. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक मूल तथा संगत सदिश ज्ञान करें। **[2010, 14, 15]**

हल : प्रश्न से, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

www.polytechnicpdf.com

$$\Rightarrow \quad A-\lambda I=\begin{bmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 0 & 2-\lambda & 3\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{bmatrix}$$

$\therefore$ अभिलाक्षणिक समीकरण, $|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}1-\lambda & 2 & 3\\ 0 & 2-\lambda & 3\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{bmatrix}=0$ ...(1)

$\Rightarrow \quad (1-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda)=0$

$\therefore \quad \lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$ अभीष्ट अभिलाक्षणिक मूल हैं।

अब $\lambda_1=1$ के संगत अभिलाक्षणिक सदिश के लिए, $(A-\lambda I)X=0$ में $\lambda=1$ रखने पर

$$\begin{bmatrix}1-1 & 2 & 3\\ 0 & 2-3 & 3\\ 0 & 0 & 2-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\therefore \quad 2x_2+3x_3=0, x_2+3x_3=0, x_3=0$

अतः $x_3=0$ से $x_2=0$; और $x_1=k_1$, जहाँ $k_1\neq 0$

$\therefore \quad \lambda_1=1$ के अभिलाक्षणिक सदिश $X_1=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\0\\0\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ होगा।

पुनः $(A-\lambda I)X=0$ में $\lambda=2$ रखने पर

$$\begin{bmatrix}1-2 & 2 & 3\\ 0 & 2-2 & 3\\ 0 & 0 & 2-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$\therefore \quad -x_1+2x_2+3x_3=0$ तथा $3x_3=0 \qquad \therefore \quad x_1=2x_2$ तथा $x_3=0$

यदि $x_2=k_2$ तो $x_1=2k_2$

$\therefore \quad \lambda_2=2$ के सापेक्ष अभिलाक्षणिक सदिश $X_2=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2k_2\\ k_2\\ 0\end{bmatrix}=k_2\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$ से $\lambda_3=2$ के संगत सदिश X_3 इसी प्रकार प्राप्त होगा।

उदाहरण 7. आव्यूह $\begin{bmatrix}8 & -6 & 2\\ -6 & 7 & -4\\ 2 & -4 & 3\end{bmatrix}$ के आइगेन मान तथा आइगेन सदिश ज्ञात कीजिये।

हल : माना $A=\begin{bmatrix}8 & -6 & 2\\ -6 & 7 & -4\\ 2 & -4 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow A-\lambda I=\begin{vmatrix}8-\lambda & -6 & 2\\ -6 & 7-\lambda & -4\\ 2 & -4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$ जहाँ A का आइगेन मान λ है।

अतः अभिलाक्षणिक समीकरण $|A-\lambda I|=0$

या $\begin{vmatrix}8-\lambda & -6 & 2\\ -6 & 7-\lambda & -4\\ 2 & -4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$

या $(8-\lambda)\{(7-\lambda)(3-\lambda)-16\}+6\{-6(3-\lambda)+8\}+2\{24-2(7-\lambda)\}=0$

या $(8-\lambda)\{21-10\lambda+\lambda^2-16\}+6\{-18+6\lambda+8\}+2\{24-14+2\lambda\}=0$

या $(8-\lambda)\{\lambda^2-10\lambda-5\}+6\{6\lambda-10\}+20+4\lambda=0$

या $8\lambda^2-80\lambda+40-\lambda^3+10\lambda^2-5\lambda+36\lambda-60+20+4\lambda=0$

www.polytechnicpoint.com

या $\lambda^3 - 18\lambda^2 + 45\lambda = 0$ या $\lambda\{\lambda^2 - 18\lambda + 45\} = 0$

या $\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 15) = 0$ $\therefore$ $\lambda = 0, 3, 15$ उत्तर

आइगेन सदिश

(i) माना $\lambda_1 = 0$ के लिये आइगेन सदिश $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

तब $\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ [$|A = \lambda I| = 0$ में $\lambda = 0$ रखने पर]

या $8x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$ ...(i)

$-6x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 0$ ...(ii)

$2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$ ...(iii)

समीकरण (i) व (ii) से

$$\frac{x_1}{24-14} = \frac{x_2}{-12+32} = \frac{x_3}{56-36} \quad \text{या} \quad \frac{x_1}{10} = \frac{x_2}{20} = \frac{x_3}{20} \quad \text{या} \quad \frac{x}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{2} = k_1$$

आइगेन सदिश $X_1 = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, k_1 \neq 0$

(ii) $\lambda_2 = 3$ के लिये

$$\begin{bmatrix} 5 & -6 & 2 \\ -6 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$ [$(A - \lambda I)X = 0$ में $\lambda = 3$ रखने पर]

या $5x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$

$-6x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 0$

$2x_1 - 4x_2 + 0x_3 = 0$

माना $x_2 = k_2$ तब $x_1 = 2k_2, x_3 = -2k_2$

आइगेन सदिश $X_2 = k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, k_2 \neq 0$

(iii) $\lambda = 15$ के लिए $\begin{bmatrix} -7 & -6 & 2 \\ -6 & -8 & -4 \\ 2 & -4 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

या $-7x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0$ ...(i)

$-6x_1 - 8x_2 - 4x_3 = 0$ ...(ii)

$2x_1 - 4x_2 - 12x_3 = 0$ ...(iii)

समीकरण (i) व (ii) से

$$\frac{x_1}{24+16} = \frac{x_2}{-12-28} = \frac{x_3}{56-36} \quad \text{या} \quad \frac{x_1}{40} = \frac{x_2}{-40} = \frac{x_3}{20} \quad \text{या} \quad \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{-2} = \frac{x_3}{1} = k_3$$

आइगेन सदिश $X_3 = k_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k_3 \neq 0$

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 8. निम्न आव्यूह के आइगेन मान तथा उनके संगत आइगेन सदिश ज्ञात कीजिये।

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

हल : माना आव्यूह का आइगेन मान λ है।

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad ...(1)$$

$\Rightarrow \quad (2-\lambda)\{(3-\lambda)(2-\lambda)-2\}-2\{2-\lambda-1\}+1(\{2-3+\lambda\}=0$

$\Rightarrow \quad (2-\lambda)\{6-3\lambda-2\lambda+\lambda^2-2\}-2\{1-\lambda\}+1\{-1+\lambda\}=0$

$\Rightarrow \quad (2-\lambda)\{\lambda^2-5\lambda+4\}-2+2\lambda-1+\lambda=0 \Rightarrow 2\lambda^2-10\lambda+8-\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda-3+3\lambda=0$

$\Rightarrow \quad -\lambda^3+7\lambda^2-11\lambda+5=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5=0$

$\Rightarrow \quad (\lambda-1)\{\lambda^2-6\lambda+5\}=0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-5)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda=5,1,1$

आइगेन सदिश

(i) माना $\lambda_1=5$ के लिए आइगेन सदिश $X_1=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

तो $\begin{bmatrix} 2-5 & 2 & 1 \\ 1 & 3-5 & 1 \\ 1 & 2 & 2-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ [(1) में $\lambda=5$ रखने पर]

या $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$-3x_1+2x_2+x_3=0 \qquad ...(i)$

$x_1-2x_2+x_3=0 \qquad ...(ii)$

$x_1+2x_2-3x_3=0 \qquad ...(iii)$

समीकरण (i) व (ii) से

$$\frac{x_1}{2+2}=\frac{x_2}{1+3}=\frac{x_3}{6-2} \qquad \text{(वज्र गुणन से)}$$

या $\quad \dfrac{x_1}{4}=\dfrac{x_2}{4}=\dfrac{x_3}{4} \qquad$ या $\quad x_1=x_2=x_3=k$

आइगेन सदिश $X_1=\begin{bmatrix} k \\ k \\ k \end{bmatrix}$ या $k\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k\neq 0$

(ii) $\lambda_2=1$ के लिये आइगेन सदिश के लिये

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 2 & 1 \\ 1 & 3-1 & 1 \\ 1 & 2 & 2-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0 \qquad \text{[(1) में } \lambda=1 \text{ रखने पर]}$$

www.polytechnicpdf.com

या $$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$x_1+2x_2+x_3=0$ माना $x_1=k_1, x_2=k_2$

तब $x_3=-(k_1+2k_2)$

अत: आइगेन सदिश $X_2=\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\-(k_1+2k_2)\end{bmatrix}$ इसमें $k_1=1$ तथा $k_2=2$ रखने पर

$$=\begin{bmatrix}1\\2\\-5\end{bmatrix}$$ उत्तर

(iii) $\lambda_3=1$ यह आव्यूह असममित आव्यूह है अत: $\lambda_3=1$ के संगत आइगेन सदिश रैखिक स्वतंत्र होगा अत: $k_1=0$ लेने पर

आइगेन सदिश $X_3\begin{bmatrix}0\\k_2\\-2k_2\end{bmatrix}=k_2\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}$

अत: $\lambda=5,1,1$ से संगत आइगेन सदिश $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}$ उत्तर

उदाहरण 9. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}$ के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित कीजिए। इसकी सहायता से A^{-1} का मान ज्ञात करें।

हल : दिये गये आव्यूह A का अभिलाक्षणिक समीकरण $|A-\lambda I|=0$

या $\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\3 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$ या $(1-\lambda)^2-6=0$ या $\lambda^2-2\lambda-5=0$ ...(1)

वर्ग आव्यूह A, (1) को संतुष्ट करेगा यदि $A^2-2A-5I=O$ ...(2)

अब $A^2=A\times A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6 & 2+2\\3+3 & 6+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 4\\6 & 7\end{bmatrix}$

(2) के R.H.S. में A^2, A तथा I का मान रखने पर

$$\begin{bmatrix}7 & 4\\6 & 7\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7-2-5 & 4-4-0\\6-6-0 & 7-2-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=O$$

अत: वर्ग आव्यूह अपने अभिलाक्षणिक समीकरण (1) को संतुष्ट करता है। अत: कैले-हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित हुआ।

अब $A^2-2A-5I=O$ $\Rightarrow$ $A^2-2A=5I$

$A^{-1}A.A-2A^{-1}A=5A^{-1}I$ [दोनों तरफ A^{-1} से गुणा करने पर]

$\Rightarrow$ $5A^{-1}=A-2I$ [$\because A^{-1}A=I$ तथा $A^{-1}I=IA^{-1}=A^{-1}$]

$\therefore$ $A^{-1}=\frac{1}{5}(A-2I)=\frac{1}{5}\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}=\frac{1}{5}\left\{\begin{bmatrix}1-2 & 2-0\\3-0 & 1-2\end{bmatrix}\right\}$

$\therefore$ $A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & 2\\3 & -1\end{bmatrix}$

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 10. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$ के लिये कैले-हैमिल्टन (Cayley-Hamilton) प्रमेय का परीक्षण कीजिये।

[B.T.E., U.P. 2006]

हल : दिया गया आव्यूह $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$ $\quad\therefore$ अभिलाक्षणिक समीकरण $|A-\lambda I|=0$

या $\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}-\lambda\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$ $\quad$ या $\begin{bmatrix}2-\lambda & -1 & 1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{bmatrix}=0$

या $(2-\lambda)\{(2-\lambda)(2-\lambda)-1\}+1\{(2-\lambda)-1\}+1\{-1-(2-\lambda)\}=0$

या $(2-\lambda)\{4+\lambda^2-4\lambda+1\}+\{1-\lambda\}+\{\lambda-3\}=0$

या $(2-\lambda)\{\lambda^2-4\lambda+5\}+\{-2\}=0$ या $(2-\lambda)\{\lambda^2-4\lambda+5\}-2=0$

या $\lambda^3-6\lambda^2+13\lambda-8=0$ ...(1)

वर्ग आव्यूह A समी० (1) को संतुष्ट करेगा यदि $A^3-6A^2+13A-8I=0$ ...(2)

अब $A^2=A\times A\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-1+1 & -2-2-1 & 2-1+2\\ 2+2+1 & -1-4-1 & 1+2+2\\ 2-1+2 & -1-2-2 & 1-1+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -5 & 3\\ 5 & 2 & 5\\ 3 & -5 & 4\end{bmatrix}$

$$A^3=A\times A^2=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4 & -5 & 3\\ 5 & 2 & 5\\ 3 & -5 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8-5+3 & -10-2-5 & 6-5+4\\ 4+10+3 & -5+4-5 & 3+10+4\\ 4-5+6 & -5-2-10 & 3-5+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -17 & 5\\ 17 & -6 & 17\\ 5 & -17 & 6\end{bmatrix}$$

A^3, A^2 तथा A के मान समीकरण (2) में रखने पर

$$\begin{bmatrix}6 & -17 & 5\\ 17 & -6 & 17\\ 5 & -17 & 6\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}4 & -5 & 3\\ 5 & 2 & 5\\ 3 & -5 & 4\end{bmatrix}+13\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}-8\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=0$$

या $\begin{bmatrix}6-24+26-8 & -17+30-13-0 & 5-18+13+0\\ 17-30+13-0 & -6-12+26-8 & 17-30+13-0\\ 5-18+13-0 & -17+30-13-0 & 6-24+26-8\end{bmatrix}=0$

या $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=0$

अतः वर्ग आव्यूह A अपने अभिलाक्षणिक समीकरण (1) को सन्तुष्ट करता है, जिससे कैले-हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित होता है।

उदाहरण 11. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक मूल ज्ञात करें।

[2007]

दिखायें कि आव्यूह A अभिलाक्षणिक समीकरण को सन्तुष्ट करता है तथा A^{-1} का मान प्राप्त करें। साथ ही $A^6-6A^5+9A^4-2A^3-12A^2+23A-9I$ को रैखिक बहुपद के रूप में व्यक्त करें।

www.polytechnicpdf.com

हल : यहाँ $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (2-\lambda)\{(2-\lambda)^2 - 1\} + 1\{-1(2-\lambda)+1\} + 1\cdot 1-(2-\lambda)\}$$
$$= (2-\lambda)(3-4\lambda+\lambda^2) + (\lambda-1) + (\lambda-1) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$$

$\therefore$ अभिलाक्षणिक समीकरण $|A-\lambda I| = 0$ या $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda - 4I = 0$ ...(1)

A समी० (1) को सन्तुष्ट करेगा यदि $A^3 - 6A^2 - 9A - 4I = 0$ ...(2)

अब $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ (आव्यूह के गुणन से)

$\therefore \quad A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix}$

अब (2) के वाम पक्ष मे इन मानो को रखने पर

$$= \begin{bmatrix} 22 & -21 & 21 \\ -21 & 22 & -21 \\ 21 & -21 & 22 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22-36+18-4 & -21+30-9-0 & 21-30+9-0 \\ -21+30-9-0 & 22-36+18-4 & -21+30-9-0 \\ 21-30+9-0 & -21+30-9+0 & 22-36+18-4 \end{bmatrix} \quad \text{(आव्यूह गुणन से)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \text{ (शून्य)} = \text{दायाँ पक्ष}$$

अत: A अपने अभिलाक्षणिक समीकरण (1) को संतुष्ट करता है। सिद्ध हुआ।

(2) में A^{-1} से गुणा करने पर

$$A^{-1}AA^2 - 6A^{-1}AA + 9AA^{-1} - 4A^{-1}I = 0$$

या $\quad A^2 - 6A + 9I - 4A^{-1} = 0 \qquad [\because A^{-1}A = I]$

$\therefore \quad 4A^{-1} = A^2 - 6A + 9I$

$\therefore \quad A^{-1} = \frac{1}{4}[A^2 - 6A - 9I]$

$$= \frac{1}{4}\left\{\begin{vmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right\} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{उत्तर}$$

पुन: $\quad A^6 - 6A^5 + 9A^4 - 2A^3 - 12A^2 + 23A - 9I$

$$= A^6 - 6A^5 - 9A^4 - 4A^3 - 2A^3 - 12A^2 + 18A - 8I + 5A - I$$
$$= A^3(A^3 - 6A^2 + 9A - 4I) + 2(A^3 - 6A^2 + 9A - 4I) + 5A - I$$
$$= A^3 \times 0 + 2 \times 0 + 5A - I \qquad [(2) \text{ से}]$$
$$= 5A - I$$

यह अभीष्ट रैखिक बहुपद है।

www.polytechnicpdf.com

नोट :

- दिए गए व्यंजक को $A^3 - 6A^2 + 9A - 4$ से भाग देकर भी इसका मान ज्ञात किया जा सकता है।

प्रश्नावली 3.1

1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ का अभिलाक्षणिक समीकरण तथा अभिलाक्षणिक मूल ज्ञात करें।

2. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान ज्ञात करें।

   इसका स्पेक्ट्रम बतायें।

3. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक समीकरण तथा अभिलाक्षणिक मूल ज्ञात करें।

4. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक मान तथा अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात करें।

5. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान तथा आइगेन सदिश की गणना करें।

6. अभिलाक्षणिक बहुपद, अभिलाक्षणिक समीकरण, अभिलाक्षणिक मान तथा आइगेन सदिश को परिभाषित करें।

7. (i) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ के आइगेन मानों का निर्धारण करें।

   [BTE 2011]

   (ii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक मूल ज्ञात करें।

   [2007]

   (iii) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ के आइगेन मान ज्ञात करें।

   [2012]

8. (i) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ का आइगेन मान तथा आइगेन सदिश ज्ञात करें।

   (iii) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ के अभिलाक्षणिक मूल तथा अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात करें।

   [2011, 14, 15]

9. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय को सत्यापित करें।

10. कैले-हैमिल्टन प्रमेय के प्रयोग से आव्यूह A का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात करें।

    जहाँ $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

    [BTE 2001]

www.polytechnicpdf.com

11. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&0\\1&1&2\end{bmatrix}$ का अभिलाक्षणिक समीकरण ज्ञात करें तथा कैले-हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित करें। इस प्रमेय की सहायता से $A^8-5A^7+7A^6-3A^5+A^4-5A^3+8A^2-2A+I$ का मान ज्ञात करें। **[BTE 2002]**

12. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}$ के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित करें और इस प्रमेय की सहायता से $A^5-4A^4-5A^3+2A^2-4A-7I$ का मान ज्ञात करें।

13. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\1&2&1\\1&-1&2\end{bmatrix}$ के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय सत्यापित करें। **[BTE 2006]**

14. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{bmatrix}$ के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय का सत्यापन करें तथा A^{-1} ज्ञात करें।

15. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&1\\2&0&3\end{bmatrix}$ के लिए कैले-हैमिल्टन प्रमेय का सत्यापन करें तथा A^{-1} ज्ञात करें।

उत्तरमाला

1. अभिलाक्षणिक समीकरण $\lambda^2-3\lambda-4=0$; $\lambda_1=-1$; $\lambda_2=4$
2. $\lambda_1=2, \lambda_2=3, \lambda_3=5$; स्पेक्ट्रम $\{2, 3, 5\}$
3. $\lambda^3-18\lambda^2+45\lambda=0$ मूल $\lambda_1=0, \lambda_2=3, \lambda_3=15$
4. $\lambda_1=1, \lambda_2=6$ अभिलाक्षणिक सदिश $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$
5. $\lambda_1=\lambda_2=3$; $X_1=k_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, k_1\neq 0$; $X_2=k_2\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}, k_2\neq 0$
7. (i) $2, -1\pm\sqrt{3}$ (ii) 1, 2, 3 (iii) 0, 0.3
8. (i) $\lambda=1, 2, 3$; $X_1=k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, k_1\neq 0$; $X_2=k_2\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix}, k_2\neq 0$; $X_3=k_3\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}, k_3\neq 0$

   (ii) $k_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$; $k_2\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$

10. $A^{-1}=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}5&-1&-7\\-4&3&10\\3&-5&-2\end{bmatrix}$

11. $[\lambda^3-5\lambda^2+7\lambda-3=0; \begin{bmatrix}8&5&5\\0&3&0\\5&5&8\end{bmatrix}$

12. $\lambda^2-4\lambda-5=0; \begin{bmatrix}7&16\\8&15\end{bmatrix}$

14. $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&1&-1\\1&3&1\\-1&1&3\end{bmatrix}$

15. $A^{-1}=\begin{bmatrix}-3&0&2\\-1&1/2&1/2\\2&0&-1\end{bmatrix}$

www.polytechnicpdf.com

खण्ड : 2

अवकल समीकरण

4. प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के अवकल समीकरण 67

5. उच्च क्रम के रैखिक अवकल समीकरण 97

6. अवकल समीकरण के अनुपयोग 123

www.polytechnicpdf.com

4 CHAPTER

प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के अवकल समीकरण (Differential Equations of First Order and First Degree)

4.1 अवकल समीकरण (Differential Equation)

ऐसे समीकरण जो स्वतंत्र चर, परतंत्र चर तथा स्वतंत्र चर के सापेक्ष परतंत्र चर के अवकल गुणांकों से सम्बद्ध होते हैं, अवकल समीकरण कहलाते हैं।

जैसे : (i) $\frac{dy}{dx}+2y=x^2$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+5y=7$

(iii) $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$ (iv) $(y+z)\frac{\partial z}{\partial x}-(x+z)\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$ आदि।

4.2 अवकल समीकरणों के प्रकार (Kinds of Differential Equations)

अवकल समीकरण दो प्रकार के होते हैं—

1. साधारण अवकल समीकरण (Ordinary Differential Equation) : ऐसे अवकल समीकरण जिनमें केवल एक स्वतंत्र चर होता है, साधारण अवकल समीकरण कहलाते हैं।

जैसे : उपरोक्त उदाहरणों में (i) तथा (ii) साधारण अवकल समीकरण हैं।

2. आंशिक अवकल समीकरण (Partial Different Equation) : ऐसे अवकल समीकरण जिनमें दो या दो से अधिक स्वतंत्र चर तथा आंशिक अवकल गुणांक होते हैं, आंशिक अवकल समीकरण कहलाते हैं।

उपरोक्त उदाहरणों में (iii) तथा (iv) आंशिक अवकल समीकरण हैं।

4.2.1. अवकल समीकरण की कोटि (Order of a Differential Equation)

किसी अवकल समीकरण की कोटि (या क्रम) उस समीकरण में उपस्थित महत्तम अवकल गुणांक की कोटि होती है।

जैसे : (i) $xy\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+1}{y+1}$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ (iii) $\frac{d^3y}{dx^3}+x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=5$

उदाहरण (i), (ii) तथा (iii) में उच्चतम अवकल गुणांक की कोटि क्रमशः एक, दो तथा तीन हैं। अतः ये क्रमशः प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय कोटि के अवकल समीकरण हैं।

4.3 अवकल समीकरण की घात (Degree of a Differential Equation)

किसी अवकल समीकरण की घात उसमें उपस्थित उच्चतम कोटि के अवकल गुणांक की घात (Power of the highest derivative) के बराबर होता है, जबकि वह करणी (Radical sign) चिह्न तथा भिन्नात्मक घातों से मुक्त हो।

www.polytechnicpdf.com

जैसे : $\frac{d^3y}{dx^3}+3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4-\left(\frac{dy}{dx}\right)^5+7=0$

में उच्चतम कोटि का अवकल गुणांक $\frac{d^3y}{dx^3}$ है जिसकी घात 1 है। अत: यह प्रथम घात तथा तृतीय कोटि का अवकल समीकरण है।

नोट :

- (i) किसी अवकल समीकरण की कोटि तथा घात हमेशा धनात्मक पूर्णांक होती हैं।
- (ii) अवकल समीकरण की घात का निर्धारण तभी संभव है, जब यह अवकल गुणांकों के बहुपद के रूप में व्यक्त हो। जैसे : $\frac{dy}{dx}+\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$ की घात का निर्धारण संभव नहीं है क्योंकि यह $\frac{dy}{dx}$ के बहुपद के रूप में व्यक्त नहीं है।

4.4 अवकल समीकरण बनाना (Formation of Differential Equation)

सामान्य समीकरण को अवकलित कर स्वेच्छ अंचरों (arbitrary constants) से मुक्त करने से अवकल समीकरण का निर्माण होता है। इसकी कोटि दिए गए समीकरण में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या के बराबर होती है।

4.4.1. कार्य विधि

(i) दिए गए समीकरण को लिखें।

(ii) इसे उतनी बार अवकलित करें जितने इसमें (दिए गए समीकरण में) स्वेच्छ अचर हैं।

(iii) (i) तथा (ii) से प्राप्त अवकल समीकरणों से अचरों को मुक्त करें।

क्रिया विधि साधित उदाहरणों से स्पष्ट है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. निम्न अवकल समीकरणों की कोटि तथा घात बतायें।

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}-k^2y=0$ **[2012]** (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ **[2011]**

(iii) $\frac{d^2x}{dy^2}+\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}=0$ **[1999]** (iv) $\frac{dy}{dx}=\sin x$

हल : (i) दिए गए अवकल समीकरण से $\frac{d^2y}{dx^2}-k^2y=0$

उच्चतम कोटि का अवकल गुणांक $=\frac{d^2y}{dx^2}$ तथा इसकी घात $=1$ अत: यह द्वितीय कोटि तथा प्रथम घात का समीकरण है।

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ यहाँ कोटि $=2$, घात $=1$

(iii) प्रश्न से, $\frac{d^2x}{dy^2}=-\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$ $\Rightarrow \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2=1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2$

$\therefore$ कोटि = उच्चतम अवकल गुणांक की कोटि $=2$

www.polytechnicpdf.com

घात = उच्चतम अवकल गुणांक की घात = 2

(iv) कोटि = 2, घात = 1

उदाहरण 2. $y = mx$ के संगत अवकल समीकरण ज्ञात करें।

हल : प्रश्न से, $y = mx$ ...(1)

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = m$ ...(2)

(1) से $m = \frac{y}{x}$

$\therefore$ (2) में यह मान रखने पर

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ या $x\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow x\frac{dy}{dx} - y = 0$ यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 3. $y = Ae^{2x} - Be^{-x}$ का संगत अवकल समीकरण ज्ञात करें। [2007]

हल : प्रश्न से, $y = Ae^{2x} - Be^{-x}$ ...(1)

$\Rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = 2Ae^{2x} + Be^{-x}$ $\Rightarrow$ $\frac{d^2y}{dx^2} = 4Ae^{2x} - Be^{-x}$

$\therefore$ $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = (4Ae^{2x} - Be^{-x}) - (2Ae^{2x} + Be^{-x}) = 2(Ae^{2x} - Be^{-x}) = 2y$

[(i) से मान रखने पर]

या $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$

यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 4. समीकरण $y = ae^{2x} + be^{-3x} + ce^{x}$ का संगत अवकल समीकरण ज्ञात करें। [2004]

हल : प्रश्न से, $y = ae^{2x} + be^{-3x} + ce^{x}$ में ...(1)

$\frac{dy}{dx} = y_1 = 2ae^{2x} - 3be^{-3x} + ce^{x}$ ...(2)

$\frac{d^2y}{dx^2} = y_2 = 4ae^{2x} + 9be^{-3x} + ce^{x}$ ...(3)

$\frac{d^3y}{dx^3} = y_3 = 8ae^{2x} - 27be^{-3x} + ce^{x}$ ...(4)

(2) में 7 से गुणा करने पर

$7y_1 = 14ae^{2x} - 21be^{-3x} + 7ce^{x}$ ...(5)

(5) को (4) में से घटाने पर

$y_3 - 7y_1 = -6ae^{2x} - 6be^{-3x} - 6ce^{x}$

$= -6(ae^{2x} - be^{-3x} + ce^{x})$

$= -6y$ [(1) से]

$y_3 - 7y_1 + 6y = 0$

यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 5. निम्नलिखित वक्र समूहों के समीकरण से अवकल समीकरण प्राप्त करें।

(i) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ii) $(y - b)^2 = 4(x - a)$

www.polytechnicpdf.com

हल : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$ ...(1)

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{y}{b^2}\frac{d^2y}{dx^2}=0 \qquad ...(2)$$

समी० (2) में x से गुणा कर इससे समी० (1) घटाने पर

$$\frac{1}{b^2}\left\{x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+xy\frac{d^2y}{dx^2}-y\frac{dy}{dx}\right\}=0 \quad \Rightarrow \quad x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+xy\frac{d^2y}{dx^2}-y\frac{dy}{dx}=0$$

यह अभीष्ट समीकरण है

(ii) प्रश्न से, $(y-b)^2=4(x-a)$ ...(1)

$\Rightarrow \quad 2(y-b)\frac{dy}{dx}=4$ [x के सापेक्ष अवकलन से]

$\Rightarrow \quad (y-b)\frac{dy}{dx}=2$ ...(2)

$\Rightarrow \quad (y-b)\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$ [पुनः x के सापेक्ष अवकलन से] ...(3)

$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}\times\frac{2}{\frac{dy}{dx}}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$ [$\because$ (2) से $y-b=\frac{2}{dy/dx}$]

$\Rightarrow \quad 2\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0$ यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 6. उस वृत्त समूह का अवकल समीकरण ज्ञात करें जो y-अक्ष को मूल बिन्दु पर स्पर्श करते हैं। [2005]

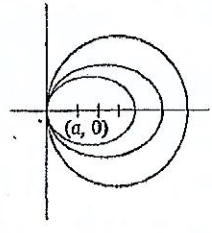
हल : माना वृत्त समूह का समीकरण जो y-अक्ष को मूल बिन्दु पर स्पर्श करता है।

$(x-a)^2+(y-0)^2=a^2$ [$\because$ वृत्त का केन्द्र x-अक्ष पर होगा]

$\Rightarrow \quad x^2+y^2-2ax=0$ ...(1)

x के सापेक्ष अवकलन से

$$2x+2y\frac{dy}{dx}-2a=0 \quad \Rightarrow \quad a=x+y\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad a=x+y\frac{dy}{dx}$$



(1) में यह मान रखने पर $x^2+y^2-2x\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)=0$

$\Rightarrow \quad x^2+y^2=2x^2+2xy\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad y^2-x^2=2xy\frac{dy}{dx}$

यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 7. उस वृत्त समूह का समीकरण ज्ञात करें जिसकी त्रिज्या r है।

हल : माना वृत्त समूह का केन्द्र (a, b) तथा त्रिज्या r है।

$\therefore$ वृत्त समूह का समीकरण $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ...(1)

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$2(x-a)+2(y-b)\frac{dy}{dx}=0 \quad \Rightarrow \quad (x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}=0 \qquad ...(2)$$

(2) के पुनः अवकलन से $1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}=0$ ...(3)

www.polytechnicpdf.com

$$\Rightarrow \quad y-b=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

(2) में $y-b$ का मान रखने पर $$x-a=\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx}$$

(1) में $(x-a)$ तथा $(y-b)$ का मान रखने पर $$\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}+\frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}=r^2$$

$$\Rightarrow \quad \left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^2\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right\}=r^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^3=r^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$$

यह अभीष्ट समीकरण है।

प्रश्नावली 4.1

1. निम्न अवकल समीकरणों की कोटि तथा घात बतायें।

(i) $\frac{d^3y}{dx^3}+5y=0$ (ii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}}=0$

(iii) $x^2\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2+y\left(\frac{dy}{dx}\right)^5+y^6=0$ (iv) $5\frac{d^2y}{dx^2}=\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}$

(v) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}=0$

2. (i) $y=A\cos(x+B)$, जहाँ A तथा B प्राचल (parameters) हैं, के संगत अवकल समीकरण दीजिए।
(ii) समीकरण $x=A\cos(nt+a)$ से सरल आवर्त गति का समीकरण ज्ञात कीजिए। [2015]

3. सरल आवर्त गति के व्यापक समीकरण $y=a\sin(\omega t+\phi)$ के संगत अवकल समीकरण प्राप्त करें, जहाँ a तथा ϕ प्राचल (paramerters) हैं।

4. $y^2-2ay+x^2=a^2$ से a का विलोपन कर अवकल समीकरण बनायें।

5. अवकल समीकरण ज्ञात करें जिसका हल $y=Ae^{2x}+Be^{-2x}$ है।

6. समीकरण $y=Ae^{3x}+Be^{5x}$ के संगत अवकल समीकरण ज्ञात करें जहाँ A तथा B स्वेच्छ अचर हैं।

7. सिद्ध करें कि $\frac{d^2v}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dv}{dr}=0$ का हल $v=\frac{A}{r}+B$ है।

www.polytechnicpdf.com

8. निम्न वक्र समूहों के लिए दिए गए समीकरणों के संगत अवकल समीकरण ज्ञात करें :
(i) $x^2 + y^2 = a^2$ (ii) $x^2 - y^2 = a^2$
(iii) $y^2 = 4ax$ (iv) $y = A\cos(x)^2 - B\sin(x)^2$ [2014

9. उन वृत्त समूहों का अवकल समीकरण ज्ञात करें जो x-अक्ष को मूल बिन्दु पर स्पर्श करता है।
[संकेत : वृत्त का समीकरण $(x-0)^2 + (y-a)^2 = a^2$]

10. उन वृत्त समूहों का अवकल समीकरण ज्ञात करें, जो निर्देशाक्षों को प्रथम पाद में स्पर्श करता है।
[संकेत : समीकरण $(x-a^2) + (y-a)^2 = a^2$]

11. x-अक्ष को अक्ष मानकर खींचे गए परवलयों का अवकल समीकरण ज्ञात करें।
[संकेत : समीकरण $y^2 = 4a(x-h)$]

12. $y = ae^{bx}$, जहाँ a तथा b स्वेच्छ अचर हैं, के सापेक्ष अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

1. (i) कोटि 3, घात 1 (ii) कोटि 2, घात 4
(iii) कोटि 3, घात 2 (iv) कोटि 2, घात 2
(v) कोटि 2, घात 4

2. (i) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (ii) $\frac{d^2x}{dy^2} + n^2x = 0$

3. $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$

4. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 (x^2 - 2y^2) - 4\frac{dy}{dx}xy - x^2 = 0$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = 4y$

6. $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 15y = 0$

8. (i) $x + y\frac{dy}{dx} = 0$ (ii) $x - y\frac{dy}{dx} = 0$
(iii) $y - 2x\frac{dy}{dx} = 0$ (iv) $x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 4x^3y = 0$

9. $(x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy$

10. $(x-y)^2\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = \left(x + y\frac{dy}{dx}\right)^2$

11. $y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

12. $y\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

4.5 अवकल समीकरण का हल (Solution of a Differential Equation)

किसी अवकल समीकरण का हल उसमें उपस्थित स्वतंत्र तथा परतंत्र चरों के बीच का सबंध है, जो उस समीक को हल करने से प्राप्त होता है। यह अवकल गुणांक से मुक्त होता है तथा दिए गए समीकरण को संतुष्ट करता है

जैसे : $y = A\cos x + B\sin x$, जहाँ A तथा B स्वेच्छ अचर हैं, अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का हल

4.5.1. हलों के प्रकार (Types of Solution)

अवकल समीकरणों के हल दो प्रकार के होते हैं :
(a) व्यापक हल (General Solution) (b) विशिष्ट हल (Particular Solution)

(a) व्यापक हल (General Solution) : यदि हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या अवकल समीकरण की (order) के बराबर हो तो हल व्यापक हल कहलाता है।

www.polytechnicpk.com

जैसे : $y = A\cos x + B\sin x$, $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ का व्यापक हल है क्योंकि इसमें अचरों की संख्या 2 है जो अवकल समीकरण के क्रम के बराबर है।

(b) विशिष्ट हल (Particular Solution) : किसी अवकल समीकरण के हल में स्वेच्छ अचरों को विशिष्ट मान देने से विशिष्ट हल प्राप्त होता है।

जैसे : $y = 2\sin x + 3\cos x$, उपरोक्त अवकल समीकरण का विशिष्ट हल है।

4.6 प्रथम क्रम तथा प्रथम घात के अवकल समीकरण

(Differential Equation of First Order and First Degree)

प्रथम क्रम तथा प्रथम घात के अवकल समीकरण को सामान्यतः निम्न रूप में लिखा जाता है—

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ या } \frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} \quad \text{या} \quad f(x, y)\,dx + g(x, y)\,dy = 0$$

हल करने की सुविधा की दृष्टि से इन्हें चार श्रेणियों में वर्गीकृत किया जा सकता है—

(i) चर राशियों में पृथक्करणीय अवकल समीकरण (Variables Separable Form)

(ii) समघात समीकरण (Homogeneous Differential Equations)

(iii) रैखिक समीकरण (Linear Differential Equations)

(iv) यथार्थ अवकल समीकरण (Exact Differential Equations)

Type I. चर राशियों में पृथक्करणीय अवकल समीकरण (Variables Separable Form)

ऐसे अवकल समीकरणों में चर राशियों को पृथक् किया जा सकता है। इसके लिए

(i) सर्वप्रथम चर राशियों को पृथक् कर $f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy$ के रूप में लिखें।

(ii) तत्पश्चात् इन्हें समाकलित कर उसमें समाकलन नियतांक जोड़कर हल लिखें।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. दिए गए अवकल समीकरणों को हल करें :

(i) $e^y \frac{dy}{dx} = e^x + x^2$ **[2007]** (ii) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$ **[2013, 10]**

हल : प्रश्न से, $e^y \frac{dy}{dx} = e^x + x^2 \quad \Rightarrow \quad e^y\,dy = (e^x + x^2)\,dx$

दोनों तरफ समाकलित करने पर

$$\int e^y\,dy = \int (e^x + x^2)\,dx \text{ या } e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c, \text{ जहाँ } c \text{ समाकलन नियतांक है।}$$

(ii) प्रश्न से, $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x e^{-y} + x^2 e^{-y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{-y}(e^x + x^2)$

$\Rightarrow e^y\,dy = (e^x + x^2)\,dx$ [अब (i) की भाँति हल करें।]

उदाहरण 2. हल करें :

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

[2004, 05]

हल : प्रश्न से, $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{dx}{1 + x^2}$ [चरों को पृथक् करने पर]

www.polytechnicpdf.com

दोनों तरफ समाकलन करने पर $\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + c$

$\Rightarrow \tan^{-1} y - \tan^{-1} x = c \quad \Rightarrow \tan^{-1} \frac{y-x}{1+xy} = c$

$\Rightarrow \frac{y-x}{1+xy} = \tan c = \alpha$ [माना]

$\therefore \; y - x = \alpha(1+xy)$ अभीष्ट हल है।

उदाहरण 3. $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$ **[1993, 2008]**

हल : $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x) - y(1+x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1+x)(1+y)$

$\Rightarrow \frac{dy}{1+y} = (1+x)\,dx$ [चरों को पृथक् करने पर]

$\Rightarrow \int \frac{dy}{1+y} = \int (1+x)\,dx$

या $\log(1+y) = x + \frac{x^2}{2} + c$, जहाँ c समाकलन नियतांक है यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 4. $(1+x)(1-y)\frac{dy}{dx} + xy = 0$ को हल करें। **[2009]**

हल : प्रश्न से, $(1+x)(1-y)\frac{dy}{dx} = -xy \Rightarrow \frac{(1-y)}{y}dy = -\frac{x}{1+x}dx$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{y}\right)dy = -\left[\frac{1+x-1}{1+x}\right]dx \quad \Rightarrow \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = -\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y}dy - \int dy = -\left[\int dx - \int \frac{1}{1+x}dx\right]$ [समाकलन करने पर]

$\Rightarrow \log y - y = -[x - \log(1+x)] + c \quad \Rightarrow \log y - y + x - \log(1+x) = c$

$\Rightarrow x - y + \log\frac{y}{1+x} = c$ यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 5. $(1-e^x)(1+\tan^2 y)\frac{dy}{dx} + \frac{3e^x}{\cot y} = 0$ को हल कीजिए। **[2006]**

हल : प्रश्न से, $(1-e^x)\sec^2 y\frac{dy}{dx} + \frac{3e^x}{\cot y} = 0 \quad [\because 1 + \tan^2 y = \sec^2 y]$

$\Rightarrow (1-e^x)\sec^2 y\frac{dy}{dx} = -\frac{3e^x}{\cot y} \quad \Rightarrow \sec^2 y \cot y\, dy = -\frac{3e^x}{1-e^x}$

$\Rightarrow \frac{\sec^2 y}{\tan y}dy = 3\frac{-e^x}{1-e^x}dx \quad \left[\because \cot y = \frac{1}{\tan y}\right]$

$\Rightarrow \int \frac{\sec^2 y}{\tan y}dy = 3\int \frac{-e^x}{1-e^x}dx$ [समाकलन करने पर]

www.polytechnicpdf.com

$\Rightarrow \quad \log \tan y = 3 \log (1 - e^x) + c \qquad \left[\because \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log f(x)\right]$

$\Rightarrow \quad \log \tan y - 3 \log (1 - e^x) = c = \log k$ (माना)

$\Rightarrow \quad \log \tan y - \log (1 - e^x)^3 = \log k \qquad \Rightarrow \log \frac{\tan y}{(1 - e^x)^3} = \log k$

$\Rightarrow \quad \frac{\tan y}{(1 - e^x)^3} = k$ यह अभीष्ट हल है।

Type II. चर पृथक्करणीय रूप में परिवर्तनशील अवकल समीकरण
(Differential Equations Reducible to Variables Separable Form)

(1) यदि समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c_1}{(ax + by) + c_2}$ के रूप का हो, तो

या $\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}$, जहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$, तो

(i) $ax + by = z$ रखें।

(ii) पुनः इसे अवकलित कर $\frac{dy}{dx}$ को $\frac{dz}{dx}$ के पदों में व्यक्त करें।

(iii) तत्पश्चात् पक्षान्तरण से यह (Varibales Separable form) में आ जाता है जिसे समाकलित करने से हल प्राप्त होता है। (देखें उदाहरण 6)

(2) यदि समीकरण $\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$ रूप का हो, तो

(i) $ax + by + c = z$ रखें तथा (ii) उपरोक्त विधि से (Variables Separable form) में लाकर समाकलित कर हल प्राप्त करें। (देखें उदाहरण 7 तथा 8)

उदाहरण 6. $(2x + y + 1)\, dx + (4x + 2y - 1)\, dy = 0$ को हल करें। **[2008, 10]**

हल : प्रश्न से, $(2x + y + 1)\, dx + (4x + 2y - 1)\, dy = 0$ ...(i)

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y + 1}{4x + 2y - 1} \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(2x + y) + 1}{2(2x + y) - 1}$ ...(ii)

अब $2x + y = z$, जिससे $2 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ अर्थात् $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2$

$\therefore$ (ii) से $\frac{dz}{dx} - 2 = -\frac{z + 1}{2z - 1}$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2 - \frac{z + 1}{2z - 1} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{4z - 2 - z - 1}{2z - 1} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{3z - 3}{2z - 1} \Rightarrow \frac{2z - 1}{3z - 3} dz = dx$

$\Rightarrow \frac{2z - 2 + 1}{3(z - 1)} dz = dx \qquad \Rightarrow \frac{2(z - 1) + 1}{3(z - 1)} dz = dx$

$\Rightarrow \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3(z - 1)}\right] dz = dx \qquad \Rightarrow 2\, dz + \frac{1}{z - 1} dz = 3\, dx$

$\Rightarrow \quad 2\int dz + \int \frac{1}{z - 1} dz = 3\int dx$ [समाकलन करने पर]

$\Rightarrow \quad 2z + \log (z - 1) = 3x + c \qquad \Rightarrow 2(2x + y) + \log (2x + y - 1) = 3x + c$

www.polytechnicpdf.com

$\Rightarrow \quad 4x - 3x + 2y + \log(2x + y - 1) = c \qquad \Rightarrow \quad x + 2y + \log(2x + y - 1) = c$

यह अभीष्ट हल है।

नोट :

- समीकरण (ii) में x के गुणाको का अनुपात $\frac{a_1}{a_2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ तथा $\frac{b_1}{b_2} = y$ के गुणांकों का अनुपात $= -\frac{1}{2}$ $\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

उदाहरण 7. $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$ को हल करें। **[2009]**

हल : माना $x + y = z$, तो $\quad 1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

$$z^2\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = a^2 \qquad \text{[दिए गए समीकरण में इन मानों को रखने पर]}$$

$$\Rightarrow \quad z^2 \frac{dz}{dx} = a^2 + z^2 \qquad \Rightarrow \quad \frac{z^2}{a^2 + z^2} dz = dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2 + z^2 - a^2}{a^2 + z^2} dz = dx \qquad \Rightarrow \quad \left[1 - \frac{a^2}{a^2 + z^2}\right] dz = dx$$

$$\Rightarrow \quad \int 1\, dz - a^2 \int \frac{1}{a^2 + z^2} dz = \int dx \qquad \text{[समाकलन करने पर]}$$

$$\Rightarrow \quad z - a^2 \times \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{z}{a} = x + c \quad \Rightarrow \quad (x+y) - a \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right) = a + c \qquad [\because z = x + y]$$

यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 8. $\sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y$ को हल करें।

हल : प्रश्न से, $\quad \sin^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) = x + y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \sin(x+y) \qquad \ldots(1)$

$x + y = z$, जिससे $1 + \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ या $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1$

इन मानों को (1) में रखने पर

$$\frac{dz}{dx} - 1 = \sin z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 1 + \sin z \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 + \sin z} dz = dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{1 + \sin z} dz = \int dx \qquad \Rightarrow \quad \int \frac{1 - \sin z}{(1 + \sin z)(1 - \sin z)} dz = \int dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1 - \sin z}{1 - \sin^2 z} dz = \int dx \qquad \Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{\cos^2 z} - \frac{\sin z}{\cos^2 z}\right) dz = \int dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \sec^2 z\, dz - \int \sec z \,.\, \tan z\, dz = \int dx \qquad \Rightarrow \quad \tan z - \sec z = x + c$$

$$\Rightarrow \quad \tan(x+y) - \sec(x+y) = x + c \qquad [\because z = x + y]$$

यह अभीष्ट हल है।

www.polytechnicpdf.com

प्रश्नावली 4.2

Type I. हल करें :

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$ [2004, 05]

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

3. (i) $\log\frac{dy}{dx}=ax+by$ [संकेत : $\frac{dy}{dx}=e^{ax+by}$]

   (ii) $e^y\frac{dy}{dx}=e^x+x^2$ [2007]

4. $(e^y+1)\cos x\,dx+e^y\sin x\,dy=0$ [2010]

5. $y\sqrt{1-x^2}\,dy+x\sqrt{1-y^2}\,dx=0$ [1996]

6. $\sec^2 x\tan y\,dx+\sec^2 y\tan x\,dy=0$

7. $(x^2-yx^2)\,dy+(y^2+xy^2)\,dx=0$

8. $(xy^2+x)\,dx+(yx^2+y)\,dy=0$

9. (i) $\sin x\cos y\frac{dy}{dx}+\cos x\sin y=0$ $\left[\text{संकेत: } \frac{\cos y}{\sin y}dy+\frac{\cos x}{\sin x}dx=0\right]$

   (ii) $(1-e^x)(1+\tan^2 y)\frac{dy}{dx}+\frac{3e^x}{\cot y}=0$ [2006]

10. $\frac{dy}{dx}=e^{3x-2y}+x^2e^{-2y}$

Type II. हल करें :

11. $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+3}{2x+2y+1}$

12. (i) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+7}{2x+2y+3}$ (ii) $(2x+y+1)\,dx+(4x+2y-1)\,dy=0$

13. (i) $(x-y)^2\frac{dy}{dx}=a^2$ (ii) $(x-y)^2\frac{dy}{dx}=a^2$ [1991, 2009]

14. $\frac{dy}{dx}=(4x+y+1)^2$

15. (i) $\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)+\cos(x+y)$ (ii) $\frac{dy}{dx}=\sin(x+y)$ [2007]

उत्तरमाला

1. $y-x=c(1+xy)$

2. $y\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-y^2}=c$

3. (i) $ae^{-by}+be^{ax}=c$ (ii) $e^x+\frac{x^3}{3}+c=e^y$

4. $(1+e^y)\sin x=c$

5. $\sqrt{1-y^2}+\sqrt{1-x^2}=c$

6. $\tan x\tan y=c$

7. $\log\frac{x}{y}-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=c$

8. $(x^2+1)(y^2+1)=c$

www.polytechnicpdf.com

9. (i) $\sin x \sin y = c$ (ii) $\tan y = c_1 (1 - e^x)^3$

10. $\frac{e^{2y}}{2} = \frac{e^{3x}}{3} + \frac{x^3}{3} + c$

11. $x + c = \frac{2}{3}(x+y) - \frac{5}{9}\log(3x+3y+4)$

12. (i) $\frac{2}{3}(x+y) - \frac{11}{9}\log(3x+3y+10) = x + c$ (ii) $x + 2y + \log(2x+y-1)$

13. (i) $y = \frac{a}{2}\log\frac{x-y-a}{x-y+a} + c$ (ii) $y - a\tan^{-1}\frac{x+y}{a} = c$

14. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{4x+y+1}{2} = x + c$

15. (i) $\log\left(1 + \tan\frac{x+y}{2}\right) = x + c$ (ii) $\tan(x+y) - \sec(x+y) = x + c$

Type III. समघाती अवकल समीकरण (Homogeneous Differential Equations)

यदि दिया गया प्रथम घात तथा प्रथम कोटि का अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ के रूप का हो, जहाँ $f(x,y)$ तथा $g(x,y)$ में प्रत्येक पद समान घात (degree) का हो।

ऐसे अवकल समीकरण को हल करने के लिए

Step I. दिए गए समीकरण को $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ के रूप में लिखें।

Step II. Step I से प्राप्त समीकरण में $y = vx$ तथा $\frac{dy}{dx} = v - x\frac{dv}{dx}$ रखें तथा दायें पक्ष (R.H.S.) से x को हटायें। प्राप्त समीकरण $v + x\frac{dv}{dx} = F(v)$ रूप का होगा।

Step III. Step II से प्राप्त समीकरण में चरों v तथा x को चर पृथक्करण विधि से पृथक् करें तथा दोनों पक्षों का समाकलन करें।

Step IV. प्राप्त परिणाम में $v = \frac{y}{x}$ रखें जिससे हल y तथा x के पदों में प्राप्त होगा।

क्रियाविधि आगे के उदाहरणों से स्पष्ट है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. $x^2\,dy + y(x+y)\,dx = 0$ [1991, 92]

हल : प्रश्न से, $x^2\,dy + y(x+y)\,dx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{xy - y^2}{x^2}$ ...(1)

अब (1) में $y = vx$ तथा $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ रखने पर

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{x.vx + v^2x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{x^2(v+v^2)}{x^2} = -(v+v^2) \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = -2v - v^2 = -v(2+v)$$

www.polytechnicpdf.com

$$\Rightarrow \frac{dv}{v(2+v)} = -\frac{dx}{x}$$ [चरों को पृथक् करने पर]

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{1}{v} - \frac{1}{2+v}\right] dv = -\frac{dx}{x}$$ [आंशिक भिन्नों में तोड़ने पर]

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{v} dv - \int \frac{1}{2+v} dv\right] = -\int \frac{dx}{x}$$ [समाकलन से]

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[\log v - \log(2+v)] = -\log x + c \qquad \Rightarrow \frac{1}{2}\log\frac{v}{2+v} = -\log x + c$$

$$\Rightarrow \log\frac{v}{2+v} = -2\log x + 2c \qquad \Rightarrow \log\frac{v}{2+v} + \log x^2 = 2c$$

$$\Rightarrow \log\frac{v}{2+v} \cdot x^2 = \log k$$ [$2c = \log k$ मानने पर]

$$\Rightarrow \frac{vx^2}{2+v} = k \qquad \Rightarrow \frac{\frac{y}{x}x^2}{2+\frac{y}{x}} = k \qquad \left[\because y = vx \Rightarrow v = \frac{y}{x}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 y}{2x+y} = k \qquad \Rightarrow x^2 y = k(2x+y)$$

यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 2. $x(x-y)\frac{dy}{dx} = y(x+y)$ **[2000, 04]**

हल : प्रश्न से, $x(x-y)\frac{dy}{dx} = y(x+y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(x+y)}{x(x-y)}$ ...(1)

$\Rightarrow$ (1) में $y = vx$ तथा $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dy}{dx}$ रखने पर $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx(x+vx)}{x(x-vx)}$

$$\Rightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v(1+v)}{1-v} \qquad \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v(1+v)}{1-v} - v = \frac{2v^2}{1-v}$$

$$\Rightarrow \frac{1-v}{2v^2} dv = \frac{dx}{x} \qquad \Rightarrow \left(\frac{1}{2v^2} dv - \frac{1}{2v} dv\right) = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{v^2} dv - \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$ [समाकलन करने पर]

$$\Rightarrow -\frac{1}{2v} - \frac{1}{2}\log v = \log x + c \qquad \Rightarrow -\frac{x}{2y} - \frac{1}{2}\log\frac{y}{x} = \log x + k$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{y} - \log\frac{y}{x} = 2\log x + 2k = \log x^2 + \log c, \quad \text{जहाँ } 2k = \log c$$

$$\Rightarrow \log x^2 c + \log\frac{y}{x} = -\frac{x}{y} \qquad \Rightarrow \log cxy = -\frac{x}{y} \Rightarrow cxy = e^{-x/y}$$

यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 3. हल करें :

$$x(x-y)\,dy + y^2\,dx = 0$$ **[2011]**

www.polytechnicpdf.com

हल : प्रश्न से $x(x-y)\,dy + y^2\,dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y^2}{x(x-y)}$ ...(1)

(1) में $y = vx$ तथा $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ रखने पर $v + x\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{v^2x^2}{x(x-vx)}$

$$\Rightarrow \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^2x^2}{x^2(1-v)} = \frac{-v^2}{1-v} \quad \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = -\frac{v^2}{1-v} - v = \frac{-v^2 - v + v^2}{1-v} = \frac{v}{v-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{v-1}{v}\,dv = \left(1 - \frac{1}{v}\right)dv \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dx}{x} = \int dv - \int\frac{1}{v}\,dv \quad \text{[समकलन करने पर]}$$

$$\Rightarrow \quad \log_e x = v - \log_e v + c = v\log_e e - \log_e v + \log_e k, \text{ जहाँ } c = \log k \quad [\because \log_e e = 1]$$

$$\Rightarrow \quad \log_e x = \log_e \frac{ke^v}{v} \qquad [\because v\log_e e = \log_e e^v]$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{k\,e^v}{v} = k\frac{e^{y/x}}{y/x} \qquad \left[\because v = \frac{y}{x}\right]$$

$$\Rightarrow \quad y = k\,e^{y/x}$$

उदाहरण 4. समीकरण $(x^2 + 2xy)\dfrac{dy}{dx} + 2xy + y^2 + 3x^2 = 0$ को हल करें। **[1999]**

हल : प्रश्न से, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{(2xy + y^2 + 3x^2)}{x^2 + 2xy}$ ...(1)

(1) में $y = vx$ तथा $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ रखने पर $v + x\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{x^2(2v + v^2 + 3)}{x^2(1+2v)} = -\dfrac{(2v + v^2 + 3)}{1+2v}$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = -\frac{(2v + v^2 + 3)}{1+2v} - v = \frac{-2v - v^2 - 3 - v - 2v^2}{1+2v}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = -\frac{3(v^2 + v + 1)}{1+2v} \quad \Rightarrow \quad \frac{(1+2v)}{v^2 + v + 1}\,dv = -3\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \log(v^2 + v + 1) = -3\log x + \log k \quad \Rightarrow \quad \log(v^2 + v + 1) = -\log x^3 + \log k = \log\frac{k}{x^3}$$

$$\Rightarrow \quad v^2 + v + 1 = \frac{k}{x^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} + 1 = \frac{k}{x^3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^2 + xy + x^2}{x^2} = \frac{k}{x^3} \quad \Rightarrow \quad x(y^2 + xy + x^2) = k$$

यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 5. हल करें : (i) $x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{dy}{dx} = y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) - x$ **[2012, 14]**

(ii) $x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\dfrac{dy}{dx} = y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right) - x$, यदि $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$

हल : प्रश्न से, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x - y\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)}{x\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)}$ ...(1)

www.polytechnicpdf.com

यह समघाती समीकरण है।

अतः (1) में $y = vx$ अर्थात् $v = \frac{y}{x}$ तथा $\frac{dy}{dx} = v - x\frac{dv}{dx}$ रखने पर

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\frac{1 - v\sin v}{\sin v}$$

$$\Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = -\frac{1 - v\sin v}{\sin v} - v \quad \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\sin v} \quad \Rightarrow \sin v\, dv = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \int \sin v\, dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad -\cos v = -\log x + c \qquad \Rightarrow \quad \log x = c + \cos v = \log k + \cos\left(\frac{y}{x}\right), \text{ जहाँ } c = \log k$$

$$\Rightarrow \quad \log x - \log k = \cos\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \Rightarrow \quad \log\frac{x}{k} = \cos\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \Rightarrow \quad x = k\,e^{\cos(y/x)}$$

यह अभीष्ट हल है।

(ii) दिया गया है $y(1) = \frac{\pi}{2}$ अर्थात् यदि $x = 1$ तो $y = \frac{\pi}{2}$

(2) में यह मान रखने पर

$$1 = ke^{\cos\left(\frac{\pi/2}{1}\right)} \qquad \Rightarrow \quad k \times e^0 = 1 \Rightarrow k = 1$$

अतः (2) से $\qquad x = e^{\cos(y/x)}$

यह अभीष्ट हल है।

नोट :

- यदि समघाती समीकरण $\frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ रूप का है, तो

  समीकरण में $x = vy$ तथा $\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$ रखकर हल करें।

Type IV. समघात अवकल समीकरण में परिवर्तनशील समीकरण (Differential Equations reducible to Homogeneous Form)

यदि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$, जहाँ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ हो

के रूप का हो तो यह निम्न विधि से समघात में परिवर्तित कर हल निकालते हैं।

Step I. समीकरण में $x = X + h$ तथा $y = Y + k$ रखें, जहाँ X तथा Y चर एवं h तथा k अचर हैं, जिससे $dx = dX$ तथा $dy = dY$ तथा $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$

Step II. अब समीकरण को $\frac{dY}{dX} = \frac{a_1(X + h) + b_1(Y + k) + c_1}{a_2(X + h) + b_2(Y + k) + c_2}$ के रूप में लिख सकते हैं

$$= \frac{c_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1}{a_2X + b_2Y + a_2h + b_2k + c_2}$$

Step III. h और k का चुनाव इस प्रकार करें कि

$$a_1h + b_1k + c_1 = 0$$
$$a_2h + b_2k + c_2 = 0$$

इसे हल कर h तथा k प्राप्त करें।

www.polytechnicpdf.com

Step IV. अब $\frac{dY}{dX}=\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}$ के रूप में लिखें, जो समघाती है जिसे $Y=VX$ तथा $\frac{dY}{dX}=V+X\frac{dV}{dx}$ रखकर हल किया जा सकता है।

Step V. प्राप्त हल में $X=x-h$, $Y=y-k$ तथा $V=\frac{Y}{X}=\frac{y-k}{x-h}$ रखकर हल प्राप्त करें।

उदाहरण 6. हल करें :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y-3}{2x+y-3}$$

हल : प्रश्न से, $$\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y-3}{2x+y-3} \quad ...(1)$$

$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{2}$ तथा $\frac{b_1}{b_2}=\frac{2}{1}$ अतः $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$

अतः (1) में $x=X+h$, $y=Y+k$ तथा $\frac{dY}{dX}=\frac{dy}{dx}$ रखने पर

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+h+2(Y+k)-3}{2(X+h)+Y+k-3}=\frac{X+2Y+h+2k-3}{2X+Y+2h+k-3} \quad ...(2)$$

यदि h तथा k इस प्रकार हों कि

$$\left.\begin{aligned} h+2k-3=0 \\ 2h+k-3=0 \end{aligned}\right\} \quad ...(3)$$

तथा

हल करने पर $h=1=k$

अब (2) से

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y}{2X+Y} \quad \text{[(3) से मान रखने पर]}$$

यह समघाती समीकरण है।

अतः $Y=VX$ तथा $\frac{dY}{dX}=V+X\frac{dV}{dX}$ रखने पर

$$V+X\frac{dV}{dX}=\frac{X+2VX}{2X+VX} \quad \Rightarrow V+X\frac{dV}{dX}=\frac{1+2V}{2+V}$$

$$\Rightarrow X\frac{dV}{dX}=\frac{1+2V}{2+V}-V=\frac{1+2V-2V-V^2}{2+V}$$

$$\Rightarrow X\frac{dV}{dX}=\frac{1-V^2}{2+V} \quad \Rightarrow \frac{2+V}{1-V^2}dV=\frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2}\frac{1}{1+V}+\frac{3}{2}\frac{1}{1-V}\right]dV=\frac{dX}{X} \quad \text{[आंशिक भिन्नीकरण से]}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+V}dV+\frac{3}{2}\int\frac{1}{1-V}dV=\int\frac{dX}{X} \quad \text{[समाकलन से]}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\log(1+V)-\frac{3}{2}\log(1-V)=\log X+\log C \quad \Rightarrow \log\frac{1+V}{(1-V)^3}=2\log(XC)=\log(CX)^2$$

www.polytechnicpdf.com

$$\Rightarrow \frac{1+V}{(1-V)^3} = C^2X^2$$

$$\Rightarrow \frac{X+Y}{(X-Y)^3} = C^2$$

$$\Rightarrow x+y-2 = C^2(x-y)^3$$

$$\Rightarrow \frac{1+\frac{Y}{X}}{\left(1-\frac{Y}{X}\right)^3} = C^2X^2$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)+(y-1)}{(x-y)^3} = C^2$$

[$X = x-h = x-1$ तथा $Y = y-k = y-1$ रखने पर]

यह अभीष्ट हल है।

नोट :

- यदि $\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$ में $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ हो तो प्रश्न चर पृथक्करण विधि से हल होगा। (देखें उदाहरण 6 पेज 75)

प्रश्नावली 4.3

निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{3xy+y^2}{3x^2}$
2. $\frac{dy}{dx} + \frac{x-2y}{2x-y} = 0$
3. $(x^2+y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$
4. $(x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$
5. $y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$ **[2011]**
6. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$ **[2015]**
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$
8. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(\log\frac{y}{x}+1\right)$
10. $2y\,e^{x/y}\,dx + (y - 2x\,e^{x/y})\,dy = 0$ [संकेत : $\frac{dx}{dy} = \frac{2x\,e^{x/y}-y}{2y\,e^{x/y}}$ में $\frac{x}{y} = V$ रखें]
11. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+9y-20}{6x+2y-10}$
12. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x+1}{y+x+5}$
13. (i) $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$ (ii) $x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x$ **[2012, 14]**

उत्तरमाला

1. $-\frac{x}{y} = \frac{1}{3}\log x + c$
2. $(x+y)^3 = c(x-y)$
3. $x = c(x^2-y^2)$
4. $x^2+y^2 = cx$
5. $ky = e^{y/x}$
6. $y + \sqrt{x^2+y^2} = cx^2$
7. $\tan\frac{y}{2x} = cx$
8. $\sin\frac{y}{x} = cx$
9. $y = xe^{cx}$
10. $2e^{x/y} = \log\frac{c}{y}$
11. $(2x-y)^2 = c(x+2y-5)$

www.polytechnicpdf.com

12. (i) $\log\{(y+3)^2+(x+2)^2\}+2\tan^{-1}\dfrac{y+3}{x+2}=c$

13. (i) $\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)=\log cx$ (ii) $x=ke^{\cos(y/x)}$

4.7. यथार्थ अवकल समीकरण (Exact Differential Equation)

Type V. ऐसे अवकल समीकरण जो किसी समीकरण को सीधे अवकलित करने से, जिसमें विलोपन, गुणा, भाग आदि की क्रिया न की गई हो, प्राप्त किए जाते हैं, यथार्थ अवकल समीकरण कहलाते हैं।

अतः $f\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right)=0$, एक यथार्थ अवकल समीकरण होगा यदि $\dfrac{d}{dx}f(x,y)=f\left(x,y,\dfrac{dy}{dx}\right)=0$

जैसे : $x\,dy+y\,dx=0$ तथा $\dfrac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=0$

यथायें अवकल समीकरण हैं, क्योंकि ये क्रमशः $xy=c$ तथा $\dfrac{x}{y}=c$ को सीधे अवकलित कर प्राप्त किये गये हैं।

4.7.1. यथार्थ अवकल समीकरण की पहचान

अवकल समीकरण $M\,dx+N\,dy=0$, जहाँ M तथा N x एवं y के फलन हैं, को यथार्थ कहा जाता है, यदि

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

4.7.2. A. यथार्थ अवकल समीकरण का हल (Method for Solving Exact Differential Equations)

Step I. M को x के सापेक्ष (y को अचर मानकर) समाकलित करें अर्थात् $\int_{y\ \text{अचर}} M\,dx$ निकालें।

Step II. N के केवल उन पदों को y के सापेक्ष समाकलित करें जिनमें x नहीं हैं अर्थात् $\int_{x\ \text{से मुक्त पद}} N\,dy$ निकालें।

Step III. Steps (I) तथा (II) से प्राप्त परिणाम को जोड़ें तथा अचर के बराबर करें।

अर्थात् हल $\int_{y\ \text{अचर}} M\,dx+\int_{x\ \text{से मुक्त पद}} N\,dy=C$ यह अभीष्ट हल होगा।

B. यथार्थ अवकल समीकरणों के हल में निम्न परिणाम काफी उपयोगी हैं। इनकी सहायता से इन सूत्रों पर आधारित यथार्थ प्रश्नों को आसानी से हल किया जा सकता है।

(1) $\int(x\,dy+y\,dx)=xy+C$

(2) $\int\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2}=\dfrac{y}{x}+C$

(3) $\int\dfrac{y\,dx-x\,dy}{y^2}=\dfrac{x}{y}+C$

(4) $\int\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}+C$

(5) $\int\dfrac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=\tan^{-1}\dfrac{x}{y}+C$

(6) $\int\dfrac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)+C$

[देखें प्रश्न 6 (वैकल्पिक विधि)]

C. यदि दिया गया अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_1x-b_1y+c_1}{b_1x+a_2y+c_2}$,

जहाँ अंश में y का गुणांक $=-$ (हर में x का गुणांक) तो इसे निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

www.polytechnicpdf.com

$b_1(x\,dy + y\,dx) + a_2\,y\,dy + c_2\,dy - c_1 x\,dx - c_1\,dx = 0$ जिसे सीधे समाकलित कर हल प्राप्त किया जा सकता है। [देखें प्रश्न 7]

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. हल करें :

$$(y^2 - x^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

हल : दिये गये समीकरण की $M\,dx + N\,dy = 0$ से तुलना करने पर

$$M = y^2 - x^2 \quad \text{तथा} \quad N = 2xy$$

अब $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y$ तथा $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 2y$ $\quad\therefore\quad \dfrac{\partial M}{\partial y} = 2y = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

अतः यह यथार्थ अवकल समीकरण है।

अब $\int M\,dx = \int (y^2 - x^2)\,dx = y^2 \int dx - \int x^2 dx$ [$\because$ y^2 को अचर लेने पर]
(y अचर)

$$= y^2 x - \frac{x^3}{3} \qquad \ldots(1)$$

$\int N\,dy = \int 0\,dy = 0$ [केवल x से मुक्त पद लेने पर]
(x से मुक्त पद)

$\therefore$ अभीष्ट हल $\int M\,dx + \int N\,dy = C$

अर्थात् $y^2 x - \dfrac{x^3}{3} = C$, जहाँ C अचर है।

उदाहरण 2. $(e^y + 1)\cos x\,dx - e^y \sin x\,dy = 0$

हल : यहाँ $M = (e^y + 1)\cos x$ तथा $N = e^y \sin x$

$\therefore$ $\dfrac{\partial M}{\partial y} = e^y \cos x$ तथा $\dfrac{\partial N}{\partial x} = e^y \cos x$ अतः $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$

अतः यह एक यथार्थ समीकरण है।

$\therefore$ अभीष्ट हल $\underset{y\ \text{अचर}}{\int M\,dx} + \underset{(x\ \text{से मुक्त पद})}{\int N\,dy} = C$

$\int (e^y + 1)\cos x\,dx + \int 0\,dy = C \quad \Rightarrow \quad (e^y + 1)\sin x = C$

यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 3. $(x^3 + 3xy^2)\,dx - (3x^2 y + y^3)\,dy = 0$ **[2003]**

हल : $M\,dx + N\,dy = 0$ से तुलना करने पर, $M = x^3 + 3xy^2$, $N = (3x^2 y + y^3)$

$\therefore$ $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 6xy$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 6xy$ अतः $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ अतः यह एक यथार्थ समीकरण है,

$\therefore$ $\int M\,dx + \underset{(x\ \text{से मुक्त पद})}{\int N\,dy} = C \Rightarrow \underset{y\ \text{अचर}}{\int (x^3 + 3xy^2)\,dx} + \int y^3\,dy = C$

$\Rightarrow \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{3}{2}x^2 y^2 + \dfrac{y^4}{4} = C$

$\Rightarrow x^4 + 6x^2 y^2 + y^4 = 4C$ $\quad\therefore\quad x^4 + 6x^2 y^2 + y^4 = k$, जहाँ $k = 4C$

यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 4. $(\sec x.\tan x \tan y - e^x)\,dx + \sec x.\sec^2 y\,dy = 0$ **[1986]**

www.polytechnicpdf.com

हल : यहाँ $M = \sec x \cdot \tan x \cdot \tan y - e^x$, $N = \sec x \cdot \sec^2 y$

अतः $\frac{\partial M}{\partial y} = \sec x \cdot \tan x \cdot \sec^2 y$ तथा $\frac{\partial N}{\partial x} = \sec x \cdot \tan x \cdot \sec^2 y$ अतः $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$\therefore$ दिया गया समीकरण यथार्थ अवकल समीकरण है।

अब $\int M\,dx = \tan y \int \sec x \cdot \tan x\,dx - \int e^x dx = \sec x \cdot \tan y - e^x$ तथा $\int N\,dy = \int 0\,dy = 0$

y अचर (x से मुक्त पद)

$\therefore$ अभीष्ट हल $\sec x \cdot \tan y - e^x = C$

उदाहरण 5. समीकरण $(x - 2\sin y + 3)\,dx - (2x - 4\sin y - 3)\cos y\,dy = 0$ **[1994, 88]**

हल : मानक समीकरण से तुलना करने पर, $M = x - 2\sin y - 3$, $N = -(2x - 4\sin y - 3)\cos y$

अब $\frac{\partial M}{\partial y} = -2\cos y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -2\cos y$

$\therefore$ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ यह यथार्थ समीकरण है।

अब $\int M\,dx = \int (x - 2\sin y + 3)\,dx = \frac{x^2}{2} - 2x\sin y + 3x$

y अचर

$\int N\,dy = \int (4\sin y + 3)\cos y\,dy = \int 4\sin y \cos y\,dy + 3\int \cos y\,dy$

(x से मुक्त पद)

$= 2\int \sin 2y\,dy + 3\int \cos y\,dy$ [$\because \sin 2y = 2\sin y \cos y$]

$= -\frac{2\cos 2y}{2} + 3\sin y$

$\therefore$ अभीष्ट हल $\frac{x^2}{2} - 2x\sin y + 3x - \cos 2y + 3\sin y = C$

उदाहरण 6. $x\,dx + y\,dy + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0$

हल : प्रश्न से, $\left[x - \frac{y}{x^2 + y^2}\right]dx + \left[y + \frac{x}{x^2 + y^2}\right]dy = 0$

यहाँ $M = x - \frac{y}{x^2 + y^2}$ तथा $N = y + \frac{x}{x^2 + y^2}$

$\therefore$ $\frac{\partial M}{\partial y} = 0 - \frac{(x^2 + y^2) - y \times 2y}{(x^2 - y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 0 + \frac{(x^2 + y^2) - x \times 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$

$\therefore$ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ अतः यह यथार्थ है।

$\therefore$ हल $\int \left[x - \frac{y}{x^2 + y^2}\right]dx + \int y\,dx = 0$

y अचर x से मुक्त पद

$\Rightarrow$ $\frac{x^2}{2} - y \times \frac{1}{y}\tan^{-1}\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = C$ $\Rightarrow$ $x^2 - 2\tan^{-1}\frac{y}{x} + y^2 = 2C = K$

www.polytechnicpdf.com

यह अभीष्ट हल है।

वैकल्पिक विधि :

दिया गया समीकरण $\quad x\,dx + y\,dy + \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 0$

समाकलन करने पर $\quad \int x\,dx + \int y\,dy + \int \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \tan^{-1}\frac{y}{x} = C \qquad \left[\because \int \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \tan^{-1}\frac{y}{x}\right]$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 2\tan^{-1}\frac{y}{x} = 2C = K$$

उदाहरण 7. $(ax + hy + g)\,dx + (hx + by + f)\,dy = 0$ को हल करें।

हल : प्रश्न से, $\quad (ax + hy + g)\,dx + (hx + by + f)\,dy = 0$

$$\Rightarrow \quad ax\,dx + by\,dy + h\,(y\,dx + x\,dy) + g\,dx + f\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \quad a\int x\,dx + b\int y\,dy + h\int (y\,dx + x\,dy) + g\int dx + f\int dy = 0 \quad \text{[समाकलन करने पर]}$$

$$\Rightarrow \quad a\frac{x^2}{2} + b\frac{y^2}{2} + hxy + gx + fy = K$$

$$\Rightarrow \quad ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + C = 0, \text{ जहाँ } 2K = C$$

नोट :

- इसे यथार्थ अवकल समीकरण को हल करने की विधि से भी हल किया जा सकता है।

प्रश्नावली 4.4

निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए—

1. $(x - y - 2)\,dx - (x + y + 6)\,dy = 0$
2. $(2xy + 3y)\,dx + (x^2 + 3x)\,dy = 0$
3. $(x^4 - 2xy^2 + y^4)\,dx - (2x^2 y - 4xy^3 + \sin y)\,dy = 0$
4. $(a^2 - 2xy - y^2)\,dx - (x + y)^2\,dy = 0$ **[1997]**
5. $(1 + e^{x/y})\,dx + e^{x/y}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$
6. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y\cos x + \sin y + y}{\sin x + x\cos y + x} = 0$
7. $\sec^2 x \tan y\,dx + \sec^2 y \tan x\,dy = 0$
8. $(y\sec^2 x + \sec x \,.\, \tan x)\,dx + (\tan x + 2y)\,dy = 0$
9. $x\,dx + y\,dy = \dfrac{a^2\,(x\,dy - y\,dx)}{x^2 + y^2}$ **[2014]**
10. $(x^2 + y^2 - x)\,dx = (x^2 + y^2 - y)\,dy$

    [संकेत : $(x^2 + y^2)(dx - dy) = x\,dx + y\,dy \quad \Rightarrow \int dx - \int dy = \int \dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$]
11. $(x^2 + y^2 + y)\,dx - x\,dy = 0$

www.polytechnicpdf.com

[संकेत : $(x^2+y^2+y)\,dx - x\,dy \Rightarrow (x^2+y^2)\,dx + y\,dx - x\,dy = 0$

$\Rightarrow dx + \dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2} = 0$]

12. $x\,dx + y\,dy = m(x\,dy - y\,dx)$ [संकेत: $m\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = \dfrac{x\,dx + y\,dx}{x^2+y^2}$]

13. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{ax+hy+g}{hx+by+f} = 0$ दिखायें कि इसका हल शांकव काट का समीकरण है।

[संकेत : देखें उदाहरण 7]

14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3x-2y+5}{2x+3y-5}$

15. $2(x-3y+1)\dfrac{dy}{dx} = 4x-2y+1$

16. $(2x-y+1)\,dx + (2y-x-1)\,dy = 0$

उत्तरमाला

1. $x^2 - y^2 - 2xy - 4x - 12y = C$

2. $x^2y + 3xy = C$

3. $\dfrac{x^5}{5} - x^2y^2 + xy^4 + \cos y = C$

4. $a^2x - x^2y - y^2x - \dfrac{y^3}{3} = C$

5. $x + ye^{x/y} = C$

6. $y\sin x + x\sin y + xy = C$

7. $\tan x \tan y = C$

8. $y\tan x + \sec x + y^2 = C$

9. $x^2 + y^2 - 2a^2\tan^{-1}\dfrac{y}{x} = C$

10. $x - y = \dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2) + C$

11. $x + \tan^{-1}\dfrac{x}{y} = c$

12. $\log(x^2+y^2)^{1/2}\,K$

13. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fg + c = 0$

14. $4xy + 3(x^2+y^2) - 10(x+y) = K$

15. $2xy + 2y - 3y^2 - x - 2x^2 = K$

16. $x^2 - xy + x + y^2 - y = K$

4.8 रैखिक अवकल समीकरण (Linear Differential Equations)

Type VI. ऐसे अवकल समीकरण जिन्हें $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ ...(1)

के रूप में लिखा जा सके, जहाँ P तथा Q अचर अथवा x के फलन हैं, y में प्रथम कोटि (first order) के रैखिक अवकल समीकरण कहलाते हैं।

जैसे : $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x^3 - 3$

y में रैखिक अवकल समीकरण है।

ऐसे अवकल समीकरण को हल करने के लिए (1) में $e^{\int P\,dx}$, जिसे समाकलन गुणांक या समाकलन गुणनखंड (Integrating factor) कहा जाता है, से गुणा करते हैं।

अत: (1) से $e^{\int P\,dx}\dfrac{dy}{dx} + Pe^{\int P\,dx}y = Qe^{\int P\,dx}$

www.polytechnicdt.com

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{\int P\,dx} \times y) = Qe^{\int P\,dx}$ $\Rightarrow \int \frac{d}{dx}(e^{\int P\,dx} \times y)\,dx = \int Qe^{\int P\,dx}\,dx$

$\Rightarrow y \times e^{\int P\,dx} = \int Qe^{\int P\,dx}\,dx + C$

यह अभीष्ट हल है।

कार्य विधि : रैखिक अवकल समीकरण को हल करने के लिए

Step I. समीकरण को $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ के रूप में लिखें।

Step II. P की पहचान कर समकलन गुणांक I.F. $= e^{\int P\,dx}$ ज्ञात करें।

Step III. यदि Step I से प्राप्त समीकरण को II से प्राप्त I.F. से गुणा करें तथा समाकलन करें :

इससे वामपक्ष (L.H.S.) $y \times$ I.F. तथा दायाँ पक्ष (L.H.S.) $= \int Q \times$ I.F. $dx + C$,

जहाँ C समाकलन नियतांक है।

यह अभीष्ट हल देगा।

कार्य विधि आगे के उदाहरणों से स्पष्ट है।

नोट :

• **महत्वपूर्ण परिणाम :** (i) $e^{\log\{f(x)\}} = f(x)$; (ii) $e^{2\log z} = e^{\log z^2} = z^2$; (iii) $e^{-\log z} = e^{\log z^{-1}} = z^{-1} = \frac{1}{z}$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. हल करें :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^3 - 3$$ **[1985]**

हल : दिया गया समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^3 - 3 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \times y = x^3 - 3 \quad \ldots(1)$$

यह y में रैखिक समीकरण है।

$\frac{dy}{dx} + Py = Q$ से (1) की तुलना करने पर, $P = \frac{1}{x}, Q = x^3 - 3$

$\therefore$ I.F. $= e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\log x} = x$ $[\because e^{\log f(x)} = f(x)]$

समी० (1) में दोनों तरफ x से गुणा कर समाकलित करने पर

$$y \times x = \int (x^3 - 3)\,x\,dx + C$$

$\Rightarrow xy = \int x^4 dx - 3\int x\,dx + C$ $\Rightarrow xy = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^2}{2} + C$

यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 2. (i) $\frac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x$ **[2005]**

(ii) $\frac{dy}{dx} = \sin x - 2y\tan x$ **[2010]**

www.polytechnicpdf.com

हल : यह एक रैखिक समीकरण है, जहाँ $P = 2\tan x, Q = \sin x$

$$\therefore \quad \text{I.F.} = e^{2\int \tan x\, dx} = e^{(-2)\int \frac{-(\sin x)}{\cos x} dx} = e^{-2\log \cos x} = e^{\log (\cos x)^{-2}} = e^{\log \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= e^{\log \sec^2 x} = \sec^2 x \qquad [\because e^{\log f(x)} = f(x)]$$

समीकरण (1) में दोनो तरफ $\sec^2 x$ से गुणा कर समाकलित करने पर

$$y \times \sec^2 x = \int \sin x \sec^2 x\, dx + C$$

$$\Rightarrow \quad y \sec^2 x = \int \frac{\sin x}{\cos x \cos x + C} dx + C = \int \sec x . \tan x\, dx - C$$

$$\Rightarrow \quad y \sec^2 x = \sec x + C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\sec x}{\sec^2 x} + \frac{C}{\sec^2 x} \quad \Rightarrow \quad y = \cos x + c\cos^2 x$$

यह अभीष्ट हल है।

(ii) $\dfrac{dy}{dx} = \sin x - 2y \tan x \qquad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} - 2y \tan x = \sin x$

अब (i) की भाँति हल करें।

उदाहरण 3. (i) $\cos^3 x \dfrac{dy}{dx} + y \cos x = \sin x$ **[2001]**

(ii) $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = \tan x$ **[1996]**

हल : यहाँ $\cos^3 x \dfrac{dy}{dx} + y \cos x = \sin x$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + \frac{y \cos x}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x} \qquad \text{[दोनों तरफ } \cos^3 x \text{ से भाग देने पर]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + y \sec^2 x = \tan x . \sec^2 x \qquad \ldots(1)$$

यह एक रैखिक समीकरण है, जहाँ $P = \sec^2 x, Q = \tan x \sec^2 x$

$$\therefore \quad \text{I.F.} = e^{\int \sec^2 x\, dx} = e^{\tan x}$$

समी० (1) में $e^{\tan x}$ से गुणा कर समाकलन करने पर,

$$y \times e^{\tan x} = \int e^{\tan x} . \tan x \sec^2 x\, dx + C = I \qquad \text{(माना)} \qquad \ldots(2)$$

अब $I = \int e^{\tan x} . \tan x \sec^2 x\, dx$

माना $\tan x = t$ जिससे $\sec^2 x\, dx = dt$

$\therefore$ (2) से $I = \int t\, e^t\, dt \qquad \Rightarrow \quad I = t\, e^t - e^t + C$ [खण्डशः समाकलन से]

$\Rightarrow \quad I = e^t (t - 1) + C \qquad \Rightarrow \quad I = e^{\tan x} (\tan x - 1) - C$

(2) में यह मान रखने पर $\quad e^{\tan x} \times y = e^{\tan x} (\tan x - 1) + C$

$\Rightarrow \quad y = (\tan x - 1) + C\, e^{-\tan x}$ यह अभीष्ट हल है।

(ii) $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = \tan x \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} + y \sec^2 x = \tan x . \sec^2 x$ [अब (i) की भाँति हल करें]

उदाहरण 4. $\sec^2 y \dfrac{dy}{dx} + x \tan y = x^3$ **[2002]**

हल : यदि $\tan y = v$, तो $\sec^2 y \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dv}{dx}$

www.polytechnicpdf.com

$\therefore$ दिया गया समीकरण $\frac{dv}{dx} + xv = x^3$ ...(2)

जो एक रैखिक समीकरण है।

$\therefore$ I.F. $= e^{\int x\,dx} = e^{x^2/2}$

समी० (2) को $e^{x^2/2}$ से गुणा कर समाकलन करने पर

$$ve^{x^2/2} = \int x^3 e^{x^2/2} dx = I \quad \text{(माना)} \quad ...(3)$$

जहाँ $I = \int x^3 e^{x^2/2}\,dx$

यदि $\frac{x^2}{2} = t$ तो $x\,dx = dt$ $\quad\therefore\quad I = 2\int t\,e^t\,dt$

$\Rightarrow\ I = 2[t\,e^t - e^t] + C$ $\quad\Rightarrow\ I = 2(t-1)e^t + C$

$\Rightarrow\ I = 2\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)e^{\frac{x^2}{2}} + C$ $\quad\Rightarrow\ I = (x^2 - 2)e^{x^2/2} + C$

समी० (3) में v तथा I का मान रखने पर

$$\tan y \times e^{x^2/2} = (x^2 - 2)e^{x^2/2} + C \quad \text{या} \quad \tan y = (x^2 - 1) + C\,e^{x^2/2}$$

यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 5. $x \log x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$ **[1992]**

हल : प्रश्न से, $x \log x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x \log x} y = \frac{2}{x}$ ...(1)

[दोनों तरफ $x \log x$ से भाग देने पर]

यह $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ के रूप का है, जहाँ $P = \frac{1}{x \log x}$, $Q = \frac{2}{x}$

$\therefore$ I.F. $= e^{\int \frac{dx}{x \log x}} = e^{\int \frac{dt}{t}}$ जहाँ $\log x = t$

$= e^{\log t} = t = \log x$

समी० (1) में $\log x$ से गुणा कर समाकलन पर, $y \log x = 2\int \frac{1}{x} \log x\,dx + C = (\log x)^2 + C$

Type VII. यदि दिया गया रैखिक समीकरण $\frac{dx}{dy} + P'x = Q'$ के रूप का हो, जहाँ P' तथा Q', y के फलन या अचर हों, तो

समाकलन गुणांक (I.F.) $= e^{\int P'\,dy}$ तथा हल $x \times$ I.F. $= \int$ (I.F.) $Q'\,dy + C$, जहाँ C समाकलन नियतांक है से दिया जाता है।

क्रिया विधि आगे के उदाहरणों से स्पष्ट है।

उदाहरण 6. $(1 + y^2)\,dx = (\tan^{-1} y - x)\,dy$ को हल करें। **[2002, 15]**

हल : दिया गया समीकरण $(1 + y^2)\,dx = (\tan^{-1} y - x)\,dy$

$\Rightarrow\ \frac{dx}{dy} = \frac{\tan^{-1} y - x}{1 + y^2}$ $\quad\Rightarrow\ \frac{dx}{dy} + \frac{x}{1 + y^2} = \frac{\tan^{-1} y}{1 + y^2}$ ...(1)

www.polytechnicpdf.com

यह एक रैखिक समीकरण है, जहाँ

$$P' = \frac{1}{1+y^2}, \qquad Q' = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} \qquad \left[\frac{dx}{dy} + P'x = Q' \text{ से तुलना करने पर}\right]$$

$$\therefore \qquad \text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

समी० (1) में $e^{\tan^{-1} y}$ से गुणा कर समाकलित करने पर

$$xe^{\tan^{-1} y} = \int e^{\tan^{-1} y} \times \tan^{-1} y \times \frac{1}{1+y^2} dy = I \qquad \text{(माना)} \qquad \ldots(2)$$

जहाँ $I = \int e^{\tan^{-1} y} \tan^{-1} y \times \frac{1}{1+y^2} dy$

माना $\tan^{-1} y = t$ जिससे $\frac{1}{1+y^2} dy = \frac{dt}{dy}$

$$\therefore \quad I = \int te^t \, dt = [e^t t - e^t] + C = e^t (t-1) + C = e^{\tan^{-1} y} (\tan^{-1} y - 1) + C$$

अतः समी० (2) से, $xe^{\tan^{-1} y} = e^{\tan^{-1} y} (\tan^{-1} y - 1) + C \Rightarrow e^{\tan^{-1} y} (x - \tan^{-1} y + 1) = C$

यह अभीष्ट हल है।

Type VIII. रैखिक अवकल समीकरण में परिवर्तनीय समीकरण या बर्नोली समीकरण (Equations reducible to Linear Differential Equation or Bernoulli's Equation)

यदि समीकरण $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ के रूप का हो, जहाँ P तथा Q, x के फलन हैं या अचर हैं, तो इसे रैखिक समीकरण में बदलने के लिए

Step I. दोनों तरफ y^n से भाग देकर $y^{-n} \frac{dy}{dx} + Py^{1-n} = Q$ के रूप मे लायें

Step II. Step 1 से प्राप्त परिणाम में $y^{1-n} = z$ रखें जिससे $y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ प्राप्त होता है इससे समीकरण

$$\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + Pz = Q$$

या $\frac{dz}{dx} + (1-n) Pz = Q$ के रूप का हो जाएगा जो रैखिक अवकल समीकरण है जिसे पूर्वोक्त विधि से हल किया जा सकता है।

उदाहरण 7. $(x^3y^2 + xy)\, dx = dy$ **[1995]**

हल : प्रश्न से, $\frac{dy}{dx} = x^3y^2 + xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} - xy = x^3y^2 \Rightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{y^2} = x^3$

$$\Rightarrow \quad y^{-2} \frac{dy}{dx} - xy^{-1} = x^3 \qquad \ldots(1)$$

माना $y^{-1} = z$ तो $-y^{-2} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \Rightarrow y^{-2} \frac{dy}{dx} = -\frac{dz}{dx}$

समी० (1) मे यह मान रखने पर $\quad -\frac{dz}{dx} - xz = -x^3 \quad$ या $\quad \frac{dz}{dx} + xz = x^3 \qquad \ldots(2)$

www.polytechnicpdf.com

यह एक रैखिक अवकल समीकरण है जिसमें $P = x, Q = -x^3$

$\therefore$ I.F. $= e^{\int x\,dx} = e^{x^2/2}$

समी० (2) में $e^{x^2/2}$ से गुणा कर समाकलन करने पर

$$ze^{x^2/2} = -\int x^2 e^{x^2/2}\, x\,dx + C = -\int x^2\, e^{x^2/2}\, x\,dx + C = -(x^2-2)\, e^{x^2/2} + C$$

[देखें उदाहरण 5]

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} e^{x^2/2} + (x^2-2)\, e^{x^2/2} = C \qquad [\because z = 1/y]$$

अर्थात् $$e^{x^2/2}\left(\frac{1}{y} + x^2 - 2\right) = C$$ उत्तर

उदाहरण 8. $\dfrac{dy}{dx} = y \tan x - y^2 \sec x$

हल : प्रश्न से, $$\frac{dy}{dx} - y\tan x = -y^2 \sec x$$

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - y^{-1}\tan x = -\sec x \quad \text{[दोनों तरफ } y^2 \text{ से भाग देने पर]} \quad ...(1)$$

अब $y^{-1} = z \quad \Rightarrow (-1)\, y^{-2}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} \quad \Rightarrow y^{-2}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{dz}{dx}$

समी० (1) में यह मान रखने पर $-\dfrac{dz}{dx} - z\tan x = -\sec x \quad \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} + z\tan x = \sec x$ ...(2)

जो एक रैखिक अवकल समीकरण है।

$\therefore$ I.F. $= e^{\int \tan x\,dx}$ [यहाँ $P = \tan x, Q = \sec x$]

$= e^{\log \sec x} = \sec x$

समी० (2) में $\sec x$ से गुणा कर समाकलन करने पर

$$\sec x \times z = \int \sec^2 x\,dx + C \quad \Rightarrow \quad y^{-1}\sec x = \tan x + C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\sec x = \tan x + C$$

उदाहरण 9. $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = y^n \sin 2x$

[1993]

हल : प्रश्न से, $$\frac{dy}{dx} + y\cos x = y^n \sin 2x \quad \Rightarrow \quad y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{1-n}\cos x = \sin 2x \quad ...(1)$$

माना $y^{1-n} = z \quad \Rightarrow (1-n)\, y^{-n}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} \quad \Rightarrow y^{-n}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-n}\dfrac{dz}{dx}$

(1) में यह मान रखने पर

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + z\cos x = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} + (1-n)\, z\cos x = (1-n)\sin 2x \quad ...(2)$$

यह एक रैखिक समीकरण है।

$\therefore$ I.F. $= e^{(1-n)\int \cos x\,dx} = e^{(1-n)\sin x}$

(2) में I.F. से गुणा कर समाकलन करने पर

$$e^{(1-n)\sin x} \times z = \int (1-n)\, e^{(1-n)\sin x} \cdot \sin 2x\,dx + C$$

$$ze^{(1-n)\sin x} = (1-n)\int 2\sin x\cos x\, e^{(1-n)\sin x}\,dx + C \quad ...(3)$$

www.polytechnicpdf.com

(3) में L.H.S. में $\sin x = t$ जिससे $\cos x\, dx = dt$ रखने पर

$$ze^{(1-n)\sin x} = 2(1-n)\int t\, e^{(1-n)t}\, dt$$

$$\Rightarrow \quad ze^{(1-n)\sin x} = 2(1-n)\left[\frac{t\, e^{(1-n)t}}{1-n} - \int \frac{1 \times e^{(1-n)t}}{1-n} dt\right]$$

$$\Rightarrow \quad ze^{(1-n)\sin x} = 2(1-n)\left[\frac{t\, e^{(1-n)t}}{1-n} - \frac{1}{(1-n)^2} e^{(1-n)t}\right] + C$$

$$\Rightarrow \quad ze^{(1-n)\sin x} = 2t\, e^{(1-n)t} - \frac{2}{1-n} e^{(1-n)t} + C$$

$$\Rightarrow \quad y^{(1-n)} e^{(1-n)\sin x} = 2\sin x\, e^{(1-n)\sin x} - \frac{2}{1-n} e^{(1-n)\sin x} + C$$

यह अभीष्ट हल है।

नोट :

- यदि समीकरण $\frac{dx}{dy} + P'x = Q'x^n$ के रूप का है, तो x^n से दोनों तरफ भाग देकर तथा $x^{1-n} = z$ रखकर रैखिक समीकरण में बदला जाता है।

प्रश्नावली 4.5

निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए—

1. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 2x^2$

2. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$

3. $\frac{dy}{dx} = x + xy$

4. $(x^2-1)\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{x^2-1}$

5. $(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 2x\sqrt{1-x^2}$ [1991]

6. (i) $\frac{dy}{dx} + y\sec x = \tan x$ [1994]

   (ii) $\frac{dy}{dx} + 2y\tan x = \sin x$ [2005, 10]

7. (i) $\cos^2 x\frac{dy}{dx} + y = \tan x$ [1996]

   (ii) $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1-2x}{x^2}\right)y = 1$ [2013]

8. $\frac{dy}{dx} + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

9. $x\frac{dy}{dx} + 2y - x^2\log x = 0$ $\left[\text{संकेत: } \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x\log x\right]$

10. $\frac{dy}{dx} + x\sin 2y = x^3\cos^2 y$ [2002]

    [संकेत: $\sec^2 y\frac{dy}{dx} + x\frac{2\sin y\cos y}{\cos^2 y} = x^3 \Rightarrow \sec^2 y\frac{dy}{dx} + 2x\tan y = x^3$] (111)

www.polytechnicpdf.com

11. $x \cos x \dfrac{dy}{dx} + y(x \sin x - \cos x) = 1$

[संकेत: $\dfrac{dy}{dx} + y\left(\tan x + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x}\sec x$; I.F. $= e^{\int\left(\tan x + \frac{1}{x}\right)dx} = e^{\log \sec x + \log x} = x \sec x$]

12. $y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$ $\left[\text{संकेत: } \dfrac{dx}{dy} - \dfrac{1}{y}x = 2y\right]$

13. $(x + 2y^3)\,dy = y\,dx$ $\left[\text{संकेत: } \dfrac{dx}{dy} - \dfrac{1}{y}x = 2y^2\right]$

14. (i) $(x - \sin y)\,dy + \tan y\,dx = 0$

[संकेत: $\dfrac{dx}{dy} + (\cot y)\,x = \cos y$ $\therefore$ I.F. $= e^{\int \cos y\,dy} = \sin y$]

(ii) $(1 + y^2)\,dx = (\tan^{-1} y - x)\,dy$ **[2002, 2015]**

15. $y \log y \dfrac{dx}{dy} + x - \log y = 0$ **[1992]**

16. $(x + y + 1)\dfrac{dy}{dx} = 1$

17. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = y^2 \log x$

18. $\dfrac{dy}{dx} = y \tan x - y^2 \sec x$

19. (i) $\dfrac{dy}{dx}(x^2y^3 + xy) = 1$ $\left[\text{संकेत: } \dfrac{dx}{dy} - xy = x^2y^3\right]$

(ii) $(x^3y^2 + xy)\,dx = dy$ **[1995]**

20. $(y \log x - 1)\,y\,dx = x\,dy$

[संकेत: $\dfrac{x\,dy}{dx} + y = y^2 \log x \Rightarrow y^{-2}\dfrac{dy}{dx} + y^{-1}\dfrac{1}{x}\,dx = \dfrac{1}{x}\log x$, अब $y^{-1} = z$ रखें]

21. $\dfrac{dy}{dx} + y \cos x = y^n \sin 2x$ **[1993]**

उत्तरमाला

1. $y = x^3 + cx$

2. $xy = \dfrac{x^4}{4} + C$

3. $y = -1 + C\,e^{x^2/2}$

4. $y(x^2 - 1) = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{x-1}{x+1} + C$

5. $y\sqrt{1 - x^2} - x^2 = C$

6. (i) $y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + C$ (ii) $y = \cos x + c\cos^2 x$

7. (i) $y = \tan x - 1 + C\,e^{-\tan x}$ (ii) $y = x^2(1 + C\,e^x)$

www.polytechnicpdf.com

8. $y = \sin x - 1 + C\, e^{-\sin x}$

9. $x^2 y = \frac{x^4}{4} \log x - \frac{x^4}{16} + e$

10. $e^{x^2} \tan y = \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C$

11. $y\, x \sec x = \tan x + C$

12. $\frac{x}{y} = 2y + C$

13. $x = y^3 + Cy$

14. (i) $x \sin y = -\frac{1}{4} \cos 2y + C$

(ii) $x = \tan^{-1} y - 1 + ce^{-\tan^{-1} y}$

15. $x \log y = \frac{1}{2} (\log y)^2 + C$

16. $x + y + 2 = C\, e^y$

17. $\frac{1}{xy} = -\frac{(\log x)^2}{2} + C$

18. $\frac{1}{y} \sec x = \tan x + C$

19. (i) $1 + x\,(y^2 - 2 + C\, e^{-y^2/2}) = 0$

(ii) $e^{x^2/2} \left(\frac{1}{y} + x^2 - 2 \right) = C$

20. $1 - y\,(Cx + \log ex)$

□□□

www.polytechnicpdf.com

सब्सक्राइब &शेयर

https://www.youtube.com/polytechnicpdf/

Diploma की Special Videos के लिए अभी Subscribe करें।

Join us on Telegram

https://telegram.Dog/polytechnicpdf

Polytechnic की सभी प्रकार की Book Pdf Download करने के लिए अभी Visit करें। Telegram channel को।

https://www.instagram.com/_polytechnicpdf_

Instagram A/C को Follow करें।

https://www.polytechnicpdf.in

Polytechnic की सभी प्रकार की Notes Pdf Hindi Language में Free Of Cost प्राप्त करने के लिए अभी Visit करें।

**** Disclaimer ****

Polytechnic Diploma की इस पुस्तक के Pdf का किसी भी अंश को प्रकाशक की पुर्वानुमति के बिना कोई भी व्यक्ति या समुदाय इस Book की PDF को किसी भी Blog या Website पर Publish नहीं कर सकता हैं।

"यह PDF केवल विद्यार्थीयों की पढ़ाई में सहायता प्रदान करने की दृष्टि से तैयार किया गया है।"

अगर कोई व्यक्ति इस पुस्तक की इस PDf को किसी Blog , Website या किसी Social Media Plateform पर Publish/Upload करता हैं। तो ऐसा करने वाले पर कानूनी कार्यवाही की जायेगी तथा वह स्वयं समस्त हर्जे-खर्चे व हानि का जिम्मेदार होगा।

Email – info.polytechnicpdf@gmail.com

5 CHAPTER

उच्च क्रम के रैखिक अवकल समीकरण (Higher Order Linear Differential Equations)

5.1 परिभाषा (Definition)

5.1.1 रैखिक अवकल समीकरण (Linear Differential Equations)

ऐसे अवकल समीकरण जिनमें परतंत्र चर तथा उसके अवकल गुणांकों का घात एक होता है, रैखिक अवकल समीकरण कहलाते हैं।

nवें क्रम के रैखिक अवकल समीकरण को सामान्यत:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = R$$

जहाँ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ अचर तथा R शून्य अथवा x का फलन है, से व्यक्त किया जाता है तथा इसे अचर गुणांकों वाला रैखिक समीकरण (Linear Differential Equation with constant Coefficients) कहते हैं। जैसे $\frac{d^3 y}{dx^3} + a_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_2 \frac{dy}{dx} + a_3 y = R$ तृतीय क्रम का रैखिक अवकल समीकरण है।

5.1.2 अवकल संकारक (Differential Operator)

अवकल समीकरणों को व्यक्त करने में हम सामान्यत: $\frac{d}{dx}$ के लिये प्रतीक D का प्रयोग करते हैं।

अत: $Dy = \frac{dy}{dx}, D^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2}, D^3 y = \frac{d^3 y}{dx^3}, \ldots, D^n y = \frac{d^n y}{dx^n}$

जैसे $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 5y = 7$ को $D^2 y + 3Dy + 5y = 7$

या $(D^2 + 3D + 5)\, y = 7$ से व्यक्त किया जाता है।

नोट :

- $\frac{1}{D}$ एक बार समाकलन को $\frac{1}{D^2}$ दो बार समाकलन को बताता है। अर्थात्

$$\frac{1}{D} f(x) = \int f(x)\, dx, \frac{1}{D^2} = \frac{1}{D} \int f(x)\, dx = \int [\int f(x)\, dx]\, dx \text{ आदि।}$$

5.2 सम्पूर्ण हल (Complete Solution)

माना दिया गया रैखिक अवकल समीकरण

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} - \ldots a_n y_n = R \qquad \ldots(1)$$

www.polytechnicpdf.com

हो तो इसका सम्पूर्ण हल या व्यापक हल (General Solution) दो चरणों में निकाला जाता है :
(i) पूरक फलन (Complementary Function) तथा (ii) विशेष समाकल (Particular Integral)
इन दोनों का योग समीकरण (1) का संपूर्ण हल देता है।
अर्थात् संपूर्ण हल (C.S.) = पूरक फलन (C.F.) + विशेष समाकल (P.I.)

$$\Rightarrow \qquad y = \text{C.F.} + \text{P.I.}$$

नोट :

- (i) यदि (1) में $R = 0$ अर्थात् दिया गया समीकरण समघाती हो तो P.I. = 0 अतः पूरक फलन ही संपूर्ण हल होता है।
- (ii) पूरक फलन मे स्वेच्छ अचरों की संख्या अवकल समीकरण के क्रम (order) के बराबर होती है, जबकि विशेष समाकल स्वेच्छ अचरों से मुक्त होता है।
- (iii) प्रतीक रूप में समीकरण $\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = R$ को निम्न रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं : $f(D)\, y = R$.

5.3 पूरक फलन ज्ञात करना (To find Complementary Function)

माना nवें क्रम का अवकल समीकरण $(D^n + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots + a_n)\, y = R$ ...(1)

है इसका पूरक फलन ज्ञात करने के लिए (1) का दायाँ पक्ष शून्य के बराबर लिखते हैं, अर्थात्

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_n) y = 0 \qquad \ldots(2)$$

अब (2) में $y = e^{mx}$ रखने से $(m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \ldots + a_n)\, e^{mx} = 0$

$[D^n e^{mx} = m^n e^{mx}, D^{n-1} e^{mx} = m^{n-1} e^{mx}$ आदि]

$$\Rightarrow \qquad m^n + a_1 m^{n-1} + a_2 m^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \qquad \ldots(3)$$

इसे सहायक समीकरण (auxiliary equation) कहते हैं।

अब इसे हल करते हैं हल करने पर—

स्थिति I : यदि मूल वास्तविक तथा असमान हों : माना मूल $m_1, m_2, \ldots, m_n$ से दिए जाते हैं, तो पूरक फलन

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots + C_n e^{m_n x}$$

स्थिति II : यदि मूल वास्तविक तथा समान हों : माना r मूल समान m (माना) है तथा शेष असमान हैं तो पूरक फलन $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_r x^{r-1})\, e^{mx} + C_{r+1} e^{m_{r+1} x} + \ldots + C_n e^{m_n x}$

स्थिति III : यदि मूल काल्पनिक हों : माना मूल $\alpha + i\beta, \alpha - i\beta$ हैं, तो

$$y = e^{\alpha x}\, (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

इसे इस रूप में भी व्यक्त किया जाता है :

$$y = C_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x + C_2) \text{ या } C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x + C_2)$$

स्थिति (IV) : यदि मूल अपरिमेय हों : माना मूल $\alpha \pm \sqrt{\beta}, \gamma$ हों तो

$$y = e^{\alpha x}\, [C_1 \cosh \sqrt{\beta} x + C_2 \sinh \sqrt{\beta} x] + C_3 e^{\gamma x}$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. हल करें :

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 6\frac{d^2 y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

[2006]

www.polytechnicpdf.com

हल : दिया गया समीकरण $\frac{d^3y}{dx^3}+6\frac{d^2y}{dx^2}+11\frac{dy}{dx}+6y=0$

$\Rightarrow$ $(D^3+6D^2+11D+6)\,y=0$ [$\frac{dy}{dx}=Dy, \frac{d^2y}{dx^2}=D^2y$ तथा $\frac{d^3y}{dx^3}=D^3y$ रखने पर]

$\therefore$ सहायक समीकरण (A. E.) $m^3+6m^2+11m+6=0$

$\Rightarrow$ $m^3+m^2+5m^2+5m+6m+6=0$ $\Rightarrow$ $m^2(m+1)+5m(m+1)+6(m+1)=0$

$\Rightarrow$ $(m+1)(m^2+5m+6)=0$ $\Rightarrow$ $(m+1)\{m^2+2m+3m+6)\}=0$

$\Rightarrow$ $(m+1)\{m(m+2)+3(m+2)\}=0$ $\Rightarrow$ $(m+1)(m+2)(m+3)=0$

$\Rightarrow$ $\therefore$ $m=-1,-2,-3$

m के ये मान वास्तविक तथा भिन्न हैं

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+C_3e^{-3x}$

यह अभीष्ट व्यापक हल है।

उदाहरण 2. $(D^3-2D^2-4D+8)\,y=0$ को हल करें। **[2007]**

हल : दिया गया समीकरण $(D^3-2D^2-4D+8)y=0$

$\therefore$ सहायक समीकरण (A. E.) $m^2-2m^2-4m+8=0$

$\Rightarrow$ $m^2(m-2)-4(m-2)=0$ $\Rightarrow$ $(m-2)(m^2-4)=0$

$\Rightarrow$ $(m-2)(m-2)(m+2)=0$ $\therefore$ $m=2,2,-2$

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $y=(C_1+C_2x)\,e^{2x}+C_3\,e^{-2x}$

यह अभीष्ट सम्पूर्ण हल है। [$\because$ यह समघाती समीकरण है]

उदाहरण 3. $\frac{d^4y}{dx^4}-a^4y=0$ को हल करें।

हल : प्रश्न से दिया गया समीकरण $(D^4-a^4)\,y=0$

$\therefore$ सहायक समीकरण $m^4-a^4=0$

$\Rightarrow$ $(m^2-a^2)(m^2+a^2)=0$ $\Rightarrow$ $\{(m)^2-(a)^2\}\{(m)^2-(ia)^2\}=0$ [$\because i^2=-1$]

$\Rightarrow$ $(m+a)(m-a)(m+ia)(m-ia)=0$ $\therefore$ $m=-a, a, -ia, ia$

अतः पूरक फलन $y=C_1e^{-ax}+C_2e^{ax}+\{C_3\cos ax+C_4\sin ax\}$

यह अभीष्ट सम्पूर्ण हल है। [$\because$ दिया गया समीकरण समघाती है]

उदाहरण 4. अवकल समीकरण $(D^2-2D+2)\,y=0$ को हल कीजिए जबकि $t=0$ पर $y=Dy=1$ **[2005]**

हल : दिया गया समीकरण $(D^2-2D+2)\,y=0$

$\therefore$ सहायक समीकरण $m^2-2m+2=0$

$\Rightarrow$ $m=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(2)^2-4\times1\times2}}{2\times1}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{-1}}{2}=1\pm i$ [श्रीधराचार्य विधि से]

ये काल्पनिक मूल हैं।

$\therefore$ पूरक फलन $y=e^t\,(A\cos t+B\sin t)$ [$\because 1\pm i$ में $\alpha=1,\beta=1$] ...(1)

प्रश्न से, $t=0$ पर $y=1$ $\therefore$ $1=e^0\,(A\cos 0+B\sin 0)$ [(1) से]

$\Rightarrow$ $1=1\,(A\times1+B\times0)$ $\Rightarrow$ $A=1$

(1) को अवकलित करने पर $Dy=e^t\,(-A\sin t+B\cos t)+e^t\,(A\cos t+B\sin t)$

अब $t=0$ पर $Dy=1$ $1=e^0\,\{-A\sin 0+B\cos 0+A\cos 0+B\sin 0)$

$\Rightarrow$ $1=B+A$ [$\because \sin 0=0, \cos 0=1, e^0=1$]

www.polytechnicpdf.com

$\Rightarrow \quad B = 1 - A = 1 - 1 = 0 \qquad [\because A = 1]$

(1) में A तथा B का मान रखने पर $\quad y = e^t (1 \times \cos t + 0 \times \sin t) \quad \Rightarrow y = e^t \cos t$

यह अभीष्ट सम्पूर्ण हल है।

उदाहरण 5. हल करें :

$$(D^4 + K^4) y = 0$$

हल : सहायक समीकरण $m^4 + K^4 = 0$

$\Rightarrow \quad (m^2)^2 + 2m^2K^2 + K^4 - 2m^2K^2 = 0 \quad \Rightarrow (m^2 + K^2)^2 - (\sqrt{2}\, mK)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (m^2 + K^2 + \sqrt{2}\, mK)(m^2 + K^2 - 2\, mk) = 0$

$\Rightarrow \quad m^2 + K^2 + \sqrt{2}\, mK = 0$ तथा $m^2 + K^2 - \sqrt{2}\, mK = 0$

$\Rightarrow \quad m = \dfrac{-\sqrt{2}K \pm \sqrt{2k^2 - 4K^2}}{2}$ तथा $m = \dfrac{\sqrt{2}K \pm \sqrt{2K^2 - 4K^2}}{2}$ (श्रीधराचार्य विधि से हल करने पर)

$\Rightarrow \quad m = \dfrac{-K}{\sqrt{2}} \pm i \dfrac{K}{\sqrt{2}}$ तथा $m = \dfrac{K}{\sqrt{2}} \pm i \dfrac{K}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ पूरक फलन $y = e^{-\frac{Kx}{2}} \left[C_1 \cos\left(\dfrac{Kx}{\sqrt{2}}\right) + C_2 \sin\left(\dfrac{Kx}{\sqrt{2}}\right)\right] + e^{\frac{Kx}{\sqrt{2}}} \left[C_3 \cos\left(\dfrac{Kx}{\sqrt{2}}\right) + C_4 \sin\left(\dfrac{Kx}{\sqrt{2}}\right)\right]$

यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 6. हल करें :

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{2dy}{dx} - y = 0.$$

हल : सहायक समीकरण $m^4 - 2m^3 - 2m - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad m^4 - 1 - 2m(m^2 + 1) = 0 \qquad \Rightarrow (m^2 + 1)(m^2 - 1) - 2m(m^2 + 1) = 0$

$\Rightarrow (m^2 + 1)\{m^2 - 2m - 1\} = 0 \qquad \Rightarrow m^2 = -1$ तथा $m^2 - 2m - 1 = 0$

$\therefore \quad m = 0 \pm i, 1 \pm \sqrt{2}$ [हल करने पर]

अतः पूरक फलन $y = e^{0x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x (C_3 \cosh \sqrt{2}\, x + C_4 \sinh \sqrt{2}\, x)$

या $\quad y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x (C_3 \cosh \sqrt{2}\, x + C_4 \sinh \sqrt{2}\, x)$

यह अभीष्ट हल है।

स्मरणीय तथ्य

1. nवें क्रम का रैखिक अवकल समीकरण :

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = R$$

या $\quad (D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n) y = R, \quad [\dfrac{d}{dx} \equiv D$ लेने पर]

जहाँ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ अचर हैं तथा R शून्य अथवा x का फलन है।

2. सम्पूर्ण हल (C.S.) = पूरक फलन (C.F.) + विशेष समाकल (P.I.)

यदि $R = 0$ तो

सम्पूर्ण हल = पूरक फलन।

www.polytechnicpdf.com

3. **सहायक समीकरण :** रैखिक अवकल समीकरण (1) में बायें पक्ष में D की जगह m रखकर शून्य के बराबर करने सहायक समीकरण प्राप्त होता है।

$$m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots - a_n = 0$$

4. **पूरक फलन ज्ञात करना :** सहायक समीकरण $m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ को हल कर $m = m_1, m_2, \ldots, m_n$ मूल प्राप्त करें।

(i) अब यदि मूल $m_1, m_2, \ldots, m_n$ वास्तविक एवं भिन्न हैं, तो पूरक फलन

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots + C_n e^{m_n x}$$

(ii) यदि मूल वास्तविक एवं समान हैं :

माना $m = m_1, m_1, m_2, m_2, m_2, m_3$, तो पूरक फलन (C.F.)

$$y = (C_1 - C_2 x) e^{m_1 x} - (C_3 + C_4 x + C_5 x^2) e^{m_2 x} + C_6 e^{m_3 x}$$

(iii) यदि मूल काल्पनिक हों : माना $m = \alpha + i\beta, m_1$ तो पूरक फलन

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + C e^{m_1 x}$$

या $C_1 e^{\alpha x} \sin(\beta x + C_2) + C_3 e^{m_1 x}$ या $C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x + C_2) + C_3 e^{m_1 x}$

(iv) यदि मूल अपरिमेय हैं : माना मूल $\alpha \pm \sqrt{\beta}, m_1$ हों तो पूरक फलन

$$y = e^{\alpha x} [C_1 \cosh \sqrt{\beta} x + c_2 \sinh \sqrt{\beta} x] + C_3 e^{m_1 x}$$

प्रश्नावली 5.1

हल करें :

1. $2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 8\dfrac{dy}{dx} + 15y = 0$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 30y = 0$

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} + 12y = 0$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 0$

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 8\dfrac{dy}{dx} + 16y = 0$

7. $(D^4 - 2D^3 - 3D^2 + 4D + 4)\, y = 0$

8. $(D-1)^3 (D^2 - 4)(D+2)\, y = 0$ [संकेत : $m = 1, 1, 1, 2, -2, -2$]

9. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 8y = 0$

10. $(D^2 + \mu^2)\, y = 0$

11. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = 0$, जहाँ जब $t = 0, x = 0$ तथा $\dfrac{dx}{dt} = 0$

12. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$, जबकि $y(0) = 0$ तथा $y'(0) = 1$

13. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - 4\dfrac{d^3y}{dx^3} + 8\dfrac{d^2y}{dx^2} - 8\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$ [संकेत : $(D^2 - 2D + 2)^2\, y = 0$]

14. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 6\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9\dfrac{dy}{dx} - 2 = 0$ [संकेत : $(D-2)(D^2 - 4D + 1)^2\, y = 0$]

www.polytechnicpdf.com

15. $\frac{d^2x}{dt^2}+\mu x=0$ जबकि $\mu>0$, $\frac{dx}{dt}=0$, $x=a$ जब $t=\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}$

उत्तरमाला

1. $y=C_1e^x+C_2e^{x/2}$
2. $y=C_1e^{2x}+C_1e^{5x}$
3. $y=C_1e^{5x}+C_2e^{6x}$
4. $y=C_1e^{4x}+C_2e^{3x}$
5. $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$
6. $y=(C_1+C_2x)e^{4x}$
7. $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+(C_3+C_4x)e^{2x}$
8. $y=(C_1+C_2x+C_3x^2)e^x+C_4e^{2x}+(C_5+C_6x)e^{-2x}$
9. $y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{3}x+C_2\sin\sqrt{3}x)+C_3e^{2x}$
10. $y=C_1\cos\mu x+C_2\sin\mu x$
11. $x=0$
12. $y=-e^x+e^2x$
13. $e^x\{(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x\}$
14. $y=C_1e^{2x}+e^{2x}[A\cosh\sqrt{3}x+B\sinh\sqrt{3}x]$
15. $-a\cos\sqrt{\mu t}$

5.4 विषमघातीय अवकल समीकरण एवं उनका सम्पूर्ण हल (Non-homogeneous Differential Equations and Their Complete Solution)

माना $\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+a_ny=g(x),\ g(x)\neq 0$

$\Rightarrow\ (D^n+a_1D^{n-1}+a_2D^{n-2}+\ldots+a_n)y=g(x),\ g(x)\neq 0$

$\Rightarrow\ f(D)y=g(x),\ g(x)\neq 0$ को विषमघातीय अवकल समीकरण कहते हैं। ...(1)

तथा इसका सम्पूर्ण हल (Complete Solution) = पूरक फलन (C.F.) + विशेष समाकलन (P.I.)

हम धारा 5.3 में पूरक फलन ज्ञात करने की विधि सीख चुके हैं, जो समघातीय तथा विषमघातीय दोनों प्रकार के अवकल समीकरणों के लिए समान है।

अब हम विशेष समाकल ज्ञात करने की विधि सीखेंगे।

5.4.1. प्रतिलोम संकारक (Inverse Operator) $\frac{1}{f(D)}$:

$\frac{1}{f(D)}g(x)$ एक ऐसा फलन है जिस पर $f(D)$ की संक्रिया (Operation) करने पर $g(x)$ प्राप्त होता है, अर्थात्

$$f(D)\left[\frac{1}{f(D)}g(x)\right]=g(x)$$

अतः $f(D)$ तथा $\frac{1}{f(D)}$ व्युत्क्रम क्रियायें हैं।

इसी तरह $\frac{1}{D}g(x)=\int g(x)\,dx \qquad \left[\because D=\frac{d}{dx}\right]$

5.4.2 विशेष समाकल (Particular Integral) :

माना $f(D)y=g(x)$ कोई विषमघातीय अवकल समीकरण है तो $\frac{1}{f(D)}g(x)$, इसका विशेष समाकल कहलाता है।

www.polytechnicpdf.com

5.4.3 विशिष्ट स्थितियों में विशेष समाकल (Particular Integral in Some Special Cases) :

नीचे हम $g(x)$ के विशिष्ट प्रारूपों का विशेष समाकल ज्ञात करना सीखेंगे।

Type I. जब $g(x) = e^{ax}$

इस स्थिति में विशेष समाकल

सर्वप्रथम (i) $\text{P.I.} = \dfrac{g(x)}{f(D)} = \dfrac{e^{ax}}{f(D)}$ के रूप में लिखें।

$f(D)$ में $x = a$ रखकर $f(a)$ का मान निकालें।

अब यदि (a) $f(a) \neq 0$, तो $\text{P.I.} = \dfrac{e^{ax}}{f(a)}$

(b) यदि $f(a) = 0$ तथा $f'(a) \neq 0$

तो $\text{P.I.} = \dfrac{1}{f(D)} e^{ax} = x \dfrac{1}{f'(a)} e^{ax}$

इसी तरह यदि $f''(a) = 0$, $\text{P.I.} = x^2 \dfrac{1}{f''(a)} e^{ax}$

वैकल्पिक विधि : यदि $f(a) = 0$ तो

(i) $f(D)$ का गुणनखण्ड करें।

(ii) जिस गुणनखंड में $D = a$ रखने पर शून्य होता है, उसमें $D = D + a$ रखें।

(iii) अन्य गुणनखंडों में $D = a$ रखें।

(iv) (ii) तथा (iii) से प्राप्त परिणाम को $e^{ax} \dfrac{1}{f(D+a)} \times 1$ के रूप में रखकर मान निकालें।

(देखें उदाहरण 3)

कार्य विधि आगे के उदाहरणों से स्पष्ट है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. हल कीजिए ;

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{4x}.$$

[2013]

हल : दिया गया समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{4x} \quad \Rightarrow \quad (D^2 - 5D + 6)\,y = e^{4x} \qquad \ldots(1)$$

$\therefore$ सहायक समीकरण (A.E.) $m^2 - 5m + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad (m-3)(m-2) = 0$

$\Rightarrow \quad m = 3, m = 2 \qquad \therefore$ पूरक फलन (C.F.) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} \qquad \ldots(2)$

(1) से,

$$\text{P.I.} = \frac{1}{D^2 - 5D + 6} e^{4x} = \frac{1}{4^2 - 5 \times 4 + 6} e^{4x} \qquad [D = 4 \text{ रखने पर}]$$

$$= \frac{1}{16 - 20 + 6} e^{4x} = \frac{1}{2} e^{4x}$$

$\therefore$ संपूर्ण हल (C.S.) = C.F. + P.I. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \dfrac{1}{2} e^{4x}$ उत्तर

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 2. हल करें $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3dy}{dx} + 2y = e^{2x}$ [2011]

हल : दिया गया समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{3dy}{dx} + 2y = e^{2x} \Rightarrow (D^2 - 3D + 2)y = e^{2x}$ ...(1)

$\therefore$ सहायक समीकरण (A.E.) $m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = 2, 1$

पूरक फलन (C.F.) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$ ...(2)

विशेष समाकल (P.I.) $= \frac{1}{f(D)} e^{2x} = \frac{1}{D^2 - 3D + 2} e^{2x}$ [(1) से]

$D = 2$ से $f(2) = 0$

अतः $\frac{1}{f(D)} e^{2x} = x \frac{1}{f'(D)} e^{2x} = x \frac{1}{2D - 3} e^{2x}$

पुनः $D = 2$ रखने पर, $\text{P.I} = x \times \frac{1}{2 \times 2 - 3} e^{2x} = \frac{xe^{2x}}{1} = xe^{2x}$ ...(3)

$\therefore$ सम्पूर्ण हल = C.F. + P.I. $= C_1 e^x + C_2 e^{2x} + xe^{2x}$ [(2) तथा (3) से]

उदाहरण 3. हल करें : $(D^2 + 4D + 4)y = e^{2x} - e^{-2x}$

हल : प्रश्न से $(D^2 + 4D + 4)y = e^{2x} - e^{-2x}$

$\therefore$ सहायक समीकरण (A.E.) $m^2 + 4m + 4 = 0 \Rightarrow (m + 2)^2 = 0$

$\Rightarrow m = -2, -2$ $\therefore$ C.F. $= (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$

अब P.I. $= \frac{1}{(D+2)^2}(e^{2x} - e^{-2x}) = \frac{1}{(D+2)^2} e^{2x} - \frac{1}{(D+2)^2} e^{-2x}$

अब $\frac{1}{(D+2)^2} e^{2x} = \frac{e^{2x}}{(2+2)^2} = \frac{1}{16} e^{2x}$ [$D = 2$ रखने पर $\because f(2) \neq 0$]

तथा $\frac{1}{(D+2)^2} e^{-2x} = \frac{1}{(D+2)^2} e^{-2x} \times 1$ [यहाँ $f(-2) = 0$]

$= e^{-2x} \times \frac{1}{\{(D-2)+2\}^2} \times 1 = e^{-2x} \frac{1}{D^2}(1) = e^{-2x} \frac{1}{D}\left\{\frac{1}{D}(1)\right\}$

$= e^{-2x} \frac{1}{D} x = e^{-2x} \frac{x^2}{2}$ $\left[\because \frac{1}{D} = \int dx = x \Rightarrow \frac{1}{D} x = \int z\, dx = \frac{x}{2}\right]$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल (C.S.) = C.F. + P.I. $= (C_1 + C_2 x) e^{-2x} + \frac{1}{16} e^{2x} - \frac{1}{2} x^2 e^{-2x}$

Type II. Case I. जब $g(x) = \sin ax$ या $\cos ax$ तथा $f(-a^2) \neq 0$

विशेष समाकल (P.I.) $= \frac{1}{f(D^2)} \sin ax$ या $\frac{1}{f(D^2)} \cos ax$

अब (i) $f(D^2)$ में $D^2 = -a^2, D^3 = -a^2 D, D^4 = (D^2)^2 = (-a^2)^2 = a^4$ आदि रखें।

तथा P.I. की गणना करें।

(ii) यदि (i) की क्रिया के बाद हर में $\alpha D \pm \beta$ के रूप का व्यंजक बच जाए तो हर तथा अंश में संयुग्मी $\alpha D \mp \beta$ से गुणा करें तथा हर में $D^2 = -a^2$ रखें। तत्पश्चात् अंश के फलन के साथ D अर्थात् अवकलन की क्रिया करें।

[देखें उदाहरण 4]

Case II. यदि $g(x) = \sin ax$ या $\cos ax$ तथा $f(-a^2) = 0$ तो विशेष समाकल

www.polytechnicpdf.com

(i) $\frac{1}{f(D^2)} \sin ax = x \frac{1}{f'(-a^2)} \sin ax$ यदि $f'(-a^2) \neq 0$

(ii) $\frac{1}{f(D^2)} \cos ax = x \frac{1}{f'(-a^2)} \cos ax$ यदि $f'(-a^2) \neq 0$

नोट :

- यदि $f'(-a^2) = 0$ हो तो प्रक्रिया दुहरायें।

उदाहरण 4. हल करें :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = \sin 2x$$

हल : दिए गए समीकरण मे

$(D^2 + 3D + 2)\, y = \sin 2x$ $\quad\therefore$ सहायक समीकरण $m^2 + 3m + 2 = 0$

$\Rightarrow (m+1)(m+2) = 0$ $\quad\Rightarrow m = -1, -2$

$\therefore$ C.F. $= C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

विशेष समाकल $= \frac{1}{D^2 + 3D + 2} \sin 2x = \frac{1}{-2^2 + 3D + 2}$ [$D^2 = -a^2 = -2^2$ रखने पर]

$$= \frac{1}{3D+2} \sin 2x = \frac{3D-2}{(3D+2)(3D-2)} \sin 2x$$

$$= \frac{3D-2}{9D^2 - 4} \sin 2x = \frac{3D-2}{9 \times (-4) - 4} \sin 2x \quad [D^2 = -4 \text{ रखने पर}]$$

$$= \frac{1}{-40}[3D(\sin 2x) - 2\sin 2x] = \frac{1}{-40}[3 \times 2\cos 2x - 2\sin 2x]$$

$$= \frac{1}{-20}[3\cos 2x - \sin 2x]$$

$\therefore$ व्यापक हल (C.S.) $\quad y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{20}[3\cos 2x - \sin 2x]$

उदाहरण 5. हल करें :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^x + \sin 2x$$

[2000]

हल : दिये गये समीकरण का सहायक समीकरण (A.E.) $m^2 + 4 = 0 \Rightarrow m^2 = -4 \Rightarrow m = \pm 2i = 0 \pm 2i$

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $= e^0 [C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x] = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

तथा विशेष समाकलन (P.I.) $= \frac{1}{D^2+4}(e^x + \sin 2x) = \frac{1}{D^2+4} e^x + \frac{1}{D^2+4} \sin 2x$

$$= \frac{1}{1^2+4} e^x + x\left[\frac{1}{2D} \sin 2x\right]$$

[$\because D^2 + 4$ के अवकलन से $D^2 = -2^2$ रखने पर $f(-2^2) = 0$]

$$= \frac{1}{5} e^x + \frac{x}{2} \int \sin 2x\, dx \qquad \left[\because \frac{f(x)}{D} = \int f(x)\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{5} e^x + \frac{x}{2} \times \frac{1}{2}(-\cos 2x) = \frac{1}{5} e^x - \frac{x}{4} \cos 2x$$

www.polytechnicpdf.com

$\therefore$ व्यापक हल (C.S.) $\quad y = \text{C.F.} + \text{P.I.} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{5} e^x - \frac{x}{4} \cos 2x$

उदाहरण 6. हल करें :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x \sin 2x$$

हल : सहायक समीकरण (A.E.) $\quad m^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad m = 0 \pm i$

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $y = e^0 (C_1 \cos x + C_2 \sin x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad [\because e^0 = 1]$

तथा विशेष समाकल (P.I.)

$$= \frac{1}{D^2+1} \sin x . \sin 2x = \frac{1}{D^2+1} \times \frac{1}{2} \times 2 \sin x \sin 2x$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{D^2+1} [\cos(2x - x) - \cos(2x + x)]$$

$[\because \cos(C - D) - \cos(C + D) = 2 \sin C . \sin D]$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{D^2+1} [\cos x - \cos 3x] = \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{D^2+1} \cos x - \frac{1}{D^2+1} \cos 3x \right]$$

$$= \frac{1}{2} [y_1 - y_2] \qquad \ldots(1)$$

जहाँ $y_1 = \frac{1}{D^2+1} \sin x$ तथा $y_2 = \frac{1}{D^2+1} \cos 3x$

अब $y_1 = \frac{1}{D^2+1} \cos x = x \frac{1}{2D} \cos x \qquad [\because D^2 = -1^2$ से $f(-1^2) = 0]$

$$= \frac{x}{2} \int \cos x \, dx = \frac{x}{2} \sin x$$

तथा $y_2 = \frac{1}{D^2+1} \cos 3x = \frac{1}{-3^2+1} \cos 3x = -\frac{1}{8} \cos 3x$

$\therefore$ विशेष समाकल (P.I.) $= \frac{1}{2} \left[\frac{x}{2} \sin x + \frac{1}{8} \cos 3x \right]$ [(1) में y_1 तथा y_2 का मान रखने पर]

$\therefore$ सम्पूर्ण हल (C.S.) $= \text{C.F.} + \text{P.I.} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{4} x \sin x + \frac{1}{16} \cos 3x$

स्मरणीय तथ्य

1. **विषमघातीय अवकल समीकरणों का हल :** यदि समीकरण $f(D) y = g(x)$ हो, तो

(a) पूरक फलन : इसे ज्ञात करने की विधि वही है जो समघातीय रैखिक अवकल समीकरण की है। यह विधि धारा 5.3 में बतायी गयी है

(b) विशेष समाकल (Particular Integral) : $\frac{1}{f(D)} g(x)$

(1) (a) यदि $g(x) = e^{ax}$ तो P.I. $= \frac{e^{ax}}{f(a)}$ यदि $f(a) \neq 0$

(b) यदि $f(a) = 0$ तो P.I. $= x \frac{e^{ax}}{f'(a)}$ यदि $f'(a) \neq 0$

www.polytechnicpdf.com

अथवा

$f(D)$ का गुणनखण्ड कर जिस गुणनखंड में $D = a$ रखने से शून्य होता है उसमें $D = D + a$ तथा शेष जगह $D = a$ रखें।

(2) यदि $g(x) = \sin ax$ या $\cos ax$

तो (a) विशेष समाकल (P.I.) $= \dfrac{\sin ax \text{ या } \cos ax}{f(D^2)} = \dfrac{\sin ax \text{ या } \cos ax}{f(-a^2)}$, यदि $f(-a^2) \neq 0$

(b) यदि $f(-a)^2 = 0$ तो P.I. $= \dfrac{x \sin ax \text{ या } \cos ax}{f'(-a^2)}$ यदि $f'(-a^2) \neq 0$

(3) यदि $g(x) = \sinh ax$ या $\cosh ax$ तो विशेष समाकल (P.I.) $= \dfrac{g(x)}{f(D^2)}$ में $D^2 = a^2$ रखें।

अथवा

$\sinh ax = \dfrac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}$ तथा $\cosh ax = \dfrac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$ रखकर (1) में बताई गई विधि से हल करें।

प्रश्नावली 5.2

निम्न अवकल समीकरणों को हल करें :

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} + 6y = e^{2x}$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = 5e^{3x}$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = \sinh x$ [संकेत : P.I. $\dfrac{1}{D^2 + 2D + 2} \sinh x = \dfrac{1}{D^2 + 2D + 2} \dfrac{(e^x - e^{-x})}{2}$]

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = -2\cosh x$

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 31\dfrac{dy}{dx} + 240y = 272e^{-x}$

6. $(D^3 + 2D^2 - D - 2)y = e^x$

7. $\dfrac{d^3y}{dx^2} - \dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} - 4y = e^x$

8. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4y = (1 + e^x)^2$

[संकेत : P.I. $= \dfrac{1}{D^2 - 4}(1 + e^x)^2 = \dfrac{1}{D^2 - 4}(1 + 2e^x + e^{2x}) = \dfrac{1}{D^2 - 4}(e^{0x} + 2e^x + e^{2x})$]

9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2a\dfrac{dy}{dx} + a^2y = e^{ax}$

10. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - \dfrac{d^2y}{dx^2} - 18y = 2^x$ [संकेत : $2^x = e^{x \log 2}$]

11. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = \cos 3x$

12. (i) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sin ax$ (ii) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \cos ax$

13. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4y = \cos^2 x$

www.polytechnicpdf.com

14. (i) $\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 2y = e^x + \cos x$ [2001, 13]

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = e^x + \sin 2x$ [2000]

15. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \sin x \,.\, \cos 2x$

16. (i) $\frac{d^3y}{dx^3} + 5\frac{dy}{dx} = \sinh 2x$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = -2\cosh x$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = e^x \cosh 2x$

उत्तरमाला

1. $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

2. $y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x} + 5\frac{e^{3x}}{36}$

3. $y = e^{-x}\left[C_1 \cos x + C_2 \sin x\right] + \frac{e^x}{10} - \frac{e^{-x}}{10}\Big]$

4. $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - \frac{1}{10}e^x - \frac{e^{-x}}{2}$

5. $y = C_1 e^{-15x} + C_2 e^{-16x} + \frac{136}{105}e^{-x}$

6. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{6}xe^x$

7. $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + \frac{xe^x}{5}$

8. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3}e^x + \frac{x}{4}e^{2x}$

9. $y = (C_1 + C_2 x)e^{ax} + \frac{x^2}{2}e^{ax}$

10. $y = C_1 e^{3x} + e^{-x}(C_2 \cos\sqrt{3}\,x + C_3 \sin\sqrt{3}\,x + \frac{2^x}{(\log 2)^3 - (\log 2)^2 - 18}$

11. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \frac{1}{130}(9\sin 3x + 7\cos 3x)$

12. (i) $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax - \frac{x}{2a}\sin ax$ (ii) $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{x}{2a}\cos ax$

13. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{8} - \frac{\cos 2x}{16}$

14. (i) $y = C_1 e^x + (C_2 \cos x + C_3 \sin x)e^x + x e^x + \frac{1}{10}(3\sin x + \cos x)$

(ii) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - e^x/3 \; \frac{\sin 2x}{8}$

15. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{1}{12}x\cos 3x - \frac{1}{16}\sin x$

www.polytechnicpdf.com

16. (i) $y = C_1 + (C_2 \cos\sqrt{5}\,x + C_3 \sin\sqrt{5}\,x + \frac{1}{18}\cosh 2x$

(ii) $y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - \frac{1}{10}e^{x} - \frac{1}{2}e^{-x}$

(iii) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{10}xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{x}$

Type III.

जब $g(x) = x^n$ या $(ax+b)^n$, विशेष समाकल $= \dfrac{x^n}{f(D)}$

कार्य विधि : Step I. $f(D)$ को D के घातें के आरोही क्रम में सजायें।

Step II. निम्नतम घात वाले पद को सर्वनिष्ठ (common factor) के रूप में बाहर निकालें जिससे पहला पद इकाई हो जाए।

Step III. Step II से प्राप्त परिणाम की सहायता से $\dfrac{x^n}{f(D)}$ को $[1+f(D)]^{-n}x^n$ या $[1-f(D)]^{-n}x^n$ रूप में व्यक्त करें।

Step IV. तत्पश्चात् द्विपद प्रमेय से $[1 \pm f(D)]^{-n}$ को आरोही घातों में nवीं घात (x की घात तक) प्रसार करें तथा D की घातों के अनुरूप अवकलन की क्रिया करें।

क्रिया विधि आगे के उदाहरणों से स्पष्ट है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. हल करें :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = x^2$$

हल : प्रतीक रूप में लिखने पर $\quad (D^2 - 4)\,y = x^2$

$\therefore$ सहायक समीकरण $m^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 2$

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

अब विशेष समाकल $= \dfrac{1}{D^2-4}x^2 = \dfrac{1}{-4\left[1-\frac{D^2}{4}\right]}x^2 = -\dfrac{1}{4}\left[1-\dfrac{D^2}{4}\right]^{-1}x^2 = -\dfrac{1}{4}\left[1+\dfrac{D^2}{4}+\ldots\right]x^2$

[द्विपद सिद्धान्त से D^2 वाले पद तक विस्तार]

$$= -\frac{1}{4}\left[x^2 + \frac{1}{4}D^2(x^2)\right]$$ [शेष पद $(D^3, D^4, \ldots)$ वाले पद शून्य होंगे]

$$= -\frac{1}{4}\left[x^2 + \frac{1}{4}\times 2\right] = -\frac{1}{4}\left[x^2 + \frac{1}{4}\times 2\right] = -\frac{1}{4}\left[x^2 + \frac{1}{2}\right]$$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल C.F. + P.I. $= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \dfrac{1}{4}\left[x^2 + \dfrac{1}{2}\right]$

www.polytechnicpdf.com

$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3$

उदाहरण 2. हल करें :

$$\frac{d^2y}{dx} + \frac{dy}{dx} - 6y = x$$

[2004]

हल : प्रतीक रूप में समीकरण $(D^2 + D - 5)\,y = x$

$\therefore$ सहायक समीकरण $m^2 + m - 6 = 0$

$\Rightarrow$ $(m+3)(m-2) = 0$ $\Rightarrow$ $m = -3, 2$

$\therefore$ पूरक फलन $(\text{C.F.}) = C_1\, e^{-3x} + C_2\, e^{2x}$

अब विशेष समाकलन $(\text{P.I.})\ \dfrac{1}{D^2 - D - 6}\,x = \dfrac{1}{-6\left[1 - \dfrac{(D+D^2)}{6}\right]} \times x = -\dfrac{1}{6}\left[1 - \dfrac{D+D^2}{6}\right]x$

$$= -\frac{1}{6}\left[x + \frac{1}{6}Dx + \frac{1}{6}D^2x\right] = -\frac{1}{6}\left[x + \frac{1}{6} + 0\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\left[x + \frac{1}{6}\right]$$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल : $\text{C.F.} + \text{P.I.} = C_1\, e^{-3x} + C_2\, e^{3x} - \dfrac{1}{6}\left[x + \dfrac{1}{6}\right]$

उदाहरण 3. हल करें :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 + e^x + \cos 2x$$

हल : प्रतीक रूप में दिया गया समीकरण $(D^2 - 4D + 4)\,y = x^2 + e^x + \cos 2x$

$\therefore$ सहायक समीकरण (A.E.) $m^2 - 4m + 4 = 0$

$\Rightarrow$ $(m-2)^2 = 0$ $\therefore$ $m = 2, 2$

$\therefore$ पूरक फलन $(\text{C.F.}) = (C_1 + C_2x)\,e^{2x}$

अब विशेष समाकल $(\text{P.I.}) = \dfrac{1}{D^2 - 4D + 4}\,[x^2 + e^x + \cos 2x]$

$$= \frac{1}{(D-2)^2}[x^2 + e^x + \cos 2x]$$

$$= \frac{1}{(D-2)^2}x^2 + \frac{1}{(D-2)^2}e^x + \frac{1}{(D-2)^2}\cos 2x$$

$$= y_1 + y_2 + y_3 \qquad \text{[माना]}$$

अब $y_1 = \dfrac{1}{(D-2)^2}x^2 = \dfrac{1}{4\left(1 - \dfrac{D}{2}\right)^2}x^2 = \dfrac{1}{4}\left[1 - \dfrac{D}{2}\right]^{-2}x^2$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + 2\times\frac{D}{2} + \frac{2\times 3}{2\times 1}\left(-\frac{D}{2}\right)^2 + \ldots\right]x^2 = \frac{1}{4}\left[1 + D + \frac{3}{8}D^2 + \ldots\right]x^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[x^2 + Dx^2 + \frac{3}{4}D^2x^2\right] = \frac{1}{4}\left[x^2 + 2x + \frac{3}{4}\times 2\right] = \frac{1}{4}\left[x^2 + 2x + \frac{3}{2}\right]$$

www.polytechnicpdf.com

$6x^2 + 4x + 1$

$$y_2 = \frac{1}{(D-2)^2} e^x = \frac{1}{(1-2)^2} e^x = \frac{e^x}{(-1)^2} = e^x$$

तथा $y_3 = \dfrac{1}{(D^2 - 4D + 4} \cos 2x = \dfrac{1}{-2^2 - 4D + 4} \cos 2x = -\dfrac{1}{4D} \cos 2x$

$$= -\frac{1}{4} \int \cos 2x \, dx \quad -\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \sin 2x = -\frac{1}{8} \sin 2x$$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल = C. F. + P.I. $= (C_1 + C_2 x) e^{2x} + \dfrac{1}{4}\left(x^2 + 2x + \dfrac{3}{2}\right) + e^x - \dfrac{1}{8} \sin 2x$

Case IV. जब $g(x) = e^{ax} X$ जहाँ X, x का फलन है।

विशेष समाकलन $= \dfrac{1}{f(D)} e^{ax} X = e^{ax} \dfrac{1}{f(D+a)} X$

अर्थात् e^{ax} (जो $\dfrac{1}{f(D)}$ के दाहिने है) को बायें लायें तथा D की जगह $D + a$ रखकर X के अनुरूप क्रिया करें।

कार्य विधि आगे के उदाहरणों से स्पष्ट है।

उदाहरण 4. हल करें :

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - y = e^x \cos x$$

हल : प्रतीकात्मक रूप में समीकरण $(D^4 - 1) y = e^x \cos x$

$\therefore$ सहायक समीकरण (A.E.) $= m^4 - 1 = 0$

$\Rightarrow$ $(m^2 - 1)(m^2 + 1) = 0 \qquad \Rightarrow m = 1, -1, \pm i$

$\therefore$ पूरक फलन $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{0x} \quad [C_3 \cos x + C_4 \sin x]$

$$= C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

विशेष समाकल (P.I.) $= \dfrac{1}{D^4 - 1} e^x \cos x = e^x \dfrac{1}{(D+1)^4 - 1} \cos x \qquad [\because e^x = e^{1 \times x}]$

$$= e^x \frac{1}{D^4 + 4D^3 + 6D^2 + 4D + 1 - 1} \cos x$$

$$= e^x \frac{1}{(-1^2)^2 + 4(-1^2) D + 6(-1^2) + 4D} \qquad [D^2 = -1^2 \text{ रखने पर}]$$

$$= e^x \frac{1}{1 - 4D - 6 + 4D} \cos x = e^x \frac{1}{-5} \cos x = -\frac{1}{5} e^x \cos x$$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल = C.F. + P.I. $\qquad y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \dfrac{1}{5} e^x \cos x$

उदाहरण 5. हल करें :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2y = x^2 e^{3x}$$

हल : प्रतीक रूप में समीकरण $(D^2 + 2) y = x^2 e^{3x}$

$\therefore$ सहायक समीकरण (A.E.) $\qquad m^2 + 2 = 0 \Rightarrow m = \pm \sqrt{2} i$

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $= e^{0x} [C_1 \cos \sqrt{2} x + C_2 \sin \sqrt{2} x] = C_1 \cos \sqrt{2} x + C_2 \sin \sqrt{2} x$

www.polytechnicpdf.com

तथा विशेष समाकल $= \frac{1}{D^2+2} x^2 e^{3x} = e^{3x} \times \frac{1}{(D+3)^2+2} x^2 = e^{3x} \frac{1}{D^2+6D+9+2} x^2$

$$= e^{3x} \frac{1}{D^2+6D+11} x^2 = e^{3x} \frac{1}{11\left[1+\frac{6D+D^2}{11}\right]} x^2$$

$$= \frac{1}{11} e^{3x} \left[1+\left(\frac{6D}{11}+\frac{D^2}{11}\right)\right]^{-1} x^2$$

$$= \frac{1}{11} e^{3x} \left[1-\frac{6D}{11}-\frac{D^2}{11}+\left(\frac{6}{11}D+\frac{D^2}{11}\right)^2+\ldots\right] x^2$$

$$= \frac{1}{11} e^{3x} \left[1-\frac{6}{11}D+\left(\frac{36}{121}-\frac{1}{11}\right)D^2+\ldots\right] x^2$$

$$= \frac{1}{11} e^{3x} \left[1-\frac{6}{11}D+\frac{25}{121}D^2+\ldots\right] x^2$$

$$= \frac{1}{11} e^{3x} \left[x^2-\frac{6}{11}D(x)^2+\frac{25}{121}D^2(x)^2\right]$$

$$= \frac{1}{11} e^{3x} \left[x^2-\frac{6}{11}\times 2x+\frac{25}{121}\times 2\right] = \frac{e^{3x}}{11}\left[x^2-\frac{12}{11}x+\frac{50}{121}\right]$$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल (C.S.) = C.F. + P.I.

$$y = C_1 \cos\sqrt{2}\,x + C_2 \sin\sqrt{2}x + \frac{e^{3x}}{11}\left(x^2-\frac{12}{11}x+\frac{50}{121}\right)$$

Case VI. यदि $g(x) = xQ$, जहाँ Q, x का फलन है।

तो विशेष समाकल $= \frac{1}{f(D)}(xQ) = x\frac{1}{f(D)}Q + \left(\frac{d}{dD}\frac{1}{f(D)}\right)Q$

$\frac{1}{D} = \int$

उदाहरण 7. हल करें :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = x\cos x$$

हल : प्रतीक रूप में समीकरण $(D^2+2D+1)\,y = x\cos x$

$\therefore$ सहायक समीकरण $m^2+2m+1=0 \Rightarrow (m+1)^2=0 \Rightarrow m=-1,-1$

$\therefore$ पूरक फलन $y = (C_1+C_2x)\,e^{-x}$

विशेष समाकल $= \frac{1}{D^2+2D+1} x\cos x = x\frac{1}{D^2+2D+1}\cos x + \left[\frac{d}{dD}\frac{1}{D^2+2D+1}\right]\cos x$

$$= x\frac{1}{-1^2+2D+1}\cos x - \frac{2D+2}{(D^2+2D+1)^2}\cos x$$

$$= \frac{x}{2}\frac{1}{D}\cos x - \frac{(2D+2)}{(-1^2+2D+1)^2}\cos x$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \frac{x}{2}\int \cos x\, dx - \frac{(2D+2)}{4D^2}\cos x = \frac{x}{2}\sin x - \frac{2(D+1)}{4D^2}\cos x$$

$$= \frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{2}\frac{(D+1)}{-1^2}\cos x = \frac{x}{2}\sin x + \frac{1}{2}(D+1)\cos x$$

$$= \frac{x}{2}\sin x + \frac{1}{2}(-\sin x + \cos x)$$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल = C.F. + P.I. $= (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{1}{2}[x\sin x - \sin x + \cos x]$

नोट

- यदि प्रश्न $Q = \sin ax$ या $\cos ax$ के रूप का हो तथा $f(-a^2) = 0$ हो, तो इस विधि से प्रश्न हल नहीं होगा। इस स्थिति में धारा 5.6 में बताई गई विधि से हल करें।

Type VII. यदि $g = \sinh ax$ या $R = \cosh ax$

विशेष समाकल (P.I.) $= \frac{1}{f(D)}\sinh ax$ या $\cosh ax$

अब $f(D)$ में $D^2 = a^2$ रखें।

इसे $\sinh ax = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ तथा $\cosh ax = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ रखकर भी 5.2.2 Type I की भाँति हल किया जा सकता है।

उदाहरण 8. हल करें :

$$(D^2+1)y = \cosh x$$

हल : दिया गया समीकरण $(D^2+1)y = \cosh x$

$\therefore$ सहायक समीकरण (A.E.) $m^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm i$

$\therefore$ पूरक फलन $y = e^{0x}[C_1\cos x + C_2\sin x]$

विशेष समाकल $= \frac{1}{D^2+1}\cosh x = \frac{1}{1^2-1}\cosh x \qquad [D^2 = a^2 = 1^2$ रखने पर]

$$= \frac{1}{2}\cosh x$$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल (C.S.) = C.F. + P.I.

$$= C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}\cosh x$$

नोट

- विशेष समाकल $\frac{1}{D^2+1}\cosh x = \frac{1}{D^2+1}\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] = \frac{1}{D^2+1}e^x + \frac{1}{D^2+1}e^{-x}$

$$= \frac{1}{D^2+1}e^x + \frac{1}{(-1)^2+1}e^{-x}$$

$$= \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\cosh x$$

www.polytechnicpdf.com

5.5 विशेष समाकल निकालने की सामान्य विधि (General Method for Finding Particular Integral)

यदि फलन $f(D)\,y = g(x)$ के रूप का हो, तथा

(i) $f(D) = (D-\alpha)$ तो विशेष समाकल $\dfrac{1}{D-\alpha}\,g(x) = e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}\,g(x)\,dx$

(ii) $f(D) = (D-\alpha_1)(D-\alpha_2)\ldots(D-\alpha_n)$ तो विशेष समाकल

$$= \frac{1}{(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)\ldots(D-\alpha_{n-1})(D-\alpha_n)}\,g(x)$$

$$= \frac{1}{(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)\ldots(D-\alpha_{n-1})}\,e^{\alpha_n x}\int e^{-\alpha_n x}\,g(x)\,dx$$

क्रमानुसार इस प्रक्रिया को दुहराने से अभीष्ट विशेष समाकल प्राप्त होता है।

अथवा (वैकल्पिक विधि)

$$\frac{1}{(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)\ldots(D-\alpha_n)}\,g(x) = \left[\frac{A_1}{D-\alpha_1} - \frac{A_2}{D-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{D-\alpha_n}\right] g(x)$$

[आंशिक भिन्नीकरण से]

विशेष समाकल $= A_1\,e^{\alpha_1 n}\int e^{-\alpha_1 x}\,R\,dx + A_2 e^{\alpha_2 x}\int e^{-\alpha_2 x}\,R\,dx + \ldots + A_n e^{\alpha_2 x}\int e^{-\alpha_n x}\,R\,dx$

क्रिया विधि आगे के उदाहरणों से स्पष्ट है।

उदहारण 9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 4y = e^{3x}$ का विशेष समाकल प्राप्त करें।

हल : प्रतीक रूप में समीकरण $(D^2 - 5D + 4)\,y = e^{3x}$

$\therefore$ विशेष समाकल $= \dfrac{1}{D^2 - 5D + 4}\,e^{3x} = \dfrac{1}{(D-4)(D-1)}\,e^{3x}$ ...(1)

$$= \frac{1}{(D-4)}\left[\frac{1}{D-1}\,e^{3x}\right] = \frac{1}{D-4}\left\{e^x\int e^{-x}\,e^{3x}\,dx\right\} \qquad [\because \alpha = 1]$$

$$= \frac{1}{D-4}\left\{e^x\int e^{2x}\,dx\right\} = \frac{1}{D-4}\left\{e^x \times \frac{e^{2x}}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{D-4}\,e^{3x} = \frac{1}{2}\left[e^{4x}\int e^{-4x}\,e^{3x}\,dx\right] = \frac{1}{2}\left[e^{4x}\int e^{-x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}[-e^{4x}.\,e^{-x}] = \frac{1}{2}[-e^{3x}] = -\frac{1}{2}\,e^{3x}$$

वैकल्पिक विधि : (1) से

$$\frac{1}{(D-4)(D-1)}\,e^{3x} = \left[\frac{1}{3(D-4)} - \frac{1}{3(D-1)}\right]e^{3x} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{D-4}\,e^{3x} - \frac{1}{D-1}\,e^{3x}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[e^{4x}\int e^{-4x}\,e^{3x}\,dx - e^x\int e^{-x}\,e^{3x}\,dx\right]$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \frac{1}{3}\left[e^{4x}\int e^{-x}\,dx - e^{x}\int e^{2x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[e^{4x}(-e^{-x}) - \frac{e^{x}e^{2x}}{2}\right] = \frac{1}{3}\left[-e^{3x} - \frac{e^{3x}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{6}[-3e^{3x}] = -\frac{1}{2}e^{3x}$$

नोट :

• इस प्रश्न को धारा 5.4.3 Type I (Page 102) में बताई गई विधि से भी हल किया जा सकता है।

उदाहरण 10. हल करें :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \sec ax$$

हल : प्रतीक रूप में समीकरण $(D^2 + a^2)\,y = \sec ax$

$\therefore$ सहायक समीकरण (A.E.) $m^2 + a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \pm ai$

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $y = e^{0x}\,(C_1 \cos ax + C_2 \sin ax)$

$\Rightarrow \quad y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$

विशेष समाकल (P.I.) $= \dfrac{1}{D^2 + a^2}\sec ax = \dfrac{1}{(D+ai)(D-ai)}\sec ax \quad [\because D^2 + a^2 = D^2 - a^2i^2]$

$$= \frac{1}{2ai}\left[\frac{1}{D-ai} - \frac{1}{D+ai}\right]\sec ax \quad \text{[आंशिक भिन्नीकरण से]}$$

अब $\dfrac{1}{D-ai}\sec ax = e^{iax}\displaystyle\int e^{-iax}\sec ax\,dx$ ...(1)

$$= e^{iax}\int \frac{\cos ax - i\sin ax}{\cos ax}\,dx = e^{iax}\left[\int 1\,dx - i\int \frac{\sin ax}{\cos ax}\,dx\right]$$

$$= e^{iax}\left[x + \frac{i}{a}\log\cos ax\right]$$

इसी तरह $\dfrac{1}{D+ai}\sec ax = e^{-iax}\left[x - \dfrac{i}{a}\log\cos ax\right]$

$\therefore$ (1) से विशेष समाकल

$$\frac{1}{D^2+a^2}\sec ax = \frac{1}{2ai}\left[e^{iax}\left(x + \frac{i}{a}\log\cos ax\right) - e^{-iax}\left(x - \frac{i}{a}\log\cos ax\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2ai}\left[(e^{iax} - e^{-iax})\,x + \frac{i}{a}\log\cos ax\,(e^{iax} + e^{-iax})\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}\,x + \frac{1}{a}\log\cos ax\,\frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}\right]$$

$$= \frac{x}{a}\sin ax + \frac{1}{a^2}(\log\cos ax)\cos ax$$

www.polytechnicpdf.com

$\therefore$ सम्पूर्ण हल $= C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{x}{a} \sin ax + \frac{1}{a^2} \cos ax \log \cos ax$

स्मरणीय तथ्य

पूरक फलन ज्ञात करना यदि $f(D)\, y = g(x)$ हो तथा

1. $g(x) = x^n$ या $(ax+b)^n$

विशेष समाकल (P.I.) $= \frac{g(x)}{f(D)} = [1 \pm f(D)]^{-n}\, g(x)$

के रूप में लिखें तथा $[1 \pm f(D)]^{-n}$ को आरोही क्रम में nवीं घात (x या $(ax+b)$ की घात) तक प्रसार कर घातों के अनुरूप अवकलन की क्रिया करें।

2. यदि $g(x) = e^{ax} X$, जहाँ X, x का फलन है, तो विशेष समाकल $= \frac{1}{f(D)} e^{ax} X = e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} X$

3. यदि $g(x) = xQ$, जहाँ Q, x का फलन है, तो विशेष समाकल

$$\frac{1}{f(D)}(xQ) = x \frac{1}{f(D)} Q + \left(\frac{d}{dD} \frac{1}{f(D)}\right) Q$$

4. विशेष समाकल की सामान्य विधि :

(i) विशेष समाकल $= e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x}\, g(x)\, dx$, जहाँ $f(D) = D - \alpha$

(ii) यदि $f(D) = (D-\alpha_1)(D-\alpha_2)\ldots(D-\alpha_n)$ तो विशेष समाकल $\frac{1}{f(D)} g(x)$

$$= \left[\frac{A_1}{D-\alpha_1} + \frac{A_2}{D-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{D-\alpha_n}\right] g(x) \qquad \text{[आंशिक भिन्नों में तोड़ें]}$$

फिर (i) का उपयोग करें।

प्रश्नावली 5.3

निम्न अवकल समीकरणों को हल करें :

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = x$
2. $(D^2 + D - 6)\, y = x$
3. $(D^2 - 5D + 6)\, y = x$
4. $(D^2 - 3D - 2)\, y = x^2$
5. $(D^3 + 2D^2 + 4D + 8)\, y = x^2$
6. $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = e^{2x} + x^2 + x$
7. $\frac{d^2r}{d\theta^2} - 8\frac{dr}{d\theta} + 16r = 2\theta^2$
8. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 1 + x^2$
9. $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4y = 3 - 2x$
10. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^x \cos 2x$
11. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 e^{2x}$
12. $(D^2 - 6D + 13)\, y = (8e^{3x} \sin 4x + 2^x)$

www.polytechnicpdf.com

[संकेत : P.I. $= \dfrac{1}{D^2 - 6D - 13} 8e^{3x} \sin 4x + 2^x$

$$= 8 \frac{1}{D^2 - 6D + 13} e^{3x} \sin 4x + \frac{1}{D^2 - 6D + 13} e^{x \log 2}$$

अब प्रथम भाग में $D = D + 3$ तथा द्वितीय भाग में $D = \log 2$ रखें]

13. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = xe^x \sin x$

[संकेत : P.I. $= \dfrac{1}{(D-1)^2} xe^x \sin x = e^x \dfrac{1}{(D+1-1)^2} x \sin x = e^x \dfrac{1}{D^2} x \sin x$

$$= e^x \frac{1}{D} \int x \sin x \, dx = e^x \int [-x \cos x + \sin x]$$

$$= e^x [-x \sin x - \cos x - \cos x]$$

14. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = xe^x \cos x$

15. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = x \sin x$

16. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = x \sin x + (1 + x^2) e^x$

सामान्य विधि से हल करें :

17. $(D^2 + 9) y = \sec 3x$

18. $(D^2 + 4) y = \sin 2x$

उत्तरमाला

1. $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{3x} + \dfrac{1}{12}\left(x + \dfrac{7}{12}\right)$

2. $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - \dfrac{1}{36}(6x + 1)$

3. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \dfrac{1}{6} x + \dfrac{5}{36}$

4. $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x} + C_3 e^{2x} - \dfrac{1}{2}\left(x^2 - 3x + \dfrac{9}{2}\right)$

5. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 \cos 2x - C_3 \sin 2x + \dfrac{1}{5}(x^2 - x)$

6. $y = C_1 + (C_2 + C_3 x) e^{-x} + \dfrac{1}{18} e^{2x} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + 4x$

7. $y = (C_1 + C_2 \theta) e^{4\theta} + \dfrac{1}{16}\left(2\theta^2 + 2\theta + \dfrac{3}{4}\right)$

8. $y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \dfrac{x}{12}(2x^2 - 3x + 9)$

9. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-4x} + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{11}{2} - 2x\right)$

10. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \dfrac{e^x}{20}(3 \sin 2x + \cos 2x)$

11. $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + e^{2x} \dfrac{x^5}{20}$

12. $y = e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \dfrac{2}{3} e^{3x} \sin 4x + \dfrac{2^x}{(\log 2)^2 - 6 \log 2 + 13}$

www.pdftechnicpdf.com

13. $y = (C_1 + C_2 x) e^x - e^x (x \sin x + 2 \cos x)$

14. $Y = (C_1 + C_2 x) e^x + e^x [2 \sin x - x \cos x]$

15. $y = (C_1 + C_2) e^x - \frac{1}{2} x \cos x + \frac{1}{2} (\cos x - \sin x)$

16. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} (x \sin x + \cos x) + \frac{1}{12} x e^x (2x^2 - 3x + 9)$

17. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{x}{3} \sin 3x - \frac{1}{9} \cos 3x \log (\cos 3x)$

18. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x \cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{16}$

5.6 अचर गुणांकों वाले समघाती रैखिक समीकरण में परिवर्तनशीन समीकरण (Equations reducible to linear form with constant coefficients)

ऐसे समीकरण जो $a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 x^{n-2} \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y_n = Q$ ...(1)

जहाँ $a_0, a_1, \ldots, a_r$ अचर हैं तथा Q, x का फलन अथवा अचर है, सम्घाती रैखिक समीकरण कहलाते है।

नोट :

- ऐसे फलनों में x की घात तथा अवकल गुणांक की कोटि समान होती हैं। ये समीकरण यूलर-कॉशी समीकरण **(Euler Cauchy-Equation)** के नाम से भी जाने जाते हैं।

5.7.1. समघाती समीकरणों का हल (Solution of Homogeneous Linear Differential Equations) :

ऐसे समीकरणों के हल के लिए सर्वप्रथम $x = e^z$ प्रतिस्थापित किया जाता है जिससे $z = \log_e x$ तथा $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$ तथा

अब $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \times \frac{1}{x}$ या $x \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$ या $x \frac{dy}{dx} = Dy$ जहाँ $D = \frac{d}{dz}$

पुनः $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right) = \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) + \frac{dy}{dz}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}$

$$= \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2} \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} = \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right] = \frac{1}{x^2}(D^2 - D)y$$

$$= \frac{1}{x^2} D(D-1)y$$

$$\therefore \quad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$$

इसी तरह $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$

व्यापक रूप में $x^n \frac{d^ny}{dx^n} = [D(D-1)(D-2)\ldots\{D-(n-1)\}]y$

www.polytechnicpdf.com

इन मानों को समीकरण (1) में रखने पर यह अचर गुणाकों वाले रैखिक समीकरण में परिवर्तित हो जाता है, जिसका हल पूर्व में बताई गई विधियों से किया जा सकता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. हल करें :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = x^4$$

हल : दिया गया समीकरण $$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 4y = x^4 \quad ...(1)$$

(1) में $x = e^z, \frac{d}{dz} = D,\ x\frac{dy}{dx} = Dy$ तथा $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$ रखने पर

$$\{D(D-1) - 2D - 4\}\, y = (e^z)^4$$

$\Rightarrow \{D^2 - D - 2D - 4\}\, y = e^{4z}$ $\Rightarrow \{D^2 - 3D - 4\}\, y = e^{4z}$

$\therefore$ सहायक समीकरण (A.E.) $m^2 - 3m - 4 = 0$

$\Rightarrow (m-4)(m+1) = 0$ $\Rightarrow m = 4, m = -1$

$\therefore$ C.F. $y = C_1 e^{-z} + C_2 e^{4z}$

अब विशेष समाकल (P.I.) $= \frac{1}{f(D)} e^{4z} = \frac{1}{D^2 - 3D - 4} e^{4z}$

यहाँ $f(4) = 0$

$\therefore$ $$\text{P.I.} = z\frac{1}{2D-3}e^{4z} \quad \text{[हर के अवकलन से]}$$

$$= z \times \frac{1}{2\times 4 - 3} e^{4z} \quad [z = 4 \text{ रखने पर}]$$

$$= \frac{1}{5} z e^{4z}$$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल $y = C_1 e^{-z} + C_2 e^{4z} + \frac{1}{5} z e^{4z}$

$$= C_1 x^{-1} + C_2 x^4 + \frac{1}{5} x^4 \log x \quad [\because e^z = x \Rightarrow z = \log x]$$

यह अभीष्ट हल है।

उदाहरण 2. हल करें :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 2\log x$$

[2008]

हल : दिया गया समीकरण $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 2\log x$ ...(1)

(1) में $x = e^z$ या $\log x = z, \frac{d}{dz} \equiv D,\ x\frac{dy}{dx} = Dy$ तथा $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$ रखने पर

$$[D(D-1) - D + 1]\, y = 2z$$

$\Rightarrow [D^2 - D - D + 1]\, y = 2z$ $\Rightarrow (D^2 - 2D + 1)\, y = 2z$

www.polytechnicpdf.com

सहायक समीकरण (A.E.) $m^2 - 2m + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad (m-1)^2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad m = 1, 1$

$\therefore$ पूरक फलन $y = (C_1 + C_2 z)\, e^z$

विशेष समाकल $= \dfrac{1}{f(D)}(2z) = \dfrac{1}{(D-1)^2}(2z) = \dfrac{1}{(1-D)^2}(2z)$

$= 2[1-D]^{-2}\, z = 2[1+D]\, z$ [शेष पद शून्य हैं]

$= 2[z + 2Dz] = 2[z+2]$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल $y = (C_1 + C_2 z)\, e^z + 2(2+z)$

$= (C_1 + C_2 \log x)\, e^{\log x} + 2(2 + \log x)$ [$\because z = \log x$]

$= (C_1 + C_2 \log x)\, x + 2(2 + \log x)$ [$\because e^{\log x} = x$]

उदाहरण 3. हल करें :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 2y = x \log x$$

[2000, 08, 15]

हल : प्रश्न से $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x \log x$ ...(1)

(1) में $x = e^z$ या $z = \log x$, $\dfrac{d}{dz} = D$, $x\dfrac{dy}{dx} = Dy$, $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)\,y$ रखने पर

$$\{D(D-1) - D + 2\}\, y = e^z z$$

$\Rightarrow \quad \{D^2 - D - D + 2\}\, y = z\, e^z \qquad \Rightarrow \quad (D^2 - 2D + 2)\, y = z\, e^z$

$\therefore$ सहायक समीकरण (A.E.) $m^2 - 2m + 2 = 0$

$\Rightarrow \quad m = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 2 \times 1}}{2 \times 1}$ [श्रीधराचार्य विधि से]

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{2}{2}(1 \pm \sqrt{-1}) = 1 \pm i$

$\therefore$ पूरक फलन (C.F.) $\quad y = e^z\,(C_1 \cos z + C_1 \sin z)$

विशेष समाकल (P.I.) $= \dfrac{1}{f(D)}\, ze^z = \dfrac{1}{D^2 - 2D + 2}\, z\, e^z$

$= e^z \left[\dfrac{1}{(D+1)^2 - 2(D+1) + 2}\right] z$ [$D = D + 1$ रखने पर]

$= e^z \left[\dfrac{1}{1 + D^2}\right] z = e^z\,[1 + D^2]^{-1}\, z = e^z\,[1 - D^2]\, z$ [शेष पद शून्य हैं]

$= e^z\,[z - D^2 z] = e^z \times (z - 0) = z\, e^z$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल $y = e^z\,(C_1 \cos z + C_2 \sin z) + z\, e^z$

$= x\,(C_1 \cos(\log x) + C_2 \sin(\log x) + x \log x$ [z तथा x का मान रखने पर]

उदाहरण 4. हल करें :

$$x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x^2 \log x$$

www.polytechnicpdf.com

हल : दिया गया समीकरण $x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x^2 \log x$

$$\Rightarrow \quad x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = x^3 \log x \qquad \ldots(1)$$

[x से गुणा करने पर]

(1) में $x = e^z$ या $z = \log x$, $\frac{d}{dx} \equiv D$, $x\frac{dy}{dx} = Dy$; $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$;

तथा $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$ रखने पर, $[D(D-1)(D-2) + 3D(D-1)y + D]y = z e^{3z}$

$\Rightarrow$ $[D^3 - 2D^2 - D^2 + 2D + 3D^2 - 3D - D]y = ze^{3z}$ $\qquad \therefore D^3y = z e^{3z}$

$\therefore$ सहायक समीकरण (A.E.) $m^3 = 0 \qquad \Rightarrow m = 0, 0, 0$

$\therefore$ पूरक फलन $= (C_1 + C_2 z + C_3 z^2) e^0 = C_1 + C_2 z + C_3 z^2$ $\qquad [\because e^0 = 1]$

तथा विशेष समाकल (P.I.) $= \frac{1}{f(D)} z e^{3z} = \frac{ze^{3z}}{D^3} = e^{3z} \frac{1}{(D+3)^3} z$ $\qquad$ [$D = D + 3$ रखने पर]

$$= e^{3z} \frac{1}{3^3\left[1+\frac{D}{3}\right]^3} z = \frac{1}{27} e^{3z} \left[1 + \frac{D}{3}\right]^{-3} z$$

$$= \frac{1}{27} e^{3z} [1 - D] z \qquad \text{[शेष पद शून्य हैं]}$$

$$= \frac{1}{27} e^{3z} [z - Dz] = \frac{1}{27} e^{3z} [z - 1]$$

$\therefore$ सम्पूर्ण हल (C.S.) $= C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + \frac{1}{27} e^{3z} (z - 1)$

$$= C_1 + C_2 \log x + C_3 (\log z)^2 + \frac{x^3}{27} (\log x - 1) \qquad [\because x = \log z \Rightarrow e^z = x]$$

स्मरणीय तथ्य

समघात अवकल समीकरण, जो

$$x^n \frac{d^ny}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_1 x^{n-2} \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = X$$

के रूप के हों तो हल करने के लिए $x = e^z$ या $\log z = e^x$ तथा

$$= x\frac{dy}{dx} = Dy, x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y, \ldots, x^n \frac{d^ny}{dx^n}$$

$$= D(D-1)(D-2)\ldots\{D-(n-1)\} y \text{ रखें}$$

जहाँ $\frac{d}{dz} \equiv D$

इससे समीकरण $(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + D_n) y = f(z)$ के रूप का हो जाएगा, जिसे पिछली धाराओं के अनुसार हल किया जा सकता है।

www.polytechnicpdf.com

प्रश्नावली 5.4

निम्न अवकल समीकरणों को हल कीजिए—

1. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

2. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$

3. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = 2x^2$ **[2014]**

4. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = x^2$

5. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} + 13y = \log x$

6. $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 + x$

7. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 3y = x^2 \log x$

8. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2y = x\log x$ **[2015]**

9. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 2\log x$ **[2011]**

उत्तरमाला

1. $y^2 = (C_1 + C_2 \log x)\frac{1}{x^2}$

2. $C_1 x^2 + C_2 x^{-2}$

3. $y = \{C_1 + C_2 \log x + (\log x)^2\}x^2$

4. $y = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^2} + \frac{1}{4}x^2 \log x$

5. $y = x^{-3}\left[C_1 \cos(2\log x) + C_2 \sin(2\log x) + \frac{1}{13}\left(\log x - \frac{6}{13}\right)\right.$

6. $y = C_1 x + C_2 \cos(\sqrt{3}\log x) + C_3 \sin(\sqrt{3}\log x) + \frac{1}{7}x^2 + \frac{1}{4}x\log x$

7. $y = C_1 x^3 + C_2 x^{-1} - \frac{1}{3}x^2\left(\log x + \frac{2}{3}\right)$

8. $x[C_1 \cos(\log x) + C_2 \sin(\log x) + \log x]$

9. $(C_1 + C_2 \log x)x + 2(2 + \log x)$

□□□

www.polytechnicpdf.com

6

CHAPTER

अवकल समीकरण के अनुप्रयोग (Applications of Differential Equations)

अवकल समीकरण का प्रयोग भौतिक शास्त्र एवं इंजीनियरिंग की विभिन्न शाखाओं में गणितीय समस्याओं के निदान के लिए होता है। इस अध्याय में विद्युत परिपथ, गुरुत्वीय त्वरण के अधीन गति, रेडियोऐक्टिव पदार्थों के क्षय, जनसंख्या वृद्धि आदि की गणितीय समस्याओं में अवकल समीकरण के प्रयोग के बारे में जानेंगे।

6.1 विद्युत परिपथ

हम उस विद्युत परिपथ पर विचार करेंगे, जिसमें

(i) वोल्टेज स्रोत (Source of Voltage) यथा—बैटरी या जेनरेटर

(ii) प्रतिरोध (Resistance), प्रेरकत्व (Inductance) तथा धारिता (Capacitance) हो।

किसी विद्युत परिपथ में समीकरणों की रचना करते समय सामान्यत: निम्न प्रतीकों (Symbols) तथा प्रमुख विद्युतीय संबंधों का ज्ञान आवश्यक है :

क्रम.सं०		संकेत	इकाई
1.	आवेश (Charge)	q	कूलॉम (coulomb) (C)
2.	धारा (Current)	i	ऐम्पियर (ampere) (A)
3.	प्रतिरोध (Resistance)	R	ओम (ohm) (Ω)
4.	प्रेरकत्व (Inductance)	L	हेनरी (henry) (H)
5.	धारिता (Capacitance)	C	फैराड (farad) (F)
6.	विद्युत धारा (E.M.F.) या वोल्टता (Voltage)	E	वोल्ट (volt) (V)

6.2 प्रमुख सम्बन्ध (Important Relations)

(i) विद्युत धारा $i = \dfrac{dq}{dt}$

(ii) प्रतिरोध R के अनुदिश वोल्टता ड्रॉप $E_r = iR$

(iii) प्रेरकत्व L के अनुदिश वोल्टता ड्रॉप $E_L = L\dfrac{di}{dt} = L\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dq}{dt}\right) = L\dfrac{d^2q}{dt^2}$

(iv) धारिता C के अनुदिश विभव ह्रास $E_c = \dfrac{q}{C}$

www.polytechnicpdf.com

6.3 विद्युत परिपथ के लिए मूल नियम (Basic Laws)

ये निम्न किरचॉफ के नियमों से दिये जाते हैं—

I. वोल्टेज नियम (Voltage Law) : किसी बंद परिपथ के विभिन्न भागों में विभव के ह्रास का बीजगणितीय योग उस परिपथ में परिणामी विद्युत वाहक बल के बराबर होता है।

II. धारा नियम (Current Law) : किसी भी संधि (Junction) या नोड (Node) पर मिलने वाली समस्त धाराओं का बीजगणितीय योग शून्य होता है।

6.4 अवकल समीकरण बनाना (Formation of Differential Equation)

किसी विद्युत परिपथ में अवकल समीकरण का निर्माण किरचॉफ नियमों पर आधारित है।

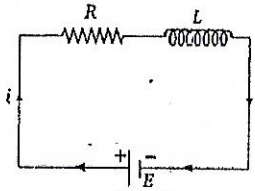
6.4.1 *L-R* श्रेणी परिपथ (*L-R* Series Circuit)

माना विद्युत परिपथ में प्रेरकत्व L, प्रतिरोध R तथा वोल्टेज स्रोत E चित्रानुसार (चित्र 1) श्रेणी क्रम में जुड़े हैं। माना समय t पर उसमें प्रवाहित धारा i से दी जाती है, तो वोल्टेज नियम से

$$E_R + E_L = E$$

$$\Rightarrow \quad iR + L\frac{di}{dt} = E \qquad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \qquad \ldots(1)$$

यह एक रैखिक अवकल समीकरण है।



L-R श्रेणी परिपथ

$\therefore$ समाकलन गुणांक $(\text{I.F.}) = e^{\int \frac{R}{L}dt} = e^{\frac{R}{L}t}$

$\therefore$ (1) का हल $e^{\frac{R}{L}t} \times i = \int \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L}t} dt + C$

$$\Rightarrow \quad i\, e^{\frac{R}{L}t} = \frac{E}{L} \times \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C$$

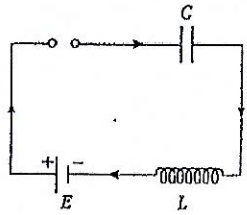
$$\Rightarrow \quad i = \frac{E}{R} + C\, e^{-\frac{R}{L}t} \qquad \ldots(2)$$

अब $t = 0$ पर $i = 0$ अतः (2) से $C = -\frac{E}{R}$ $\qquad \therefore \quad i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$

स्पष्ट है कि t के मान में वृद्धि से i के मान में वृद्धि होती है तथा इसका अधिकतम मान $\frac{E}{R}$ होता है।

6.4.2 *L-C* श्रेणीक्रम परिपथ (*L-C* Series Circuit) :

माना किसी परिपथ में संधारित्र C, प्रतिरोध रहित प्रेरकत्व कुण्डली (Inductance) L तथा सेल E श्रेणीक्रम में चित्रानुसार जुड़े हैं। यदि संधारित्र पर आवेश q हो तथा t समय में L प्रवाहित धारा i हो, तो प्रेरकत्व में प्रेरित विद्युत वाहक बल का मान $L\frac{di}{dt}$ होगा।



अतः किरचॉफ नियम से

$$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

या $$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 \qquad \left[\because i = \frac{dq}{dt}\right]$$

www.polytechnicpdf.com

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{LC}=0 \qquad \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2}+\omega^2 q=0, \qquad \text{जहाँ } \frac{L}{LC}=\omega^2$$

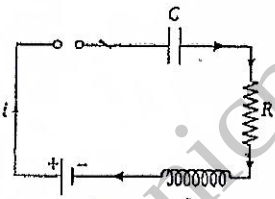
6.4.3 *L-C-R* श्रेणी परिपथ (*L-C-R* Series Circuit) :

माना किसी विद्युत परिपथ में प्रेरकत्व (Inductance) L, प्रतिरोध (Resistance) R तथा धारिता C तथा वोल्टेज स्रोत E चित्रानुसार श्रेणी क्रम में जुड़े हैं,

तो किरचॉफ नियम से

$$E_R+E_L+E_C=E \qquad [\because R, L, C \text{ के अनुदिश वोल्टेज ड्रॉप} = E]$$

$$\Rightarrow \quad Ri+L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=E \qquad [E_R, E_L \text{ तथा } E_c \text{ का मान रखने पर}]$$



L-C-R श्रेणी परिपथ

$$\Rightarrow \quad R\frac{dq}{dt}+L\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right)+\frac{q}{C}=E \qquad \left[\because i=\frac{dq}{dt}\right]$$

$$\Rightarrow \quad L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E$$

यह *L-C-R* परिपथ का रैखिक समीकरण है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. 100 ओम के प्रतिरोध, 0.5 हेनरी के प्रेरकत्व (Inductance) को 20 वोल्ट की बैट्री के साथ श्रेणी क्रम में जोड़ दिया गया है। परिपथ में धारा i का मान समय t के फलन के रूप में ज्ञात करें।

हल : किरचॉफ के प्रथम नियम से

$$Ri+L\frac{di}{dt}=E$$

यह एक रैखिक समीकरण है, जिसका हल

$$i=\frac{E}{R}[1-e^{\frac{R}{L}t}] \qquad \ldots(1)$$

[धारा 6.4.1 से]

यहाँ $R=100$ ओम, $L=0.5$ हेनरी, $E=20$ वोल्ट

(1) में इन मानों को रखने पर

$$i=\frac{20}{100}[1-e^{\frac{100}{0.5}t}]=\frac{1}{5}[1-e^{\frac{100\times 10}{5}t}]$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \frac{E}{5}[1 - e^{-2(0)t}]$$ उत्तर

उदाहरण 2. 200 ओम का प्रतिरोध R 100 हेनरी (H) का प्रेरकत्व L तथा 400 वोल्ट की बैटरी श्रेणी क्रम में जुड़े हैं, तो किसी क्षण 0.5 सेकण्ड पश्चात् परिपथ में प्रवाहित धारा का मान ज्ञात करें। ($e = 2.718$)

हल : किरचॉफ नियम से

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E$$

यह एक रैखिक समीकरण है, जिसका हल

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad \ldots(1)$$

प्रश्न से $R = 200$ ओम, $L = 100$ हेनरी, $E = 400$ वोल्ट, $t = 0.5$ सेकण्ड

अतः (1) से

$$i = \frac{400}{200}(1 - e^{-\frac{200}{100}\times 0.5})$$

$$= 2(1 - e^{-1}) = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2.718}\right)$$

$$= 2(1 - 0.37) = 2 \times 0.63 = 1.26 \text{ ऐम्पियर}$$

उदाहरण 3. हल करें :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sin \omega t$$

जहाँ L, R तथा E_0 अचर हैं। उस स्थिति को स्पष्ट करें जब i का मान अनिश्चित रूप से (indefinitely) बढ़ रहा है।

हल : दिया गया समीकरण

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_0}{L}\sin \omega t \quad \ldots(1)$$

यह एक रैखिक समीकरण है।

अतः समाकलन गुणांक (I.F.) $= e^{\int \frac{R}{L}dt} = e^{\frac{R}{L}t}$

अतः (1) को I.F. $e^{\frac{R}{L}t}$ से गुणा कर समाकलन करने पर

$$i e^{\frac{R}{L}t} = \frac{E_0}{L}\int e^{\frac{R}{L}t} \sin \omega t \, dt$$

$$= \frac{E_0}{L} \frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2}} \sin\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{L\omega}{R}\right) - A$$

$$\left[\because \text{ सूत्र } \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin\left(bx - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right)\right]$$

www.polytechnicpdf.com

या $i = \frac{E_0 L}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \sin\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{L\omega}{R}\right) + A e^{-\frac{R}{L}t}$

यह अभीष्ट हल है।

अब जब $t \to \infty$, $A e^{-\frac{R}{L}t} \to 0$

$\therefore \quad i = \frac{E_0 L}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \sin\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{L\omega}{R}\right)$

6.5 गुरुत्वीय गति (Motion Under Gravity)

यदि कोई पिंड गुरुत्व बल के अधीन ऊर्ध्वाधर (vertical) रूप से गतिशील हो तो उस पर दो बल कार्य करते हैं :

(i) पिंड का भार नीचे की ओर तथा (ii) वायुमंडल का प्रतिरोध

वायुमंडल का प्रतिरोध पिंड की गति की विपरीत दिशा में (अर्थात् यदि पिंड नीचे गिर रहा है तो ऊपर की दिशा में तथा यदि पिंड ऊपर की ओर गतिशील है तो नीचे की दिशा में) कार्य करता है।

यदि पिंड क्षैतिज दिशा में गतिशील हो तो केवल एक बल, माध्यम (वायुमंडल या अन्य माध्यम) का प्रतिरोध उसकी गति की विपरीत दिशा में कार्य करता है।

गुरुत्वाधीन गिरते हुए पिंड की गति एक निश्चित सीमा के बाद स्थिर हो जाती है। यह नियत वेग **सीमान्त वेग** (Limiting Velocity) या **अंतिम वेग** (Terminal Velocity) के नाम से जाना जाता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. एक पिंड, जो गुरुत्वाधीन बल के अधीन गिर रहा है, पर वायुमंडल का प्रतिरोध क्रियाशील है। यदि यह प्रतिरोध वेग के साथ बढ़ता है, तो दिखायें कि

(i) गति का समीकरण $\frac{du}{dt} = g - ku$

जहाँ u वेग, g गुरुत्वीय त्वरण तथा k अचर है,

(ii) t के मान में वृद्धि होने पर u का मान g/k हो जाता है।

(iii) यदि $u = \frac{dx}{dt}$, जहाँ x विराम से t समय में तय की गई दूरी है, तो

$$x = \frac{gt}{k} - \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt})$$

हल : माना इकाई द्रव्यमान का पिंड जो गुरुत्व के अधीन गिर रहा है तथा t समय बाद इसका वेग u है, तो त्वरण $= \frac{du}{dt}$

पिंड पर नीचे की ओर लगने वाला बल $= 1 . \frac{du}{dt}$ [$\because$ बल $= m \times f$ यहाँ $m = 1, f = \frac{du}{dt}$]

प्रश्न से प्रतिरोधी बल $\propto u$

$\Rightarrow$ प्रतिरोधी बल (ऊपर की ओर क्रियाशील) $= ku$

$\therefore$ नीचे की ओर लगता हुआ कुल बल $= g - ku$

$\therefore \quad \frac{du}{dt} = g - ku$ ...(1)

सिद्ध हुआ।

www.Polytechnicpdf.com

(ii) (1) से

$$\frac{du}{g-ku} = dt \qquad \Rightarrow \int \frac{du}{g-ku} = \int dt$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{-1}{k}\log(g-ku) + \log a = \log\{(g-ku)^{-1/k}\, a\}$$

$$\Rightarrow \quad e^t = (g-ku)^{-1/k}\, a = \frac{a}{(g-ku)^{1/k}} \qquad \Rightarrow \quad (g-ku)^{1/k} = a\, e^{-t}$$

$$\Rightarrow \quad g - ku = (a\, e^{-t})^k = a^k e^{-kt} \qquad \Rightarrow \quad u = \frac{g}{k} - \frac{a^k}{k} e^{-kt} \qquad \ldots(2)$$

अब $t \to \infty, \frac{a^k}{k} e^{-kt} \to 0$

$\therefore \quad u = \frac{g}{k}$ [(2) से] सिद्ध हुआ।

(iii) पुन: $u = \frac{dx}{dt} \qquad \Rightarrow \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

अत : (1) से

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} = g$$

$$\Rightarrow \quad (D^2 + kD)\, x = g, \qquad \text{जहाँ } \frac{d}{dt} = D$$

अत: सहायक समीकरण $m^2 + km = 0$

$\Rightarrow \quad m(m+k) = 0 \qquad \Rightarrow \quad m = 0, m = -k$

अत: पूरक फलन (C. F.) : $x = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-kt}$ या $x = C_1 + C_2\, e^{-kt}$

विशेष समाकल (P. I.) $= \frac{1}{D^2 + kD} g = g \frac{1}{D^2 + kD} e^{0t}$

$$= g\, t \frac{1}{2D + k} e^{0t} \qquad [\because D = 0 \text{ रखने पर } f(D) = 0]$$

$$= \frac{gt}{0 + k} = \frac{gt}{k} \qquad [D = 0 \text{ रखने पर}]$$

$\therefore$ अभीष्ट हल $x = C_1 + C_2 e^{-kt} + \frac{gt}{k}$ ...(3)

अब $t = 0$ पर $x = 0$ अत: (3) से

$$0 = C_1 + C_2 \times 1 + 0 \qquad \therefore \quad C_2 = -C_1$$

अत: (3) से

$$x = C_1 - C_1\, e^{-kt} + \frac{gt}{k} \qquad \ldots(4)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = kC_1\, e^{-kt} + \frac{g}{k} \qquad [\text{अवकलन से}] \qquad \ldots(5)$$

पुन: $t = 0$ पर $\frac{dx}{dt} = 0$

www.polytechnicpdf.com

अतः (4) से

$$0 = kC_1 \times e^{0t} + \frac{g}{k} \qquad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{g}{k^2}$$

अतः (4) से

$$x = -\frac{g}{k^2} + \frac{g}{k^2} e^{-kt} + \frac{gt}{k}$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{gt}{k} - \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt})$$ साबित हुआ।

6.6 सरल आवर्त गति (Simple Harmonic Motion)

यदि कोई कण एक सरल रेखा पर इस प्रकार गतिमान हो कि इस पर लगने वाला बल सदैव एक बिंदु की ओर लगे तथा इस बिंदु से कण की दूरी के समानुपाती हो, तो कण सरल आवर्त गति में कहलाता है तथा यह निश्चित बिंदु दोलन केन्द्र (Centre of Oscillation) कहलाता है।

माना O दोलन केन्द्र है, तथा कण बिन्दु A से जो O से a दूरी पर है, विराम अवस्था से O की ओर गति आरंभ करता है। माना t समय बाद यह बिन्दु P पर है जो O से x दूरी पर है।

अतः सरल आवर्त गति की परिभाषा से

$$\frac{d^2x}{dt^2} \propto -x \qquad [\because \text{ त्वरण } O \text{ से दूरी के अनुक्रमानुपाती है}]$$

या $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,$$

जहाँ ω^2 समानुपाती नियतांक है तथा –ve चिन्ह त्वरण गति की विपरीत दिशा को बताता है।

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$ जो एक रैखिक अवकल समीकरण है।

अतः सहायक समीकरण $D^2 + \omega^2 = 0 \;\Rightarrow\; D = \pm \omega i$

$\therefore$ हल $x = C_1 \cos\omega t - C_2 \sin\omega t$ ...(i)

$\therefore$ $\frac{dx}{dt} = P$ पर कण का वेग $= \omega(-C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t)$ ...(ii)

यदि कण A से गति प्रारम्भ करता है, तो

$$t = 0 \text{ पर } x = a \text{ तथा } \frac{dx}{dt} = 0$$

अतः (i) से

$$a = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1 \times 1 = 0 + C_1 \; i.e., C_1 = a$$

तथा (ii) में $\frac{dx}{dt} = 0$ तथा $t = 0$ रखने पर

$$0 = 0 + C_2\omega \;\Rightarrow\; C_2 = 0$$

अतः (i) से

विस्थापन $x = a\cos\omega t$ ...(iii)

www.Polytechnicpdf.com

यदि कण दोलन केन्द्र O से गति प्रारम्भ करता है, तो

$t = 0$ पर $x = 0$ तथा $\frac{dx}{dt} = 0$

अतः (ii) तथा (iii) से $C_1 = 0, C_2 = a$

यह मान समी० (ii) में रखने पर

विस्थापन $x = a \sin \omega t$ ...(iv)

कण का वेग $V = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t$ [समी० (iii) से]

$= a\omega \cos \omega t$ [समी० (iv) से]

या $V = \omega \sqrt{a^2 - x^2}$ $\left[\because x = a \cos \omega \Rightarrow \frac{x}{a} = \cos \omega\right]$

6.6.1 परिभाषायें (Definitions)

आयाम (Amplitude) : सरल आवर्त गति में गतिशील कण का अपनी साम्य स्थिति से अधिकतम विस्थापन उसका आयाम कहलाता है।

चित्र में $OA = OA' = a$

आवर्तकल (Time Period) : सरल आवर्त गति से गतिशील कण द्वारा एक पूर्ण दोलन में लगे समय को उसका आवर्तकाल कहते है।

यदि आवर्तकाल T हो तो

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

आवृत्ति (Frequency) : सरल आवर्त गति में गतिशील कण के द्वारा एक सेकेण्ड में पूर्ण दोलनों की संख्या उसकी आवृत्ति कहलाती है। यदि आवर्तकाल के व्युत्क्रम के बराबर होती है तथा इसकी इकाई हर्ट्ज (Hz) है।

अतः आवृति $n = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega}{2\pi}$ Hz

स्पष्टतः $\omega = 2\pi n$

महत्वपूर्ण सूत्र :

(i) आवर्तकाल $T = \frac{2\pi}{\omega}$

(ii) आवृत्ति $n = \frac{\omega}{2\pi}$

(iii) सरल आवर्त गति का समीकरण $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

(iv) दोलन केन्द्र से x दूरी पर समय t पर वेग

$V = \omega \sqrt{a^2 - x^2}$, जहाँ $x = a \cos \omega t$

अधिकतम वेग $V_{max} = a\omega$

अधिकतम त्वरण $\alpha = \omega^2 a$

www.polytechnicpdf.com

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. सरल आवर्त गति में कण के मूल बिन्दु से कितने विस्थापन पर गति अधिकतम गति की आधी होगी?

हल : यदि सरल आवर्त गति में वेग V हो, तो

$$V = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$$

अत: $x = 0$ के लिए V का मान अधिकतम है

$\therefore$ अधिकतम वेग $V = a\omega$

माना $x = x_1$ पर V का मान अधिकतम वेग का आधा है,

अत: $\dfrac{\omega a}{2} = \omega\sqrt{a^2 - x_1^2}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{a^2}{4} = a^2 - x_1^2 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

अत: मूल बिन्दु से $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ दूरी पर कण का वेग अधिकतम वेग का आधा है।

उदाहरण 2. एक कण को जो सरल आवर्त गति कर रहा है, तीन उत्तरोत्तर सेकण्डों में अंत में माध्य स्थिति से दूरियाँ x_1, x_2, x_3 हैं, तो सिद्ध करें, संपूर्ण दोलन काल का समय $\dfrac{2x}{\cos^{-1}\left\{\dfrac{x_1 + x_3}{2x_2}\right\}}$ है। **[2014]**

हल : माना कण t सेकेण्ड के बाद मूल बिन्दु से x दूरी पर है, तो $x = a\cos\omega t$

माना तीन उत्तरोतर सेकण्ड क्रमश: $t, t+1$ तथा $t+2$ से दिए जाते हैं।

अत: $x_1 = a\cos\omega t,\ x_2 = a\cos\omega(t+1),\ x_3 = a\cos\omega(t+2)$

अब $x_1 + x_3 = a\{\cos\omega t + \cos\omega(t+2)\}$

$$= a\left[2\cos\left\{\frac{\omega t + \omega(t+2)}{2}\right\}.\cos\left\{\frac{\omega t - \omega(t+2)}{2}\right\}\right]$$

$$\left[\because \cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}.\cos\frac{C-D}{2}\right]$$

$$= 2a\cos\omega(t+1).\cos\omega = 2x_2\cos\omega \qquad [\because x_2 = a\cos\omega(t+1)]$$

$\therefore \quad \cos\omega = \dfrac{x_1 + x_3}{2x_2} \quad$ या $\quad \omega = \cos^{-1}\dfrac{x_1 + x_3}{2x_2}$

$\therefore$ सम्पूर्ण दोलन काल $= \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\cos^{-1}\dfrac{x_1 + x_3}{2x_2}}$

उदाहरण 3. सरल आवर्त गति करते हुए कण की साम्य स्थिति से 3 सेमी दूरी पर त्वरण 12 सेमी/से^{2} है। इसका आवर्तकाल ज्ञात करें।

हल : यहाँ त्वरण $f = 12$ सेमी/से^{2}, साम्य स्थिति से विस्थापन $= a$

$\therefore$ त्वरण $f = \omega^2 a \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \dfrac{f}{a} = \dfrac{12}{3} = 4 \quad \Rightarrow \quad \omega = 2$

$\therefore$ आवर्तकाल $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2 \times 3.14}{2} = 3.14$ सेकेण्ड।

www.polytechnicpdf.com

6.7 न्यूटन का शीतलन नियम (Newton's Law of Cooling)

कथन (Statement) : किसी माध्यम से घिरे पिंड के तापमान (Temperature) परिवर्तन की दर उस पिंड के तापमान तथा उस माध्यम के तापमान के अंतर के समानुपाती होती है।

अत: यदि किसी समय t पर किसी पिंड का तापमान T तथा उसको घेरने वाले माध्यम का तापक्रम S हो तो

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - S)$$

अर्थात् $\frac{dT}{dt} = -k(T - S)$, जहाँ k एक नियतांक है तथा $k > 0$.

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. एक पिण्ड जिसका प्रारंभिक तापमान 80° C है, 20 मिनट बाद 60° C पर पहुँच जाता है जबकि वायु का तापमान 40° C है। प्रारंभिक स्थिति से 40 मिनट बाद पिंड का तापमान क्या होगा ? **[2005]**

हल : यदि समय t पर पिंड का तापमान T तथा वायु का ताप S हो, तो

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - S) \quad \text{या} \quad \frac{dT}{T - S} = -k$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T - 40} = -k \qquad [\because S = 40°\text{C}]$$

$$\Rightarrow \int \frac{dt}{T - 40} = -k \int dt \qquad \Rightarrow \log(T - 40) = -kt + \log c$$

$$\Rightarrow \log \frac{T - 40}{c} = -kt \qquad \left[\because \log m - \log n = \log \frac{m}{n}\right]$$

$$\Rightarrow T - 40 = c\,e^{-kt} \qquad \ldots(1)$$

अब $t = 0, T = 80°$

(1) में यह मान रखने पर

$$80 - 40 = c\,e^{-k \times 0} \Rightarrow c = 40$$

पुन: $t = 20$ तो $T = 60°$

अत: $60 - 40 = 40\,e^{-20k}$ [(1) से]

$$\Rightarrow \frac{20}{40} = e^{-20k} \qquad \Rightarrow \log \frac{20}{40} = -20k$$

$$\Rightarrow \log 1 - \log 2 = -20k \qquad \Rightarrow k = \frac{1}{20} \log 2 \qquad [\because \log 1 = 0]$$

अत: (1) से

$$T - 40 = 40\,e^{-\left(\frac{1}{20}\log 2\right)t} \qquad \ldots(2)$$

अत: जब $t = 40$ मिनट, तो (2) से

$$T = 40 + 40\,e^{-\frac{1}{20}\log 2 \times 40} = 40 + 40\,e^{-2\log 2}$$

$$= 40 + 40\,e^{\log \frac{1}{2^2}} = 40 + 40 \times \frac{1}{4} \qquad [\because e^{\log f(x)} = f(x)]$$

$$= 40 + 10 = 50°\text{C}$$

उत्तर

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 2. कमरे में एक थर्मामीटर की प्रारम्भिक पाठ्यांक 80° F है, जो अगले 5 मिनटों में 60° F तथा उसके अगले 5 मिनटों में से 50° F हो जाता है, तो कमरे का तापक्रम बताइये।

हल : माना किसी समय t पर थर्मामीटर का पाठ्यांक $T°$ F तथा कमरे का तापक्रम $S°$ F है, तो न्यूटन शीतलीकरण नियम से

$$\frac{dT}{dt} \propto (T-S) \qquad \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -k(T-S)$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T-S} = -k\,dt \qquad \Rightarrow \int \frac{1}{T-S}\,dt = -k\int dt$$

$$\Rightarrow \log(T-S) = -kt + c \qquad \ldots(1)$$

अब $t=0$ पर $T=80°$ $\qquad \therefore \log(80°-S) = -k\times 0 + c$ [(1) से]

$\Rightarrow c = \log(80°-S)$

(1) में यह मान रखने पर

$$\log(T-S) = -kt + \log(80°-S) \Rightarrow \log\frac{T-S}{80-S} = -kt \qquad \ldots(2)$$

पुनः जब $t=5, T=60°$ तथा जब $t=10, T=50°$

$$\log\frac{60-S}{80-S} = -5k \qquad \text{तथा} \quad \log\frac{50-S}{80-S} = -10k = 2\times(-5k)$$

$$\therefore \quad \log\frac{50-S}{80-S} = 2\log\frac{60-S}{80-S} = \log\left(\frac{60-S}{80-S}\right)^2 \qquad [\because n\log m = \log m^n]$$

$$\Rightarrow \frac{50-S}{80-S} = \left(\frac{60-S}{80-S}\right)^2 \qquad \Rightarrow (60-S)^2 = (50-S)(80-S)$$

$$\Rightarrow 3600 - 120S + S^2 = 4000 - 50S - 80S + S^2$$

$$\Rightarrow 130S - 120S = 4000 - 3600 \qquad \Rightarrow 10S = 400$$

$$\therefore \quad S = \frac{400}{10} = 40° \text{ F}$$

अतः कमरे का तापक्रम 40° F है। उत्तर

6.8 रेडियोएक्टिव क्षय (Radioactive Decay)

रेडियोएक्टिव पदार्थों का नाभिक (Nucleus) अस्थिर होता है। इससे α, β, γ किरणों का उत्सर्जन होता रहता है। यह क्षय (Decay) कहलाती है। यह उत्सर्जन तब तक जारी रहता है, जब तक नाभिक को स्थायित्व न मिल जाए तथा स्थाई तल न प्राप्त हो जाए। क्षय की यह क्रिया निम्नलिखित गणितीय नियम के अनुसार होती है।

नियम : किसी क्षण रेडियोएक्टिव पदार्थों के क्षय की दर उस क्षण उस तत्व की मात्रा के समानुपाती होती है।

यदि किसी समय t पर रेडियोऐक्टिव तत्व की मात्रा m हो, तो

$$\frac{dm}{dt} \propto m \Rightarrow \frac{dm}{dt} = -\lambda m, \text{ जहाँ } \lambda \text{ नियतांक है तथा } \lambda > 0$$

नोट :

- ऋणात्मक चिह्न बताता है कि समय के साथ m के मान में कमी हो रही है।

www.polytechnicpdf.com

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. यूरेनियम के विघटन की दर उस क्षण मौजूद उसकी मात्रा के समानुपाती होती है। यदि समय t_1 तथा t_2 पर m_1 तथा m_2 ग्राम यूरेनियम उपस्थित हों तो दिखायें कि यूरेनियम का अर्द्ध-आयु $(t_1 - t_2)\log 2/\log\frac{m_1}{m_2}$ होगी। **[2015]**

हल : माना किसी समय t पर यूरेनियम की मात्रा m है, तो विघटन नियम से

$$\frac{dm}{dt} = -km \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dm}{m} = -k\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{m_1}^{m_2}\frac{dm}{m} = -k\int_{t_1}^{t_2} dt \qquad \Rightarrow \qquad [\log m]_{m_1}^{m_2} = -k[t]_{t_1}^{t_2}$$

$$\Rightarrow \log\frac{m_1}{m_2} = -k(t_2 - t_1) \qquad \ldots(1)$$

माना t समय पश्चात् यूरेनियम की मात्रा घटकर $\frac{m}{2}$ हो जाती है, तो

$$\int_{m}^{m/2}\frac{dm}{m} = -k\int_0^t dt \qquad \Rightarrow \qquad [\log m]_m^{m/2} = -k[t]_0^t$$

$$\Rightarrow \log\frac{m}{2} - \log m = -kt \qquad \Rightarrow \qquad \log m - \log 2 - \log m = -kt$$

$$\Rightarrow kt = \log 2 \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{\log 2}{t}$$

k का मान (1) में रखने पर

$$\log\frac{m_1}{m_2} = \frac{\log 2}{t}(t_2 - t_1)$$

$$\Rightarrow t = (t_2 - t_1)\log 2/\log\frac{m_1}{m_2}$$

$\therefore$ यूरेनियम की अर्द्ध-आयु $t = \dfrac{(t_2 - t_1)}{\log\frac{m_1}{m_2}}\log 2$

उदाहरण 2. एक रेडियोएक्टिव पदार्थ की सक्रियता 100 वर्षों में घटकर प्रारम्भिक मात्रा का $\frac{1}{4}$ रह जाती है, तो उस पदार्थ का अर्द्ध-आयु काल बतायें।

हल : माना अर्द्ध-आयु काल $= t$, तो $t = \dfrac{t_2 - t_1}{\log\frac{m_1}{m_2}}\log 2$ [सूत्र] ...(1)

प्रश्न से, $t_2 - t_1 = 100$ वर्ष

यदि $m_1 = m$ हो तो $m_2 = \frac{m}{4}$

$\therefore$ (1) से

www.polytechnicpdf.com

$$t = \frac{100}{\log \frac{m}{m/4}} \log 2 = \frac{100}{\log 4} \log 2 = \frac{100}{\log 2^2} \times \log 2 = \frac{100}{2 \log 2} \times \log 2 = 50 \text{ वर्ष}$$

6.9. जनसंख्या वृद्धि दर (Population Growth Rate)

जनसंख्या वृद्धि दर जनसंख्या के समानुपाती होती है

माना किसी समय t पर देश की जनसंख्या P है, तो

$$\frac{dP}{dt} \propto P$$

$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = kP$, जहाँ k समानुपाती नियतांक है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. किसी कॉलोनी की जनसंख्या 50 दिनों में दुगुनी हो जाती है, तो कितने दिनों में यह तिगुनी हो जायेगी ?

हल : माना प्रारम्भिक जनसंख्या $P_0 = x$ तथा t दिनों बाद जनसंख्या $P_1 = y$

तो $\frac{dy}{dt} \propto y \Rightarrow \frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{dy}{y} = k\,dt$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = k \int dt \qquad \Rightarrow \log y = kt + c \qquad \ldots(1)$$

जब $t = 0, y = x$

$\therefore \quad \log x = k \times 0 + c$ [(1) से]

$\Rightarrow \quad c = \log x$

(1) में यह मान रखने पर

$$\log y = kt + \log x \Rightarrow \log y - \log x = kt$$

$$\Rightarrow \log \frac{y}{x} = kt \qquad \therefore \quad t = \frac{1}{k} \log \frac{y}{x} \qquad \ldots(2)$$

पुनः जब $t = 50, y = 2x$

$$\therefore \quad 50 = \frac{1}{k} \log \frac{2x}{x} \Rightarrow 50 = \frac{1}{k} \log 2$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{1}{50} \log 2$$

माना t_1 समय बाद जनसंख्या तिगुनी हो जाती है

अर्थात् जब $t = t_1, y = 3x$, तो (2) से

$$t_1 = \frac{1}{\frac{1}{50} \log 2} \log \frac{3x}{x} \qquad \left[\because k = \frac{1}{50} \log 2\right]$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = 50 \frac{\log 3}{\log 2}$$

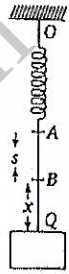
अतः आबादी $50 \frac{\log 3}{\log 2}$ दिनों में तिगुनी हो जाएगी।

www.polytechnicpdf.com

6.10 स्प्रिंग के दोलन (Oscillations of a Spring) :

मुक्त दोलन : किसी दोलन करने वाली वस्तु को उसकी साम्यावस्था से विस्थापित कर विस्थापन बल हटा लिया जाए, तो वह निश्चित आवृत्ति से दोलन करने लगती है। वस्तु का वह दोलन मुक्त दोलन कहलाता है।

(a) (i) मुक्त दोलन (डैम्पिंग प्रभाव रहित) [Free Oscillation (without Damping effect)] : माना एक भार-रहित स्प्रिंग का एक सिरा बिंदु O से जुड़ा है तथा दूसरे सिरे A से m द्रव्यमान का एक पिंड लटक रहा है।



माना इस पिंड के द्रव्यमान m के कारण स्प्रिंग की लम्बाई में वृद्धि s है जो चित्र में AB से दिखाई गई है। माना प्रत्यास्थता के कारण प्रत्यानयन बल (Rstoring Force) k हो, तो B पर संतुलन की अवस्था में

$$mg = ks \qquad \ldots(1)$$

माना t समय बाद पिंड Q तक विस्थापित हो जाता है, जिससे $BQ = x$ तथा लंबाई में कुल वृद्धि $= x + s$

अतः ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर को लगा प्रत्यानयन बल $= -k(x+s)$

पुनः बिन्दु का भार mg ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर क्रियाशील है।

अतः गति का समीकरण

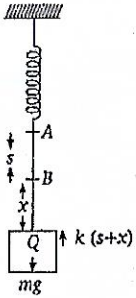
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x+s) \qquad \text{[न्यूटन के गति के द्वितीय नियम से]}$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - ks = mg - mg - kx \qquad \text{[(1) से]}$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \qquad \text{जहाँ } \frac{k}{m} = \omega^2$$

यह समीकरण स्प्रिंग के मुक्त दोलन को बताता है जो सरल आवर्त है।

(ii) अवमंदित दोलन (Damped Oscillation) : यदि m द्रव्यमान का पिंड दोलन कर रहा हो, तो उस पर लगने वाले प्रतिरोधी बल के कारण दोलन अवमंदित हो जाता है, जो अवमंदित दोलन (Damped Oscillation) कहलाता है।



अवमंदित बल (Damped Force) या तो अचर हो सकता है या वेग के समानुपाती। यदि यह बल गति के समानुपाती है, तो अवमंदित बल $= k_1 \dfrac{dx}{dt}$

अतः गति का समीकरण $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x+s) - k_1\dfrac{dx}{dt}$

$$\Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - ks - k_1\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - mg - kx - k_1\frac{dx}{dt} \qquad [\because ks = mg]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_1}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \qquad \text{जहाँ } \frac{k_1}{m} = 2\lambda, \frac{k}{m} = \omega^2$$

यह अवमंदित दोलन का अभीष्ट समीकरण है।

नोट :

- यदि अवमंदित बल गति के समानुपाती हो, तो अवमंदन **श्यान अवमंदन (Viscous Damping)** के नाम से जाना जाता है।

www.polytechnicpdf.com

(b) बल के अधीन दोलन या प्रणोदित दोलन (Forced Oscillation)

जब स्प्रिंग के आधार बिन्दु पर कोई बाह्य आवर्ती बल लगाया जाता है, जिससे वह दोलन करने लगता है, तो यह दोलन प्रणोदित दोलन कहलाता है।

(i) प्रणोदित दोलन (अवमंदन रहित) (Forced Oscillation without Damping) :

माना बाह्य आवर्ती बल $Q \cos nt$ है, तो

गति का समीकरण $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg - ks - kx + Q\cos nt$

$$\Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + Q\cos nt \qquad [\because mg = ks]$$

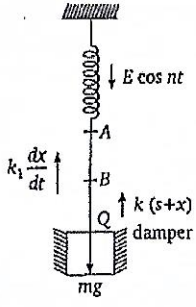
$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x + \frac{Q}{m}\cos nt \qquad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{Q}{m}\cos nt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} - \omega^2 x = E\cos nt, \text{ जहाँ } \frac{k}{m} = \omega^2, \frac{Q}{m} = E$$

यह प्रणोदित दोलन का अभीष्ट समीकरण है।

(ii) प्रणोदित दोलन (अवमंदन सहित) (Forced Oscillation with Damping) : यदि बाह्य आवर्ती बल के अतिरिक्त स्प्रिंग पर एक अतिरिक्त बल जो वेग $\left(= k_1\dfrac{dx}{dt}\right)$ के समानुपाती है, कार्य कर रहा है, तो

गति का समीकरण $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mg - ks - kx - k_1\dfrac{dx}{dt} + Q\cos nt$



$$\Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - k_1\frac{dx}{dt} + Q\cos nt \qquad (\because mg = ks)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{k_1}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{Q}{m}\cos nt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_1}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{Q}{m}\cos nt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = E\cos nt, \text{ जहाँ } \frac{k_1}{m} = 2\lambda, \frac{k}{m} = \omega^2, \frac{Q}{m} = E$$

6.11 विद्युत एवं यांत्रिक निकायों की तुल्यता (Equivalence of Electrical and Mechanical Systems)

यदि हम *L-C-R* श्रेणी परिपथ के समीकरण तथा यांत्रिक निकायों के समीकरण पर विचार करें तो दोनों समीकरण समान हैं।

नीचे दी गई सारणी में यन्त्रिक एवं विद्युत निकाय की संगतता (analogy) को दिखाया गया है।

क्र० सं०	यांत्रिक निकाय		विद्युत परिपथ
1.	(m)	$\leftrightarrow$	L
2.	(Damping constant)	$\leftrightarrow$	R
3.	(k) (Spring Stiffness)	$\leftrightarrow$	$\left(\dfrac{1}{C}\right)$
4.	(Driving Force, $Q\cos nt$)	$\leftrightarrow$	(emf) $E\dfrac{dE}{dt}$
5.	(x)	$\leftrightarrow$	i or q

www.polytechnicpdf.com

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. एक स्प्रिंग में 20 किलोग्राम भार का बल लगाकर उसे 10 सेमी तक खींचा जा सकता है। यदि स्प्रिंग से 10 किलोग्राम का एक पिंड लटकाकर संतुलन की स्थिति से 20 सेमी नीचे खींचकर छोड़ दिया जाए, तो संतुलन की स्थिति से किसी समय t पर पिंड का विस्थापन तथा अधिकतम वेग ज्ञात करें। पिण्ड का दोलनकाल भी ज्ञात करें।

हल : सूत्र से $mg = kx$, जहाँ k प्रत्यानन बल है

यहाँ $m = 20$ kg, $x = 10$ सेमी $= 0.1$ m $\quad\therefore\quad 20g = k \times 0.1$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{20g}{0.1} = 200g \text{ N/m}$$

पुनः माना $m = 10$ किलोग्राम का भार लटकाने पर लंबाई में वृद्धि s हो, तो

$$mg = ks \Rightarrow 10g = 200gs$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} = 0.5 \text{ m}$$

अब गति का समीकरण $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx \;\Rightarrow\; \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}x = 0$

या $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, जहाँ $\omega^2 = \dfrac{k}{m} = \dfrac{200g}{10} = 20g$

$$= 20 \times 9.8 = 196$$

$\therefore \quad \omega = \sqrt{196} = 14$

$\therefore$ दोलन काल $= \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{14} = \dfrac{2 \times 3.14}{14} = 0.45$ सेकण्ड

तथा विस्थापन $x = a\cos\omega t = 0.2\cos 14t \qquad [\because a = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \omega = 14]$

तथा वेग $\dfrac{dx}{dt} = -a\omega\sin\omega t = -0.2 \times 14\sin 14t = -2.8\sin 14t$

अधिकतम वेग $= -2.8 \times 1 \qquad$ [$\sin at$ का अधिकतम मान 1 है]

$= 2.8$ m/sec [–ive चिह्न वेग की दिशा बताता है]

उदाहरण 2. एक स्प्रिंग जिसका स्प्रिंग नियतांक $k = 700$ N/M ऊर्ध्वाधर लटकी है। स्प्रिंग के निचले सिरे से 7 किलोग्राम का द्रव्यमान सम्बद्ध है। द्रव्यमान को 0.05 m नीचे खींचकर छोड़ दिया जाता है। द्रव्यमान के परिणामी गति की विवेचना कीजिए।

हल : गति का समीकरण $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \ldots(1)$

प्रश्न से, $m = 7$, $k = 700$ तथा $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{700}{7}} = 10$

(1) से $\qquad 7\dfrac{d^2x}{dt^2} = -700x$

$\Rightarrow \quad \dfrac{d^2x}{dt^2} + 100x = 0 \qquad \Rightarrow \quad (D^2 + 100)x = 0$

$\therefore$ सहायक समीकरण $D^2 + 100 = 0 \qquad \Rightarrow \quad D = \pm 10i = 0 \pm 10i$

$\therefore$ सम्पूर्ण समीकरण $x = e^{0t}(C_1\cos 10t + C_2\sin 10t)$

$$= C_1\cos 10t + C_2\sin 10t \qquad \ldots(2)$$

www.polytechnicpdf.com

(2) में $t = 0, x = 0.05$ रखने पर, $C_1 = 0.05$

पुनः (2) से,

$$\frac{dx}{dt} = -10C_1 \sin 10t + 10C_2 \cos 10t \quad ...(3)$$

(3) में $v = 0, t = 0$ रखने पर, $0 = 10C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

अतः (2) में C_1 तथा C_2 का मान रखने पर

$$x = 0.05 \cos 10t$$

यह t समय के बाद विस्थापन है।

आवर्तकाल (Period) $= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = 0.628$ सेकण्ड

आवृत्ति (Frequency) $= \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} = 1.59$ दोलन/सेकण्ड

आयाम (Amplitude) $= 0.05$ m

प्रश्नावली 6.1

1. 1000 ओम के प्रतिरोध तथा 10 हेनरी के प्रेरकत्व को 500 वोल्ट की एक बैटरी के साथ श्रेणी क्रम में जोड़ा गया है। परिपथ में धारा i का मान t के फलन के रूप में निकालें।
2. 16 ओम के प्रतिरोध तथा 4 हेनरी के प्रेरकत्व को 80 वोल्ट की एक बैटरी से श्रेणी क्रम में जोड़ दिया गया है। परिपथ में 0.05 सेकण्ड बाद धारा का मान ज्ञात करें। $[e^{-0.1} = 0.9048]$
3. एक कुण्डली जिसका प्रतिरोध 15 ओम तथा प्रेरकत्व 10 हेनरी है, 90 वोल्ट की बैटरी से जोड़ दिया गया है। 2 सेकण्ड बाद परिपथ में धारा का मान ज्ञात करें।
4. 20 ओम के प्रतिरोध तथा 2 हेनरी के प्रेरकत्व को 100 वोल्ट के विद्युत वाहक बल के साथ श्रेणी क्रम में जोड़ा गया है। यदि $t = 0$ के लिए धारा का मान शून्य हो तो 0.01 सेकण्ड के बाद धारा का मान ज्ञात करें।
5. सरल आवर्त गति करते हुए पिण्ड का आवर्तकाल 0.25 सेकण्ड है। यदि आयाम 4 सेमी हो तो पिण्ड का अधिकतम वेग तथा त्वरण ज्ञात करें।

   [संकेत : $n = \frac{1}{T} = 4$, $a = 4$ सेमी $\therefore V_{max} = a\omega = a(2\pi n)$ तथा $\alpha_{max} = a\omega^2$]
6. एक वस्तु सरल आवर्त गति कर रही है जिसका समीकरण $x = 6\cos\left(3\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ मीटर है, तो गति की आवृत्ति तथा आवर्तकाल ज्ञात कीजिए। $t = 2$ सेकण्ड पर विस्थापन ज्ञात कीजिए।
7. पानी जिसका तापक्रम 100° C है, एक कमरे में रखा है। 10 मिनट बाद इसका तापक्रम 88° C हो जाता है। यदि कमरे का तापक्रम 25°C हो तो 20 मिनट बाद पानी का तापक्रम बतायें।
8. एक वस्तु के ठंडी होने की दर उसके तथा वातावरण के ताप के अंतर के समानुपाती होती है। यदि वातावरण का ताप 25° C हो तथा वस्तु 100° से 75° C तक एक मिनट में ठंडी हुई हो, तो 3 मिनट के बाद वस्तु का ताप ज्ञात करें।
9. एक रेडियोएक्टिव पदार्थ के विघटन की दर उसकी मात्रा के समानुपाती होती है। यदि रेडियोएक्टिव पदार्थ की सक्रियता 30 वर्ष में घटकर $\frac{1}{16}$ रह जाती है तो पदार्थ की अर्द्ध-आयु की गणना करें।
10. एक रेडियोधर्मी पदार्थ की सक्रियता 1000 वर्षों में घटकर अपने प्रारम्भिक मान का $\frac{1}{1000}$ रह जाती है, तो पदार्थ की अर्द्ध-आयु की गणना करें।

www.pdfteachingdf.com

11. किसी देश की जनसंख्या प्रतिवर्ष 8% की दर से बढ़ रही है कितने दिनों में जनसंख्या दूनी हो जाएगी ?
[संकेत : $\frac{dy}{dt} = \frac{8}{100} y$, जहाँ $y = t$ समय बाद जनसंख्या]

12. किसी देश की जनसंख्या 25 वर्षों में दूनी हो जाती है, तो यह कितने वर्षों में तिगुनी हो जाएगी?

13. एक स्प्रिंग, जिसका स्प्रिंग नियतांक 1000 N/m है, ऊर्ध्वाधर लटकी है। इसके निचले सिरे पर 10 किग्रा का द्रव्यमान बंधा है। द्रव्यमान को 5 सेमी नीचे खींचकर छोड़ दिया जाता है। स्प्रिंग का दोलनकाल, आवृत्ति, आयाम तथा t समय बाद विस्थापन ज्ञात करें

14. एक स्प्रिंग के निचले सिरे पर 5 किग्रा का द्रव्यमान बंधा है। स्प्रिंग का नियतांक $k = 100$ न्यूटन/मीटर है और $\frac{1}{10}\frac{dx}{dt}$ गति में प्रतिरोधी बल भी काम कर रहा है। पिंड को 10 सेमी नीचे खींचकर छोड़ दिया गया है। गति का अवकल समीकरण लिखिए।
[संकेत : $\omega^2 = \frac{k}{m} = \frac{100}{5} = 20$; $2\lambda \frac{dx}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dx}{dt}$ $\therefore$ समीकरण $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{10}\frac{dx}{dt} + 20x = 0$]

उत्तरमाला

1. $i = \frac{1}{2}[1 - e^{-100t}]$
2. $i = 0.4760$ ऐम्पियर
3. 5.70 ऐम्पियर
4. 0.475 ऐम्पियर
5. $V_{max} = 100.53$ cm/s; $\alpha_{max} = 2526.62$
6. आवर्तकाल $= \frac{2}{3}$ सेकण्ड; आवृत्ति $= \frac{3}{2}$ कंपन/सेकण्ड; विस्थापन = 3 मीटर
7. 77.9°C
8. 47.22°C
9. 7.5 वर्ष
10. 100.3 वर्ष
11. $\frac{25}{2}\log 2$ वर्ष
12. $25\frac{\log 3}{\log 2}$ वर्ष
13. 0.628 सेकण्ड, 1.59 दोलन/सेकण्ड, आयाम = 0.05 मीटर, विस्थापन $x = 0.05\cos 10t$
14. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{10}\frac{dx}{dt} + 20x = 0$

□□□

www.polytechnicnotes.com

खण्ड : 3

अवकल गणित

7. दो तथा तीन चरों के फलन तथा अन्तरिक्ष में पृष्ठों की पहचान 143

8. आंशिक अवकलन 148

9. जैकोबियन 166

10. सदिश अवकलन 185

11. ग्रेडिएंट, डाइवर्जेन्स तथा कर्ल 197

12. द्विगुण एवं त्रिगुण समाकलन : परिचय 213

13. सदिशों का समाकलन 220

www.polytechnicpdf.com

7 CHAPTER

दो तथा तीन चरों के फलन तथा अन्तररिक्ष में पृष्ठों की पहचान

(Functions of Two or Three Variables and Identification of surfaces in space)

इस अध्याय में हम दो एवं तीन चरों के कुछ महत्वपूर्ण फलनों एवं उनकी पहचान के बारे में जानेंगे।

7.1 दो चरों में सामान्य द्विघातीय समीकरण

दो चरों में सामान्य द्विघातीय समीकरण को निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

यह विभिन्न स्थितियों में विभिन्न वक्रों को निरूपित करता है, जिसे निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

यदि $\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$ तो

निरूपित वक्रों का निर्धारण Δ के मान के आधार पर किया जा सकता है, जो निम्न तालिका में दिखाया गया है।

	प्रतिबंध	वक्र (शांकव) के प्रकार
(a)	$\Delta = 0$	दो सरल रेखायें
(b)	$\Delta \neq 0$ तथा	
(i)	$h = 0;\ a = b$	वृत्त
(ii)	$ab - h^2 = 0$	परवलय
(iii)	$ab - h^2 > 0$	दीर्घवृत्त
(iv)	$ab - h^2 < 0$	अतिपरवलय
(v)	$ab - h^2 < 0,\ a + b = 0$	समकोणिक अतिपरवलय

7.2 दो चरों के कुछ महत्वपूर्ण फलन

	फलन	पहचान
1.	$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$	वृत्त; केन्द्र $= (-g, -f)$, त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
2.	$x^2 + y^2 = a^2$	वृत्त; केन्द्र $(0, 0)$, त्रिज्या $= a$
3.	$y^2 = 4ax$	परवलय; शीर्ष $= (0, 0)$, नाभि $(a, 0)$, नाभिलंब $= 4a$
4.	$y^2 = -4ax$	परवलय; शीर्ष $= (0, 0)$, नाभि $= (-a, 0)$, नाभिलंब $= 4a$
5.	$x^2 = 4ay$	परवलय; शीर्ष $= (0, 0)$, नाभि $= (0, a)$, नाभिलंब $= 4a$

www.polytechnicpdf.com

6.	$x^2 = -4ay$	परवलय; शीर्ष $= (0, 0)$, नाभि $= (0, -a)$, नाभिलंब $= 4a$
7.	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$	दीर्घवृत्त, केन्द्र $= (0, 0)$ नाभियाँ $= (-ae, 0), (ae, 0)$ दीर्घअक्ष $= 2a$, लघुअक्ष $= 2b$ उत्केन्द्रता $= e$ $b^2 = a^2(1 - e^2), e < 1$ नाभिलंब $= \frac{2b^2}{a}$
8.	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	अतिपरवलय नाभियाँ $= (\pm ae, 0)$ नियतायें $= \pm a/e$ शीर्ष $= (\pm a, 0)$ अनुप्रस्थ अक्ष $= 2a$, संयुग्मी अक्ष $= 2b$ $b^2 = a^2(e^2 - 1), e > 1$ नाभिलंब $= \frac{2b^2}{a}$

7.3 तीन चरों के फलन (Functions of Three Variables)

अंतरिक्ष में स्थित किसी बिंदु को व्यक्त करने के लिए तीन चरों x, y, z की आवश्यकता होती है तथा इसकी स्थिति को x-अक्ष, y-अक्ष तथा z-अक्ष के सापेक्ष दिखाया जाता है।

7.3.1 तीन चरों के फलन का सामान्य रूप एवं शांकवज (General Form of Function of Three Variables and Conicoids)

तीन चरों x, y, z में द्विघातीय समीकरण निम्न रूप में दिया जाता है :

$$F(x, y, z) \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0 \quad ...(1)$$

इसके द्वारा प्रदर्शित विभिन्न पृष्ठों को शांकवज (Conicoids) कहा जाता है।

मूलबिन्दु और अक्षों के चुनाव के आधार पर समीकरण (1) सरल रूप में विभिन्न शांकवजों को प्रदर्शित करता है।

वस्तुतः शांकवज ऐसे पृष्ठ हैं जिनको निर्देशांक समतलों (XOY, YOZ, ZOX) के समानांतर समतलों से काटने पर परिच्छेद (Section) शांकव (Conics) अर्थात् परवलय दीर्घवृत्त अथवा अतिपरवलय प्राप्त होते हैं।

मूल बिन्दुओं और अक्षों के उपयुक्त चयन से समीकरण (1) को निम्नलिखित सरल रूप में परिवर्तित कर विभिन्न शांकवजों के समीकरण प्राप्त होते हैं।

www.polytechnicpdf.com

तीन चरों का फलन

क्र० सं०	समीकरण	शांकवज	पहचान
1.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	दीर्घवृत्तज (Ellipsoid)	(i) केन्द्र (0, 0, 0) (ii) शीर्ष : x-अक्ष पर $(a, 0, 0)$ तथा $(-a, 0, 0)$ y-अक्ष पर $(0, b, 0)$ तथा $(0, -b, 0)$ z-अक्ष पर $(0, 0, c)$ तथा $(0, 0, -c)$
			(iii) अर्द्धाक्ष (Semi-axis) : a, b, c (मूल बिन्दु से अक्षों की दूरी)
2.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	एक पृष्ठीय अतिपरवलयज (One Sheet Hyperboloid)	केन्द्र (0, 0, 0) शीर्ष : x-अक्ष पर $(a, 0, 0)$ तथा $(-a, 0, 0)$ y-अक्ष पर $(0, b, 0)$ तथा $(0, -b, 0)$ तथा z-अक्ष पर कल्पित बिन्दु पर काटता है
3.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	द्विपृष्ठीय अतिपरवलयज (Two Sheet hyperboloids)	केन्द्र (0, 0, 0) अक्ष x-अक्ष पर $(a, 0, 0)$ तथा $(-a, 0, 0)$ तथा y-अक्ष z-अक्षों को यह कल्पित बिन्दु पर काटता है
4.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$	दीर्घवृत्तीय परवलयज (Elliptic Paraboloids)	
5.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}$	अतिपरवलयिक परवलयज (Hyperbolic Paraboloid)	

नोट : (1), (2) तथा (3) से निरूपित शांकवज केन्द्रीय शांकवज (Central Conicoid) कहलाते हैं।

7.3.2 शांकवज के प्रमाणिक समीकरण एवं शांकवजों का निरूपण :

समीकरण $ax^2+by^2+cz^2=1$ विभिन्न शांकवजों को दर्शाता है, जिनका निर्धारण अचरों a, b तथा c के चिह्नों के आधार पर किया जाता है :

(i) यदि $a>0, b>0, c>0$ अर्थात् तीनों धनात्मक, तो पृष्ठ दीर्घवृत्तज होगा।

(ii) $a<0, b<0, c<0$ अर्थात् तीनों ऋणात्मक, तो पृष्ठ काल्पनिक दीर्घवृत्तज होगा।

(iii) यदि $a<0, b>0, c>0$ या $a>0, b<0, c>0$ या $a>0, b>0, c<0$ अर्थात् तीनों में कोई एक ऋणात्मक हो तो पृष्ठ एक पृष्ठीय अतिपरवलयज होगा।

(iv) यदि $a<0, b<0, c>0$; या $a>0, b<0, c<0$; या $a<0, b>0, c<0$ अर्थात् तीनों में कोई दो ऋणात्मक हों तो पृष्ठ द्विपृष्ठीय अतिपरवलयज होगा।

www.polytechnicpdf.com

7.3.3 तीन चरों के कुछ महत्वपूर्ण फलन एवं उनकी पहचान

क्र० सं०	समीकरण	पहचान
1.	$ax + by + cz + d = 0$	समतल जिसके अभिलंब की दिक्-कोज्यायें a, b, c के समानुपाती हैं।
2.	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$	अंतःखंड समीकरण : यह अक्षों x-अक्ष y-अक्ष तथा z-अक्ष पर क्रमशः अंतःखंड a, b, c काटता है।
3.	$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	गोला; केन्द्र $(0, 0, 0)$; त्रिज्या $= r$
4.	$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = r^2$	गोला; केन्द्र (α, β, γ), त्रिज्या $= r$
5.	$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$	गोला; केन्द्र $(-u, -v, -w)$; त्रिज्या $= \sqrt{u^2 - v^2 + w^2 - d}$
6.	$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$	गोला, व्यास के सिरे (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2)
7.	$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2hxy + 2gxz + 2fyz = 0$	शंकु, शीर्ष $(0, 0, 0)$
8.	$x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$	लंबवृत्तीय शंकु, शीर्ष $(0, 0, 0)$, अक्ष: z-अक्ष; अर्द्धशीर्ष कोण α

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. $2x^2 + 2y^2 - 6x + 5 = 0$ किस शांकव को निरूपित करता है?

हल : दिया गया समीकरण $2x^2 + 2y^2 - 6x + 5 = 0$

समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = 2, b = 2, c = 5, 2g = -6 \quad \Rightarrow \quad g = -3; 2f = 0 \quad \Rightarrow f = 0, h = 0$$

अब $\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$ में यह मान रखने पर

$$= 2 \times 2 \times 5 + 2 \times 0 \times -3 - 0 - 2 \times (-3)^2 - 5 \times 0$$

$$= 20 - 18 = 2 \neq 0$$

अतः $\Delta \neq 0, a = b = 2, h = 0$

$\therefore$ यह वक्र वृत्त है।

उदाहरण 2. $2x^2 - 72xy + 23y^2 - 4x - 28y - 48 = 0$ कौन-सा वक्र निरूपितकरेगा?

हल : मानक समीकरण से तुलना करने पर

$$a = 2, 2h = -72; b = 23, 2g = -4 \Rightarrow g = -2; 2f = -28 \Rightarrow f = -14, c = -48$$

$\therefore \quad \Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$$= 2 \times 23 \times (-48) + 2 \times (-14)(-2)(-36) - 2(-14)^2 - 23(-2)^2 - (-48)(-36)^2$$

तथा $h^2 = (-36)^2 = 1296, \ ab = 2 \times 23 = 46 \neq 0$

अतः $h^2 > ab, \Delta \neq 0$

अतः शांकव अनिपरवलय है।

उदाहरण 3. समीकरण $144x^2 + 64y^2 - 36z^2 - 576 = 0$ से निरूपित पृष्ठ का नाम बतायें। [BTE 1997]

www.polytechnicpdf.com

हल : प्रश्न से, $144x^2 + 64y^2 - 36z^2 - 576 = 0$

$\Rightarrow \quad 144x^2 + 64y^2 - 36z^2 = 576$

$\Rightarrow \quad \frac{144}{576}x^2 + \frac{64}{576}y^2 - \frac{36}{576}z^2 = \frac{576}{576}$

$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1 \qquad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} - \frac{z^2}{4^2} = 1$

जो समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ के रूप का है जो एक पृष्ठीय अतिपरवलयज है।

उदाहरण 4. $9x^2 - y^2 - 9z^2 = 9$ से निरूपित पृष्ठ का नाम बतायें।

हल : प्रश्न से, $9x^2 - y^2 - 9z^2 = 9$

$\Rightarrow \quad \frac{9x^2}{9} - \frac{y^2}{9} - \frac{9z^2}{9} = \frac{9}{9} \qquad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{1} = 1$

$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{3^2} - \frac{z^2}{1^2} = 1$

जो $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ के रूप का है

अत: यह द्विपृष्ठीय अतिपरवलयज है।

उदाहरण 5. पृष्ठ $y^2 = 4ax$ की पहचान करें। **[2011]**

हल : प्रश्न से, $y^2 = 4ax$ परवलय को निरूपित करता है जिसका

(i) शीर्ष $= (0, 0)$

(ii) नाभि $= (a, 0)$

(iii) नाभिलंब $= 4a$

प्रश्नावली 7.1

1. $12x^2 - 23xy + 10y^2 - 25x + 26y - 14 = 0$ से निरूपित वक्र की पहचान करें।
2. $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0$ से निरूपित वक्र की पहचान करें।
3. $4x^2 + 16y^2 + z^2 - 16 = 0$ से निरूपित होने वाले पृष्ठ का नाम बतायें।
4. $9x^2 - y^2 - 4z^2 = 36$ से निरूपित पृष्ठ का नाम बतायें तथा इसके केन्द्र तथा x-अक्ष से कटान बिन्दु का मान ज्ञात करें।
5. $36x^2 + 9y^2 + 64z^2 - 576 = 0$ द्वारा निरूपित पृष्ठ को पहचानें तथा केन्द्र, अर्द्धाक्ष तथा अक्षों से प्रतिच्छेदित बिन्दु (शीर्षों) को बतायें।

उत्तरमाला

1. अतिपरवलय
2. दीर्घवृत्त
3. दीर्घवृत्तज
4. द्विपृष्ठीय, अतिपरवलय, केन्द्र (0, 0, 0); (± 2,0,0)
5. केन्द्र (0, 0, 0), अर्द्धाक्ष 4, 8, 3 तथा प्रतिच्छेदन बिन्दु (± 4, 0, 0), (0, ± 8, 0), (0, 0, ± 3)

□□□

www.Polytechnicpdf.com

8

CHAPTER

आंशिक अवकलन
(Partial Differentiation)

15.1 परिचय (Introduction)

एक चर राशि के फलन के अवकलन से हम परिचित हो चुके हैं किंतु प्राय: गणितीय समस्याओं के समाधान के लिए हमें दो या दो से अधिक चर राशियों के फलन पर विचार करना पड़ता है। जैसे : किसी आयत का क्षेत्रफल दो चर राशियों लम्बाई तथा चौड़ाई का फलन है। इसी तरह किसी घनाभ का आयतन लंबाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई का फलन है।

परिभाषा : z को दो चर राशियों x तथा y का फलन कहा जाता है, यदि x तथा y के प्रत्येक मान के लिए z का एक निश्चित मान प्राप्त होता है, तो इसे $z = f(x, y)$ से सूचित करते हैं।

z को परतंत्र चर तथा x एवं y को स्वतंत्र चर कहते हैं।

15.2 आंशिक अवकल गुणांक (Partial Differential Coefficient)

यदि $z = f(x, y)$ दो स्वतंत्र चर राशियों x तथा y का फलन हो, तो y को अचर मानकर z का केवल x के सापेक्ष अवकलज (derivative) 'z' का x के सापेक्ष आंशिक अवकलज (Partial derivative) कहलाता है तथा इसे $\frac{\partial z}{\partial x}$ या $\frac{\partial f}{\partial x}$ या f_x से सूचित किया जाता है।

इस तरह $\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x, y) - f(x, y)}{\delta x}$

इसी तरह y के सापेक्ष z का आंशिक अवकलज, x को अचर मानकर निकाला जाता है तथा इसे $\frac{\partial f}{\partial y}$ या $\frac{\partial z}{\partial y}$ या f_y से सूचित करते हैं।

तथा
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underset{\delta y \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x, y+\delta y) - f(x, y)}{\delta y}$$

15.2.1 ज्यामितीय अर्थ (Geometrical Meaning)

z का x के सापेक्ष आंशिक अवकलज का मान क्षेत्र $z = f(x, y)$ तथा ZOX समतल के समानांतर खींचे गए समतल के कटान बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा की ढाल (slope of the tangent) के बराबर होता है।

15.2.2 उच्च क्रम के आंशिक अवकलज (Partial Derivative of Higher Orders)

यदि $z = f(x, y)$ तथा $\frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$ पुन: x तथा y के फलन हैं। तो इनका पुन: x तथा y के सापेक्ष आंशिक अवकलन किया जा सकता है।

www.podtechnopdf.com

अतः $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ या $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ या f_{xx}; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ या $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ या f_{yx}

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ या $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ या f_{xy}; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ या $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ या f_{yy} आदि।

15.2.3 मानक परिणाम (Standard Results)

आंशिक अवकलन के मानक परिणाम सामान्य अवकलन के अनुरूप हैं। यदि $u(x, y)$ तथा $v(x, y)$ दो फलन हैं तथा $f(x, y)=u\pm v$ तो

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\pm\frac{\partial v}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\pm\frac{\partial v}{\partial y}$

(ii) गुणनफल का अवकल गुणांक (Differential Coefficient of Product)

यदि $f=uv$ तो

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial(uv)}{\partial x}=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{तथा} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial(uv)}{\partial y}=u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}$$

(iii) भागफल का अवकल गुणांक (Differential Coefficient of Quotient)

यदि $f=\frac{u}{v}$ तो

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}}{v^2} \quad \text{तथा} \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}$$

(iv) अचर का अवकल गुणांक (Differential Coefficient of Constants) :

(a) यदि $f(x, y)=c$ तो $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ तथा $\frac{\partial f}{\partial y}=0$

(b) फलन के फलन का अवकल गुणांक (D.C. of Function of Functions)

यदि $z=f(u)$ तथा $u=u(x, y)$ तो

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{तथा} \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{dz}{du}\frac{\partial u}{\partial y}$$

नोट :

- यहाँ $\frac{\partial z}{\partial u}$ की जगह $\frac{dz}{du}$ का प्रयोग किया गया है क्योंकि z, एक चर u का फलन है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. यदि $u=ax^2+2hxy+by^2$ तो $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ का मान निकालें।

हल : प्रश्न से, $u=ax^2+2hxy+by^2$ ...(1)

$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(ax^2+2hxy+by^2)$ [x के सापेक्ष आंशिक अवकलन से]

$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}=a\times 2x+2hxy\times 1+0$ [y को अचर लेने पर]

www.polytechnicpdf.com

$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2[ax + hy]$ उत्तर ...(2)

$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial}{\partial x}(ax + hy)$ [(2) का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन से]

$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2(a \times 1 + 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2a$ उत्तर

(1) का y के सापेक्ष आंशिक अवकलन से $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ax^2 + 2hxy + by^2) = a \times 0 + 2hx \times 1 + b \times 2y$

[x को अचर लेने पर]

अर्थात् $\frac{\partial u}{\partial y} = 2(hx + by)$ उत्तर ...(3)

$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2\frac{\partial}{\partial y}(hx + by) = 2(h \times 0 + b \times 1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2b$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि $u = ax^2 + 2hxy + by^2$ तो सिद्ध करें कि $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$ **[2004]**

हल : प्रश्न से, $u = ax^2 + 2hxy + by^2$ ...(1)

$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + 2hy \quad \Rightarrow \quad x\frac{\partial u}{\partial x} = 2[ax^2 + hxy]$ ...(2)

तथा $\frac{\partial u}{\partial y} = 2hx + 2by \quad \Rightarrow \quad y\frac{\partial u}{\partial y} = 2[hxy + by^2]$ ...(3)

(2) तथा (3) को जोड़ने पर $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2[ax^2 - hxy + hxy + by^2] = 2[ax^2 + 2hxy + by^2]$

$\Rightarrow \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$ [(1) से] सिद्ध हुआ।

उदाहरण 3. यदि $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3axy$ तो सिद्ध करें कि $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ **[2005]**

हल : प्रश्न से $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3axy \quad \therefore \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^3 + 3axy) = 3y^2 + 3ax$

[x को अचर मानने पर]

$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3y^2 + 3ax) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 3a$ ...(1)

पुनः $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3 + 3axy) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3ay$

$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 3ay) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = 3a$ ...(2)

(1) तथा (2) से $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 4. यदि $u = e^{xyz}$, तो दिखायें कि $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)e^{xyz}$ **[2000, 2003, 2006]**

www.polytechnicpdf.com

हल : यहाँ $u = e^{xyz}$ $\quad\therefore\quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = e^{xyz} \times xy$ [x, y को अचर मानने पर] ...(1)

अतः $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}(xye^{xyz}) = x\dfrac{\partial}{\partial y}(y\,e^{xyz}) = x\,[y \times xz\,e^{xyz} + e^{xyz} \times 1]$

[(1) का y के सापेक्ष अवकलन से तथा x एवं z को अचर मानने पर]

अर्थात् $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(x^2yz + x)$ ...(2)

$\therefore$ $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\{e^{xyz}(x^2\,yz + x)\}$ [(2) का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन से]

या $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(2xyz + 1) + (x^2yz + x)\,e^{xyz} \times yz = [1 + 2xyz + xyz + x^2y^2z^2]\,e^{xyz}$

$\Rightarrow$ $= [1 + 3xyz + x^2y^2z^2]\,e^{xyz}$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 5. यदि $u = x^y$ तो दर्शाइये कि $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial x}$ **[1992, 2005, 2015]**

हल : प्रश्न से $u = x^y$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^y \,.\, \log_e x$ (y के सापेक्ष आंशिक अवकलन से)

$\Rightarrow$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{x^y}{x} + \log_e x \,.\, yx^{y-1}$ (x के सापेक्ष आंशिक अवकलन से)

$\Rightarrow$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = x^{y-1}\{1 + y\log_e x\}$ ...(i)

तथा $\dfrac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$ (x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर)

$\Rightarrow$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = y\,.\,x^{y-1}\log_e x + x^{y-1}$ (y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर)

$\Rightarrow$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = x^{y-1}\{1 + y\log_e x\}$ ...(ii)

$\therefore$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ [(i) तथा (ii) से]

दोनों पक्षों का पुनः x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)$$

अर्थात् $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 6. यदि $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ तो दिखायें :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y \text{ जब } x \neq 0,\ y \neq 0.$$

हल : प्रश्न से, $x = r\cos\theta$ ...(i)

$y = r\sin\theta$ ...(ii)

www.polytechnicpdf.com

$\therefore \quad \dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$ [θ को अचर मानने पर] ...(iii)

पुनः (i) तथा (ii) को वर्ग कर जोड़ने पर

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$\Rightarrow \quad 2r\left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right) = 2x$ [y को अचर मानकर कर x सापेक्ष आंशिक अवकलन से]

$\Rightarrow \quad \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r} = \cos\theta$ [(i) से] ...(iv)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y \quad [\text{(iii) तथा (iv) से}]$$

उदाहरण 7. यदि $z = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$ तो दिखायें $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 4\left(1 - \dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ [1996]

हल : प्रश्न से $z = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+y)\,2x - (x^2+y^2)\times 1}{(x+y)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2xy}{(x+y)^2}$$

तथा $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{(x+y)\,2y - (x^2+y^2)}{(x+y)^2} \times 1 = \dfrac{y^2 - x^2 + 2xy}{(x+y)^2}$

$$\therefore \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left[\frac{x^2 - y^2 + 2xy}{(x+y)^2} - \frac{y^2 - x^2 + 2xy}{(x+y)^2}\right]^2$$

$$= \left[\frac{x^2 - y^2 + 2xy - y^2 + x^2 - 2xy}{(x+y)^2}\right]^2 = \left[\frac{2(x^2 - y^2)}{(x+y)^2}\right]^2 = 4\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 \quad ...(1)$$

पुनः $1 - \dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1 - \dfrac{x^2 - y^2 + 2xy}{(x+y)^2} - \dfrac{y^2 - x^2 + 2xy}{(x+y)^2}$

$$= \frac{(x+y)^2 - x^2 + y^2 - 2xy - y^2 + x^2 - 2xy}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{(x+y)^2} = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 \quad ...(2)$$

(1) तथा (2) से, $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 - \dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

उदाहरण 8. यदि $x^x \cdot y^y \cdot z^z = a$ तब दिखाइये कि $x = y = z$ पर $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -(x\log_e ex)^{-1}$. (U.P. 1999)

हल : प्रश्न से, $x^x \cdot y^y \cdot z^z = a$ ...(i)

log लेने पर, $x\log x + y\log y + z\log z = \log a$

या $z\log z = \log a - x\log x - y\log y$ ...(ii)

x के सापेक्ष आंशिक अवकलन से (y को अचर मानकर),

www.polytechnicpdf.com

$$\frac{z}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+\log z\,.\,\frac{\partial z}{\partial x}=0-\frac{x}{x}-\log x+0 \qquad \left[\because \frac{\partial}{\partial x}(y\log y)=0\right]$$

या
$$(1+\log z)\frac{\partial z}{\partial x}=-(1+\log x)$$

$\therefore$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-(1+\log x)}{(1+\log z)} \qquad \text{...(iii)}$$

समीकरण (ii) का y के सापेक्ष आंशिक अवकलन से (x को अचर मानकर),

$$(1+\log z)\frac{\partial z}{\partial y}=-(1+\log y)$$

$\therefore$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{(1+\log y)}{(1+\log z)} \qquad \text{...(iv)}$$

अब $\frac{\partial z}{\partial y}$ का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन से

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-(1+\log y)\times\left\{-\frac{1}{(1+\log z)^2}\right\}\times\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+0 \qquad \left[\because \frac{\partial}{\partial x}(1+\log y)=0\right]$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ का मान समीकरण (iii) से रखने पर,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{z}\frac{(1+\log y)}{(1+\log z)^2}\times\frac{-(1+\log x)}{(1+\log z)}$$

$x=y=z$ पर,
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{x}\cdot\frac{(1-\log x)}{(1+\log x)^2}\times\frac{-(1+\log x)}{(1+\log x)}=-\frac{1}{x(1+\log_e x)}$$

$$=-\frac{1}{x(\log_e e+\log_e x)} \qquad \{\because \log_e e=1\}$$

$$=-\frac{1}{x\log_e ex}=-(x\log_e ex)^{-1}$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 9. यदि $u=\log(x^3+y^3+z^3-3xyz)$, दिखाइये कि

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u=-\frac{9}{(x+y+z)^2}$$ **(U.P. Dip. Engg. 2001, 2008)**

हल : प्रश्न से, $u=\log(x^3+y^3+z^3-3xyz)$

x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x^3+y^3+z^3-3xyz}(3x^2-3yz) \quad \text{या} \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{3(x^2-yz)}{x^3+y^3+z^3-3xyz} \qquad \text{...(1)}$$

इसी प्रकार,
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3(y^2-xz)}{x^3+y^3+z^3-3xyz} \qquad \text{...(2)}$$

तथा
$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3(z^2-xy)}{x^3+y^3+z^3-3zyz} \qquad \text{...(3)}$$

$\therefore$
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3(x^2+y^2+z^2-yz-zx)}{x^3+y^2+z^3-3xyz} \qquad [(1)+(2)+(3) \text{ से}]$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \frac{3(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)} = \frac{3}{x+y+z} \quad ...(4)$$

अब $$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{3}{x+y+z}\right) \quad [(4) \text{ से}]$$

$$= \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{x+y+z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{x+y+z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3}{x+y+z}\right)\right\}$$

$$= 3\left\{-\frac{1}{(x+y+z)^2}-\frac{1}{(x+y+z)^2}-\frac{1}{(x+y+z)^2}\right\}$$

$$= \frac{-9}{(x+y+z)^2}$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 10. यदि $z = f(x+ay)+\phi(x-ay)$, सिद्ध कीजिए कि $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ **(U.P. Dip. Engg. 2007)**

हल : प्रश्न से, $z = f(x+ay)+\phi(x-ay)$

$\therefore$ $$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x+ay)+\phi'(x-ay)$$ (y को अचर मानकर x के सापेक्ष आंशिक अवकलन से)

और $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x-ay)+\phi''(x-ay) \quad ...(1)$$

पुनः $$\frac{\partial z}{\partial y} = af'(x+ay)-a\phi'(x-ay)$$ (x को अचर मानकर y के सापेक्ष आंशिक अवकलन से)

और $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 f''(x+ay)+a^2\phi''(x-ay) = a^2\{f''(x+ay)+\phi''(x-ay)\}$$

$\therefore$ $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$ [(1) से] सिद्ध हुआ।

उदाहरण 11. यदि $\frac{1}{u} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ तो दिखायें कि

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z} = -u \quad \text{तथा} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

हल : प्रश्न से, $$\frac{1}{u} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

या $$u = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \quad ...(1)$$

$\therefore$ $$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\times 2x = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

इसी तरह $\frac{\partial u}{\partial y} = -y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$ तथा $\frac{\partial u}{\partial z} = -z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$

www.polytechnicpdf.com

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x \times \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-5/2} \times 2x - 1(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{-5/2}[3x^2-(x^2+y^2+z^2)]$$

$$= u^5(2x^2-y^2-z^2) \qquad [(1) \text{ से}]$$

इसी तरह $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u^5(2y^2-x^2-z^2)$ तथा $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u^5(2z^2-x^2-y^2)$

$$\therefore \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(-x^2) + (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(-y^2)$$

$$+ (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(-z^2)$$

$$= (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\{-(x^2+y^2+z^2)\}$$

$$= -(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}+1} = -(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$$

$$= -u$$

सिद्ध हुआ।

तथा $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} = u^5(2x^2-y^2-z^2) + u^5(2y^2-x^2-z^2) + u^5(2z^2-x^2-y^2)$$

$$= u^5\{2(x^2+y^2+z^2) - y^2 - z^2 - x^2 - z^2 - x^2 - y^2\}$$

$$= u^5 \times 0 = 0$$

सिद्ध हुआ।

8.3 समघाती फलन (Homogeneous Functions)

ऐसे फलन जिसमें प्रत्येक पद समान घात का हो, समघाती फलन कहलाता है।

अत: यदि $f(x,y) = u = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}y^{n-1} + a_ny^n$ हो तो u को x तथा y में n घात का समघाती फलन कहते हैं।

अब $u = x^n\left\{a_0 + a_1\left(\dfrac{y}{x}\right) + a_2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \ldots + a_n\left(\dfrac{y}{x}\right)^n\right\}$

$\Rightarrow \quad u = x^n\,\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, जहाँ $\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $\dfrac{y}{x}$ का फलन है।

अत: x तथा y में nवें घात के समघात फलन को $u = x^n\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

जैसे : $f(x,y) \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 = x^2\left[a + 2h\dfrac{y}{x} + b\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right] = x^2\,\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

अत: यह एक समघाती फलन है, जिसकी घात 2 है।

नोट :

- (i) समघात फलन दो से अधिक चरों का भी हो सकता है।
  जैसे $f(x,y,z) \equiv x^n f\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$, x, y तथा z में nवें घात का समघात फलन है।
- (ii) यदि फलन $f(x,y,z,\ldots)$ के रूप का हो तो इसके समघात होने की जाँच के लिए $x = \lambda x$, $y = \lambda y$, $z = \lambda z$, ... रखें।
  यदि $f(x,y,z,\ldots) = \lambda^n f(x,y,z,\ldots)$ तो फलन nवें घात में समघाती होगा।
- (iii) यदि u, n घात का x तथा y में समघाती फलन हो तो $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ तथा $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $(n-1)$वें घात का समघाती फलन होगा।

www.polytechnicpdf.com

8.4 आयलर प्रमेय (Euler's Theorem)

कथन (Statement) : यदि u, n वें घात का x तथा y में समघाती फलन हो, तो

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=nu.$$

प्रमाण (Proof) : दिया गया है u, x तथा y में nवें घात का समघाती फलन है।

माना $\quad u=x^n\,\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ ...(1)

x के सापेक्ष आंशिक अवकलन से $\frac{\partial u}{\partial x}=n\,x^{n-1}\,\phi\left(\frac{y}{x}\right)+x^n\,\phi'\left(\frac{y}{x}\right)\times\left(-\frac{y}{x^2}\right)$

$\therefore \quad x\frac{\partial u}{\partial x}=n\,x^n\,\phi\left(\frac{y}{x}\right)-x^{n-1}\,y\,\phi'\left(\frac{y}{x}\right)$ [दोनों तरफ x से गुणा करने पर] ...(2)

पुनः $\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^n\,\phi'\left(\frac{y}{x}\right)\times\left(\frac{1}{x}\right)$

$\therefore \quad y\frac{\partial u}{\partial y}=x^{n-1}\,y\,\phi'\left(\frac{y}{x}\right)$ [दोनों तरफ y से गुणा करने पर] ...(3)

(2) तथा (3) को जोड़ने पर $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=n\,x^n\,\phi\left(\frac{y}{x}\right)-x^{n-1}\,y\,\phi'\left(\frac{y}{x}\right)+x^{n-1}\,y\,\phi'\left(\frac{y}{x}\right)$

या $\quad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=n\,x^n\,\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ या $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=n\,u$ [(1) से] साबित हुआ।

नोट :

- आयलर प्रमेय दो से अधिक चरों के समघाती फलनों के लिए भी सत्य है।

अतः यदि $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_1, x_2, \ldots x_n$ चरों का nवें घात का समघाती फलन हो, तो

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}=n\,f.$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. यदि $u=\sin^{-1}\frac{x^2+y^2}{x+y}$ तो दिखायें कि $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\tan u$. **[2002, 13]**

हल : प्रश्न से, $\quad u=\sin^{-1}\frac{x^2+y^2}{x+y} \quad \Rightarrow \quad \sin u=\frac{x^2+y^2}{x+y}$

माना $V=\sin u=\frac{x^2+y^2}{x+y}=\frac{x^2\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}{x\left[1+\frac{y}{x}\right]}=\frac{x\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}{1+\frac{y}{x}}=x\,\phi\left(\frac{y}{x}\right)$

अतः V प्रथम घात का x तथा y में समघाती फलन है। अतः आयलर प्रमेय से

$$x\frac{\partial V}{\partial x}+y\frac{\partial V}{\partial y}=1\times V \quad ...(1)$$

www.pdftechnicpdf.com

परन्तु $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sin u = \cos u \frac{\partial u}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sin u = \cos u \frac{\partial u}{\partial y}$

अतः (1) से $x\cos u \frac{\partial u}{\partial x} + y\cos u \frac{\partial u}{\partial y} = \sin u$ $[\because V = \sin u]$

$\Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin u}{\cos u} \Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \tan u.$ साबित हुआ।

उदाहरण 2. यदि $u = \tan^{-1}\frac{x^2+y^2}{x-y}$, तो दिखायें कि $x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\sin 2u$ **[2005]**

हल : यहाँ $u = \tan^{-1}\frac{x^2+y^2}{x-y} \Rightarrow \tan u = \frac{x^2+y^2}{x-y} = \frac{x^2\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}{x\left[1-\frac{y}{x}\right]} = x\,\phi\left(\frac{y}{x}\right)$

अतः यह प्रथम घात क समघाती फलन है।

माना $V = \tan u$ तो $\frac{\partial V}{\partial x} = \sec^2 u\frac{\partial u}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial V}{\partial y} = \sec^2 u\frac{\partial V}{\partial y}$ ...(1)

अतः आयलर प्रमेय से $x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} = 1\times V$ [$\because V = \tan u$ प्रथम घात का समघाती फलन है]

$\Rightarrow x\sec^2 u\frac{\partial u}{\partial x} + y\sec^2 u\frac{\partial u}{\partial y} = \tan u \Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tan u}{\sec^2 u} = \frac{\frac{\sin u}{\cos u}}{\frac{1}{\cos^2 u}} = \sin u\cos u$

$\Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}2\sin u\cos u$

$\Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\sin 2u$ $[\because \sin 2u = 2\sin u\cos u]$ साबित हुआ।

उदाहरण 3. यदि $u = \log\frac{x^4+y^4}{x+y}$ तो दिखायें कि $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3.$

हल : प्रश्न से, $u = \log\frac{x^4+y^4}{x+y} \Rightarrow e^u = \frac{x^4+y^4}{x+y} = \frac{x^4\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^4\right]}{x\left[1+\frac{y}{x}\right]} = x^3\,\phi\left(\frac{y}{x}\right)$

अतः $V = e^u$ तृतीय घात का समघाती फलन है।

अतः आयलर प्रमेय से $x\frac{\partial V}{\partial x} + y\frac{\partial V}{\partial y} = 3\times V$ $(n = 3)$

$\Rightarrow x e^u\frac{\partial u}{\partial x} + y e^u\frac{\partial u}{\partial y} = 3e^u$ $\left[\because V = e^u \therefore \frac{\partial V}{\partial x} = e^u\frac{\partial u}{\partial x}\text{ तथा }\frac{\partial V}{\partial y} = e^u\frac{\partial u}{\partial y}\right]$

$\Rightarrow x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3e^u}{e^u} = 3$ साबित हुआ।

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 4. यदि z, x तथा y में n घात का समघाती फलन हो, तो दिखायें कि

(i) $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=(n-1)\dfrac{\partial z}{\partial x}$ (ii) $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(n-1)\dfrac{\partial z}{\partial y}$

(iii) $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=n(n-1)z$ [2011]

हल : z, x तथा y में n घात का समघाती फलन है।

अत: आयलर प्रमेय से $$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz \quad ...(1)$$

$$1\times\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=n\frac{\partial z}{\partial x}$$ [(1) का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर]

या $\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=n\dfrac{\partial z}{\partial x}$ या $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=(n-1)\dfrac{\partial z}{\partial x}$ सिद्ध हुआ। ...(2)

(1) का पुन: y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$0+\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+1\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=n\frac{\partial z}{\partial y}$$ या $$x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=n\frac{\partial z}{\partial y}$$

या $$x\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(n-1)\frac{\partial z}{\partial y}$$ सिद्ध हुआ। ...(3)

(2) में x से तथा (3) मे y से गुणा कर जोड़ने पर

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(n-1)x\frac{\partial z}{\partial x}+(n-1)y\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+y^2\frac{\partial z^2}{\partial y^2}=(n-1)\left\{x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\right\}$$

$$=(n-1)nz \quad [(1) \text{ से }]$$

$$=n(n-1)z$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 5. दिये गए फलन के लिए आयलर प्रमेय का सत्यापन करें—

$$u=\sin^{-1}\frac{x}{y}-\tan^{-1}\frac{y}{x}$$ [1996, 97, 2009]

हल : प्रश्न से, $$u=\sin^{-1}\frac{x}{y}+\tan^{-1}\frac{y}{x} \quad ...(1)$$

$$\Rightarrow \quad u=x^0\sin^{-1}\frac{x}{y}+x^0\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

अत: u शून्य घात का समघाती फलन है।

अत: आयलर प्रमेय से $$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0 \quad ...(2)$$

अब (1) का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन से

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{y^2}}}\left(\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{y}{x^2+y^2}$$

www.polytechnicpdf.com

$$\therefore \qquad x\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}-\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad ...(3)$$

पुनः (1) का y के सापेक्ष आंशिक अवकलन से

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\times\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\times\frac{1}{x}=-\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\therefore \qquad y\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}+\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad ...(4)$$

(3) तथा (4) को जोड़ने पर $\qquad x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad ...(5)$

अतः (2) तथा (5) से आयलर प्रमेय सत्यापित हुआ।

उदाहरण 6. यदि $f(x,y)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{\log x-\log y}{x^2+y^2}$ तो सिद्ध करें कि $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+2f=0$

हल : प्रश्न से, $f(x,y)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{\log x-\log y}{x^2+y^2}$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{y}{x}\right)^0+\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{y}\right)-\left(\frac{1}{x^2}\right)\frac{\log y-\log x}{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}$$

$$\left[\because \frac{1}{xy}=\frac{1}{x^2}\times\frac{x}{y} \text{ तथा } x^2+y^2=x^2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)\right]$$

$$=x^{-2}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^0+\left(\frac{y}{x}\right)^{-1}-\frac{\log\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right] \qquad \left[\because \left(\frac{y}{x}\right)^0=1;\ \frac{x}{y}=\frac{1}{y/x}\right]$$

अतः $f(x,y)$, -2 घात का समघाती फलन है।

अतः आयलर प्रमेय से

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=-2f \quad\Rightarrow\quad x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+2f=0$$ साबित हुआ।

8.5 चर राशियों में परिवर्तन (Change of Variables)

यदि $u=f(x,y)$

जहाँ $x=\psi_1(t_1,t_2), y=\psi_2(t_1,t_2)$

तो $\qquad \frac{\partial u}{\partial t_1}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_1} \qquad$ तथा $\qquad \frac{\partial u}{\partial t_2}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t_2}$

पुनः यदि $x=\psi_1(t_1,t_2), y=\psi_2(t_1,t_2)$ को हल करने पर

$t_1=\phi_1(x,y), t_2=\phi_2(x,y),$

www.polytechnicpdf.com

तो $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\frac{\partial t_2}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t_2}\frac{\partial t_2}{\partial y}$

8.6 सम्पूर्ण अवकल (Total Differential)

यदि $u=f(x,y)$, जहाँ $x=\phi_1(t), y=\phi_2(t)$ तो $\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

8.7 अस्पष्ट फलन का प्रथम अवकल गुणांक (First Differential of an implicit Functions)

यदि $u=f(x,y)$, जहाँ $y=\phi(x)$

तो $\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}$ या $\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}$

अतः यदि अस्पष्ट फलन $f(x,y)=0$ तो $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y}$

नोट :

- $u=f(x\ y)$, तो $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदहारण 1. यदि $u=x^3+y^3$, जहाँ $x=a\cos t, y=b\sin t$ तो $\frac{du}{dt}$ का मान बतायें तथा परिणाम का सत्यापन करें।

हल : यहाँ $u=x^3+y^3$, $x=a\cos t$, तथा $y=b\sin t$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$=(3x^2)(-a\sin t)+(3y^2)(b\cos t) \quad \left[\because \frac{dx}{dt}=\frac{d}{dx}(a\cos t)=-a\sin t,\ \frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(b\sin t)=b\cos t\right]$$

$$=3(a^2\cos^2 t)(-a\sin t)+3(b^2\sin^2 t)b\cos t \quad [x \text{ तथा } y \text{ के मान से}]$$

$$=-3a^3\sin t\cos^2 t+3b^3\cos t\sin^2 t \quad ...(1)$$

सत्यापन : $\because \quad u=x^3+y^3$

$$=a^3\cos^3 t+b^3\sin^3 t$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dt}=-3a^3\cos^2 t\sin t+3b^3\sin^2 t\cos t \quad ...(2)$$

(1) तथा (2) समान हैं। अतः परिणाम सत्यापित हुआ।

उदाहरण 2. यदि $x^{\cos y}+y^{\sin x}=c$ तो आंशिक अवकलन विधि से $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करें।

हल : यहाँ $f(x,y)\equiv x^{\cos y}+y^{\sin x}-c=0$

www.polytechnicpdf.com

$$\therefore \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \cos y\, x^{\cos y - 1} + y^{\sin x} \log_e y \times \cos x \qquad \left[\because \frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \text{ तथा } \frac{d}{dx} a^x = a^x \log_e x\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^{\cos y} \log_e x \times (-\sin y) + \sin x y^{\sin x - 1}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-(\cos y\, x^{\cos y - 1} + \cos x \log_e y \times y^{\sin x})}{(-\sin y \log_e x \times x^{\cos y} + \sin x\, y^{\sin x - 1})}$$

अर्थात् $$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos y\, x^{\cos y - 1} + \cos x\, y^{\sin x} \log_e y}{\sin y\, x^{\cos y} \log_e x - \sin x\, y^{\sin x - 1}}$$ उत्तर

उदाहरण 3. यदि $u = f(y - z, z - x, x - y)$ तो दिखायें कि $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$. **[2015]**

हल : प्रश्न से, $u = f(y - z, z - x, x - y) = f(P, Q, R)$

जहाँ $y - z = P, z - x = Q, x - y = R$

अब $$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \frac{\partial Q}{\partial x} = -1, \frac{\partial R}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \frac{\partial R}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -1, \frac{\partial Q}{\partial z} = 1, \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

अब $u = f(P, Q, R)$ से

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial P} \times 0 + \frac{\partial u}{\partial Q}(-1) + \frac{\partial u}{\partial R}(1) = -\frac{\partial u}{\partial Q} + \frac{\partial u}{\partial R} \quad \ldots(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial P} \times 1 + \frac{\partial u}{\partial Q} \times 0 + \frac{\partial u}{\partial R} \times (-1) = \frac{\partial u}{\partial P} - \frac{\partial u}{\partial R} \quad \ldots(2)$$

तथा $$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial Q}\frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial P} \times (-1) + \frac{\partial u}{\partial Q} \times 1 - \frac{\partial u}{\partial R} \times 0 = -\frac{\partial u}{\partial P} + \frac{\partial u}{\partial Q} \quad \ldots(3)$$

$\therefore$ (1), (2) तथा (3) को जोड़ने पर $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

उदाहरण 4. यदि z, x और y चरों का फलन है तथा u और v दूसरे चर इस तरह हैं कि $u = lx + my, v = ly - mx$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (l^2 + m^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$ **[1990]**

हल : प्रश्न से, $u = lx + my, v = ly - mx$

तथा $z = f(u, v)$

अतः $\frac{\partial u}{\partial x} = l, \frac{\partial v}{\partial x} = -m, \frac{\partial u}{\partial y} = m, \frac{\partial v}{\partial y} =$ तथा $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} l + \frac{\partial z}{\partial v}(-m) = l\frac{\partial z}{\partial u} - m\frac{\partial z}{\partial v}$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(l\frac{\partial z}{\partial u} - m\frac{\partial z}{\partial v}\right) = l\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - m\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$= l\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} - m\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}$$

www.pdftechnicpdf.com

$$= l\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\times l - m\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\times(-m) \qquad \left[\because \frac{\partial u}{\partial x} = l, \frac{\partial v}{\partial x} = -m\right]$$

अर्थात् $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(l^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + m^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

इसी प्रकार $$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = m^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + l^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \qquad \therefore \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (l^2+m^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$$

उदाहरण 5. यदि $u = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$ तथा $y = r\sin\theta$ तो सिद्ध कीजिए—

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

[1991]

हल : प्रश्न से, $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ तथा $f(x, y) = u$

अतः $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$

अब $$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \qquad ...(1)$$

तथा $$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta) \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial u}{\partial y} \qquad ...(2)$$

(1) तथा (2) के वर्ग करके जोड़ने पर

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta\right)^2$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\cos\theta - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\cos\theta$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 6. यदि $(\cos x)^y = (\sin y)^x$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान बतायें।

हल : यहाँ $f(x, y) \equiv (\cos x)^y - (\sin y)^x = 0$

तो $$\frac{\partial f}{\partial x} = y(\cos x)^{y-1}(-\sin x) - (\sin y)^x \log\sin y$$

$$= -[y\sin x(\cos x)^{y-1} + (\sin y)^x \log\sin y]$$

तथा $$\frac{\partial f}{\partial y} = (\cos x)^y \log\cos x - x(\sin y)^{x-1}\cos y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial y} = +\frac{[y\sin x(\cos x)^{y-1} + (\sin y)^x \log\sin y]}{(\cos x)^y \log\cos x - x(\sin y)^{x-1}\cos y}$$

$$= \frac{y\sin x(\cos x)^{y-1} + (\cos x)^y \log\sin y}{\left[(\cos x)^y \log\cos x - x\frac{(\cos x)^y}{\sin y}\cos y\right]} = \frac{(\cos x)^y[y\tan x + \log\sin y]}{(\cos x)^y[\log\cos x - x\cot y]}$$

$[\because (\cos x)^y = (\sin y)^x]$

www.polytechnicpdf.com

अतः $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y \tan x + \log \sin y}{\log \cos x - x \cot y}$ उत्तर

प्रश्नावली 8.1

1. निम्नलिखित फलनों के लिए $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ तथा $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ का मान ज्ञात करें—

   (i) $u = \log(x^2 + y^2)$ (ii) $u = x^2 y - xy^2$

2. यदि $u = x^2 y + y^2 z + z^2 x$ तो सिद्ध करें कि $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = (x + y + z)^2$

3. (i) यदि $u = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$ तो दिखायें कि $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 3u$ [1998]

   (ii) यदि $u = x^2 + y^2 + z^2$ तो दिखायें कि $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + z\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2u$ [2006]

4. (i) यदि $z = ax^2 + 2hxy + by^2$ तो दिखायें कि $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$

   (ii) यदि $z = x \sin y + y \sin x$ तो सिद्ध करें $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ [2014]

5. यदि $u = \log_e (x^2 + y^2 + z^2)$ तो दिखायें कि $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = \dfrac{-4yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ [1993]

6. यदि $u = \log \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$ तो दिखायें कि $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$

7. यदि $z = x^3 + y^3 - 3axy$ तो सिद्ध करें कि $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$ [1996, 2003]

8. यदि $u = x^2 \tan^{-1} \dfrac{x}{y} - y^2 \tan^{-1} \dfrac{y}{x}$ तो सिद्ध करें $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ [1995, 2002, 04]

9. यदि $u = \log(x^2 + y^2)$ तो सिद्ध करें कि $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

10. यदि $f = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ तो सिद्ध करें कि $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$

11. यदि $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ तो सिद्ध करें कि

    (i) $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\right) u = \dfrac{3}{x + y + z}$ [2001]

    (ii) $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = -\dfrac{9}{(x + y + z)^2}$ [2008]

www.polytechnicpdf.com

$$\left[\text{संकेत}: \left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = \left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right.$$

$$\left. = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{x+y+z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{x+y+z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{3}{x+y+z}\right)\right].$$

12. यदि $u = \sin^{-1}\frac{x}{y}+\tan^{-1}\frac{y}{x}$ तो दिखायें कि $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$. **[1996, 97, 2009]**

13. यदि $z = f(x+ct)+\phi(x-ct)$ तो सिद्ध करें $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ **[2007]**

14. यदि $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ तो

(i) $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2=1$ (ii) $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=0$

$\left[\text{संकेत}: \text{(i) } r^2 = x^2+y^2 \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\theta;\ \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\sin\theta\right]$

15. यदि $f(x,y) = \log(x^2+y^2)+\tan^{-1}\frac{y}{x}$ तो सिद्ध करें कि $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

16. यदि $u = \sin^{-1}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ तो सिद्ध करें कि $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial y}$ **(1998)**

17. यदि $u = \cos^{-1}\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ तो सिद्ध करें कि $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}\cot u$.

18. यदि $u = \sin^{-1}\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ तो सिद्ध करें कि $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{2}\tan u$

19. दिए गए फलन $u = x^3+y^3+z^3+3xyz$ के लिए आयलर प्रमेय का सत्यापन करें। **[1998]**

$\left[\text{संकेत}: x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=3u\right]$

20. यदि $z=\frac{x^2+y^2}{x+y}$ तो सिद्ध करें कि $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2+y^2}{x+y}$ **[1995]**

21. आयलर प्रमेय की सहायता से दिखायें कि यदि z, x तथा y में n घात का समघाती फलन हो तथा $z = f(u)$ हो, तो

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=n\frac{f(u)}{f'(u)}.$$

$\left[\text{संकेत}: x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=nz \text{ में } \frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} \text{ तथा } \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y} \text{ रखें}\right]$

22. यदि $x^y+y^x=a^b$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान निकालें।

23. यदि $z = xy^2+x^2y$ तथा $x = at^2, y = 2at$ तो $\frac{dz}{dt}$ का मान आंशिक अवकलन विधि से ज्ञात करें तथा इसका सत्यापन करें।

24. यदि $u = x^3y^4+x^4y^3$, तथा $x = t^2, y = t^3$ तो $\frac{du}{dt}$ का मान निकालें।

www.polytechnicpdf.com

25. यदि $y^{\cot x} + (\tan^{-1} x)^y = 1$ तो $\frac{dy}{dx}$ का मान आंशिक अवकलन विधि से निकालें।

26. यदि $u = f(y-z, z-x, x-y)$ तो दिखायें कि $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ [2015

27. यदि $z = f(x, y)$ जहाँ $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$ तो दिखायें कि $y\frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial z}{\partial v} = e^{2u}\frac{\partial z}{\partial y}$

[संकेत : $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}e^u \cos v + \frac{\partial z}{\partial y}e^u \sin v = x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$

इसी तरह $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = -y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y}$]

28. यदि फलन $f(x, y)$, नये चर u तथा v के रूप में निम्न रूप में व्यक्त हो—

$u = x\cos\alpha + y\sin\alpha; \quad v = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$ तो दिखायें कि $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

[संकेत : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\cos\alpha - \frac{\partial f}{\partial v}\sin\alpha\right]$

$= \cos\alpha\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} - \sin\alpha\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \cos^2\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \sin^2\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

तथा $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin^2\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \cos^2\alpha\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$]

29. यदि $u = f(r)$ तथा $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ तो सिद्ध करें कि $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r}f'(r)$

[संकेत : $r^2 = x^2 + y^2; \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}; \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = f'\frac{x}{r}$ तथा $\frac{\partial u}{\partial y} = f'\frac{y}{r}$]

30. यदि $u = \tan^{-1}\frac{xy}{\sqrt{1+x^2-y^2}}$ तो सिद्ध करें $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^{3/2}}}$ [1998]

31. यदि $z = x f\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ तो सिद्ध करें $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ [2011]

उत्तरमाला

1. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$

2. $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y - y^3; \frac{\partial u}{\partial y} = x^3 - 3xy^2$

22. $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{yx^{y-1} + y^x \log y}{xy^{x-1} + x^y \log x}\right)$

23. $2a^3 t^3 (8+5t)$

24. $t^{16}(18t+17)$

25. $\frac{y^{\cot x}\,\text{cosec}^2 x \log y - y(\tan^{-1} x)^{y-1}\, x\frac{1}{1+x^2}}{\cot . y^{\cot x - 1} + (\tan^{-1} x)^y . \log\tan^{-1} x}$

□□□

www.polytechnicpdf.com

9

CHAPTER

जैकोबियन
(Jacobians)

9.1 परिभाषा (Definition)

यदि u तथा v दो स्वतंत्र चरों x तथा y के फलन हों, तो सारणिक

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

को x तथा y के सापेक्ष u तथा v का जैकोबियन कहा जाता है तथा इसे

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \text{ या } J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) \text{ या } J(u, v) \text{ से व्यक्त किया जाता है।}$$

इसी तरह तीन फलनों u, v तथा w का x, y, z के सापेक्ष जैकोबियन

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \text{ है।}$$

9.2 जैकोबियन का व्यापक रूप

यदि $u_1, u_2, \ldots, u_n$ स्वतंत्र चरों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ के फलन हों, तो जैकोबियन

$$J(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{\partial(u_1, u_2 \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2 \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

www.polytechnicpdf.com

9.2.1 विशिष्ट स्थितियाँ (Particular Cases)

(i) यदि $u_1 = f_1(x_1)$, $u_2 = f(x_1, x_2), \ldots, u_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

तो $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} = \ldots = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} = 0;\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_4} = \ldots = \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0 \ldots,$ आदि।

अतः
$$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial u_n}{\partial x_n}$$

अर्थात् इस स्थिति में जैकोबियन सारणिक के मुख्य विकर्ण के अवयवों के गुणनफल के बराबर होता है।

(ii) यदि J, फलनों u, v, w का x, y, z के सापेक्ष जैकोबियन है तो x, y, z का u, v, w के सापेक्ष जैकोबियन J' द्वारा सूचित किया जाता है, अर्थात्

यदि $J = \dfrac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}$ तो $J' = \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$.

तथा $J \times J' = 1$ अर्थात् $\dfrac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \times \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = 1$ [देखे उदाहरण (1)]

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \times \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1$ **[2006, 08]**

हल : माना $u = f_1(x, y), v = f_2(x, y)$ ...(1)

समी० (1) को u तथा v के सापेक्ष आंशिक रूप से अवकलित करने पर

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial u} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \Rightarrow 1 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial u}{\partial v} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \Rightarrow 0 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial u} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \Rightarrow 0 = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial v}{\partial v} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \Rightarrow 1 = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned}\right\} \quad \ldots(2)$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \times \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$ [परिभाषा से]

www.polytechnicpdf.com

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$ [पंक्ति तथा स्तंभ गुणन से]

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$ [(2) से]

$$= 1$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 2. यदि $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, तो दिखाइये :

(i) $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$ (ii) $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{r}$ **[1999, 2000]**

(iii) $J' = \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$, तथा $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ तो दिखाये $J' = \frac{1}{J}$ **[2008]**

हल : (i) प्रश्न से
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots(1)$$

अतः
$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$ [(1) से]

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta).$$

$$= r \times 1 = r$$ सिद्ध हुआ।

(ii) पुनः (1) से,
$$\left.\begin{aligned} \tan\theta = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{y}{x} \\ \text{तथा} \quad x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots(2)$$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ के x तथा y के सापेक्ष आंशिक अवकलन से

$$\sec^2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \quad \text{या} \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2\sec^2\theta} = \frac{-y}{r^2\cos^2\theta \times \frac{1}{\cos^2\theta}} = -\frac{y}{r^2}$$

तथा
$$\sec^2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{x} \quad \text{या} \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{x\sec^2\theta} = \frac{1 \times \cos^2\theta}{x} = \frac{x^2}{r^2} \times \frac{1}{x} = \frac{x}{r^2}$$ [(1) से]

पुनः $x^2 + y^2 = r^2$ का x तथा y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$2x = 2r\frac{\partial r}{\partial x} \quad \text{या} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \text{तथा} \quad 2y = 2r\frac{\partial r}{\partial y} \quad \text{या} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{r^3} + \frac{y^2}{r^3} = \frac{x^2 + y^2}{r^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r} \quad \ldots(3)$$

सिद्ध हुआ।

www.polytechnicpdf.com

(iii) $\because \quad J = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$ [(2) से] तथा $J' = \dfrac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} = \dfrac{1}{r}$ [(3) से]

$\therefore \quad J' = \dfrac{1}{J}$ सिद्ध हुआ।

नोट :

• यदि $J = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ तो $J' = \dfrac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$

अब $J \times J' = 1 \Rightarrow J' = \dfrac{1}{J}$.

उदाहरण 3. यदि $x = u(1+v)$ और $y = v(1+u)$, तो $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ ज्ञात करें। [UP BTE 2009, 13]

हल : यहाँ, $x = u(1+v), y = v(1-u)$ ...(1)

समी० (1) का u तथा v के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1+v, \frac{\partial x}{\partial v} = u, \frac{\partial y}{\partial u} = v, \frac{\partial y}{\partial v} = 1+u$$

अतः
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+v & u \\ v & 1+u \end{vmatrix} = (1+v)(1+u) - uv$$

$$= 1 + u + v + uv - uv = 1 + u + v$$ उत्तर

उदाहरण 4. यदि $x = r\sin\theta\cos\phi; \quad y = r\sin\theta\sin\phi; \quad z = r\cos\theta$

तो सिद्ध कीजिये कि $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin\theta$. [2000, 05, 15]

हल : यहाँ, $x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$

$$\therefore \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\sin\phi, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \cos\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\phi, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = -r\sin\theta\sin\phi, \quad \frac{\partial y}{\partial \phi} = r\sin\theta\cos\phi, \quad \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r \times r \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$ [C_2 तथा C_3 से r उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= r^2 \{\sin\theta\cos\phi(0 + \sin^2\theta\cos\phi) - \cos\theta\cos\phi(0 - \sin\theta\cos\theta\cos\phi)$$
$$- \sin\theta\sin\phi(-\sin^2\theta\sin\phi - \cos^2\theta\sin\phi)\}$$

www.polytechnicpdf.com

$$= r^2 \{\sin^3\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\cos^2\phi\sin\theta + \sin^3\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta\sin^2\phi\sin\theta\}$$
$$= r^2 \{\sin\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \cos^2\theta.\sin\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi)\}$$
$$= r^2 \{\sin^3\theta \times 1 + \cos^2\theta.\sin\theta\} \qquad [\because \sin^2\phi + \cos^2\phi = 1]$$
$$= r^2 \sin\theta\{\sin^2\theta + \cos^2\theta\} = r^2\sin\theta$$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 5. यदि $u_1 = \frac{x_2x_3}{x_1}, u_2 = \frac{x_3x_1}{x_2}, u_3 = \frac{x_1x_2}{x_3}$ तो दिखाइये कि $J(u_1, u_2, u_3) = 4$.

[2002, 09, 14]

हल : यहाँ, $u_1 = \frac{x_2x_3}{x_1}, u_2 = \frac{x_3x_1}{x_2}, u_3 = \frac{x_1x_2}{x_3}$

$$\therefore \quad J(u_1, u_2, u_3) = \frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{-x_2x_3}{x_1^2} & \frac{x_3}{x_1} & \frac{x_2}{x_1} \\ \frac{x_3}{x_2} & \frac{-x_3x_1}{x_2^2} & \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{x_2}{x_3} & \frac{x_1}{x_3} & \frac{-x_1x_2}{x_3^2} \end{vmatrix} \quad \left[\because \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -\frac{x_2x_3}{x_1^2}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{x_3}{x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{x_2}{x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{x_3}{x_2}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{x_3x_1}{x_2^2}, \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = \frac{x_1}{x_2} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \frac{x_2}{x_3}, \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{x_1}{x_3}; \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = -\frac{x_1x_2}{x_3^2} \end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{x_1^2} \times \frac{1}{x_2^2} \times \frac{1}{x_3^2} \begin{vmatrix} -x_2x_3 & x_3x_1 & x_1x_2 \\ x_2x_3 & -x_3x_1 & x_1x_2 \\ x_2x_3 & x_3x_1 & -x_1x_2 \end{vmatrix}$$

[R_1 से $\frac{1}{x_1^2}$, R_2 से $\frac{1}{x_2^2}$ तथा R_3 से $\frac{1}{x_3^2}$ उभयनिष्ठ लेने पर]

$$= \frac{x_1^2 \times x_2^2 \times x_3^2}{x_1^2 \times x_2^2 \times x_3^2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1(1-1) - 1(-1-1) + 1(1+1)$$

$$= 0 + 2 + 2 = 4$$

$$\therefore \quad J(u_1, u_2, u_3) = 4$$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 6. यदि $u = xyz, \quad v = xy + yz + zx \quad w = x + y + z$, तो दिखाइये कि

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = (x-y)(y-z)(z-x).$$

[UP BTE 2007]

हल : $u = xyz, v = xy + yz + zx, w = x + y + z$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y + z, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x + z, \frac{\partial v}{\partial z} = y + x$$

www.polytechnicpdf.com

$$\frac{\partial w}{\partial x}=1,\ \frac{\partial w}{\partial y}=1,\ \frac{\partial w}{\partial z}=1.$$

अब $$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} yz & zx & xy\\ y+z & z+x & x+y\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$ [आंशिक अवकलनों का मान रखने पर]

$$=-\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ y+z & z+x & x+y\\ yz & zx & xy\end{vmatrix}\ [R_1\leftrightarrow R_3]$$

$$=-\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ y+z & x-y & y-z\\ yz & z(x-y) & (y-z)x\end{vmatrix}\quad \begin{bmatrix}C_2=C_2-C_1\\ C_3=C_3-C_2\end{bmatrix}$$

$$=-\{(x-y)(y-z)x-(y-z)z(x-y)\}-0+0$$

$$=-\{(y-z)(x-y)(x-z)\}=-(x-y)(y-z)(z-x)\times(-1)$$

$$=(x-y)(y-z)(z-x)$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 7. यदि $x=c\cos u\cosh v;\ y=c\sin u\sinh v$, तो दिखायें कि $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{2}c^2(\cos 2u-\cosh 2v)$

हल : प्रश्न से, $x=c\cos u\cosh v,\ y=c\sin u\sinh v$

अतः $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-c\sin u\cosh v & c\sin u\sinh v\\ c\cos u\sinh v & c\sin u\cosh v\end{vmatrix}$$

$$=-c^2\sin^2 u\cosh^2 v-c^2\cos^2 u\sinh^2 v$$

$$=-\frac{1}{2}c^2[(1-\cos 2u)\cosh^2 v+(1+\cos 2u)\sinh^2 v]$$

$$=-\frac{1}{2}c^2[\cosh^2 v+\sinh^2 v-\cos 2u(\cosh^2 v-\sinh^2 v)$$

$$=-\frac{1}{2}c^2[\cosh 2v-\cos 2u]$$

[$\because \cosh^2 v+\sinh^2 v=\cosh 2v$ तथा $\cosh^2 v-\sinh^2 v=1$]

उदाहरण 8. यदि $y_1=\cos x_1, y_2=\sin x_1\cos x_2, y_3=\sin x_1\sin x_2\cos x_3,\ldots,$

$$y_n=\sin x_1\sin x_2\sin x_3\ldots\sin x_{n-1}\cos x_n$$

तो $\frac{\partial(y_1,y_2,\ldots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ का मान ज्ञात करें।

हल : प्रश्न से, $y_1=\cos x_1, y_2=\sin x_1\cos x_2,\ldots,y_n=\sin x_1\sin x_2\ldots\sin x_{n-1}\cos x_n$

$$\therefore\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1}=-\sin x_1,\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2}=-\sin x_1\sin x_2,\ldots,\frac{\partial y_n}{\partial x_n}=-\sin x_1\sin x_2\ldots\sin x_{n-1}\sin x_n$$

स्पष्ट है : $y_1=f_1(x_1);\ y_2=f_2(x_1,x_2);\ldots;y_n=f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

www.polytechnicpdf.com

$$\therefore \quad \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \times \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \times \ldots \times \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$$

$$= (-\sin x_1)(-\sin x_1 \sin x_2) \ldots (-\sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_n)$$

$$= (-1)^n \sin^n x_1 \sin^{n-1} x_2 \sin^{n-2} x_3 \ldots \sin x_n.$$ उत्तर

उदाहरण 9. यदि $y_1 = 1 - x_1, y_2 = x_1(1 - x_2), y_3 = x_1 x_2 (1 - x_3), \ldots, y_n = x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(1 - x_n)$, तो सिद्ध कीजिये कि $\frac{\partial(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)} = (-1)^n x_1^{n-1} x_2^{n-2} x_3^{n-3} \ldots x_{n-1}$ **[UP BTE 2004]**

हल : प्रश्न से,

$$y_1 = 1 - x_1, y_2 = x_1(1 - x_2), y_3 = x_1 x_2 (1 - x_3), \ldots,$$

$$y_n = x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(1 - x_n)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -1, \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = -x_1, \frac{\partial y_3}{\partial x_3} = -x_1 x_2, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = -x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$$

$$y_1 = f_1(x_1); y_2 = f_2(x_1, x_2); \ldots; y_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)} = \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = (-1)(-x_1)(-x_1 x_2) \ldots (-x_1 x_2 \ldots x_{n-1})$$

$$= (-1)^n x_1^{n-1} x_2^{n-2} \ldots x_{n-1}$$ सिद्ध हुआ।

9.3 फलनों के फलन का जैकोबियन (Jacobian of Function of Functions)

प्रमेय : यदि u तथा v, r एवं s के फलन हैं, जहाँ r तथा s पुनः x एवं y के फलन हैं, तो

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)} \times \frac{\partial(r, s)}{\partial(x, y)}.$$

प्रमाण : माना $u = f_1(r, s), v = f_2(r, s). r = f_3(x, y)$ तथा $s = f_4(x, y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} \qquad \ldots(1)$$

तो परिभाषा से $\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, s)} \times \frac{\partial(r, s)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial s} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} \end{vmatrix}$$, [सारणिकों में पंक्ति व स्तंभ गुणन से]

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$ [(1) से]

$$= \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$ प्रमाणित हुआ।

www.bdytechnicpdf.com

नोट :

(i) इसी तरह $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(r, s, t)} \times \frac{\partial(r, s, t)}{\partial(x, y, z)}$

(ii) उपरोक्त सूत्र सामान्य अवकलन के सूत्र $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$ के समान हैं।

9.4 अस्पष्ट फलनों का जैकोबियन (Jacobian of Implicit Functions)

कथन (Statement) : यदि u, v स्वतन्त्र चरों x, y के पदों में निम्न अस्पष्ट फलनों द्वारा दिए गए हों :

$$f_1(u, v, x, y) = 0$$
$$f_2(u, v, x, y) = 0$$

तो
$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = (-1)^2 \frac{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}}{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}}.$$

प्रमाण : दी गई शर्तों से

$$f_1(u, v, x, y) = 0 \quad \ldots(1)$$
$$f_2(u, v, x, y) = 0 \quad \ldots(2)$$

(1) तथा (2) का x एवं y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \ldots(3)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \quad \ldots(4)$$

तथा
$$\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \quad \ldots(5)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \quad \ldots(6)$$

अब
$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} \times \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

[पंक्ति व स्तम्भ के गुणन से]

$$= \begin{vmatrix} -\frac{\partial f_1}{\partial x} & -\frac{\partial f_1}{\partial y} \\ -\frac{\partial f_2}{\partial x} & -\frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$ [(3), (4), (5) तथा (6) से]

अर्थात्
$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)} \times \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = (-1)^2 \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = (-1)^2 \frac{\partial(f_1, f_2)/\partial(x, y)}{\partial(f_1, f_2)/\partial(u, v)}.$$ सिद्ध हुआ।

9.4.1 व्यापक रूप (General Form)

यदि स्वतंत्र चर $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $u_1, u_2, \ldots, u_n$ से अस्पष्ट रूप में निम्न सम्बन्धों द्वारा दिए जाएँ :

www.Prutechnicpdf.com

$$f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$
$$f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$f_n(u_1, u_2, \ldots, u_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

तो $$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = (-1)^n \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)/\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)/\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$$

9.4.2 विशेष स्थिति (Particular Case)

यदि दिया गया सम्बन्ध निम्न रूप का है :

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1) = 0$$
$$f_2(x_2, x_3, \ldots, x_n, u_1, u_2) = 0$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$f_n(x_n, u_1, u_2, \ldots, u_n) = 0$$

तो $$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)} = \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\frac{\partial f_3}{\partial u_3}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial u_n}$$

तथा $$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n)} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = (-1)^n \frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\dfrac{\partial f_3}{\partial x_3}\cdots\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}\dfrac{\partial f_2}{\partial u_2}\dfrac{\partial f_3}{\partial u_3}\cdots\dfrac{\partial f_n}{\partial u_n}}$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 10. यदि $u = 2xy, v = x^2 - y^2$ जहाँ $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ हैं, तो $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)}$ का मान बताइये।

हल : यहाँ $u = 2xy, v = x^2 - y^2, x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2y, \frac{\partial u}{\partial y} = 2x, \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

तथा $$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$$

अब $$\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \theta)} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \times \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$$

$$= \begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= (-4y^2 - 4x^2) \times (r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)$$

$$= -4r(x^2 + y^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

www.polytechnicpdf.com

$$= -4r(x^2+y^2) = -4r \times r^2 \qquad [\because x^2+y^2=r^2]$$
$$= -4r^3$$ उत्तर

उदाहरण 11. यदि $x = uv;\ y = \dfrac{u+v}{u-v}$ तो $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ का मान ज्ञात करें।

हल : प्रश्न से, $x = uv,\ y = \dfrac{u+v}{u-v}$

$$\therefore \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial(uv)}{\partial u} = v,\ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial(uv)}{\partial v} = u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{(u-v)\times 1 - (u+v)\times 1}{(u-v)^2} = \frac{-2v}{(u-v)^2}, \text{ इसी तरह } \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2u}{(u-v)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ \frac{-2v}{(u-v)^2} & \frac{2u}{(u-v)^2} \end{vmatrix}$$

$$\text{i.e.,} \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{2uv}{(u-v)^2} - \left(\frac{-2uv}{(u-v)^2}\right) = \frac{4uv}{(u-v)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}} = 1\Big/\frac{4uv}{(u-v)^2} = \frac{(u-v)^2}{4uv} \qquad \left[\because \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \times \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1\right]$$ उत्तर

उदाहरण 12. यदि $x+y+z = u,\ y+z = uv;\ z = uvw$ तो दिखायें कि $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = u^2 v$.

हल : माना $\quad f_1 = x+y+z-u;\ \ f_2 = y+z-uv$ तथा $f_3 = z-uvw$

$$\therefore \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = -1,\ \frac{\partial f_1}{\partial v} = 0,\ \frac{\partial f_1}{\partial w} = 0 \quad \text{तथा} \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial f_1}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} = -v,\ \frac{\partial f_2}{\partial v} = -u,\ \frac{\partial f_2}{\partial w} = 0 \quad \text{तथा} \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1,\ \frac{\partial f_2}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u} = -vw,\ \frac{\partial f_3}{\partial v} = -uw,\ \frac{\partial f_3}{\partial w} = -uv \quad \text{तथा} \quad \frac{\partial f_3}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f_3}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial f_3}{\partial z} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{तथा} \quad \frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} & \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} & \frac{\partial f_2}{\partial w} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} & \frac{\partial f_3}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -v & -u & 0 \\ -vw & -uw & -uv \end{vmatrix} = -u^2 v$$

www.polytechnicpdf.com

किन्तु $$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=(-1)^3\frac{\dfrac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(u,v,w)}}{\dfrac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)}}=-\frac{(-u^2v)}{1}=u^2v$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण **13.** यदि $u^3+v^3+w^3=x+y+z;$

$$u^2+v^2+w^2=x^3+y^3+z^3$$

$$u+v+w=x^2+y^2+z^2$$

तो सिद्ध कीजिये कि $$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=\frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{(u-v)(v-w)(w-u)}.$$

हल : माना $$f_1\equiv u^3+v^3+w^3-x-y-z=0$$
$$f_2\equiv u^2+v^2+w^2-x^3-y^3-z^3=0$$
$$f_3\equiv u+v+w-x^2-y^2-z^2=0$$

अब $$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=(-1)^3\frac{\dfrac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)}}{\dfrac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(u,v,w)}}=-\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}&\frac{\partial f_1}{\partial y}&\frac{\partial f_1}{\partial z}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}&\frac{\partial f_2}{\partial y}&\frac{\partial f_2}{\partial z}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x}&\frac{\partial f_3}{\partial y}&\frac{\partial f_3}{\partial z}\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial u}&\frac{\partial f_1}{\partial v}&\frac{\partial f_1}{\partial w}\\ \frac{\partial f_2}{\partial u}&\frac{\partial f_2}{\partial v}&\frac{\partial f_2}{\partial w}\\ \frac{\partial f_3}{\partial u}&\frac{\partial f_3}{\partial v}&\frac{\partial f_3}{\partial w}\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-1&-1&-1\\ -3x^2&-3y^2&-3z^2\\ -2x&-2y&-2z\end{vmatrix}\div\begin{vmatrix}3u^2&3v^2&3w^2\\ 2u&2v&2w\\ 1&1&1\end{vmatrix}$$

[आंशिक अवकलनों के मान रखने पर]

$$=-(-1)\times(-3)\times(-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\ x^2&y^2&z^2\\ x&y&z\end{vmatrix}\div 3\times 2\begin{vmatrix}u^2&v^2&w^2\\ u&v&w\\ 1&1&1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{(u-v)(v-w)(w-u)}$$ [सारणिको के सरलीकरण से] सिद्ध हुआ।

उदाहरण **14.** यदि $u_1=x_1+x_2+x_3+x_4, u_1u_2=x_2+x_3+x_4, u_1u_2u_3=x_3+x_4, u_1u_2u_3u_4=x_4$ तो दिखाइये कि $\dfrac{\partial(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial(u_1,u_2,u_3,u_4)}=u_1^3u_2^2u_3$

हल : दी गई शर्तों से $$f_1\equiv u_1-x_1-x_2-x_3-x_4=0$$
$$f_2\equiv u_1u_2-x_2-x_3-x_4=0$$
$$f_3\equiv u_1u_2u_3-x_3-x_4=0$$
तथा $$f_4\equiv u_1u_2u_3u_4-x_4=0$$

स्पष्ट है कि f_1,f_2,f_3,f_4 क्रमशः u_1,u_1 तथा u_2; u_1,u_2 तथा u_3 एवं u_1,u_2,u_3,u_4 के फलन हैं।

$$\therefore\quad \frac{\partial(f_1,f_2,f_3,f_4)}{\partial(u_1,u_2,u_3,u_4)}=\frac{\partial f_1}{\partial u_1}\frac{\partial f_2}{\partial u_2}\frac{\partial f_3}{\partial u_3}\frac{\partial f_4}{\partial u_4}=1\times u_1\times u_1u_2\times u_1u_2u_3$$
$$=u_1^3u_2^2u_3$$

पुनः f_1,f_2,f_3,f_4 क्रमशः x_1,x_2,x_3,x_4; x_2,x_3,x_4; x_3,x_4 एवं x_4 के फलन हैं।

www.polytechnicpdf.com

$$\therefore \quad \frac{\partial(f_1, f_2, f_3, f_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\frac{\partial f_4}{\partial x_4} = (-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1) = 1$$

अतः $$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)} = (-1)^4 \frac{\dfrac{\partial(f_1, f_2, f_3, f_4)}{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}}{\dfrac{\partial(f_1, f_2, f_3, f_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}} = 1 \times \frac{u_1^3 u_2^3 u_3}{1} = u_1^3 u_2^2 u_3$$ सिद्ध हुआ।

9.5 अस्पष्ट फलनों के आंशिक अवकल गुणांक (Partial Derivatives of Implicit Functions)

यदि $f_1(x, y; u, v) = 0$ तथा $f_2(x, y; u, v) = 0$ तो

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, v)}}{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, x)}}{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, v)}}{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, y)}}{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}} \quad \text{तथा} \quad \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, y)}}{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}} \quad \text{आदि।}$$

9.6 दो या अधिक फलनों का फलनीय सम्बन्ध (Functional Relation of Two or More Functions)

दो या दो से अधिक फलनों के स्वतंत्र व परतंत्र होने की जाँच निम्न प्रमेय से की जाती है :

कथन : यदि $u(x, y)$ तथा $v(x, y)$, जो स्वतंत्र चर x एवं y के फलन हैं, तो ये फलन परस्पर स्वतंत्र (independent) नहीं होंगे अर्थात् इनके बीच फलनीय सम्बन्ध (Functional Relation) होगा, यदि और केवल यदि $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$.

प्रमाण : माना $u(x, y)$ तथा $v(x, y)$ फलनीय परतंत्र (Functionally dependent) हैं, तथा इनमें परस्पर फलनीय सम्बन्ध हैं, जो $f(u, v) = 0$ से दिया जाता है।

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad & \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \text{तथा} \quad & \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots(1)$$

ये (1) समघात समीकरण हैं। अतः इनका हल अशून्य (non-trivial) होगा यदि

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$$

अतः $u(x, y)$ तथा $v(x, y)$ फलनीय रूप से परतंत्र हैं यदि फलनों में फलनीय सम्बन्ध है तथा उनका जैकोबियन शून्य है।

www.polytechnicpdf.com

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 15. यदि $u^2 + xv^2 - xy = 0,\ u^2 + xyv + v^2 = 0$ तो $\frac{\partial u}{\partial x}$ और $\frac{\partial u}{\partial y}$ का मान निकालें।

हल : यहाँ $f_1 \equiv u^2 + xv^2 - xy = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = v^2 - y,\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = -x,\ \frac{\partial f_1}{\partial u} = 2u,\ \frac{\partial f_1}{\partial v} = 2vx$

$$f_2 \equiv u^2 + xyv + v^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = yv,\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = -1,\ \frac{\partial f_2}{\partial u} = 2u,\ \frac{\partial f_2}{\partial v} = xy + 2v$$

अब
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, v)}}{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} v^2 - y & 2vx \\ vy & xy + 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2vx \\ 2u & xy + 2v \end{vmatrix}} = \frac{x^2y + 2vx + 2v^2x^2}{2uxy + 4uv - 4uvx}$$ उत्तर

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, v)}}{\dfrac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} -x & 2vx \\ xv & xy + 2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2vx \\ 2u & xy + 2v \end{vmatrix}} = \frac{x^2y^2 + 2vx + 2v^2x^2}{2uxy + 4uv - 4uvx}$$ उत्तर

उदाहरण 16. यदि $x = u + v + w,\ y = u^2 + v^2 + w^2,\ z = u^3 + v^3 + w^3$ तो दिखायें $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{vw}{(u - v)(u - w)}$.

हल : माना $f_1 \equiv u + v + w - x = 0$

$$f_2 \equiv u^2 + v^2 + w^2 - y = 0$$
$$f_3 \equiv u^3 + v^3 + w^3 - z = 0$$

सूत्र से,
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, v, w)}}{\dfrac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(u, v, w)}} \quad \ldots(1)$$

अब
$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, v, w)} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2v & 2w \\ 0 & 3v^2 & 3w^2 \end{vmatrix} = -1\,(6vw^2 - 6v^2w)$$
$$= 6vw\,(v - w)$$

तथा
$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2u & 2v & 2w \\ 3u^2 & 3v^2 & 3w^2 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & v - u & w - u \\ u^2 & v^2 - u^2 & w^2 - u^2 \end{vmatrix}$$
$$= 6\,(v - u)(w - u) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 1 \\ u^2 & v - u & w + u \end{vmatrix}$$
$$= 6\,(v - u)(w - u)(w + u - v - u)$$
$$= 6\,(v - u)(w - u)(w - v)$$

$\therefore$ (1) से
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{6vw\,(v - w)}{6\,(v - u)(w - u)(w - v)} = \frac{vw}{(u - v)(u - w)}$$ सिद्ध हुआ।

www.polytechnicadi.com

उदाहरण 17. यदि λ में दिये गये त्रिघात समीकरण, $(\lambda-x)^3+(\lambda-y)^3+(\lambda-z)^3=0$ के मूल u, v, w हों तो सिद्ध कीजिये कि $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=-2\dfrac{(y-z)(z-x)(x-y)}{(v-w)(w-u)(u-v)}$.

हल : प्रश्न से,

या $(\lambda-x)^3+(\lambda-y)^3+(\lambda-z)^3=0$

या $3\lambda^3-3\lambda^2(x+y+z)+3\lambda(x^2+y^2+z^2)-(x^3+y^3+z^3)=0$ [विस्तार से]

प्रश्न से, u, v, w समीकरण (1) के मूल हैं, अतः

$$u+v+w=x+y+z$$

$$uv+vw+wu=x^2+y^2+z^2$$

तथा $uvw=\dfrac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)$ [$\because$ $ax^3+bx^3+cx+d=0$ के लिए $\Sigma\alpha=-\dfrac{b}{a}, \Sigma\alpha\beta=\dfrac{c}{a}, \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$]

माना $f_1\equiv u+v+w-x-y-z=0$ ...(1)

$f_2\equiv uv+vw+wu-x^2-y^2-z^2=0$ ...(2)

तथा $f_3\equiv uvw-\dfrac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)=0$ ...(3)

अब
$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=(-1)^3\frac{\dfrac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)}}{\dfrac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(u,v,w)}}=-\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} & \dfrac{\partial f_1}{\partial w}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} & \dfrac{\partial f_2}{\partial w}\\ \dfrac{\partial f_3}{\partial u} & \dfrac{\partial f_3}{\partial v} & \dfrac{\partial f_3}{\partial w}\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-1 & -1 & -1\\ -2x & -2y & -2z\\ -x^2 & -y^2 & -z^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ v+w & w+u & u+v\\ vw & wu & uv\end{vmatrix}$$

[(2), (3) तथा (4) से आंशिक अवकलन के मान रखने पर]

$$=-2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ v+w & w+u & u+v\\ vw & wu & uv\end{vmatrix} \quad ...(4)$$

अब
$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x & y & z\\ x^2 & y^2 & z^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ x & y-x & z-x\\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2\end{vmatrix}$$ [$C_2=C_2-C_1$ तथा $C_3=C_3-C_1$ से]

$$=(y-x)(z-x)\begin{vmatrix}1 & 1\\ y+x & z+x\end{vmatrix}$$

$$=(y-x)(z-x)(z-y)=(y-z)(z-x)(x-y)$$

तथा
$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ v+w & w+u & u+v\\ vw & wu & uv\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ v+w & u-v & u-w\\ vw & w(u-v) & v(u-w)\end{vmatrix}$$ [$C_2=C_2-C_1$ तथा $C_3=C_3-C_1$ से]

$$=(u-v)(u-w)\begin{vmatrix}1 & 1\\ w & v\end{vmatrix}$$

$$=(u-v)(u-w)(v-w)=-(v-w)(w-u)(u-v)$$

www.polytechnicpdf.com

(4) में इन मानों को रखने पर

$$\frac{\partial u, v, w)}{\partial (x, y, z)} = -2\frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{(v-w)(w-u)(u-v)}.$$

उदाहरण 18. दिखाइये कि फलन $u = x + y - z, v = x - y + z, w = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$ एक-दूसरे से स्वतंत्र नहीं हैं। साथ ही उनके बीच एक सम्बन्ध ज्ञात कीजिये।

हल : प्रश्न से, $u = x + y - z, v = x - y + z, w = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$ ...(1)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \frac{\partial u}{\partial z} = -1 \quad \therefore \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \frac{\partial v}{\partial z} = 1$$

तथा
$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x, \frac{\partial w}{\partial y} = 2y - 2z, \frac{\partial v}{\partial z} = 2z - 2y$$

अब
$$J(u, v, w) = \frac{(u, v, w)}{\partial (x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2x & 2(y-z) & 2(z-y) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2x & 2(y-z) & 0 \end{vmatrix}, \quad [C_3 = C_3 + C_2 \text{ से}]$$

अर्थात् $J(u, v, w) = 0$, अतः फलन u, v, w स्वतंत्र नहीं हैं, एवं उनके बीच एक फलनिक सम्बन्ध है। पुनः $u + v = 2x$ तथा $u - v = 2(y - z)$

$$\therefore \quad (u+v)^2 + (u-v)^2 = 4x^2 + 4(y^2 + z^2 - 2yz)$$
$$= 4(x^2 + y^2 + z^2 - 2yz)$$
$$= 4w. \quad [(1) \text{ से}]$$

अतः फलनों u, v, w के बीच अभीष्ट फलनिक सम्बन्ध

$$(u+v)^2 + (u-v)^2 = 4w.$$

उदाहरण 20. यदि $u = xy + yz + zx, v = x^2 + y^2 + z^2$ तथा $w = x + y + z$ तो दिखायें u, v, w में फलनीय सम्बन्ध है एवं इस सम्बन्ध को प्राप्त करें।

हल : प्रश्न से, $u = xy + yz + zx, v = x^2 + y^2 + z^2, w = x + y + z$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + z, \frac{\partial u}{\partial z} = y + x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \frac{\partial v}{\partial y} = 2y, \frac{\partial v}{\partial z} = 2z$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 1, \frac{\partial w}{\partial y} = 1, \frac{\partial w}{\partial z} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y+z & z+x & x+y \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

www.polytechnicpdf.com

$$= 2\begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x-y+z \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (R_1 = R_1 + R_2 \text{ से})$$

$$= 2(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x+y+z)\times 0 = 0$$

[∵ सारणिक की दो पंक्तियाँ समान है।]

अतः u, v तथा w के बीच फलनीय सम्बन्ध है।

अब $w^2 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 - z^2 + 2(xy + yz + zx)$

$= v + 2u$ [u तथा v का मान रखने पर]

$\Rightarrow$ $w^2 - v - 2u = 0$ यह अभीष्ट सम्बन्ध है।

महत्वपूर्ण सूत्र

1. यदि $u(x, y)$ तथा $v(x, y)$ स्वतंत्र चरों x तथा y के फलन हो, तो

$$J(u,v) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \quad \text{तथा} \quad J(u,v,w) = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

2. यदि $u_1 = f(x_1), u_2 = f(x_1, x_2), u_3 = f(x_1, x_2, x_3), \ldots, u_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

तो $$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

3. $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \times \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$ अर्थात् $JJ' = 1$

4. फलनों का फलन : यदि u तथा v, r एवं s के फलन हो तथा r एवं s पुनः x तथा y के फलन है, तो

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)} \times \frac{\partial(r,s)}{\partial(x,y)}$$

5. अस्पष्ट फलनों के जैकोबियन : यदि u, v स्वतंत्र चरों x, y के पदों फलन हो और

$$f_1(u,v,x,y) = 0$$

$$f_2(u,v,x,y) = 0 \text{ से दिये जाये तो}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = (-1)^2 \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)} \Big/ \frac{\partial(f_2, f_2)}{\partial(u,v)}$$

व्यापक रूप $$\frac{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = (-1)^n \frac{\partial(f_1, f_2 \ldots f_n)/\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)/\partial(u_1, u_2, \ldots, u_n)}$$

जहाँ $f_1(u_1, u_2, \ldots, u_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

$f_2(u_1, u_2, \ldots, u_n, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$

6. अस्पष्ट फलनों के आंशिक अवकल गुणांक : यदि u, v स्वतंत्र चरों x, y के अस्पष्ट फलन हैं जो निम्न रूप के है

$$f_1(u,v,x,y) = 0$$

$$f_2(u,v,x,y) = 0$$

www.polytechnicpdf.com

7. आंशिक अवकल गुणांक $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}}; \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, x)}}{\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(u, v)}}$

8. यदि $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$ अर्थात् $\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$

जहाँ u तथा v स्वतंत्र चर x, y के फलन हैं, तो u, v फलनीय परतंत्र (Functional Dependent) होंगे तथा उनमें फलनीय सबंध (Functional Relation) होता है।

प्रश्नावली 9.1

1. यदि $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ तो $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ तथा $\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$ का मान बतायें। [1999, 2000, 10]

2. यदि $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$ तो $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}$ का मान बतायें।

3. यदि $u = x^2, v = y^2$ तो $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ का मान बतायें।

4. यदि $u = x^2 - y^2, v = 2xy$ तो $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ का मान ज्ञात करें।

5. यदि $u = \frac{y - x}{1 + xy}, v = \tan^{-1} y - \tan^{-1} x$ तो $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ का मान बतायें।

6. यदि $y_1 = \cos x_1$ $y_2 = \sin x_1 \cos x_2$ तथा $y_3 = \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3$ तो सिद्ध करें :
$$\frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = -\sin^3 x_1 \sin^2 x_2 \sin x_3.$$

7. यदि $u_1 = \cos x_1, u_2 = \cos x_1 \cos x_2$ तथा $u_3 = \cos x_1 \cos x_2 \cos x_3$ तो सिद्ध करें :
$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = -\cos^2 x_1 \cos x_2 \sin x_1 \sin x_2 \sin x_3.$$
$$\left[\text{संकेत : } \frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]$$

8. (i) यदि $x = r\sin\theta\cos\phi; y = r\sin\theta\sin\phi; z = r\cos\theta$ तो दिखाइये कि
$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin\theta$$
तथा $\frac{\partial(r, \theta, \phi)}{\partial(x, y, z)}$ का मान भी ज्ञात करें। [2000, 05, 15]
$$\left[\text{संकेत : } \frac{\partial(r, \theta, \phi)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)}} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\right]$$

(ii) यदि $u_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}, u_2 = \frac{x_3 x_1}{x_2}, u_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$ तो दिखाइये कि $J(u_1, u_2, u_3) = 4$. [2002, 09, 14]

www.notytechnicpdf.com

(iii) यदि $x = u(1+v)$ और $y = v(1+u)$, तो $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ ज्ञात करें। [2009, 13]

9. यदि $u = xyz, v = x^2 + y^2 + z^2, w = x + y + z$ तो $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ का मान ज्ञात करें। [2002]

[संकेत : $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}}$]

10. यदि $u = x + y + z, u^2 v = y + z, u^3 w = z$ तो दिखाइये कि $\dfrac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = u^{-5}$.

[संकेत : Put $r = x + y + z, s = y + z, t = z; u = r, u^2 v = s, u^2 w = t$]

अब $\dfrac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \dfrac{\partial(u, v, w)}{\partial(r, s, t)} \times \dfrac{\partial(r, s, t)}{\partial(x, y, z)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(r, s, t)}{\partial(u, v, w)}} \times \dfrac{\partial(r, s, t)}{\partial(x, y, z)}$]

11. यदि $x^2 + y^2 + u^2 - v^2 = 0$ तथा $uv + xy = 0$ तो सिद्ध करें कि $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \dfrac{x^2 - y^2}{u^2 + v^2}$.

[संकेत : $f_1 \equiv x^2 + y^2 + u^2 - v^2$, $f_2 \equiv uv + xy = 0$ अब $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = (-1)^2 \dfrac{\partial(f_1, f_2)/\partial(x, y)}{\partial(f_1, f_2)/\partial(u, v)}$]

12. यदि $u^3 + v^3 = x + y, u^2 + v^2 = x^3 + y^3$ तो दिखाइये कि $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \dfrac{1}{2} \dfrac{y^2 - x^2}{uv(u - v)}$.

13. यदि $u_1 = x_1, u_1 u_2 = x_1 + x_2, u_1 u_2 u_3 = x_1 + x_2 + x_3$, तथा $u_1 u_2 u_3 u_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, तो $\dfrac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}$ का मान बतायें।

[संकेत : $\dfrac{\partial(u_1, u_2, u_3, u_4)}{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)} = (-1)^4 \dfrac{\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \times \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \times \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3} \times \dfrac{\partial f_4}{\partial x_4}}{\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2} \times \dfrac{\partial f_3}{\partial u_3} \times \dfrac{\partial f_4}{\partial u_4}}$

$= \dfrac{(-1) \times (-1)(-1) \times (-1)}{1 \times u_1 \times u_1 u_2 \times u_1 u_2 u_3} = \dfrac{1}{u_1^3 u_2^2 u_3}$]

14. यदि $u + v + w = x + y + z, uv + vw + wu = x^2 + y^2 + z^2; uvw = \dfrac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3)$ तो दिखाइये कि

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = -\frac{2(x - y)(y - z)(z - x)}{(u - v)(v - w)(w - u)}.$$

15. यदि u तथा v, x एवं y के फलन हैं तथा $u = f(v)$ तो सिद्ध कीजिये कि

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

तथा इसे $u = \cos(x^2 + 2y)$ तथा $v = x^4 + 4x^2 y + 4y^2$ के लिए जाँच करें।

www.polytechnicpdf.com

$$\left[\text{संकेत : } \frac{\partial u}{\partial x} = f'(v)\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial v}{\partial y} = f'(v)\frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\Big/\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}\Big/\frac{\partial v}{\partial y} = \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 0\right]$$

16. यदि $u^3 = xyz, \frac{1}{v} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, w^2 = x^2 + y^2 + z^2$ तो दिखाइये कि

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{v(y-z)(z-x)(x-y)(x+y+z)}{3u^2 w(yz+zx+xy)}.$$

$$\left[\text{संकेत : } f_1 \equiv u^3 - xyz; f_2 \equiv \frac{1}{v} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z}, f_3 = w^2 - x^2 - y^2 - z^2\right.$$

$$\left.\text{तथा } \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = (-1)^3 \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y, z)}\Big/\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(u, v, w)}\right]$$

17. दिखायें कि फलन $u = x + y + z, v = xy + yz + zx, w = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ स्वतंत्र नहीं हैं। इनके बीच सम्बन्ध स्थापित करें।

$$\left[\text{संकेत : } \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0; w = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)\right.$$

$$\left. = (x+y+z)\{(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx)\} = u(u^2 - 3v)\right]$$

18. यदि $u = \sin^{-1} x + \sin^{-1} y, v = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$ तो $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ का मान ज्ञात करें। क्या u तथा v के बीच फलनीय सम्बन्ध है ? यदि हाँ, तो सम्बन्ध ज्ञात करें।

[संकेत : $u + v = 4x, u - v = 2(x + 2y - z) \therefore u^2 - v^2 = 8w$]

19. यदि $u^2 + xv^2 = x + y, v^2 + yu^2 = x - y$ तो $\frac{\partial u}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial v}{\partial y}$ का मान बतायें।

20. यदि $u = xyz, v = x^2 + y^2 + z^2, w = x + y + z$ तो $\frac{\partial x}{\partial u}$ का मान बतायें।

$$\left[\text{संकेत : } \frac{\partial x}{\partial i} = \frac{-\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(u, y, z)}\Big/\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y, z)}\right]$$

21. यदि $u = x + y^2, v = y + z^2, w = z + x^2$ तो दिखाइये कि $\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{1 + 8xyz}$.

22. सिद्ध कीजिये कि फलन $u = 3x + 2y - z, v = x - 2y + z, w = x(x + 2y - z)$ स्वतंत्र नहीं हैं तथा उनके बीच एक सम्बन्ध ज्ञात कीजिये।

उत्तरमाला

1. $r, \frac{1}{r}$ **2.** r **3.** $4xy$ **4.** $u(x^2 + y^2)$ **5.** 0

8. (i) $\frac{1}{r^2}\operatorname{cosec}\theta$ (iii) $1 + u + v$ **9.** $\frac{-1}{2(x-y)(y-z)(z-x)}$ **13.** $\frac{1}{u_1^3 u_2^2 u_3}$

18. $v = \sin 2u$ **19.** $\frac{1 - x - v^2}{2u(1 - xy)}, \frac{1 + y + u^2}{-2v(1 - xy)}$. **20.** $\frac{1}{(x-y)(x-z)}$

22. $u^2 - v^2 = 8w$

www.polytechnicpdf.com

10

CHAPTER

सदिश अवकलन
(Vector Differentiation)

10.1 परिभाषायें (Definitions)

10.1.1 फील्ड (Field) :

यदि कोई फलन f किसी क्षेत्र R के प्रत्येक बिन्दु पर परिभाषित है, तो इस क्षेत्र को फील्ड (field) कहते हैं।

10.1.2 अदिश बिन्दु फलन (Scalar Point Function) :

यदि किसी क्षेत्र R के प्रत्येक बिन्दु $P(x, y, z)$ के संगत एक अदिश $f(x, y, z)$ प्राप्त होता है, तो f एक अदिश बिन्दु फलन कहलाता है।

जैसे : (i) किसी वस्तु का घनत्व, किसी गर्म वस्तु में तापक्रम का वितरण आदि अदिश बिंदु फलन के उदाहरण हैं।

(ii) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ एक अदिश बिंदु फलन है।

10.2 सदिश बिन्दु फलन (Vector Point Function)

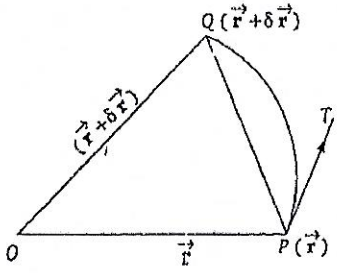
यदि किसी क्षेत्र R के प्रत्येक बिन्दु $P(x, y, z)$ पर $\vec{F}(x, y, z)$ एक सदिश हो, तो $\vec{F}(x, y, z)$ को सदिश बिन्दु फलन कहते हैं।

जैसे : (i) किसी गतिशील बिन्दु का त्वरण एक सदिश बिन्दु फलन को बतलाता है।

(ii) $\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} - z^2\vec{k}$ एक सदिश बिन्दु फलन को बतलाता है।

सदिश फलन का ज्यामितीय निरूपण

माना O मूल बिन्दु है तथा t समय पश्चात् किसी वक्र पर किसी गतिशील बिंदु की स्थिति P तथा इसका स्थिति सदिश $\vec{OP} = \vec{r}$



www.polytechnicpdf.com

यदि $t+\delta t$ समय के पश्चात् यह Q पर पहुँच जाता है तो $\vec{OQ}=\vec{r}+\delta\vec{r}$

$\therefore \quad \vec{PQ}=\vec{OQ}-\vec{OP}=\vec{r}+\delta\vec{r}-\vec{r}=\delta\vec{r}$

पुनः जब $\delta t\to 0$ तो $Q\to P$ तथा जीवा PQ बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PT के संपाती हो जाता है तथा

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}$$

$\frac{d\vec{r}}{dt}$, सदिश $\vec{r}$ का t के सापेक्ष अवकल गुणांक कहलाता है तथा यह बिन्दु P पर स्पर्श रेखा की दिशा को निरूपित करता है।

इसी तरह $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ द्वितीय क्रम का अवकल गुणांक है।

10.3 वेग तथा त्वरण (Velocity and Acceleration)

$\because \quad PQ=\delta\vec{r}$ = बिन्दु P का समय δt में विस्थापन

$\therefore$ औसत वेग $=\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}$

अतः बिन्दु P पर कण का वेग $\vec{v}=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta\vec{r}}{\delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$

पुनः त्वरण $\vec{a}$ = वेग परिवर्तन की दर $=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

इस तरह वेग $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$, त्वरण $\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, जहाँ $\vec{r}$ समय t पर बिंदु का मूलबिन्दु के सापेक्ष स्थिति सदिश है।

10.4 सदिश फलनों के अवकलन के महत्वपूर्ण नियम (Important Rules of Differentiation of Vector Functions)

1. यदि $\vec{F}(t)=F_1(t)\vec{i}-F_2(t)\vec{j}+F_3(t)\vec{k}$ तो $\frac{d\vec{F}(t)}{dt}=\frac{d}{dt}F_1(t)\vec{i}+\frac{d}{dt}F_2(t)\vec{j}+\frac{d}{dt}F_3(t)\vec{k}$

2. यदि $\vec{F},\vec{G}$ तथा $\vec{H}$ अदिश चर t के अवकलनीय फलन हैं, तो

3. (i) योग तथा अंतर का अवकलन : $\frac{d}{dt}(\vec{F}\pm\vec{G})=\frac{d\vec{F}}{dt}=\frac{d\vec{G}}{dt}$

   (ii) गुणनफलन का अवकलन :

   (a) $\frac{d}{dt}(\phi\vec{F})=\phi\frac{d}{dt}\vec{F}$

www.polytechnicpdf.com

(b) अदिश गुणन (Scalar Product) के लिए अवकलन (Differentiation for Scalar Product)

(i) $\frac{d}{dt}(\vec{F}.\vec{G}) = \vec{F}.\frac{d\vec{G}}{dt} + \frac{d\vec{F}}{dt}.\vec{G}$

(ii) $\frac{d}{dt}[\vec{F}.(\vec{G}\times\vec{H})] = \frac{d\vec{F}}{dt}.(\vec{G}\times\vec{H}) + \vec{F}.\frac{d}{dt}(\vec{G}\times\vec{H})$

$$= \frac{d\vec{F}}{dt}.(\vec{G}\times\vec{H}) + \vec{F}.\left(\vec{G}\times\frac{d\vec{H}}{dt} + \frac{d\vec{G}}{dt}\times\vec{H}\right)$$

$$= \frac{d\vec{F}}{dt}.(\vec{G}\times\vec{H}) + \vec{F}.\left(\vec{G}\times\frac{d\vec{H}}{dt}\right) + \vec{F}.\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\times\vec{H}\right)$$

(c) सदिश गुणन (Vector Product) के लिए अवकलन

(i) $\frac{d}{dt}(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{F}\times\frac{d\vec{G}}{dt} + \frac{d\vec{F}}{dt}\times\vec{G}$ [$\vec{F}$ तथा $\vec{G}$ का क्रम परिवर्तित नहीं होगा।]

(ii) $\frac{d}{dt}(\vec{F}\times\vec{G}\times\vec{H})$

$$= \frac{d\vec{F}}{dt}\times(\vec{G}\times\vec{H}) + \vec{F}\times\frac{d}{dt}(\vec{G}\times\vec{H})$$

$$= \frac{d\vec{F}}{dt}\times(\vec{G}\times\vec{H}) + \vec{F}\times\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\times\vec{H} + \vec{G}\times\frac{d}{dt}\vec{H}\right)$$

$$= \frac{d\vec{F}}{dt}\times(\vec{G}\times\vec{H}) + \vec{F}\times\left(\frac{d\vec{G}}{dt}\times\vec{H}\right) + \vec{F}\times\left(\vec{G}\times\frac{d\vec{H}}{dt}\right)$$

(d) यदि $\vec{A}$ अचर सदिश हो, तो $\frac{d\vec{A}}{dt} = 0$ (ii) $\frac{d\hat{i}}{dt} = \frac{d\hat{j}}{dt} = \frac{d\hat{k}}{dt} = 0$

4. यदि $\vec{r}$, किसी सदिश चर t का अवकलनीय सदिश फलन है, जहाँ t दूसरे चर s का फलन है, तो

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\times\frac{ds}{dt}$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण **1.** यदि $\vec{r} = \sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + t\,\vec{k}$, तो निम्नलिखित के मान निकालें—

(i) $\frac{d\vec{r}}{dt}$, (ii) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ (iii) $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$ (iv) $\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$

www.polytechnicpdf.com

हल : अब (i) $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin t)\vec{i} + \frac{d}{dt}(\cos t)\vec{j} + \frac{d}{dt}(t)\vec{k} = \cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j} + \vec{k}$ उत्तर

$$\left[\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0\right]$$

(ii) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\cos t)\vec{i} - \frac{d}{dt}(\sin t)\vec{j} + \frac{d\vec{k}}{dt}$

$= -\sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j} + 0 = -\sin t\,\vec{i} - \cos\vec{j}$ उत्तर

(iii) $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{[(\cos t)^2 + (-\sin t)^2 + (1)^2]} = \sqrt{2}$ [(i) से] उत्तर

(iv) $\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{[(-\sin t)^2 + (-\cos t)^2]} = 1$ [(ii) से] उत्तर

उदाहरण 2. यदि $\vec{r} = \log(1+t^2)\vec{i} + \sin t\,\vec{j} - t^2\vec{k}$, तो

(i) $\frac{d\vec{r}}{dt}$ (ii) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ (iii) $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$ (iv) $\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$

के मान $t = 0$ पर ज्ञात करें। **(2009)**

हल : प्रश्न से $\vec{r} = \log(1+t^2)\vec{i} + \sin t\,\vec{j} - t^2\vec{k}$

(i) अतः t के सापेक्ष अवकलन से

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\vec{i} + \cos t\,\vec{j} - 2t\,\vec{k} \quad ...(1)$$

$\therefore$ $t = 0$ पर $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t=0} = 0\,\vec{i} + \cos 0\,\vec{j} - 2.0.\vec{k}$ $[\because \cos 0 = 1]$ उत्तर

$= \vec{j}$

(ii) (1) को पुनः t के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\vec{i} + \frac{d}{dt}(\cos t)\vec{j} - \frac{d}{dt}(2t)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{(1+t^2)\times 2 - 2t.2t}{(1+t^2)^2}\vec{i} + (-\sin t)\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\vec{i} - \sin t\,\vec{j} - 2\vec{k} \quad ...(2)$$

$\therefore$ $t = 0$ पर

www.polytechnicpdf.com

$$\left.\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{t=0} = 2\vec{i} - 0\vec{j} - 2\vec{k} = 2(\vec{i} - \vec{k})$$ उत्तर

(iii) $$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\frac{2t}{1+t^2}\vec{i} + \cos t\,\vec{j} - 2t\,\vec{k}\right|$$ [(1) से]

$$= \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \cos^2 t + 4t^2}$$

$$\therefore \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0} = \sqrt{0+1+0} = 1$$ उत्तर

(iv) $$\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{\frac{4(1-t^2)}{(1+t^2)^4} + \sin^2 t + 4}$$ [(2) के प्रयोग से]

$$\therefore \left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|_{t=0} = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$ उत्तर

उदाहरण 3. यदि $\vec{r} = \vec{a}\,e^{nt} + \vec{b}\,e^{-nt}$, जहाँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ अचर सदिश हैं, तो सिद्ध करें

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - n^2\vec{r} = 0$$

[BTE 2009]

हल : प्रश्न से

$$\vec{r} = \vec{a}\,e^{nt} + \vec{b}\,e^{-nt} \quad ...(1)$$

$$\therefore \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}\,n\,e^{nt} - \vec{b}\,n\,e^{-nt}$$ [t के सापेक्ष अवकलन से]

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}\,n^2\,e^{nt} + \vec{b}\,n^2\,e^{-nt}$$ [पुनः t के सापेक्ष अवकलन से]

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = n^2(\vec{a}\,e^{nt} + \vec{b}\,e^{-nt})$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = n^2\vec{r}$$ [(1) से] $$\therefore \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - n^2\vec{r} = 0$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 4. यदि $\vec{r}$ अदिश t का सदिश फलन हो तथा $\vec{A}$ एक अचर सदिश हो तो निम्न के t सापेक्ष अवकलन निकालें—

(i) $\vec{r}\cdot\vec{A}$ (ii) $\vec{r}\times\vec{A}$ (iii) $\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$ (iv) $\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$

www.polytechnicpdf.com

हल : (i) $\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{A})=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{A}+\vec{r}\cdot\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{A}$ $\left[\because \frac{d\vec{A}}{dt}=0\right]$

(ii) $\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{A})=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{A}+\vec{r}\times\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{A}$ $\left[\because \frac{d\vec{A}}{dt}=0\right]$

(iii) $\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}+\vec{r}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)+\vec{r}\cdot\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt}\right)$

(iv) $\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\mathbf{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ $[\because \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}=0]$

उदाहरण 5. यदि $\vec{a}, \vec{b}$ अचर सदिश हैं, ω अचर है तथा $\vec{r}$, t का सदिश फलन है, जो $\vec{r}=\cos\omega t\,\vec{a}+\sin\omega t\,\vec{b}$ से दिया जाता है, तो दिखायें कि

(i) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\omega^2\vec{r}=0$ (ii) $\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=\omega(\vec{a}\times\vec{b})$ **[2000]**

हल : (i) $\therefore\ \vec{r}=\cos\omega t\,\vec{a}+\sin\omega t\,\vec{b}$ ...(1)

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}(\cos\omega t)\vec{a}+\frac{d}{dt}(\sin\omega t)\vec{b}=-\omega\sin\omega t\,\vec{a}-\omega\cos\omega t\,\vec{b} \quad ...(2)$$

$$\left[\because \frac{d\vec{a}}{dt}=0, \frac{d\vec{b}}{dt}=0\right]$$

पुनः t के सापेक्ष अवकलन से,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-\omega^2\cos\omega t\,\vec{a}-\omega^2\sin\omega t\,\vec{b}=-\omega^2(\cos\omega t\,\vec{a}+\sin\omega t\,\vec{b})=-\omega^2\vec{r}$$

$$\therefore\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\omega^2\vec{r}=\vec{0}.$$

(ii) $\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}=(\cos\omega t\,\vec{a}+\sin\omega t\,\vec{b})\times(-\omega\sin\omega t\,\vec{a}+\omega\cos\omega t\,\vec{b})$ [समी० (1) तथा (2) से]

$=\omega\cos^2\omega t\,\vec{a}\times\vec{b}-\omega\sin^2\omega t\,\vec{b}\times\vec{a}$ $[\because \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}, \vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}]$

$=\omega\cos^2\omega t\,\vec{a}\times\vec{b}+\omega\sin^2\omega t\,\vec{a}\times\vec{b}=\omega(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)\vec{a}\times\vec{b}$

$=\omega(\vec{a}\times\vec{b})$ $[\because \vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})]$

उदाहरण 6. यदि $\vec{A}=5t^2\vec{i}+t\vec{j}-t^3\vec{k}$, $\vec{B}=\sin t\,\vec{i}-\cos t\,\vec{j}$ तब $\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})$ का मान ज्ञात कीजिये।

www.polytechnicpdf.com

हल : सूत्र से $$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}+\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B} \quad ...(1)$$

$\therefore \quad \frac{d\vec{A}}{dt}=10t\,\vec{i}+\vec{j}-3t^2\,\vec{k}$ तथा $\frac{d\vec{B}}{dt}=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}$

अतः (1) में इन मानों को रखने पर

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B})=(5t^2\,\vec{i}+t\,\vec{j}-t^3\,\vec{k})\times(\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j})$$

$$+(10t\,\vec{i}+\vec{j}-3t^2\,\vec{k})\times(\sin t\,\vec{i}-\cos t\,\vec{j})$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5t^2 & t & -t^3\\ \cos t & \sin t & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 10t & 1 & -3t^2\\ \sin t & -\cos t & 0\end{vmatrix}$$ [सदिश गुणन सूत्र से]

$$=(t^3\sin t)\,\vec{i}-(t^3\cos t)\,\vec{j}+(5t^2\sin t-t\cos t)\,\vec{k}$$

$$+(-3t^2\cos t)\,\vec{i}-(3t^2\sin t)\,\vec{j}+(-10t\cos t-\sin t)\,\vec{k}$$

$$=(t^3\sin t-3t^2\cos t)\,\vec{i}-(t^3\cos t+3t^2\sin t)\,\vec{j}$$

$$+(5t^2\sin t-\sin t-11t\cos t)\,\vec{k}$$ उत्तर

नोट :

- $\vec{A}\times\vec{B}$ ज्ञात कर उसके अवकलन से भी हल ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 7. यदि $\frac{d\vec{u}}{dt}=\vec{w}\times\vec{u}, \frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{w}\times\vec{v}$, तो दिखायें कि $\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v})$

हल : यहाँ $\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v})=\frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v}+\vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt}=(\vec{w}\times\vec{u})\times\vec{v}+\vec{u}\times(\vec{w}\times\vec{v})$

$\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\text{ तथा }\frac{d\vec{v}}{dt}\text{ के मान रखने पर}\right]$

$=(\vec{v}\cdot\vec{w})\,\vec{u}-(\vec{v}\cdot\vec{u})\,\vec{w}+(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}-(\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v}$ [सदिश गुणन की परिभाषा से]

$=(\vec{v}\cdot\vec{w})\,\vec{u}-(\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v}$ $[\because \vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}]$

$=(\vec{w}\cdot\vec{v})\,\vec{u}-(\vec{w}\cdot\vec{u})\,\vec{v}=\vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v})$ [सदिश गुणन की परिभाषा से]

$\therefore \quad \frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{w}\times(\vec{u}\times\vec{v})$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 8. यदि $\vec{r}=a\cos t\,\vec{i}+a\sin t\,\vec{j}+at\tan\alpha\,\vec{k}$ तो $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$ तथा $\left[\frac{d\vec{r}}{dt},\frac{d^2\vec{r}}{dt^2},\frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$ के मान ज्ञात करें।

www.polytechnicpdf.com

हल : प्रश्न से, $\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + at\tan\alpha\,\vec{k}$

हल : $\therefore \quad \dfrac{d\vec{r}}{dt} = -a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + a\tan\alpha\,\vec{k}$ [t के सापेक्ष अवकलन से]

$\therefore \quad \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -a\cos t\,\vec{i} - a\sin t\,\vec{j} + 0\vec{k}$ [पुनः t के सापेक्ष अवकलन से]

तथा $\quad \dfrac{d^3\vec{r}}{dt^3} = a\sin t\,\vec{i} - a\cos t\,\vec{j}$

$$\therefore \quad \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin t & a\cos t & a\tan\alpha \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = a^2\sin t\tan\alpha\,\vec{i} - a^2\cos t\tan\alpha\,\vec{j} + a^2\vec{k}$$

$$\therefore \quad \left|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{(a^4\sin^2 t\tan^2\alpha + a^4\cos^2 t\tan^2\alpha + a^4)}$$

$$= a^2\sqrt{\tan^2\alpha(\sin^2 t + \cos^2 t) + 1} = a^2\sqrt{1 + \tan^2\alpha} \quad [\because \sin^2 t + \cos^2 t = 1]$$

$$= a^2\sec\alpha$$ उत्तर

अब
$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right] = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) \cdot \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}$$

$$= (a^2\sin t\tan\alpha\,\vec{i} - a^2\cos t\tan\alpha\,\vec{j} + a^2\vec{k}) \cdot (a\sin t\,\vec{i} - a\cos t\,\vec{j})$$

$$= a^3\sin^2 t\tan\alpha\,\vec{i}\cdot\vec{i} + a^3\cos^2 t\tan\alpha\,\vec{j}\cdot\vec{j} \quad [\because \vec{i}\cdot\vec{j} = 0 \text{ आदि}]$$

$$= a^3\tan\alpha(\sin^2 t + \cos^2 t) \quad [\because \vec{i}\cdot\vec{i} = 1 = \vec{j}\cdot\vec{j}]$$

$$= a^3\tan\alpha$$ उत्तर

उदाहरण 9. यदि $\vec{r}$ एक सदिश चर t का फलन हो तथा $|\vec{r}| = r$ हो तो $\dfrac{\vec{r}\times\vec{a}}{\vec{r}\cdot\vec{a}}$ का t के सापेक्ष अवकलन कीजिये, जहाँ $\vec{a}$ एक अचर सदिश है।

हल : $$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\vec{r}\times\vec{a}}{\vec{r}\cdot\vec{a}}\right\} = \frac{\{\vec{r}\cdot\vec{a}\}\left(\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{a})\right) - \frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{a})\{\vec{r}\times\vec{a}\}}{(\vec{r}\cdot\vec{a})^2}$$

$$= \frac{(\vec{r}\cdot\vec{a})\left\{\vec{r}\times\frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{a}\right\} - \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{a} + \vec{r}\cdot\frac{d\vec{a}}{dt}\right](\vec{r}\times\vec{a})}{(\vec{r}\cdot\vec{a})^2}$$

www.polytechnicspdf.com

$$= \frac{(\vec{r}\cdot\vec{a})\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{a}\right)-\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{a}\right)(\vec{r}\times\vec{a})}{(\vec{r}\cdot\vec{a})^2} \qquad \left(\because \frac{d\vec{a}}{dt}=0\right)$$ उत्तर

उदाहरण 10. यदि $\vec{a}=\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}+\theta\,\vec{k}$; $\vec{b}=\cos\theta\,\vec{i}-\sin\theta\,\vec{j}-3\vec{k}$; $\vec{c}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ तब $\theta=0$ पर $\frac{d}{d\theta}\{(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})]\}$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल : $\frac{d}{d\theta}\{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\}=\frac{d\vec{a}}{d\theta}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\times\frac{d}{d\theta}(\vec{b}\times\vec{c})$

$$=\frac{d\vec{a}}{d\theta}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}\times\left\{\frac{d\vec{b}}{d\theta}\times\vec{c}+\vec{b}\times\frac{d\vec{c}}{d\theta}\right\}$$

$$=(\cos\theta\,\vec{i}-\sin\theta\,\vec{j}+\vec{k})\times\{(\cos\theta\,\vec{i}-\sin\theta\,\vec{j}-3\vec{k})\times(2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})$$
$$+(\sin\theta\,\vec{i}+\cos\theta\,\vec{j}+\theta\,\vec{k})\times\{(-\sin\theta\,\vec{i}-\cos\theta\,\vec{j})\times(2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})\}$$
$$+(\cos\theta\,\vec{i}-\sin\theta\,\vec{j}-3\vec{k})\times 0\}$$

[$\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के मान रखकर अवकलन से)

अब $\theta=0$ पर, $\cos\theta=1, \sin\theta=0$

$$\therefore \quad \frac{d}{d\theta}\{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{i}+\vec{k})\times\{(\vec{i}-3\vec{k})\times(2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k})\}$$
$$+(\vec{j})\times\{-\vec{j}\times(2\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k})+(\vec{i}-3\vec{k})\times 0\}$$

या $\frac{d}{d\theta}\{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{i}+\vec{k})\times(9\vec{i}-5\vec{j}+3\vec{k}\}+\vec{j}\times\{\vec{i}+2\vec{k}\}$

$$=5\vec{i}+6\vec{j}-5\vec{k}+2\vec{i}-\vec{k}=7\vec{i}+6\vec{j}-6\vec{k}$$

उदाहरण 11. यदि कोई कण $x=t^3+1, y=t^2, z=2t+5$, जहाँ t समय है, के अनुदिश गतिशील है, तो इसके वेग तथा त्वरण का सदिश $2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$ की दिशा में वियोजित भाग ज्ञात करें, जबकि $t=1$

हल : यहाँ $x=t^3+1, y=t^2, z=2t+5$

यदि $\vec{r}$ वक्र के किसी बिन्दु $P(x,y,z)$ का स्थिति सदिश हो, तो

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+2\vec{k}=(t^3+1)\vec{i}+t^2\vec{j}+(2t+5)\vec{k}$$

अतः $\quad$ वेग $=\frac{d\vec{r}}{dt}=3t^2\vec{i}+2t\vec{j}+2t\vec{k}$ ...(1)

अतः $t=1$ पर वेग

$$\therefore \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)_{t=1}=3\times 1\,\vec{i}+2\times 1\,\vec{j}+2\times 1\,\vec{k}=3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k} \qquad ...(2)$$

www.polytechnicpdf.com

अब $2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$ के अनुदिश इकाई सदिश $=\dfrac{2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}$ $\left[\because \hat{r}=\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right]$

$$=\frac{1}{7}(2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k})$$

$\therefore$ वेग का $2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ की दिशा में वियोजित भाग

$$=(3\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}).\frac{1}{7}(2\vec{k}+3\vec{j}+6\vec{k}) \quad \left[(2) \text{ में } \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{t=1} \text{ का मान रखने पर}\right]$$

$$=\frac{1}{7}(6+5+12)=\frac{24}{7}$$ उत्तर

पुनः त्वरण $=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)=\dfrac{d}{dt}(3t^2\vec{i}+2t\vec{j}+2\vec{k})=6t\vec{i}+2\vec{j}$ [(1) से]

अतः $t=1$ पर त्वरण $=\left(\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{t=1}=6\vec{i}+2\vec{j}$ उत्तर

$\therefore$ त्वरण $(6\vec{i}+2\vec{j})$ का $(2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k})$ की दिशा में वियोजित भाग

$$(6\vec{i}+2\vec{j}).\frac{1}{7}(2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k})=\frac{1}{7}(12+6)=\frac{18}{7}$$ उत्तर

उदाहरण 12. दिए गए वक्र $x=3\cos t, y=3\sin t, z=4t$ के किसी बिन्दु पर (i) स्पर्श सदिश (ii) इकाई स्पर्श सदिश (iii) अभिलंब सदिश (iv) इकाई लंब सदिश का मान ज्ञात करें।

हल : यहाँ $x=3\cos t, y=3\sin t, z=4t$

अतः यदि $\vec{r}$ इस पर स्थित किसी बिन्दु $P(x,y,z)$ का स्थिति सदिश होगा।

$\therefore$ $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(3\cos t)\vec{i}+(3\sin t)\vec{j}+(4t)\vec{k}$

(i) $\dfrac{d\vec{r}}{dt}=(-3\sin t)\vec{i}+(3\cos t)\vec{j}+4\vec{k}$

यह अभीष्ट स्पर्श सदिश है। उत्तर

पुनः $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|=$ स्पर्श सदिश का परिमाण

$$=\sqrt{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2+(4)^2}=\sqrt{9(\sin^2 t+\cos^2 t)+16}$$
$$=5$$

(ii) इकाई स्पर्श सदिश $\vec{T}=\dfrac{\dfrac{d\vec{r}}{dt}}{\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|}=\dfrac{1}{5}(-3\sin t\,\vec{i}+3\cos t\,\vec{j}+4\vec{k})$ उत्तर

www.polytechnicpdf.com

पुन: अभिलंब सदिश $\vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{5}\frac{d\vec{T}}{dt}$ $\left[\because \frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = 5\right]$

$$= \frac{1}{5}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{5}(-3\sin t\,\vec{i} + 3\cos t\,\vec{j} + 4\vec{k}\right]$$

$$= \frac{1}{25}(-3\cos t\,\vec{i} - 3\sin t\,\vec{j})$$ उत्तर

(iii) अब अभिलंब सदिश का परिमाण (Magnitude) $|\vec{N}| = \frac{1}{25}\sqrt{(-3\cos t)^2 + (-3\sin t)^2} = \frac{3}{25}$

(iv) अत: इकाई अभिलंब सदिश $= \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\frac{1}{25}(-3\cos t\,\vec{i} - 3\sin t\,\vec{j})}{3/25} = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$ उत्तर

प्रश्नावली 10.1

1. यदि $\vec{r} = \log(1+t^2)\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} - t^2\,\vec{k}$ हो, तो

   (i) $\frac{d\vec{r}}{dt}$ (ii) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ का मान ज्ञात करें।

2. यदि $\vec{r} = t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + (1-\vec{i})\vec{k}$, तो $\frac{d\vec{r}}{dt}$ तथा $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ का मान बतायें।

3. यदि $\vec{r} = t\,\vec{i} - t\,\vec{j} + (2t+1)\vec{k}$, तो $t = 0$ पर

   (i) $\frac{d\vec{r}}{dt}$ (ii) $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ (iii) $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$ (iv) $\left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|$

   का मान ज्ञात करें।

4. यदि $\vec{r} = 5t^2\,\vec{i} + t\,\vec{j} - t^3\,\vec{k}$ तथा $\vec{s} = \sin t\,\vec{i} - \cos t\,\vec{j}$, तो

   (i) $\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{s})$ (ii) $\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{s})$ (iii) $\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{r})$

   का मान ज्ञात करें।

5. यदि $\vec{u} = t\,\vec{i} - t^2\,\vec{j} + t^3\,\vec{k}$, $\vec{v} = \sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$ तो दिखायें कि

   (i) $\frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (1+t^3)\sin t - t\cos t$

   (ii) $\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v}) = (t^3\sin t - 3t^2\cos t) + (t^3\cos t + 3t^2\sin t)\,\vec{j} + (\cos t + t\sin t + t^2\cos t)\,\vec{k}$

6. यदि $\vec{r} = \sin at\,\vec{i} + \cos at\,\vec{j}$ तो सिद्ध करें कि $\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$ एक अचर राशि है।

www.polytechnicpdf.com

7. यदि $\vec{r}$ एक इकाई सदिश हो तो सिद्ध कीजिये कि $\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$

[संकेत : $\left|\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right| = |\vec{r}| \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \sin 90°$] $\left[\because \vec{r} \perp \frac{d\vec{r}}{dt}\right]$

8. यदि $\vec{a}$ एक अचर सदिश तथा $\vec{r}$ अदिश चर t का फलन हो तो $\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r} \times \vec{a}}{\vec{r} \cdot \vec{a}}\right)$ का मान ज्ञात करें।

[संकेत : $\frac{d}{dt}\frac{\vec{u}}{\vec{v}} = \frac{\vec{v}\frac{d\vec{u}}{dt} - \vec{u}\frac{d\vec{v}}{dt}}{(\vec{v})^2}$]

9. एक कण वक्र $x = 4t^2 - 3t + 1, y = t^2 + 1, z = t^3$, जहाँ t समय है, पर गतिमान है। समय $t = 2$ पर कण का वेग तथा त्वरण ज्ञात करें।

10. एक कण वक्र $x = 2t^2, y = t^2 - 4t$ तथा $z = 3t - 5$ के अनुदिश गतिशील है तो सदिश $\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ के अनुदिश इसके वेग तथा त्वरण के वियोजित भाग का मान ज्ञात करें, जबकि $t = 1$

11. वक्र $\vec{r} = t^2\vec{i} + 2t\vec{j} - t^3\vec{k}$ के बिन्दुओं $t = 1$ तथा $t = -1$ पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करें।

[संकेत : स्पर्श रेखा की प्रवणता $T = \frac{d\vec{r}}{dt}$ अतः यदि $t = 1$ पर यह T_1 तथा $t = -1$ पर T_2 हो तथा दोनों के बीच का कोण θ हो तो $\cos\theta = \frac{T_1 \cdot T_2}{|T_1||T_2|}$]

उत्तरमाला

1. $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{2t}{1+t^2}\vec{i} + \cos t\,\vec{j} - 2t\,\vec{k}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}\vec{i} - \sin t\,\vec{j} - 2\vec{k}$

2. $\frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} - \vec{k}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$

3. $\frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\,\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\vec{i}; \left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{4t^2+5}, \left|\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right| = 2$

4. (i) $(5t^2 - 1)\cos t + 11 + \sin t$

(ii) $t^2(t\sin t - 3\cos t)\vec{i} - t^2(t\cos t + 3\sin t)\vec{j} - (11t\cos t - 5t^2\sin t + \sin t)\vec{k}$

(iii) $100t^3 + 2t + 6t^5$

9. वेग $= 13\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$, त्वरण $= 8\vec{i} + 2\vec{j} + 12\vec{k}$

10. $\frac{8\sqrt{14}}{7}, -\frac{\sqrt{14}}{7}$

11. $\left[\cos^{-1}\left(\frac{9}{17}\right)\right]$

□□□

www.polytechnicpdf.com

11 CHAPTER

ग्रेडिएंट, डाइवर्जेन्स तथा कर्ल (Gradient, Divergence and Curl)

11.1 आंशिक अवकलन (Partial Differentiation)

यदि सदिश $\vec{r}$ दो या दो से अधिक अदिश चरों का फलन हो तथा $\vec{r} = f(x, y, z)$ से दिया जाए, जहाँ x, y तथा z अदिश चर हैं, तो $\vec{r}$ का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\delta x}$$

अतः स्पष्ट है कि $\vec{r}$ का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन ज्ञात करने के लिए अन्य चर y तथा z को अचर मानकर x के सापेक्ष अवकलन की सामान्य विधि से अवकलित किया जाता है।

इसी तरह $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y}$ तथा $\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}$ के लिए क्रमशः x, z एवं x, y को अचर मानकर सामान्य विधि से आंशिक अवकलन ज्ञात किया जाता है।

जैसे : यदि $\vec{r} = x^2 y \vec{i} + xy^2 \vec{j} + yz^2 \vec{k}$, तो $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 y \vec{i} + xy^2 \vec{j} + yz^2 \vec{k})$

$$= 2xy \vec{i} - y^2 \vec{j} + 0 = 2xy \vec{i} - y^2 \vec{j} \quad [y, z \text{ को अचर मानने पर}]$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = x^2 \vec{i} + 2xy \vec{j} + z^2 \vec{k} \quad [x, z \text{ को अचर मानने पर}]$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = 0 + 0 + 2yz \vec{k} = 2yz \vec{k} \quad [x, y \text{ को अचर मानने पर}]$$

11.2 डेल ऑपरेटर या सदिश अवकल ऑपरेटर (Del Operator or Vector Operator) :

सदिश संकारक ∇, जिसे डेल (Del) या नैब्ला (Nabla) पढ़ा जाता है, को निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है :

$$\nabla \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

www.polytechnicpdf.com

यह वितरण नियम का पालन करता है तथा इसमें साधारण सदिश के सारे गुण होते हैं। प्रतीक $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ तथा $\frac{\partial}{\partial z}$ को $\vec{i}, \vec{j}$ तथा $\vec{k}$ के अनुदिश इसके घटकों (Components) के रूप में लिया जा सकता है।

11.3. अदिश बिन्दु फलन का ग्रेडिएंट (प्रवणता) (Gradient of a Scalar Point Function) :

यदि $\phi(x, y, z)$ एक संतत तथा अवकलनीय अदिश बिंदु फलन है तो सदिश फलन

$$\nabla\phi = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi = \vec{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

को ϕ का ग्रेडिएन्ट (Gradient) कहते हैं तथा इसे grad ϕ या $\nabla\phi$ से सूचित किया जाता है।

जैसे : यदि $\phi = x^3 + x^2y + y^2 + z^2$ हो, तो

$$\text{grad } \phi = \nabla\phi = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^3 + x^2y - y^2 + z^2)$$

$$= \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + x^2y + y^2 + z^2) + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^3 + x^2y + y^2 - z^2) + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^3 + x^2y + y^2 + z^2)$$

$$= (3x^2 + 2xy)\vec{i} + \vec{j}(x^2 + 2y) + 2z\vec{k}$$

11.4. ग्रेडिएण्ट (प्रवणता) के गुण :

1. किसी अचर का ग्रेडिएण्ट शून्य होता है। अतः यदि $\phi = c$ अचर हो, तो $\nabla\phi = \nabla c = 0$
2. यदि $\phi(x, y, z) = c$ कोई अदिश बिंदु फलन है तो $\nabla\phi$ की दिशा $\phi(x, y, z) = c$ के लंबवत् होती है।
3. $|\nabla\phi|$ ($\nabla\phi$ के मापांक) का मान क्षेत्र $\phi(x, y, z) = c$ की लंबवत् दिशा में ϕ के परिवर्तन की दर के बराबर होता है तथा उस दिशा मे ϕ के परिवर्तन की दर अधिकतम होती है।
4. **किसी अन्य दिशा में ϕ के परिवर्तन की दर उस दिशा में इकाई सदिश (unit vector) तथा $\nabla\phi$ का अदिश गुणनफल होता है तथा इसे दिष्ट अवकलज (Directional Derivative) कहते हैं।**

अतः किसी सदिश $\vec{r}$ की दिशा में दिष्ट अवकलज **(Directional Derivatives)**

$$\nabla\phi \cdot \hat{r} = \nabla\phi \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

11.5 प्रवणता पर आधारित महत्वपूर्ण परिणाम (Important Results Involving Gradients)

(i) अचर की प्रवणता (Gradient of a Constant) : यदि f कोई अचर फलन हो, तो $\nabla f = 0$

प्रमाण : माना $f(x, y, z)$ कोई अचर फलन है।

अतः
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$\therefore \quad \nabla f = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)f = \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z} = \vec{i}.0 + \vec{j}.0 + \vec{k}.0 = 0$$

सिद्ध हुआ।

(ii) अदिश बिन्दु फलन के योग एवं अंतर की प्रवणता (Gradient of Sum and Difference of Scalar Point Functions) : यदि f तथा g दो अदिश बिन्दु फलन हैं तो grad $(f \pm g)$ = grad $f \pm$ grad g

अर्थात् $\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$

प्रमाण : $\text{grad } (f \pm g) = \nabla(f \pm g) = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(f \pm g)$

www.polytechnicpdf.com

$$= \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(f \pm g) + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(f \pm g) + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(f \pm g)$$

$$= \vec{i}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial g}{\partial x}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial f}{\partial y} \pm \frac{\partial g}{\partial y}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial f}{\partial z} \pm \frac{\partial g}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right) \pm \left(\vec{i}\frac{\partial g}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial g}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial g}{\partial z}\right) = \nabla f \pm \nabla g$$

$\therefore \quad \nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$ सिद्ध हुआ।

(iii) दो अदिश बिंदु फलन के गुणनफल की प्रवणता (Gradient of Product of Two Scalar Point Functions)

यदि f तथा g दो अदिश बिंदु फलन हैं तो grad $(fg) = f$ grad $g + g$ grad f

अर्थात् $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

प्रमाण : $\text{grad}(fg) = \nabla(fg) = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(fg) = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(fg) + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(fg) + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(fg)$

$$= \vec{i}\left(f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \vec{j}\left(f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \vec{k}\left(f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= f\left(\vec{i}\frac{\partial g}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial g}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial g}{\partial z}\right) + g\left(\vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= f\nabla g + g\nabla f$$ सिद्ध हुआ

(iv) दो अदिश बिंदु फलन के भागफल की प्रवणता (Gradient of Quotient of Two Scalar Point Functions) : यदि f तथा g दो अदिश बिंदु फलन हैं तो

$$\text{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\text{grad}\,f - f\,\text{grad}\,g}{g^2} \quad \text{या} \quad \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$

प्रमाण : $\text{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{f}{g}\right)$

$$= \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right) + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f}{g}\right)$$

$$= \vec{i}\left[\frac{g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}\right] + \vec{j}\left[\frac{g\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}\right] + \vec{k}\left[\frac{g\frac{\partial f}{\partial z} - f\frac{\partial g}{\partial z}}{g^2}\right]$$

$$= \frac{1}{g^2}\left[g\left\{\vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right\} - f\left\{\vec{i}\frac{\partial g}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial g}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial g}{\partial z}\right\}\right]$$

$$= \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$$ सिद्ध हुआ

11.6 सदिश फलन का डाइवर्जेन्स (Gradient of Vector Function)

यदि $\vec{F}(x, y, z)$ कोई संतत अवकलनीय सदिश फलन हो तो डेल ऑपरेटर ∇ तथा सदिश फलन $\vec{F}$ के अदि गुणन $\nabla.\vec{F}$ को $\vec{F}$ का डाइवर्जेन्स (Divergence) कहते हैं तथा इसे div $\vec{F}$ से व्यक्त किया जाता है।

www.polytechnicpdf.com

अत: $\text{div } \vec{F} = \nabla . \vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) . \vec{F} = \vec{i} . \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \vec{j} . \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} + \vec{k} . \frac{\partial \vec{F}}{\partial z}$

यदि $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$, जहाँ F_x, F_y तथा F_z क्रमश: x, y तथा z अक्षों के अनुदिश $\vec{F}$ के घटक हैं।

तो $\text{div } \vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) . \left(F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}\right)$

$$= \vec{i} . \vec{i} \frac{\partial F_x}{\partial x} + \vec{j} . \vec{j} \frac{\partial F_y}{\partial y} + \vec{k} . \vec{k} \frac{\partial F_z}{\partial z} \qquad [\because \vec{i} . \vec{j} = \vec{j} . \vec{k} = \vec{k} . \vec{i} = 0]$$

$$\therefore \quad \text{div } \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \qquad [\because \vec{i} . \vec{i} = \vec{j} . \vec{j} = \vec{k} . \vec{k} = 1]$$

स्पष्ट है, div $\vec{F}$ एक सदिश राशि है।

11.7. सोलेनॉयडल सदिश (Solenoidal Vector)

यदि $\vec{V}$ कोई सदिश हो तथा $\text{div } \vec{V} = 0$ तो $\vec{V}$ को सोलेनॉयडल सदिश कहते हैं।

11.8 किसी सदिश का कर्ल (Curl of a Vector)

यदि $\vec{F}$ कोई सतत अवकलनीय (continuous differentiable) सदिश फलन हो तो डेल ऑपरेटर ∇ तथा $\vec{F}$ का सदिश गुणन $\nabla \times \vec{F}$ फलन $\vec{F}$ का कर्ल (Curl) या रोटेशन (Rotation) कहलाता है तथा इसे curl $\vec{F}$ या rct $\vec{F}$ से सूचित करते हैं। अत:

$$\text{curl } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \vec{F}$$

स्पष्ट है कि किसी सदिश फलन $\vec{F}$ का कर्ल एक सदिश राशि है।

11.9 सदिश फलन का कर्ल घटक के पदों में (Curl of a Vector in Terms of its Components)

यदि $\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}$

तो $\text{curl } \vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k})$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\vec{k}$$

अत: $\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$

11.10 इरोटेशनल सदिश (Irrotational Vector)

कोई सदिश $\vec{F}$ इरोटेशनल कहलाता है यदि $\nabla \times \vec{F} = 0$ अर्थात् उसका कर्ल शून्य हो।

www.polytechnicpdf.com

नोट :

- (i) div $\vec{F}$ एक अदिश राशि है, (ii) curl $\vec{F}$ एक सदिश राशि है, तथा (iii) grad ϕ एक अदिश राशि है, (iv) divergence तथा curl हमेशा सदिश बिंदु फलन का निकाला जाता है जबकि gradient अदिश बिंदु फलन का निकाला जाता है।

11.11 डाइवर्जेन्स तथा कर्ल पर आधारित कुछ महत्वपूर्ण परिणाम (Important Results of Divergence)

(1) अचर का डाइवर्जेन्स : यदि कोई अचर सदिश हो तो div $\vec{A} = 0$

प्रमाण : $\text{div}\,\vec{A} = \vec{i}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} - \vec{j}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial z} = 0 \qquad \left[\because \frac{\partial\vec{A}}{\partial x} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial y} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial z} = 0\right]$

(2) फलनों के योग तथा अंतर का डाइवर्जेन्स (Divergence of Sum of Vectors)

यदि $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ दो सदिश फलन हैं, तो

$$\text{div}\,(\vec{A} \pm \vec{B}) = \text{div}\,\vec{A} \pm \text{div}\,\vec{B}$$

[BTE 2005]

प्रमाण : $\text{div}\,(\vec{A} \pm \vec{B}) = \nabla\cdot(\vec{A} \pm \vec{B}) = \left(\vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\vec{A} \pm \vec{B})$

$$= \vec{i}\cdot\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} \pm \frac{\partial\vec{B}}{\partial x}\right) + \vec{j}\cdot\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial y} \pm \frac{\partial\vec{B}}{\partial y}\right) + \vec{k}\cdot\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial z} \pm \frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\vec{i}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} + \vec{j}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial y} + \vec{k}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\right) \pm \left(\vec{i}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial x} + \vec{j}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial y} + \vec{k}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}\right)$$

$$= \nabla\cdot\vec{A} \pm \nabla\cdot\vec{B} = \text{div}\,\vec{A} \pm \text{div}\,\vec{B}$$

सिद्ध हुआ।

(3) अचर सदिश का कर्ल (Curl of a Constant Vector)

यदि $\vec{A}$ अचर सदिश है, तो curl $\vec{A} = 0$

प्रमाण : $\text{curl}\,\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \vec{i}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial x} + \vec{j}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial y} + \vec{k}\times\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}$

$$= \vec{i}\times 0 + \vec{j}\times 0 + \vec{k}\times 0 \qquad \left[\because \frac{\partial\vec{A}}{\partial x} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial y} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial z} = 0\right]$$

$$= 0$$

(4) सदिश फलनों के योग एवं अंतर का कर्ल (Curl of Sum or Difference of Vectors) : यदि $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ दो सदिश फलन हों तो

$$\text{curl}\,(\vec{A} \pm \vec{B}) = \text{curl}\,\vec{A} \pm \text{curl}\,\vec{B} \quad \text{या} \quad \nabla\times(\vec{A} \pm \vec{B}) = \nabla\times\vec{A} \pm \nabla\times\vec{B}$$

प्रमाण : $\text{curl}\,(\vec{A} \pm \vec{B}) = \nabla\times(\vec{A} \pm \vec{B}) = \left(\vec{i}\times\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\vec{A} \pm \vec{B})$

www.polytechnicpdf.com

$$= \vec{i} \times \frac{\partial}{\partial x}(\vec{A} \pm \vec{B}) + \vec{j} \times \frac{\partial}{\partial y}(\vec{A} \pm \vec{B}) + \vec{k} \times \frac{\partial}{\partial z}(\vec{A} \pm \vec{B})$$

$$= \vec{i} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \pm \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}\right) + \vec{j} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \pm \frac{\partial \vec{B}}{\partial y}\right) + \vec{k} \times \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \pm \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\vec{i} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + \vec{j} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + \vec{k} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\right) \pm \left(\vec{i} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + \vec{j} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + \vec{k} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}\right)$$

$$= \nabla \times \vec{A} \pm \nabla \times \vec{B} = \text{curl } \vec{A} \pm \text{curl } \vec{B}$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. यदि $f = x^3 - y^3 + xz^2$ तो बिंदु $(1, -1, 2)$ पर grad f का मान ज्ञात करें। **[BTE 2004]**

हल : प्रश्न से

$$f = x^3 - y^3 + xz^2$$

$$\therefore \quad \text{grad } f = \nabla f = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^3 - y^3 + xz^2)$$

$$= \vec{i}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(x^3 - y^3 + xz^2)\right\} + \vec{j}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(x^3 - y^3 + xz^2)\right\} + \vec{k}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(x^3 - y^3 + xz^2)\right\}$$

$$= \vec{i}\{3x^2 - 0 + z^2\} + \vec{j}\{0 - 3y^2 - 0\} + \vec{k}\{0 - 0 + 2xz\}$$

अर्थात् $\quad \nabla f = (3x^2 + z^2)\vec{i} - 3y^2\vec{j} + 2xz\vec{k}$ ...(1)

$\therefore$ बिन्दु $(1, -1, 2)$ पर, $(\nabla f)_{(1,-1,2)} = (3 \times 1^2 + 2^2)\vec{i} - 3 \times (-1)^2\vec{j} + 2 \times 1 \times 2\vec{k}$

[(1) में $x = 1, y = -1$ तथा $z = 2$ रखने पर]

$= 7\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि $\phi = \frac{1}{r}$ जहाँ $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ तथा $r^2 = x^2 + y^2 - z^2$ तो $\nabla\phi$ का मान प्राप्त करें। **[BTE 2010]**

हल : प्रश्न से $\quad \vec{r} = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$

$\therefore \quad |\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ तथा $\phi = \frac{1}{r} = r^{-1} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

$$\therefore \quad \nabla\phi = \nabla(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$= \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

www.polytechnicpdf.com

$$= -\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(2x)\vec{i} + \vec{j}\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(2y)$$
$$+\vec{k}\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(2z)$$

$$= -\frac{1}{2}\times 2\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \text{ जहाँ } \vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

उदाहरण 3. यदि $\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ तो सिद्ध करें—

(i) $\text{grad}\,\vec{r} = \hat{r}$ (ii) $\text{grad}\, r^n = nr^{n-2}\vec{r}$

हल : $\vec{r} = x\vec{i}+y\vec{r}+z\vec{k} \therefore r^2 = x^2+y^2+z^2$

अतः $2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x$ या $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$

इसी तरह $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{z}{r}$ ...(1)

अब $\text{grad}\, r = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)r = \vec{i}\frac{\partial r}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial r}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}$

$$= \frac{1}{r}[x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}] = \frac{1}{r}\vec{r} = \hat{r}$$ सिद्ध हुआ।

(ii) $\text{grad}\, r^n = \nabla r^n = \vec{i}\frac{\partial r^n}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial r^n}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial r^n}{\partial z}$

$$= \vec{i}\, nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x}+\vec{j}\, nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial y}+\vec{k}\, nr^{n-1}\frac{\partial r}{\partial z}$$

$$= nr^{n-1}\left[\frac{x}{r}\vec{i}+\frac{y}{r}\vec{j}+\frac{z}{r}\vec{k}\right] = n\frac{r^{n-1}}{r}[x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}] = nr^{n-2}\vec{r}$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 4. बिन्दु (2, −1, 2) पर z-अक्ष के साथ $4xz^3-3x^2y^2z^2$ का डाइरेक्शनल डेरीवेटिव (directional derivative) ज्ञात कीजिए। **[BTE 2007, 12]**

हल : माना $\phi = 4xz^3-3x^2y^2z^2$

तथा z-अक्ष की दिशा में इकाई सदिश $= 0\vec{i}+0\vec{j}+1\hat{k} = \hat{k}$

अब $\text{grad}\,\phi = \nabla\phi = \vec{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$

$$= \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}(4xz^3-3x^2y^2z^2)+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(4xz^3-3x^2y^2z^2)+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(4xz^3-3x^2y^2z^2)$$

$$= \vec{i}(4z^3-6xy^2z^2)+\vec{j}(-6x^2yz^2)+\vec{k}.(12xz^2-6x^2y^2z) \quad ...(1)$$

(1) से $x=2, y=-1$ तथा $z=2$ रखने पर

$$\text{grad}\,\phi = \hat{i}[4\times(2)^3-6\times 2(-1)^2\times(2)^2]+\hat{j}[-6\times(2)^2(-1)\times(2)^2]$$
$$+\hat{k}[12\times(2)(2)^2-6\times(2)\times(-1)^2(2)] = -16\vec{i}+96\vec{j}+72\vec{k}$$

www.polytechnicpdf.com

अभीष्ट दिष्ट अवकलज (directional derivative) बिन्दु (2, – 1, 2) पर z-अक्ष दिशा में $\nabla\phi . \hat{r} = \nabla\phi \ \vec{k}$

$$= (-16\hat{i} + 96\hat{j} + 72k) . \hat{k} = 72 \qquad [\because \vec{i} . \vec{k} = \vec{j} . \hat{k} = 0]$$

उदाहरण 5. बिन्दु (1, – 2, – 1) पर सदिश $2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ की दिशा में $\phi = x^2yz + 4xz^2$ का directional derivative (दिष्टगुणज) ज्ञात कीजिए। [2001]

हल : माना $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$ तथा इकाई सदिश $\hat{a}$, $\vec{a}$ की दिशा में है, तो

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}}{3} \qquad ...(1)$$

अब $$\text{grad } \phi = \nabla\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{dx} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$= \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2yz + 4xz^2) + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2yz + 4xz^2) + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2yz + 4xz^2)$$

$$= (2xyz + 4z^2)\hat{i} + (x^2z)\hat{j} + (x^2y + 8xz)\hat{k} \qquad ...(2)$$

अतः दी गयी दिशा में दिष्टगुणज

$$= \hat{a}.\ \text{grad } \phi = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} . \nabla\phi = \left(\frac{2\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}}{3}\right) . \{2xyz + 4z^2)\hat{i} + (x^2z)\hat{j} + (x^2y + 8xz)\hat{k}\}$$

[(1) तथा (2) से]

$$= \frac{2}{3}(2xyz + 4z^2) - \frac{1}{3}(x^2z) - \frac{2}{3}(x^2y + 8xz) \qquad ...(3)$$

∴ बिन्दु (1) पर दिष्टगुणज

(3) में $x = 1, y = -2, z = -1$ रखने पर

$$= \frac{2}{3}(4+4) - \frac{1}{3}(-1) - \frac{2}{3} \times (-10) = \frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{20}{3} = \frac{37}{3}$$

उदाहरण 6. $(x^2 + y^2 + z^2)$ का बिन्दु (1, 2, 3) पर रेखा $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ की दिशा में दिशात्मक व्युत्पत्ति दिष्ट अवकलज (directional derivative) ज्ञात करें। [BTE 2011]

हल : दी गई सरल रेखा $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$

अतः 2, 2, 1 इस रेखा के दिक् कोज्या (d.c.) हैं। माना $\phi = x^2 + y^2 + z^2$

तथा $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\vec{j} + \hat{k}$ सदिश ϕ की दिशा में तब

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{4+4+1}}$$

$$\hat{a} = \frac{2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3} = \frac{2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{3} \qquad ...(1)$$

अब $$\text{grad } \phi = \nabla\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} = \vec{i}(2x) + \vec{j}(2y) + \vec{k}(2z) = 2(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \qquad ...(2)$$

www.polytechnicpdf.com

अतः दिये गये दिशा में दिष्टगुणज

$$= \hat{\mathbf{a}}.\text{grad}\ \phi = \frac{\vec{\mathbf{a}}}{|\vec{\mathbf{a}}|}.\nabla\phi = \frac{2\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}}+2\hat{\mathbf{k}}}{3}.2(x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}})$$ [(1) तथा (2) से]

$$= \frac{4x+4y+2z}{3}$$

$\therefore$ बिन्दु $x=1, y=2, z=3$

बिन्दु पर अभीष्ट दिष्टगुणज $= \frac{4\times1+4\times2+2\times3}{3} = \frac{4-8+6}{3} = \frac{18}{3} = 6$

उदाहरण 7. सिद्ध करें $\text{div}\ \vec{\mathbf{r}} = 3$ **[BTE 2010, 06]**

हल : प्रश्न से $\vec{\mathbf{r}} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$

$\therefore$ परिभाषा से $\text{div}\ \vec{\mathbf{r}} = \nabla.\vec{\mathbf{r}} = \left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right).\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{i}}.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}.\frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial z}$

$$= \vec{\mathbf{i}}.\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}.\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{k}} \qquad \left[\because \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial x} = \vec{\mathbf{i}}, \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial y} = \vec{\mathbf{j}}, \frac{\partial\vec{\mathbf{r}}}{\partial z} = \vec{\mathbf{k}}\right]$$

$$= 1+1+1 = 3 \qquad [\because \vec{\mathbf{i}}.\vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}}.\vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}}.\vec{\mathbf{k}} = 1]$$

उदाहरण 8. $\text{div}\ (3x^2\vec{\mathbf{i}} + 5xy^2\vec{\mathbf{j}} + yz^3\vec{\mathbf{k}})$ का मान बिंदु (1, 2, 3) पर ज्ञात करें **[BTE 1998]**

हल : $\text{div}\ (3x^2\vec{\mathbf{i}} + 5xy^2\vec{\mathbf{j}} + 2xyz^3\vec{\mathbf{k}}) = \left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right).(3x^2\vec{\mathbf{i}} + 5xy^2\vec{\mathbf{j}} + xyz^3\vec{\mathbf{k}})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(5xy^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz^3) = 6x + 10xy + 3xyz^2 \qquad ...(1)$$

$\therefore$ बिन्दु (1, 2, 3) पर div का मान

$= 6\times1 + 10\times1\times2 + 3\times1\times2\times3^2$ [(1) में $x=1, y=2, z=3$ रखने पर]

$= 6 + 20 + 54 = 80$

उदाहरण 9. यदि $\vec{\mathbf{F}} = \nabla(x^3+y^3+z^3-3xyz)$ तो div $\vec{\mathbf{F}}$ का मान ज्ञात करें। **[BTE 2008]**

हल : प्रश्न से, $\vec{\mathbf{F}} = \nabla(x^3+y^3+z^3-3xyz)$

$$= \left(\vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

$$= \vec{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x}(x^3+y^3+z^3-3xyz) + \vec{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y}(x^3+y^3+z^3-3xyz) + \vec{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

$$= \vec{\mathbf{i}}(3x^2-3yz) + \vec{\mathbf{j}}(3y^2-3xz) + \vec{\mathbf{k}}(3z^2-3xy)$$

$$= 3[\vec{\mathbf{i}}(x^2-yz) + \vec{\mathbf{j}}(y^2-xz) + \vec{\mathbf{k}}(z^2-xy)]$$

www.polytechnicpdf.com

$$\therefore \quad \text{div}\,\vec{F} = \nabla.\vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).3[\vec{i}(x^2 - yz) + \vec{j}(y^2 - xz) + \vec{k}(z^2 - xy)]$$

$$= 3\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - yz) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - xz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2 - xy)\right] = 3[2x + 2y + 2z]$$

$$= 6(x + y - z)$$ उत्तर

उदाहरण 10. यदि $\vec{r} = x\vec{i} - y\vec{j} + z\vec{k}$ तो n का वह मान प्राप्त करें जिसके लिए $r^n\,\vec{r}$ सोलेनॉयडल है।

हल : यहाँ $\nabla.r^n\,\vec{r} = \nabla.(x^2 - y^2 + z^2)^{n/2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

$$[\because r^n = |\vec{r}|^n = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}]$$

$$= \left[\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right]\cdot[(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}\,x\vec{i}$$

$$+ (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}\,y\vec{j} + (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}\,z\vec{k}]$$

$$= \frac{n}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{(n/2)-1}(2x^2) + (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}.1$$

$$+ \frac{n}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{(n/2)-1}(2y^2) + (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}.1$$

$$+ \frac{n}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{(n/2)-1}(2z^2) + (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}.1$$

$$= n(x^2 + y^2 + z^2)^{(n/2)-1}(x^2 + y^2 + z^2) - 3(x^2 + y^2 - z^2)^{n/2}$$

$$= n(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} + 3(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} = (n + 3)(x^2 - y^2 + z^2)^{n/2}.$$

यदि $r^n\,\vec{r}$ सोलेनॉयडल है तो $\text{div}\,r^n\,\vec{r} = 0$ अर्थात् $(n + 3)(x^2 + y^2 + z^2)^{n/2} = 0$

या $n + 3 = 0$ या $n = -3$. उत्तर

उदाहरण 11. सिद्ध करें कि $\text{curl}\,\vec{r} = 0$.

हल : $\text{curl}\,\vec{r} = \nabla \times \vec{r} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \vec{r} = \vec{i} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} + \vec{j} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} + \vec{k} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}$

किन्तु $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\therefore \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \vec{i}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \vec{j}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \vec{k} \quad \therefore \quad \text{curl}\,\mathbf{r} = \mathbf{i} \times \mathbf{i} + \mathbf{j} \times \mathbf{j} + \mathbf{k} \times \mathbf{k}$$

$$= 0 + 0 + 0 = 0$$

उदाहरण 12. सदिश $\vec{F} = (x^2 + yz)\vec{i} + (y^2 + zx)\vec{j} + (z^2 + xy)\vec{k}$ का कर्ल बिन्दु (1, 2, 3) पर ज्ञात कीजिए।

[U.P. Dip. Engg. 2005]

हल : यहाँ $\vec{F} = (x^2 + yz)\vec{i} + (y^2 + zx)\vec{j} + (z^2 + xy)\vec{k}$

$$\therefore \quad \text{curl}\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + yz & y^2 + zx & z^2 + xy \end{vmatrix}$$ [परिभाषा से]

www.polytechnicpdf.com

$$= \hat{i}\left\{\frac{\partial}{\partial y}(z^2 + xy) - \frac{\partial}{\partial z}(y^2 + xz)\right\} + \vec{j}\left\{\frac{\partial}{\partial z}(x^2 + yz) - \frac{\partial}{\partial x}(z^2 + xy)\right\}$$
$$+ \vec{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(y^2 + zx) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + yz)\right\}$$
$$= \hat{i}\{x - x\} + \hat{j}\{y - y\} + \hat{k}(z - z) = 0.\hat{i} + 0.\hat{j} + 0.\hat{k} = 0$$

उदाहरण 13. सदिश फलन $\vec{f} = (x^2 - y^2)\hat{i} + 2xy\,\hat{j} + (y^2 - 2xy)\hat{k}$ का डाइवर्जेन्स और कर्ल ज्ञात कीजिए।

[U.P. Dip. Engg. 2003]

हल : प्रश्न से , $\vec{f} = (x^2 - y^2)\hat{i} + 2xy\,\hat{j} + (y^2 - 2xy)\hat{k}$

$\therefore$ $\text{div}(\vec{f}) = \nabla . \vec{f}$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right).((x^2 - y^2)\hat{i} + 2xy\hat{j} + (y^2 - 2xy)\hat{k})$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy) + \frac{\partial}{\partial z}(y^2 - 2xy)$$
$$= 2x + 2x + 0 = 4x$$ उत्तर

पुन curl $\vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y^2 & 2xy & y^2 - 2xy \end{vmatrix}$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(y^2 - 2xy) - \frac{\partial}{\partial z}(2xy)\right]\hat{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(y^2 - 2xy) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y^2)\right]\hat{j}$$
$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2)\hat{k}\right]$$
$$= [2y - 2x - 0]\hat{i} - [-2y - 0]\hat{j} + (2y + 2y)\hat{k}$$
$$= 2(y - x)\hat{i} + 2y\,\hat{j} + 4y\,\hat{k}$$ उत्तर

उदाहरण 14. क्या द्रवीय गति (fluid motion) $\vec{V}$ जहाँ

$$\vec{V} = (y\sin z - \sin x)\vec{i} + (x\sin z + 2yz)\vec{j} + (xy\cos z + y^2)\vec{k}$$

इरोटेशनल (irrotational) है ?

हल : परिभाषा से $\vec{V} = \nabla \times \vec{V}$

$$= \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \{(y\sin z - \sin x)\hat{i} + (x\sin z + 2yz)\,j + (xy\cos z + y^2)\,k\}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y\sin z - \sin x & x\sin z + 2yz & xy\cos z + y^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x\cos z + 2y - x\cos z - 2y)\,i - (y\cos z - y\cos z)\,j + (\sin z - \sin z)\,k$$

$= 0$. अत: गति इरोटेशन्ल है।

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 15. यदि $\vec{a}$ अचर सदिश है तो दिखाइये कि

$$\text{curl}\,(\mathbf{r}\times\mathbf{a}) = -2\mathbf{a}$$ [1999]

हल : $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

माना $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, जहाँ a_1, a_2, a_3 अचर हैं।

परिभाषा से, $\mathbf{r}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (a_3y - a_2z)\,\mathbf{i} + (a_1z - a_3x)\,\mathbf{j} + (a_2x - a_1y)\,\mathbf{k}$

$$\therefore \quad \text{curl}\,(\mathbf{r}\times\mathbf{a}) = \nabla\times(\mathbf{r}\times\mathbf{a})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_3y - a_2z & a_1z - a_3x & a_2x - a_1y \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(a_2x - a_1y) - \frac{\partial}{\partial z}(a_1z - a_3x)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(a_2x - a_1y) - \frac{\partial}{\partial z}(a_3y - a_2z)\right]\mathbf{j}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(a_1z - a_3x) - \frac{\partial}{\partial y}(a_3y - a_2z)\right]\mathbf{k}$$

$$= -2a_1\mathbf{i} - 2a_2\mathbf{j} - 2a_3\mathbf{k} = -2(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) = -2\mathbf{a}$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 16. $\nabla\times(\nabla\phi) = 0$, अथवा curl grad $\phi = 0$ [BTE 1991, 97, 2004]

हल : परिभाषा से, $\text{grad}\,\phi = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$

$$\therefore \quad \text{curl grad}\,\phi = \nabla\times\text{grad}\,\phi = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y} & \dfrac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right)\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

उदाहरण 17. सिद्ध कीजिए कि $\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

[U.P. Dip. Engg. 2006]

हल : यहाँ $\nabla^2 f = (\nabla\,.\,\nabla)\,f$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\right]f$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f \qquad [\vec{\mathbf{i}}\,.\,\vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}}\,.\,\vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}}\,.\,\vec{\mathbf{k}} = 1,\ \vec{\mathbf{i}}\,.\,\vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{j}}\,.\,\vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{k}}\,.\,\vec{\mathbf{i}} = 0]$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 18. यदि $\vec{F} = (x+y+1)\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}(-x-y)$ तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{F}.\text{curl}\,\vec{F} = 0$

[U.P. Dip. Engg. 2006, 2008, 2010]

हल : प्रश्न से $\vec{F} = (x-y+1)\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}(-x-y)$ ...(1)

$$\text{curl}\,\vec{F} = \vec{F}.(\nabla \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y+1 & 1 & -x-y \end{vmatrix}$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial}{\partial y}(-x-y) - \frac{\partial}{\partial z}(1)\right)\right\}\hat{i} - \hat{j}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}(-x-y)\right) - \frac{\partial}{\partial z}(x+y+1)\right\}$$

$$+ \hat{k}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(1) - \frac{\partial}{\partial y}(x+y+1)\right\}$$

$\therefore \quad \vec{F}.\text{curl}\,\vec{F} = \vec{F}.(-\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})$

$= [\hat{i}(x+y+1) + \hat{j} + \hat{k}(-x-y)].[-\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}]$ [(1) से]

$= -(x+y+1) - 1 + x + y = 0$ $[\because \vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1, \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0]$

$\therefore \quad \vec{F}.\text{curl}\,\vec{F} = 0$

उदाहरण 19. सिद्ध कीजिए कि div (curl $\vec{A}$) = 0.

[U.P. Dip. Engg. 2007]

हल : माना $\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$, तो $\text{curl}\,\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$

$$= \hat{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$\therefore \quad \text{div}\,(\text{curl}\,\vec{A}) = \nabla.(\nabla \times \vec{A})$

$$= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left\{\hat{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) - \hat{j}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{dz}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) \quad \left[\begin{array}{l} \because \vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1; \\ \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0 \end{array}\right]$$

$$= \frac{\partial^2 A_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_1}{\partial z \partial y} = 0.$$

महत्वपूर्ण परिणाम

1. डेल ऑपरेटर ∇

(i) $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$

www.Polytechnicpdf.com

(ii) $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} - \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

2. अदिश बिन्दु फलन ϕ की प्रवणता (Gracient) $\nabla\phi = \vec{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$

3. सदिश $\vec{f}$ का डाइवर्जेन्स (divergence of $\vec{f}$)

(i) $\text{div}\,\vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \vec{i} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{dx} + \vec{j} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial z}$

(ii) यदि $\vec{f} = f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}$, तो $\text{div}\,\vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$

4. सदिश $\vec{f}$ का कर्ल (curl of $\vec{f}$)

(i) $\text{curl}\,\vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \vec{f}$

(ii) यदि $\vec{f} = f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}$, तो $\text{curl}\,\vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$

5. दिष्ट अवकलज **(Directional derivative) :**

$\nabla\vec{f}$ का सदिश $\vec{r}$ की दिशा में दिष्ट अवकलज $\nabla\vec{f} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \nabla f \cdot \hat{r}$

यह $\vec{r}$ की दिशा में $\vec{f}$ के परिवर्तन की दर कहलाता है।

6. सोलेनॉयडल **(Solenoidal) :** यदि $\text{div}\,\vec{F} = 0$ तो $\vec{F}$ सोलेनॉयडल है।

7. इरोटेशनल **(Irrotational) :** यदि $\text{cur.}\,\vec{F} = 0$ तो $\vec{F}$ irrotational है

8. महत्वपूर्ण गुण :

(1) प्रवणता **(Gradient)**

(a) यदि c कोई अचर सदिश फलन है, तो

$\nabla c = 0$ तथा $\nabla(c\phi) = c\nabla\phi$

(b) यदि f तथा g अदिश फलन हैं तो

(i) $\nabla(f \pm g) = \nabla f \pm \nabla g$ (ii) $\nabla(f \cdot g) = f\nabla g - g\nabla f$

(iii) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

(2) डाइवर्जेन्स **(Divergence) :** (i) यदि $\vec{A}$ कोई अचर सदिश है तो $\text{div}\,\vec{A} = 0$

(ii) यदि $\vec{F}$ तथा $\vec{G}$ दो सदिश हैं तो $\text{div}(\vec{F} \pm \vec{G}) = \text{div}\,\vec{F} \pm \text{div}\,\vec{G}$

www.polytechnicpdf.com

3. **कर्ल (Curl) :** (i) यदि $\vec{A}$ कोई अचर सदिश है तो curl $\vec{A} = 0$

(ii) यदि $\vec{F}$ तथा $\vec{G}$ दो सदिश हैं तो curl $(\vec{F} \pm \vec{G})$ = curl $\vec{F} \pm$ curl $\vec{G}$

प्रश्नावली 11.1

1. यदि $f = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, तो बिन्दु (1, 0, 1) पर grad f का मान बतायें।
2. $\nabla\phi$ का मान (2, – 1, 2) पर ज्ञात कीजिए जबकि $\phi = 4xz^3 - 3x^2y^2z$ **[BTE 2005]**
3. यदि $\phi = r$, जहाँ $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ तो

   (i) ∇r (ii) grad r^n का मान ज्ञात करें।
4. यदि $f = \log r$ तो ∇f ज्ञात करें।
5. $x^2y + 2xz = 4$ की प्रवणता (gradient) बिन्दु (2, – 2, 3) पर ज्ञात करें। प्रवणता की दिशा क्या होगी ? **[BTE 1992]**
6. यदि $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} - z\vec{k}$, तो $\vec{r}$ की दिशा में $\frac{1}{r}$ का दिष्ट अवकलज ज्ञात करें।
7. यदि $f(x, y, z) = x^2yz + 4xz^2$ तो बिन्दु (1, – 2, – 1) पर सदिश $2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ की दिशा में दिष्ट अवकलज (Directional Derivative) ज्ञात करें। **[BTE 2006, 10]**
8. बिन्दु (1, 2, 3) पर $3x^2\vec{i} + 5xy^2\vec{j} + xyz^3\vec{k}$ का divergence ज्ञात करें। **[BTE 1998]**
9. (i) यदि $\vec{f} = xyz\vec{i} + 3x^2y\vec{j} + (xz^2 - y^2z)\vec{k}$ तो div $\vec{f}$ का मान ज्ञात करें।

   (ii) div $(2x^2z\vec{i} - xy^2z\vec{j} + 3yz^2\vec{k})$ का मान ज्ञात करें। **[BTE 2007]**
10. div $(3x^2\vec{i} + 5xy^2\vec{j} + yz^3\vec{k})$ का मान बिंदु (1, 2, 3) पर ज्ञात करें। **[BTE 1998]**
11. यदि $\vec{F} = (x + 3y)\vec{i} + (y - 3z)\vec{j} + (x - 2z)\vec{k}$ तो div $\vec{F}$ का मान ज्ञात करें तथा दिखायें कि F सोलेनॉयडल है। **[BTE 1996]**
12. यदि $\vec{f}$ = grad $(x^3 - y^3 + z^3 - 3xyz)$ तो curl $\vec{f}$ तथा div $\vec{F}$ का मान ज्ञात करें। **[BTE 2007, 08, 14]**
13. (i) यदि $\vec{F} = xy^2\vec{i} + 2x^2yz\vec{j} - 3yz^2\vec{k}$ तो div $\vec{F}$ तथा curl $\vec{F}$ ज्ञात करें। **[BTE 2001, 15]**

    (ii) div $\vec{F}$ तथा curl $\vec{F}$ ज्ञात कीजिए, यदि $\vec{F} = \nabla\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ **[BTE 2002]**

    (iii) सदिश क्षेत्र $(x^2 - y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j} + (y^2 - 2xy)\vec{k}$ का डाइवेंन्स तथा कर्ल ज्ञात करें। **[BTE 2003]**
14. दिखायें $\vec{v} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$ इरोटेशनल है।
15. दिखायें $\vec{v} = 2xyz\vec{i} + (x^2z + 2y)\vec{j} + x^2y\vec{k}$ इरोटेशनल है।
16. यदि $\vec{f} = (x + y + 1)\vec{i} + \vec{j} + (-x - y)\vec{k}$ तो सिद्ध कीजिये कि $\vec{f}$. curl $\vec{f} = 0$

www.polytechnicpdf.com

17. यदि $\phi = x^2 + xz$, $\vec{f} = x^2yz\,\vec{i} + xy^2z\,\vec{j} + xyz^2\,\vec{k}$ तो बिन्दु (1, 1, 2) पर $(\vec{f} \times \nabla)\phi$ का मान ज्ञात करें।

[संकेत : $(\vec{f} \times \nabla)\phi = \vec{f} \times \nabla\phi$]

18. दिखायें कि div curl $\vec{A} = 0$ **[BTE 2007]**

19. सिद्ध करें कि div $(\vec{r} \times \vec{a}) = 0$, यदि $\vec{a}$ अचर सदिश है।

10. यदि $\phi = \frac{1}{r}$ तथा $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ तो $\nabla\phi$ का मान ज्ञात करें। **[BTE 2010]**

21. सिद्ध कीजिये कि

(i) div grad $\phi = \nabla^2\phi$ (ii) curl grad $\phi = 0$ **[BTE 1991, 97, 2004]**

(iii) div $\vec{r} = 3$ (iv) curl $\vec{r} = 0$

(v) curl $(\phi\vec{f}) = \phi$ curl $\vec{f}$ + grad $\phi \times \vec{f}$

उत्तरमाला

1. $3(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ 2. $4(2\vec{i} + 12\vec{j} + 21\vec{k})$ 3. (i) $\hat{r}$ (ii) grad $r^n = nr^{n-2}\vec{r}$

4. $\frac{\vec{r}}{r^2}$ 5. $-2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ तल पर अभिलंब

6. $-\left[\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{x^2 + y^2 + z^2}\right]^2$ 7. $\frac{37}{3}$ 8. 80 9. $3x^2 - y^2 + yz + 2xz$

10. 80 11. 0 12. $6(x + y + z)$

13. (i) div $\vec{F} = y^2 + 2x^2z - 6yz$, curl $\vec{F} = -(3z^2 + 2x^2y)\vec{i} + 2xy(2z - x)\vec{k}$

(ii) curl $\vec{F} = 0$, div $\vec{F} = \frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

(iii) div $4x$, curl $2(y - x)\vec{i} + 2y\vec{j} + 4y\vec{k}$

17. $2\vec{i} + 14\vec{j} - 8\vec{k}$

□□□

www.polytechnicpdf.com

12

CHAPTER

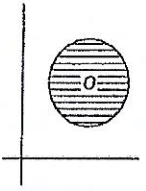
द्विगुण एवं तिगुण समाकलन : परिचय (Double and Triple Integral: An Introduction)

12.1 द्विगुण समाकलन

माना $z = f(x, y)$ दो स्वतन्त्र चर x तथा y का फलन है, जो किसी परिमित क्षेत्र R के xy-समतल के प्रत्येक बिन्दु (x, y) पर परिभाषित है। माना $f(x, y)$ क्षेत्र R में संतत है।

यदि क्षेत्र R को अक्षों x तथा y के समानांतर रेखा खींचकर n आयतों में (चित्र 12.1) उपविभाजित किया जाए तथा एक बिन्दु $(x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots n$ पर विचार किया जाए तो $\delta x_i\, \delta y_i$, वें आयत का क्षेत्रफल होगा।

अतः
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\, \delta x_i\, \delta y_i$$



तो $\underset{n \to \infty}{\text{Lt}}\, S_n = \underset{n \to \infty}{\text{Lt}} \sum_{i=1}^{n} (x_i, y_i)\, \delta x_i\, \delta y_i$ को द्विगुण समाकल कहा जाता है तथा इसे $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy$ से सूचित किया जाता है।

12.2 द्विगुण समाकलन का मान ज्ञात करना (Evaluation of Double Integral)

द्विगुण समाकलन की गणना दो उत्तरोत्तर (Successive) समाकलनों द्वारा की जाती है :

Case I. यदि क्षेत्र R, असमिकाओं $a \le x \le b, c \le y \le d$ द्वारा निरूपित हो, तो

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx$$

या
$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy$$

पहली स्थिति मे पहले $\int_c^d f(x, y)\, dy$ का मान x को अचर मानकर निकाला जाता है। फिर प्राप्त परिणाम को x के सापेक्ष सीमाओं a तथा b के मध्य समाकलित किया जाता है, जबकि दूसरी स्थिति मे पहले $\int_a^b f(x, y)\, dx$ का मान y को अचर मानकर निकाला जाता है। तत्पश्चात् प्राप्त परिणाम को y के सापेक्ष सीमाओं c तथा d के मध्य समाकलित किया जाता है।

Case II. यदि क्षेत्र R वक्र $y = f_1(x), y = f_2(x), x = a$ तथा $x = b$ से घिरा हो, तो

www.polytechnicpdf.com

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy \right] dx$$

यहाँ सर्वप्रथम x को अचर मानकर y के सापेक्ष सीमाओं $f_1(x)$ तथा $f_2(x)$ के मध्य समाकलन किया जाता है। तत्पश्चात् प्राप्त फलन का समाकल सीमाओं a तथा b के मध्य x के सापेक्ष किया जाता है।

इसी तरह, यदि क्षेत्र R वक्रों $x = f_1(y), x = f_2(y), y = c$ तथा $y = d$ से घिरा है, तो

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \left[\int_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy$$

जहाँ सर्वप्रथम y को अचर मानकर x के सापेक्ष समाकलन किया जाता है।

नोट :

- (i) द्विगुण समाकल में पहले चर सीमाओं (Variable Limits) वाले चर के सापेक्ष समाकलन किया जाता है। तत्पश्चात् अचर सीमा वाले चर के सापेक्ष समाकलन निकाला जाता है।
- (ii) यदि x तथा y दोनों के लिए सीमायें (Limits) अचर हों तो पहले x के सापेक्ष फलन को समाकलित कर पुनः y के सापेक्ष समाकलन किया जाए अथवा इसके विपरीत; परिणाम एक ही आता है बशर्ते कि समाकलन की सीमाओं में तदनुरूप परिवर्तन कर लिया गया हो।

12.2.1 द्विगुण समाकलन के गुण :

(i) $\iint_R dx\, dy = |R| =$ क्षेत्र R का क्षेत्रफल

(ii) यदि f तथा g सतत हैं तो $\iint_R (f + g)\, dx\, dy = \iint_R f\, dx\, dy + \iint_R g\, dx\, dy$

(iii) यदि c अचर है, तो $\iint_R cf\, dx\, dy = c \iint_R f\, dx\, dy$

(iv) यदि R_1 तथा R_2 दो क्षेत्र हों, जिनके कोई भी बिंदु उभयनिष्ठ न हो तथा $R = R_1 \cup R_2$ तो

$$\iint_{R_1} f\, dx\, dy + \iint_{R_2} f\, dx\, dy = \iint_R f\, dx\, dy$$

12.3 त्रिगुण समाकल (Triple Integrals)

यदि $f(x, y, z)$, तीन स्वतंत्र चरों का किसी क्षेत्र V में सतत फलन हो, तो

$$\iiint_V \phi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

को त्रिगुण समाकल (Triple Integral) के नाम से जाना जाता है

12.3.1 त्रिगुण समाकलन का मान :

Case I. यदि क्षेत्र R असमिकाओं (Inequalities) $a \le x \le b, c \le y \le d, e \le r \le f$ द्वारा निरूपित हों, तो

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z)\, dz$$

इस स्थिति में जब सीमायें अचर हैं, x, y या z में किसी चर के सापेक्ष पहले समाकलन किया जा सकता है।

www.polytechnicpdf.com

Case II. यदि z की सीमायें x और y के फलन के रूप में y की सीमायें x के फलन के रूप में तथा x की सीमायें अचर के रूप में (माना a तथा b के मध्य) दी गई हैं,

अर्थात् $a \le x \le b, y_1(x) \le y \le y_2(x)$ तथा $z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)$ के रूप में हों, तो

$$\iiint_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

जहाँ समाकलन क्रिया दायें से बायें होती हैं।

अर्थात् फलन का सर्वप्रथम z के सापेक्ष x तथा y को अचर मानकर, तत्पश्चात् y के सापेक्ष x को अचर मानकर और अंत में x के सापेक्ष समाकलन किया जाता है।

नोट

- यदि $f(x, y, z) = 1$ तो क्षेत्र R का आयतन $= \iiint_R dx\, dy\, dz$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. मान ज्ञात करें—

$$\int_0^b \int_0^a (x^2 + y^2)\, dx\, dy$$ **[2004]**

हल : $\int_0^b \int_0^a (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^b \left[\int_0^a (x^2 + y^2)\, dx\right] dy$

$$= \int_0^b \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_0^a dy \quad [y \text{ को अचर मानकर समाकलन करने पर}]$$

$$= \int_0^b \left[\left(\frac{a^3}{3} + ay^2\right) - 0\right] dy = \int_0^b \left(\frac{a^3}{3} + ay^2\right) dy = \frac{a^3}{3}\int_0^b dy + a\int_0^b y^2 dy$$

$$= \frac{a^3}{3}[y]_0^b + a\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^b = \frac{a^3}{3}(b - 0) + \frac{a}{3}(b^3 - 0)$$

अर्थात् $\int_0^b \int_0^a (x^2 + y^2)\, dx = \frac{1}{3}\{a^3 b + ab^3\}$

उदाहरण 2. $\int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1 + x^2)(1 + y^2)}\, dy\, dx$

हल : $\int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1 - x^2)(1 + y^2)}\, dy\, dx = \int_0^{\sqrt{3}} \left[\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1 + x^2)(1 + y^2)}\, dy\right] dx$

www.polytechnicpdf.com

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{1+x^2} [\tan^{-1} y]_0^{\sqrt{3}} \right. dx \qquad [x \text{ को अचर मानकर समाकलित करने पर}]$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} [\tan^{-1} \sqrt{3} - \tan^{-1} 0]\, dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} \left[\frac{\pi}{3} - 0\right] dx$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{3} [\tan^{-1} x]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} [\tan^{-1} \sqrt{3} - \tan^{-1} 0] = \frac{\pi}{3}\left[\frac{\pi}{3} - 0\right] = \frac{\pi^2}{9}.$$

उदाहरण 3. $\int_1^2 \int_0^x \frac{dy\, dx}{y^2 + x^2}$

हल : $\int_1^2 \int_0^x \frac{dy\, dx}{y^2 + x^2} = \int_1^2 \left[\int_0^x \frac{dy}{y^2 + x^2}\right] dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{x} \tan^{-1} \frac{y}{x}\right]_0^x dx$

[∵ सीमा चर x के रूप का है, अतः पहले y के सापेक्ष समाकलन करने पर]

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}\left[\tan^{-1} \frac{x}{x} - \tan^{-1} \frac{0}{x}\right] dx = \int_1^2 \frac{1}{x} [\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0]\, dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] dx$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \frac{\pi}{4} [\log x]_1^2 = \frac{\pi}{4} [\log 2 - \log 1] = \frac{\pi}{4} \log 2 \qquad [\because \log 1 = 0]$$ उत्तर

उदाहरण 4. $\int_0^1 dx \int_0^x e^{y/x}\, dy$

हल : $\int_0^1 dx \int_0^x e^{y/x}\, dy = \int_0^1 \left[\int_0^x e^{y/x}\, dy\right] dx$ [∵ सीमा चर x के पद में है]

$$= \int_0^1 \left[\frac{e^{y/x}}{1/x}\right]_0^x dx \qquad [x \text{ को अचर मानने पर}]$$

$$= \int_0^1 [x\, e^{y/x}]_0^x\, dx = \int_0^1 x\,(e^{x/x} - e^0)\, dx = \int_0^1 x\,(e-1)\, dx$$

$$= (e-1)\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = (e-1)\left[\frac{1}{2} - 0\right] = \frac{1}{2}(e-1)$$ उत्तर

उदाहरण 5. $\int_1^2 \int_0^{y/2} y\, dy\, dx$ का मान ज्ञात करें। **[BTE 2005]**

हल : $\int_1^2 \int_0^{y/2} y\, dy\, dx = \int_1^2 \left[\int_0^{y/2} dx\right] y\, dy$

www.polytechnicpdf.com

$$= \int_1^2 \left[\frac{x}{2}\right]_0^{y/2} y\,dx \qquad \text{[y को अचर मानकर x के सापेक्ष समाकलन से]}$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{y}{2} - 0\right) y\,dy = \frac{1}{2}\int_1^2 y^2\,dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{6}[2^3 - 1^3] = \frac{1}{6}[8-1] = \frac{7}{6} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 6. $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x+y+z)\,dz\,dx\,dy$ [BTE 2007]

हल : $\int_0^3 \int_0^2 \left[\int_0^1 (x+y+z)\,dz\right] dx\,dy$

$$= \int_0^3 \int_0^2 \left[xz + yz + \frac{z^2}{2}\right]_0^1 dx\,dy \qquad \text{[x तथा y को अचर मानने पर]}$$

$$= \int_0^3 \int_0^2 \left[x \times 1 + y \times 1 + \frac{1}{2}\right] dx\,dy = \int_0^3 \left[\int_0^2 \left(x + y + \frac{1}{2}\right) dx\right] dy$$

$$= \int_0^3 \left[\frac{x^2}{2} + xy + \frac{x}{2}\right]_0^2 dy \qquad \text{[y को अचर मानने पर]}$$

$$= \int_0^3 \left[\frac{2^2}{2} + 2y + \frac{2}{2}\right] dy = \int_0^3 [2 + 2y + 1]\,dy = \int_0^3 (3 + 2y)\,dy$$

$$= \left[3y + \frac{2y^2}{2}\right]_0^3 = \left[\left(3 \times 3 + 2 \times \frac{3^2}{2}\right) - 0\right] = [9 + 9] = 18 \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 7. $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz$ का मन ज्ञात करें।

हल : $\int_0^1 \int_0^1 \left[\int_0^1 e^{x+y+z}\,dx\right] dy\,dz = \int_0^1 \int_0^1 [e^{x+y+z}]_0^1\,dy\,dz$ [y तथा z को अचर मानने पर]

$$= \int_0^1 \int_0^1 (e^{1+y+z} - e^{0+y+z})\,dy\,dz = \int_0^1 \left[\int_0^1 (e^{1+y+z} - e^{y+z})\,dy\right] dz$$

$$= \int_0^1 [e^{1+y+z} - e^{y+z}]_0^1\,dz \qquad \text{[x तथा z को अचर मानने पर]}$$

$$= \int_0^1 [(e^{1+1+z} - e^{1+z}) - e^{1+z} - e^z]\,dz = \int_0^1 (e^{2+z} - 2e^{1+z} - e^z)\,dz$$

$$= [e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^z]_0^1 = [(e^{2+1} - 2e^{1+1} + e) - (e^{2+0} - 2e^{1+0} - e^0]$$

$$= e^3 - 2e^2 + e - e^2 + 2e - 1 = e^3 - 3e^2 + 3e + 1 = (e-1)^3$$

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 8. मान ज्ञात करें $\int_{y=0}^{1}\int_{x=y^2}^{1}\int_{z=0}^{1-x} x\,dz\,dx\,dy$

हल : $\int_{y=0}^{1}\int_{x=y^2}^{1}\int_{z=0}^{1-x} x\,dz\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1}\int_{x=y^2}^{1}\left(\int_{z=0}^{1-x} x\,dz\right)dx\,dy$

$$=\int_{y=0}^{1}\int_{x=y^2}^{1}[xz]_0^{1-x}\,dx\,dy = \int_{y=0}^{1}\int_{x=y^2}^{1}[(1-x)x-0.z]\,dx\,dy$$

$$=\int_{y=0}^{1}\left[\int_{x=y^2}^{1}(1-x)x\,dx\right]dy = \int_{y=0}^{1}\left[\int_{x=y^2}^{1}(x-x^2)\,dz\right]dy$$

$$=\int_{y=0}^{1}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{y^2}^{1}dy = \int_{y=0}^{1}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{y^4}{2}-\frac{y^6}{3}\right)\right]dy$$

$$=\int_{y=0}^{1}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}y^4+\frac{1}{3}y^6\right)dy = \left[\frac{1}{6}y-\frac{1}{10}y^5+\frac{1}{21}y^7\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{21}=\frac{35-21+10}{210}=\frac{45-21}{210}=\frac{24}{210}=\frac{4}{35}$$ उत्तर

उदाहरण 9. मान निकालें $\iiint_R (x-y+z)\,dx\,dy\,dz$, जहाँ $R: 1\le x\le 2, 2\le y\le 3, 1\le z\le 3$

हल : प्रश्नानुसार, $\iiint_R (x-y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_1^2 dx\int_2^3 dy\int_1^3 (x-y+z)\,dz$

$$=\int_1^2 dx\int_2^3 dy\left[xz-yz-\frac{1}{2}z^2\right]_1^3 = \int_1^2 dx\int_2^3 (2x-2y+4)\,dy$$

$$=\int_1^2 dx\,[2xy-y^2+4y]_2^3 = \int_1^2 (2x-1)\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2-[x]_1^2$$

$$=2\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)-(2-1)=2\left(2-\frac{1}{2}\right)-1=3-1=2$$ उत्तर

प्रश्नावली 12.1

मान निकालें :

1. $\int_0^3\int_1^2 (x^2+3y^2)\,dy\,dx$
2. $\int_1^2\int_3^4 (xy+e^y)\,dy\,dx$
3. $\int_0^1\int_0^4 \frac{dx\,dy}{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$
4. $\int_0^1\int_0^1 (x^2+y^2)\,dx\,dy$ [BTE 2007]

www.polytechnicpdf.com

5. $\int_0^b \int_0^a (x^2 + y^2)\, dx\, dy$ [BTE 2004]

6. $\int_0^2 \int_0^{y/2} y\, dy\, dx$ [BTE 2005]

7. $\int_1^2 \int_0^{3y} y\, dy\, dx$

8. $\int_0^1 \int_0^{x^2} e^{y/x}\, dy\, dx$

9. $\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} x^2\, dy\, dx$

10. $\int_0^1 \int_0^2 \int_1^2 x^2yz\, dz\, dy\, dx$

11. $\iiint_R (x - y + z)\, dx\, dy\, dz$ जहाँ $R : 1 \le x \le 2, 2 \le y \le 3, 1 \le z \le 3$

12. $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x + y + z)\, dz\, dx\, dy$ [BTE 2007]

13. $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^2 x^2yz\, dz$

उत्तरमाला

1. 30 2. $\frac{21}{4} + e^4 - e^2$ 3. $\frac{\pi^2}{4}$ 4. $\frac{2}{3}$ 5. $\frac{1}{3}(a^3b + ab^3)$

6. $\frac{y^2}{8}$ 7. 7 8. $\frac{1}{2}$ 9. $\frac{5\pi a^4}{8}$ 10. 1 11. 2 12. 18

13. 1

□□□

www.polytechnicpdf.com

13

CHAPTER

सदिशों का समाकलन
(Integration of Vectors)

हम अदिश फलनों के समाकलन की विधि जान चुके हैं। इन्हीं विधियों का प्रयोग कर सदिश फलनों का भी समाकलन निकाला जा सकता है। यहाँ हम सदिश समाकलन के बारे में पढ़ेंगे।

13.1 सदिश फलनों का अनिश्चित समाकलन (Indefinite Integration of Vector Functions)

यदि $\vec{f}(t)$ तथा $\vec{F}(t)$ अदिश चर t के दो सदिश फलन हैं तथा $\frac{d}{dt}\{\vec{F}(t)\} = \vec{f}(t)$ तो $\vec{F}(t)$ को $\vec{f}(t)$ का अनिश्चित समाकल कहा जाता है तथा इसे निम्न रूप में व्यक्त करते हैं :

$$\int \vec{f}(t)\,dt = \vec{F}(t)$$

यदि $\vec{c}$ कोई स्वेच्छ अचर सदिश हो तो $\frac{d}{dt}(\vec{F}(t) + \vec{c}) = \vec{f}(t)$

अतः $\int \vec{f}(t)\,dt = \vec{F}(t) + \vec{c}$

जहाँ $\vec{c}$ स्वेच्छ अचर है, जो t पर निर्भर नहीं है।

13.1.1 निश्चित समाकलन

यदि समाकलन की निम्न सीमा $t = a$ तथा उच्च सीमा $t = b$ हो, तो

$$\int_a^b \vec{f}(t)\,dt = \left[\vec{F}(t)\right]_a^b = \vec{F}(b) - \vec{F}(a)$$

को निश्चित समकलन कहते हैं।

13.1.2 कुछ महत्वपूर्ण परिणाम (Some Important Results)

(i) $\because \quad \frac{d}{dt}(\vec{u}\,.\,\vec{v}) = \vec{u}\,.\,\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\,.\,\frac{d\vec{u}}{dt}$

अतः $\int \frac{d}{dt}(\vec{u}\,.\,\vec{v})\,dt = \int \left\{\vec{u}.\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}.\frac{d\vec{u}}{dt}\right\} dt = \vec{u}.\vec{v} + c$

www.polytechnicpdf.com

(ii) $\because \quad \frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v}$

$\therefore \quad \int\left(\vec{u}\times\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt}\times\vec{v}\right)dt = \int\frac{d}{dt}(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{c}$ (सदिश चर)

(iii) $\frac{d}{dt}(u^2) = 2\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt} \quad \therefore \int\left\{2\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}\right\}dt = u^2 + c$ [यहाँ $\vec{c}$ अदिश अचर तथा $\vec{u}\cdot\vec{u} = u^2$]

(iv) $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)^2 = 2\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} \quad \therefore \int\left(2\frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right)dt = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)^2 + c$ (अदिश अचर)

(v) $\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{u}) = \vec{a}\times\frac{d\vec{u}}{dt}$, जहाँ $\vec{a}$ अचर सदिश है।

अतः $\int\left(\vec{a}\times\frac{d\vec{u}}{dt}\right)dt = \vec{a}\times\vec{u} + \vec{c}$ (सदिश अचर)

(vi) $\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{u}) = \vec{a}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt} \quad \therefore \int\left(\vec{a}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}\right)dt = \vec{a}\cdot\vec{u} + c$ (अदिश चर)

(vii) $\because \frac{d}{dt}\left(\vec{u}\times\frac{d\vec{u}}{dt}\right) = \vec{u}\times\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} \quad \therefore \int\left\{\vec{u}\times\frac{d^2\vec{u}}{dt^2}\right\}dt = \vec{u}\times\frac{d\vec{u}}{dt} - \vec{c}$ [सदिश अचर]

(viii) $\because \quad \frac{d}{dt}(\hat{u}) = \frac{d}{dt}\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{|\vec{u}|}\frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{1}{\{|\vec{u}|\}^2}\frac{du}{dt}\vec{u}$ [जहाँ $u = |\vec{u}|$]

$\therefore \int\left[\frac{1}{|\vec{u}|}\frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{1}{|\vec{u}|^2}\frac{du}{dt}\vec{u}\right]dt = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} + \vec{c} = \hat{u} + \vec{c}$ [सदिश अचर]

नोट

- अचर c का सदिश या अदिश होना समाकल्य के सदिश या अदिश होने पर निर्भर है।

(ix) $\int(c_1\vec{f_1} \pm c_2\vec{f_2})\,dt = c_1\int\vec{f_1}\,dt \pm c_2\int\vec{f_2}\,dt$

तथा यदि $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$

तो $\int\vec{f}(t)\,dt = \vec{i}\int f_1(t)\,dt + \vec{j}\int f_2(t)\,dt + \vec{k}\int f_3(t)\,dt$

www.polytechnicpdf.com

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. यदि $\vec{f}(t) = (3t^3 - t)\vec{i} + (2t^2 - 5)\vec{j} - 4t\vec{k}$ तो $\int \vec{f}(t)\,dt$ का मान निकालें।

हल : $\int \vec{f}(t)\,dt = \int \left\{(3t^3 - t)\vec{i} + (2t^2 - 5)\vec{j} - 4t\vec{k}\right\} dt$

$$= \left(\frac{3}{4}t^4 - \frac{t^2}{2}\right)\vec{i} + \left(\frac{2}{3}t^3 - 5t\right)\vec{j} - 2t^2\,\vec{k} + \vec{c}$$

उदाहरण 2. यदि $\vec{f}(t) = 5t^4.\vec{i} + 8t^3\,\vec{j} - 4t^2\,\vec{k}$ तो $\int \vec{f}(t)\,dt$ का मान बतायें।

हल : $\int \vec{f}(t)\,dt = \int (5t^4\,\vec{i} + 8t^3\,\vec{j} - 4t^2.\vec{k})\,dt = 5 \times \frac{t^5}{5}\vec{i} + 8\frac{t^4}{4}\vec{j} - 4\frac{t^3}{3}\vec{k} + \vec{c}$

$$= t^5\,\vec{i} + 2t^4 - \frac{4}{3}t^3\,\vec{k} + \vec{c}$$ उत्तर

उदाहरण 3. यदि $\vec{r}(t) = (2t^2 - t)\vec{i} + (2 - 6t)\vec{j} - 3t\,\vec{k}$ तो $\int_1^2 \vec{r}(t)\,dt$ का मान बतायें।

हल : $\int_1^2 \vec{r}(t)\,dt = \int_1^2 \left\{(2t^2 - t)\vec{i} + (2 - 6t)\vec{j} - 3t\,\vec{k}\right\} dt$

$$= \left[\left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{t^2}{2}\right)\vec{i} + \left(2t - \frac{6t^2}{2}\right)\vec{j} - \frac{3t^2}{2}\vec{k}\right]_1^2$$

$$= \left[\left\{\left(\frac{2}{3} \times 2^3 - \frac{4}{2}\right)\vec{i} + \left(4 - \frac{6 \times 4}{2}\right)\vec{j} - \frac{3 \times 4}{2}\vec{k}\right\}\right]$$

$$- \left\{\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\vec{i} + (2 - 3)\vec{j} - \frac{3}{2}\vec{k}\right\}$$

$$= \left[\left(\frac{10}{3}\vec{i} - 8\vec{j} - 6\vec{k}\right) - \left(\frac{1}{6}\vec{i} - \vec{j} - \frac{3}{2}\vec{k}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{6}\right)\vec{i} - (8 - 1)\vec{j} - \left(6 - \frac{3}{2}\right)\vec{k}$$

$$= \frac{19}{6}\vec{i} - 7\vec{j} - \frac{9}{2}\vec{k}$$ उत्तर

उदाहरण 4. यदि $\vec{r}(t) = 5t^2\,\vec{i} + t\,\vec{j} - t^3\,\vec{k}$ तो सिद्ध करें कि

$$\int_1^2 \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,dt = -14\vec{i} + 75\vec{j} - 15\vec{k}$$

हल : यहाँ $\frac{d\vec{r}}{dt} = 10t\,\vec{i} + \vec{j} - 3t^2\,\vec{k}$

www.polytechnicpdf.com

$$\therefore \quad \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = [(5t^2\vec{i} + t\vec{j} - t^3\vec{k}) \times (10t\vec{i} + \vec{j} - 3t^2\vec{k}]$$

$$5t^2\vec{k} + 15t^4\vec{j} - 10t^2\vec{k} - 3t^3\vec{i} - 10t^4\vec{j} + t^3\vec{i}$$

$$= -2t^3\vec{i} + 5t^4\vec{j} - 5t^2\vec{k} \qquad [\because \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}]$$

$$\therefore \quad \int_1^2 \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\, dt = \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right]_1^2 = [-2t^3\vec{i} + 5t^4\vec{j} - 5t^2\vec{k}]_1^2$$

$$= (-16\vec{i} + 80\vec{j} - 20\vec{k} + 2\vec{i} - 5\vec{j} + 5\vec{k})$$

$$= 14\vec{i} + 75\vec{j} - 15\vec{k}$$ उत्तर

उदाहरण 5. $\int_0^1 (e^{3t}\vec{i} + e^{-2t}\vec{j} + e^{4t}\vec{k})\, dt$ का मान निकालें।

हल : $\int_0^1 (e^{3t}\vec{i} + e^{-2t}\vec{j} + e^{4t}\vec{k})\, dt = \left[\frac{e^{3t}}{3}\vec{i} - \frac{e^{-2t}}{2}\vec{j} + \frac{e^{4t}}{4}\vec{k}\right]_0^1$

$$= \left[\left(\frac{e^3}{3}\vec{i} - \frac{e^2}{2}\vec{j} + \frac{e^4}{4}\vec{k}\right) - \left(\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{4}\vec{k}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}(e^3 - i)\vec{i} - \frac{1}{2}(e^2 - 1)\vec{j} + \frac{1}{4}(e^4 - 1)$$ उत्तर

उदाहरण 6. यदि $\vec{r}(t) = t\vec{i} - t^2\vec{j} + (t-1)\vec{k}$ तथा $\vec{s}(t) = 2t^2\vec{i} + 6t\vec{k}$

तो (i) $\int_0^1 \vec{r}\,.\,\vec{s}\, dt$ तथा (ii) $\int_0^2 \vec{r} \times \vec{s}\, dt$ का मान बतायें।

हल : (i) $\vec{r}\,.\,\vec{s} = \{t\vec{i} - t^2\vec{j} + (t-1)\vec{k}\}\,.\,\{2t^2\vec{i} + 6t\vec{k}\}$

$$= 2t^3 + 6(t-1)t \qquad \left[\begin{array}{l} \because \vec{i}\,.\,\vec{j} = \vec{j}\,.\,\vec{k} = 0 \\ \vec{i}\,.\,\vec{i} = \vec{k}\,.\,\vec{k} = 1 \end{array}\right]$$

$$= 2t^3 + 6t^2 - 6t$$

$$\therefore \quad \int_0^1 \vec{r}\,.\,\vec{s}\, dt = \int_0^1 (2t^3 + 6t^2 - 6t)\, dt = \left[\frac{2t^4}{4} + \frac{6t^3}{3} - \frac{6t^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{t^4}{2} + 2t^3 - 3t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1)^4 + 2(1)^3 - 3(1)^2 = \frac{1}{2} + 2 - 3 = -\frac{1}{2}$$ उत्तर

(ii) $\because \quad \vec{r} \times \vec{s} = \left\{t\vec{i} - t^2\vec{j} + (t-1)\vec{k}\right\} \times (2t^2\vec{i} + 6t\vec{k})$

www.polytechnicpdf.com

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & -t^2 & t-1 \\ 2t^2 & 0 & 6t \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-6t^3 - 0) - (6t^2 - 2t^3 + 2t^2)\vec{j} + \vec{k}(0 + 2t^4)$$

$$= -6t^3\vec{i} + (2t^3 - 8t^2)\vec{j} + 2t^4\vec{k}$$

$$\therefore \int_0^2 (\vec{r} \times \vec{s})\, dt = \int_0^2 \left\{-6t^3\vec{i} + (2t^3 - 8t^2)\vec{j} + 2t^4\vec{k}\right\} dt$$

$$= -6\vec{i}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2 + 2\vec{j}\left[\frac{t^4}{4} - \frac{4t^3}{3}\right]_0^2 + 2\vec{k}\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^2$$

$$= -6\vec{i}\left[\frac{2^4}{4}\right] + 2\vec{j}\left[\frac{2^4}{4} - 4 \times \frac{2^3}{3}\right] + 2\vec{k}\left[\frac{2^5}{5}\right]$$

$$= -6\vec{i} \times 4 + 2\vec{j}\left(4 - \frac{32}{3}\right) + 2\vec{k}\left(\frac{32}{5}\right)$$

$$= -24\vec{i} - \frac{40}{3}\vec{j} + \frac{64}{5}\vec{k}$$ उत्त

उदाहरण 7. यदि $\frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \vec{a}$, जबकि $t = 0$ पर $\vec{f} = 0, \frac{d\vec{f}}{dt} = 0$ तो $\vec{f}(t)$ का मान ज्ञात करें।

हल : $\because \quad \frac{d^2\vec{f}}{dt^2} = \vec{a} \Rightarrow \int \frac{d^2\vec{f}}{dt^2}\, dt = \vec{a}\int dt$ [दोनों तरफ t के सापेक्ष समाकलन से]

$$\Rightarrow \frac{d\vec{f}}{dt} = \vec{a}t + \vec{c} \quad \text{...(1}$$

जहाँ $\vec{c}$ अचर सदिश है

अब $t = 0, \frac{d\vec{f}}{dt} = 0 \quad \therefore$ (1) से $\vec{c} = 0$

(1) में यह मान रखने पर, $\frac{d\vec{f}}{dt} = \vec{a}t$

पुनः समाकलन से, $\int \frac{d\vec{f}}{dt}\, dt = \vec{a}\int t\, dt \quad \Rightarrow \vec{f} = \frac{\vec{a}t^2}{2} + \vec{c}_1$, जहाँ $\vec{c}_1$ अचर सदिश है। ...(2

अब $t = 0$ पर $\vec{f} = 0 \therefore \vec{c}_1 = 0$

अतः (2) से $\vec{f} = \frac{\vec{a}t^2}{2}$ अभीष्ट मान है।

उदाहरण 8. समाकलित करें $\vec{a} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{b}$

www.polytechnicpdf.com

हल : यहाँ $\vec{a} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{b} \Rightarrow \int \left(\vec{a} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right) dt = \int \vec{b}\, dt \Rightarrow \vec{a} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{b}\, t + \vec{c}$

$\Rightarrow \int \vec{a} \times \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int (\vec{b}\, t + \vec{c})\, dt$ [पुनः समाकलित करने पर]

$\Rightarrow \vec{a} \times \vec{r} = \vec{b} \frac{t^2}{2} + \vec{c} t + \vec{d}$, जहाँ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ अचर सदिश हैं।

उदाहरण 9. यदि किसी समय $t \geq 0$ के लिए किसी कण का त्वरण $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 12\cos 2t\, \vec{i} - 8\sin 2t\, \vec{j} + 16t\, \vec{k}$ से दिया जाता है, तो वेग $\vec{V}$ तथा विस्थापन $\vec{r}$ की गणना करें, जबकि $t = 0$ पर $\vec{V} = 0$ तथा $\vec{r} = 0$

हल : प्रश्न से $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = 12\cos 2t\, \vec{i} - 8\sin 2t\, \vec{j} + 16t\, \vec{k}$

समाकलन से, $\vec{V} = 12\vec{i} \int \cos 2t\, dt - 8\vec{j} \int \sin 2t\, dt + 16\vec{k} \int t\, dt$ $\left[\because \int \frac{d\vec{V}}{dt} dt = \vec{V} \right]$

या $\vec{V} = 12\vec{i} \frac{\sin 2t}{2} + 8\vec{j} \frac{\cos 2t}{2} + 16\vec{k} \frac{t^2}{2} + \vec{c}$

या $\vec{V} = 6\sin 2t\, \vec{i} + 4\cos 2t\, \vec{j} + 8t^2 \vec{k} + \vec{c}$

जब $t = 0,\ \vec{V} = 0 \quad \therefore \quad 0 = 0\vec{i} + 4 \times 1\vec{j} + 0\vec{k} + \vec{c} \quad \therefore \quad c = 4\vec{j}$

$\therefore \quad \vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6\sin 2t\, \vec{i} + 4\cos 2t - 4)\, \vec{j} + 8t^2 \vec{k}$

पुनः समाकलन से, $\vec{r} = 6\vec{i} \int \sin 2t\, dt + 4\vec{j} \int (\cos 2t - 1)\, dt$ $\left[\because \int \frac{d\vec{V}}{dt} \Rightarrow \int \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \vec{r} \right]$

$$= -3\cos 2t\, \vec{i} + 2\vec{j}\, (\sin 2t - 2t)\, \vec{j} + \frac{8}{3} t^3 \vec{k} + \vec{d} \quad \ldots(1)$$

जब $t = 0,\ \vec{r} = 0 \quad \therefore \quad 0 = -3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k} + \vec{d} \quad \therefore \quad \vec{d} = 3\vec{i}$

अतः (1) से, $\vec{r} = -3\cos 2t\, \vec{i} + (\sin 2t - 2t)\, \vec{j} + \frac{8}{3} t^2 \vec{k} + 3\vec{i}$

$$= 3(1 - \cos 2t)\, \vec{i} + (\sin 2t - 2t)\, \vec{j} + \frac{8}{3} t^3 \vec{k}$$

प्रश्नावली 13.1

1. यदि $\vec{f}(t) = 4t^3 \vec{i} + 5t^4 \vec{j} + 6t^5 \vec{k}$ तो $\int \vec{f}(t)\, dt$ का मान बतायें।
2. यदि $\vec{r}(t) = (t - t^2)\, \vec{i} + 2t^2 \vec{j} - 3\vec{k}$ तो $\int \vec{r}\, dt$ ज्ञात करें।

www.polytechnicpdf.com

3. $\int_0^1 (e^t \vec{i} + e^{-2t} \vec{j} + t \vec{k})\, dt$ का मान ज्ञात करें।

4. $\int_2^4 [(5t^2 - 3t) \vec{i} + 6t^3 \vec{j} - 7t \vec{k}]\, dt$ का मान बतायें।

5. यदि $\vec{r}(t) = t \vec{i} - t^2 \vec{j} + (t-1) \vec{k}$ तथा $\vec{s}(t) = 2t^2 \vec{i} + 5t \vec{k}$, तो दिखायें $\int_0^2 \vec{r} \cdot \vec{s}\, dt = 12$

6. यदि $\vec{a} = t \vec{i} - 3 \vec{j} + 2t \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - 2 \vec{j} + 2 \vec{k}$ $c = 3 \vec{i} + t \vec{j} - \vec{k}$, तो दिखाये

$$\int_1^2 \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})\, dt = -\frac{87}{2} \vec{i} - \frac{44}{3} \vec{j} + \frac{15}{2} \vec{k}$$

7. $\int_1^2 \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\, dt$ का मान ज्ञात करें—

जहाँ $\vec{a} = t \vec{i} - 3 \vec{j} + 2t \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - 2 \vec{j} + 2 \vec{k}$; $\vec{c} = 3 \vec{i} + t \vec{j} - \vec{k}$

8. यदि $\vec{r}(t) = 5t^2 \vec{i} + t \vec{j} - t^3 \vec{k}$ तो सिद्ध करें कि $\int_1^2 \vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}\, dt = -14 \vec{i} + 75 \vec{j} - 15 \vec{k}$

[संकेत : $\int_1^2 \left(\vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right) dt = \left[\vec{r} \times \frac{d \vec{r}}{dt} \right]_1^2$; $\vec{r} \times \frac{d \vec{r}}{dt}$ का मान प्राप्त कर उसमें सीमा का मान डालें]

9. $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu^2 \vec{r}$ को समाकलित करें। [संकेत : दोनों तरफ $2 \frac{d \vec{r}}{dt}$ से गुणा करें।]

10. हल करें $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{a} t + \vec{b}$, जहाँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ अचर सदिश हैं।

11. किसी कण का त्वरण, किसी समय t पर $e^t \vec{i} + e^{2t} \vec{j} + \vec{k}$ से दिया जाता है, तो $\vec{V}$ का मान ज्ञात करें यदि $t = 0$ पर $\vec{V} = \vec{i} + \vec{j}$.

उत्तरमाला

1. $t^4 \vec{i} + t^5 \vec{j} + t^6 \vec{k} + c$

2. $\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \vec{i} + \frac{2}{3} t^3 \vec{j} - 3t \vec{k} + \vec{c}$

3. $(e-1) \vec{i} - \frac{1}{2}(e^{-2} - 1) \vec{j} + \frac{1}{2} \vec{k}$

4. $\frac{75}{3} \vec{i} + 350 \vec{j} - 42 \vec{k}$

7. [0]

9. $\left(\frac{d \vec{r}}{dt} \right)^2 = c - \mu^2 r^2$

10. $\vec{r} = \frac{1}{6} \vec{a} t^3 + \frac{1}{2} \vec{b} t^2 + \vec{c} t + \vec{d}$

11. $e^t \vec{i} + \frac{1}{2}(e^{2t} + 1) \vec{j} + t \vec{k}$

□□□

www.polytechnicpdf.com

खण्ड : 4

समाकलन गणित

14. लाप्लास रूपांतरण 229

15. प्रतिलोम लाप्लास रूपांतरण 252

16. फोरियर श्रेणी 272

17. बीटा तथा गामा फलन 292

www.polytechnicpdf.com

14

CHAPTER

लाप्लास रूपांतरण
(Laplace Transforms)

फ्रेंच गणितज्ञ लाप्लास ने सन् 1899 में अवकल समीकरणों को हल करने के लिए एक विशेष प्रकार के निश्चित समाकलन को परिभाषित किया, जिसे लाप्लास रूपान्तरण (Laplace Transform) के नाम से जाना जाता है।

इस रूपान्तरण की सहायता से अवकल समीकरण बीजीय समीकरण (Algebraic Equation) में परिवर्तित हो जाता है, जिसे आसानी से हल किया जा सकता है।

14.1 परिभाषा

यदि $f(t), t$ के सभी धनात्मक मानों के लिए परिभाषित फलन हो तो $f(t)$ का लाप्लास रूपांतरण

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

से दिया जाता है, जहाँ s प्राचल (parameters) है तथा इस सीमा का अस्तित्व है।

स्पष्ट है कि प्राप्त समाकल s का फलन होगा।

अतः $L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$

नोट :

- कुछ लेखक मूल फलन को $F(t)$ तथा लाप्लास रूपांतरण से प्राप्त फलन के लिए $f(s)$ या $f(p)$ का प्रयोग करते हैं।

14.2. प्रमुख फलनों के लाप्लास रूपान्तरण
(Laplace Transform of Some Important Functions)

(i) $L\{1\} = \frac{1}{s}$, जहाँ $s \neq 0$

[BTE 2007]

प्रमाण : माना $f(t) = 1$, तो परिभाषा से

$$L\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} \times 1\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \left[\frac{e^{-\infty} - e^0}{-s}\right] = \frac{-1}{-s} = \frac{1}{s} \quad [\because e^{-\infty} = 0]$$

$\therefore \quad L\{1\} = \frac{1}{s}$.

www.polytechnicpdf.com

(ii) $L(t) = \frac{1}{s^2}$

प्रमाण : माना $f(t) = t$, तो परिभाषा से

$$L\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}\, t\, dt = \left[\frac{t\, e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 1 \times \frac{e^{-st}}{-s}\, dt \quad \text{[खण्डशः समाकलन के प्रयोग से]}$$

$$= 0 + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}\left[\frac{e^{-\infty} - e^{0}}{-s}\right] = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}$$

(iii) $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, जहाँ n धनात्मक पूर्णांक है।

प्रमाण : माना $f(t) = t^n$, तो परिभाषा से

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}\, t^n\, dt = \left[\frac{t^n\, e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{n\, t^{n-1}\, e^{-st}}{-s}\, dt \quad \text{[खंडशः समाकलन से]}$$

$$= 0 + \frac{n}{s}\int_0^\infty t^{n-1}\, e^{-st}\, dt$$

अतः $L\{t^n\} = \frac{n}{s} L\{t^{n-1}\}$ ...(1)

n की जगह $n-1$ रखने पर, जहाँ $n > 1$

$$L\{t^{n-1}\} = \frac{(n-1)}{s} L\{t^{n-2}\}$$

$\therefore \quad L\{t^n\} = \frac{n(n-1)}{s^2} L\{t^{n-2}\}$ [समी० (1) से]

इसी तरह $L\{t^n\}$

$$= \frac{n}{s}\,\frac{n-1}{s}\,\frac{n-2}{s} \ldots \frac{3}{s}\,\frac{2}{s}\,\frac{1}{s} L\{t^{n-n}\} \quad \text{[}(n-1)\text{ बार खण्डशः समाकलन से]}$$

$$= \frac{n!}{s^n} \times \frac{1}{s} = \frac{n}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+1}} \quad \left[\begin{array}{l} \because L\{t^0\} = L\{1\} = \frac{1}{s} \\ \Gamma(n+1) = n! \end{array}\right]$$

विकल्पतः $L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}\, t^n\, dt$ ...(1)

अब (1) में $st = x$ या $t = \frac{x}{s}$ रखने पर जिससे

$$dt = \frac{dx}{s} \text{ तथा } t = 0, x = 0; t = \infty, x = \infty$$

$$L\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^n \frac{dx}{s} = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty e^{-x}\, x^n\, dx$$

$\Rightarrow \quad L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n-1}}$ $\quad [\because \Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^n\, dx]$ सिद्ध हुआ।

www.polytechnicpdf.com

$\Rightarrow \quad L\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $\quad [\because \Gamma(n+1) = n!]$ सिद्ध हुआ।

(iv) $L(e^{at}) = \dfrac{1}{s-a}$, जहाँ $s > a$.

प्रमाण : $L\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt$

$$= \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\infty = \left[\frac{e^{-\infty} - e^0}{-s}\right] = -\frac{1}{-(s-a)} = \frac{1}{s-a}$$

(v) $L\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2 + a^2}$.

प्रमाण : $L\{\sin at\} = L\left\{\dfrac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i}\right\}$

$$= \frac{1}{2i}[L(e^{iat}) - L(e^{-iat})] \quad [\because L\{f_1(t) - f_2(t)\} = L[f_1(t) - L f_2(t)]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s-(-ia)}\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{s-ia} - \frac{1}{s+ia}\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{s+ia-s+ia}{(s-ia)(s+ia)}\right]$$

$$= \frac{1}{2i} \times \frac{2ia}{s^2 - (ia)^2} = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

(vi) $L\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$.

प्रमाण : $L\{\cos at\} = L\left\{\dfrac{e^{iat} + e^{-iat}}{2}\right\} = \dfrac{1}{2}[L(e^{iat}) + L(e^{-iat})] = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{s-ia} + \dfrac{1}{s-(-ia)}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s-ia+s+ia}{(s-ia)(s+ia)}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{2s}{s^2 - (ia)^2} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

(vii) $L\{\sinh at\} = \dfrac{a}{s^2 - a^2}$.

प्रमाण : $L\{\sinh at\} = L\left\{\dfrac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\} = \dfrac{1}{2}[L(e^{at}) - L(e^{-at})] = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{s-a} - \dfrac{1}{s-(-a)}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{s+a-s+a}{(s-a)(s+a)} = \frac{1}{2} \times \frac{2a}{s^2 - a^2} = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

(viii) $L\{\cosh at\} = \dfrac{s}{s^2 - a^2}$.

प्रमाण : $L\{\cosh at\} = L\left\{\dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\} = \dfrac{1}{2}[L(e^{at}) + L(e^{-at})]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-(-a)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{s+a+s-a}{(s-a)(s+a)}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{2s}{s^2 - a^2} = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

www.polytechnicpdf.com

14.3 लाप्लास रूपान्तरण के प्रमुख गुण (Important Properties of Laplace Transforms)

(i) रैखिक गुण (Linear Property)

$$L\{c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t) \pm \ldots\} = c_1 L\{f_1(t)\} \pm c_2 L\{f_2(t)\} \pm \ldots$$

अर्थात् लाप्लास रूपान्तरण रैखिक रूपान्तरण है।

उदाहरण 1. $L\{3t^2 + 2\sin 3t + 4e^t\}$ का मान ज्ञात करें। [2010]

हल : $L\{3t^2 + 2\sin 3t + 4e^t\} = 3L(t^2) + 2L\{\sin 3t\} + 4L\{e^t\}$

$$= 3 \times \frac{2!}{s^{2+1}} + 2 \times \frac{3}{s^2+3^2} + 4 \times \frac{1}{s-1}$$

$$= \frac{6}{s^3} + \frac{6}{s^2+9} + \frac{4}{s-1}$$ उत्तर

उदाहरण 2. $L\{\sin^2 t\}$ का मान ज्ञात करें। [BTE 2015]

हल : $L(\sin^2 t) = L\frac{(1-\cos 2t)}{2} = \frac{1}{2}[L(1) - L(\cos 2t)] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s^2+4-s^2}{s(s^2+4)}\right] = \frac{2}{s(s^2+4)}.$$ उत्तर

14.4 प्रथम स्थानान्तरी गुण (First Shifting Property)

यदि $L\{f(t)\} = F(s)$ हो तो $L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$

उदाहरण: $e^{2t}\cos 3t$ का लाप्लास ट्रांसफार्म ज्ञात कीजिये। [1995]

हल : यहाँ $L\{\cos 3t\} = \frac{s}{s^2+9} \Rightarrow L\{e^{2t}\cos 3t\} = \frac{s-2}{(s-2)^2+9}$ उत्तर

[यहाँ $a = 2$ अतः प्रथम स्थानान्तरी गुण से s की जगह $s-2$ रखने पर]

14.5 प्रथम स्थानान्तरी गुण पर आधारित महत्वपूर्ण परिणाम (Important Results based on First Shifting Theorem)

(i) $L\{e^{at} t^n\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

(ii) $L\{e^{at}\sin bt\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$

(iii) $L\{e^{at}\cos bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

(iv) $L\{e^{at}\sinh bt\} = \frac{b}{(s-a)^2-b^2}$

(v) $L\{e^{at}\cosh bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$.

14.6 द्वितीय स्थानान्तरी गुण या हेवीसाइड स्थानांतरण प्रमेय (Second Shifting Property or Heaviside's Shifting Theorem)

यदि $L\{f(t)\} = F(s)$

तथा $g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & 0 < t < a \end{cases}$ तो $L\{g(t)\} = e^{-as} F(s)$

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण : यदि $g(t)=\begin{cases}\cos\left(t-\dfrac{2\pi}{3}\right), & t>\dfrac{2\pi}{3}\\ 0, & t<\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$ तो $L\{g(t)\}$ का मान बतायें।

हल : यहाँ $g(t)=\begin{cases}f\left(t-\dfrac{2\pi}{3}\right), & t>\dfrac{2\pi}{3}\\ 0, & t<\dfrac{2\pi}{3}\end{cases}$ $[\because f(t)=\cos t]$

तथा $L\{f(t)\}=L\{\cos t\}=\dfrac{s}{s^2+1}=F(s)$

द्वितीय स्थानान्तरी गुण से

$$L\{g(t)\}=e^{-as}F(s)=e^{-(2\pi/3)s}\times\frac{s}{s^2+1} \qquad [\because L\{g(t)\}=e^{-as}F(s), \text{ यहाँ } a=\frac{2\pi}{3}]$$

14.7 पैमाना परिवर्तन गुण (Change of Scale Property)

यदि $L\{f(t)\}=F(s)$, तो $L\{f(at)\}=\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{s}{a}\right)$

उदाहरण : पैमाना परिवर्तन गुण का प्रयोग कर $L\{\sinh 3t\}$ का मान ज्ञात करें।

हल : यहाँ $L(\sinh t)=\dfrac{1}{s^2-1}=F(s)$

$$\therefore \quad L\{\sinh 3t\}=\frac{1}{3}F\left(\frac{s}{3}\right)=\frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)^2-1}=\frac{9}{3(s^2-9)}=\frac{3}{s^2-9}$$ उत्तर

14.8 अवकल गुणांकों का लाप्लास रूपान्तरण :

यदि $L\{f(t)\}=F(s)$, तो $L\{f'(t)\}=s\,L\{f(t)\}-f(0)$

$$L\{f''(t)\}=s^2L\{f(t)\}-s\,f(0)-f'(0)$$

इसी तरह $L\{f^n(t)\}=s^n L\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{n-1}(0)$

जहाँ f^n, nवें क्रम का अवकल गुणांक है।

उदाहरण : यदि $f(t)=\sin at$ तो $L\{\cos at\}$ का मान ज्ञात करें।

हल : यहाँ $f(t)=\sin at$, $f(0)=0$

$\Rightarrow \quad f'(t)=a\cos at$ तथा $f'(0)=a$

$\Rightarrow \quad f''(t)=-a^2\sin at$ तथा $f''(0)=0$

$\Rightarrow \quad f'''(t)=-a^3\cos at.$

अब $L\{f'''(t)\}=s^3L\{f(t)\}-s^2f(0)-s\,f'(0)-f''(0)$

$\Rightarrow \quad L\{-a^3\cos at\}=s^3L\{\sin at\}-s^2\times 0-s\times a-0$

$\Rightarrow \quad -a^3L\{\cos at\}=s^3\times\dfrac{a}{s^2+a^2}-as$

$\Rightarrow \quad L\{\cos at\}=-\dfrac{1}{a^3}\left\{\dfrac{s^3\times a}{s^2+a^2}-as\right\} \qquad \Rightarrow \quad L\{\cos at\}=\dfrac{s}{a^2}-\dfrac{s^3}{a^2(s^2+a^2)}$

www.polytechnicpdf.com

$$\Rightarrow \quad L\{\cos at\} = \frac{s^3 + sa^2 - s^3}{a^2(s^2 + a^2)} \qquad \Rightarrow \quad L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$ उत्तर

14.9 समाकल का लाप्लास रूपान्तरण (Laplace Transformation of Integrals)

यदि $L\{f(t)\} = F(s)$ तो $$L\left[\int_0^t f(x)\,dx\right] = \frac{1}{s} L\{f(t)\} = \frac{1}{s} F(s)$$

उदाहरण : $L\left\{\int_0^t e^{3x}\,dx\right\} = \frac{1}{s} L\{e^{3t}\} = \frac{1}{s(s-3)}$ $\left[\because L\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}\right]$

14.10 फलन $f(t)$ का t^n से गुणन $[t^n f(t)]$ का लाप्लास ट्रांसफार्म (Laplace Transform of Multiplication by t^n)

यदि $L f(t)\} = F(s)$ तो $L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$,

जहाँ $n = 1, 2, 3, \ldots$

उदाहरण : $t \cos at$ का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें। **[2012]**

हल : $L\{t \cos at\} = (-1)^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2 + a^2}\right)$ $\left[\because L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d}{ds}\{L(f(t))\}, \quad L(\cos at) = \frac{s}{s^2 + a^2}\right]$

$$= -\frac{(s^2 + a^2) \times 1 - s \times 2s}{(s^2 + a^2)^2} = -\frac{s^2 + a^2 - 2s^2}{(s^2 + a^2)^2} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

14.11 फलन $f(t)$ का t से विभाजन का लाप्लास रूपान्तरण (Laplace Transform of Division of $f(t)$ by t)

यदि $L\{f(t)\} = F(s)$ तथा $\underset{t \to 0}{Lt} \left\{\frac{F(t)}{t}\right\}$ का अस्तित्व है,

तो $$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(x)\,dx$$

उदाहरण : दिखायें कि (i) $L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \cot^{-1} s = \tan^{-1}\frac{1}{s}$ (ii) $\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{s}\cot^{-1} s$

हल : (i) $L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}$ तथा $\underset{t \to 0}{Lt} \frac{\sin t}{t} = 1$

$$\therefore \quad L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{x^2 + 1}\,dx = [\tan^{-1} x]_s^\infty = \tan^{-1}\infty - \tan^{-1} s$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s = \cot^{-1} s \qquad \ldots(1)$$

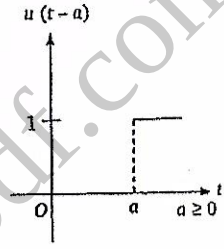
www.polytechnicpdf.com

$$= \tan^{-1}\frac{1}{s}$$ साबित हुआ।

(ii) $\because L\left[\int_0^t f(x)\,dx\right] = \frac{1}{s}L\{f(t)\}$

$$\therefore \quad L\left\{\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx\right\} = \frac{1}{s}L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \frac{1}{s}\cot^{-1} s$$ [(1) से]

14.12 इकाई या एकक पद फलन (Unit Step Function)



इकाई पद फलन $u(t-a)$ को निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है :

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, \text{ जब } t < a \\ 1, \text{ जब } t \geq a \end{cases} \quad \text{जहाँ } a \geq 0$$

इसे $H(t-a)$ से भी व्यक्त करते हैं। इसका प्रयोग उन फलनों का प्रतिलोम रूपान्तरण निकालने में होता है, जिसे सामान्य विधि से नहीं निकाला जा सकता।

14.13 इकाई पद फलन का लाप्लास रूपान्तरण (Laplace Transform of Unit Step Function)

इकाई पद फलन $u(t-a)$ के लिए $L[u(t-a)] = \frac{e^{-as}}{s}$

प्रमाण : परिभाषा से $L[u(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st}\,u(t-a)\,dt$

$$= \int_0^a e^{-st}\,u(t-a)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}\,u(t-a)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} \times 0\,dt + \int_a^\infty e^{-st}\,1\,dt$$

$$= \int_0^a e^{-st} \times 0\,dt + \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s}$$

$$= 0 + \frac{e^{-\infty} - e^{-as}}{-s} = \frac{-e^{-as}}{-s} = \frac{e^{-as}}{s}$$

14.14 एकक पद फलन के रूप में द्वितीय स्थानान्तरी गुण (Second Shifting Property in Terms of Unit Step Function)

द्वितीय स्थानान्तरी गुण को एकक पद फलन के रूप में निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

यदि $L\{f(t)\} = F(s)$ तो $L[f(t-a).u(t-a)] = e^{-as}\,L\{f(t)\} = e^{-as}\,F(s)$

जहाँ $u(t-a) = \begin{cases} 1 \text{ यदि } t \geq a \\ 0 \text{ यदि } t < a \end{cases}$ तथा $a \geq 0$

उदाहरण : $L\{(t-4)u(t-4)\}$ का मान ज्ञात करें।

हल : यहाँ $f(t) = t \quad \therefore \quad f(t-4) = t-4$ तथा $L(t) = \frac{1}{s^2}$

www.polytechnicpdf.com

$$\therefore \quad L\{(t-4)\,u(t-4)\} = e^{-4s}L\{t\} = \frac{e^{4s}}{s^2}$$

14.15 आवर्ती फलन का लाप्लास रूपान्तरण (Transform of a Periodic Functions)

कथन (Statement) : यदि $f(t)$ एक आवर्ती फलन हो जिसका आवर्त T हो, तो

$$L\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt}{1-e^{-sT}}.$$

प्रमाण : $L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t)\,dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)\,dt + \ldots$

द्वितीय समाकल में $t = u+T$, तृतीय समाकल में $t = u+2T, \ldots$ रखने पर

$$L\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \int_0^T e^{-s(u+T)} f(u+T)\,du + \int_0^T e^{-s(u+2T)} f(u+2T)\,du + \ldots$$

$$= \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + e^{-sT}\int_0^T e^{-su} f(u)\,du + e^{-2sT}\int_0^T e^{-su} f(u)\,du + \ldots$$

$$[\because f(u) = f(u+T) = f(u+2T)\ldots]$$

$$\therefore \quad L\{f(t)\} = \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + e^{-sT}\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + e^{-2sT}\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + e^{-3sT}\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt + \ldots$$

$$= [1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + e^{-3sT} + \ldots] \cdot \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt \qquad \left[\because 1 + a + a^2 + \ldots = \frac{1}{1-a}\right]$$

सिद्ध हुआ।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. दिए गए फलनों का लाप्लास रूपान्तरण निकालें :

(i) $a + bt + ct^2$ **[2000, 1996]**

(ii) $t^{1/2} + \sin 5t \,.\, \cos t$ **[1998, 2002]**

(iii) $(\sin t - \cos t)^2$ **[1998]**

(iv) $\dfrac{e^{at}-1}{a}$

हल : (i) $L\{a + bt + c^2\} = a\,L\{1\} + b\,L(t) + c^2\,L\{t^2\}$

$$= a \times \frac{1}{s} + b \times \frac{1}{s^2} + c^2 \times \frac{2!}{s^{2+1}} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{2c^2}{s^3}$$

www.polytechnicpdf.com

(ii) $L\{t^{1/2} + \sin 5t \,.\, \cos t\} = L\{t^{1/2}\} + L\{\sin 5t \,.\, \cos t\}$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{s^{\frac{1}{2}+1}} + \frac{1}{2} L\{2 \sin 5t \cos t\} \qquad \left[\because L\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{\Gamma\frac{3}{2}}{s^{3/2}} + \frac{1}{2} L\{\sin(5t+t) + \sin(5t-t)\}$$

$[\because 2 \sin A \,.\, \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)]$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \sqrt{\pi}}{s^{3/2}} + \frac{1}{2} L\{\sin 6t\} + \frac{1}{2} L\{\sin 4t\}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} + \frac{1}{2} \frac{6}{s^2+6^2} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{s^2+4^2} \qquad \left[\because L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} + \frac{3}{s^2+36} + \frac{2}{s^2+16}$$ उत्तर

(iii) $L\{(\sin t - \cos t)^2\} = L\{\sin^2 t + \cos^2 t - 2 \sin t \,.\, \cos t\} = L\{1 - \sin 2t\}$

$$= L\{1\} - L\{\sin 2t\} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2-4}$$ उत्तर

(iv) $L\left\{\frac{e^{at}-1}{a}\right\} = \frac{1}{a} L\{e^{at}\} - \frac{1}{a} L\{1\} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{s-a} + \frac{1}{a} \times \frac{1}{s} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{a} \frac{2s-a}{s(s-a)}$. उत्तर

उदाहरण 2. $\cos^3 3t$ का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें।

हल : $L(\cos^3 3t) = L\left\{\frac{\cos 3t + 3\cos t}{4}\right\} = \frac{1}{4} L\{\cos 3t\} + \frac{3}{4} L\{\cos t\}$ $[\because \cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t]$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{s}{s^2+3^2} + \frac{3}{4} \times \frac{s}{s^2+1^2} = \frac{s}{4(s^2+9)} + \frac{3s}{4(s^2+1)}$$ उत्तर

उदाहरण 3. $\sin 2t \,.\, \sin 3t$ का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें।

हल : $L\{\sin 2t \,.\, \sin 3t\} = L\left\{\frac{1}{2} 2 \sin 2t \sin 3t\right\} = \frac{1}{2} L\{\cos(2t-3t) - \cos(2t+3t)\}$

$[\because 2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)]$

$$= \frac{1}{2}\{L(\cos t) - L(\cos 5t)\} = \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+25}\right]$$

$$= \frac{s}{2}\left[\frac{s^2+25-s^2-1}{(s^2+1)(s^2+25)} = \frac{s}{2} \frac{24}{(s^2+1)(s^2+25)} = \frac{12s}{(s^2+1)(s^2-25)}\right]$$

उदाहरण 4. सिद्ध करें कि $L(\sin\sqrt{t}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} e^{-\frac{1}{4s}}$

हल : $\because \sin\sqrt{t} = \sin\{(t)^{1/2}\} = t^{1/2} - \frac{t^{3/2}}{3!} + \frac{t^{5/2}}{5!} - \frac{t^{7/2}}{7!} + \ldots \qquad \left[\because \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right]$

www.pdfvtechnicpdf.com

$$\therefore \quad L(\sin\sqrt{t}) = L(t^{1/2}) - \frac{1}{3}L(t^{3/2}) + \frac{1}{5!}L(t^{5/2}) - \frac{1}{7!}L(t^{7/2}) + \ldots$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}{s^{\frac{1}{2}+1}} - \frac{1}{3!}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{s^{\frac{3}{2}+1}} + \frac{1}{5!}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}{s^{\frac{5}{2}+1}} - \frac{1}{7!}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right)}{s^{\frac{7}{2}+1}} + \ldots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{s^{3/2}} - \frac{1}{3!}\frac{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{s^{5/2}} + \frac{1}{5!}\frac{\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{s^{7/2}} - \frac{1}{7!}\frac{\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}}{s^{\frac{9}{2}}} + \ldots$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}} - \frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{\pi}}{s^{5/2}} + \frac{1}{120}\times\frac{15}{8}\frac{\sqrt{\pi}}{s^{7/2}} - \frac{1}{5040}\times\frac{105}{16}\times\frac{\pi}{s^{9/2}} + \ldots$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}\left[1 - \frac{1}{4s} + \frac{1}{32s^2} - \frac{1}{24\times 16 s^3} + \ldots\right]$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}\left[1 - \frac{1}{4s} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{4s}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{4s}\right)^3 + \ldots\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}e^{-\frac{1}{4s}}$$ सिद्ध हुआ।

$$\left[\because e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right]$$

उदाहरण 5. $L(e^{-t}\sin^2 t)$ तथा $L\{e^t \sin^2 t\}$ का मान ज्ञात करें। **[2003, 2005]**

हल : $\because \quad \sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$

$$\therefore \quad L(\sin^2 t) = \frac{1}{2}L(1-\cos 2t) = \frac{1}{2}[(L(1) - L(\cos 2t)] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{4}{s(s^2+4)} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

$$\therefore \quad L\{e^{-t}\sin^2 t\} = \frac{2}{(s+1)\{(s+1)^2+4\}}$$ [प्रथम स्थानान्तरी गुण से]

$$= \frac{2}{(s+1)(s^2-2s+5)}$$ उत्तर

तथा $L\{e^t \sin^2 t\} = \dfrac{2}{(s-1)\{(s-1)^2+4\}} = \dfrac{2}{(s-1)(s^2+2s+5)}$

उदाहरण 6. $t\cos at$ तथा $t\sin at$ का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें। **[2012]**

हल : $\because \quad \cos at = \dfrac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}$ तथा $\sin at = \dfrac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}$ तथा $L\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$

$$L\{t\cos at\} = L\left\{t\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}\right\} = \frac{1}{2}[L(t\,e^{iat}) + L(t\,e^{-iat})]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s-ia)^2} + \frac{1}{(s+ia)^2}\right]$$ [प्रथम स्थानान्तरी गुण से]

www.polytechnicpdf.com

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s+ia)^2+(s-ia)^2}{(s-ia)^2(s+ia)^2}\right] = \frac{1}{2}\times\frac{2(s^2+i^2a^2)}{\{(s-ia)(s+ia)\}^2} = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$ उत्तर

तथा $L\{t\sin at\} = \frac{1}{2i}[L(t\,e^{iat}) - L(t\,e^{-iat})]$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(s-ia)^2} - \frac{1}{(s+ia)^2}\right]$$ [प्रथम स्थानान्तरी गुण से]

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{(s+ia)^2-(s-ia)^2}{(s-ia)^2(s+ia)^2}\right] = \frac{1}{2i}\times\frac{4ias}{(s^2+a^2)^2} = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$ उत्तर

नोट

- विकल्प के लिए साधित उदाहरण (8) देखें।

उदाहरण 7. $\cosh at\cos at$ का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें।

हल : $\because$ $\cosh at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$ तथा $L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$

$$\therefore\quad L\{\cosh at\cos at\} = \frac{1}{2}L\{\cos at\,(e^{at}+e^{-at})\} = \frac{1}{2}\{L(e^{at}\cos at) + L(e^{-at}\cos at)\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s-a}{(s-a)^2+a^2} + \frac{s+a}{(s+a)^2+a^2}\right]$$ [प्रथम स्थानान्तरी गुण से]

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s-a}{s^2-2as+2a^2} + \frac{s+a}{s^2+2as+2a^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s-a)(s^2+2as+2a^2)+(s+a)(s^2-2as+2a^2)}{(s^2-2as+2a^2)(s^2+2as+2a^2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s-a)(s^2+as+a^2)+(s-a)a(s+a)+(s+a)(s^2-as+a^2)-(s+a)a(s-a)}{\{(s^2+2a^2)-2as\}\{(s^2+2a^2)+2as\}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s^3-a^3+s^3+a^3}{(s^2+2a^2)^2-(2as)^2}\right] = \frac{1}{2}\frac{2s^3}{s^4+4a^2s^2+4a^4-4a^2s^2} = \frac{s^3}{s^4+4a^4}$$ उत्तर

उदाहरण 8. $t^2\cos at$ का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें। **[2009]**

हल : $\because$ $L(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2}$

$$\therefore\quad L\{t^2\cos at\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) \qquad \left[\because L(t^n f(t)) = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\{L(f(t))\}\right]$$

$$= \frac{d}{ds}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right\} = \frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+a^2-s\times 2s}{(s^2+a^2)^2}\right] = \frac{d}{ds}\left\{\frac{a^2-s^2}{(s^2+a^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{(s^2+a^2)^2\times(-2s)-(a^2-s^2)\,2(s^2+a^2)\times 2s}{(s^2+a^2)^4}$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \frac{2s(s^2+a^2)\{-(s^2+a^2)-2a^2+2s^2\}}{(s^2+a^2)^4} = \frac{2s(s^2-3a^2)}{(s^2+a^2)^3}$$ उत्तर

उदाहरण 9. $L\{t\,e^{-t}\sin^2 t\}$ का मान ज्ञात करें। [2007]

हल : $\because \quad \sin^2 t = \frac{1-\cos 2t}{2}$

$$\therefore \quad L(\sin^2 t) = L\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right) = \frac{1}{2}L(1) - \frac{1}{2}L(\cos 2t)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4} = \frac{1}{2}\frac{[s^2+4-s^2]}{s(s^2+4)} = \frac{2}{s(s^2+4)} = F(s) \text{ (माना)}$$

$$\therefore \quad L\{t\sin^2 t\} = (-1)^1\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{d}{ds}\left\{\frac{2}{s(s^2+4)}\right\}$$

$$= -\frac{s(s^2+4)\times 0 - 2\{3s^2+4\}}{\{s(s^2+4)\}^2} = \frac{6s^2+8}{s^2(s^2+4)^2}$$

अब $L\{e^{-t}\,t\sin^2 t\} = \frac{6(s+1)^2+8}{(s+1)^2\{(s+1)^2+4\}^2}$ [प्रथम स्थानान्तरी गुण से]

$$\Rightarrow \quad L(t\,e^{-t}\sin^2 t) = \frac{6(s+1)^2+8}{(s+1)^2(s^2+2s+5)^2}$$

उदाहरण 10. $t\,e^{2t}\cos 5t$ का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें। [BTE 2002]

हल : $\because \quad L\{\cos 5t\} = \frac{s}{s^2+25}$

$$\therefore \quad L\{e^{2t}\cos 5t\} = \frac{s-2}{(s-2)^2+25} = F(s) \text{ (माना)}$$

अब $L\{t\,e^{2t}\cos 5t\} = (-1)^{-1}\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{d}{ds}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+25}\right\}$

$$= -\frac{\{(s-2)^2+25\}\times 1-(s-2)\times 2(s-2)\times 1}{\{(s-2)^2+25\}^2} = -\frac{(s-2)^2+25-2(s-2)^2}{(s^2-4s+29)^2}$$

$$= \frac{(s-2)^2-25}{(s^2-4s+29)^2}$$ उत्तर

उदाहरण 11. $\frac{\sin 2t}{t}$ का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें।

हल : $\because \quad L\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$

$$\therefore \quad L\left(\frac{\sin 2t}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{2}{x^2+4}\,dx = 2\times\frac{1}{2}\left[\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_s^\infty = \tan^{-1}\infty - \tan^{-1}\frac{s}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{2} = \cot^{-1}\frac{s}{2}$$ उत्तर

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 12. $L\left\{\frac{\cos at - \cos bt}{t}\right\}$ का मान ज्ञात करें।

हल : $L(\cos at - \cos bt) = L(\cos at) - L(\cos bt)$

$$= \frac{s}{s^2+a^2} - \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$\therefore \quad L\left\{\frac{\cos at - \cos bt}{t}\right\} = \int_s^\infty \left[\frac{x}{x^2+a^2} - \frac{x}{x^2+b^2}\right] dx$$

$$\left[\because L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(x)\,dx, \text{ जहाँ } L\{f(t)\} = F(s)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_s^\infty \left[\frac{2x}{x^2+a^2} - \frac{2x}{x^2+b^2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}[\log(x^2+a^2) - \log(x^2+b^2)]_s^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\frac{x^2+a^2}{x^2+b^2}\right]_s^\infty = \frac{1}{2}\log\left[\frac{1+\frac{a^2}{x^2}}{1+\frac{b^2}{x^2}}\right]_s^\infty = \frac{1}{2}\log 1 - \frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{a^2}{s^2}}{1+\frac{b^2}{s^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\times 0 - \frac{1}{2}\log\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2} = -\frac{1}{2}\log\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}$$ उत्तर

उदाहरण 13. $L\left\{e^{-4t}\frac{\sin 3t}{t}\right\}$ का मान ज्ञात करें।

हल : $L\{\sin 3t\} = \frac{3}{s^2+9}$

$$\therefore \quad L\left\{\frac{\sin 3t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{3}{x^2+9}\,dx \quad \left[\because L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{3}\times 3\left[\tan^{-1}\frac{x}{3}\right]_s^\infty = \left[\tan^{-1}\infty - \tan^{-1}\frac{s}{3}\right] = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{3} = \cot^{-1}\frac{s}{3}$$

$$\therefore \quad L\left[e^{-4t}\frac{\sin 3t}{3}\right] = \cot^{-1}\frac{s+4}{3} = \tan^{-1}\frac{3}{s+4}$$ उत्तर

उदाहरण 14. $\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt$ का मान ज्ञात करें।

हल : माना $f(t) = e^{-at} - e^{-bt}$

$$\therefore \quad L\{f(t)\} = L\{e^{-at}\} - L\{e^{-bt}\} = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} = F(s) \text{ (मान)}$$

www.polytechnicpdf.com

अब $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = L\left(\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right) = \int_s^\infty F(x)\,dx = \int_s^\infty \left[\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}\right] dx$

$$\Rightarrow \quad L\left(\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right) = [\log(x+a) - \log(x+b)]_s^\infty = \left[\log\frac{x-a}{x-b}\right]_s^\infty$$

$$= \left[\log\frac{1+\frac{a}{x}}{1+\frac{b}{x}}\right]_s^\infty = \log 1 - \log\frac{1+\frac{a}{s}}{1+\frac{b}{s}}$$

$$= -\log\frac{s+a}{s+b} \qquad [\because \log 1 = 0]$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty e^{-st}\cdot\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = -\log\frac{s+a}{s+b} \qquad \text{[परिभाषा से]}$$

सीमा मान $s \to 0$ लेने पर $\int_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt = -\log\frac{a}{b} = \log\frac{b}{a}$ उत्तर

उदाहरण 15. दिखायें कि $\int_0^\infty te^{-3t}\sin t\,dt = \frac{3}{50}$

हल : माना $f(t) = \sin t$ तो $L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$

$$\therefore \quad L\{t\,f(t)\} = L\{t\sin t\} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} = \frac{2s}{(s^2-1)^2}$$

या $\int_0^\infty e^{-st}\,t\sin t\,dt = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$ [परिभाषा से]

उपरोक्त समाकल में $s = 3$ रखने पर $\int_0^\infty e^{-3t}t\sin t\,dt = \frac{2\times 3}{(3^2+1)^2} = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}$

$$\therefore \quad \int_0^\infty e^{-3t}t\sin t\,dt = \frac{3}{50}$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 16. दिखाइये कि $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$

हल : $L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ $\qquad \left[\because \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} = \int_0^\infty F(s)\,ds\right]$

$$\therefore \quad \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{s^2+1}\,ds = [\tan^{-1} s]_0^\infty = \tan^{-1}\infty - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$ सिद्ध हुआ।

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 17. $L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$ का मान ज्ञात करें। क्या $L\left\{\frac{\cos at}{t}\right\}$ का मान ज्ञात किया जा सकता है ? **[2004, 05, 11]**

हल : $L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2} = F(s)$ माना

$$\therefore \quad L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \int_s^\infty F(x)\,dx = \int_s^\infty \frac{a}{x^2+a^2}\,dx = a \times \frac{1}{a}\left[\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_s^\infty = \tan^{-1}\infty - \tan^{-1}\frac{s}{a}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{a} = \cot^{-1}\frac{s}{a}$$

अब $L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2} = F(s)$

$$\therefore \quad L\left\{\frac{\cos at}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_s^\infty \frac{2x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}[\log(x^2+a^2)]_s^\infty$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to\infty}\log(x^2+a^2) - \frac{1}{2}\log(s^2+a^2)\right]$$

जिसका अस्तित्व नहीं है क्योंकि $\lim_{x\to\infty}\log(x^2+a^2)$ परिभाषित नहीं है।

अतः $L\left\{\frac{\cos at}{t}\right\}$ का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता।

उदाहरण 18. फलन $F(t)$ का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें यदि फलन $F(t)$ निम्न रूप में परिभाषित हो :

$$F(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases}$$

हल : $\because \quad L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = \int_0^\pi e^{-st}F(t)\,dt + \int_\pi^\infty e^{-st}F(t)\,dt$

$$= \int_0^\pi e^{-st}\sin t\,dt + \int_\pi^\infty e^{-st} \times 0\,dt$$

$$= \left[\frac{e^{-st}}{s^2+1}(-s\sin t - \cos t)\right]_0^\pi = \frac{e^{-s\pi}+1}{s^2+1}$$ उत्तर

उदाहरण 19. यदि $F(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1 \\ t, & 1 < t < 2 \\ 0, & t > 2 \end{cases}$ तो $L\{F(t)\}$ का मान ज्ञात करें।

हल : $L\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = \int_0^1 e^{-st}F(t)\,dt + \int_1^2 e^{-st}F(t)\,dt + \int_2^\infty e^{-st}F(t)\,dt$

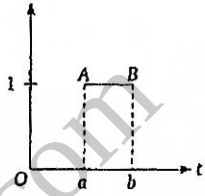
$$= \int_0^1 e^{-st} \times 0\,dt + \int_1^2 e^{-st}\,t\,dt + \int_2^\infty e^{-st} \times 0\,dt = \int_1^2 e^{-st}\,t\,dt$$

$$= \left[\frac{t\,e^{-st}}{-s}\right]_1^2 - \int_1^2 1 \times \frac{e^{-st}}{-s}\,dt = \frac{2e^{-2s} - e^{-s}}{-s} + \frac{1}{s}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_1^2$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \frac{2e^{-2s} - e^{-s}}{-s} - \frac{1}{s^2}[e^{-2s} - e^{-s}] = \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^{-s} - \left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right)e^{-2s}$$ उत्तर

उदाहरण **20.** फलन $u(t-a) - u(t-b)$ का ग्राफ खींचिये।



हल : एकक पद फलन की परिभाषा से स्पष्ट है

$u(t-a)$ का ग्राफ A से ∞ के बीच एक सरल रेखा होगी।

इसी तरह $u(t-b)$ का ग्राफ B से ∞ तक एक सरल रेखा होगी।

जहाँ $OA = a, OB = b$

अतः $u(t-a) - u(t-b)$ का ग्राफ AB है।

उदाहरण **21.** दिए गए फलन को इकाई पद फलन के रूप में व्यक्त करें तथा उसका लाप्लास रूपान्तरण निकालें।

$$f(t) = \begin{cases} 6, & t < 2 \\ 4, & t \geq 2 \end{cases}$$

हल : यहाँ $f(t) = \begin{cases} 6, & t < 2 \\ 4, & t \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f(t) = \begin{cases} 6+0, & t < 2 \\ 6-2, & t \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f(t) = 6 + \begin{cases} 0, & t < 2 \\ -2, & t \geq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow f(t) = 6 + (-2)\begin{cases} 0, & t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases} \Rightarrow f(t) = 6 - 2u(t-2)$ उत्तर

$$\therefore \quad L\{f(t)\} = 6L\{1\} - 2Lu(t-2) = \frac{6}{s} - 2\frac{e^{-2s}}{s}$$

उदाहरण **22.** दिए गए फलन को एकक पद फलन के रूप में व्यक्त करें :

$$f(t) = \begin{cases} t-1, & 1 < t < 2 \\ 3-t, & 2 < t < 3 \end{cases}$$

तथा लाप्लास रूपांतरण निकालें।

हल : प्रश्न से $f(t) = \begin{cases} t-1, & 1 < t < 2 \\ 3-t, & 2 < t < 3 \end{cases}$

$$= (t-1)[u(t-1) - u(t-2) + (3-t)[u(t-2) - u(t-3)]$$
$$= (t-1)u(t-1) - (t-1)u(t-2) + (3-t)u(t-2) - (3-t)u(t-3)]$$
$$= (t-1)u(t-1) - t\,u(t-2) + u(t-2) + 3u(t-2) - t\,u(t-2) - (3-t)u(t-3)$$
$$= (t-1)u(t-1) - 2(t-2)u(t-2) - (3-t)u(t-3)$$

$$\therefore \quad L\{f(t)\} = L\{(t-1)u(t-1)\} - 2L\{(t-2)u(t-2)\} + L\{(t-3)u(t-3)\}$$
$$= e^{-s}L\{t\} - 2e^{-2s}L\{t\} + e^{-3s}L\{t\} \quad [\because L[g(t-a)u(t-a) = e^{-as}Lg(t)]]$$
$$= \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-3s}}{s^2}$$

उदाहरण **23.** यदि $f(t) = \frac{Kt}{T}, 0 < t < T$ तथा $f(t+T) = f(t)$ (Saw tooth curve) तो $L\{f(t)\}$ का मान ज्ञात करें।

हल : $f(t)$ एक आवर्ती फलन है, जिसका आवर्त T है।

$$\therefore \quad L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}\frac{Kt}{T}\,dt$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \frac{K}{T(1-e^{-sT})}\left[\frac{t\,e^{-st}}{-s} - \int 1.\frac{e^{-st}}{-s}\,dt\right]_0^T = \frac{K}{T(1-e^{-sT})}\left[\frac{t\,e^{-st}}{-s} - \frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^T$$

$$= \frac{K}{T(1-e^{-sT})}\left[\left(\frac{T\,e^{-sT}}{-s} - \frac{e^{-sT}}{s^2}\right) - \left(\frac{0\times 1}{-s} - \frac{1}{s^2}\right)\right]$$

$$= \frac{K}{T(1-e^{-sT})}\left[-\frac{T\,e^{-sT}}{s} - \frac{e^{-sT}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right] = \frac{K}{T(1-e^{-sT})}\left[\frac{1}{s^2}(1-e^{-sT}) - \frac{T\,e^{-sT}}{s}\right]$$

$$= \frac{K}{T s^2} - \frac{K\,e^{-sT}}{s(1-e^{-sT})}$$ उत्तर

उदाहरण 24. दिए गए फलन (Half Wave Rectifier) $f(t)$ जो निम्न रूप में परिभाषित है :

$$f(t) = \begin{cases} \sin\omega t, & 0 < t < \dfrac{\pi}{\omega} \\ 0, & \dfrac{\pi}{\omega} < t < \dfrac{2\pi}{\omega} \end{cases}$$

तो $L\,f(t)$ का मान ज्ञात कीजिये।

हल : दिया गया फलन $f(t)$, जिसका आवर्त $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$$\therefore \quad L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st} f(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-s\frac{2\pi}{\omega}}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-st} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{\frac{-2\pi s}{\omega}}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st}\sin\omega t\,dt + \int_{\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-st}\times 0\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{\frac{-2\pi s}{\omega}}}\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} e^{-st}\sin\omega t\,dt = \frac{1}{1-e^{\frac{-2\pi s}{\omega}}}\left[e^{-st}\frac{(-s\sin\omega t - \omega\cos\omega t)}{s^2+\omega^2}\right]_0^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$\left[\because \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{\frac{-2\pi s}{\omega}}}\left[e^{\frac{-s\pi}{\omega}}\frac{(-s\sin\pi - \omega\cos\pi) - e^0(-s\sin 0 - \omega\cos 0)}{s^2+\omega^2}\right]$$

$$= \frac{1}{1-e^{\frac{-2\pi s}{\omega}}}\left[e^{\frac{-s\pi}{\omega}}\frac{(-s\times 0 + \omega\times 1) - 1(-s\times 0 - \omega\cos 0)}{s^2+\omega^2}\right]$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \frac{1}{1-e^{\left(\frac{-\pi s}{\omega}\right)^2}} \left\{ \frac{\omega e^{-\frac{s\pi}{\omega}} + \omega}{s^2+\omega^2} \right\} = \frac{\omega\{1+e^{-\frac{s\pi}{\omega}}\}}{(s^2-\omega^2)(1+e^{-\frac{\pi s}{\omega}})(1-e^{-\frac{\pi s}{\omega}})}$$

$$= \frac{\omega}{(s^2-\omega^2)(1-e^{-\frac{\pi s}{\omega}})}$$

$$\therefore \quad L\{f(t)\} = \frac{\omega}{(s^2+\omega^2)(1-e^{-\frac{\pi s}{\omega}})}$$ उत्तर

प्रमुख सूत्र (Important Formulae)

(A) फलन $f(t)$	लाप्लास रूपान्तरण $L\{f(t)\} = F(s)$, जहाँ $S > 0$
1. 1	$\frac{1}{s}$
2. t	$\frac{1}{s^2}$
3. t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ या $\frac{n!}{s^{n+1}}$
4. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
5. $\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
7. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
8. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
9. $u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
10. आवर्ती फलन $f(t)$, जहाँ $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t)}{1-e^{-sT}}$

(B) 1. रैखिक गुण : $L\{c_1 f_1(t) \pm c_2 f_2(t) \pm \ldots\} = c_1 L\{f_1(t)\} \pm c_2 L\{f_2(t)\} \pm \ldots\}$
यदि $L\{f(t)\} = F(s)$ तो

2. शिफ्टिंग गुण : (i) प्रथम : $L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$
(ii) द्वितीय : (a) $L\{f(t-a).u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$
जहाँ $u(t-a) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases} \quad (a \geq 0)$

www.polytechnicpdf.com

(b) यदि $g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases}$ तो $L\{g(t)\} = e^{-as} F(s)$

3. पैमाना परिवर्तन गुण : $L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

4. अवकल गुणांकों का लाप्लास रूपान्तरण

$$L\{f'(t)\} = s F(s) - f(0)$$
$$L\{f''(t)\} = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0)$$
$$L\{f^n(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{n-1}(0)$$

5. समाकल का लाप्लास रूपान्तरण : $L\{\int_0^t f(x)\,dx\} = \frac{F(s)}{s}$

6. t से गुणन : $L\{t f(t)\} = -F'(s) = (-1)^1 \frac{d}{ds} F(s)$; $L\{t^2 f(t)\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s) = F''(s)$

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} t^n(s)$$

7. t से भाग : $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(s)\,ds$, जहाँ $L\{f(t)\} = F(s)$

प्रश्नावली 14.1

निम्न फलनों का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें :

1. (i) $7e^{2t} + 9e^{-2t} + 5\cos t + 7t^2 + 5\sin 3t + 2$
   (ii) $3t^3 + 2\sin 3t + 4^t$ [BTE 2010]
2. $t^2 - e^{-at}$ [BTE 2009]
3. (i) $\sin^2 t$ [BTE 2015]
   (ii) $\cos^2 t$
4. $L\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right\}$ का मान बतायें।
5. $L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$ का मान बताये।

[संकेत : $L\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = L\frac{1}{\sqrt{t}}\left(1 - \frac{(\sqrt{t})^2}{2!} + \frac{(\sqrt{t})^4}{4!} - \ldots\right)\Bigg] = L\left[t^{-1/2} - \frac{t^{1/2}}{2} + \frac{t^{3/2}}{24} - \ldots\right]$

6. दिखायें कि :
   (i) $L[(5e^{2t} - 3)^2] = \frac{25}{s-4} - \frac{30}{s-2} + \frac{9}{s}, s > 0$ (ii) $L\{e^t(t+3)^2\} = \frac{9s^2 - 12s + 5}{(s-1)^3}$ [BTE 2004]
7. दिखायें कि $L\{\sin 2t \,.\, \sin 3t\} = \frac{12s}{(s^2+1)(s^2+25)}$
8. $L\{e^{3t}\cos 2t\}$ का मान बतायें। [BTE 1995]

www.polytechnicpdf.com

9. $L\{e^t \cosh t\}$ का मान बतायें।

10. $L\{e^t \sin^2 t\}$ का मान बतायें।

11. $L\{e^{-t} \cos^2 t\}$ का मान बतायें। [BTE 2006]

12. $L(e^{-t}(3\sinh 2t - 5\cosh 2t)$ [BTE 2006]

13. $L\{e^{-3t}(2\cos 5t - 3\sin 5t\}$

14. $L\{e^{-at} \sin bt\}$

15. $L\{e^{-at} \cos bt\}$

16. दिखायें कि $L\{(1+te^{-t})^3\} = \frac{1}{s} + \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^3} + \frac{6}{(s+3)^4}$

17. निम्न फलनों के लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें :

(i) $t^2 e^{-at}$ (ii) $t^n e^{-at}$

18. मान बतायें।

(i) $L\{t^2 \sin at\}$

(ii) $L\{t \cos at\}$ [BTE 2012]

(iii) $L\{t^2 \cos at\}$ [BTE 2006]

(iv) $L\{t^3 \cos t\}$ [BTE 2001]

19. $L\{te^{at} \sin at\}$ का मान बतायें।

$$\left[\text{संकेत : } L\{t \sin at\} = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2} \Rightarrow L\{e^{at}(t \sin at) = \frac{2a(s-a)}{[(s-a)^2+a^2]^2}\right]$$

20. $L\{t^2 e^t \sin 4t\}$ का मान बतायें।

21. मान बतायें :

(i) $L\{t e^{-t} \sin 2t\}$ [BTE 2002]

(ii) $L\{te^{-t} \sin^2 t\}$ [BTE 2007]

22. $L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$ का मान बतायें। [BTE 2003, 2011]

23. $L\left(\frac{1-e^t}{t}\right)$ का मान बतायें।

24. $L\left\{\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right\}$ का मान बतायें।

$$\left[\text{संकेत : } L\{e^{-at} - e^{-bt}\} = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \quad \therefore \quad L\left\{\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right\} = \int_0^\infty \left[\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right] ds\right]$$

25. $\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t} dt$ का मान ज्ञात करें।

26. $\int_0^\infty \frac{e^{-3t} - 6e^{-6t}}{t} dt$ का मान ज्ञात करें।

www.polytechnicpdf.com

27. दिखायें कि (i) $\int_0^\infty t\, e^{-2t} \cos t\, dt = \frac{3}{25}$.

$$\left[\text{संकेत : } L\{t \cos t\} = \int_0^\infty e^{-st} t \cos t\, dt = -\frac{d}{ds} L\{\cos t\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) \text{ अब } s = 2 \text{ रखें}\right]$$

(ii) $\int_0^\infty t^3 e^{-t} \cos t\, dt = 0$

28. (i) यदि $f(t) = \cos at$ तो $L\{f'''(t)\}$ का मान ज्ञात करें।

(ii) यदि $f(t) = \sin at$ तो $L\{f''(t)\}$ का मान निकालें।

29. दिखायें कि $\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\frac{1}{4p}}$

$$\left[\text{संकेत : } L\{\sin\sqrt{t}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}} e^{-\frac{1}{4p}} \text{ [Ex. 4]}, f(0) = 0. f'(t) = \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}\right.$$

$$\left.\text{अब } L\{f'(t)\} = pL\{\sin\sqrt{t}\} - f(0)\right]$$

30. यदि $\{L f(t)\} = \frac{p^2 - 3p + 2}{(3p-1)^2 (3p+1)}$ तो

$L\{f(3t)\}$ का मान पैमाना परिवर्तन गुण से निकालें।

31. सिद्ध करें $L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1}\frac{1}{p}$ इसकी सहायता से $L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$ का मान ज्ञात करें। क्या $L\left\{\frac{\cos at}{t}\right\}$ का मान ज्ञात किया जा सकता है। **[BTE 2004, 05, 11]**

32. $L\{f(t)\}$ का मान ज्ञात करें यदि :

(a) $\{f(t)\} = \begin{cases} \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right), & t > \frac{\pi}{3} \\ 0, & t < \frac{\pi}{3} \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} \cos\left(t - \frac{2}{3}\pi\right), & t > \frac{2\pi}{3} \\ 0, & t < \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

33. यदि $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t < \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases}$

34. यदि $f(t) = \begin{cases} (t-1)^2, & t > 1 \\ 0, & 0 < t < 1 \end{cases}$ तो $L\{f(t)\}$ का मान ज्ञात करें।

www.polytechnicpdf.com

35. यदि $f(t)=\begin{cases}0, & 0<t<1\\ t-1, & 1<t<2\\ 1, & 2<t\end{cases}$

तो इसे एकक पद फलन के रूप में व्यक्त करे तथा $L\{f(t)\}$ का मान ज्ञात करें।

[संकेत : $f(t)=(t-1)[u(t-1)-u(t-2)]+u(t-2)$

$=(t-1)u(t-1)-u(t-2)\{(t-1)-1\}$

$=(t-1)u(t-1)-(t-2)u(t-2)]$

$\therefore \quad L\{f(t)\}=L\{(t-1)u(t-1)\}-L\{(t-2)u(t-2)\}$

36. यदि $f(t)=\begin{cases}t, & 0<t<1\\ 0, & 1<t<2\end{cases}$, $f(t+2)=f(t)$ तो $L\{f(t)\}$ का मान निकालें

37. यदि $f(t)=\begin{cases}\cos\omega t, & 0<t<\frac{\pi}{\omega}\\ 0, & \frac{\pi}{\omega}<t<\frac{2\pi}{\omega}\end{cases}$

38. यदि फलन (Heaviside unit function)

$$H(t-a)=\begin{cases}0, & t<a\\ 1, & t>a\end{cases}$$

द्वारा परिभाषित हो तो $L\{H(t-a)\}$ का मान प्राप्त करें।

[संकेत : $L\{H(t-a)\}=\int_0^\infty e^{-st}H(t-a)\,dt=\int_a^\infty e^{-st}\times 1\,dt=\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_a^\infty=0+\frac{e^{-as}}{s}$]

उत्तरमाला

1. $\frac{7}{s-2}+\frac{9}{s+2}+\frac{5}{s^2-1}+\frac{42}{s^4}+\frac{15}{s^2+9}+\frac{2}{s}$ (ii) $\frac{6}{s^3}+\frac{6}{s^2-9}+\frac{4}{s^{-1}}$

2. $\frac{2}{s^3}-\frac{1}{s+a}$

3. (i) $\frac{2}{s(s^2+4)}$ (ii) $\frac{2s^2+4}{s(s^2+4)}$

4. $\frac{1}{\sqrt{s}}$

5. $\frac{\sqrt{\pi}}{s}e^{-\frac{1}{4s}}$

6. (ii) $\frac{9s^2-12s+5}{(s-1)^3}$

8. $\frac{s-3}{s^2-6s+13}$

9. $\frac{s-1}{(s-1)^2-a^2}$

10. $\frac{2}{(s-1)(s^2-2s+5)}$

11. $\frac{s^2+2s-3}{(s+1)(s^2+2s+5)}$

12. $\frac{1-5s}{s^2+2s-3}$

13. $\frac{2s-9}{s^2+6s+34}$

14. $\frac{b}{(s+a)^2+b^2}$

15. $\frac{s}{(s+a)^2+b^2}$

17. (i) $\frac{2}{(s+a)^2}$ (ii) $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

www.polytechnicpdf.com

18. (i) $\dfrac{2a(3s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^3}$ (ii) $\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$ (iii) $\dfrac{2s(s^2-3a^2)}{(s^2+a^2)^3}$ (iv) $\dfrac{6s^4-36s^2+6}{(s^2+1)^4}$

19. $\dfrac{2a(s-a)}{(s^2-2as+2a)^2}$

20. $\dfrac{8[3s^2-6s-13]}{(s^2-2s+17)^3}$

21. (i) $\dfrac{4(s+1)}{\{(s+1)^2+4\}^2}$ (ii) $\dfrac{6(s+1)^2+8}{(s+1)^2(s^2+2s+s)^2}$

22. $\dfrac{\pi}{2}-\tan^{-1}\dfrac{s}{a}$ **23.** $\log\dfrac{s-1}{s}$ **24.** $\log\dfrac{s+b}{s+a}$ **25.** $\log 3$

26. $\log 2$ **28.** $\dfrac{a^4}{s^2-a^2}$ **30.** $\dfrac{p^2-9p+18}{27(p-1)^2(p+1)}$ **31.** $\cot^{-1}\dfrac{s}{a}$

32. (a) $e^{-s\pi/3}\dfrac{1}{s^2+1}, s>0$ (b) $e^{-\frac{2}{3}s\pi}\dfrac{s}{s^2+1}$

33. $\dfrac{1}{s^2+1}(e^{-\pi s}+1)$ **34.** $\dfrac{2e^{-s}}{s^3}, s>0$

35. $\dfrac{e^{-s}}{s^2}-\dfrac{e^{-2s}}{s^2}$ **36.** $\dfrac{1-e^{-s}(s+1)}{s^2(1-e^{-2s})}$

37. $\dfrac{s}{(s^2+\omega^2)(1-e^{-\frac{\pi s}{\omega}})}$ **38.** $\dfrac{e^{-as}}{s}$

□□□

www.polytechnicpdf.com

15 प्रतिलोम लाप्लास रूपांतरण

CHAPTER

(Inverse Laplace Transform)

15.1 परिभाषा (Definition)

यदि फलन $f(t)$ का लाप्लास रूपान्तरण $F(s)$ हो तो $f(t)$ को $F(s)$ का प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण (Inverse Laplace Transform) कहा जाता है तथा इसे $L^{-1}\{F(s)\}$ से सूचित किया जाता है।

अत: यदि $L\{f(t)\} = F(s)$ तो $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

L^{-1} को प्रतिलोम लाप्लास संकारक (Inverse Laplace Operator) कहा जाता है।

जैसे : $L\{t\} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$

15.2 प्रमुख फलनों के प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण (Inverse Laplace Transforms of Important Functions)

1. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$
2. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$
3. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!}$, n तथा s धनपूर्णांक है, $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$, $n > -1$ तथा भिन्नात्मक है।
4. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$
5. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{1}{a}\sin at$
6. $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$
7. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-a^2}\right\} = \frac{1}{a}\sinh at$
8. $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh at$
9. $L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$
10. $L^{-1}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_0^t f(x)\,dx$

www.polytechnicpdf.com

15.3 महत्वपूर्ण गुण

1 रैखिक गुण (Linearity Property)

$$L^{-1}\{C_1 F_1(s) \pm C_2 F_2(s) \pm \ldots\} = C_1 L^{-1}\{F_1(s)\} \pm C_2 L^{-1}\{F_2(s)\} \pm \ldots\}$$

उदाहरण : $\frac{1}{s} - \frac{3}{s^2+9} - \frac{5s}{s^2+16}$ का लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें।

हल : $L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{3}{s^2+9} + \frac{5s}{s^2+16}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} + 5L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} = t - \sin 3t + 5\cos 4t$$

2 प्रथम स्थानान्तरी गुण (First Shifting Property)

यदि $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ तो $L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} L\{F(s)\} = e^{at} f(t)$

उदाहरण : $L^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2-4s+13}\right\}$ का मान ज्ञात करें।

हल : $L^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2-4s+13}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s^2-4s+4+9)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s-2)^2+3^2}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s-2+4}{(s-2)^2-3^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+3^2}\right\} + \frac{4}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{(s-2)^2-3^2}\right\}$$

$$= e^{2t}L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+3^2}\right) + \frac{4}{3}e^{2t}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\} \qquad [\because L^{-1}F(s-a)\} = e^{at}f(t), \text{ यहाँ } a=2]$$

$$= e^{2t}\cos 3t + \frac{4}{3}e^{2t}\sin 3t \qquad \left[\because L(\cos 3t) = \frac{s}{s^2+a}, L(\sin 3t) = \frac{3}{s^2+0}\right]$$

3. द्वितीय स्थानांतरी गुण (Second Shifting Property)

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) \text{ तो } L^{-1}[e^{-as}F(s)] = f(t-a)\,u(t-a)$$

$$= \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}, \; a > 0$$

उदाहरण : $L^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\}$ का मान ज्ञात करें।

हल : $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \qquad \therefore \; L^{-1}\left\{e^{-2s}\frac{1}{s^2}\right\} = (t-2)\,u(t-2) = \begin{cases}(t-2) & , t > 2 \\ 0 & , t < 2\end{cases}$

4. अवकल गुणांकों का प्रतिलोम लाप्लास रूपांतरण
(Inverse Laplace Transform of Derivatives)

यदि $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ तो

$$L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}F(s)\right\} = -t\,L^{-1}\{F(s)\} \quad \text{या } L^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}F(s)\right\}$$

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण : $L^{-1}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\}$ का मान ज्ञात करें।

हल : $L^{-1}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{s^2}}\times\frac{-1}{s^2}\right\}$ [अवकलन से]

$$= -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2+1}\right\} = \frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \frac{\sin t}{t}$$ उत्तर

5. समाकल का प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण (Inverse Laplace Transform of Integral)

यदि $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ तो

$$L^{-1}\left\{\int_s^\infty F(x)\,dx\right\} = \frac{f(t)}{t}$$

या $$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = t\,L^{-1}\left[\int_s^\infty F(x)\,dx\right]$$

6. s की घातों से गुणन (Multiplicaion by Powres of s)

यदि $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ तथा $f(0) = 0$

$$L^{-1}\{s\,F(s)\} = f'(t)$$
$$L^{-1}\{s^2\,F(s)\} = f''(t)$$
$$L^{-1}\{s^n\,F(s)\} = f^n(t)$$

उदाहरण : $\because L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \sin 2t$ तथा $\sin 0 = 0$

$$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+4}\right\} = \frac{d}{dt}\sin 2t = 2\cos 2t$$

7. s से विभाजन (Division by s)

यदि $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ तो $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(u)\,du$

उदाहरण : $L^{-1}\left\{\frac{3}{s(s^2+9)}\right\}$ का मान ज्ञात करें।

हल : $\because \quad L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} = \sin 3t$

$$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{3}{s(s^2+9)}\right\} = \int_0^t \sin 3u\,du = \left[\frac{-\cos 3u}{3}\right]_0^t = -\left[\frac{\cos 3t - \cos 0}{3}\right] = \left[\frac{-\cos 3t}{3}\right]$$ उत्तर

www.polytechnicpdf.com

8. संचलन प्रमेय (Convolution Theorem) :

यदि $L\{f_1(t)\} = F_1(s)$ तथा $L\{f_2(t)\} = F_2(s)$

तो $L^{-1}\{F_1(s).F_2(s)\} = \int_0^t f_1(x).f_2(t-x)\,dx = F * G$

समाकल $F * G = \int_0^t f_1(x) f_2(t-x)\,dx$ को संचलन समाकल (Convolution Integral) कहते हैं।

9. संचलन के गुण

संचलन (Convolution) निम्नलिखित नियमों का पालन करता है—

(i) $F * G = G * F$ (क्रम विनिमेय नियम)

(ii) $F * (G * H) = (F * G) * H$ (साहचर्य नियम)

(iii) $F * (G + H) = F * G + F * (H)$ (बंटन नियम)

10. $\frac{F(s)}{G(s)}$ के लिए हेविसाइड प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण सूत्र

(Heaviside Inverse Laplace Transform Formula for $\frac{F(s)}{G(s)}$)

यदि $F(s)$ तथा $G(s)$, s में दो बहुपद (Polynomials) हों तथा $F(s)$ की घात $G(s)$ से कम हो, तो

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{G(s)}\right\} = \frac{\Sigma F(\alpha_i)}{G'(\alpha_i)} e^{\alpha_i t}$$

जहाँ α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $G(s) = 0$ के शून्य (zero) हैं।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. $L^{-1}\left\{\frac{2s^2 - 4s + 5}{s^3}\right\}$ का मान बतायें।

हल : $L^{-1}\left\{\frac{2s^2 - 4s + 5}{s^3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{4}{s^2} + \frac{5}{s^3}\right\} = 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}$

$$= 2 \times 1 - 4 \times t + 5 \times \frac{t^2}{2!} = 2 - 4t + \frac{5}{2}t^2$$ उत्तर

उदाहरण 2. दिखायें कि $\frac{1}{s^{1/2}} = L\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right]$.

हल : $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2}}\right\} = \frac{t^{\frac{1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$ $\left[\because L^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\} = \frac{t^{n-1}}{\Gamma n}\right]$

$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2}}\right\} = \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$ $\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$

$\Rightarrow \frac{1}{s^{1/2}} = L\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right\}$ सिद्ध हुआ।

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 3. $L^{-1}\left\{\dfrac{s-3}{s^2+4s+13}\right\}$ का मान बतायें।

हल : $L^{-1}\left\{\dfrac{s-3}{s^2+4s+13}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{s-3}{(s^2+4s+4)+9}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+2-5}{(s+2)^2+3^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} - \frac{5}{(s+2)^2+3^2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right\} - \frac{5}{3}L^{-1}\frac{3}{(s+2)^2+3^2}$$

$$= e^{-2t}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\} - \frac{5}{3}e^{-2t}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\} \qquad \left[\begin{array}{l} \because L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at \\ L^{-1}\left\{\dfrac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin at \end{array}\right]$$

$$= e^{-2t}\cos 3t - \frac{5}{3}e^{-2t}\sin 3t = \frac{1}{3}e^{-2t}(3\cos 3t - 5\sin 3t)$$

उदाहरण 4. $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+2)^2}\right\}$ का मान निकालें।

हल : $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+2)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{s+2-2}{(s+2)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+2} - \dfrac{2}{(s+2)^2}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} - 2L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = e^{-2t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2e^{-2t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$$

$$= e^{-2t}\times 1 - 2e^{-2t}t = e^{-2t}(1-2t)$$

उदाहरण 5. निम्न फलनों का मान ज्ञात करें :

(i) $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s+3}\right\}$ (ii) $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right\}$

हल : (i) $\because$ $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}$

$\therefore$ $L^{-1}\left\{\dfrac{e^{-\pi s}}{s+3}\right\} = e^{-3(t-\pi)}\,u(t-\pi)$, जहाँ $u(t-\pi)$ एकक पद फलन है।

$$= \begin{cases} e^{-3(t-\pi)}, & t > \pi \\ 0, & t < \pi \end{cases}$$

(ii) $\because$ $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$

$$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right\} = \sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)u\left(t-\frac{\pi}{3}\right) = \begin{cases} \sin\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right), & t > \dfrac{\pi}{3} \\ 0, & t < \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 6. $L^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\}$ का मान बतायें।

हल : $L^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\} = L^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{s^2-1}\right)\right]$

$$= (-1)^1\, t\, L^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= t \sin t \qquad \left[\because L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}F(s)\right\} = -tL^{-1}\{F(s)\}\right]$$

उदाहरण 7. $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\right\}$ का मान ज्ञात करें।

हल : $L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{s+1}{\{(s+1)^2+1\}^2}\right\} = e^{-t}\, L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$ ...(1)

[प्रथम स्थानान्तरी गुण से]

अब $L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = L^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right\} = -\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right\}$

$$= -\frac{1}{2}t\,(-1)^1\, L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{t}{2}\sin t$$

$\therefore$ (1) से

$$L^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s^2+2s+1)^2}\right\} = e^{-t}\cdot\frac{t}{2}\sin t = \frac{1}{2}t\,e^{-t}\sin t$$ उत्तर

उदाहरण 8. $L^{-1}\left\{\log\frac{s+3}{s+2}\right\}$ का मान बतायें।

हल : माना $F(s) = \log\frac{s-3}{s-2} = \log(s+3) - \log(s+2)$

$\therefore$ $F'(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+2}$

$\Rightarrow$ $L^{-1}\{F'(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3} - \frac{1}{s+2}\right\}$ [प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण से]

$\Rightarrow$ $(-1)^1\, t\, L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$

$\Rightarrow$ $-t\,L^{-1}\left\{\log\frac{s+3}{s+2}\right\} = e^{-3t} - e^{-2t}$ $\Rightarrow$ $L^{-1}\left\{\log\frac{s+3}{s+2}\right\} = \frac{e^{-3t}-e^{-2t}}{-t}$

$\Rightarrow$ $L^{-1}\left\{\log\frac{s+3}{s+2}\right\} = \frac{e^{-2t}-e^{-3t}}{t}$ उत्तर

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 9. $L^{-1}\left\{\log\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}$ का मान बनायें।

हल : माना $F(s)=\log\left(1+\frac{1}{s^2}\right)=\log\frac{s^2+1}{s^2}=\log\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right)^{-1}=-\log\frac{s^2}{s^2+1}$

$$=-2\log s+\log(s^2+1) \qquad \left[\because \log\frac{m}{n}=\log m-\log n\right]$$

$$\therefore \quad F'(s)=-2\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right] \quad \Rightarrow \quad L^{-1}\{F'(s)\}=-2L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$\Rightarrow \quad -t\,L^{-1}\{F(s)\}=-2\left[L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)-L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\right] \quad [\because L^{-1}\{F'(s)\}=(-1)^1\,t\,L^{-1}\{F(s)\}$$

$$\Rightarrow \quad -t\,L^{-1}\left\{\log\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}=-2[1-\cos t]$$

$$\Rightarrow \quad L^{-1}\left\{\log\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}=\frac{2}{t}[1-\cos t]$$ उत्तर

उदाहरण 10. यदि $L^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+1)^2}\right\}=\frac{1}{2}t\sin t$ तो $L^{-1}\left\{\frac{8p}{(4p^2+1)^2}\right\}$ का मान ज्ञात करें।

हल : प्रश्न से,

$$L^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+1)^2}\right\}=\frac{1}{2}t\sin t$$

$$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{ap}{(a^2p^2+1)^2}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{t}{a}\sin\left(\frac{t}{a}\right) \qquad \left[\because \text{ पैमाना परिवर्तन गुण से } L^{-1}\{F(ap)=\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)\right]$$

या $L^{-1}\left\{\frac{2ap}{(ap^2+1)^2}\right\}=2\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{t}{a}\sin\left(\frac{t}{a}\right)$ या $L^{-1}\left\{\frac{2\times 4p}{(4p^2+1)^2}\right\}=\frac{1}{4}\cdot\frac{t}{4}\sin\left(\frac{t}{4}\right)$

[$a=4$ रखने पर]

$$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{8p}{(4p^2-1)^2}\right\}=\frac{1}{16}t\sin\left(\frac{t}{4}\right)$$

उदाहरण 11. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}$ का मान ज्ञात करें।

हल : $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t \quad \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}=\int_0^t \sin x\,dx \quad \left[\because L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}=\int_0^t f(t)\,dt\right]$

$$=-[\cos x]_0^t=1-\cos t$$

$$\Rightarrow \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s(s^2+1)}\right\}=\int_0^t(1-\cos x)\,dx=t-\sin t$$ [पुनः s से भाग देकर सूत्र के प्रयोग से]

www.polytechnicpdf.com

$$\Rightarrow \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}=\int_0^t (x-\sin x)\,dt=\left[\frac{x^2}{2}+\cos x\right]_0^t=\frac{t^2}{2}+\cos t-1$$

[पुनः s से भाग देकर सूत्र के प्रयोग से]

$$\Rightarrow \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}=\frac{t^2}{2}+\cos t-1$$

उदाहरण 12. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\log\frac{s+2}{s+1}\right\}$ का मान ज्ञात करें।

हल : माना $F(s)=\log\frac{s+2}{s+1}=\log(s+2)-\log(s+1)$ ...(1)

$$\therefore \quad F'(s)=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+1} \qquad \Rightarrow \quad L^{-1}\{F'(s)\}=L^{-1}\left[\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+1}\right]$$

$$\Rightarrow \quad -t\,L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) \qquad [\because L^{-1}\{F'(s)\}=(-1)^1\,t\,L^{-1}\{F(s)\}]$$

$$\Rightarrow \quad -t\,L^{-1}\{F(s)\}=e^{-2t}-e^{-t} \qquad \Rightarrow \quad L^{-1}\{F(s)\}=\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t} \qquad ...(2)$$

$$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\log\frac{s+2}{s+1}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\right\} \qquad [(1) \text{ तथा } (2) \text{ से}]$$

$$\Rightarrow \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\log\frac{s+2}{s+1}\right\}=\int_0^t \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx \qquad \left[\because L^{-1}\frac{F(s)}{s}=\int_0^t f(x)\,dx\right]$$

उदाहरण 13. $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}$ का मान बतायें।

हल : $\because \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}=e^t$ तथा $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}=e^{2t}$

$\therefore$ संचलन प्रमेय से

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}.\frac{1}{s-2}\right\}=\int_0^t e^x\,e^{2(t-x)}\,dx=\int_0^t e^x\,.\,e^{-2x}\,.\,e^{2t}\,dx$$

$$=e^{2t}\int_0^t e^{-x}\,dx=e^{2t}\left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^t$$

$$=-e^{2t}(e^{-t}-e^0)=-e^{2t}(e^{-t}-1)=e^{2t}-e^t$$ उत्तर

उदाहरण 14. मान निकालें $L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2(p+1)^2}\right\}$

हल : $L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\}=t=g(x)$ तथा $L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^2}\right\}=te^{-t}=f(t)$

www.polytechnicpdf.com

$$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^2}\cdot\frac{1}{p^2}\right\}=\int_0^t f(x).\,g\,(t-x)\,dx$$

$$=\int_0^t xe^{-x}\,(t-x)\,dx$$

$$=\int_0^t (xt-x^2)\,e^{-x}\,dx$$

$$=L\,(xt-x^2)\frac{e^{-x}}{-1}-(t-2x)\,e^{-x}+(-2)\,(-e^{-x})]_0^t$$

$$[\because \int uv=uv_1-u'v_2+u''v_3\ldots]$$

$$=[\{0-(t-2t)\,e^{-t}+(-2)\,(-e^{-t})\}=(0+te^0+2e^0)]$$

$$=te^{-t}+2e^{-t}-t-2$$ उत्तर

उदाहरण 15. संचलन प्रमेय के प्रयोग से $L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+a^2)\,(s^2+b^2)}\right\}$ का मान ज्ञात करें।

हल : $L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+a^2)\,(s^2+b^2)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{s}{s^2+b^2}\right\}$

अब $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}=\cos at;\ L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+b^2}\right\}=\cos bt$

$$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+a^2)\,(s^2+b^2)}\right\}=\int_0^t \cos a\,(t-x)\cos bx\,dx$$

$$[\because L^{-1}\{f(t)\,g(t)=\int_0^t f(t)\,g(t-x)\,dx]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t 2\cos a\,(t-x).\cos bx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^t [\cos\{at-(a-b)\,x\}+\cos\{at-(a+b)\,x]\,dx$$

$$[\because\ 2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(a-b)}\sin\{at-(a-b)\,x\}-\frac{1}{a+b}\sin\{at-(a+b)x\}\right]_0^t$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin bt-\sin at}{a-b}-\frac{\sin at+\sin bt}{a+b}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{[a\sin bt-a\sin at+b\sin bt-b\sin at-a\sin at-a\sin bt+b\sin at+b\sin bt]}{(a-b)\,(a+b)}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{(2b\sin bt-2a\sin at)}{a^2-b^2}=\frac{a\sin at-b\sin bt}{a^2-b^2}$$ उत्तर

आंशिक भिन्नीकरण विधि :

उदाहरण 16. $L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)\,(p^2+1)}\right\}$ का मान ज्ञात करें।

www.polytechnicpdf.com

हल : $\dfrac{1}{(p+1)(p^2+1)} \equiv \dfrac{A}{p+1} + \dfrac{Bp+C}{p^2+1}$ [आंशिक भिन्नों में तोड़ने पर]

$\Rightarrow$ $$1 \equiv A(p^2+1) + (p+1)(Bp+C) \quad \ldots(1)$$

(1) में $p+1=0$ अर्थात् $p=-1$ रखने से

$$1 = 2A$$

$\therefore$ $$A = \frac{1}{2}$$

पुनः दोनों तरफ से p^2 के गुणांक तथा अचर की तुलना से

$$0 = A + B \text{ तथा } A + C = 1 \Rightarrow C = 1 - A = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ $$B = -A = -\frac{1}{2}$$

(1) मे इन मानों को रखने पर

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+1)} = \frac{1}{2(p+1)} + \frac{-\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}}{p^2+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+1} + \frac{1-p}{p^2+1}\right]$$

$\therefore$ $$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)(p^2+1)}\right\} = \frac{1}{2}L^{-1}\left[\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+1}\right]$$ [आंशिक भिन्नों में तोड़ने पर]

$$= \frac{1}{2}\left\{L^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) - L^{-1}\left(\frac{p}{p^2+1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{-t}L^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) + \sin t - \cos t\right]$$

$$= \frac{1}{2}[e^{-t} \times 1 + \sin t - \cos t]$$

$$= \frac{1}{2}[e^{-t} + \sin t - \cos t]$$ उत्तर

उदाहरण 17. $L^{-1}\left\{\dfrac{2s+1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$ का मान बतायें।

हल : माना $$\frac{2s+1}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \quad \ldots(1)$$

$\Rightarrow$ $2s+1 \equiv A(s^2+1) + (Bs+C)(s+1)$

$\Rightarrow$ $2s+1 = (A+B)s^2 + (B+C)s + (A+C)$

s^2, s तथा अचर के गुणांकों की तुलना से,

$$A + B = 0$$
$$B + C = 2$$
$$A + C = 1$$

इन्हें हल करने पर

$$A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{3}{2}$$

www.polytechnicpdf.com

(1) में यह मान रखने पर

$$\frac{2s-1}{(s+1)(s^2+1)} = -\frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s^2+1}$$

$$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{2s+1}{(s+1)(s^2+1)}\right\} = -\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}\sin t$$

$$= \frac{1}{2}[3\sin t + \cos t - e^{-t}]$$ उत्तर

उदाहरण 18. $L^{-1}\left\{\frac{2s^2-6s+5}{s^3+6s^2+11s-6}\right\}$ का मान बतलाइये।

हल : $\frac{2s^2-6s+5}{(s^3-6s^2+11s-6} = \frac{2s^2-6s+5}{(s-1)(s-2)(s-3)}$

माना $\frac{2s^2-6s+5}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$ ...(1)

$\Rightarrow \quad 2s^2-6s+5 = A(s-2)(s-3) + B(s-1)(s-3) + C(s-1)(s-2)$

s का मान क्रमशः 1, 2 तथा 3 रखकर प्राप्त समीकरणों को हल करने पर

$$A = \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{5}{2}$$

अतः (1) में यह मान रखने पर

$$\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6} = \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{s+2} + \frac{5}{2(s-3)}$$

$$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right\} = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{5}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^{t} - e^{-2t} + \frac{5}{2}e^{3t}$$ उत्तर

विकल्प (हेविसाइड विधि) :

यहाँ $F(s) = 2s^2 - 5s + 5$ तथा $G(s) = s^3 - 6s^2 + 11s - 6 = (s-1)(s-2)(s-3)$

यहाँ $F(s)$ की घात $G(s)$ से कम है

तथा $G(s) = 0 \Rightarrow (s-1)(s-2)(s-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 1, 2, 3 \quad \therefore \quad \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3$

एवं $G'(s) = 3s^2 - 12s + 11$

अब हेविसाइड सूत्र से

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{G(s)}\right\} = \sum_{i=1}^{3}\frac{F(\alpha_i)}{G'(\alpha_i)}e^{\alpha_i t} = \frac{F(\alpha_1)}{G'(\alpha_1)}e^{\alpha_1 t} + \frac{F(\alpha_2)}{G'(\alpha_2)}e^{\alpha_2 t} + \frac{F(\alpha_3)}{G'(\alpha_3)}e^{\alpha_3 t}$$

$$= \frac{F(1)}{G'(1)}e^{1\times t} + \frac{F(2)}{G'(2)}e^{2t} + \frac{F(3)}{G'(3)}e^{3t} \qquad [\because \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3]$$

$$= \frac{2\times 1^2 - 6\times 1 + 5}{3\times 1^2 - 12\times 1 + 11}e^{t} + \frac{2\times 2^2 - 6\times 2 + 5}{3\times 2^2 - 12\times 2 + 11}e^{2t} + \frac{2\times 3^2 - 6\times 3 + 5}{3\times 3^2 - 12\times 3 + 11}e^{3t}$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \frac{1}{2} e^{t} + \frac{1}{(-2)} e^{2t} + \frac{5}{2} e^{3t} = \frac{1}{2} e^{t} - e^{2t} + \frac{5}{2} e^{3t}$$ उत्तर

नोट :

- संचलन प्रमेय एवं हेविसाइड विधि पर आधारित प्रश्नों को आंशिक भिन्नों में तोड़कर भी हल किया जा सकता है।

प्रमुख सूत्र (Important Formulae)

प्रमुख फलनों के प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण (Inverse Laplace Transforms of Important Functions)

1. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$

2. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$

3. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!}$, n धन पूर्णांक है, $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$, $n > -1$ तथा भिन्नात्मक है।

4. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$

5. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{1}{a}\sin at$

6. $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$

7. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-a^2}\right\} = \frac{1}{a}\sinh at$

8. $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh at$

9. $L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$

10. $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(x)\,dx$, जहाँ $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

मुख्य गुण (Important Properties) :

1. रैखिक गुण : $L^{-1}\{C_1 F(s) \pm C_2 F_2(s) \pm \ldots\} = C_1 L^{-1}\{F_1(s)\} \pm C_2 L^{-1}\{F_2(s)\} \pm \ldots$
   यदि $L^{-1}\{F(s) = f(t)\}$ तो
2. प्रथम स्थानान्तरी गुण : $L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$
3. द्वितीय स्थानानतरी गुण : (i) $L^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$, $a > 0$

   $= f(t-a)\,u(t-a)$, जहाँ $u(t-a)$ एकक पद फलन है।
4. पैमाना परिवर्तन गुण : $L^{-1}\{F(as)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{t}{a}\right)$
5. अवकल गुणांक रूपांतरण :

$$L^{-1}\{F'(s)\} = (-1)^1\, t\, f(t)$$

$$L^{-1}\{F''(s)\} = (-1)^2\, t^2\, f(t)$$

$$L^{-1}\{F^n(s)\} = (-1)^n\, t^n\, f(t)$$

www.polytechnicpdf.com

6. समाकल गुण रूपांतरण : $L^{-1}\left\{\int_0^t F(x)\,dx\right\} = \frac{f(t)}{t}$

7. s से गुणन :

$$L^{-1}\{s\,F(s)\} = f'(t)$$
$$L^{-1}\{s^2\,F(s)\} = f''(t)$$
$$L^{-1}\{s^n\,f(s)\} = f^n(t)$$

8. s से विभाजन : $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(x)\,dx$

9. संचलन गुण : यदि $L\{f_1(t)\} = F_1(s)$ तथा $L\{f_2(t)\} = F_2(s)$

तो $L^{-1}\{F_1(s).F_2(s)\} = \int_0^t f_1(x).f_2(t-x)\,dx = F*G$

10. फलनों का संचलन क्रम विनिमेय नियम (Commutative Law), साहचर्य नियम (Associative Law) तथा बंटन नियम (Distributive Law) का पालन करता है।

(i) $F*G = G*F$ (ii) $F*(G*H) = (F*G)*H$

(iii) $F*(G+H) = F*G + F*H$

11. हेविसाइड (Heaviside) सूत्र : यदि $F(s)$ तथा $G(s)$, s में दो बहुपद हैं तथा $G(s)$ की घात $F(s)$ से कम है, तो

$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{G(s)}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F(\alpha_i)}{G'(\alpha_i)}$, जहाँ $\alpha_i, i = 1, 2, \ldots, n$, $G(s) = 0$ के शून्य (zeros) हैं।

प्रश्नावली 15.1

1. निम्न फलनों के प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें :

(i) $\frac{1}{s^5}$ (ii) $\frac{1}{s^{9/2}}$ (iii) $\frac{1}{s^2+9}$ (iv) $\frac{1}{s-3}$

(v) $\frac{s}{s^2-9}$ (vi) $\frac{1}{s^2-4}$

2. $L^{-1}\left[\frac{s^2-3s+4}{s^3}\right]$ का मान बतायें।

3. $L^{-1}\left\{\frac{6}{2p-3} - \frac{3+4p}{9p^2-16} + \frac{8-6p}{16p^2+9}\right\}$ का मान बतायें।

$$\left[\text{संकेत : } F(s) = \frac{6}{2\left(p-\frac{3}{2}\right)} - \frac{3}{9\left\{p^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\}} + \frac{4p}{9\left\{p^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2\right\}} + \frac{8}{16\left\{p^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}} - \frac{6p}{16\left\{p^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}}\right]$$

4. $L^{-1}\left\{\frac{2s+1}{s(s+1)}\right\}$ का मान बतायें।

www.pdftechnicpdf.com

$$\left[\text{संकेत : } \frac{2s+1}{s(s+1)} = \frac{s+(s+1)}{s(s+1)}\right]$$

5. $L^{-1}\left\{\dfrac{s+8}{s^2+4s+5}\right\}$ का मान ज्ञात करें।

6. मान बतायें :

(i) $L^{-1}\left\{\dfrac{s+2}{s^2-4s+40}\right\}$ (ii) $L^{-1}\left\{\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\}$ [2013]

7. $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+a)^2}\right\}$ का मान बतायें।

$$\left[\text{संकेत : } \frac{s}{(s+a)^2} = \frac{s+a-a}{(s+a)^2}\right]$$

8. मान ज्ञात करें :

(i) $L^{-1}\left\{\tan^{-1}\dfrac{1}{s}\right\}$

$$\left[\text{संकेत : } L^{-1}\left(\tan^{-1}\frac{1}{s}\right) = -\frac{1}{t}L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\}\right]$$

(ii) $L^{-1}\left\{\dfrac{p}{(p^2+a^2)^2}\right\}$

$$\left[\text{संकेत : } \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2+a^2}\right) = -\frac{2p}{(p^2+a^2)^2}\right]$$

9. $L^{-1}\left\{\log\dfrac{s+1}{s-1}\right\}$ का मान बतायें।

[संकेत : देखें उदाहरण (9)]

10. $L^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s^2+6s+13)^2}\right\}$ का मान ज्ञात करें।

11. (i) यदि $L^{-1}\left\{\dfrac{p}{(p^2+1)^2}\right\} = \dfrac{1}{2}t\sin t$, तो $L^{-1}\left\{\dfrac{32p}{(16p^2-1)^2}\right\}$ का मान बतायें।

[देखें साधित उदाहरण 11]

(ii) यदि $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2} = \dfrac{1}{2}t\sin t\right\}$ तो $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$ का मान बतायें।

$$\left[\text{संकेत : } L^{-1}\left\{\frac{s}{s(s+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^t x\sin x\,dx\right]$$ [s से विभाजन सूत्र]

www.polytechnicpdf.com

12. दिखायें कि $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\sin\frac{1}{s}\right\} = t - \frac{t^3}{(6)^2} - \frac{t^5}{(120)^2} - \frac{t^7}{(5040)^2} + \ldots$

$\left[\text{संकेत : } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right]$

13. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cos^{-1}\frac{1}{s}\right\} = 1 - \frac{t^2}{(2)^2} + \frac{t^4}{(24)^2} - \frac{t^6}{(720)^2} + \ldots$

14. $L^{-1}\left[\frac{1}{p}\log\left\{1+\frac{1}{p^2}\right\}\right]$ का मान बतायें।

$\left[\text{संकेत : } F(p) = \log(p^2+1) - 2\log p,\ F'(p) = \frac{1}{p^2+1} - \frac{2}{p}\right]$

$\therefore \quad L^{-1}\{F'(p)\} = 2(\cos t - 1)$

$L^{-1}\{F(p)\} = -\frac{1}{t}L^{-1}\{F'(p)\} = \frac{2}{t}(1-\cos t) = f(t)$

$\therefore \quad L^{-1}\left\{\frac{F(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\log\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\right\} = \int_0^t f(x)\,dx$

15. संचलन प्रमेय से मान ज्ञात करें—

(i) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+a^2)}\right\}$ (ii) $L^{-1}\left[\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right]$

$\left[\text{संकेत : } L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{t^2}{2},\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t \quad \therefore L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2-1)}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^t (t-x)^2 \sin x\,dx\right]$

16. $L^{-1}\left\{\frac{1}{(p-2)(p^2+2)}\right\}$ का मान संचलन प्रमेय से ज्ञात करें।

17. $L^{-1}\left\{\frac{2p^2+5p-4}{p^3+p^2-2p}\right\}$ का मान हेविसाइड विस्तार विधि से निकालें।

18. $L^{-1}\left\{\frac{s^2-6}{s^3+4s^2+3s}\right\}$ का मान हेविसाइड विस्तार विधि से निकालें।

19. मान ज्ञात करें—

(i) $L^{-1}\left[\frac{1}{(p+1)(p^2+1)}\right]$ [2008]

(ii) $L^{-1}\left\{\frac{6p^2+22p+18}{p^3+6p^2+11p+6}\right\}$

(iii) $L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\right\}$

www.polytechnicpdf.com

$$\left[\text{संकेत : } F(s) = \frac{a^2}{a^2-b^2}\frac{1}{s^2+a^2} - \frac{b^2}{a^2-b^2}\frac{1}{s^2+b^2}\right]$$

(iv) $L^{-1}\left\{\dfrac{3s}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$ [2010]

(v) $L^{-1}\left\{\dfrac{1+2s}{(s+2)^2(s-1)^2}\right\}$ [2014]

(vi) $L^{-1}\left\{\dfrac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+s)}\right\}$ [2015]

उत्तरमाला

1. (i) $\dfrac{s^4}{24}$ (ii) $\dfrac{16t^{7/2}}{105\sqrt{\pi}}$

   (iii) $\sin 3t$ (iv) e^{3t}

   (v) $\cosh 3t$ (vi) $\sinh 2t$

2. $1-3t+2t^2$

3. $3e^{(3/2)t} - \dfrac{1}{4}\sinh\dfrac{4t}{3} - \dfrac{4}{9}\cosh\dfrac{4t}{3} + \dfrac{2}{3}\sin\dfrac{3t}{4} - \dfrac{3}{8}\cos\dfrac{3}{4}t$

4. $e^{-t}+1$

5. $e^{-2t}(\cos t + 6\sin t)$

6. (i) $e^{-2t}\cos 6t$ (ii) $2e^{2t}(3\cos 4t + \sin 4t)$

7. $e^{-at} - a\,e^{-at}$

8. (i) $\dfrac{\sin t}{t}$ (ii) $\dfrac{t\sin at}{2a}$ (iii) $\dfrac{\sin t - t\cos t}{2}$

9. $\dfrac{1}{t}(e^t - e^{-t})$

10. $\dfrac{e^{-3t}}{8}(2t\sin 2t + 2t\cos 2t - \sin 2t$

11. (i) $\dfrac{t}{4}\sin\dfrac{t}{4}$ (ii) $\dfrac{\sin t - t\cos t}{2}$

14. $\displaystyle\int_0^t \frac{2}{x}(1-\cos x)\,dx$

15. (i) $\dfrac{1}{a^2}(1-\cos at)$ (ii) $\cos t + \dfrac{t^2}{2} - 1$

16. $\dfrac{1}{5}(e^{2t} - 2\sin t - \cos t$

17. $2 - e^{-2t} + e^t$

18. $-2 + \dfrac{5}{2}e^{-t} + \dfrac{1}{2}e^{-3t}$

19. (i) $\dfrac{1}{2}(\cos t - \sin t - e^{-t})$ (ii) $e^{-t} + 2e^{-2t} + 3e^{-3t}$

www.Polytechnicpdf.com

(iii) $\frac{1}{a^2-b^2}(a \sin at - b \sin bt)$ (iv) $\frac{1}{2}(e^t - \cos t - \sin t)$

(v) $\frac{1}{3}t(e^t - e^{2t})$

लाप्लास रूपान्तरण के प्रयोग से साधारण अवकल समीकरणों का हल
(Solution of Ordinary Differential Equations by Using Laplace Transform)

लाप्लास रूपान्तरण की सहायता से अचर गुणांकों वाले रैखिक अवकल समीकरणों का आसानी से हल निकाला जा सकता है।

कार्य विधि : I. दिए गए अवकल समीकरण के दोनों पक्षों का लाप्लास रूपान्तरण लें।

II. $L(y'') = s^2 L(y) - sy(0) - y'(0)$

$L(y') = S L(y) - y(0)$

आदि सूत्रों का आवश्यकतानुसार प्रयोग करें। इससे एक बीजीय समीकरण प्राप्त होगा।

III. प्राप्त बीजीय समीकरण को हल कर $L(y)$ का मान s के पदों में निकालें। माना $L(y) = F(s)$

IV. दोनों पक्षों का प्रतिलोम लाप्लास रूपान्तरण ज्ञात करें तो $y = L^{-1}\{F(s)\}$ से अभीष्ट हल प्राप्त होगा।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. हल करें : $\frac{d^2y}{dt^2} + y = \sin 3t$ जब $y(0) = 0, y'(0) = 0$

हल : प्रश्न से, $\frac{d^2y}{dt^2} + y = \sin 3t$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$

$\Rightarrow \quad y'' + y = \sin 3t$

दोनों तरफ लाप्लास रूपान्तरण के प्रयोग से

$$L(y'') + L(y) = L(\sin 3t)$$

$$\Rightarrow \quad s^2 L(y) - s\,y(0) - y'(0) + L(y) = \frac{3}{s^2+9}$$

$$\Rightarrow \quad s^2 L(y) - s \times 0 - 0 + L(y) = \frac{3}{s^2+9}$$

$$\Rightarrow \quad (s^2+1) L(y) = \frac{3}{s^2+9}$$

$$\Rightarrow \quad L(y) = \frac{3}{(s^2+1)(s^2+9)}$$

$$\Rightarrow \quad y = L^{-1}\left[\frac{3}{(s^2+1)(s^2+9)}\right] = \frac{3}{8} L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+9}\right]$$ (आंशिक भिन्नीकरण से)

$$\Rightarrow \quad y = \frac{3}{8}[\sin t - \sin 3t]$$ यह अभीष्ट हल है।

www.polytechnicdi.com

उदाहरण 2. लाप्लास रूपांतरण का प्रयोग कर दिए गए अवकल समीकरण का हल प्राप्त करें :

$$y'' + 9y = 6\cos 3t,$$
$$y(0) = 2, y'(0) = 0$$

हल : दिये गये समीकरण से

$$L(y'') + 9L(y) = 6L(\cos 3t)$$

या $$s^2 L(y) - s\,y(0) - y'(0) - 9L(y) = 6\frac{s}{s^2+9} \quad \ldots(1)$$

(2) में $y(0)$ तथा $y'(0)$ का मान रखने पर, $s^2 L(y) - 2s + 9L(y) = \dfrac{6s}{s^2+9}$

$$\Rightarrow (s^2+9)L(y) = 2s + \frac{6s}{s^2+9} \qquad \Rightarrow L(y) = \frac{2s}{s^2+9} + \frac{6s}{(s^2+9)^2}$$

$$\therefore \quad y = L^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2+9} + \frac{6s}{(s^2+9)^2}\right\} = 2L^{-1}\frac{s}{s^2+3^2} + 6L^{-1}\frac{s}{(s^2+9)^2}$$

$$= 2\cos 3t - 3L^{-1}\left\{\frac{(-2)s}{(s^2+9)^2}\right\} = 2\cos 3t - L^{-1}\frac{d}{ds}\left[\frac{3}{s^2+9}\right] = 2\cos 3t + t\sin 3t$$ उत्तर

उदाहरण 3. लाप्लास रूपान्तरण से हल करें :

$$(D^2 - 4D + 4)y = e^{-t}, \text{ जब } y(0) = 0 = y'(0)$$

हल : दिया गया समीकरण

$$(D^2 + 4D + 4)y = e^{-t} \quad \text{या} \quad y'' + 4y' + 4y = e^{-t}$$

दोनों तरफ के लाप्लास रूपान्तरण से

$$L(y'') + 4L(y') + 4L(y) = L(e^{-t})$$

$$\Rightarrow [S^2 L(y) - s\,y(0) - y'(0)] + 4[s\,L(y) - y(0)] + 4L(y) = \frac{1}{s+1}$$

$$\Rightarrow s^2 L(y) + 4s\,L(y) + 4L(y) = \frac{1}{s+1} \qquad [\because y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \text{ रखने पर}]$$

$$\Rightarrow (s^2 + 4s + 4)L(y) = \frac{1}{s+1} \qquad \Rightarrow L(y) = \frac{1}{(s+1)(s^2+4s+4)}$$

$$\Rightarrow L(y) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2} \quad [\text{आंशिक भिन्नीकरण से}]$$

$$\therefore \quad y = L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) - L^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right] = e^{-t} - e^{-2t} - e^{-2t}L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

$$[\because L^{-1}[F(s+a)] = e^{-t}L^{-1}[F(s)]$$

$$= e^{-t} - e^{-2t} - e^{-2t}t,$$

अतः $y = e^{-t} - (1+t)e^{-2t}$ यही अभीष्ट हल है।

उदाहरण 4. हल करें—

$$\frac{dx}{dt} + y = 0$$

www.polytechnicpdf.com

$$\frac{dy}{dt} - x = 0, \quad \text{जब } x(0) = 1, y(0) = 0$$

हल : प्रश्न से,

$$x' + y = 0$$
$$y' - x = 0$$

$\therefore$
$$L(x') + L(y) = 0$$
$$L(y') - L(x) = 0$$

या
$$sL(x) - x(0) + L(y) = 0$$
$$sL(y) - y(0) - L(x) = 0$$

या
$$sL(x) + L(y) = 1 \qquad [\because x(0) = 1, y(0) = 0]$$
$$sL(y) - L(x) = 0$$

या
$$s\bar{x} - \bar{y} = 1 \qquad \text{जहाँ } L(x) = \bar{x}, L(y) = \bar{y} \qquad \ldots(1)$$
$$s\bar{y} - \bar{x} = 0 \qquad \ldots(2)$$

(1) में s से गुणा कर (2) को घटाने पर

$$s^2\bar{x} + \bar{x} = s \quad \text{या} \quad (s^2 + 1)\bar{x} = s \quad \text{या} \quad \bar{x} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

या $L(x) = \dfrac{s}{s^2 + 1}$ या $x = L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2 + 1}\right\} = \cos t$

अब (2) से $s\bar{y} - \dfrac{s}{s^2 - 1} = 0$

या $\bar{y} = \dfrac{s}{s(s^2 + 1)} = \dfrac{1}{s^2 + 1}$ या $L(y) = \dfrac{1}{s^2 + 1}$ या $y = L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2 + 1}\right) = \sin t$

अतः $x = \cos t, y = \sin t$ अभीष्ट हल हैं।

प्रश्नावली 15.2

हल करें :

1. $y'' + y = t$, जब कि $y(0) = 1, y'(0) = 1$
2. $y'' + 25y = 10\cos 5t$, जब कि $y(0) = 2, y'(0) = 0$
3. $y'' + 9y = 6\cos 3t$, जब कि $y(0) = 2, y'(0) = 0$
4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, जब कि $x = 0$ पर, $y = 1$ पर, $\dfrac{dy}{dx} = 1$
5. $(D^2 - 2D + 1)x = e^t$, जब कि $t = 0$ पर $x = 2, \dfrac{dx}{dt} = -1$
6. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} - 2y = 3\cos 3t - 11\sin 3t$, जब कि $y(0) = 0, y'(0) = 6$
7. $(D^2 - 2D + 2)y = 0$, जब कि $y(0) = 1, y'(0) = 1$
8. $(D + 2)^2 y = 4e^{-2t}$, जब कि $y(0) = -1, y'(0) = 4$
9. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = 0$, दिया है $t = 0$ पर $y = 1, \dfrac{dy}{dt} = 0$

www.Polytechnicpdf.com

10. $(D^2 - 3D + 2)\, y = 1 - e^{2t}$, जब कि $t = 0$ पर $y = 1, Dy = 0$

निम्न युगपत समीकरणों को हल करें।

11. $\frac{dx}{dt} - y = e^t$

$\frac{dy}{dt} + x = \sin t$, जब कि $x(0) = 1, y(0) = 0$

12. $\frac{dx}{dt} + 4y = 0$

$\frac{dy}{dt} - 9x = 0$, जब कि $t = 0$ पर $x = 2, y = 1$

उत्तरमाला

1. $y = \cos t - 3 \sin t + t$
2. $y = 2 \cos 5t + t \sin 5t$
3. $2 \cos 3t - t \sin 3t$
4. $y = \sin x + \cos x$
5. $x = \frac{1}{2} e^t (t^2 - 6t + 4)$
6. $y = e^t - e^{-2t} + \sin 3t$
7. $y = e^t \cos t$
8. $(-1 + 2t + 2t^2)\, e^{-2t}$
9. $y = \cos t$
10. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2t} - t\, e^{2t}$
11. $x = \frac{1}{2}(e^t + \cos t + 2 \sin t - t \cos t)$, $y = \frac{1}{2}(e^{-t} + \cos t - \sin t + t \sin t$
12. $x = -\frac{2}{3} \sin 6t + 2 \cos 6t$, $y = \cos 6t + 3 \sin 6t$

□□□

www.polytechnicpdf.com

16

CHAPTER

फोरियर श्रेणी
(Fourier Series)

16.1 आवर्ती फलन (Periodic Function)

यदि कोई फलन $y = f(x)$, x के सभी वास्तविक मानों के लिए इस प्रकार परिभाषित हो कि

$$f(x+T) = f(x+2T) = f(x+3T) = \ldots$$
$$= f(x)$$

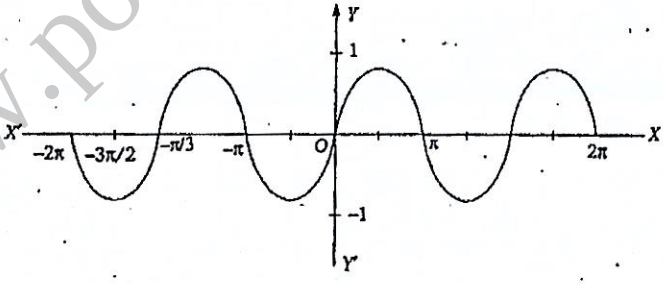
जहाँ $T > 0$ है।

तो $f(x)$ को आवर्ती फलन तथा T को उसका आवर्त (period) कहते हैं।

स्पष्ट है $y = f(x)$ में कोटि y का मान भुज x के समान अंतराल पर दुहराया जाता है तथा $f(x+nT) = f(x)$ जहाँ T आवर्त है तथा n कोई धनात्मक पूर्णांक है।

जैसे : $\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) = \sin(x+6\pi) = \ldots$

अतः $\sin x$ एक आवर्ती का फलन है तथा इसका आवर्त 2π है। इसे साइनोसॉयडल (sinusoidal) आवर्ती फलन कहते हैं।



स्पष्ट है कि आवर्ती फलन का ग्राफ प्रत्येक आवर्त में समान होता है।

इसी तरह $\cos x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ ऐसे आवर्ती फलन हैं जिनका आवर्त 2π तथा $\tan x$ और $\cot x$ का आवर्त π है।

नोट :

(i) $\sin rt$, $\cos rt$, $\sec rt$, $\operatorname{cosec} rt$ का आवर्त $\frac{2\pi}{r}$ तथा $\tan rt$, $\cot rt$ का आवर्त $\frac{\pi}{r}$ है।

(ii) आवर्ती फलनों का योग भी एक आवर्ती फलन होता है।

www.polytechnicpdf.com

फोरियर श्रेणी (Fourier Series) : किसी कोण के ज्या (sines) तथा कोज्या (cosines) तथा उसके गुणजों से बनी श्रेणी

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \ldots a_n \cos nx + \ldots$$

$$+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \ldots + b_n \sin nx + \ldots$$

जहाँ $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots, b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ अचर हैं, फोरियर श्रेणी कहलाती है।
इसे निम्न रूप में भी व्यक्त किया जाता है।

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

16.2 फोरियर गुणांक या फोरियर नियतांक (Fourier Coefficients or Fourier Constants)

फोरियर श्रेणी $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ में a_0, a_n तथा b_n को फोरियर गुणांक या फोरियर नियतांक कहते हैं।

इन्हें ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्रों का प्रयोग करते हैं :

(i) यदि फलन अंतराल $0 \le x \le 2\pi$ में परिभाषित हो, तो

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,dx$$

(ii) यदि फलन अंतराल $-\pi \le x \le \pi$ अर्थात् $[-\pi, \pi]$ में परिभाषित हो, तो

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx; \; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx; \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx$$

नोट :

- 2π आवर्त वाले फलनों के समाकल को 2π लंबाई के किसी अन्य अंतराल में बदला जा सकता है।

16.3 फोरियर श्रेणी के लिए डिरिचलेट प्रतिबन्ध (Derichlet's Conditions for a Fourier Series)

किसी फोरियर श्रेणी $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ के निम्न प्रतिबंधों, जिन्हें डिरिचलेट प्रतिबन्ध के नाम से जाना जाता है, को संतुष्ट करना आवश्यक है :

फलन $f(x)$ अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में

(i) आवर्ती फलन है।

(ii) इसके समाकल एकमानी (single valued) तथा परिमित (finite) है।

(iii) परिबद्ध (bounded) है।

(iv) परिमित संख्या में असंतत बिन्दु (discontinuous points) रखता है।

(v) परिमित संख्या में उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ (Maximum and Minimum Values) रखता है।

www.polytechnicpdf.com

साधित उदाहरण (Solved Examples)

Type I.

उदाहरण 1. फलन $f(x) = x,\ 0 < x < 2\pi$ के लिए फोरियर श्रेणी प्राप्त करें

हल : प्रश्न से $f(x) = x$

माना $x = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\, dx$

अब $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(4\pi^2 - 0) = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} - 1\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\right)\right]_0^{2\pi} \qquad [\because (uv)_r = uv_1 - u'v_2 + u''v_3 + \ldots]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 - 0 + \frac{\cos 2n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{1}{n^2\pi}[1 - 1] = 0 \qquad \left[\begin{array}{r}\because \sin 2n\pi = 0\\ \cos 2n\pi = 1\\ \cos 0 = 1\end{array}\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) - 1\left(\frac{-\sin nx}{n^2}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-2\pi\cos 2n\pi}{n} + 0 - 0\right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n\pi}\times\pi = -\frac{2}{n} \qquad [\because \cos 2n\pi = 1]$$

$\therefore$ अभीष्ट फोरियर श्रेणी

$$x = \frac{2\pi}{2} + 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\sin nx\right) = \pi - 2\left[\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots\right]$$ उत्तर

उदाहरण 2. फलन $f(x) = e^{-x}$ के लिए अंतराल $0 < x < 2\pi$ में फोरियर श्रेणी प्राप्त करें।

हल : माना $f(x) = e^{-x} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{r=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ ...(1)

अब $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}[-e^{-x}]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}[-e^{-2\pi} + e^0] = \frac{1}{\pi}(-e^{-2\pi} + 1) = \frac{1 - e^{-2\pi}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi(n^2+1)}[e^{-x}(-\cos nx + n\sin nx)]_0^{2\pi}$$

$$\left[\because \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx),\ \text{Here } a = -1,\ b = n\right]$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \frac{1}{\pi(n^2+1)}[e^{-2\pi}(-\cos 2n\pi + n\sin n\times\pi) - e^0(-\cos n0 + n\sin n0)]$$

$$= \frac{1}{\pi(n^2+1)}[e^{-2\pi}(-1+0) - e^0(-1+0)] = \frac{1}{\pi(n^2+1)}(-e^{-2\pi}+1)$$

$$= \left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right)\frac{1}{n^2+1}$$

तथा $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-x}\sin nx\,dx$

$$= \frac{1}{\pi(n^2+1)}[e^{-x}(-\sin nx - n\cos nx)]_0^{2\pi}$$

$$\left[\because \int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos x), \text{Here } a=-1, b=n\right]$$

$$= \frac{1}{\pi(n^2+1)}[e^{-2\pi}(0-n.1) - e^0(0-n)] \qquad [\because \sin 2n\pi = 0, \cos 2n\pi = 1; \cos 0 = 1]$$

$$= \frac{1}{\pi(n^2+1)}(n - ne^{-2\pi}) = \left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right)\cdot\frac{n}{n^2+1}$$

a_0, a_n तथा b_n का मान (1) में रखने पर

$$e^{-x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right) + \left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right)\Sigma\frac{\cos nx}{n^2+1} + \left(\frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\right)\Sigma\frac{n}{n^2+1}\sin nx$$

$$= \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \Sigma\frac{\cos nx}{n^2+1} + \Sigma\frac{n}{n^2+1}\sin nx\right]$$

$$= \frac{1-e^{-2\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\cos 2x + \ldots + \frac{1}{n^2+1}\cos nx + \ldots\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{2}{5}\sin 2x + \ldots + \frac{n}{n^2+1}\sin nx + \ldots\right)\right]$$

उदाहरण 3. फलन $f(x) = x + x^2$ के लिए अंतराल $-\pi < x < \pi$ में फोरियर श्रेणी प्राप्त करें तथा दिखायें कि

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \Sigma\frac{1}{n^2}$$

[2003

हल : माना $f(x) = x + x^2 = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin ax$ ...(1

तो $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^3}{3}\right) - \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{1}{\pi}\times\frac{2\pi^3}{3} = \frac{2}{3}\pi^2$$

www.polytechnicpdf.com

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(x+x^2)\frac{\sin nx}{n} - (1+2x)\frac{(-\cos nx)}{n^2} + 2\frac{(-\sin nx)}{n^3}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$[\because \int (uv)_r = uv_1 - u'v_2 + u''v_3 + \ldots]$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(1+2\pi)\frac{\cos n\pi}{n^2} - (-2\pi+1)\frac{\cos(-n\pi)}{n^2}\right] \qquad [\because \sin n\pi = 0]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{4\pi\cos n\pi}{n^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\times\frac{4\pi}{n^2}(-1)^n = \frac{4}{n^2}(-1)^n \qquad [\because \cos n\pi = (-1)^n]$$

तथा $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(x+x^2)\frac{-\cos nx}{n} - (1+2x)\frac{(-\sin nx)}{n^2} + (2)\frac{(\cos nx)}{n^3}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-(\pi+\pi^2)\frac{\cos n\pi}{n} + (-\pi+\pi^2)\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{2\cos n\pi}{n^3} - \frac{2\cos n\pi}{n^3}\right] \qquad [\because \sin n\pi = 0]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-2\pi}{n}\cos n\pi\right) = -\frac{2}{n}(-1)^n$$

a_0, a_n, b_n का मान (1) में रखने पर

$$x + x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\pi^2\right) + 4\Sigma\frac{(-1)^n}{n^2}.\cos nx - 2\Sigma\frac{(-1)^n}{n}.\sin nx$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x - \frac{1}{3^2}\cos 3x + \ldots\right)$$

$$-2\left(-\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x + \ldots\right. \qquad \ldots(2)$$

अब (2) में $x = \pi$ रखने पर

$$\pi + \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(-\cos\pi + \frac{1}{2^2}\cos 2\pi - \frac{1}{3^2}\cos 3\pi + \ldots\right)$$

$$-2\left(-\sin\pi + \frac{1}{2}.\sin 2\pi - \frac{1}{3}\sin 3\pi + \ldots\right)$$

$$\pi + \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) \qquad [\because \sin n\pi = 0 \text{ तथा } \cos n\pi = (-1)^n] \qquad \ldots(3)$$

पुनः (2) में $x = -\pi$ रखने पर

$$-\pi + \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) \qquad \ldots(4)$$

$[\because \cos(-\theta) = \cos\theta]$

www.polytechnicpdf.com

(3) तथा (4) के जोड़ने पर,

$$2\pi^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 8\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right)$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 8\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) \quad \Rightarrow \quad 2\pi^2 - \frac{2\pi^2}{3} = 8\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4\pi^2}{3 \times 8} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots \qquad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

उदाहरण 4. दिए गए फलन $f(x)$ के लिए फोरियर श्रेणी प्राप्त करें—

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{for } -\pi < x < -\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{for } -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ +1 & \text{for } \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

[2011]

हल : माना $f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ ...(1)

तो $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} f(x)\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,dx\right]$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\pi/2} (-1)\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (0)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 1\,dx\right\} \qquad \text{[परिभाषा से]}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(-x)_{-\pi}^{-\pi/2} - (0) + (x)_{\pi/2}^{\pi}\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right) + \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \frac{1}{\pi}(0) = 0$$

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\pi/2} (-1)\cos nx\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (0)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} 1 \cos nx\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left|\frac{-\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{-\pi/2} + \left|\frac{\sin nx}{n}\right|_{\pi/2}^{\pi}\right\}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left\{\sin n\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin n(-\pi)\right\} + \frac{1}{n\pi}\left\{\sin n\pi - \sin n\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left(-\sin\frac{n\pi}{2} + \sin n\pi\right) + \frac{1}{n\pi}\left(\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi} - \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi} = 0$$

$[\because \sin(-\theta) = -\sin\theta]$

तथा $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} f(x)\sin nx\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\sin nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{-\pi/2} (-1)\sin nx\,dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (0)\sin nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (1)\sin nx\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left|\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{-\pi/2} + 0 + \left|\frac{-\cos nx}{n}\right|_{\pi/2}^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - \left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

i.e., $$b_n = \frac{2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right)$$

$\therefore$ $$b_1 = \frac{2}{1\times\pi}[0-(-1)] = \frac{2}{\pi}; \qquad b_2 = \frac{-2}{\pi}, b_3 = \frac{2}{3\pi} \text{ आदि।}$$

a_0, a_n, तथा b_n का मान (1) में रखने पर

$$\frac{1}{\pi}\left[2\sin x - 2\sin 2x + \frac{2}{3}\sin 3x + \ldots\right]$$

Type II.

असंतत फलन : असंतत बिन्दुओं पर फोरियर सीरीज फलन $f(x)$ का मान वाम पक्ष सीमा (L.H.L.) तथा दायाँ पक्ष सीमा (R.H.L.) के समानांतर माध्य के पदों में देता है। अतः संतत बिन्दु $x=0$ पर $f(x) = \frac{1}{2}[f(0-0) + f(0+0)]$

उदाहरण 5. आवर्ती फलन $f(x)$ के लिये फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिये, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} -\pi, & \text{जब } -\pi < x < 0 \\ x, & \text{जब } 0 < x < \pi \end{cases}$$

[2008, 2010]

अतः दिखायें कि $\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$

हल : माना फोरियर श्रेणी $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ...(1)

अब $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = -\frac{1}{\pi}\times\pi[x]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\pi + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

www.polytechnicpdf.com

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (-\pi)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left\{-\pi\frac{\sin nx}{n}\right\}_{-\pi}^{0} + \left\{x\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - (1)\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\right)\right\}_{0}^{\pi}\right] \quad \text{[खंडशः समाकलन से]}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{\cos n\pi - 1}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \quad [\because \cos n\pi = (-1)^n]$$

अतः $a_1 = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{1^2}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{3^2}, a_4 = 0, a_5 = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{5^2}, \ldots$

तथा $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx]$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\pi\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left\{\frac{\pi\cos nx}{n}\right\}_{-\pi}^{0} + \left\{x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - (1)\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right)\right\}_{0}^{\pi}\right]$$

$$[\because \int uv\,dx = uv_1 - u'v_2 + \ldots]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{n} - \frac{\pi\cos n\pi}{n} - \frac{\pi\cos n\pi}{n}\right] \quad \left[\begin{array}{l}\because \sin n\pi = 0 \\ \cos(-\theta) = \cos\theta\end{array}\right]$$

$$= \frac{\pi}{\pi n}(1 - \cos n\pi - \cos n\pi) = \frac{1 - 2\cos n\pi}{n} = \frac{1 - 2(-1)^n}{n} \quad [\because \cos n\pi = (-1)^n]$$

अतः $b_1 = \frac{3}{1}, b_2 = -\frac{1}{2}, b_3 = \frac{3}{3}, b_4 = \frac{1}{4}, \ldots$

इन मानों को समीकरण (1) में रखने पर अभीष्ट फोरियर श्रेणी

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right]$$
$$+ \left[\frac{3}{1}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{3}{3}\sin 3x - \ldots\right] \quad \ldots(2)$$

(2) में $x = 0$ रखने पर $f(0) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right)$ ...(3)

किन्तु $f(0-0 = -\pi, f(0+0) = 0 \therefore f(0) = \frac{1}{2}[f(0=0) + f(0+0)] = -\frac{\pi}{2}$

अतः समीकरण (3) में $x = 0$ रखने पर,

$$-\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right]$$

www.polytechnicpdf.com

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}}{-2/\pi} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$$

उदाहरण 6. $f(x)$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात करें, जहाँ

(i) $f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ k, & 0 < x < \pi \end{cases}$ तथा $f(x+2\pi) = f(x)$ [2012]

(ii) $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \pi \end{cases}$ तथा $f(x+2\pi) = f(x)$ [2005]

हल : माना फोरियर श्रेणी

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \ldots(1)$$

अब $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[-k\int_{-\pi}^{0} dx + k\int_{0}^{\pi} dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\{-k(x)_{-\pi}^{0} + k(x)_{0}^{\pi}\} = \frac{1}{\pi}\{-k[0-(-\pi)+k(\pi-0)]\}$$

$$= \frac{1}{\pi}[-k\pi + k\pi] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-k\int_{-\pi}^{0} \cos nx\,dx + k\int_{0}^{\pi} \cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-k\left(\frac{\sin nx}{n}\right)_{-\pi}^{0} + k\left(\frac{\sin nx}{n}\right)_{0}^{\pi}\right] = 0 \qquad [\because \sin n\pi = 0 = \sin 0]$$

तथा $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-k\int_{-\pi}^{0} \sin nx\,dx + k\int_{0}^{\pi} \sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-k\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)_{-\pi}^{0} + k\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{k}{n}(1-\cos n\pi) - \frac{k}{n}(\cos n\pi - 1)\right] = \frac{2k}{n\pi}[1-\cos n\pi]$$

$$= \frac{2k}{n\pi}[1-(-1)^n] \qquad [\because \cos n\pi = (-1)^n]$$

अतः $b_1 = \frac{4k}{n}, b_2 = 0, b_3 = \frac{4k}{\pi}\cdot\frac{1}{3}, b_4 = 0, b_5 = \frac{4k}{\pi}\cdot\frac{1}{5}\ldots$

समी० (1) में इन मानों को रखने पर

$$\therefore \quad f(x) = \frac{4k}{\pi}\left\{\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right\} \qquad \ldots(2)$$ उत्तर

(ii) (2) में $k = 1$ रखने से

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left\{\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \ldots\right\}$$ उत्तर

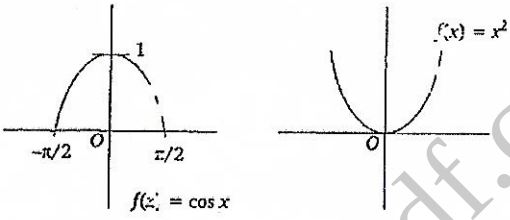
www.polytechnicpdf.com

16.4 (a) सम फलन (Even Function)

यदि फलन $f(x)$ के लिए $f(-x) = f(x)$ हो तो $f(x)$ को सम फलन कहते हैं।

सम फलन का लेखाचित्र y-अक्ष के परित: सममित होता है। y-अक्ष वक्र के प्रतिबिंब के लिए दर्पण की तरह कार्य करता है।

जैसे : $f(x) = \cos x$, $f(x) = x^2$ आदि सम फलन हैं।



सम फलन $f(x)$ के लिए

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$$

(b) विषम फलन (Odd Function) :

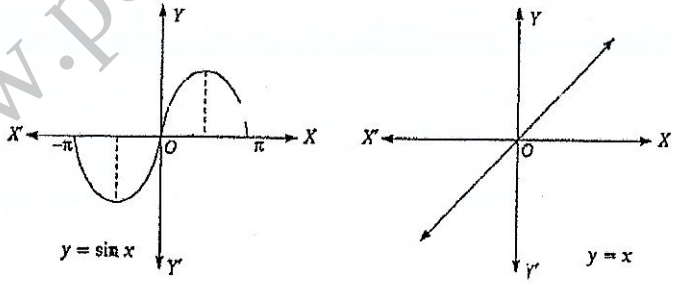
यदि फलन $f(x)$ के लिए $f(-x) = -f(x)$ तो $f(x)$ को विषम फलन कहते हैं।

तथा विषम फलन $f(x)$ के लिए

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \quad \therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$$

तथा इन फलनों का लेखाचित्र x-अक्ष के सापेक्ष सममित होता है।

जैसे : $\sin x$, x, x^3 इत्यादि विषम फलन हैं।



सम तथा विषम फलनों के लिए फोरियर श्रेणी का मान :

(i) सम फलन की फोरियर श्रेणी : यदि $f(x)$, 2π आवर्त का सम फलन है, तो

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0 \qquad [\because f(x).\sin nx \text{ विषम फलन है}]$$

$\therefore$ फोरियर श्रेणी : $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$

www.polytechnicpdf.com

जहाँ $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$; $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

(ii) विषम फलन की फोरियर श्रेणी : यदि $f(x)$, 2π आवर्त का विषम फलन है, तो

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0 \qquad [\because \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0, \text{ जब } f(x) \text{ विषम है}]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 \qquad [\because f(x).\cos nx, \text{ एक विषम फलन है}]$$

$\therefore$ फोरियर श्रेणी : $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

जहाँ $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

स्पष्ट है विषम फलन की फोरियर श्रेणी में केवल ज्या (sine) पद हैं।

Type III. सम एवं विषम फलन

उदाहरण 7. फलन $f(x) = |x|$ को फोरियर श्रेणी के रूप में व्यक्त करें जबकि $-\pi < x < \pi$ तथा दिखायें

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

हल : $\because$ $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

$\therefore$ $|x|$ सम फलन है।

$$\therefore \quad f(x) = |x| = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad [\because b_n = 0]$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx \qquad [\because |x| = x \text{ जब } 0 < x < \pi]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left|\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - 0\right) = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left| x\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - \left(\frac{-\cos nx}{n^2}\right)\right|_0^{\pi} \qquad [\because \int uv\,dx = uv_1 - u'v_2 + \ldots]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right) \qquad [\because \sin n\pi = 0]$$

$\because$ जब n सम है तो $\cos n\pi = 1$ तथा जब n विषम है तो $\cos n\pi = -1$ अतः $a_n = 0$ जब n सम है

$= \frac{-4}{\pi n^2}$ जब n विषम है

अतः $a_1 = -\frac{4}{\pi}.\frac{1}{1^2}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{4}{\pi}.\frac{1}{3^2}, \ldots$

www.polytechnicpdf.com

$$\therefore \quad |x| = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) \qquad \ldots(1)$$

समीकरण (1) में $x = 0$ रखने पर

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) \qquad \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

उदाहरण 8. यदि $f(x) = x^2, -\pi \le x \le \pi$ तथा $f(x + 2\pi) = f(x)$ की फोरियर श्रेणी ज्ञात करें तथा सिद्ध करें कि

$$\frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$$

[2009]

हल : प्रश्न से,

$$f(x) = x^2, \qquad -\pi \le x \le \pi$$

यह सम फलन है अतः $b_n = 0$

अब फोरियर श्रेणी

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad \ldots(1)$$

यहाँ $\quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,dx \qquad \ldots(2)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(\frac{x^2 \sin nx}{n}\right) - 2x\left(\frac{-\cos nx}{n^2}\right) + 2\left(\frac{-\sin nx}{n^3}\right)\right]_0^{\pi} \qquad \text{[खण्डशः समाकलन से]}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(0 + 2\pi\frac{\cos n\pi}{n^2} + 2\times 0\right) - (-0 - 2\times 0 + 2\times 0)\right] \qquad [\because \sin n\pi = 0]$$

$$= \frac{2}{\pi}\times 2\pi\frac{(-1)^n}{n^2} = (-1)^n\frac{4}{n^2} \qquad [\because \cos n\pi = (-1)^n] \qquad \ldots(3)$$

(1) में (2) तथा (3) से a_0, a_n तथा b_n का मान रखने पर

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \cos nx}{n^2} \qquad \ldots(4)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\left[-\cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x - \frac{1}{3^2}\cos 3x + \ldots\right]$$ उत्तर

उपरोक्त समीकरण में $x = 0$ रखने पर

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\left[-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \ldots\right] \quad \text{या} \quad \frac{\pi^2}{3} = -4\left[-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \ldots\right]$$

www.polytechnicpdf.com

$$\therefore \quad \frac{\pi^2}{12} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$$ सिद्ध हुआ

उदाहरण 9. फलन $f(x) = x\cos x$ के लिये अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में फोरियर श्रेणी प्राप्त कीजिये। **[2002]**

हल : यहाँ $f(x) = x\cos x$ एक विषम फलन है।

$\therefore$ फोरियर श्रेणी $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad \ldots(1)$$

$[\because a_0 = 0, a_n = 0]$

अब $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\cos x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\{\sin(n+1)x + \sin(n-1)x\}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [x\sin(n+1)x + x\sin(n-1)x]\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\left\{-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}\right\} - (1).\left\{-\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}\right\} + x\left\{-\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right\} - (1).\left\{-\frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2}\right\}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\pi\left\{-\frac{\cos(n+1)\pi}{(n+1)}\right\} + 0 + \pi\left\{-\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}\right\} + 0\right]$$

अर्थात् $$b_n = \frac{\cos n\pi}{n+1} + \frac{\cos n\pi}{n-1} = \frac{2n\cos n\pi}{n^2-1} = \frac{2n(-1)^n}{n^2-1}$$ (जबकि $n > 1$)

यहाँ $b_2, b_3 \ldots$ का मान ज्ञात किया जा सकता है, किंतु $n = 1$ पर $b_n = \infty$

अतः (1) से b_1 का मान सीधे प्राप्त करना होगा।

यदि $n = 1$, तब

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[x\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1.\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}\right\} = -\frac{1}{2}.$$

इन मानों को समीकरण (1) में रखने पर,

अभीष्ट श्रेणी $$x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n(-1)^n}{n^2-1}\sin nx.$$ उत्तर

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 10. $f(x) = x^3$ जबकि $-\pi < x < \pi$ के लिए फोरियर श्रेणी प्राप्त करें।

हल : $\because$ $f(x) = x^3$ एक विषम फलन है।

$\therefore$ फोरियर श्रेणी $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\, dx$ $[\because a_0 = 0, a_n = 0]$ ...(1)

अब $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^3 \sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x^3\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - 3x^2\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right) + 6x\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right) - 6\left(\frac{\sin nx}{n^4}\right)\right]_0^{\pi}$$

$[\because \int uv\, dx = uv_1 - u'v_2 + u''v_3 \ldots]$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi^3 \cos n\pi}{n} - 0 + 6\pi\frac{\cos n\pi}{n^3} - 0\right]$$ $[\because \sin n\pi = 0]$

$$= 2\cos n\pi\left[-\frac{\pi^2}{n} + \frac{6}{n^3}\right] = 2(-1)^n\left[\frac{6}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right]$$ $[\because \cos n\pi = (-1)^n]$

$\therefore$ (1) से

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, 2\left[-\frac{\pi^2}{n} + \frac{6}{n^3}\right]\sin nx$$

$$= 2\left[-\left(-\frac{\pi^2}{1} + \frac{6}{1^3}\right)\sin x + \left(-\frac{\pi^2}{2} + \frac{6}{2^3}\right)\sin 2x - \left(-\frac{\pi^2}{3} + \frac{6}{3^3}\right)\sin 3x + \ldots\right]$$

16.5 ऐसे फलनों की फोरियर श्रेणी जिनका आवर्त 2c है (Fourier Series of F functions with period 2c)

यदि फलन $f(x)$ का आवर्त $2c$ हो तथा फलन अंतराल $(-c, c)$ में परिभाषित हो अर्थात्

$$f(x + 2c) = f(x), -c < x < c$$

तो फोरियर श्रेणी के लिए

$$a_0 = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x) \cos\frac{n\pi x}{c}\, dx$$

तथा $$b_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x) \sin\frac{n\pi x}{c}\, dx$$ से दिया जाता है।

$\therefore$ फोरियर श्रेणी $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\frac{n\pi x}{c} + b_n \sin\frac{n\pi x}{c}\right]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\frac{n\pi x}{c}$$

www.polytechnicpdf.com

16.6 अर्द्धपरास फोरियर श्रेणी (Half Range Fourier Series)

यदि फलन $f(x)$ का आवर्त $2c$ हो तथा परास $(0, c)$ हो तो श्रेणी का केवल ज्या (sine) या कोज्या (cosine) श्रेणी में विस्तार किया जा सकता है।

इसी तरह यदि $f(x)$ का आवर्त 2π तथा परास $(0, \pi)$ हो, तो इस श्रेणी का भी केवल ज्या (sine) या कोज्या (cosine) श्रेणी में विस्तार किया जा सकता है।

ऐसी श्रेणी जिसमें केवल ज्या या कोज्या पद हों अर्द्धपरास ज्या या कोज्या (Half range sine or cosine) श्रेणी कहलाती है।

16.6.1 अर्द्धपरास श्रेणी

(a) अर्द्धपरास कोज्या श्रेणी (Cosine series) : (i) यदि फलन $f(x)$ अंतराल $(0, c)$ में परिभाषित हो, तो

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\frac{nx}{c} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{c} + \ldots + a_n \cos\frac{n\pi x}{c} + \ldots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{c}$$

जहाँ $$a_0 = \frac{2}{c}\int_0^c f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx$$

(ii) यदि फलन $f(x)$ अंतराल $(0, \pi)$ में परिभाषित हो, तो अर्द्धपरास कोज्या श्रेणी

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

जहाँ $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

(b) अर्द्धपरास ज्या श्रेणी (Sine series) : (i) यदि फलन $f(x)$ अंतराल $(0, c)$ में परिभाषित हो, तो

$$f(x) = b_1 \sin\frac{\pi x}{c} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{c} + \ldots + b_n \sin\frac{n\pi x}{c} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{c}$$

जहाँ $$b_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(x)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx$$

(ii) यदि फलन $f(x)$ अंतराल $(0, \pi)$ में परिभाषित हो, तो अर्द्धपरास ज्या श्रेणी, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\,dx$

जहाँ $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

उदाहरण 11. x^2 के लिए अंतराल $(-l, l)$ में फोरियर श्रेणी ज्ञात करें। **[2004]**

हल : यहाँ $f(x) = x^2$, जो सम फलन है $[\because f(-x) = f(x) = x^2]$

$\therefore$ फोरियर श्रेणी $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}$ ...(1)

अब $$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\,dx \qquad [\because f(x) = x^2 \text{ सम है}]$$

$$= \frac{2}{l}\int_0^l x^2\,dx = \frac{2}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{2}{3l}\times(l^3 - 0) = \frac{2}{3}l^2$$

तथा $$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l x^2 \cos nx\,dx$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \frac{2}{l}\left[x^2\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - 2x\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\right) + 2\left(-\frac{\sin nx}{x^3}\right)\right]_0^l$$

$$= \frac{2}{l}\left[l^2\frac{\text{s.n } nl}{n} + 2l\frac{\cos nl}{n^2} - \frac{2\sin nl}{n^3}\right]$$ [खण्डशः समाकलन से]

∴ (1) में a_0 तथा a_n का मान रखने पर

$$x^2 = \frac{\frac{2}{3}l^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\left[l^2\frac{\sin nl}{n} + \frac{2l\cos nl}{n^2} - \frac{2\sin nl}{n^3}\right]\cos nx$$

$$= \frac{1}{3}l^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\left[l^2\frac{\sin nl}{n} + \frac{2l\cos nl}{n} - \frac{2\sin nl}{n^2}\right]\cos nx$$ उत्तर

उदाहरण 12. फलन $f(x) = e^{ax}, 0 < x < \pi$ के लिए फोरियर ज्या श्रेणी (sine series) प्राप्त करें।

हल : यहाँ $f(x) = e^{ax},\ 0 < x < \pi$

अतः ज्या श्रेणी $e^{ax} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ ...(1)

जहाँ $$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ax}\sin nx\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(a\sin nx - n\cos nx)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{a\pi}}{a^2+n^2}(a\sin n\pi - n\cos n\pi) + \frac{n}{a^2+n^2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{n}{a^2+n^2}[-(-1)^n e^{a\pi} + 1]$$ $\left[\because \sin n\pi = 0,\ \cos n\pi = (-1)^n\right]$

$$= \frac{2n}{(a^2+n^2)\pi}[1 - (-1)^n e^{ax}]$$

∴ $$b_1 = \frac{2(1+e^{ax})}{(a^2+1^2)\pi},\ b_2 = \frac{2.2(1-e^{ax})}{(a^2+2^2)\pi}, \ldots$$

अतः (1) से, अभीष्ट श्रेणी

$$e^{ax} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1+e^{ax}}{a^2+1^2}\sin x + \frac{2(1-e^{ax})}{a^2+2^2}\sin 2x + \ldots\right]$$ उत्तर

उदाहरण 13. फलन $f(x) = x, 0 < x < 2$ के लिए अर्द्धपरास ज्या श्रेणी प्राप्त करें। **[2007]**

हल : यहाँ $f(x) = x, 0 < x < 2$

अतः अभीष्ट ज्या श्रेणी

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}$$ ...(1)

तथा $$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\, dx$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \left[\frac{-2x \cos \frac{n\pi x}{2}}{n\pi} + \frac{2 \times 2}{n^2 x^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \right]_0^2$$

$$= \left[-2 \times 2 \frac{\cos \frac{2n\pi}{2}}{n\pi} + 0 \right] \qquad [\because \sin n\pi = 0$$

$$= -\frac{4}{\pi} \frac{(-1)^n}{n}$$

अतः (1) से अभीष्ट श्रेणी

$$x = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

महत्त्वपूर्ण परिणाम (Important Result)

1. फोरियर श्रेणी : त्रिकोणमितीय श्रेणी

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

फोरियर श्रेणी कहलाती है, तथा a_0, a_n, b_n इसके फोरियर गुणांक कहलाते हैं।

2. फोरियर गुणांकों का मान

(i) अंतराल $[0, 2\pi]$ या $0 \le x \le 2\pi$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx; \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,dx$$

(ii) अंतराल $[-\pi, \pi]$ या $-\pi \le x \le \pi$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx; \; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx; \; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx$$

(iii) अंतराल $[-c, c]$ या $-c \le x \le c$

$$a_0 = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x)\,dx; \; a_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x) \cos \frac{n\pi}{c} x\,dx, \quad b_n = \frac{1}{c}\int_{-c}^{c} f(x) \sin \frac{n\pi}{c} x\,dx$$

(b) **(i) सम फलन :** (i) $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, \; a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \cos nx\,dx$ तथा $b_n = 0$

$\therefore$ फोरियर श्रेणी $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx\,dx$

(ii) **विषम फलन :** (1) $a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\,dx$

$\therefore$ फोरियर श्रेणी $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$

www.polytechnicpdf.com

3. खंडशः समाकलन :

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int \left\{\frac{du}{dx}\int v\,dx\right\} dx$$

$$(uv)_n = uv_1 - u'v_2 + u''v_3 - \ldots$$

जहाँ $(uv)_n = n$ बार $(u \times v)$ का समाकलन, $u' = \frac{du}{dx}, u'' = \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots$ इत्यादि।

तथा $v_1 = \int v\,dx, v_2 = \int v_1\,dx, \ldots$ इत्यादि।

4. अर्द्धपरास श्रेणी :

(i) अर्द्धपरास ज्या (sine) श्रेणी $0 < x < c$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{c}\right), (n = 1, 2, \ldots) = b_1 \sin\frac{\pi x}{c} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{c} + \ldots + \ldots$$

जहाँ $b_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(x)\sin\left(\frac{nx}{c}\right)dx$

(ii) अर्द्धपरास कोज्या (cosine) श्रेणी

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n x \pi}{c}\right)$$

जहाँ $a_0 = \frac{2}{c}\int_0^c f(x)\,dx$ $a_n = \frac{2}{c}\int_0^c f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{c}\right)dx$

5. महत्वपूर्ण समाकल

(i) $\int_0^{2\pi} \sin nx = 0$

(ii) $\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx = 0$

(iii) $\int_0^{2\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi$

(iv) $\int_0^{2\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi$

(v) $\int_0^{2\pi} \sin nx \cos mx\,dx = 0$

(vi) $\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx\,dx = 0$

(vii) $\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx\,dx = 0$, जहाँ $n = 1, 2, 3, \ldots$

(viii) $\int_0^{2\pi} \sin nx \cos nx = 0$

(ix) $\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$

(x) $\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$

प्रश्नावली 16.1

1. फलन $f(x) = \pi - x, 0 < x < 2\pi$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात करें।
2. फलन $f(x) = e^x$ जबकि $-\pi < x < \pi$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात करें।
3. फलन $f(x) = x - x^2$ जबकि $-\pi < x < \pi$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात करें।

www.polytechnicpdf.com

4. फलन $f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)$ जिसका आवर्त 2π अंतराल 0 से 2π के बीच परिभाषित है, के लिए फोरियर श्रेणी प्राप्त करें तथा इस तरह दिखायें

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\ldots$$

[संकेत : $a_n=0, a_0=0$, तथा प्राप्त श्रेणी में $x=\frac{\pi}{2}$ रखें]

5. आवर्त फलन $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$, $f(x+2\pi)=f(x)$ के लिए फोरियर श्रेणी प्राप्त करें।

6. निम्नलिखित फलन के लिए फोरियर श्रेणी प्राप्त करें।

$$f(x)=\begin{cases}x+\frac{\pi}{2} & -\pi<x<0\\ \frac{\pi}{2}-x & 0<x<\pi\end{cases}$$

7. $f(x)=x^2, [-\pi,\pi]$ की फोरियर श्रेणी ज्ञात करें जबकि $f(x+2\pi)=f(x)$

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots$$ **[2005]**

8. फलन $f(x)=|\cos x|$ के लिए $(-\pi,\pi)$ के अंतराल में फोरियर श्रेणी ज्ञात करें।

9. फलन $f(x)=|x|$ को फोरियर श्रेणी में व्यक्त करें जबकि $-\pi<x<\pi$, तथा दिखायें

$$\frac{\pi^2}{8}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$$

10. $f(x)=x\sin x$ के लिए अंतराल $(-\pi,\pi)$ में फोरियर श्रेणी प्राप्त करें तथा दिखायें कि

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}\ldots$$ **[2007]**

11. फलन $f(x)=x$ को अंतराल $(0,\pi)$ में ज्या श्रेणी में व्यक्त करें।

12. अंतराल $(-2,2)$ में परिभाषित निम्न फलन $f(x)$ के लिए फोरियर श्रेणी प्राप्त करें।

$$f(x)=2, \quad -2<x<0$$
$$=x, \quad 0<x<2$$

13. फलन $f(x)=2x-1, 0<x<1$ के लिए अर्द्धपरास कोज्या तथा ज्या श्रेणी प्राप्त करें।

14. $f(x)=x$ के लिए अंतराल $0<x<2$ मे अर्द्धपरास कोज्या श्रेणी प्राप्त करें।

15. $f(x)=x, 0<x<2$ के लिए अर्द्धपरास ज्या श्रेणी प्राप्त करें। **[2007]**

उत्तरमाला

1. $2\left\{\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\ldots+\frac{1}{n}\sin nx+\ldots\right\}$

3. $\frac{-\pi^2}{3}+4\left[\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\frac{\cos 4x}{4^2}+\ldots\right]$

4. $\frac{1}{2}(\pi-x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\ldots$

www.polytechnicpdf.com

5. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left\{\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right\}+\left\{\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots\right\}$

6. $\frac{4}{\pi}\left\{\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right\}$

7. $x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left(\cos x-\frac{\cos 2x}{4}+\frac{\cos 3x}{9}-\frac{\cos 4x}{16}+\ldots\right)$

8. $|\cos x|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{1}{15}\cos 4x+\ldots\right\}$

9. $|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}-\ldots\right]$

10. $1+\left[-\frac{1}{2}\cos x+2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi^2-1}\cos \pi x\right]$

11. $2\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x\ldots\right]$

12. $\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left\{\cos\frac{\pi}{2}x+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}+\ldots\right\}-\frac{2}{\pi}\left\{\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\ldots\right\}$

13. कोज्या श्रेणी :

$$-\frac{8}{\pi^2}\left\{\frac{\cos \pi x}{1^2}+\frac{\cos 3\pi x}{3^2}+\frac{\cos 5\pi x}{5^2}+\ldots\right\}$$

जया श्रेणी :

$$-\frac{2}{\pi}\left\{\sin(2\pi x)+\frac{1}{2}\sin(4\pi x)+\frac{1}{3}\sin 6\pi x+\ldots\right\}$$

14. $x=1-\frac{8}{\pi^2}\left[\frac{\cos(\pi x/2)}{1^2}+\frac{\cos(3\pi x/2)}{3^2}+\ldots\right]$

15. $x=\frac{4}{\pi}\left\{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi x}{2}\right)+\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)\ldots\right\}$

□□□

www.polytechnicspdf.com

17

CHAPTER

बीटा तथा गामा फलन
(Beta and Gamma Functions)

17.1 परिभाषा : गामा फलन (Gamma Functions)

निश्चित समाकल $\int_0^\infty e^{-x}\, x^{n-1}, n > 0$

को गामा फलन कहते हैं। इसे Γn (गामा n) से सूचित किया जाता है।

अतः $\Gamma n = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{n-1}\, dx$

गामा फलन को आयलर का द्वितीय समाकल (Euler's Second Integral) भी कहा जाता है।

17.2 परिभाषा पर आधारित कुछ महत्वपूर्ण परिणाम (Important Properties Based on Definitions)

(i) $\Gamma 1 = 1$

प्रमाण : $\Gamma 1 = e^{-x} x^{1-1}\, dx$ [परिभाषा से $n = 1$ रखने पर]

$$= \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^\infty = \frac{e^{-\infty} - e^0}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$ सिद्ध हुआ।

(ii) (a) $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma n,\ n > 0$ (b) $\Gamma(n+1) = n!,\ n$ धनात्मक पूर्णांक है।

प्रमाण : (a) परिभाषा से

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{(n+1)-1}\, dx = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$

$$= \left[x^n \frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^\infty - \int_0^\infty n x^{n-1} \frac{e^{-x}}{-1}\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^n}{e^x}\right]_0^\infty + n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx \qquad \text{...(1)}$$

www.polytechnicpdf.com

जब $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} (x^n e^{-x}) = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{x^n}{e^x} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{x^n}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} - \ldots} = 0$

अतः (1) से

$$\Gamma(n+1) = 0 + n \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx = n \Gamma n \qquad [\because n > 0]$$ सिद्ध हुआ।

अब $\Gamma n = \Gamma[(n-1)+1] = (n-1)\Gamma(n-1)$

इसी प्रकार $\Gamma(n-1) = (n-2)\Gamma(n-2)$, $\therefore \Gamma n = n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$

अतः यदि n धन पूर्णांक हो तो प्रक्रिया को बार-बार दुहराने पर

$$\Gamma n = (n-1)(n-2)(n-3) \ldots\ldots 3.2.1\, \Gamma 1 = (n-1)!,$$

n की जगह $n+1$ रखने पर

$$\Gamma(n+1) = n!$$ सिद्ध हुआ।

नोट :

• (i) $\Gamma 0 = \infty$ (ii) $\Gamma(-n) = \infty$, जहाँ धनात्मक पूर्णांक है।

17.3 गामा फलन के अन्य रूप (Other Forms of Gamma Functions)

(i) सिद्ध करें कि $\int_0^\infty e^{-ky} y^{n-1} dy = \frac{\Gamma n}{k^n}$ (ii) सिद्ध करे कि $\Gamma n = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^{n-1} dy$

प्रमाण : (i) परिभाषा से $\Gamma n = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$ ...(1)

(1) में $x = ky$ रखने पर, जिससे $dx = k\,dy$

$$\Gamma n = \int_0^\infty (ky)^{n-1} e^{-ky} k\,dy = k^n \int_0^\infty e^{-ky} y^{n-1} dy$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty e^{-ky} y^{n-1} dy = \frac{\Gamma n}{k^n} \qquad \ldots(2)$$

(ii) (1) में $e^{-x} = y$ रखने से $-e^{-x} dx = dy$ तथा $-x = \log y$ या $x = \log \frac{1}{y}$

एवं $x = 0 \Rightarrow y = 1$; $x = \infty, y = 0$

$$\therefore \quad \Gamma n = -\int_1^0 \left(\log \frac{1}{y}\right)^{n-1} y \frac{dy}{e^{-x}} = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^{n-1} y \frac{dy}{y} = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{y}\right)^{n-1} dy$$

$$\left[\because -\int_b^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\right]$$

17.4 बीटा फलन (Beta Function) :

परिभाषा : निश्चित समाकल $\int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$, जहाँ $m > 0, n > 0$

को बीटा फलन कहते हैं तथा इसे $B(m, n)$ या $\beta(b, n)$ (बीटा m, n) से निरूपित किया जाता है। [2012]

अतः $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$, जहाँ $m > 0, n > 0$

www.polytechnicpdf.com

बीटा फलन को आयलर का प्रथम समाकल (Euler's First Integral) के रूप में भी जाना जाता है।

17.4.1 महत्वपूर्ण गुण (Important Properties)

बीटा फलन m और n में सममित है अर्थात् $B(m, n) = B(n, m)$

प्रमाण : परिभाषा से $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$

$$= \int_0^1 (1-x)^{m-1}[1-(1-x)]^{n-1}\,dx \qquad \left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx\right]$$

$$= \int_0^1 (1-x)^{m-1} x^{n-1}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1}\,dx = B(n, m) \qquad \text{[परिभाषा से]}$$

$\therefore \quad B(m, n) = B(n, m)$ सिद्ध हुआ।

17.5 बीटा फलन के अन्य रूप (Other Forms of Beta Function)

बीटा फलन को निम्न रूपों में भी व्यक्त किया जाता है :

(i) $\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$

(ii) $\beta(m, n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\,d\theta$

प्रमाण : (i) परिभाषा से

$$\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \qquad \ldots(1)$$

(1) में $x = \frac{1}{1+y}$ रखने पर $dx = -\frac{1}{(1+y)^2}\,dy$, जिससे

(1) से $x \to 0$ तो $y \to \infty$ तथा $x = 1, y = 0$

$$\therefore \quad \beta(m, n) = \int_\infty^0 \left(\frac{1}{1+y}\right)^{m-1}\left(1-\frac{1}{1+y}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{1-y)^2}\right)dy$$

$$= -\int_\infty^0 \frac{1}{(1+y)^{m-1}}\left(\frac{y}{1+y}\right)^{n-1}\frac{1}{(1+y)^2}\,dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m-1+n-1+2}}\,dy = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx \qquad \left[\because \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy\right]$$

अतः $\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$

किन्तु $\beta(m, n) = \beta(n, m)$

$\therefore \quad \beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}$ [n की जगह m रखने पर] सिद्ध हुआ।

www.polytechnicpdf.com

(ii) पुनः $\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$

$x = \sin^2 \theta$ लेने पर, $dx = 2 \sin\theta \cos\theta$ तथा जब $x = 0, \theta = 0$

तथा जब $x = 1, \theta = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad \beta(m, n) = \int_0^{\pi/2} (\sin^2\theta)^{m-1} (1-\sin^2\theta)^{n-1} . 2 \sin\theta . \cos\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-2+1}\theta . \cos^{2n-2+1}\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta . \cos^{2n-1}\theta \, d\theta$$ सिद्ध हुआ।

17.6 बीटा फलन का मूल्यांकन (Evaluation of Beta Function)

परिभाषा से, $\beta(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx$

Case I. यदि n धनात्मक पूर्णांक है तथा $n = 1$, तो $\beta(m, 1) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^0 dx = \left(\frac{x^m}{m}\right)_0^1 = \frac{1}{m}$

Case II. जब n धनात्मक पूर्णांक है तथा $n > 1$

$$\beta(m, n) = \left[(1-x)^{n-1} \frac{x^m}{n}\right]_0^1 - \int_0^1 (n-1)(1-x)^{n-2} \frac{x^m}{m} dx$$

[$(1-x)^{n-1}$ को प्रथम फलन मानकर खंडशः समाकलन से

$$= 0 + \frac{n-1}{m} \int_0^1 (1-x)^{n-2} x^m dx$$ [$\because n > 1$

$$= \frac{(n-1)(n-2)}{m(m+1)} \int_0^1 (1-x)^{n-3} x^{m+1} dx$$ [पुनः खण्डशः समाकलन से]

इसी तरह खंडशः समाकलन की पुनरावृत्ति से

$$\beta(m, n) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3.2.1}{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)} \int_0^1 x^{m+n-2} dx$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3.2.1}{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)} \left[\frac{x^{m+n-1}}{m+n-1}\right]_0^1$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(3.2.1)}{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)(m+n-1)}$$

अतः $\beta(n, m) = \frac{(m-1)!}{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-2)(m+n-1)}$ जब n धनात्मक पूर्णांक है।

www.polytechnicpdf.com

Case III. जब केवल m धनात्मक पूर्णांक है

$\because \quad \beta(m, n) = \beta(n, m)$ [सममित गुण]

अत: (1) से, $\beta(n, m) = \dfrac{(m-1)!}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-2)(n+m-1)}$

Case IV. जब m तथा n दोनों धन पूर्णांक हैं।

(1) से $\dfrac{(n-1)!}{m(m+1)(m+2)(m+3)\ldots.(m+n-2)(m+n-1)}$

$$= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+1)\,m\,m-1!}$$

[हर को विपरीत क्रम में लिखने पर तथा अंश एवं हर में $(m-1)!$ से गुणा करने पर]

$$= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)(m+n-2)\ldots(m+1)\,m\,(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1}$$

$$= \frac{(m-1)!(n-1)!}{m+n-1!}$$

अत: $\beta(m, n) = \dfrac{(m-1)!(n-1)!}{m+n-1!}$ जब m तथा n दोनों धन पूर्णांक हैं।

17.7 महत्वपूर्ण परिणाम (Important Result)

बीटा तथा गामा फलन में संबंध (Relation between Beta and Gamma Functions)

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma(m+n)},\ m > 0,\ n > 0$$

प्रमाण : गामा फलन की परिभाषा से

$$\Gamma n = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{n-1}\, dx$$

तथा $\dfrac{\Gamma n}{z^n} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-zx}\, x^{n-1}\, dx$ या $\Gamma n = \displaystyle\int_0^\infty e^{-zx}\, x^{n-1}\, z^n\, dx$

दोनों तरफ $e^{-z}\, z^{m-1}$ से गुणा करने पर

$$\Gamma n e^{-z}\, z^{m-1} = \int_0^\infty e^{-z}\, z^{m-1}\, z^n\, e^{-zx}\, x^{n-1}\, dx$$

या $$\Gamma n e^{-z}\, z^{m-1} = \int_0^\infty e^{-z(x+1)}\, x^{n-1} z^{m+n-1}\, dx$$

या $$\Gamma n \int_0^\infty e^{-z} z^{m-1}\, dz = \int_0^\infty x^{n-1} \left[\int_0^\infty e^{-z(x+1)} \cdot z^{m+n-1}\, dz\right] dx \qquad \ldots(1)$$

माना $z(x+1) = y$, जिससे $(x+1)\,dz = dy$ या $dz = \dfrac{dy}{x+1}$

www.polytechnicpdf.com

अतः (1) से

$$\Gamma n\,\Gamma m=\int_0^\infty x^{n-1}\left[\int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{y}{x+1}\right)^{m+n-1}\frac{dy}{x+1}\right]dx \qquad \left[\because \int_0^\infty e^{-x}\,x^{m-1}\,dx=\Gamma m\right]$$

या $$\Gamma n\,\Gamma m=\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\left[\int_0^\infty e^{-y}\,y^{m+n-1}\,dy\right]dx=\Gamma(m-n)\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$$

[गामा फलन की परिभाषा से]

या $$\Gamma n\,\Gamma m=\Gamma(m+n,\beta(m,n) \qquad \left[\because \beta(m,n)=\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\right]$$

$\therefore$ $\beta(m,n)=\dfrac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma(m+n)}$ यह अभीष्ट संबंध है।

17.8 अन्य महत्वपूर्ण परिणाम

1. (i) $$\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta,.\cos^{2n-1}\theta\,d\theta=\frac{\Gamma m\,\Gamma n}{2\,\Gamma(m+n)}$$

(ii) $$\int_0^{\pi/2} \sin^{p}\theta\cos^{q}\theta\,d\theta=\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$$

हल : परिभाषा से $$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \qquad \ldots(1)$$

(1) में $x=\sin^2\theta$ रखने पर, जिससे $dx=2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$ एवं $1-x=1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

तथा $x=0$ तो $\theta=0$, $\quad x=1$ तो $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$$\frac{\Gamma m\Gamma n}{\Gamma(m+n)}=\int_0^{\pi/2}(\sin^2\theta)^{m-1}(\cos^2\theta)^{n-1}.2\sin\theta.\cos\theta\,d\theta \qquad \left[\because \beta(m,n)=\frac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma(m+n)}\right]$$

$$=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-2-1}\theta\cos^{2n-2+1}\theta\,d\theta$$

अर्थात् $$\frac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma(m+n)}=2\int_0^{\pi,2}\sin^{2m-1}\theta.\cos^{2n-1}\theta\,d\theta$$

$\therefore$ $$\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta.\cos^{2n-1}\theta\,d\theta=\frac{\Gamma m\,\Gamma n}{2\Gamma(m+n)} \qquad \ldots(2)$$ सिद्ध हुआ

(2) में $2m-1=p$ या $m=\dfrac{p-1}{2}$ तथा $\quad 2n-1=q$ या $n=\dfrac{q+1}{2}$ रखने से

www.polytechnicpdf.com

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)} = 2\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \,.\, \cos^q\theta \, d\theta$$

$$\therefore \quad \int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \cos^q\theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$$ सिद्ध हुआ।

2. यदि n धन पूर्णांक है, तो

(i) $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \dfrac{\pi}{\sin n\pi}$ $\quad (0 < n < 1)$ **[2006]**

(ii) $\Gamma(1-n)\Gamma(1+n) = \dfrac{n\pi}{\sin n\pi}$ $\quad (0 < n < 1)$

प्रमाण : (i) हम जानते हैं कि

$$\beta(m, n) = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

या $$\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx \quad \ldots(1)$$

अब समी० (1) में $m+n=1$ या $m=1-n$ रखने पर

$$\frac{\Gamma(1-n)\Gamma n}{\Gamma 1} = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^1}, \text{ जहाँ } 0 < n < 1 \qquad [\because m > 0 \Rightarrow 1-n > 0 \Rightarrow n < 1 \text{ तथा } \Gamma 1 = 1]$$

या $$\Gamma n\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \qquad \left[\because \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin n\pi}\right] \quad \ldots(2)$$

सिद्ध हुआ।

(ii) समी० (2) में दोनों तरफ n से गुणा करने पर

$$\Gamma(1-n)\, n\,\Gamma n = \frac{n\pi}{\sin n\pi}$$

या $$\Gamma(1-n)\Gamma(1+n) = \frac{n\pi}{\sin n\pi}, \; n < n < 1 \quad [\because n\Gamma n = \Gamma(n+1)]$$ सिद्ध हुआ।

(iii) द्विगुणन सूत्र

$$\Gamma m\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\Gamma(2m)$$

(iv) $$\Gamma\frac{1}{n}.\Gamma\frac{2}{n}.\Gamma\frac{2}{n}\Gamma\frac{3}{n}\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{1/2}}$$

www.polytechnicpdf.com

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. $\Gamma 7$ तथा $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$ का मान निकालें।

हल : (i) $\Gamma 7 = \Gamma(6+1) = 6!$ $\quad [\Gamma(n+1) = n!]$

(ii) $\Gamma\frac{9}{2} = \Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right) = \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ $\quad [\because \Gamma(n+1) = n\,\Gamma n]$

$$= \frac{7}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right) = \frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi} \qquad \left[\because \Gamma\frac{1}{2} = \sqrt{\pi}\right]$$

$$= \frac{105}{16}\sqrt{\pi}$$

उदाहरण 2. (i) $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मान बतायें। **[2014]**

(ii) $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$ का मान बतायें। **[2004]**

हल : (i) **पहली विधि :** सूत्र से $\quad \Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$

अतः $n = -1/2$ रखने पर $\quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-1/2} = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$ उत्तर

(ii) $n = -\frac{3}{2}$ रखने पर $\quad \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-3/2} = \frac{-2\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{3} = -\frac{2}{3}\times(-2\sqrt{\pi}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$ उत्तर

दूसरी विधि : सूत्र से $\Gamma n\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$

अतः (1) से $n = -1/2$ रखने पर $\quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{\sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right)}$ या $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{-\sin\frac{\pi}{2}}$

या $\quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\pi}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{-\pi}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} = -2\sqrt{\pi}$

(ii) $n = -\frac{3}{2}$ लेने पर $\quad \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left[1-\left(-\frac{3}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right)} = \frac{-\pi}{\sin\frac{3}{2}\pi} = \frac{-\pi}{-1} = \pi$

$$\left[\therefore \sin(-\theta) = \sin\theta;\ \sin\frac{3}{2}\pi = -1\right]$$

www.polytechnicpdf.com

या $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}=\frac{\pi}{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{4\pi}{3\sqrt{\pi}}=\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$ उत्तर

उदाहरण 3. $\int_0^\infty x^5 e^{-x}\,dx$ का मान ज्ञात करे।

हल : $\int_0^\infty x^5 e^{-x}\,dx=\int_0^\infty e^{-x}\,x^{6-1}\,dx=\Gamma 6=5!=120$ उत्तर

उदाहरण 4. $\int_0^\infty \sqrt[4]{x}\,e^{-\sqrt{x}}\,dx$ का मान ज्ञात करें।

हल : माना $I=\int_0^\infty x^{1/4}\,e^{-\sqrt{x}}\,dx$

(1) में $\sqrt{x}=t$ या $x=t^2$ या $dx=2t\,dt$ रखने पर

$$I=\int_0^\infty t^{1/2}e^{-t}\,2t\,dt=2\int_0^\infty t^{3/2}\,e^{-t}\,dt=2\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)$$ [परिभाषा से]

$$=2.\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=2.\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\sqrt{\pi}$$ उत्तर

उदाहरण 5. सिद्ध करें $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left\{x\log\frac{1}{x}\right\}}}\,dx=\sqrt{2\pi}$

हल : माना $\log\frac{1}{x}=y$, अर्थात् $x=e^{-y}$ और $dx=-e^{-y}\,dy$ रखने पर,

तथा जब $x=0,\ y=\infty;\ x=1,\ y=0$

यहाँ $$I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\{x\log(1/x)\}}}\,dx=\int_\infty^0 \frac{-e^{-y}}{\sqrt{(e^{-y}.y)}}\,dy=-\int_\infty^0 e^{-y}\times e^{y/2}y^{-1/2}\,dy$$

$$=\int_0^\infty y^{-1/2}\,e^{-(1/2)y}\,dy \qquad \left[\because \int_a^a f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx\right]$$

अर्थात् $$I=\int_0^\infty (2z)^{-1/2}e^{-z}\,(2\,dz)$$

[$\frac{1}{2}y=z$ और $dy=2\,dz$ रखने पर $y=0$ तो $z=0,\ y=\infty$ तो $z=\infty$]

$$=\sqrt{2}\int_0^\infty z^{(1/2)-1}\,e^{-z}\,dz=\sqrt{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}.\sqrt{\pi}=\sqrt{2\pi}$$

उदाहरण 6. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^5}}\,dx$ का मान निकालें।

www.polytechnicpdf.com

हल : माना $I=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^5}}\,dx=\int_0^1 x^2(1-x^5)^{-\frac{1}{2}}\,dx$ ...(1)

(1) में $x^5=y$ या $x=y^{1/5}$ रखने पर, जिससे $5x^4dx=dy$

$$I=\int_0^1 x^2(1-y)^{-1/2}\frac{dy}{5x^4}=\frac{1}{5}\int_0^1 x^{-2}(1-y)^{-1/2}\,dy=\frac{1}{5}\int_0^1 y^{-2/5}(1-y)^{-1/2}dy$$

$$=\frac{1}{5}\int_0^1 y^{\frac{3}{5}-1}(1-y)^{\frac{1}{2}-1}\,dy=\frac{1}{5}B\left(\frac{3}{5},\frac{1}{2}\right)$$ उत्तर

उदाहरण 7. दिखाइये कि $\int_0^2 x(8-x^3)^{1/3}\,dx=\frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$

हल : प्रश्न में, $x^3=8y$ या $x=2y^{1/3}$ रखने पर जिससे $dx=\frac{2}{3}y^{-2/3}dy$; $x=0$ तो $y=0, x=2$ तो $t=1$

$$\int_0^2 x(8-x^3)^{1/3}\,dx=\int_0^1 2y^{1/3}(8-8y)^{1/3}.(2/3)y^{-2/3}\,dy$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^1 y^{-1/3}(1-y)^{1/3}dy=\frac{8}{3}\int_0^1 y^{\frac{2}{3}-1}(1-y)^{\frac{4}{3}-1}=\frac{8}{3}B\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

$$=\frac{8}{3}.\frac{\Gamma(2/3)\Gamma(4/3)}{\Gamma[(2/3)+(4/3)]}=\frac{8}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(2)}\qquad\left[\because \Gamma\frac{4}{3}=\Gamma\left(\frac{1}{3}+1\right)\right]$$

$$=\frac{8}{9}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{9}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}\qquad\left[\because \Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}\right]$$

$$=\frac{8}{9}\times\frac{\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{16\pi}{9\sqrt{3}}$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 8. सिद्ध कीजिये कि $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx=B(m,n)$ **[2002]**

हल : यहाँ $\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx=\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx+\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx$

दूसरे समाकल में $x=\left(\frac{1}{y}\right)$ और $dx=-\left(\frac{1}{y^2}\right)dy$ रखने पर, जिससे $x=0$ तो $y=\infty$; $x=1$ तो $y=1$

$$\therefore\ \int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx=\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx+\int_\infty^1 \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1}}{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{m+n}}\left(-\frac{1}{y^2}dy\right)$$

www.polytechnicpdf.com

$$=\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx-\int_\infty^1 \frac{y^{m+n}}{(1-y)^{m+n}\,.\,y^{n-1}\,.\,y^2}dx \qquad \left[\because \int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx\right]$$

$$=\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx+\int_1^\infty \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}dy$$

$$=\int_0^1 \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx+\int_1^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dy \qquad \left[\because \int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(x)\,dx\right]$$

$$=\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}dx=B(m,n) \qquad \left[\because \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx\right]$$

उदाहरण 9. निम्न का मान ज्ञात कीजिये—

$$\int_0^\infty \frac{x^8(1-x^6)}{(1+x)^{24}}dx$$

हल : $I=\int_0^\infty \frac{x^8(1-x^6)}{(1+x)^{24}}dx=\int_0^\infty \frac{x^8}{(1+x)^{24}}dx-\int_0^\infty \frac{x^{14}}{(1+x)^{24}}dx$

$$=\int_0^\infty \frac{x^{9-1}}{(1+x)^{9+15}}dx-\int_0^\infty \frac{x^{15-1}}{(1+x)^{15+9}}dx$$

$$=B(9,15)-B(15,9)=B(9,15)-B(9,15) \qquad [\because B(m,n)=B(n,m)]$$

$$=0$$

उदाहरण 10. सिद्ध कीजिये कि $B(m,n)=B(m+1,n)+B(m,n+1),\ m,n>0$ **[2005, 2000]**

हल : हम जानते हैं कि

$$B(m+1,n)=\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n)}{\Gamma(m+1+n)} \qquad ...(1)$$

तथा

$$B(m,n+1)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)} \qquad ...(2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर,

$$B(m+1,n)+B(m,n+1)=\frac{\Gamma(m-1)\Gamma(n)+\Gamma(m)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)}$$

$$=\frac{m\Gamma(m)\Gamma(n)+\Gamma(m).\,n\Gamma(n)}{(m+n)\Gamma(m+n)} \qquad [\because \Gamma(\alpha+1)=\Gamma\alpha]$$

$$=\frac{(m+n)\Gamma(m)\Gamma(n)}{(m+n)\Gamma(m+n)}=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

सिद्ध हुआ।

उदाहरण 11. सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{B(m,n+1)}{n}=\frac{B(m+1,n)}{m}=\frac{B(m,n)}{m+n}$$

www.polytechnicpdf.com

हल : $\dfrac{B(m, n+1)}{n} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+1)} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n) \times n}{(m+n)\Gamma(m+n)}$

$$= \frac{1}{m+n} \cdot \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{B(m.n)}{m+n} \quad \ldots(1)$$

तथा $\dfrac{B(m+1, n)}{n} = \dfrac{1}{m} \cdot \dfrac{\Gamma(m+1)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)} = \dfrac{1}{m} \dfrac{m\Gamma m\,\Gamma n}{(m+n)\Gamma(m+n)}$

$$= \frac{1}{m+n} \cdot \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} = \frac{B(m, n)}{m+n} \quad \ldots(2)$$

अतः (1) तथा (2) से, $\dfrac{B(m, n+1)}{n} = \dfrac{B(m+1, n)}{m} = \dfrac{B(m, n)}{m+n}$

उदाहरण 12. सिद्ध कीजिये कि $\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)^{1/n}\, dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2}{2\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}$

हल : माना $x^n = y$ और $nx^{n-1}\, dx = dy$,

अर्थात् $dx = \dfrac{dy}{nx^{n-1}} = \dfrac{1}{n \cdot y^{(n-1)/n}} dy$ से $\left[\begin{array}{l} x^n = y \Rightarrow x = y^{1/n} \\ \Rightarrow x^{n-1} = y^{\frac{n-1}{n}} \end{array}\right]$

बायाँ पक्ष $= \displaystyle\int_0^1 (1-x^n)^{1/n}\, dx = \int_0^1 (1-y)^{1/n} \cdot \frac{1}{ny^{(n-1)/n}}\, dy$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 y^{(1/n)-1} (1-y)^{[1+(1/n)]-1}\, dy = \frac{1}{n} \cdot B\left(\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) \quad \text{[परिभाषा से]}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{2}{n}\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2}{2\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} = \text{दायाँ पक्ष} \quad \text{सिद्ध हुआ}$$

उदारहण 13. दिखाइये—

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{n\,\Gamma\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right]}$$

प्रमाण : दिये हुये समाकल में $x^n = t, x = t^{1/n}$ और $dx = \left(\dfrac{1}{n}\right) t^{(1-n)/n} dt$ प्रतिस्थापित करने पर

www.polytechnicpdf.com

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \int_0^1 \frac{(1/n)\,t^{(1-n)/n}}{(1-t)^{1/2}}\,dt = \frac{1}{n}\int_0^1 t^{(1/n)-1}(1-t)^{(-1/2)}\,dt$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 t^{(1/n)-1}\,(1-t)^{(1/2)-1}\,dt = \frac{1}{n}.\Gamma\left(\frac{1}{n},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{n}.\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\left[\because \beta(p,q) = \frac{\Gamma p\,\Gamma q}{\Gamma(p+q)}\right]$$

$$= \frac{1}{n}.\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)} \qquad \left[\because \Gamma\frac{\pi}{2} = \sqrt{\pi}\right]$$

उदाहरण 14. दिखाइये कि $\int_0^{\pi/2} \tan^n x\,dx = \frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2}$, जहाँ $-1 < n < 1$. **[2009]**

हल : $\int_0^{\pi/2} \tan^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^{-n} x\,dx$

$$= \frac{\Gamma[(n+1)/2]\,\Gamma[(1-n)/2]}{2\Gamma\left(\frac{(n-n+2)}{2}\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-n}{2}\right)}{2}, \text{ जहाँ } -n+1>0, i.e., n<1; n+1>0, i.e., n>-1$$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left[1-\left(\frac{n+1}{2}\right)\right] \qquad [\because \Gamma(2)=1]$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\pi}{\sin\frac{1}{2}(n+1)\pi} = \frac{1}{2}.\frac{\pi}{\cos\frac{n\pi}{2}} \qquad \left[\because \Gamma n\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2}$$

उदाहरण 15. सिद्ध कीजिये कि—

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta)}\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\cot\theta)}\,d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

हल : $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta)}\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^{1/2}\theta\cos^{-1/2}\theta\,d\theta$

$$= \frac{\Gamma\left[\frac{(1/2)+1}{2}\right]\Gamma\left[\frac{(-1/2)+1}{2}\right]}{2\Gamma\left[\frac{(1/2)+(-1/2)+2}{2}\right]} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma(1)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)}{2}$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{1}{4}\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\pi = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad \left\{ \because \Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi} \right\}$$

पुनः $\int_0^{\pi/2} \sqrt{(\cot\theta)}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left[\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\tan\theta)}\, d\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$$\left[\because \int_0^{\pi/2} f(a, dx = \int_0^{\pi/2} f(a-x)\, dx \right]$$

उदाहरण 16. मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\Gamma\left(\frac{1}{9}\right)\Gamma\left(\frac{2}{9}\right)\Gamma\left(\frac{3}{9}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{8}{9}\right)$

(ii) $\Gamma(0.1)\Gamma(0.2)\Gamma(0.3)\ldots\Gamma(0.9)$

हल : $\Gamma\left(\frac{1}{9}\right)\Gamma\left(\frac{2}{9}\right)\ldots\Gamma\frac{(9-1)}{9} = \frac{(2\pi)^{(9-1)/2}}{(9)^{1/2}} = \frac{(2\pi)^4}{3} = \frac{16}{3}\pi^2$

$$\left[\because \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{1/2}} \right]$$

(ii) दिया हुआ व्यंजक

$$= \Gamma\left(\frac{1}{10}\right)\Gamma\left(\frac{2}{10}\right)\Gamma\left(\frac{3}{10}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{(2\pi)^{(10-1)/2}}{(10)^{1/2}} = \frac{(2\pi)^{9/2}}{\sqrt{(10)}}$$

$$\left[\because \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{1/2}} \right]$$

यहाँ $n = 10$

उदाहरण 17. हल कीजिये—

$$\int_0^a \frac{dx}{(a^n - x^n)^{1/n}}$$

हल : $x^n = a^n \sin^2\theta$ अर्थात् $x = a\sin^{2/n}\theta$ और

$dx = \frac{2a}{n}\sin^{(2/n-1)}\theta\cos\theta\, d\theta$ रखने पर, तथा $x = 0$ तो $\theta = 0$; $x = a$ तो $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^a \frac{1}{(a^n - x^n)^{1/n}} = \frac{2a}{n}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{(2/n-1)}\theta\cos\theta\, d\theta}{a\cos^{2/n}\theta} = \frac{2}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{(2/n-1)}\theta\cos^{1-2/n}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{2/n-1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\frac{2}{n}+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}-1+1-\frac{2}{n}+2\right)} = \frac{2}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2\Gamma(1)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 18. दिखाइये कि

$$2^n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=1.3.5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi},$$ जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

हल : यहाँ $\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)$

$$=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) \qquad \left[\because n-\frac{1}{2}=n-\frac{3}{2}+1\right]$$

$$=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{(2n-1)}{2}.\frac{(2n-3)}{2}.\frac{(2n-5)}{2}\ldots\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$=\frac{1}{2^n}(2n-1)(2n-3)\ldots5.3.1.\sqrt{\pi}$$

या $2^n\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=1.3.5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}$

उदाहरण 19. $\Gamma\left(\frac{3}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-x\right)=\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\pi\sec\pi x$, जहाँ $-1<2x<1$

हल : $\Gamma\left(\frac{3}{2}+x\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+x+1\right)=\left(\frac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)$

तथा $\Gamma\left(\frac{3}{2}-x\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}-x+1\right)=\left(\frac{1}{2}-x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right)$

अतः $\Gamma\left(\frac{3}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-x\right)=\left(\frac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{1}{2}-x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right)$

$$=\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\Gamma\left(\frac{1-2x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+2x}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\Gamma\left(\frac{1-2x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1-2x}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\frac{\pi}{\sin\frac{(1-2x)\pi}{2}} \qquad \left[\because \Gamma n\,\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\frac{\pi}{\sin(\pi/2-\pi x)}=\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\frac{\pi}{\cos\pi x}=\left(\frac{1}{4}-x^2\right)\pi\sec\pi x$$

सिद्ध हुआ।

महत्वपूर्ण परिणाम एवं सूत्र (Important Results and Formulae)

1. गामा फलन : (i) $\Gamma n=\int_0^\infty e^{-x}\,x^{n-1}\,dx,\ n>0$

(ii) $\dfrac{\Gamma n}{k^n}=\int_0^\infty e^{-ky}\,y^{n-1}\,dy$ (iii) $\Gamma n=\int_0^1\left[\log\dfrac{1}{y}\right]^{n-1}dy$

www.polytechnicpdf.com

गामा फलन के गुण :

(i) $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma n,\ n > 0$

$= n!,\ n$ धनात्मक पूर्णांक है

(ii) $\Gamma 1 = 1$ (iii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

2. बीटा फलन :

(i) $B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{m-1},\ m > 0, n > 0$

(ii) $B(m,n) = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(1+x)^{m+n}}\,dx = \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}}$

(iii) $B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\,d\theta$

3. $B(m,n) = \frac{\Gamma m\,\Gamma n}{\Gamma(m+n)};\ m > 0, n > 0$

4. $\int_0^{\pi/2} \sin^p\theta \,.\, \cos^q\theta\,d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{p+q+2}{2}\right)}$

5. (i) $\Gamma n\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ (ii) $\Gamma(1+n)\,\Gamma(1-n) = \frac{n\pi}{\sin n\pi},\ 0 < n < 1$

6. $\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{1/2}}$

प्रश्नावली 17.1

1. निम्न गामा फलनों के मान ज्ञात करें :

(i) $\Gamma(6)$ (ii) $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$

(iii) $\Gamma\left(\frac{-9}{2}\right)$ (iv) $\Gamma\left(\frac{-5}{2}\right)$ [2015]

(v) $\Gamma\frac{1}{2}$ [संकेत : $\Gamma n\,\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$]

(vi) $\Gamma -\frac{1}{2}$ [2014]

2. (i) $\int_0^\infty x^4 e^{-x}\,dx$ का मान ज्ञात करें। (ii) $\int_0^\infty \sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$

www.polytechnicpdf.com

3. $\int_0^\infty e^{-4x} x^{7/2}\, dx$ का मान ज्ञात करें।

4. $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-h^2x^2}\, dx$ का मान ज्ञात करें।

[संकेत : $h^2x^2 = y$ रखें]

5. $\int_0^1 x^{n-1}\left[\log\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{m-1} dx$ का मान ज्ञात करें।

[संकेत : $\log_e \frac{1}{x} = t$ या $e^{-t} = x$ से समाकल $= \int_0^\infty e^{-nt} t^{m-1}\, dt$]

6. $\int_0^1 x^4 (1-\sqrt{x})^5\, dx$ का मान ज्ञात करें।

[$\sqrt{x} = t^2$ रखें]

7. $\int_0^1 x^5 (1-x)^4\, dx$ का मान ज्ञात करें।

8. $\int_0^1 (1-x^3)^{-\frac{1}{2}}\, dx$ का मान ज्ञात करें।

9. सिद्ध करें $\beta(l, m) = \frac{1}{2}\int_0^1 [x^{l-1}(1-x)^{m-1} + x^{m-1}(1-x)^{l-1}]\, dx$

[संकेत : $\beta(l, m) = \frac{1}{2}\{\beta(l, m) + \beta(l, m)\} = \frac{1}{2}\{\beta(l, m) + \beta(m, l)\}$

10. $\int_0^\infty \frac{x^4(1+x^5)}{(1+x)^{15}}\, dx$ का मान बतायें।

11. $\int_0^\infty \frac{x^8(1-x^6)}{(1+x)^{24}}\, dx$ का मान बतायें।

12. दिखायें कि $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\Gamma\frac{1}{4}\Gamma\frac{3}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

13. दिखायें कि $\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

[संकेत : $y^2 = \tan\theta$ रखें]

14. (i) सिद्ध कीजिए $\Gamma(n+1) = n\Gamma n$ [2007]

(ii) सिद्ध कीजिए $\Gamma n \times (1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ [2006]

www.polytechnicpdf.com

(iii) दिखायें कि $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\, d\theta \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = \pi$ [2007]

[संकेत : $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{1/2} (\cos\theta)^0$ तथा $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}} = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{-1/2} (\cos\theta)^0$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{-1/2} (\cos\theta)^0\, d\theta$$

(iv) सिद्ध कीजिए $\int_0^{\pi/2} \tan^n x\, dx = \frac{\pi}{2} \sec\frac{n\pi}{2} - 1 < n < 1$ [2009]

15. (i) $\int_{-1}^{1} (1+x)^{p-1}(1-x)^{q-1}\, dx$ [संकेत : $x = \cos 2\theta$ रखें]

(ii) $\int_0^a \frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$ [1983]

(iii) $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\, dx$ [2015]

16. सिद्ध करें $\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{(a+bx)^{m+n}} = \frac{1}{a^n b^m} \beta(m, n)$

17. सिद्ध करें $\int_0^a \frac{dx}{(a^n - x^n)^{\frac{1}{n}}} = \frac{\pi}{n \sin\frac{\pi}{n}}$

[संकेत : $x^n = a^n \sin^2\theta$ रखें]

18. $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{1/n}}$ का मान ज्ञात करें। [2013]

[संकेत : $x^n = \sin^2\theta$ रखकर हल करें]

19. $\Gamma\left(\frac{1}{9}\right)\Gamma\left(\frac{2}{9}\right)\Gamma\left(\frac{3}{9}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{8}{9}\right)$ का मान बताये।

20. $\Gamma\left(\frac{1}{25}\right)\Gamma\left(\frac{2}{25}\right)\Gamma\left(\frac{3}{25}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{24}{25}\right)$ का मान बतायें।

21. $\Gamma 0.1\, \Gamma 0.2\, \Gamma 0.3 \ldots \Gamma 0.9$ का मान बतायें।

[संकेत : $\Gamma\left(\frac{1}{10}\right)\Gamma\left(\frac{2}{10}\right)\Gamma\left(\frac{3}{10}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{9}{10}\right)$ का मान निकालें]

22. दिखायें $\beta(m, m) = \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma m}{2^{2m-1}\, \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}, m > 0$

www.polytechnicpdf.com

[संकेत : $\Gamma m\,\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\Gamma(2m)$ $\Rightarrow$ $\frac{\Gamma m}{\Gamma(2m)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Gamma m\,\Gamma m}{\Gamma(2m)}=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma m}{2^{2m-1}\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \quad \text{या} \quad \beta(m,m)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma m}{2^{2m-1}\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}$$

उत्तरमाला

1. (i) 120 (ii) $\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$ (iii) $-\frac{32\pi}{15}$ (iv) $-\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$
   (iv) $\sqrt{\pi}$ (iv) $-2\sqrt{\pi}$
2. (i) 24 (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\frac{105}{8192}\sqrt{\pi}$
4. $\frac{1}{2h^n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$
5. $\frac{1}{n^m}\Gamma m$
6. $\Gamma\beta(10,6)$
7. $\frac{1}{1260}$
8. $\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$
10. $\frac{1}{5005}$
11. 0
15. (i) $2^{p+q-1}\frac{\Gamma p\,\Gamma q}{\Gamma(p+q)}$
    (ii) $\frac{3}{16}\pi a^4$
18. $\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$
19. $\frac{16}{3}\pi^4$
20. $\frac{2^{12}\pi^{12}}{5}$
21. $\frac{(2\pi)^{9/2}}{10^{1/2}}$

□□□

www.polytechnicpdf.com

खण्ड : 5

प्रायिकता एवं सांख्यिकी

18. प्रायिकता 313

19. द्विपद, प्वायसन तथा प्रसामान्य बंटन 332

www.polytechnicpdf.com

18

CHAPTER

प्रायिकता
(Probability)

व्यावहारिक जीवन अनिश्चितताओं से भरा है हम किसी घटना के परिणाम के बारे में सटीक अनुमान नहीं लगा सकते। प्रायिकता गणित की वह शाखा है जो इन अनिश्चितताओं का गणितीय विश्लेषण करता है तथा उसके आधार पर किसी घटना के परिणाम के बारे में गणितीय संभावना को बताता है।

18.1 परिभाषा (Definition)

प्रायिकता : किसी घटना E के होने की प्रायिकता E के पक्ष में परिणामों की संख्या तथा कुल संभावित परिणामों की संख्या का अनुपात है।

अतः $$P(E) = \frac{E \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

अतः यदि कोई घटना E, m प्रकार से घटित हो सकती है तथा n प्रकार से नहीं घटित हो सकती है, तो घटना के घटने की प्रायिकता

$$P(E) = \frac{m}{m+n} = p$$

तथा घटना के न होने (असफलता) की प्रायिकता

$$P(\bar{E}) = \frac{n}{m+n} = q$$

उदाहरण : किसी पासे (Die) के फेंक में 6 आने की प्रायिकता बतायें। [2012]

हल : किसी पासे के एक फेंक में 6 केवल एक बार आता है।

अतः 6 आने की अनुकूल स्थितियाँ $= 1 = m$ तथा 6 आने की प्रतिकूल स्थितियाँ $= 5 = n$

$\therefore$ कुल स्थितियाँ $= m + n = 1 + 5 = 6$

अतः 6 आने की प्रायिकता $= \frac{m}{m+n} = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$

18.1.1 सम्पूर्ण प्रायिकता का योग

$$\therefore \quad p + q = \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = \frac{m+n}{m+n} = 1$$

अतः सम्पूर्ण प्रायिकता का योग $p + q = 1$ होता है।

स्पष्टतः p तथा q का मान 0 तथा 1 के मध्य होता है।

www.polytechnicpdf.com

18.2 महत्वपूर्ण परिभाषायें (Important Definitions)

1. यादृच्छ प्रयोग (Random Experiment) : ऐसे प्रयोग जिन्हें समान स्थितियों में दुहराये जाने पर भी परिणाम अद्वितीय (unique) नहीं हो, यादृच्छ प्रयोग (Random Experiment) कहलाते हैं।

जैसे : किसी सिक्के का उछालना या पासे का फेंका जाना एक यादृच्छ प्रयोग है।

2. प्रयास तथा घटना (Trial and Event) : किसी यादृच्छ प्रयोग का किया जाना प्रयास कहलाता है तथा प्राप्त प्रत्येक परिणाम घटना (Event) कहलाती है।

जैसे : किसी सिक्के को उछाला जाना प्रयास है तथा प्राप्त परिणाम शीर्ष (Head) या पूँछ (Tail) आना घटना है।

3. प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space) : किसी प्रयोग के सभी संभावित परिणामों (Events) का समुच्चय प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है। इसे सामान्यतः S से सूचित करते हैं।

जैसे : किसी सिक्के को उछालने पर शीर्ष (H) या पूँछ (T) प्राप्त होगा।

अतः प्रतिदर्श समुच्चय $S_1 = \{H, T\}$

इसी तरह पासे के उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

4. सम संभावी (Equally Likely) : किसी प्रयोग में घटने या न घटने की संभावना समान हो तो यह घटनायें सम संभावी कहलाती हैं

जैसे : एक पासे फेकने पर किसी भी अंक के ऊपर आने की घटना समान है। अतः यह समसंभावी है।

5. घटना की सफलता या असफलता (Success and Failure of Events) : यदि किसी प्रयोग में घटना अनुकूल होती है, तो यह सफलता (Success) तथा प्रतिकूल होने पर असफलता (Failure) कहलाती है।

जैसे : सिक्के के उछालने पर हम शीर्ष (H) चाहते हैं तथा उछालने पर शीर्ष आता है तो यह सफलता (Success) तथा पूँछ (T) आता है तो असफलता (Failure) है।

6. घटना के अनुकूल तथा प्रतिकूल संयोगानुपात : (Odds in Favour and against of an Event) : यदि किसी घटना के घटित होने की स्थितियाँ x तथा नहीं घटित होने की स्थितियाँ y हों तो $x : y$ को अनुकूल संयोगानुपात तथा $y : x$ को प्रतिकूल संयोगानुपात कहते हैं।

उपरोक्त परिभाषाओं से स्पष्ट है कि यदि किसी घटना के अनुकूल संयोगानुपात $x : y$ है तो घटना के घटने की प्रायिकता $p = \dfrac{x}{x+y}$, न घटने की प्रायिकता $q = \dfrac{y}{x+y}$

तो अनुकूल संयोगानुपात $x : y \equiv p : q$

तथा प्रतिकूल संयोगानुपात $y : x \equiv q : p$

18.3 घटनाओं के प्रकार (Types of Events)

प्रायिकता के अंतर्गत हम निम्न प्रकार की घटनाओं पर विचार करते हैं :

1. निश्चित तथा अनिश्चित (Sure and Impossible Events) : यदि घटना की सफलता निश्चित हो तो उसकी प्रायिकता 1 तथा असफलता (नहीं घटना) निश्चित हो तो उसकी प्रायिकता 0 होती है।

अतः यदि प्रायिकता 1 हो तो यह निश्चित घटना (Sure Event) तथा प्रायिकता शून्य हो तो इसे असंभव घटना (impossible event) कहते हैं।

जैसे : किसी पासे के फेंक में 7 से कम अंक का आना एक निश्चित घटना है जबकि 7 या 7 से अधिक आना एक असंभव घटना है।

2. पूरक घटना (Coplementary Event) : यदि E कोई घटना हो, तो पूरक घटना $\bar{E}$ एक ऐसी घटना है जो E के नहीं घटित होने पर होती है।

अतः $P(\bar{E}) = P(E \text{ नहीं}) = 1 - P(E)$

www.polytechnicpdf.com

3. स्वतंत्र घटनायें (Independent Events) : दो या दो से अधिक घटनायें परस्पर स्वतंत्र कही जाती है, यदि एक घटना के घटित होने से दूसरे के घटने या नहीं घटने पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। जैसे : दो पासों को एक बार फेंकने पर एक पर 2 आना, तथा दूसरे पर 6 आना परस्पर स्वतंत्र घटनायें हैं।

4. परतंत्र घटना (Dependent Events) : यदि एक घटना के घटना या न घटना दूसरी घटना को प्रभावित करता है तो यह परतंत्र घटना कहलाती है।

जैसे : ताश के 52 पत्तों में से एक पत्ते को खींचकर, पुन: उसे बिना गड्डी में रखे दूसरा पत्ता खींचा जाए तो यह परतंत्र घटना है जबकि यदि पहले पत्ते को खींचने के बाद पुन: उसे गड्डी में डालकर दूसरा पत्ता खींचा जाए तो यह स्वतंत्र घटना होगी।

5. परस्पर अपवर्जी घटना (Multually Exclusive Events) : यदि एक घटना के घटित होने से दूसरी घटना घटित न हो, तो ये घटनायें परस्पर अपवर्जी कहलाती हैं।

जैसे : किसी सिक्के को उछालने पर शीर्ष आता है तो पूँछ नहीं आता। इन दोनों में से कोई एक ही घटना एक बार में घटित हो सकती है। अत: ये घटनायें परस्पर अपवर्जी हैं।

6. संयुक्त घटनायें (Compound Events) : जब दो या अधिक घटनायें एक साथ घटित हों अर्थात् उनका घटना एक-दूसरे से संबंधित (in composition with each other) हो, तो संयुग्त घटनायें कहलाती हैं।

जैसे : दो पासों को एक साथ फेंकने पर आई संख्याओं का योग 9 होना एक संयुक्त घटना है। ताश के पत्तों की गड्डी में चार पत्ते खींचने पर उनका (चारों बार) बादशाह होना एक संयुक्त घटना है।

7. प्रत्याशायें (Expected Values) : यदि $x_1, x_2, \ldots, x_n$ घटनाओं की प्रायिकता क्रमश: $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ हों तो प्रत्याशित मान (Expected values)

$$E(x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum_{r=1}^{n} p_r x_r$$

8. सर्वसमावेशी घटनायें (Exhaustive Events) : किसी यादृच्छ प्रयोग से संबंधित घटनायें जिसमें कम से कम एक का घटित होना आवश्यक है, सर्व समावेशी घटनायें कहलाती हैं। जैसे—किसी सिक्के के उछाल में शीर्ष या पूँछ का आना निश्चित है।

18.4 प्रायिकता पर दो मूलभूत नियम (Two Basic Laws on Probability)

18.4.1 योग नियम (Addition Law)

यदि दो परस्पर अपवर्जी-घटनाओं के घटने की प्रायिकता क्रमश: p_1 तथा p_2 हों तो दोनों में से किसी एक के घटने की प्रायिकता P दोनों के अलग-अलग घटित होने की प्रायिकताओं के योगफल $(p_1 + p_2)$ के बराबर होती है।

अर्थात् $P = p_1 + p_2$

अत: यदि A तथा B परस्पर अपवर्जी घटनायें हैं तो किसी एक के घटने की प्रायिकता

$$P(A \cup B) = P(A \text{ या } B) = P(A) + P(B)$$

इसी तरह दो से अधिक परस्पर अपवर्जी घटनाओं के लिए

$$P(A \cup B \cup C \cup \ldots) = P(A \text{ या } B \text{ या } C \text{ या } \ldots)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) + \ldots$$

यदि दो घटनायें A तथा B परस्पर अपवर्जी नहीं हैं, तो A अथवा B अथवा दोनों के घटित होने की प्रायिकता

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

www.polytechnicpdf.com

18.5 गुणन नियम (Law of Multiplication)

यदि दो घटनायें परस्पर स्वतंत्र हों तथा एक के घटित होने की प्रायिकता p_1 तथा दूसरे के घटित होने की प्रायिकता p_2 हो तो दोनों घटनाओं के एक साथ घटित होने की प्रायिकता P दोनों के अलग-अलग घटित होने की प्रायिकताओं के गुणनफल $p_1 \times p_2$ से दी जाती है।

अर्थात् $P = p_1 \times p_2$

अतः यदि A तथा B परस्पर स्वतंत्र घटनायें हैं तब $P(A \cap B) = P(A \text{ तथा } B) = P(A).P(B)$

इसी तरह दो से अधिक स्वतंत्र घटनाओं के लिए

$P(A \cap B \cap C \cap \ldots) = P(A) \times P(B) \times P(C) \times \ldots$

18.6 कुछ महत्वपूर्ण समुच्चय प्रतीक (Some Important Set Theoretic Symbols)

(i) A नहीं	(A not)	$\overline{A}$
(ii) A या B (A या B में कोई एक)	(A or B)	$A \cup B$
(iii) A तथा B	(A and B)	$A \cap B$
(iv) A, किन्तु B नहीं	(A but not B)	$A \cap \overline{B}$
(v) A नहीं, B नहीं (दोनों में से कोई नहीं)	(Neither A nor B)	$\overline{A} \cap \overline{B}$
(vi) A, B, C में से कम से कम एक	(At least one of A, B and C)	$A \cup B \cup C$
(vii) A तथा B में से निश्चित एक	(Exactly one of A and B)	$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$
(viii) A, B, C तीनों	(All three A, B, C)	$A \cap B \cap C$
(ix) A, B तथा C में कोई दो निश्चित हों	(Exactly two of A, B and C)	$(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$

1. प्रायिकता के गुण : प्रायिकता के निम्नलिखित गुण हैं—

(i) $0 \le P(E) \le 1$ अर्थात् किसी घटना की प्रायिकता शून्य तथा 1 के मध्य होती है।

(ii) $P(E) + P(\overline{E}) = 1$

(iii) $P(\phi) = 0$ अर्थात् असम्भव घटना की प्रायिकता शून्य होती है।

(iv) $P(S) = 1$ अर्थात् प्रतिदर्श समष्टि की प्रायिकता 1 होती है।

2. प्रायिकता निकालने की विधि (Method of Finding Probability) :

(i) घटना E से संबंधित सभी अनुकूल तथा प्रतिकूल परिस्थितियों की संख्या ज्ञात करें।

(ii) अनुकूल स्थिति + प्रतिकूल स्थिति = प्रतिदर्श समष्टि में अवयवों की संख्या $= n(S)$

(iii) अब $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$ का प्रयोग करें, जहाँ $n(E)$ = अनुकूल परिस्थितियों की संख्या

प्रयोग विधि आगे के उदाहरणों से स्पष्ट है।

3. प्रायिकता के प्रश्नों से संबंधित कुछ तथ्य

(i) सिक्का उछालना (Tossing a Coin) : किसी सिक्के के उछालने पर परिणाम शीर्ष (H) या पूँछ (T) होगा।

अतः किसी सिक्के के उछालने में प्रतिदर्श समष्टि (Sample space) $= \{H, T\}$

(ii) पासे का फेंका जाना (Throwing a Die) : पासा एक ठोस घन है जिसमें 6 फलक (faces) होते हैं तथा उन पर क्रमशः 1, 2, 3, 4, 5, 6 अंकित होता है।

अतः पासे के फेंक में प्रतिदर्श समुच्चय $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

www.polytechnicpdf.com

(iii) 52 पत्तों (cards) की गड्डी से पत्ता खींचा जाना (Drawing a Card from Well-shuffled Pack of 52 Cards)

(i) ताश के 52 पत्तों की गड्डी में 13 पत्ते पान, 13 पत्ते ईंट, 13 पत्ते चिड़िया तथा 13 पत्ते हुकुम के पत्ते होते हैं।

(ii) पान एवं ईंट लाल (कुल 26) तथा चिड़िया एवं हुकुम काले (कुल 26) होते हैं।

(iii) प्रत्येक प्रकार के पत्तों में 4 इक्के (Ace), 4 बादशाह (Kings), 4 बेगम (Queens) तथा 4 गुलाम (Jacker Knave) होते हैं। इनकी कुल संख्या 16 होती है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. एक थैले में से, जिनमें 6 लाल तथा 3 काले गेंदे हैं, एक गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली जाती है। निकाले गए गेंद के लाल होने की प्रायिकता बतायें।

हल : थैले में कुल गेंदों की संख्या $= 6 + 3 = 9 = n(S)$

थैले मे कुल लाल गेंदों की संख्या $= 6 = n(E)$

$\therefore$ लाल गेंद निकलने की प्रायिकता $P(r) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि किसी लीप वर्ष (Leap year) को यादृच्छया चुन लिया जाता है तो उस वर्ष मे 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात करें। [2013]

हल : लीप वर्ष में दिनों की संख्या $= 366$

तथा लीप वर्ष में सप्ताह की संख्या $= \frac{366}{7} = 52$ सप्ताह 2 दिन।

अत: 52 सप्ताह मे 52 रविवार होंगे।

शेष दो दिनों को निम्न रूप में सजाया जा सकता है—

(i) रविवार व सोमवार (ii) सोमवार एवं मंगलवार (iii) मंगलवार व बुधवार (iv) बुधवार व बृहस्पतिवार (v) बृहस्पतिवार एवं शुक्रवार (vi) शुक्रवार एवं शनिवार (vii) शनिवार एवं रविवार

अत: संभव परिणामों की संख्या $= 7 = n(S)$

घटना में अनुकूल परिणामों की संख्या $= 2 = n(E)$

अत: 53 रविवार होने की प्रायिकता $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{7}$ उत्तर

उदाहरण 3. ताश के 52 पत्तों की गड्डी से एक पत्ता यादृच्छिक (randam) रूप से खींचने पर

(i) पान का पत्ता (ii) लाल पत्ता

(iii) इक्का (iv) काला बादशाह

(v) गुलाम, बेगम या बादशाह (vi) लाल पत्ता या बादशाह

(vii) हुक्म का पत्ता नहीं होने की प्रायिकता बतायें।

हल : ताश की गड्डी से 52 पत्तों से एक पत्ता 52 प्रकार से निकाला जा सकता है।

अत: $n(S) = 52$ ...(1)

(i) यदि $E =$ पान का पत्ता होने की घटना

पूरी गड्डी में पान के पत्तों की संख्या $= 13$

इन्हें गड्डी से 13 प्रकार से खींचा जा सकता है।

$\therefore \quad n(E) = 13$

अत: पान का पत्ता होने की प्रायिकता $= P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ उत्तर

www.polytechnicpdf.com

(ii) माना E = लाल पत्ता निकलने की घटना

पूरी गड्डी में लाल पत्तों की संख्या = 26

$\therefore \quad n(S) = 26$

अतः $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{26}{52}$ $\quad [\because n(S) = 52]$

$= \dfrac{1}{2}$ उत्तर

(iii) माना E = इक्का होने की घटना

पूरी गड्डी में इक्कों की संख्या = 4

$\therefore \quad P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$ उत्तर

(iv) माना E = काला बादशाह होने की घटना

$\therefore \quad n(E) = 2$

अतः $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{2}{52} = \dfrac{1}{26}$

(v) पूरी गड्डी में गुलाम, बेगम तथा बादशाह के कुल पत्ते $= 4 + 4 + 4 = 12$

अतः यदि E = इन पत्तों के निकलने की घटना, तो $n(E) = 12$

$\therefore \quad P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{12}{52} = \dfrac{3}{13}$ उत्तर

(vi) लाल पत्तों की संख्या 26 होती है जिनमें 2 बादशाह (ईंट व पान) के होते हैं तथा इसके अतिरिक्त दो काले बादशाह होते हैं।

अत : $n(E) = 26 + 2 = 28 \quad \therefore \quad P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{28}{52} = \dfrac{7}{13}$ उत्तर

(vii) गड्डी के 52 पत्तों में हुकुम के पत्तों की संख्या = 13

तथा अन्य पत्तों (हुकुम के न होने) की संख्या = 39

अतः $n(E) = 39 \quad \therefore \quad P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{39}{52} = \dfrac{3}{4}$ उत्तर

(viii) हुकुम के पत्तों की संख्या = 13, अतः $n(E) = 13, n(s) = 51 \therefore P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$

अतः $P(\bar{E})$ = हुकुम के पत्ते न होने की प्रायिकता $= 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$

उदाहरण 4. एक पासे के फेंकने पर ऊपर विषम संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

हल : एक पासे के फेंकने पर, प्रतिदर्श समुच्चय S हो तो

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \therefore \quad n(S) = 6$

तथा विषम संख्या आने की घटना $E = \{1, 3, 5\} \quad \therefore \quad n(E) = 3$

घटना की प्रायिकता $= P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ उत्तर

उदाहरण 5. एक थैले में तीन लाल, सात सफेद और चार काली गेंदें हैं। यदि तीन गेंदें निकाली जाएं तो उनके एक ही रंग के होने की प्रायिकता ज्ञात करें। **[2001]**

हल : गेंदों की कुल संख्या $= 3 + 7 - 4 = 14$

माना गेंद निकालने की घटना E, लाल गेंद निकालने की घटना R, सफेद की W तथा काली की B से दी जाए तो ये घटनायें परस्पर अपवर्जी हैं क्योंकि एक के घटित होने से दूसरा घटित नहीं होगा।

www.polytechnicpdf.com

अत: $P(E) = P(R) + P(W) + P(B)$

अब, $n(S) = {}^{14}C_3 = \frac{14 \times 13 \times 12}{3 \times 2 \times 1} = 364$ [$\because$ n वस्तुओं में r को चुनने का ढंग $= {}^nC_r$]

$$P(R) = \frac{n(R)}{n(S)} = \frac{{}^3C_3}{364} = \frac{1}{364}$$

$$P(W) = \frac{n(W)}{n(S)} = \frac{{}^7C_3}{364} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1 \times 364} = \frac{35}{364}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{364}$$

$$\therefore \quad P(E) = \frac{1}{364} + \frac{35}{364} + \frac{4}{364}$$

$$= \frac{40}{364} = \frac{10}{91}$$

उत्तर

उदाहरण 6. एक सुडौल सिक्का तीन बार उछाला जाता है, प्रायिकता ज्ञात करें।

(i) तीनों बार Head (H) प्राप्त हो

(ii) दो बार Head (H) तथा एक बार Tail (T) प्राप्त हो

(iii) एक बार Head (H) तथा दो बार Tail (T) प्राप्त हो

(iv) तीनों बार Tail (T) प्राप्त हों

(v) कम से कम एक Head (H) प्राप्त हो।

(vi) अधिक से अधिक दो Tails (T) प्राप्त हो।

हल : एक सिक्के को तीन बार या तीन सिक्कों को एक बार उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

$\therefore \quad n(S) = 8$

(i) तीन शीर्ष एक प्रकार से प्राप्त होते हैं। अत: तीनों बार शीर्ष की प्रायिकता $= \frac{1}{8}$

(ii) दो बार Headतथा एक बार Tail तीन ढंग से प्राप्त होता है।

अत: दो Head आने की प्रायिकता $= \frac{3}{8}$

(iii) एक बार Head तथा 2 बार Tail तीन प्रकार से प्राप्त होता है।

अत: एक Head (H) की प्रायिकता $= \frac{3}{8}$

(iv) तीन बार Tail एक तरह से प्राप्त हो सकते हैं।

अत: तीन Tails की प्रायिकता $= \frac{1}{8}$

(v) कम से कम एक Head की प्रायिकता

एक Head की प्रायिकता + 2 Heads की प्रायिकता + 3 Heads की प्रायिकता

$$= \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

(vi) अधिक से अधिक दो Tails की प्रायिकता

= शून्य Tail अर्थात् तीन Heads की प्रायिकता + एक Tail अर्थात् दो Heads की प्रायिकता + दो Tails अर्थात् 1 Head की प्रायिकता

www.polytechnicpdf.com

$$= \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

उदाहरण 7. पाँच लड़को तथा 6 लड़कियो के समूह से दो लड़के तथा चार लड़कियों की एक समिति बनानी है। इस बात की प्रायिकता बतायें कि एक विशेष लड़का A तथा एक विशेष लड़की B समिति के लिए चुन लिए जायेगे।

हल : प्रश्न से, एक विशेष लड़के A तथा विशेष लड़की B को समिति में अवश्य रखना है

अत: हमें 4 लड़को में से एक लड़का तथा 5 लड़कियों में से 3 लड़कियों का चुनाव करना है।

यदि E_1 लड़को को चुनने की घटना हो, तो

4 लड़कों से 1 लड़के को चुनने का ढंग $= {}^4C_1$

$= n(E_1)$

5 लड़कों से 2 लड़को को चुनने का ढंग $= {}^5C_2$

$= n(S_1)$

$$\therefore \quad P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S_1)} = \frac{{}^4C_1}{{}^5C_2} = \frac{4 \times 2}{5 \times 4} = \frac{2}{5}$$

यदि लड़कियों को चुनने की घटना E_2 हो तो 5 लड़कियों में से 3 लड़कियों को चुनने का ढंग $= {}^5C_3 = n(E_2)$

तथा 6 लड़कियो में से 4 लड़कियों को चुनने का ढंग $= {}^6C_4 = n(S_2)$

अत: $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S_2)} = \frac{{}^5C_3}{{}^6C_4} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{2 \times 1}{6 \times 5} = \frac{2}{3}$

$\because$ दोनों घटनायें E_1 तथा E_2 परस्पर स्वतंत्र हैं।

अत: $P(E) = P(E_1) \times P(E_2)$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

उत्तर

उदाहरण 8. एक समूह में 3 पुरुष, 2 स्त्रियाँ तथा 4 बच्चे हैं। यदि उनमें से 4 व्यक्ति यादृच्छया चुने जाते हैं तो चुने हुए व्यक्तियों में 2 बच्चों के निश्चित रूप से होने की प्रायिकता बतायें।

हल : समूह के कुल सदस्यों की संख्या $= 3 + 2 + 4 = 9$

$\therefore$ 9 व्यक्तियों में से 4 चुनने का ढंग $= {}^9C_4$

4 बच्चों में 2 बच्चों को चुनने का ढंग $= {}^4C_2$

अब 4 बच्चों में से 2 बच्चों के चुनाव के बाद समूह के लिए 5 (3 पुरुष + 2 स्त्री) में से 2 का चुनाव करना है जिसका कुल ढंग $= {}^5C_2$

$\therefore$ समूह से दो बच्चे तथा 2 अन्य व्यक्तियों को चुनने का ढंग $= {}^4C_2 \times {}^5C_2$

$$\text{अत: अभीष्ट प्रायिकता} = \frac{{}^4C_2 \times {}^5C_2}{{}^9C_4} = \frac{\frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1}}{\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1}}$$

$$= \frac{10}{21}$$

उत्तर

उदाहरण 9. एक थैले में 3 लाल, 6 सफेद और 7 काली गैंदें हैं। 2 गेंद निकालने पर प्राविकता क्या होगी कि गेंद सफेद और काली हो ? **[2010]**

हल : कुल गेंदों की संख्या $= 3 + 6 + 7 = 16$

16 गेंदों में से 2 गेंद चुनने का ढंग $= {}^{16}C_2$

www.mlytechnicpdf.com

2 चुने हुए गेंदों मे से एक सफेद तथ दूसरी काली होगी।

अत: 6 सफेद गेंदों में 1 चुन्ने का ढंग = ${}^6C_1$

7 काली गेंदों में 1 चुनने का ढंग = ${}^7C_1$

अत: अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{{}^6C_1 \times {}^7C_1}{{}^{16}C_2} = \dfrac{6 \times 7}{\dfrac{16 \times 15}{2 \times 1}} = \dfrac{7}{20}$ उत्तर

उदाहरण 10. दो पासे के फेंकने में दोनों पासो पर आये अंकों का योग 9 आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

हल : दो पासें के फेंकने पर गिरने का कुल ढंग $= 6 \times 6 = 36$

पासो पर योग 9 प्रप्त करने के ढंग = (3, 6) (4, 5), (5, 4) तथा (6, 3) = 4

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

उदाहरण 11. एक साथ तीन पासे फेंके गए हैं। इन तीनों के अंकों का योग 15 से अधिक आए, इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए। [1997]

हल : तीन पासों को फेंकने पर गिरने का कुल ढंग $= 6 \times 6 \times 6 = 216 = n(S)$

तीन पासों पर योग 15 से अधिक 16, 17 या 18 आ सकता है।

अब

(i) अंकों का योग 16 निम्न रूप में सम्भव है—

(6, 6, 4), (6, 5, 5) (6, 4, 6), (5, 6, 5), (5, 5, 6), (4, 6, 6)

कुल 6 ढंग $= n(E)$

$\therefore \quad P(16) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{6}{216}$

(ii) अंकों का योग 17 निम्न रूप में संभव है—

(6, 6, 5), (6, 5, 6), (5, 6, 6). कुल ढंग $= 3 = n(E)$

$\therefore \quad P(17) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{3}{216}$

(iii) 18 आने का ढंग

(6, 6, 6), कुल ढंग = 1

$\therefore \quad P(18) = \dfrac{1}{216}$

ये तीनों घटनायें परस्पर अपवर्जी हैं।

$\therefore$ योग 15 से अधिक आने की प्रायिकता $P(E) = P(16) + P(17) + P(18)$

$= \dfrac{6}{216} + \dfrac{3}{216} + \dfrac{1}{216} = \dfrac{10}{216} = \dfrac{5}{108}$ उत्तर

उदाहरण 12. 52 पत्तों की गड्डी से तीन पत्ते निकाले जाते हैं। प्रायिकता ज्ञात करें कि वे एक ही रंग के हों। [1999]

हल : ताश के पत्ते दो रंग के होते हैं—लाल और काला जिसमें प्रत्येक की संख्या 26 होती है।

अत: 26 पत्तों में से तीन पत्ते चुनने का ढंग

$= {}^{26}C_3 = \dfrac{26 \times 25 \times 24}{3 \times 2 \times 1} = 2600$

पुन: 2 रंगों में से एक रंग चुनने का ढग

$= {}^2C_1 = 2$

$\therefore$ एक रंग के चुनाव की घटनाओं की कुल संख्या $= 2 \times 2600 = 5200 = n(E)$

www.polytechnicpdf.com

तथा 52 पत्तों में तीन पत्तों को चुनने का ढंग

$$= {}^{52}C_3 = \frac{52 \times 51 \times 50}{3 \times 2 \times 1} = 22100 = n(S)$$

$\therefore$ एक रंग के होने की अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2600}{22100} = \frac{4}{17}$ उत्तर

उदाहरण 13. यांत्रिकी का एक प्रश्न तीन विद्यार्थियों A, B तथा C को दिया जाता है जिनके हल करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{4}$ हैं। प्रश्न हल हो जाने की प्रायिकता ज्ञात करें। **[1995]**

हल : प्रश्न से, A के द्वारा हल होने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$

$\therefore$ A के द्वारा हल न होने की प्रायिकता $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

B के द्वारा हल होने की प्रायिकता $= \frac{1}{3}$

$\therefore$ B के द्वारा हल न होने की प्रायिकता $= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

C के द्वारा हल होने की प्रायिकता $= \frac{1}{4}$

$\therefore$ C के द्वारा हल न होने की प्रायिकता $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

ये घटनायें परस्पर स्वतंत्र हैं क्योंकि एक छात्र द्वारा प्रश्न हल होना या न होना दूसरे को प्रभावित नहीं करता। अतः प्रश्न के हल न होने की प्रायिकता

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ प्रश्न से हल हो जाने की प्रायिकता $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ उत्तर

उदाहरण 14. एक कमेटी 9 छात्रों की है जिसमें दो छात्र प्रथम वर्ष से, तीन द्वितीय वर्ष से, तथा चार तृतीय वर्ष से हैं। तीन छात्र चुने गए हैं। प्रायिकता ज्ञात करो जबकि

(i) तीनों छात्र अलग-अलग कक्षाओं के हैं।

(ii) तीनों छात्र एक ही कक्षा के हैं। **[1995, 96]**

हल : 9 छात्रों में से 3 छात्रों को चुनने का कुल ढंग $= {}^9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$

(i) यदि तीनों छात्र अलग-अलग कक्षाओं के हैं : प्रथम वर्ष के 2 छात्रों में से एक को चुनने का ढंग $= {}^2C_1 = 2$

द्वितीय वर्ष के 3 छात्रों में से एक को चुनने का ढंग $= {}^3C_1 = 3$

तृतीय वर्ष के 4 छात्रों में से एक को चुनने का ढंग $= {}^4C_1 = 4$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{2 \times 3 \times 4}{84} = \frac{2}{7}$ उत्तर

(ii) यदि तीनों छात्र एक ही कक्षा के हैं :

(a) प्रथम वर्ष में केवल दो छात्र हैं अतः तीन छात्रों का चुनाव संभव नहीं है।

(b) द्वितीय वर्ष के तीन छात्रों में से तीन को चुनने का ढंग $= {}^3C_3 = 1$

www.polytechnicpdf.com

(c) तृतीय वर्ष के 4 छात्रों में से 3 को चुनने का ढंग $= {}^4C_3 = 4$

ये घटनायें परस्पर अपवर्जी हैं। अत:

अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{1}{84} + \frac{4}{84} = \frac{5}{84}$ उत्तर

उदाहरण 15. यदि पाँच व्यक्तियों A, B, C, D, E में से किसी कमेटी में तीन चुने जाते हैं तो

(i) A तथा B दोनों के चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(ii) A के न चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। [1993]

हल : पाँच व्यक्तियों मे से तीन व्यक्तियों को चुनने का ढंग $= {}^5C_3 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 = n(S)$

(i) यदि A तथा B को अवश्य चुनना है तो शेष तीन व्यक्तियों में एक को चुनने का ढंग $= {}^3C_1 = 3 = n(E_1)$

अत: 5 में से 3 व्यक्तियों को चुनने की प्रायिकता जिसमें A तथा B अवश्य हों

$$P(E) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{10}$$ उत्तर

(ii) यदि A को नहीं चुनना है, तो शेष चार व्यक्तियों में से तीन को चुनने का ढंग $= {}^4C_3 = 4$

अत: A के न चुने जाने की प्रायिकता $= \frac{4}{10}$ उत्तर

उदाहरण 16. बच्चों के तीन समूहों में क्रमश: 3 लड़कियाँ तथा 1 लड़का, 2 लड़कियाँ तथा 2 लड़के तथा 1 लड़की और 3 लड़के हैं। प्रत्येक समूह से एक बच्चा यादृच्छया चुना जाता है। सिद्ध करो कि तीन चुने हुए बच्चों में 1 लड़की तथा 2 लड़के होने की प्रायिकता $\frac{13}{32}$ है।

हल : एक लड़की तथा दो लड़के निम्न प्रकार से चुने जा सकते हैं—

(i) पहले समूह से लड़की, दूसरे से लड़का, तीसरे से लड़का तथा इसकी प्रायिकता $p_1 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$

(ii) पहले समूह से लड़का, दूसरे से लड़की तथा तीसरे से लड़का जिसकी प्रायिकता $p_2 = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$

(iii) पहले समूह से लड़का, दूसरे समूह से लड़का तथा तीसरे समूह से लड़की, जिसकी प्रायिकता

$$p_3 = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}.$$

ये परस्पर अपवर्जी घटनायें हैं।

अत: अभीष्ट प्रायिकता $p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{9}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = \frac{13}{32}$

उदाहरण 17. एक कक्षा में 80 विद्यार्थी हैं जिनमें 25 लड़कियाँ व 55 लड़के हैं। उनमें से 10 धनवान तथा शेष गरीब हैं। 20 अति सुन्दर हैं। एक विद्यार्थी को चुना जाता है। प्रायिकता ज्ञात करो कि चुना गया विद्यार्थी एक अति सुन्दर धनवान लड़की है।

हल : माना A अति सुन्दर विद्यार्थी; B धनवान विद्यार्थी तथा C लड़की को चुनने की घटनायें हैं।

तो $P(A) = \frac{20}{80}, P(B) = \frac{10}{80}$ तथा $P(C) = \frac{25}{80}$

अत: चुने गए विद्यार्थी के अतिसुन्दर धनवान लड़की होने की प्रायिकता

$$= \frac{20}{80} \times \frac{10}{80} \times \frac{25}{80} = \frac{5}{512}$$ [$\because$ तीनों स्वतंत्र घटनायें हैं] उत्तर

उदाहरण 18. एक थैले में 4 सफेद तथा 6 काली गेंदें हैं। इनमें से उत्तरोत्तर 2 सफेद गेंदों के निकालने की प्रायिकता ज्ञात करें जबकि

पहली बार निकाली हुई गेंद फिर थैले में नहीं रखी जाती। [1994]

www.polytechnicpdf.com

हल : कुल गेंदों की संख्या $= 4 + 6 = 10$

पहली बार सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता $= \frac{{}^4C_1}{{}^{10}C_1} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ उत्तर

अब दूसरी बार में सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता, जब निकाली गई गेंद थैले में वापस नहीं रखी जाती।
बची हुई सफेद गेंद $= 3$, कुल गेंद $= 9$

$\therefore$ दूसरी सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता $= \frac{{}^3C_1}{{}^9C_1} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

ये दोनों स्वतंत्र घटनायें हैं।

$\therefore$ दो गई स्थितियों में दो सफेद गेंद निकालने की प्रायिकता $= \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$ उत्तर

उदाहरण 19. क्रमिक रूप में दो बार ताश की गड्डी से पत्ता खींचने पर, बादशाह प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जबकि खींचे गए पत्ते पुनः गड्डी में नहीं रखे जाते। **[2006]**

हल : यदि प्रथम बार बादशाह प्राप्त करने की घटना E_1 तथा दूसरी बार बादशाह प्राप्त करने की घटना E_2 हो, तो

52 पत्तों में से एक पत्ता निकालने का ढंग $= {}^{52}C_1 = 52$
तथा 4 बादशाहों में से एक बादशाह निकालने का ढंग $= {}^4C_1 = 4$

$\therefore \quad P(E_1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

चूँकि निकाला गया कार्ड पुनः गड्डी में नहीं रखा जाता।
अतः गड्डी में 51 पत्ते हैं, जिनमें 3 बादशाह हैं।

$\therefore \quad P(E_2) = \frac{{}^3C_1}{{}^{51}C_1} = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$

E_1 तथा E_2 दोनों स्वतंत्र घटनायें हैं, अतः अभीष्ट प्रायिकता $P(E) = P(E_1) . P(E_2)$

$$= \frac{1}{13} \times \frac{1}{17} = \frac{1}{221}$$

उदाहरण 20. A के लॉटरी में तीन शेयर हैं जिनमें 3 इनाम तथा 6 रिक्त हैं। B का अन्य लॉटरी में एक शेयर है, जिसमें 1 इनाम और 2 रिक्त हैं। दिखाओं A के जीतने की प्रायिकता तथा B के जीतने की प्रायिकता में $16:7$ का अनुपात है। **[1998]**

हल : प्रश्न से A के लॉटरी में तीन शेयर हैं, जिनमें 3 इनाम तथा 6 रिक्त हैं।

अतः A के न जीतने की प्रायिकता $= \frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{21}$

$\therefore$ A के जीतने की प्रायिकता $P(A) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$

पुनः B का अन्य लॉटरी में एक शेयर है, जिसमें 2 रिक्त स्थान तथा एक इनाम है।

अतः B के न जीतने की प्रायिकता $= \frac{2}{3}$

$\therefore$ B के जीतने की प्रायिकता $P(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ अभीष्ट अनुपात $= \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{16}{21} : \frac{1}{3}$

$= 16:7$ उत्तर

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 21. A तथा B इस समझ से बारी-बारी सिक्का फेंकते हैं कि जो पहले शीर्ष (Heac) फेंकेगा, वह जीतेगा। उनके अलग-अलग जीतने की संभावना ज्ञात करें। [2000]

हल : मान लिया A के जीतने की प्रायिकता x है तो B के जीतने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}x$

क्योंकि B को A की असफलता (पूँछ प्राप्त होने) पर ही सिक्का फेंकने का मौका मिलेगा। यह क्रम शीर्ष प्राप्त होने तक जारी रहेगा।

अब $\quad x + \frac{1}{2}x = 1 \quad$ या $\quad \frac{3}{2}x = 1$

$\therefore \quad x = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

अतः A के जीतने की प्रायिकता $= \frac{2}{3}$

B के जीतने की प्रायिकता $= \frac{1}{3}$ उत्तर

उदाहरण 22. एक घुड़दौड़ में भाग लेने वाले तीन घोड़ों के अनुकूल संयोगानुपात 1 : 2, 1 : 3, 1 : 4 हैं। इन तीन घोडों में किसी एक के विजयी होने की प्रायिकता बतायें। [2003]

हल : पहले घोड़े का अनुकूल संयोगानुपात $= 1 : 2$

$\therefore$ अतः उसके जीतने की प्रायिकता, $p_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$

दूसरे घोड़े के अनुकूल संयोगानुपात $= 1 : 3$

$\therefore$ उसके जीतने की प्रायिकता $p_2 = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$

तीसरे घोड़े के अनुकूल संयोगानुपात $= 1 : 4$

$\therefore$ उसके जीतने की प्रायिकता $= \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$

किंतु कोई एक घोड़ा ही जीत सकता है, अतः ये परस्पर अपवर्जी घटनायें हैं।

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= p_1 + p_2 + p_3$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$ उत्तर

उदाहरण 23. एक घटना के होने की प्रायिकता दूसरी घटना के होने की प्रायिकता का वर्ग है। किन्तु प्रथम घटना के प्रतिकूल संयोगानुपात दूसरी घटना के प्रतिकूल संयोगानुपात के घन के बराबर है। प्रत्येक घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : माना प्रथम एवं द्वितीय घटना के होने की प्रायिकता क्रमशः p_1 तथा p_2 हैं।

प्रश्न से, $\quad p_1 = p_2^2 \quad$ ...(1)

तथा $\quad \frac{1-p_1}{p_1} = \left(\frac{1-p_2}{p_2}\right)^3 \quad$ ...(2)

(2) में (1) से p_1 का मान रखने पर

$$\frac{1-p_2^2}{p_2^2} = \left(\frac{1-p_2}{p_2}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{(1+p_2)(1-p_2)}{p_2^2} = \left(\frac{1-p_2}{p_2}\right)^3$$

$\Rightarrow \quad p_2(1+p_2) = (1-p_2)^2 \quad \Rightarrow \quad p_2 + p_2^2 = 1 + p_2^2 - 2p_2$

$\Rightarrow \quad 3p_2 = 1 \quad \therefore \quad p_2 = \frac{1}{3}$

www.polytechnicpdf.com

$\therefore \quad p_1 = p_2^2 = \frac{1}{9}$ उत्तर

उदाहरण 24. ताश की गड्डी के 52 पत्तों में से एक इक्का या हुकुम का पत्ता खींचने की प्रायिकता बतायें।

हल : मान A = एक इक्का निकालने की घटना

B = हुकुम का पत्ता निकालने की घटना

$A \cap B$ = हुकुम का पत्ता तथा इक्का निकालने की घटना

अतः $P(A \text{ या } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ...(1)

अब $P(A) = \frac{4}{52}$ [∵ इक्के चार होते हैं]

$P(B) = \frac{13}{52}$ [∵ हुकुम के पत्ते = 13]

$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

$\therefore$ (1) से $P(A \text{ या } B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

अतः इक्का या हुकुम का पत्ता होने की प्रायिकता $= \frac{4}{13}$ उत्तर

उदाहरण 25. एक फैक्ट्री में इंजीनियर के दो स्थान रिक्त हैं। साक्षात्कार हेतु एक इंजीनियर दंपत्ति आते हैं। पति के चुने जाने की प्रायिकता 1/10 तथा पत्नी के चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{8}$ है निम्नलिखित परिस्थितियों में प्रायिकता ज्ञात करें—

(i) दोनों का चुनाव हो जाए। (ii) केवल एक चुन लिया जाए

(iii) दोनों में कोई नहीं चुना जाए।

हल : माना H = पति के चुने जाने की घटना; W = पत्नी के चुने जाने की घटना

प्रश्न से, $P(H) = \frac{1}{10}, P(W) = \frac{1}{8}, \quad P(\overline{H}) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}, \quad P(\overline{W}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

दोनों का चुना जाना स्वतंत्र घटना है।

$\therefore \quad P(\text{पति तथा पत्नी}) = P(H \cap W) = P(H) \times P(W) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{80}$ उत्तर

(ii) दोनों में से एक के चुने जाने की प्रायिकता

$= P(H \text{ या } W) = P(H \cap \overline{W}) \cup P(\overline{H} \cap W)$

$= P(H \cap \overline{W}) + P(\overline{H} \cap W)$ [घटनायें परस्पर अपवर्जी हैं]

$= P(H).P(\overline{W}) + P(\overline{H}).P(W)$

$= \frac{1}{10} \times \frac{7}{8} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{8} = \frac{7}{80} + \frac{9}{80} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5}$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{1}{5}$ उत्तर

(iii) दोनों में किसी के न चुने जाने की प्रायिकता

$P(\overline{H} \text{ तथा } \overline{W}) = P(\overline{H}).P(\overline{W}) = \frac{9}{10} \times \frac{7}{8} = \frac{63}{80}$ उत्तर

उदाहरण 26. यदि A, 60% स्थितियों में सत्य बोलता है, B, 90% स्थितियों में सत्य बोलता है, तो किसी एक कथन में उनके एक-दूसरे के विरोधाभासी होने की प्रायिकता ज्ञात करें।

www.polytechnicpdf.com

हल : प्रश्न से,

A से सत्य बोलने की प्रायिकता $P(A)=\frac{60}{100}$

A के सत्य न बोलने की प्रायिकता $P(\bar{A})=\frac{40}{100}$

B के सत्य बोलने की प्रायिकता $P(B)=\frac{90}{100}$

B के सत्य न बोलने की प्रायिकता $P(\bar{B})=\frac{10}{100}$

अभीष्ट प्रायिकता $=P(A)P(\bar{B})+P(\bar{A})P(B)$

$$=\frac{60}{100}\times\frac{10}{100}+\frac{40}{100}\times\frac{90}{100}=\frac{4200}{100\times100}=\frac{21}{50}$$ उत्तर

उदाहरण 27. एक व्यक्ति के, जो 45 वर्ष का है 70 वर्ष तक जीने का प्रतिकूल संयोगानुपात 7 : 5 तथा उसकी पत्नी जो 36 वर्ष की है, के 61 वर्ष तक जीने की प्रतिकूल संयोगानुपात 5 : 3 है। प्रायिकता ज्ञात करें कि

(i) दंपत्ति अगले 25 वर्ष तक जीयेंगे

(ii) दोनों में से कोई भी अगले 25 वर्ष तक नहीं जीयेगा।

(ii) उनमें से कोई एक अगले 25 वर्ष तक जीयेगा।

(iv) उनमें से कम से कम एक अगले 25 वर्ष तक जीयेगा।

हल : माना पति के अगले 25 वर्ष तक जीने की घटना $=A$

तथा पत्नी के अगले 25 वर्ष तक जीने की घटना $=B$

स्पष्ट है दोनों स्वतंत्र घटनायें हैं।

अब $P(A)=\frac{5}{5+7}=\frac{5}{12}$, $P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$

$P(B)=\frac{3}{5+3}=\frac{3}{8}$, $P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{3}{5}=\frac{5}{8}$

(i) अभीष्ट प्रायिकता $=P(A$ तथा $B)=P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{5}{12}\times\frac{3}{8}=\frac{5}{32}$ उत्तर

(ii) अभीष्ट प्रायिकता $=P(\bar{A}$ तथा $\bar{B})=(\bar{A}).P(\bar{B})$ [दोनों स्वतंत्र घटना हैं]

$$=\frac{7}{12}\times\frac{5}{8}=\frac{35}{96}$$

(iii) निम्न स्थितियाँ संभव हैं—

(I) पति अगले 25 वर्ष जीयेगा, पत्नी नहीं अर्थात् $A\cap\bar{B}$

(II) पत्नी अगले 25 वर्ष जीयेगी, पति नहीं अर्थात् $\bar{A}\cap B$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $=P(\text{I या II})=P(A\cap\bar{B})\cup P(\bar{A}\cap B)=P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap B)$

$=P(A)P(\bar{B})+P(\bar{A})P(B)$ [घटनायें स्वतंत्र हैं]

$$=\frac{5}{12}\times\frac{5}{8}+\frac{7}{12}\times\frac{3}{8}=\frac{46}{96}=\frac{23}{48}$$ उत्तर

(iv) अभीष्ट प्रायिकता $=1-P(\bar{A})P(\bar{B})=1-\frac{7}{12}\times\frac{5}{8}=1-\frac{35}{96}=\frac{61}{96}$ उत्तर

उदाहरण 28. यदि E तथा F स्वतंत्र घटनायें हों तथा $P(E)=0.35$, $P(E\cup F)=0.6$ तो $P(F)$ का मान बतायें।

हल : $\because$ $P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$

$\Rightarrow$ $P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E).P(F)$ ($\because$ घटनायें स्वतंत्र हैं)

www.polytechnicpdf.com

$$= P(E) + P(F)\{1 - P(E)\}$$

या $0.6 = 0.35 + P(F)\{1 - 0.35\}$ [मान रखने पर]

या $0.6 - 0.35 = P(F)(0.65)$ $\therefore$ $P(F) = \frac{0.25}{0.65} = \frac{5}{13}$ उत्तर

उदाहरण 29. एक सिपाही किसी डकैत पर चार बार गोली दागता है। डकैत किसी एक गोली से मरेगा। इसकी प्रायिकता 0.6 है। सभी गोली दागने के बावजूद डकैत जिंदा है, इसकी प्रायिकता ज्ञात करें।

हल : माना E_i, iवीं गोली से डकैत के नहीं मरने की घटना को बताता है, जहाँ $i = 1, 2, 3, 4$

तो $P(E_i) = 1 - 0.6 = 0.4$

अत: डकैत के जीवित रहने की प्रायिकता $= P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4)$

$= P(E_1).P(E_2).P(E_3).P(E_4)$ [घटनायें स्वतंत्र हैं]

$= (0.4) \times (0.4) \times (0.4) \times (0.4)$

$= (0.4)^4 = 0.256$ उत्तर

महत्त्वपूर्ण सूत्र (Important Formulae)

1. यदि E कोई घटना हो तथा घटना m प्रकार से घटित हो सकती है तथा n प्रकार से नहीं घटित हो सकती है।

   (i) उसके होने की प्रायिकता, $P(E) = \frac{E \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{m}{m+n} = \frac{n(E)}{n(S)}$

   (ii) उसके न होने की प्रायिकता, $P(\bar{E}) = \frac{n}{m+n}$

   (iii) अनुकूल संयोगानुपात $= m : n$

   प्रतिकूल संयोगानुपात $= n : m$

2. **योग नियम :** यदि E_1 तथा E_2 दो घटनायें हों तो

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1 \text{ या } E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

यदि घटनायें परस्पर अपवर्जी हैं, तो

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

3. **गुणन नियम :** यदि $E_1, E_2, E_3, \ldots$ परस्पर स्वतंत्र घटनायें हों, तो

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \ldots) = P(E_1 \text{ तथा } E_2 \text{ तथा } E_3 \text{ तथा } \ldots)$$
$$= P(E_1) \times P(E_2) \times P(E_3) \times \ldots$$

प्रश्नावली 18.1

1. (i) एक पासे के फेंकने में 5 आने की क्या प्रायिकता है ?

   (ii) एक पासें की फेंक में 3 में बड़ा अंक प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात करें। **[2011]**

2. एक थैले में 5 लाल तथा 6 हरी गेंदें हैं। थैले में से एक गेंद निकालने पर उसके हरी होने की प्रायिकता बतायें।

3. एक थैले में 6 लाल तथा 3 काली गेंदे हैं। एक काली गेंद के यादृच्छया निकालने की प्रायिकता ज्ञात करें।

4. एक सामान्य वर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात करें। **[2004, 07]**

5. (i) यदि 52 ताश की गड्डी में से एक ताश खींचा जाए तो उसके इक्का या हुक्म का पत्ता होने की प्रायिकता ज्ञात करें। **[2002]**

   (ii) 52 ताशों की गड्डी से एक पत्ता खींचा जाता है। पत्ते के बादशाह या ईंट (पान) का पत्ता होने की प्रायिकता ज्ञात करें।

www.pdfteachers.com

[संकेत : $n(E) = 13$ (ईंट) + 3 (शेष बादशाह)]

6. बारह टिकटों पर एक-एक संख्या 1 से 12 तक लिखी हुई हैं। यदि इनमें से कोई एक टिकट उठा लिया जाए तो उस पर 2 अथवा 3 के गुणक होने की प्रायिकता ज्ञात करें।

[संकेत : $n(S) = 12$, $E = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$ $\therefore$ $n(E) = 8$]

7. 1 से 20 तक अंकित टिकटों को मिला दिया जाता है तथा एक टिकट निकाला जाता है। निकाले गए टिकट पर अंकित संख्या 3 अथवा 7 का गुणक होगी, इसकी क्या प्रायिकता है।

8. एक थैले में 8 सफेद तथा 6 लाल गेंदें हैं। दो गेंद एक ही रंग की निकालने की प्रायिकता ज्ञात करें। [1996]

9. एक थैले में 14 गेंदें हैं, जिनमें 3 लाल तथा 4 सफेद हैं और शेष काली हैं तो यदि उनमें से 3 गेंदें निकाली जायें तो उनके एक ही रंग के होने की प्रायिकता ज्ञात करें। [1996, 2001]

10. एक थैले में 10 काली तथा 10 सफेद गेंदें हैं। एक ही रंग के दो गेंदों के खींचे जाने की प्रायिकता बतायें।

$$\left[\text{संकेत : } \frac{{}^{10}C_2}{{}^{20}C_2} + \frac{{}^{10}C_2}{{}^{20}C_2}\right]$$

11. दो परिपूर्ण पासों (Dice) का जोड़ा फेंका जाता है। दोनों पासों पर आये अंकों का योग 10 या अधिक होने की संभाविता ज्ञात करें, जबकि [1991]

(i) प्रथम पासे पर 5 आये। (ii) कम से कम एक पासे पर 5 आए।

12. दो सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं, तो

(a) कम से कम एक शीर्ष प्राप्त करने की प्रायिकता बताये।

(b) दोनों शीर्ष ऊपर आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

13. (i) ताश के 52 पत्तों में से 2 पत्ते निकाले गए हैं। एक के राजा तथा दूसरे के रानी होने की प्रायिकता ज्ञात करें। [1994]

(ii) चार व्यक्ति एक ताश की गड्डी से एक-एक ताश खींचते हैं। इनमें चारों रंग (प्रकार) के ताश आने की प्रायिकता ज्ञात करें। [1998, 99]

14. (i) एक थैले में 9 लाल, 7 सफेद तथा 4 काली गेंदें हैं। उनमें से यदृच्छया 2 गेंदें निकाली जाती हैं। प्रायिकता ज्ञात करें कि उनमें (a) एक सफेद, दूसरी लाल गेंद हैं, (b) दोनों एक ही रंग की हैं।

(iii) एक थैले में 8 सफेद तथा 6 लाल गेंदें हैं। दो गेंद एक ही रंग की निकालने की प्रायिकता ज्ञात करें। [1996]

15. किसी खेल में चार टीमों के जीतने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}$ तथा $\frac{1}{10}$ हैं। इन चारों टीमों में से किसी एक के जीतने की प्रायिकता ज्ञात करें। किसी भी टीम के न जीतने की प्रायिकता ज्ञात करें।

[संकेत : घटनायें परस्पर अपवर्जी हैं। अतः $P(E) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4)$]

16. A के द्वारा प्रश्न हल करने की प्रायिकता $\frac{2}{3}$ तथा B के द्वारा हल करने की प्रायिकता $\frac{3}{5}$ है। इन दोनों में से कम से कम एक के द्वारा प्रश्न हल हो जाने की प्रायिकता ज्ञात करें।

17. 9 विद्यार्थियों की एक कमेटी में प्रथम वर्ष से 2, द्वितीय वर्ष से तीन तथा तृतीय वर्ष से चार विद्यार्थी हैं। तीन विद्यार्थी चुने गये हैं। प्रायिकता ज्ञात करें कि

(i) तीनों छात्र अलग-अलग कक्षाओं से हों। [1995, 96]

(ii) तीनों विद्यार्थी एक ही कक्षा के होंगे।

18. किसी दौड़ में चार घोड़ों के जीतने का अनुकूल न्योगानुपात 1 : 3, 1 : 4, 1 : 5 तथा 1 : 6 हैं। उनमें से किसी एक घोड़े के जीतने की प्रायिकता बतायें।

www.polytechnicpdf.com

19. यदि A के प्रश्न हल करने के प्रतिकूल संयोगानुपात $4:3$ तथा B के हल करने के अनुकूल संयोगानुपात $7:5$ है, तो उन दोनों के मिलकर प्रश्न हल करने की प्रायिकता बतायें।

20. किसी परीक्षा में किसी विद्यार्थी A के उत्तीर्ण होने की प्रायिकता $3/7$ तथा दूसरे विद्यार्थी B के उत्तीर्ण होने की प्रायिकता $5/7$ है। यदि A का उत्तीर्ण होना तथा B का उत्तीर्ण होना स्वतन्त्र घटनायें हों तो प्रायिकता ज्ञात करें जबकि

(i) केवल A परीक्षा उत्तीर्ण करता है।

[संकेत : $P[(E_1 \cap \bar{E}_2) = P(E_1).P(\bar{E}_2)]$

(ii) दोनों में से केवल एक परीक्षा उत्तीर्ण करता है।

[संकेत : $P[(E_1 \cap \bar{E}_2) \cup (\bar{E}_1 \cap E_2)]$

जहाँ $E_1 = A$ के उत्तीर्ण होने की घटना, $E_2 = B$ के उत्तीर्ण होने की घटना

21. X के द्वारा गणित, भौतिकी तथा रसायन विज्ञान में ग्रेड A प्राप्त करने की प्रायिकता क्रमशः 0.2, 0.3 तथा 0.5 प्रायिकता ज्ञात करें

(i) सभी विषयों में ग्रेड A (ii) किसी भी विषय में ग्रेड A नहीं

(iii) दो विषयों में ग्रेड A

[संकेत : (a) यदि E, F, G क्रमशः गणित, भौतिकी तथा रसायन विज्ञान में ग्रेड A की प्रायिकता हो तो

(i) $P(E \cap F \cap G)$ (ii) $P(\bar{E} \cap \bar{F} \cap \bar{G})$

(iii) $P\{(E \cap F \cap \bar{G}) \cup (\bar{E} \cap F \cap G) \cup (E \cap \bar{F} \cap G)$

22. यदि A तथा B दो घटनायें हों जहाँ $P(A) = \frac{1}{2}, P(A \cup B) = \frac{3}{5}$

तथा $P(B) = p$ तो p का मान प्राप्त करें जबकि

(i) ये परस्पर अपवर्जी हैं। (ii) स्वतंत्र हैं।

[संकेत : (i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (ii) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$]

23. A, B, C तीन विद्यार्थियों द्वारा एक प्रश्न को हल कर लेने की प्रायिकतायें $\frac{1}{3}, \frac{2}{7}$ तथा $\frac{3}{8}$ हैं। यदि तीनों हल करने का प्रयास करते हैं तो प्रायिकता ज्ञात करें :

(i) तीनों विद्यार्थी प्रश्न हल कर लेंगे।

(ii) कोई भी विद्यार्थी प्रश्न हल नहीं कर पाएगा।

(iii) कम से कम एक प्रश्न हल कर देगा।

(iv) केवल एक विद्यार्थी प्रश्न हल कर पाएगा।

(v) केवल दो विद्यार्थी प्रश्न हल कर लेंगे।

24. यदि A तथा B दो घटनायें हैं जहाँ $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{2}$

तथा $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ तो $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ का मान ज्ञात करें,

[संकेत : $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}).P(\bar{B})$]

25. एक पासे को चार बार फेंका जाता है। प्रत्येक बार एक ही अंक आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

[संकेत : $P(E_1) = \frac{6}{6}.P(E_2) = \frac{1}{6}, P(E_3) = \frac{1}{6}, P(E_4) = \frac{1}{6}$ अतः प्रायिकता $= 1 \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$]

www.polytechnicpdf.com

उत्तरमाला

1. (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{1}{2}$ **2.** $\frac{1}{2}$ **3.** $\frac{1}{3}$ **4.** $\frac{1}{7}$ **5.** (i) $\frac{4}{13}$ (ii) $\frac{4}{13}$

6. $\frac{2}{3}$ **7.** $\frac{2}{5}$ **8.** $\frac{43}{91}$ **9.** $\frac{10}{91}$ **10.** $\frac{9}{19}$ **11.** $\frac{1}{18}, \frac{1}{12}$ **12.** $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$

13. (i) $\frac{8}{263}$ (ii) 0.1055 (iii) $\frac{4}{17}$ **14.** (i) $\frac{63}{190}, \frac{63}{190}$ (ii) $\frac{43}{91}$

15. $\frac{1207}{2520}, \frac{1313}{2520}$ **16.** $\frac{13}{15}$ **17.** $\frac{1}{84}, \frac{5}{84}$ **18.** $\frac{5}{6}$ **19.** $\frac{16}{21}$

20. $\frac{6}{49}, \frac{26}{49}$ **21.** (i) 0.054, (ii) 0.056, (iii) 0.348

22. (i) $\frac{1}{10}$ (ii) $\frac{1}{5}$

23. (i) $\frac{1}{28}$ (ii) $\frac{25}{84}$ (iv) $\frac{25}{56}$ (v) $\frac{37}{168}$

24. $\frac{3}{8}$ **25.** $\frac{1}{216}$

□□□

www.polytechnicpdf.com

19

CHAPTER

द्विपद, प्वॉयसन तथा प्रसामान्य बंटन (Binomial, Poisson and Normal Distribution)

1. द्विपद बंटन

19.1 प्रायिकता बंटन (Probability Distribution) :

यदि यादृच्छ चर (Random Variable) X के n मानों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ के संगत प्रायिकतायें $P(X)$, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ हों तथा उन्हें निम्न रूप में सारणी से व्यक्त किया जाए।

X :	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

तो यह प्रायिकता बंटन कहलाती है।

अत: प्रायिकता बंटन यादृच्छ चरों को उनके संगत प्रायिकताओं के साथ सारणी रूप में व्यक्त करने की विधि है।

प्रायिकता बंटन मुख्यत: निम्न प्रकार के होते हैं—

(1) द्विपद बंटन (Binomial Distribution)

(2) प्वासों बंटन (Poisson Distribution)

(3) प्रसामान्य बंटन (Normal Distribution)

19.2. द्विपद बंटन (Binomial Distribution) :

हम जानते हैं कि यदि a तथा x वास्तविक राशियाँ हो तथा x कोई धन पूर्णांक हो तो द्विपद सिद्धान्त से

$$(a+x)^n = {}^nC_0\, a^n + {}^nC_1\, a^{n-1}\, x + {}^nC_2\, a^{n-2}\, x^2 + \ldots + {}^nC_r\, a^{n-r}\, x^r + \ldots + {}^nC_n\, x^n$$

तथा व्यापक पद $t_{r+1} = {}^nC_r\, a^{n-r}\, x^r$

इस सूत्र का प्रयोग घटनाओं की सफलता तथा असफलता की असंतत प्रायिकता तथा उसका बंटन निकालने में होता है। इसका प्रतिपादन जेम्स बर्नोली (James Bernaulli) ने किया था।

मान लिया किसी एक प्रयास (Trial) में घटना (Even) के सफल होने की प्रायिकता p तथा असफल होने की प्रायिकता q हो तो $q+p=1$ [$\because$ प्रायिकता का योग 1 होता है]

यदि कुल n प्रयास किए जायें तो घटना की सफलता $0, 1, 2, \ldots, n$ बार हो सकती है। इन अनुमानित प्रायिकता की गणना द्विपद व्यंजक $(q+p)^n$ के पदों के द्वारा की जाती है तथा इसे

www.polytechnicpdf.com

$$(q+p)^n = {}^nC_0\, q^n + {}^nC_1\, q^{n-1}\, p + {}^nC_2\, q^{n-2} p^2 + \ldots + {}^nC_r\, q^{n-r}\, p^r + \ldots + {}^nC_n\, p^n$$

से व्यक्त किया जाता है।

n प्रयासों में r सफलता की प्रायिकता को $P(r)$ या $p(x=r)$ से सूचित किया जाता है तथा इसे वितरण के व्यापक पद के रूप मे व्यक्त किया जाता है।

अतः $P(r) = {}^nC_r\, q^{n-r}\, p^r$

स्पष्ट है n प्रयासों में ${}^nC_0\, q^n$ शून्य सफलता, ${}^nC_1\, q^{n-1}\, p$ एक सफलता, ${}^nC_2\, q^{n-2}\, p^2$ दो सफलता आदि को सूचित करता है।

अनुमानित बारंबारता : इसी तरह यदि n प्रयासों को N बार दोहराया जाए या एक साथ घटने वाली n घटनाओं को N बार दुहराया जाए तो r सफलता प्राप्त होने की अनुमानित बारम्बारता

$P(r) = N\, {}^nC_r\, q^{n-r}\, p^r$ से दिया जाता है जो बंटन $N(q+p)^n$ के विस्तार में rवाँ पद है।

द्विपद बंटन सारणी :

$X=r$	0	1	2	3	...	r	...	n
$P(r)$	${}^nC_0\, q^n\, p^0$	${}^nC_1\, q^{n-1}\, p$	${}^nC_2\, q^{n-2}\, p^2$	${}^nC_3\, q^{n-3}\, p^3$	...	${}^nC_r\, q^{n-r}\, p^r$	...	${}^nC_n\, p^n$

19.3 द्विपद बंटन की सीमायें (Limits of Bionomial Distribution) :

द्विपद बंटन का प्रयोग तभी किया जाता है जब

(i) प्रयासों (n) की संख्या परिमित हो

(ii) प्रत्येक प्रयास के दो ही संभव परिणाम सफलता (p) तथा असफलता (q) हो।

(iii) सभी प्रयास स्वतंत्र हों तथा उनके लिए सफलता या असफलता की प्रायिकता स्थिर हो।

19.4 द्विपद बंटन का समानांतर माध्य (Mean of Bionomial Distribution) :

माना सफलता की प्रायिकता p तथा असफलता की प्रायिकता q तथा घटना के घटने की संख्या n है, तो $r = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ सफलताओं की प्रायिकता का योग

$$(q+p)^n = q^n + {}^nC_1\, q^{n-1}\, p + {}^nC_2\, q^{n-2}\, p^2 + {}^nC_3\, q^{n-3}\, p^3 + \ldots + {}^nC_r\, q^{n-r}\, p^r + \ldots + p^n \quad \ldots(1)$$

अब द्विपद बंटन का समानांतर माध्य $= \dfrac{\sum_{r=0}^{n} fr}{\Sigma f}$ ...(2)

अतः (1) से

सफलता (r)	0	1	2	3	... n
आवृत्ति (f)	q^n	$n\, q^{n-1}\, p$	$\frac{n(n-1)}{2} q^{n-2}\, p^2$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} q^{n-3}\, p^3$	p^n
गुणन (fr)	0	$n\, q^{n-1}\, p$	$n(n-1)\, q^{n-2}\, p^2$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2} q^{n-3}\, p^3$	$n\, p^n$

$$\Sigma(fr) = n\, q^{n-1}\, p + n(n-1)\, q^{n-2}\, p^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} q^{n-3}\, p^3 + \ldots + np^n$$

$$= np\left[q^{n-1} + \frac{n-1}{1!} q^{n-2}\, p + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} q^{n-3}\, p^2 + \ldots + p^{n-1}\right]$$

www.polytechnicpdf.com

$$= np(q+p)^{n-1} = np(1)^{n-1} = np \qquad [\because q+p=1]$$

तथा $$\Sigma f = q^n + nq^{n-1}p + \frac{n(n-1)}{2!}q^{n-2}p^2 + \ldots + p^n$$

$$= (q+p)^n = 1 \qquad [\because q+p=1]$$

अतः (2) से माध्य $\mu = \dfrac{\Sigma(fr)}{\Sigma f} = \dfrac{np}{1} = np$

19.5 द्विपद बंटन का मानक विचलन (Standard Deviation of Binomial Distribution)

सूत्र से मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma fr^2}{\Sigma f} - \left(\dfrac{\Sigma fr}{\Sigma f}\right)^2}$

पुनः द्विपद बंटन के लिए $\Sigma f = 1, \Sigma fr = np$

जहाँ r (सफलता) है।

अब निम्न सारणी से

सफलता (r)	0	1	2	3	... n
आवृत्ति (f)	q^n	$nq^{n-1}p$	$\frac{n(n-1)}{2}q^{n-2}p^2$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}q^{n-3}p^3$	p^n
गुणन (fr^2)	0	$nq^{n-1}p$	$2n(n-1)q^{n-2}p^2$	$\frac{3n(n-1)(n-2)}{2}q^{n-3}p^3$	n^2p^n

अब $$\Sigma fr^2 = 0 + nq^{n-1}p + 2n(n-1)q^{n-2}p^2 + \frac{3n(n-1)(n-2)}{2}q^{n-3}p^3 + \ldots + n^2p^n$$

$$= np\left[q^{n-1} + \frac{2(n-1)}{1!}q^{n-2}p + \frac{3(n-1)(n-2)}{2!}q^{n-3}p^2 + \ldots + np^{n-1}\right]$$

$$= np\left[q^{n-1} + \frac{(n-1)}{1!}q^{n-2}p + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}q^{n-3}p^2 + \ldots + p^{n-1}\right.$$
$$\left. + \frac{(n-1)}{1!}q^{n-2}p + \frac{2(n-1)(n-2)}{2!}q^{n-3}p^2 + \ldots (n-1)p^{n-1}\right]$$

$$= np\left[q^{n-1} + (n-1)q^{n-2}p + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}q^{n-3}p^2 + \ldots + p^{n-1}\right.$$
$$\left. - (n-1)p\{q^{n-2} + (n-2)q^{n-3}p + \frac{(n-2)(n-3)}{2!}q^{n-4}p^2 + \ldots + p^{n-2}\}\right]$$

$= np[(q+p)^{n-1} + (n-1)p(q+p)^{n-2}]$ [द्विपद विस्तार से]

$= np[1 + (n-1)p]$ [$\because p+q=1$]

$= np[np + (1-p)] = np[np+q]$ [$\because p+q=1 \Rightarrow q = 1-p$]

$= n^2p^2 + npq$

(1) में $\Sigma fr = np, \Sigma f = 1$ तथा $\Sigma fr^2 = n^2p^2 + npq$ रखने पर

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2p^2 + npq}{1} - \left(\frac{np}{1}\right)^2}$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \sqrt{n^2p^2 + npq - n^2p^2}$$

$$= \sqrt{npq}$$

अत: द्विपद बंटन का मानक विचलन $\sigma = \sqrt{npq}$

नोट :

- विचरण (Variance) $= \sigma^2 = npq$

प्रमुख सूत्र (Important Formulae)

(1) यदि p सफलता की प्रायिकता, q असफलता की प्रायिकता हो, तो

1. प्रायिकता बंटन $= (q+p)^n$
2. r सफलताओं की प्रायिकता $= {}^nC_r\, q^{n-r}\, p^r$

(2) यदि n सिक्कों को N बार उछाला जाए अथवा एक साथ घटने वाली n घटनायें N बार दुहराई जाए तो

(i) प्रायिकता बंटन $= N\,(q+p)^n$

(ii) r सफलताओं की प्रायिकता $= N\ {}^nC_r\, q^{n-r}\, p^r$

(3) द्विपद बंटन का (i) समानांतर माध्य $\mu = np$

(ii) विचरण (Variance) $\sigma^2 = npq$

(iii) मानक विचलन $\sigma = \sqrt{npq}$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. एक सिक्के को 12 बार उछाला जाता है। (1) 4 शीर्ष आने की प्रायिकता बतायें। अधिक से अधिक 4 शीर्ष आने की प्रायिकता बतायें। **[1994, 2011, 15]**

हल : एक सिक्के को उछालने पर शीर्ष आने की प्रायिकता $p = \frac{1}{2}$, शीर्ष न आने की प्रायिकता $q = \frac{1}{2}$

तथा $n = 12$

अब $n = 12,\ p = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2}$

अत: द्विपद बंटन $= (q+p)^n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{12}$

(i) 4 शीर्ष आने की प्रायिकता $= {}^{12}C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^{12-4} \left(\frac{1}{2}\right)^4$

[सूत्र $P(r) = {}^nC_r\, q^{n-r}\, p^r$ में $r = 4$ रखने पर]

$$= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{495}{4096}$$ उत्तर

(ii) अधिकतम 4 शीर्ष प्राप्त करने का अर्थ है कि हमें शून्य शीर्ष (अर्थात् 4 पूँछ), 1 शीर्ष, 2 शीर्ष, 3 शीर्ष तथा 4 शीर्ष प्राप्त हो सकते हैं। अत: प्रायिकता इन सफलताओं की प्रायिकता का योग होगी।

www.polytechnicpdf.com

अब सूत्र $p(r) = {}^nC_r\, q^{n-r}\, p^r$ में $r = 0, 1, 2, 3, 4$ रखने पर

$P(r) =$ शून्य शीर्ष की प्रायिकता $= {}^{12}C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{2^{12}} \times 1 = \frac{1}{4096}$

$P(1) = 1$ शीर्ष आने की प्रायिकता $= {}^{12}C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 12 \times \frac{1}{4096} = \frac{12}{4096}$

$P(2) = 2$ शीर्ष आने की प्रायिकता $= {}^{12}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{12 \times 11}{2 \times 1} \times \frac{1}{4096} = \frac{66}{4096}$

$P(3) = 3$ शीर्ष आने की प्रायिकता $= {}^{12}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{4096} = \frac{220}{4096}$

तथा $P(4) = 4$ शीर्ष आने की प्रायिकता $= {}^{12}C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \times \frac{1}{4096} = \frac{495}{4096}$

अभीष्ट प्रायिकता $p(r \le 4) = P(r \le 4) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4)$

$$= \frac{1}{4096} + \frac{12}{4096} + \frac{66}{4096} + \frac{220}{4096} + \frac{495}{4096} = \frac{794}{4096}$$

$$= \frac{397}{2048} = 0.194$$

उत्तर

उदाहरण 2. पासों का एक युग्म चार बार फेंका जाता है। यदि दोनों पासों पर एक ही संख्या के आने को सफलता माना जाये तो 2 सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिये। **[B.T.E., U.P. 1990]**

हल : प्रतिदर्श समष्टि में अवयवों की संख्या $= 6^2 = 36$

दोनों पासों पर एक ही संख्या, अर्थात् 11, 22, 33, 44, 55 तथा 66 आने की स्थितियाँ $= 6$

अतः सफलता की प्रायिकता $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ तथा असफलता की प्रायिकता $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

तथा $n = 4$

अतः 2 सफलताओं की प्रायिकता $(r = 2)$

$$P(2) = {}^nC_r \cdot q^{n-r}\, p^r = {}^4C_2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 6 \cdot \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{36} = \mathbf{\frac{25}{216}}$$

उत्तर

उदाहरण 3. यदि प्रत्येक 10 आने वाले जहजों में एक क्षतिग्रस्त आता है, तब 5 आने वाले जहाजों में 4 सुरक्षित आयेंगे, इसकी प्रायिकता ज्ञात करो। **[B.T.E., U.P. 1997]**

हल : जहाज के क्षतिग्रस्त होने की प्रायिकता, $q = \frac{1}{10}$

तथा जहाज के क्षतिग्रस्त न होने की प्रायिकता $p = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

अतः द्विपद बंटन $= \left(\frac{1}{10} + \frac{9}{10}\right)^5$

5 आने वाले जहाजों में 4 सुरक्षित आयेंगे इसकी प्रायिकता $P(4) = {}^5C_4\, (q)^{5-4}\, (p)^4$

$[\because P(r) = {}^nC_r\, q^{n-r} p^r]$

www.polytechnic-pt.com

$$= {}^5C_4 \left(\frac{1}{10}\right)^1 \left(\frac{9}{10}\right)^4 = 5 \cdot \frac{(9)^4}{(10)^4 \cdot 10} = \frac{6561}{20,000} = \mathbf{0.32805}$$ उत्तर

उदाहरण 4. यदि एक मशीन द्वारा निर्मित बोल्टस (Bolts) में 10 प्रतिशत खराब है, प्रायिकता निकालिये जब 5 बोल्ट्स यादृच्छिक रूप से चुनने पर (i) कोई नहीं (ii) एक बोल्ट खराब हो (iii) अधिकतम एक बोल्ट खराब हो।

[B.T.E., U.P. 2000]

हल : प्रश्नानुसार बोल्ट के त्रुटिपूर्ण होने की प्रायिकता $p = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$, $n = 5$

$\therefore$ किसी बोल्ट के त्रुटिपूर्ण न होने की प्रायिकता $q = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

अत: प्रायिकता का द्विपद बंटन, $(q+p)^n = \left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right)^5$ है। [$\because n = 5$]

निकाले गए बोल्टों में

(i) किसी भी बोल्ट के त्रुटिपूर्ण न होने की प्रायिकता, $(r = 0) = {}^5C_0\, q^{5-0}\, p^0$

$$= 1 \times \left(\frac{9}{10}\right)^5 \times \left(\frac{1}{10}\right)^0 = \left(\frac{9}{10}\right)^5 = \frac{59,049}{1,00,000}$$ [सूत्र ${}^nC_r\, q^{n-r}\, p^r$ से] उत्तर

(ii) एक बोल्ट के त्रुटिपूर्ण होने की प्रायिकता,

$$= {}^5C_1\, q^{5-1}\, p^1 = (5)\left(\frac{9}{10}\right)^4 \left(\frac{1}{10}\right)^1 = \frac{32805}{100000}$$ उत्तर

(iii) अधिक से अधिक एक बोल्ट त्रुटिपूर्ण होने की प्रायिकता $= P(0 \text{ या } 1) = P(0) + P(1)$

$$= \frac{59049}{1,00,000} + \frac{32805}{1,00,000} = \mathbf{\frac{91854}{1,00,000}}$$ उत्तर

उदाहरण 5. एक कम्पनी द्वारा बनाये गये कलम के दोषपूर्ण होने की प्रायिकता $\frac{1}{10}$ है।

यदि ऐसे 12 कलम बनाये जाते हैं तो प्रायिकता ज्ञात कीजिये :

(i) ठीक दो कलम दोषपूर्ण होंगे।

(ii) कम से कम दो कलम दोषपूर्ण होंगे।

(iii) कोई भी कलम दोषपूर्ण नहीं होगा। **[B.T.E., U.P. 2002]**

हल : प्रश्न से दोषपूर्ण कलम होने की प्रायिकता, $p = \frac{1}{10}$

$\therefore$ दोषपूर्ण कलम न होने की प्रायिकता $q = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

यहाँ $n = 12$ $\therefore$ द्विपद बंटन $= \left(\frac{9}{10} - \frac{1}{20}\right)^{12}$

द्विपद बंटन के सूत्र $P(r) = {}^nC_r \cdot q^{n-r} \cdot p^r$ से,

(i) ठीक दो कलम दोषपूर्ण होने की प्रायिकता, (यहाँ $r = 2$)

$$P(2) = {}^{12}C_2 \left(\frac{9}{10}\right)^{12-2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 = {}^{12}C_2 \left(\frac{9}{10}\right)^{10} \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \mathbf{0.2301}$$ उत्तर

www.polytechnicpdf.com

(ii) कम से कम दो कलम दोषपूर्ण होने की प्रायिकता,

$= 1 -$ (कोई कलम दोषपूर्ण नहीं या एक कलम दोषपूर्ण होने की प्रायिकता) $= 1 - [P(0) + P(1)]$

$$= 1 - \left\{ {}^{12}C_0 \left(\frac{9}{10}\right)^{12} \left(\frac{1}{10}\right)^0 - {}^{12}C_1 \left(\frac{9}{10}\right)^{12-1} \left(\frac{1}{10}\right)^1 \right\} = 1 - \left[\left(\frac{9}{10}\right)^{12} + 12 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{11} \times \frac{1}{10}\right]$$

$$= 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{11} \left[\frac{9}{10} + \frac{12}{10}\right] = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^{11} \frac{21}{10}$$

$= \mathbf{0.3412}$ उत्तर

(iii) कोई भी कलम दोषपूर्ण न होने की प्रायिकता, (यहाँ $r = 0$)

$$P(0) = {}^{12}C_0 \left(\frac{9}{10}\right)^{12} \left(\frac{1}{10}\right)^0 = \mathbf{0.2833}$$ उत्तर

उदाहरण 6. 6 पांसों को एक साथ 729 बार उछाला गया। आप कितनी बार आशा करेंगे कि 5 या 6 अंक कम से कम तीन पांसों पर ऊपर आयेंगे ? **[B. E., U.P. 2009, 2012, 2013]**

हल : (i) एक पांसे पर 5 या 6 अंक आने की प्रायिकता $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore \quad q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \qquad [\because p + q = 1]$

$\therefore$ द्विपद बारंबारता बंटन $= N(q + p)^n$

$$= 729\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^6 \qquad \left[\because n = 6, N = 729, p = \frac{1}{2}\right]$$

अत: कम से कम तीन पांसों पर 5 या 6 अंक आने की बारम्बारता $= P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$

$$= 729\left[{}^6C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 + {}^6C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + {}^6C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + {}^6C_6 \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^0\right]$$

$[\because P(r) = {}^nC_r \cdot q^{n-r} p^r]$

$$= 729\left\{20\left(\frac{1}{27}\right)\left(\frac{8}{27}\right)\right\} + 729\left\{15\left(\frac{1}{81}\right)\left(\frac{4}{9}\right)\right\} + 729\left\{6\left(\frac{1}{243}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^1\right\} + 729\left\{1\left(\frac{1}{729}\right)(1)\right\}$$

$= 160 + 60 + 12 + 1 = \mathbf{233}$ उत्तर

उदाहरण 7. प्रत्येक चार बच्चों वाले 8000 परिवारों में से कितने परिवार संभावित होंगे जिनमें कि (i) कोई लड़की नहीं है (ii) अधिक से अधिक दो लड़कियाँ हैं यह मानते हुए कि लड़कों एवं लड़कियों की प्रायिकतायें समान हैं। **[2013]**

हल : प्रश्नानुसार, लड़के एवं लड़की होने की प्रायिकता समान है।

माना लड़की होने (सफलता) की प्रायिकता $p = \frac{1}{2}$

$\therefore$ लड़के होने की (असफलता) प्रायिकता $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

अब यहाँ $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}, n = 4, N = 8000 \quad \therefore$ द्विपद बारम्बारता बंटन $= N(q + p)^n = 8000\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^4$

www.polytechnicpdf.com

अब (i) P (कोई लड़की नहीं) $= P(0) = {}^4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{4-0} \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{2^4} \times 1 = \frac{1}{16}$

$\therefore$ 8000 परिवारों में अभीष्ट प्रायिकता $= 8000 \times \frac{1}{16} = 500$ उत्तर

(ii) P (अधिक से अधिक दो लड़की)

$= P$ (कोई लड़की नहीं) $+ P$ (1 लड़की) $+ P$ (2 लड़की)

$= P(0) + P(1) + P(2)$

$= {}^4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{4-0}\left(\frac{1}{2}\right)^0 + {}^4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1}\left(\frac{1}{2}\right) + {}^4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= 1 \times \frac{1}{2^4} \times 1 + 4 \times \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{2} + \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$

$\therefore$ 8000 परिवारों के लिए अभीष्ट प्रायिकता $P = 8000 \times \frac{11}{16} = 5500$ उत्तर

उदाहरण 8. एक परिपूर्ण घनाकार डाइस (Dice) 8 के समूह में काफी बार फेंकी जाती है। 5 या 6 के आने को घटना की सफलता घोषित किया जा यकता है; समूह से कितने अनुपात में 3 बार सफलतायें प्राप्त होंगी ? **[B.T.E., U.P. 1998]**

हल : माना प्रयासों की संख्या N है। डाई के 8 के समूह में फेंका जाना एक समय में 8 डाइस फेंके जाने के समान है।

अत: $n = 8$

यहाँ $p = 5$ या 6 आने की प्रायिकता $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ तथा $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

अत: द्विपद बंटन $= N\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)^8$

$\therefore$ तीन सफलताओं की प्रायिकता $= N \cdot {}^8C_3\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^3$ (यहाँ $r = 3$)

$= N\frac{8!}{5!.3!}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \times \frac{2^5}{3^8}N = \frac{1792}{6561}N$

अभीष्ट प्रतिशत अनुपात $= \frac{\left(\frac{1792}{6561}N\right)}{N} \times 100 = \frac{1792 \times 100}{6561} = 27.31\%$ उत्तर

उदाहरण 9. 60 वर्षीय व्यक्ति के 70 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता 0.65 है। 10 व्यक्तियों में जो अब 60 वर्षीय हैं कम से कम 8 के 70 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता क्या होगी ? **[B.T.E., U.P., 1999]**

हल : प्रश्नानुसार, किसी व्यक्ति के 70 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता,

$$p = 0.65 = \frac{65}{100} = \frac{13}{20} \quad ...(1)$$

अत: किसी व्यक्ति के 70 वर्ष तक जीवित न रहने की प्रायिकता,

$$q = 1 - p = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20} \quad ...(2)$$

व्यक्तियों की संख्या, $n = 10$

www.polytechnicpdf.com

अत: कम से कम 8 व्यक्तियों के 70 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता

$$= p(8) + p(9) + p(10) = {}^{10}C_8 \left(\frac{7}{20}\right)^2 \left(\frac{13}{20}\right)^8 + {}^{10}C_9 \left(\frac{7}{20}\right)^1 \left(\frac{13}{20}\right)^9 + {}^{10}C_{10} \left(\frac{9}{20}\right)^0 \left(\frac{13}{20}\right)^{10}$$

$$= \frac{10 \times 9}{2 \times 1} \times \frac{7^2}{20^2} \times \frac{13^8}{20^8} + 10 \times \left(\frac{7}{20}\right) \times \frac{13^9}{20^9} + \frac{13^{10}}{20^{10}}$$

$$= 45 \times \frac{7^2 \times 13^8}{20^{10}} + \frac{10 \times 7 \times 13^9}{20^{10}} + \frac{13^{10}}{20^{10}}$$

$$= 0.1756 + 0.0725 + 0.0135$$

$$= 0.2616$$ उत्तर

उदाहरण 10. तीन सिक्के उछालने पर शीर्षों की संख्या पर आधारित प्रायिकता बंटन ज्ञात करें।

हल : यहाँ $p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}, n = 3$ $\therefore$ प्रायिकता बंटन $= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^3$

अत: $p(0) = {}^3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{8} \times 1 = \frac{1}{8}$ = शून्य शीर्ष की प्रायिकता

$p(1) = {}^3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ = 1 शीर्ष की प्रायिकता

$p(2) = {}^3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$ = 2 शीर्ष की प्रायिकता

$p(3) = {}^3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{3-3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 \times 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$ $[\because p(r) = {}^nC_r\, q^{n-r}\, p^r]$

अत: अभीष्ट बारम्बारता बंटन

r	0	1	2	3
$p(r)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

उदाहरण 11. एक नगर की 20% जनसंख्या साक्षर है, जिससे साक्षर होने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है। यदि 100 अन्वेषकों का दल दस-दस व्यक्तियों का प्रतिदर्श लेकर परीक्षण करे तो उनकी रिपोर्ट के अनुसार 3 अथवा उससे कम व्यक्तियों के साक्षर होने की प्रायिकता क्या होगी ?

हल : यहाँ $p = \frac{1}{5} \therefore q = 1 - p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}, n = 10$

तीन अथवा उससे कम व्यक्तियों के साक्षर होने की प्रायिकता

P (3 या उससे कम)

$= P$ (0 या 1 या 2 या 3) $= P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$

$$= {}^{10}C_0 \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \left(\frac{1}{5}\right)^0 + {}^{10}C_1 \left(\frac{4}{5}\right)^9 \left(\frac{1}{5}\right)^1 + {}^{10}C_2 \left(\frac{4}{5}\right)^8 \left(\frac{1}{5}\right)^2 + {}^{10}C_3 \left(\frac{4}{5}\right)^7 \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{10} + \frac{10}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{9} + \frac{45}{25}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{8} + \frac{120}{125}\left(\frac{4}{5}\right)^{7}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{7}\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^{3} + 2\left(\frac{4}{5}\right)^{2} - \frac{45}{25}\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{120}{125}\right\}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{7}[(0.8)^3 + 2(0.8)^2 + 1.8(0.8) + 0.96]$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{7}[0.512 + 1.28 + 1.44 + 0.96]$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{7} \times 4.192$$

$\therefore$ अन्वेषकों की अभीष्ट संख्या $= \left(\frac{4}{5}\right)^{7} \times 4.192 \times 100 = 87.91$ (लगभग)

$= 88$ (लगभग) उत्तर

उदाहरण 12. एक द्विपद बंटन में समान्तर माध्य 4 तथा मानक विचलन $\sqrt{3}$ है। 0, 3 तथा 5 सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्न से, समानान्तर माध्य $\mu = np = 4$ तथा मानक विचलन $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{3} \Rightarrow npq = 3$

$\therefore \frac{npq}{np} = \frac{3}{4} \Rightarrow q = \frac{3}{4} \Rightarrow p = 1 - q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

पुनः $n = \frac{np}{p} = \frac{4}{1/4} = 16$

0 सफलता की प्रायिकता $= {}^{16}C_0\left(\frac{3}{4}\right)^{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{0} = \left(\frac{3}{4}\right)^{16}$

3 सफलता की प्रायिकता $= {}^{16}C_3\left(\frac{3}{4}\right)^{13}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}$

5 सफलता की प्रायिकता $= {}^{16}C_5\left(\frac{3}{4}\right)^{11}\left(\frac{1}{4}\right)^{5}$ [$\because$ r सफलता की प्रायिकता ${}^{n}C_r\, q^{n-r}\, p^r$ से] उत्तर

उदाहरण 13. एक त्रुटिपूर्ण बोल्ट की प्रायिकता 0.1 है तो 400 बोल्ट में त्रुटिपूर्ण बोल्टों के लिए (i) माध्य (ii) मानक विचलन की गणना करें। **[1987]**

हल : प्रश्न से, बोल्टों की संख्या $n = 400$

अतः प्रायिकता $p = 0.1$ तथा $q = 1 - p = 0.9$

(i) $\therefore$ माध्य $\mu = np = 400 \times 0.1 = 40$ उत्तर

(ii) मानक विचलन $\sqrt{npq} = \sqrt{400 \times 0.1 \times 0.9}$

$= 20 \times 0.3 = 6$ उत्तर

उदाहरण 14. द्विपद बंटन $\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right)^{10}$ के लिए माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात करें :

www.polytechnicpdf.com

हल : यहाँ $q=\frac{1}{5}, p=\frac{4}{5}, n=10$ $\therefore$ माध्य $=np=10\times\frac{4}{5}=8$

मानक विचलन $=\sqrt{npq}=\sqrt{10\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{40}}{5}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

उदाहरण 15. किसी द्विपद बंटन के लिए कथन की सत्यता जाँचें

(i) माध्य 5 तथा मानक विचलन 3 है। [2001]

(ii) माध्य 2 तथा मानक विचलन 5 है। [1993]

हल : किसी द्विपद बंटन के लिए, माध्य, $\mu=np$, मानक विचलन $=\sqrt{npq}\Rightarrow\sigma^2=npq$

(1) यहाँ $\mu=np=5$ ...(1)

तथा $\sigma=3\Rightarrow\sigma^2=9\Rightarrow npq=9$ ...(2)

$\frac{npq}{np}=\frac{9}{5}=1.8$ [(2) में (1) से भाग देने पर]

$\Rightarrow$ $q=1.8>1$ जो असम्भव है, क्योंकि प्रायिकता 1 से अधिक नहीं हो सकती। अत: कथन असत्य है।

(ii) यहाँ माध्य $np=2$ तथा मानक विचलन $\sqrt{npq}=5\Rightarrow npq=25$

$\therefore$ $\frac{npq}{np}=\frac{25}{2}=12.5$

$\Rightarrow$ $q=12.5>1$, जो असंभव है क्योंकि प्रायिकता 1 से बड़ी नहीं हो सकती। अत: कथन असत्य है।

उदाहरण 16. यदि किसी चर के मान क्रमश: $0, 1, 2, 3, \ldots, n$ है और बारम्बारता के मान क्रमश: द्विपद गुणांकों $1, {}^nC_1, {}^nC_2, {}^nC_3, \ldots, {}^nC_n$ के अलग-अलग अनुपाती है तो सिद्ध करें कि माध्य $\frac{n}{2}$ है। [1990]

हल :

चर (r)	0	1	2	3	...n
बारम्बारता (f)	$1={}^nC_0$	${}^nC_1$	${}^nC_2$	${}^nC_3$	${}^nC_n=1$
गुणनं (fr)	0	${}^nC_1$	$2\,{}^nC_2$	$3\,{}^nC_3$	n

अब $\Sigma f={}^nC_0+{}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+\ldots+{}^nC_n=(1+1)^n=2^n$ ...(1)

तथा $\Sigma fr=0+{}^nC_1+2\,{}^nC_2+3\,{}^nC_3+n\times1$

$=n+2\frac{n(n-1)}{2!}+3\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\ldots+n$

$=n\left[1+\frac{(n-1)}{1!}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}+\ldots+1\right]$

$=n(1+1)^{n-1}=n\times2^{n-1}$ ...(2)

अब माध्य $=\frac{\Sigma fr}{\Sigma f}=\frac{n\,2^{n-1}}{2^n}$ [(1) तथा (2) से]

$=\frac{n\times2^{n-1}}{2^{n-1}\times2}=\frac{n}{2}$ सिद्ध हुआ।

www.polytechnicpdf.com

प्रमुख सूत्र (Important Formulae)

(1) यदि सफलता की प्रायिकता p तथा असफलता की प्रायिकता q हो तो द्विपद बंटन $= (q+p)^n$

तथा r सफलताओं की प्रायिकता $= {}^nC_r\, q^{n-r} p^r$

(2) द्विपद बारम्बारता बंटन : यदि n परिक्षणों की पुनरावृत्ति N बार की जाए तो r सफलताओं की बारम्बारता

$$= N\ {}^nC_r\, q^{n-r} p^r$$

तथा द्विपद बारम्बारता बंटन $= N(q+p)^n$

(3) द्विपद बंटन का (i) समानांतर माध्य

$$m = np$$

(ii) मानक विचलन $\sigma = \sqrt{npq}$

(iii) विचरण (Variance) $\sigma^2 = npq$

प्रश्नावली 19.1

1. यदि एक प्रयास में सफलता की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है, तो 4 प्रयासों में 2 सफलता प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात करें।

2. एक सिक्के को 6 बार उछाला गया तो 4 शीर्ष प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात करें।

3. एक पासा 8 बार फेंका जाता है तथा 3 आने की घटना को सफलता माना जाता है, तो निम्न की प्रायिकता ज्ञात करें :
(i) 2 सफलता (ii) कम से कम 7 सफलता (iii) कम से कम एक सफलता

4. 8 सिक्कों को एक साथ उछाला गया है। सिद्ध करो कि कम से कम 6 शीर्ष प्राप्त होने की प्रायिकता $\frac{37}{256}$ है। **[1995]**

5. यदि प्रत्येक 10 आने वाले जहाजों में एक क्षतिग्रस्त आता है तब 5 आने वाले जहाजों में कम से कम 4 सुरक्षित आयेंगे, उसकी प्रायिकता ज्ञात करें।
[संकेत : $p = \frac{9}{10}, q = \frac{1}{10}, p\,(4 \text{ या } 5) = {}^5C_4\, p^4\, q^{5-4} + {}^5C_5 \cdot p^5\, q^0$]

6. किसी फैक्ट्री में बनाये गए 10% पेंच दोषपूर्ण पाए जाते हैं। प्रायिकता निकालिए जब 10 पेंच यादृच्छिक रूप से चुनने पर 2 पेंच दोषपूर्ण होंगे।
[संकेत : $p = \frac{1}{10}, q = \frac{9}{10}, n = 10, r = 2$]

7. टार्च बैट्रीज के एक बड़े समूह में 3 प्रतिशत बैट्री दोषपूर्ण हैं। यदि 5 बैट्रीज के प्रतिदर्श को यादृच्छया निकाल लिया जाए तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि
(i) पाँचों बैट्रीज दोषपूर्ण हों (ii) 5 में से 2 दोषपूर्ण हों।
[संकेत : $p = \frac{3}{100}, q = \frac{97}{100}, n = 5$]

8. एक खेल में A के जीतने की प्रायिकता 2 : 3 है। A द्वारा 5 खेलों में से (i) 3 खेलों में जीतने की प्रायिकता (ii) कम से कम तीन खेलों में जीतने की प्रायिकता ज्ञात करें।

www.polytechnicpdf.com

9. प्रत्येक 4 बच्चों वाले 800 परिवारों में से कितने परिवार संभावित होंगे जिनमें (i) 2 लड़के तथा 2 लड़कियाँ (ii) कम कम एक लड़का है (iii) कोई लड़का नहीं है (iv) अधिक से अधिक 2 लड़कियाँ हैं। [2008, 2010

10. एक घनाकार पासा 6 के समूह में काफी बार फेंकी जाती है। 3 या 4 का अंक आने की घटना को सफलता घोषित किया ग है। समूहों के कितने अनुपात में 4 सफलताओं की आशा की जा सकती है?

11. 7 सिक्कों को 256 बार उछाला जाए तो कितनी बार (i) तीन सिक्कों पर (पूँछ) (tail) (ii) सभी सिक्कों पर पूँछ (ta आएगा?

[संकेत : $N = 256, n = 7, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}$]

12. जानवरों में एक विशेष रोग के फैलने की संभावना 20% थी। 6 जानवरों को पहले से ही रोग से संबंधित टीका लगा देने यह पाया गया कि उनमें से किसी भी जानवर को रोग नहीं लगा। किए गए परीक्षण की प्रायिकता ज्ञात करें।

[संकेत : $p = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}, q = \frac{4}{5}, n = 6, p(0) = ?$]

13. एक शहर में संक्रामक रोग फैल जाने से वहाँ के 40% बच्चों के रोगी हो जाने की सम्भावा है। 8 बच्चों में से 6 या 6 अधिक रोगी हो जाने की प्रायिकता ज्ञात करें।

[संकेत : $p = \frac{2}{5}, q = \frac{1}{5}$]

14. किसी शहर की आधी जनसंख्या शाकाहारी है अर्थात् किसी व्यक्ति के शाकाहारी होने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है। यदि 1 अन्वेषक दस-दस व्यक्तियों का प्रतिदर्श लेकर परीक्षण करें तो उनकी रिपोर्ट के अनुसार तीन अथवा उससे कम व्यक्तियो शाकाहारी होने की प्रायिकता क्या होगी?

15. एक द्विपद बंटन के लिए माध्य 6 और मानक विचलन $\sqrt{2}$ है, तो द्विपद बंटन ज्ञात करें। [199

16. किसी द्विपद बंटन का माध्य 8 तथा विचरण 9 है। कथन की सत्यता जाँचें।

उत्तरमाला

1. $\frac{25}{216}$ 2. $\frac{15}{64}$ 3. (i) $\frac{28 \times 5^6}{6^8}$ (ii) $\frac{41}{6^8}$ (iii) $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^8$

5. $\frac{7}{5}\left(\frac{9}{10}\right)^4$ 6. $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{10}\right)^9$ 7. (i) $\frac{243}{10^{10}}$ (ii) $\frac{912673}{10^9}$

8. (i) $\frac{144}{625}$ (ii) $\frac{992}{3125}$

9. (i) 300 (ii) 750 (iii) 50 (iv) 550

10. $\frac{20}{243}$ 11. (i) 70 (ii) 2

12. 0.262 13. 0.050 14. $\frac{176}{1024}$ 15. $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^9$ 16. असत्य

www.polytechnicpdf.com

2. प्वॉयसन बंटन (Poisson Distribution)

19.6 प्वॉयसन बंटन (Poisson Distribution)

प्वॉयसन बंटन द्विपद बंटन का विशिष्ट सीमान्त रूप है। जब n काफी बड़ा तथा p (या q) का मान काफी छोटा हो तो द्विपद बंटन की सहायता से प्रायिकता की गणना कठिन हो जाती है।

अतः यदि $n \to \infty$ तथा $p \to 0$, परन्तु माध्य $m = np$ परिमित संख्या हो, तो किसी घटना की सफलता या असफलता का असंतत प्रायिकता बंटन

$$P(r) = \frac{m^r e^{-m}}{r!}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{जहाँ } e = 2.7183 \text{ लगभग तथा } m = np \qquad \ldots(1)$$

को प्वॉयसन बंटन कहते हैं।

स्पष्ट है प्वॉयसन बंटन एक प्राचल (Parameter) m पर निर्भर है।

समीकरण (1) में $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$ आदि रखकर विभिन्न सफलताओं की प्रायिकता निम्नवत् निकाला जाता है :

r	0	1	2	3	...
$P(r)$	$\frac{m^0 e^{-m}}{0!}$	$\frac{m e^{-m}}{1!}$	$\frac{m^2 e^{-m}}{2!}$	$\frac{m^3 e^{-m}}{3!}$	...

19.6.1 प्वॉयसन बंटन का माध्य :

(i) समानांतर माध्य $= m = np$

(ii) मानक विचलन $= \sigma = \sqrt{m} = \sqrt{np}$

(iii) विचरण $= \sigma^2 = m = np$

19.6.2 अनुमानित बारम्बारता

यदि कोई प्रयोग N बार दुहराया जाए तो अनुमानित बारम्बारता $= N \dfrac{m^r e^{-m}}{r!}$

19.6.3 प्वॉयसन बंटन का माध्य एवं मानक विचलन (Mean and Standard Deviation of Poisson's Distribution)

(i) प्वॉयसन बंटन का माध्य (Mean of Poisson's Distribution)

$$\text{माध्य} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p_i = np = \sum_{i=0}^{\infty} r \frac{m^r e^{-m}}{r!} \qquad \left[\text{प्वॉयसन बंटन के लिए } x_i = r, p_r = \frac{m^r e^{-m}}{r!}\right]$$

$$= 0 e^{-m} + 1 . \frac{m e^{-m}}{1!} + \frac{2 m^2 e^{-m}}{2!} + \frac{3 m^3 e^{-m}}{3!} + \ldots$$

$$= m e^{-m}\left[1 + \frac{m}{1!} + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} \ldots\right] = m e^{-m} . e^m \qquad \left[\because e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$= m e^0 = m$$

$\therefore \quad m = np$

(ii) प्वॉयसन बंटन का मानक विचलन (Standard Deviation of Poisson Distribution)

सीमान्त अवस्था में जब $p \to 0, q \to 1$

$\therefore$ मानक विचलन $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{np . 1} = \sqrt{np} = \sqrt{m}$

www.polytechnicpdf.com

तथा विचरण $\sigma^2 = np = m$

नोट :

- प्वॉयसन बंटन के माध्य तथा विचरण बराबर होते हैं।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. 200 फ्यूज के बक्से में से अधिक से अधिक 5 फ्यूज खराब होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। अनुभव से ज्ञात होता है कि 2% फ्यूज खराब हैं। $e^{-4} = 0.0183$ दिया है। **[2008, 2013]**

हल : यहाँ $p = 2\% = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}, \quad n = 200$

$\therefore \qquad m = np = 200 \times \frac{1}{50} = 4$

अब $$p(r) = \frac{m^r e^{-m}}{r!} \qquad \ldots(1)$$

P (अधिक से अधिक 5 फ्यूज खराब होने की प्रायिकता) $= P(\leq 5)$

$$= P(0) + P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$$

$$P(r) = \frac{4^0 e^{-4}}{0!} + \frac{4^1 e^{-4}}{1!} + \frac{4^2 e^{-4}}{2!} + \frac{4^3 e^{-4}}{3!} + \frac{4^4 e^{-4}}{4!} + \frac{4^5 e^{-4}}{5!}$$

[(1) में $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ तथा $m = 4$ रखने पर]

$$= e^{-4}\left[1 + 4 + \frac{16}{2} + \frac{64}{6} + \frac{256}{24} + \frac{1024}{120}\right] = 0.0183 \times 42.8668 = 0.7845$$ उत्तर

उदाहरण 2. यदि किसी इंजेक्शन से खराब प्रतिक्रिया की संभाविता 0.001 है, तो 2000 व्यक्तियों में से 2 से अधिक खराब प्रतिक्रिया होने का संयोग ज्ञात करें।

$[e^{-2} = 0.13534]$ **[2011]**

हल : प्रश्न से, $p = 0.001, n = 2000 \qquad \therefore \qquad m = np = 2000 \times 0.001 = 2$

$P(r > 2) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2)]$ [दो से अधिक खराब होने की प्रायिकता] ...(1)

$$= 1 - \left[\frac{2^0 e^{-2}}{0!} + \frac{2^1 e^{-2}}{1!} + \frac{2^2 e^{-2}}{2!}\right]$$

[सूत्र $P(r) = \frac{m^r e^{-m}}{r!}$ से (1) में $r = 0, 1$ तथा $m = 2$ रखने पर]

$$= 1 - e^{-2}[1 + 2 + 2]$$

$$= 1 - 5e^{-2} = 1 - 5 \times 0.13534$$

$$= 1 - 0.675 = 0.325$$ उत्तर

उदाहरण 3. एक बिजली बल्ब के कारखाने में एक प्रतिशत बल्ब खराब निकलते हैं। प्रायिकता ज्ञात करें कि 1000 बल्बों के यादृच्छिक प्रतिदर्श में से 4 बल्ब खराब निकलते हैं।

$e^{-10} = 0.000045$ **[2012]**

www.polytechnicpdf.com

हल : यहाँ $p = 1\% = \frac{1}{100}, n = 1000$ $\therefore$ $m = np = 1000 \times \frac{1}{100} = 10$

अब 4 बल्ब खराब होने की प्रायिकता $P(4) = \frac{10^4 e^{-10}}{4!}$ [सूत्र $P(r) = \frac{m^r e^{-m}}{r!}$]

$$= \frac{10^4 \times 0.000045}{24} = \frac{0.45}{24} = \frac{45}{2400} = 0.01875$$ उत्तर

उदाहरण 4. एक बीमा कंपनी ने पाया कि जनसंख्या का 0.01% किसी निश्चित दुर्घटना का शिकार होता है। जनसंख्या से कंपनी के 1000 बीमा धारक यादृच्छया चुने जाते हैं। अगले वर्ष ज्यादा-से-ज्यादा दो बीमा-धारकों के दुर्घटनाग्रस्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

$(e^{-0.1} = 0.90481)$ [2001]

हल : प्रश्न से, $p = 0.01\% = \frac{0.01}{100} = \frac{1}{10,000}$; $n = 1000$ $\therefore$ $m = np = 1000 \times \frac{1}{10,000} = \frac{1}{10} = 0.1$

अब P (ज्यादा-से-ज्यादा 2) $= P(r \le 2) = P(0) + P(1) + P(2)$

$$= \frac{(0.1)^0 e^{-(0.1)}}{0!} + \frac{(0.1)^1 e^{-(0.1)}}{1!} + \frac{(0.1)^2 e^{-(0.1)}}{2!}$$

$$= e^{-(0.1)}\left[1 + 0.1 + \frac{0.01}{2}\right]$$

$$= \frac{0.90481 \times 2.101}{2} = 0.90481 \times 1.0505$$

$$= 0.9981505 = 0.9998 \text{ लगभग}$$ उत्तर

उदाहरण 5. 2 और 4 सायं के बीच एक कंपनी के स्विच बोर्ड में औसतन प्रति मिनट टेलीफोन पुकारों की संख्या 2.5 है। किसी विशेष मिनट में (i) फोन न आने की प्रायिकता (ii) केवल 3 फोन आने की प्रायिकता ज्ञात करें।

$\bar{e}^2 = 0.13534$; $\bar{e}^{0.5} = 0.60650$

हल : प्रश्न से, प्रति मिन्ट टेलीफोन आने का औसत $= 2.5$ अतः माध्य $m = 2.5$

(i) किसी विशेष मिनट में फोन न आने की प्रायिकता

$P(0) = \frac{(2.5)^0 e^{-2.5}}{0!}$ [$\because$ प्रति मिनट फोन आने की प्रायिकता $P(r) = \frac{m^r e^{-m}}{r!}$]

$$= \frac{1 \times e^{-2} \times e^{-0.5}}{1}$$

$$= 1 \times 0.13534 \times 0.60650 = 0.0821$$ उत्तर

(ii) तीन फोन आने की प्रायिकता $P(3) = \frac{(2.5)^3 e^{-2.5}}{3}$

$$= 15.625 \times 0.13534 \times 0.60650 = 0.2138$$ उत्तर

उदाहरण 6. साइकिल टायर बनाने वाली किसी फैक्ट्री में 500 टायरों में 1 के त्रुटिपूर्ण होने की संभावना है। यदि टायर 10 के समूह (lot) में वितरित होनी है तो प्वॉयसन वितरण का प्रयोग कर 10,000 के समूह में कितने ऐसे लॉट हैं जिनमें (i) कोई त्रुटिपूर्ण नहीं है (ii) एक त्रुटिपूर्ण है (iii) दो त्रुटिपूर्ण हैं, की प्रायिकता ज्ञात करें।

$[e^{-0.02} = 0.9802]$

हल : प्रश्न से $p = \frac{1}{500}, n = 10$ $\therefore$ $m = np = 10 \times \frac{1}{500} = 0.02$

www.polytechnicpdf.com

सूत्र $P(r) = \frac{m^r e^{-m}}{r!}$ से

(i) P (कोई त्रुटिपूर्ण नहीं) $= P(0) = \frac{(.02)^0 e^{-0.02}}{0!} = 1 \times 0.9802 = 0.9802$

अत: त्रुटिपूर्ण लॉटो की संख्या $= 10{,}000 \times 0.9802 = 9802$ लॉट

(ii) P (एक त्रुटिपूर्ण) $= \frac{(0.02)^1 e^{-0.02}}{1!} = 0.02 \times 0.9802 = 0.019604$

$\therefore$ लॉटो की संख्या जिसमे 1 त्रुटिपूर्ण है $= 10{,}000 \times 0.019604 = 196$ लॉट (लगभग)

(iii) P (दो दोषपूर्ण) $= P(2) = \frac{(0.02)^2 e^{-0.02}}{2!} = 0.0004 \times 0.9802 = 0.000019604$

$\therefore$ लॉटों की संख्या जिसमें दो त्रुटिपूर्ण हैं

$= 10{,}000 \times 0.000019604 = 2$ लॉट (लगभग) उत्तर

उदाहरण 7. निम्न आँकड़ों का प्वॉयसन बंटन में आसंजन कीजिए तथा अनुमानित बारम्बारताओं को ज्ञात कीजिए।

मृत्यु	0	1	2	3	4
बारम्बारता	122	60	15	2	1

[2006, 2010]

हल : माध्य निकालने के लिए आँकड़ों को सारणीबद्ध करने पर

चर (x)	बारम्बारता (f)	fx	fx^2
0	122	0	0
1	60	60	60
2	15	30	60
3	02	06	18
4	01	04	16
	$N = \Sigma f = 200$	$\Sigma fx = 100$	$\Sigma fx^2 = 154$

अब माध्य $m = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{100}{200} = 0.5$

मानक विचलन $(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}\right)^2} = \sqrt{\frac{154}{200} - \left(\frac{100}{200}\right)^2} = \sqrt{0.77 - 0.25} = \sqrt{0.52}$

$\therefore$ $\sigma^2 =$ विचरण $= 0.52 = 0.5$ (लगभग)

$\therefore$ $m = \sigma^2$, अत: बंटन प्वॉयसन है।

अब $P(r) = \frac{N m^r e^{-m}}{r!} = \frac{200 \times (0.5)^r \times e^{-0.5}}{r!}$ $[\because N = 200]$

$= \frac{200 \times 0.6065 \times (0.5)^r}{r!}$ $[\because e^{-0.5} = 0.6065]$

अत: $r = 0, 1, 2, 3, 4$ रखने पर

www.polytechnicpdf.com

सूत्र $P(r) = \frac{m^r e^{-m}}{r!}$ से

(i) P (कोई त्रुटिपूर्ण नहीं) $= P(0) = \frac{(.02)^0 e^{-0.02}}{0!} = 1 \times 0.9802 = 0.9802$

अतः त्रुटिपूर्ण लॉटो की संख्या $= 10{,}000 \times 0.9802 = 9802$ लॉट

(ii) P (एक त्रुटिपूर्ण) $= \frac{(0.02)^1 e^{-0.02}}{1!} = 0.02 \times 0.9802 = 0.019604$

$\therefore$ लॉटो की संख्या जिसमे 1 त्रुटिपूर्ण है $= 10{,}000 \times 0.019604 = 196$ लॉट (लगभग)

(iii) P (दो दोषपूर्ण) $= P(2) = \frac{(0.02)^2 e^{-0.02}}{2!} = 0.0004 \times 0.9802 = 0.000019604$

$\therefore$ लॉटों की संख्या जिसमें दो त्रुटिपूर्ण हैं

$= 10{,}000 \times 0.000019604 = 2$ लॉट (लगभग) उत्तर

उदाहरण 7. निम्न आँकड़ों का प्वॉयसन बंटन में आसंजन कीजिए तथा अनुमानित बारम्बारताओं को ज्ञात कीजिए।

मृत्यु	0	1	2	3	4
बारम्बारता	122	60	15	2	1

[2006, 2010]

हल : माध्य निकालने के लिए आँकड़ों को सारणीबद्ध करने पर

चर (x)	बारम्बारता (f)	fx	fx^2
0	122	0	0
1	60	60	60
2	15	30	60
3	02	06	18
4	01	04	16
	$N = \Sigma f = 200$	$\Sigma fx = 100$	$\Sigma fx^2 = 154$

अब माध्य $m = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{100}{200} = 0.5$

मानक विचलन $(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}\right)^2} = \sqrt{\frac{154}{200} - \left(\frac{100}{200}\right)^2} = \sqrt{0.77 - 0.25} = \sqrt{0.52}$

$\therefore$ $\sigma^2 =$ विचरण $= 0.52 = 0.5$ (लगभग)

$\therefore$ $m = \sigma^2$, अतः बंटन प्वॉयसन है।

अब $P(r) = \frac{N m^r e^{-m}}{r!} = \frac{200 \times (0.5)^r \times e^{-0.5}}{r!}$ $[\because N = 200]$

$= \frac{200 \times 0.6065 \times (0.5)^r}{r!}$ $[\because e^{-0.5} = 0.6065]$

अतः $r = 0, 1, 2, 3, 4$ रखने पर

www.polytechnicpdf.com

4. यदि किसी इंजेक्शन से खराब प्रतिक्रिया की संभाविता 0.002 है तो 1000 व्यक्तियों में दो से अधिक खराब प्रतिक्रिया की प्रायिकता बताइये।

$(e = 2.718)$

5. [illegible] पृष्ठों की एक पुस्तक में 200 त्रुटियाँ हैं। पुस्तक के दिए हुए पृष्ठों में कम से कम 2 त्रुटियों की प्रायिकता ज्ञात करें।

$(e = 2.718)$

[संकेत : $m = \frac{200}{500}$, $P(r \geq 2) = 1 - [P(0) + P(1)]$]

6. रेजर ब्लेड बनाने वाली कि[illegible] में ब्लेड [illegible] त्रुटिपूर्ण होने की संभावना $\frac{1}{500}$ है। प्रत्येक पैकेट में 10 ब्लेड हैं। प्वॉयसन बंटन का प्रयोग कर निकटतम मान[illegible] बताइए कि 10000 पैकेटों में से कितने पैकेट हैं जिनमें (i) कोई ब्लेड त्रुटिपूर्ण नहीं है (ii) एक त्रुटिपूर्ण है (iii) दो त्रुटिपूर्ण हैं।

$(e^{-0.02} = 0.9802)$ **[1989]**

7. एक निर्माता यह जानता है कि [illegible] बनता है उसमें 1% दोषपूर्ण है। वह उन्हें 100 के बक्से में पैक करता है। यदि बक्सों को यादृच्छ चुना जाए तो 3 से अधिक कंडेन्सर के दोषपूर्ण होने की प्रायिकता बताइये।

$(e^{-1} = 0.3679)$

8. एक बीमा कम्पनी ने पाया कि जनसंख्या का 0.005% प्रतिवर्ष किसी निश्चित दुर्घटना का शिकार होता है। जनसंख्या के 10,000 बीमा-धारक यादृच्छया चुने जाते हैं। अगले वर्ष कम्पनी को 3 से अधिक बीमा-धारकों को बीमा की राशि देनी पड़ेगी, इसकी प्रायिकता ज्ञात करें।

$(e^{-0.5} = 0.6065)$

[संकेत : $P(r > 3) = 1 - \{P(0) + P(1) + P(2) + P(3)\}$]

9. 10 और 11 (प्रातः के बीच किसी कार्यालय में औसतन 1.5 कॉल आते है[illegible] प्रायिकता ज्ञात करें (i) किसी विशेष मिनट में कोई फोन न आए (ii) केवल एक फोन आए (iii) दो या दो से अधिक फोन आए। $e^{-1} = 0.3678$, $e^{-0.5} = 0.6065$)

10. "किसी प्वॉयसन वितरण का माध्य 5 तथा मानक विचलन 4 है।" इस कथन की [illegible] जाँचें।

[संकेत : माध्य = $\sqrt{\text{मानक विचलन}}$]

11. निम्न आँकड़ों का प्वॉयसन बंटन का आसंजन कीजिए।

चर (x)	0	1	2	3	4
बारम्बारता (f)	109	65	22	3	1

जबकि $e^{-0.61} = 0.5434$ **[2001]**

12. निम्न आँकडत्रों का प्वॉयसन बंटन का आसंजन कीजिए।

चर (x) :	0	1	2	3	4
बारम्बारता (f) :	192	100	24	3	1

उत्तरमाला

1. 0.271 2. 0.1412 3. (i) 0.1952 (ii) 0.5465
4. 0.3230 5. 0.264 6. (i) 9802 (ii) 196 (iii) 2 (लगभग)
7. 0.08025 8. 0.0016 9. (i) 0.223 (ii) 0.3345 (iii) 0.4425

www.polytechnicpdf.com

10. असत्य 11. 108.68 66.29 20.11 4.16 0.64

12. $\frac{320 \times (0.503)^x e^{-0.503}}{x!}$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$

3. प्रायिकता बंटन (Probability Distribution)

19.7 प्रसामान्य प्रायिकता बंटन (Normal Probability Distribution)

प्रसामान्य प्रायिकता बंटन एक संतत (continuous) प्रायिकता बंटन है। इसका प्रयोग सर्वप्रथम डी-मॉयवर (De-Moivre) ने किया था। इसे गौसियन वितरण (Gaussian Distribution) के नाम से भी जाना जाता है।

परिभाषा : यदि किसी स्तत द्विपद वितरण में n का मान बहुत बड़ा हो अर्थात् n अनन्त की ओर अग्रसर हो तथा प्रायिकतायें p एवं q बहुत छोटे न हों तो यह वितरण प्रसामान्य वितरण (Normal Distribution) या प्रसामान्य प्रायिकता वितरण (Normal Probability Distribution) कहलाता है तथा यह निम्न समीकरण से दिया जाता है।

$$f(x) = y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]} \quad ...(i)$$

जहाँ m = माध्य, σ = मानक विचलन

e = नेपरियन आधार = 2.71828

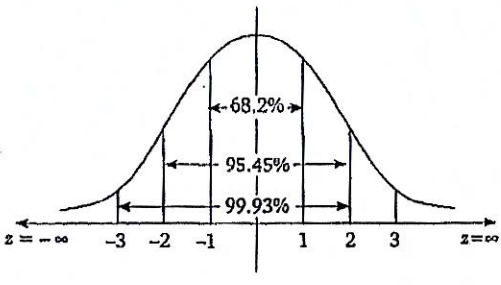
$-\infty \leq x \leq \infty$

(i) σ तथा m बंटन के प्राचल (Parameter) कहलाते हैं तथा $\sigma < 0$, $-\infty < m < \infty$; x को **प्रसामान्य चर (Normal variable)** तथा y को **प्रायिकता घनत्व फलन (Probability Density Function)** कहते हैं। $\frac{x-m}{\sigma}$ को सामान्यत: z से सूचित किया जाता है तथा इसे **मानक एकक (Standard unit)** या **मानक प्रसामान्य चर (Standard normal variate)** कहते हैं।

19.7.1 प्रसामान्य वक्र (Normal Curve)

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad ...(1)$$

द्वारा निरूपित वक्र प्रसामान्य वक्र कहलाता है।



www.polytechnicpdf.com

यह वक्र घंटे (Bell) की आकृति का सममित वक्र होता है, जैसा चित्र में दिखाया गया है। इस वक्र की माध्य (Mean), माध्यिका (Median) तथा बहुलक (Mode) बराबर होते हैं और सममित अक्ष (Symmetrical axis) पर स्थित होते हैं।

19.7.2 प्रसामान्य बंटन का मानक रूप (Standard Form of Normal Distribution)

यदि $m = 0, \sigma = 1$ तो $z = \dfrac{x-m}{\sigma} = \dfrac{x-0}{1} = x$

अत: प्रसामान्य बंटन निम्न रूप का हो जाता है :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$ [(1) में इन मानों को रखने पर]

इसे मानक प्रसामान्य बंटन (Standard Normal Distribution) कहते हैं।

19.8 प्रसामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल तथा प्रायिकता (Relation between Probability and Area under the Curve)

हम जानते हैं कि $p + q = 1$

अर्थात् प्रायिकताओं (सफलता या असफलता की) का योग 1 होता है।

प्रसामान्य वक्र तथा z-अक्ष के बीच घिरा सम्पूर्ण क्षेत्रफल भी 1 के बराबर होता है।

अत: यह क्षेत्रफल किसी घटना के सफलता या असफलता के प्रायिकताओं के योग को निरूपित करेगा।

अत: $P(z_1 < z < z_2) = \displaystyle\int_{z_1}^{z_2} y\, dz$

जहाँ $z_1 < z_2$ तथा $P =$ प्रायिकता

19.8.1 प्रसामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल (Area under Normal Curve)

कोटियों $x = x_1$ तथा $x = x_2$ तथा x-अक्ष के बीच परिबद्ध क्षेत्रफल

$$A = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-m}{\sigma}\right]^2}$$

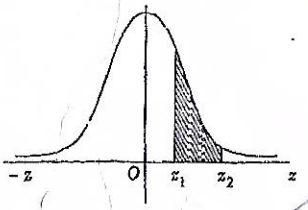
अब $\dfrac{x-m}{\sigma} = z$ से $\dfrac{1}{\sigma} dx = dz$ या $dx = \sigma\, dz$

यदि $x = x_1$ पर $z = \dfrac{x_1 - m}{\sigma} = z_1$ (माना) तथा $x = x_2$ पर $z = \dfrac{x_2 - m}{\sigma} = z_2$ (माना)

$$A = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma\, dz \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = f(z)$$

चित्र में, इसे छायायुक्त क्षेत्र से दिखाया गया है।

www.polytechnicpdf.com



पुस्तक के अंत में दी गई तालिका, जिसे z-तालिका के नाम से भी जाना जाता है, की सहायता से $z = 0$ से 3.99 तक के मानों के लिए क्षेत्रफल की गणना की जा सकती है।

19.8.2 तालिका द्वारा क्षेत्रफल निकालना : कुछ महत्वपूर्ण बिंदु

(i) $z = -\infty$ से 0 के मध्य क्षेत्रफल $= 0.5$; $z = 0$ से ∞ के मध्य क्षेत्रफल $= 0.5$

(ii) यदि $x = x_1$, तथा $x = x_2$ के मध्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल ज्ञात करना है तो $z = \frac{x-m}{\sigma}$ में $x = x_1$ तथा $x = x_2$ रखकर $z_1 = \frac{x_1 - m}{\sigma}$ एवं $z_2 = \frac{x_2 - m}{\sigma}$ प्राप्त किया जाता है, जिसकी सहायता से तालिका से क्षेत्रफल ज्ञात किया जाता है।

(i) प्रथम स्थिति : z_1 तथा z_2 दोनों समान चिह्न (दोनों धनात्मक या दोनों ऋणात्मक) तथा $z_1 < z_2$ तो

$A = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz =$ z_1 से z के बीच का क्षेत्रफल $=$ ($z = 0$ से $z = z_2$ के बीच का क्षेत्रफल) $-$ ($z = 0$ से $z = z_1$ के बीच का क्षेत्रफल)

(ii) द्वितीय स्थिति : यदि z_1 तथा z_2 विपरीत चिह्न (एक धनात्मक, दूसरा ऋणात्मक) तथा $z_1 < z_2$ तो

$A = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz =$ z_1 से z_2 के बीच का क्षेत्रफल $=$ ($z = 0$ से $z = z_1$ के बीच का क्षेत्रफल + ($z = 0$ से $z = z_2$ के बीच का क्षेत्रफल)

(iii) तृतीय स्थिति : $-\infty$ से z_1 के बीच का क्षेत्रफल

(a) यदि z_1, + ve है, तो क्षेत्रफल $A = 0.5 +$ (0 से z_1 के बीच का क्षेत्रफल

(b) z_1, − ve है, $A = 0.5 -$ (0 से z_1 का क्षेत्रफल

(iv) चतुर्थ स्थिति : z_2 से ∞ के बीच क्षेत्रफल

(a) यदि z_2, + ve है, $A = 0.5 -$ (0 से z_2 का क्षेत्रफल)

(b) यदि z_2, − ve है, $A = 0.5 +$ (0 से z_2 का क्षेत्रफल)

(v) पंचम स्थिति : $-z_1$ से $+z_1$ (या $-z_2$ से $+z_2$) के बीच का क्षेत्रफल

$= 2 \times$ (0 से z_1 के मध्य का क्षेत्रफल) (या 2×0 से z_2 के मध्य क्षेत्रफल)

जैसे $z = -1$ से $z = +1$ के बीच का क्षेत्रफल

$= 2 \times$ (0 से 1 के बीच का क्षेत्रफल)

$= 2 \times 0.3413 = 0.6826$

www.polytechnicpdf.com

नोट :

- तालिका में क्षेत्रफल $z = 0$ से z के धनात्मक मानों के लिए दिया होता है। वक्र $z = 0$ के दोनों ओर सममित होता है अतः $z = 0$ से z_1 या $-z_1$ तक प्रसामान्य वक्र के नीचे के क्षेत्रफल बराबर होते हैं।

[नोट : देखें उदाहरण (4)]

19.8.3 प्रसामान्य बंटन के गुण :

[2004]

$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ द्वारा निरूपित प्रसामान्य वक्र निम्न महत्वपूर्ण गुण हैं :

(i) वक्र का प्रायिकता घनत्व शून्य या शून्य से अधिक होता है।

(ii) प्रसामान्य वक्र अपने माध्य के सापेक्ष सममित होता है।

(iii) इस बंटन के माध्य, मध्यिका तथा बहुलक संपाती होते हैं।

(iv) प्रसामान्य वक्र के अंतर्गत z-अक्ष के ऊपर का संपूर्ण क्षेत्रफल 1 के बराबर होता है, तथा

(a) $m - \sigma$ तथा $m + \sigma$ के बीच क्षेत्रफल का 68.27% भाग होता है।

(b) $m - 2\sigma$ तथा $m + 2\sigma$ के बीच क्षेत्रफल का 95.45% भाग होता है।

(c) $m - 3\sigma$ तथा $m + 3\sigma$ के बीच क्षेत्रफल का 99.73% भाग होता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. गणित की एक परीक्षा में प्राप्त अंकों का वितरण प्रसामान्य रूप से हुआ है। यदि अंकों का माध्य 70 तथा मानक विचलन 8 है तो (i) 90 अंक तथा 60 अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों के मानक अंक ज्ञात करें।

(ii) मानक अंकों -1.5 तथा 2.5 को वास्तविक अंकों में व्यक्त करें।

हल : प्रश्न से $m = 70$, $\sigma = 8$, तथा $x_1 = 90$, $x_2 = 60$

(i) $\therefore \quad z_1 = \frac{x_1 - m}{\sigma} = \frac{90 - 70}{8}$ $\quad [\because x = 90]$

$= \frac{20}{8} = 2.5$ उत्तर

तथा $z_2 = \frac{x_2 - m}{\sigma} = \frac{60 - 70}{8} = \frac{-10}{8} = -1.25$ उत्तर

(ii) प्रश्न से $z_1 = -1.5$, $z_2 = 2.5$, $m = 70$, $\sigma = 8$

सूत्र $\frac{x - m}{\sigma} = z \quad \Rightarrow \quad x = m + \sigma z$

अतः $z_1 = -1.5$ हो तो

$x = 70 + 8(-1.5) = 70 - 12 = 58$

तथा $z_2 = 2.5$ हो तो

$x = 70 + 8 \times (2.5) = 70 + 20 = 90$

$\therefore$ अभीष्ट अंक 58 तथा 90 उत्तर

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 2. एक परीक्षा में दो विद्यार्थियों ने 58 तथा 90 अंक प्राप्त किए। उनके मानक अंक क्रमशः -1.5 तथा 2.5 हैं। प्राप्तांकों का वितरण प्रसामान्य रूप से हुआ है तो अंकों का माध्य एवं मानक विचलन ज्ञात करें।

हल : सूत्र से $\frac{x-m}{\sigma}=z$

अतः दिए गये मानों से $-1.5=\frac{58-m}{\sigma}$ ...(1)

$\Rightarrow$ $58-m=-1.5$ ...(2)

$2.5=\frac{90-m}{\sigma}$ ...(3)

तथा $\Rightarrow$ $90-m=2.5$ ...(4)

(4) से (3) घटाने पर

$$32=4\sigma \quad \Rightarrow \sigma=\frac{32}{4}=8$$

(1) में σ का मान रखने पर

$$-1.5=\frac{58-m}{8}$$

या $58-m=-1.5\times 8$

या $58-m=12$

या $m=58+12=70$

अतः माध्य $=70$, मानक विचलन $=8$ उत्तर

उदाहरण 3. C.P.M.T. की परीक्षा में किसी छात्र ने रसायन शास्त्र और जीव विज्ञान में क्रमशः 152 तथा 172 अंक पाए जबकि उनके मान -2.5 तथा 2.5 है। परीक्षा में औसत एवं मानक विचलन का मान ज्ञात करें। **[2003]**

हल : प्रश्नानुसार, $x=152$ (रसायन); $x=172$ (जीव विज्ञान)

$z=-2.5$

अतः सूत्र $z=\frac{x-m}{\sigma}$ में इन मानों को रखने पर

$$-2.5=\frac{152-m}{\sigma} \Rightarrow m+(-2.5)\sigma=152 \quad ...(i)$$

तथा $$2.5=\frac{172-m}{\sigma} \Rightarrow m+2.5\sigma=172 \quad ...(ii)$$

(ii) में से (i) घटाने पर

$$20=5\sigma \Rightarrow \sigma=\frac{20}{5}=4$$

(i) में यह मान रखने पर

$$m+(-2.5)\times 4=152$$

$$m=152+10=162$$

अतः औसत $=162$, मानक विचलन $=4$ उत्तर

उदाहरण 4. निम्न स्थितियों में प्रसामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल ज्ञात करें :

(a) $z=0$ से $z=1.3$ (b) $z=-0.57$ से $z=0$

www.polytechnicpdf.com

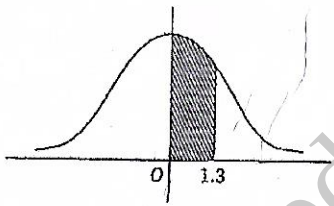
(c) $z = -0.46$ से $z = 2.21$ (d) $z = 0.71$ से 1.9

(e) $z = -\infty$ से $z = -0.87$ (f) $z = 1.2$ से $z = \infty$

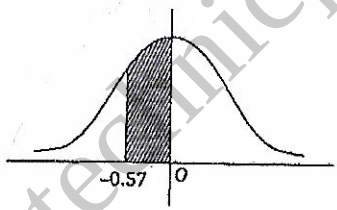
(g) $z = -0.5$ से बायें (h) $z = -1.28$ के दायें

हल : इन प्रश्नों को हल करने के लिए सारणी का प्रयोग करेंगे।

(a) $z = 0$ से $z = 1.3$ के बीच का क्षेत्रफल $= 0.4032$ [तालिका से]

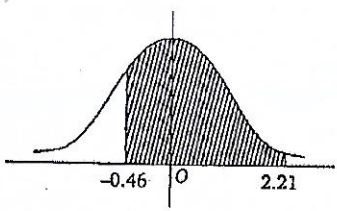


(b) $z = -0.57$ से $z = 0$ तक का क्षेत्रफल $= z = 0$ से $z = 0.57$ का क्षेत्रफल $= 0.2157$



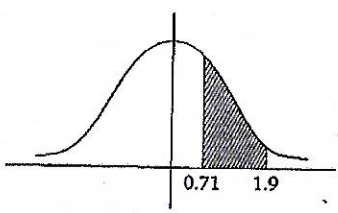
(c) अभीष्ट क्षेत्रफल = ($z = 0$ से 2.21 के बीच का क्षेत्रफल) + ($z = 0$ से $z = -0.46$ के बीच का क्षेत्रफल)

$= 0.4865 + 0.1772 = 0.6637$



(d) अभीष्ट क्षेत्रफल = ($z = 0$ से $z = 1.9$ के बीच का क्षेत्रफल)

$-$ ($z = 0$ से $z = 0.71$ के बीच का क्षेत्रफल



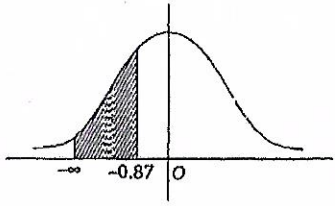
$= 0.4713 - 0.2612 = 0.2101$

उत्तर

www.polytechnicpdf.com

(e) अभीष्ट क्षेत्रफल = ($z = -\infty$ से $z = 0$ के बीच का क्षेत्रफल)

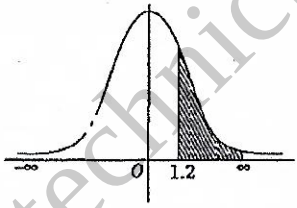
$-$ ($z = -0.87$ से $z = 0$ के बीच का क्षेत्रफल)



= ($z = 0$ से $z = -\infty$ के बीच का क्षेत्रफल) $-$ ($z = 0$ से 0.87 के बीच का क्षेत्रफल)

$= 0.5 - 0.3078 = 0.1922$ उत्तर

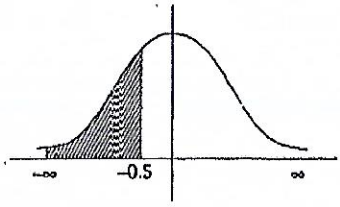
(f) अभीष्ट क्षेत्रफल = ($z = 0$ से $z = \infty$ के बीच का क्षेत्रफल) $-$ ($z = 0$ से $z = 1.2$ के बीच का क्षेत्रफल



$= 0.5 - 0.3849 = 0.1151$

(g) अभीष्ट क्षेत्रफल = $0.5 -$ ($z = 0$ से $z = 0.5$ के बीच का क्षेत्रफल)

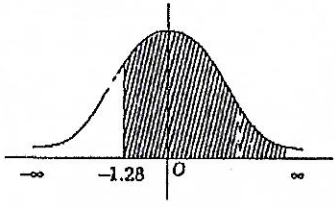
$= 0.5 - 0.1915 = 0.3085$



(h) अभीष्ट क्षेत्रफल = ($z = 0$ से $z = -1.28$ के बीच का क्षेत्रफल) $+ 0.5$

$= 0.3997 + 0.5$

$= 0.8997$ उत्तर



www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 5. यदि $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ तो निम्नलिखित के मान ज्ञात करें।

(i) $\int_0^{1.5} \phi(z)\, dz$ (ii) $\int_{-0.68}^{0} \phi(z)\, dz$

हल : (i) $\int_0^{1.5} \phi(z)\, dz$ = ($z = 0$ से $z = 1.5$ के बीच का क्षेत्रफल)

$= 0.4232$ उत्तर

(ii) $\int_{-0.68}^{0} \phi(z)\, dz$ = ($z = -0.68$ से $z = 0$ तक का क्षेत्रफल)

= ($z = 0$ से $z = 0.68$ तक का क्षेत्रफल)

$= 0.2518$

उदाहरण 6. 300 विद्यार्थियों की ऊँचाइयों का प्रसामान्य बंटन में माध्य 160 सेमी और मानक विचलन 6 सेमी है। यदि $t = 1.50$ के संगत प्रसामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल 0.4332 हो तो बताइये कि कितने विद्यार्थी (i) 151 सेमी से कम (ii) 151 से 169 सेमी के बीच की ऊँचाई के होंगे। [1976]

हल : यहाँ $m = 160$ सेमी, $\sigma = 6$ सेमी तथा $z = 1.5$ के लिए क्षेत्रफल $= 0.4332$

अतः 151 को मानक अंक में बदलने पर

$$t_1 = \frac{x - m}{\sigma} = \frac{151 - 160}{6} \qquad [\text{सूत्र } z = \frac{x - m}{\sigma} \text{ से}]$$

$$= -\frac{9}{6} = -1.5$$

अब 151 सेमी से कम विद्यार्थियों की संख्या

$= 300 \times$ ($z = -1.5$ के बायीं ओर का क्षेत्रफल)

$= 300\{$($z = 0$ के बायीं ओर का क्षेत्रफल) $-$ ($z = 0$ से $z = -1.5$ के बीच का क्षेत्रफल)

$= 300\{0.5 - 0.4332\}$

$= 300 \times 0.0668 = 20.04 = 20$ विद्यार्थी

(ii) $t_1 = \frac{x_1 - m}{\sigma} = \frac{151 - 160}{6} = -\frac{9}{6} = -1.5$

$$t_2 = \frac{x_2 - m}{\sigma} = \frac{169 - 160}{6} = \frac{9}{6} = 1.5$$

अतः 151 सेमी तथा 169 सेमी के बीच के विद्यार्थियों की संख्या

$= 300 \times \{$ $z = -1.5$ से $z = 1.5$ के बीच का क्षेत्रफल$\}$

$= 300 \times \{$($z = 0$ से $z = -1.5$ के बीच का क्षेत्रफल + $z = 0$ से $z = 1.5$ के बीच का क्षेत्रफल)

$= 300 \times 2\{$($z = 0$ से $z = 1.5$ के बीच का क्षेत्रफल)

$= 600 \times 0.4332 = 259.92$

$= 260$ विद्यार्थी उत्तर

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 7. छात्रों की एक परीक्षा में अंकों का माध्य 14 तथा मानक विचलन 2.5 है। यदि वितरण प्रसामान्य है तो 1000 बच्चों में (i) कितने बच्चे 12 और 15 के बीच अंक प्राप्त करेंगे?

(ii) कितने 18 से ऊपर अंक प्राप्त करेंगे?

(iii) कितने 8 से नीचे अंक प्राप्त करेंगे?

(iv) कितने 15.5 तथा 16.5 के बीच अंक प्राप्त करेंगे?

हल : (i) $N = 1000, m = 14, \sigma = 2.5$

$$z_1 = \frac{x-m}{\sigma} = \frac{12-14}{2.5} = -0.8$$

$$z_2 = \frac{15-14}{2.5} = \frac{1}{2.5} = 0.4$$

अतः छात्रों की संख्या $= 1000\{z = -0.8$ से $z = 0.4$ के बीच का क्षेत्रफल$\}$

$= 1000\{0$ से -0.8 तक क्षेत्रफल $+ z = 0$ से $z = 0.4$ तक का क्षेत्रफल$\}$

$= 1000\{0.2881 + 0.1554\} = 1000 \times 0.4435 = 443.5 = 444$ छात्र (लगभग)

(ii) $z_1 = \frac{18-14}{2.5} = \frac{4}{2.5} = 1.6$

$\therefore$ अभीष्ट छात्रों की संख्या $= 1000\{z = 1.6$ के दायें भाग का क्षेत्रफल$\}$

$= 1000 \times \{z = 0$ से $z = \infty$ के बीच का क्षेत्रफल $- z = 0$ से 1.6 के बीच का क्षेत्रफल$\}$

$= 1000 \times \{0.5 - 0.4452\}$

$= 1000 \times 0.0548 = 54.8 = 55$ छात्र (लगभग)

(iii) $z = \frac{8-14}{2.5} = -\frac{6}{2.5} = -2.4$

अतः अभीष्ट संख्या $= 1000 \times \{z = -2.4$ के बायें भाग का क्षेत्रफल$\}$

$= 1000\{0.5 - 0$ से -2.4 के बीच का क्षेत्रफल$\}$

$= 1000 \times \{0.5 - 0.4918\} = 1000 \times 0.0082 = 8.2 = 8$ छात्र (लगभग)

(iv) $z_1 = \frac{15.5-14}{2.5} = \frac{1.5}{2.5} = 0.6$

$$z_2 = \frac{16.5-14}{2.5} = 1$$

अतः अभीष्ट संख्या $= 1000 \times \{z = 1$ तथा $z = 0.6$ के बीच का क्षेत्रफल$\}$

$= 1000 \times \{z = 0$ से $z = 0.1$ के बीच का क्षेत्रफल $- z = 0$ से $z = 0.6$ के बीच का क्षेत्रफल$\}$

$= 1000 \times \{0.3413 - 0.2257\}$

$= 1000 \times 0.1156 = 115.6 = 116$ छात्र (लगभग)

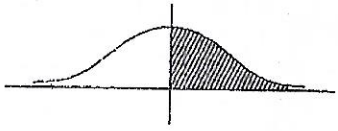
उदाहरण 8. एक वर्ग के छात्रों के अंकों का माध्य 60 तथा मानक विचलन 5 है। यदि अंक प्रसामान्यतः वितरित हैं तो कितने प्रतिशत छात्रों ने 60% से ज्यादा प्राप्त किया?

हल : यहाँ $x = 60, m = 60, \sigma = 5$

$$\therefore \quad z = \frac{x-m}{\sigma} = \frac{60-60}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

यदि $x > 60, z > 0$

www.polytechnicpdf.com



अब $z = 0$ के दायें भाग का क्षेत्रफल $= 0.5$

अत: 60% से ज्यादा अंक प्राप्त करने वाले छात्रों की संख्या $= 50\%$

उदाहरण 9. यह मानते हुए कि किसी मशीन से बने ताँबे के 1000 प्लगों का व्यास प्रसामान्य रूप से वितरित है जिनका माध्य 0.7515 सेमी तथा मानक विचलन 0.0020 सेमी है। कितने प्लग खराब हो जायेंगे यदि 0.752 ± 0.004 सेमी तक व्यास के प्लग ठीक मान लिए गए हैं।

हल : प्लगों के व्यास की सीमा $= 0.752 \pm 0.004$

या $\quad 0.752 + 0.004 = 0.756$

तथा $\quad 0.752 - 0.004 = 0.748$

अब सूत्र से $z = \dfrac{x - m}{\sigma}$

यहाँ $m = 0.7515, \sigma = 0.0020$

यदि $x_1 = 0.748$, तो $z_1 = \dfrac{0.748 - 0.7515}{0.002} = -1.75$

पुन: यदि $x_2 = 0.756$ तो $z_2 = \dfrac{0.756 - 0.7515}{0.002} = 2.25$

अत: $z_1 = -1.75$ तथा $z_2 = 2.25$ के बीच का क्षेत्रफल

$= (z = 0$ से $z = -1.75$ के बीच का क्षेत्रफल$) + (z = 0$ से $z = 2.25$ के बीच का क्षेत्रफल$)$

$= 0.4599 + 0.4878 = 0.9477$

अत: खराब प्लगों की संख्या $= 1000(1 - 0.9977)$

$= 1000 \times 0.0523 = 52.3 = 52$ (लगभग) उत्तर

उदाहरण 10. 100 शुष्क बैट्री सेलों की जाँच उनका जीवनयापन करने के लिए किया गया। निम्न परिणाम प्राप्त हुए : $\bar{x} = 12$ घंटे तथा $\sigma = 3$ घंटे। यह मानते हुए कि आँकड़े प्रसामान्यत: वितरित हैं तो कितने प्रतिशत बैट्री सेल का जीवन काल (i) 15 घण्टे से अधिक (ii) 6 घंटे से कम (iii) 10 घंटे तथा 14 घंटे के बीच रहेगा ? **[2004]**

हल : सूत्र से $z = \dfrac{x - \bar{x}}{\sigma}$

(i) यहाँ $\bar{x} = 12$ घंटे, $\sigma = 3$ घंटे, $x = 15$ अत: $z = \dfrac{15 - 12}{3} = 1$

15 घंटे से अधिक जीवन होने की प्रायिकता $= z = 1$ से दायें भाग का क्षेत्रफल

$= 0.5 - (z = 0$ से $z = 1$ के बीच का क्षेत्रफल$)$

$= 0.5 - 0.3413 = 0.01587$

$\therefore$ अभीष्ट प्रतिशत $= 100 \times 0.1587 = 15.87\%$

(ii) यहाँ $x = 6$, अत: $z_0 = \dfrac{6 - 12}{3} = -\dfrac{6}{3} = -2$

www.polytechnicpdf.com

6 घंटे से कम जीवन की प्रायिकता $= z = -2$ के बायें भाग का क्षेत्रफल

$= 0.5 - (z = 0$ से $z = -2$ के बीच का क्षेत्रफल$) = 0.5 - 0.4772 = 0.228$ उत्तर

$\therefore$ अभीष्ट प्रतिशत $= 100 \times 0.0228 = 2.28\%$

(ii) यहाँ $x_1 = 10,\ x_2 = 14$

$$z_1 = \frac{10-12}{3} = -\frac{2}{3};\ z_2 = \frac{14-12}{3} = \frac{2}{3}$$

अतः 10 घंटे से 14 घंटे तक जीवन की प्रायिकता $= (z_1 = -\frac{2}{3}$ से $z_2 = \frac{2}{3}$ के बीच का क्षेत्रफल$)$

$= 2 \times (z = 0$ से $z = \frac{2}{3}$ के बीच का क्षेत्रफल$) = 2 \times 0.2476 = 0.4952$

$\therefore$ अभीष्ट प्रतिशत $= 100 \times 0.4952 = 49.52\%$

उदाहरण 11. किसी नगर के निवासियों के जीवित रहने का माध्य 40 वर्ष तथा मानक विचलन 10 वर्ष है तो

(i) 20 वर्ष से 60 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता ज्ञात करें।

(ii) कितने व्यक्ति 70% से अधिक जीवित रहेंगे ?

हल : सूत्र से $z = \frac{x-m}{\sigma}$

(i) यहाँ $x_1 = 20, x_2 = 60, m = 40, \sigma = 10$

$$\therefore \quad z_1 = \frac{20-40}{10} = -\frac{20}{10} = -2;\quad z_2 = \frac{60-40}{10} = \frac{20}{10} = 2$$

अतः अभीष्ट संख्या $= (z_1 = -2$ से $z_2 = 2$ के बीच का क्षेत्रफल$)$

$= 2 \times (z = 0$ से $z = 2$ के बीच का क्षेत्रफल$)$

$= 2 \times 0.4772 = 0.9544$

$\therefore$ अभीष्ट प्रतिशत $= 100 \times 0.9544$

$= 95.44\%$

(ii) यहाँ $x = 70, m = 40, \sigma = 10$

$$\therefore \quad z = \frac{70-40}{10} = 3$$

अतः अभीष्ट संख्या $= (z = 3$ के दायें भाग का क्षेत्रफल$)$

$= 0.5 - (z = 0$ से $z = 3$ के बीच का क्षेत्रफल$)$

$= 0.5 - 0.4986 = 0.0014$

$\therefore$ अभीष्ट प्रतिशत $= 100 \times 0.0014 = 0.14\%$ उत्तर

उदाहरण 12. निम्न आँकड़ों को प्रसामान्य वक्र में आसंजन कीजिए।

रेखा की लंबाई (सेमी)	8.60	8.59	8.58	8.57	8.56	8.55	8.54	8.53	8.52
आवृत्ति	2	3	4	9	10	8	4	1	1

हल : माना कल्पित माध्य $a = 8.56$

www.polytechnicpdf.com

अब

x	f	$d = x - a$	fd	fd^2
8.60	2	0.04	0.08	0.0032
8.59	3	0.03	0.09	0.0027
8.58	4	0.02	0.08	0.0016
8.57	9	0.01	0.09	0.0009
8.56	10	0	0	0
8.55	8	−0.01	−0.08	0.0008
5.54	4	−0.02	−0.08	0.0016
8.53	1	−0.03	−0.03	0.0009
8.52	1	−0.04	−0.04	0.0016
	$\Sigma f = 42$		$\Sigma fd = 0.11$	$\Sigma fd^2 = 0.0133$

माध्य $(m) = a + \frac{\Sigma fd}{\Sigma f} = 8.56 + \frac{0.11}{42} = 8.56262$

मानक विचलन $(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd}{\Sigma f}\right)^2} = \sqrt{\frac{0.0133}{42} - \left(\frac{0.11}{42}\right)^2}$

$= \sqrt{0.00031666 - 0.00000686}$

$= 0.176$

अत: प्रसामान्य वक्र का समीकरण

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, -\infty \le x \le \infty$$

$$= \frac{1}{0.176\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-8.56262}{0.176}\right)^2}$$

प्रश्नावली 19.3

1. किसी परीक्षा में प्राप्तांकों का माध्य तथा मानक विचलन क्रमश: 50 तथा 10 हैं। यदि अंक प्रसामान्यत: वितरित हैं तो 30 तथा 70 के लिए मानक अंकों में परिवर्तित कीजिए।
2. गणित की एक परीक्षा में प्राप्त अंकों का वितरण प्रसामान्य रूप से हुआ है यदि अंकों का माध्य 70 तथा मानक विचलन 8 हो तब

   (i) अंकों 58 व 82 को मानक अंकों में परिवर्तित कीजिए।

   (ii) मानक अंकों −1.25 तथा 2.125 को वास्तविक अंकों में परिवर्तित कीजिए।
3. किसी प्रतियोगी परीक्षा में एक छात्र ने गणित एवं रसायन में क्रमश: 51 तथा 69 अंक प्राप्त किए जबकि उनके मानक अंक क्रमश: −1.5 तथा +1.5 थे। यदि अंक प्रसामान्यत: वितरित हों तो अंको का माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

www.polytechnicpdf.com

4. निम्न स्थितियों में प्रसामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल ज्ञात करें—

(i) $z = 0$ से $z = 1.5$

(ii) $z = -0.84$ से $z = -0.33$

(iii) $z = 0.81$ से $z = 1.94$

(iv) $z = -0.6$ के बायें (v) $z = -1.28$ के दायें

5. यदि $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$ तो निम्नलिखित के मान ज्ञात करें—

(i) $\int_0^{1.6} \phi(z)\,dz$ (ii) $\int_{-0.46}^{2.21} \phi(z)\,dz$

6. किसी पॉलीटेक्निक के 1000 छात्रों की आयु का माध्य 18 वर्ष तथा मानक विचलन 5 वर्ष है। ज्ञात कीजिए—

(i) कितने छात्रों की आयु 12 और 24 वर्ष के बीच हैं ?

(ii) कितने छात्रों की आयु 10 वर्ष से कम है ?

(iii) कितने छात्रों की आयु 26 वर्ष से अधिक है ?

7. 1000 विद्यार्थियों की कक्षा में कितने विद्यार्थियों ने प्रथम श्रेणी अर्थात् 60% या ज्यादा अंक प्राप्त किए होंगे यदि उनके प्राप्तांकों का समानांतर माध्य 44 तथा मानक विचलन 10 है ?

8. एक निर्माता अनुभव से जानता है कि उसके द्वारा बनाये गए प्रतिरोधकों के प्रतिरोध $\mu = 100$ ओम तथा मानक विचलन $\sigma = 2$ ओम के लिए प्रसामान्य रूप से वितरित है। ज्ञात करें कि कितने प्रतिशत रेसिस्टर (Resistor) के रसिस्टेंस 98 ओम तथा 102 ओम के बीच होगा?

9. एक शहर में 1000 पुरुषों की ऊँचाइयों का समानांतर माध्य 68.16 इंच तथा मानक विचलन 3.2 इंच है। यदि पुरुषों की ऊँचाइयों का वितरण प्रसानान्य रूप से हुआ है तो कितने व्यक्तियों की ऊँचाई 6 फीट से अधिक है?

10. एक सेना के जूते की आयु प्रसामान्यतः वितरित है जिसका माध्य 8 माह तथा मानक विचलन 2 माह है। यदि 5000 जोड़ी जूते जवानों को वितरित किए जाते हैं तो 12 माह बाद कितने जोड़ी जूते बदलने पड़ सकते हैं ?

[दिया है : $P(z \geq 2 = 0.0228$ तथा $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$]

[संकेत : $z = \frac{12-8}{2} = 2$, एक साल से ज्यादा चलने वाले जूतों की संख्या

$= 5000 \times (z \geq 2$ के दायें भाग का क्षेत्रफल)]

11. निम्न आंकड़ों पर प्रसामान्य वक्र का आसंजन कीजिए :

आकार	6	7	8	9	10	11	12
आवृत्ति	3	6	9	13	8	5	4

12. निम्न आँकड़ों पर प्रसामान्य वक्र का आसंजन कीजिए :

अंतराल	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
बारम्बारता	6	8	3	2	1

[संकेत : $m = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = 17$, जहाँ $x = \frac{0+10}{2}, \frac{10+20}{2}, \ldots$ आदि

www.polytechnicpdf.com

= अन्तराल का मध्य बिन्दु

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f(x-m)^2}{\Sigma f}} = 11.2\,]$$

उत्तरमाला

1. −3, 1 **2.** (i) −1.5, 1.5 (ii) 60, 87 **3.** माध्य = 60, मानक विचलन = 6

4. (i) 0.4232 (ii) 0.1703 (iii) 0.1828 (iv) 0.2743 (v) 0.8997

5. (i) 0.4452 (ii) 0.6637 **6.** (i) 770 (ii) 55 (iii) 55

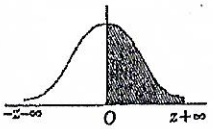
7. 55 **8.** 68.26 **9.** 115 **10.** 4886 **11.** $y = \frac{1}{1.6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-9}{1.6}\right)^2}$

12. $y = \frac{1}{11.2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-17}{11.2}\right)^2}$

□□□

www.polytechnicpdf.com

चार्ट–I



0 से Z तक का प्रसामान्य वक्र के नीचे का क्षेत्रफल

(Area under the Standard Normal Curve from 0 to Z)

0 से $+\infty$ तक का कुल क्षेत्रफल $= 0.5$ (दायीं ओर)

0 से $+\infty$ तक का कुल क्षेत्रफल $= -0.5$ (बायीं ओर)

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0754
0.2	0793	0832	0871	1010	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.4	1179	1179	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.5	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2258	2291	2324	3357	3729	2422	2454	2486	2518	2552
0.7	2580	2612	2642	2673	3925	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2996	3023	3951	3078	3106	3133
0.9	3158	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3819	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	3445	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4606
1.9	4713	4919	4726	4732	4732	4744	4750	4756	4761	4767
2.0	4772	4378	4783	4788	4788	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4426	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4564	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4876
2.3	4893	4649	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2.9	4981	4997	4982	4983	4983	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4987	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990
3.1	4990	4991	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993
3.2	4993	4993	4994	4994	4994	4994	4994	4995	4995	4995
3.3	4995	4995	4995	4996	4996	4996	4996	4996	4996	4997
3.4	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4998
3.0	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998
3.1	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998
3.2	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3.3	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3.4	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000

www.polytechnicpdf.com

चार्ट–II

$e^{-\lambda}$ के मान (Value of $e^{-\lambda}$)

(i) λ 0.0 से 0.99 तक

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	1.000	9900	9802	9704	9608	9512	6418	9324	9231	9139
0.1	9048	8958	8869	8781	8694	8607	8521	8437	8353	8270
0.2	8187	8106	8025	7945	7866	7788	7711	7634	7558	7483
0.3	7408	7334	7261	7189	7118	7047	6977	6907	6839	6771
0.4	6703	6636	6505	6505	6440	5376	6313	6250	6188	6126
0.5	6065	6005	5945	5886	5827	5770	5712	5655	5599	5543
0.6	5488	5434	5379	5326	5273	5220	5169	5066	5066	5016
0.7	4966	4916	4868	4819	4771	4724	4677	4584	4584	4538
0.8	4493	4449	4404	4360	4317	4724	4232	4148	4148	4107
0.9	4066	4025	3985	3946	3906	3876	3829	3753	3753	3716

(ii) λ 1.0 से 10.0 तक

z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e^{-\lambda}$	36788	13534	04979	01832	006738	002479	000912	000335	000123	0000045

□□□

www.polytechnicpdf.com

20. न्यूनतम वर्ग विधि से वक्र आसंजन

परिशिष्ट

A. रेखा, पृष्ठ तथा आयतन समाकल

B. ग्रीन, गौस एवं स्टोक के प्रमेय

www.polytechnicpdf.com

20

CHAPTER

न्यूनतम वर्ग विधि से वक्र आसंजन (Curve Fitting by Least Square Mehtod)

20.1 परिभाषा (Definition)

वक्र आसंजन : यदि x तथा y दो चर राशियाँ हैं तथ स्वतंत्र चर x के n मानों $x_1, x_2, \ldots x_n$ के संगत परतंत्र चर y के n मान $y_1, y_2, \ldots y_n$ प्राप्त हों, तो इन n युग्मों $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$ के अधिकांश बिन्दुओं से गुजरने वाला वक्र (curve) प्राप्त किया जा सकता है। यदि ये बिंदु इस वक्र पर होते हैं, तो वक्र दिए गए बिन्दुओं में आसंजित कही जाती है।

इसके लिए हमें एक गणितीय नियम की आवश्यकता होती है जो इनके बीच एक बीजीय संबंध देता है। यह प्रक्रिया वक्र आसंजन कहलाती है।

अत: वक्र आसंजन (Curve fitting) x तथा y के इन मानों की सहायता से ऐसे गणितीय समीकरण बनाना है जो इनके बीच अच्छा से अच्छा संबंध (best fitted) देता है.

20.2 न्यूनतम वर्ग विधि (Least Square Method)

वक्र आसंजन के लिए न्यूनतम वर्ग विधि (Least Square Method) को प्रयोग किया जाता है, जो सांख्यिकीविद् लोजेन्ड्र (Lengendre) द्वारा प्रतिपादित किया गया था। इसके लिए हमें **प्रसामान्य समीकरणों** (Normal Equations) की आवश्यकता होती है।

(1) रैखिक वक्र के लिए प्रसामान्य समीकरण (Normal Equations For Linear Curve) : यदि

$$y = a + bx \qquad \ldots(1)$$

में दिए गए बिन्दुओं को आसंजित करना है तो प्रसामान्य समीकरण निम्न होंगे :

$$\Sigma y = na + b\Sigma x \qquad \ldots(2)$$

$$\Sigma xy = a\,\Sigma x + b\Sigma x^2 \qquad \ldots(3)$$

स्पष्ट है समीकरण (2) समीकरण (1) में दोनों तरफ Σ लगाने से प्राप्त हुआ है तथा (3) समीकरण (1) में दोनों तरफ x से गुणा करने तथा प्राप्त पदों के पहले Σ लगाने से प्राप्त हुआ है। (2) तथा (3) को हल कर a तथा b का मान प्राप्त किया जाता है तथा (1) में इन मानों को रखने से अभीष्ट रेखा प्राप्त होती है।

(2) द्विघातीय वक्र या परवलयिक वक्र (Parabolic Curve) : यदि वक्र परवलयिक है तथा बिन्दुओं को समीकरण

$$y = a + bx + cx^2 \qquad \ldots(1)$$

में आसंजित करना है तो प्रसामान्य समीकरण

$$\Sigma y = na + b\Sigma x + c\Sigma x^2 \qquad \ldots(2)$$

(समीकरण (1) के पहले Σ लगाने पर)

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3 \qquad \ldots(3)$$

(समीकरण (1) को x से गुणा कर प्रत्येक पद से पहले लगाने पर)

$$\Sigma x^2 y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4$$

(समीकरण (1) में x^2 से गुणा कर प्रत्येक पद के पहले Σ लगाने पर)

www.polytechnicpdf.com

नोट :

- उपरोक्त प्रसामान्य समीकरणों से स्पष्ट है कि यदि n घात के समीकरण को वक्र आसंजित करनी हो तो प्रसामान्य समीकरणों की संख्या $(n+1)$ होगी।

20.3 वक्र आसंजन की विधि :

Step (I). सर्वप्रथम दिए गए वक्र का समीकरण लिखें।

Step (II). इसकी सहायता से प्रसामान्य समीकरण लिखे

Step (III). अब $\Sigma x, \Sigma x^2, \Sigma x^3, \Sigma xy, \Sigma x^2 y$...आदि का मान सारणी बनाकर ज्ञात करें।

Step (IV). प्राप्त मानों को प्रसामान्य समीकरण में रखकर अचरों का मान प्राप्त करें।

Step (V). इन मानों को वक्र के समीकरण (Step I) में डालकर अभीष्ट वक्र प्राप्त करें।

क्रिया विधि आगे के उदाहरणों से स्पष्ट है

20.4 मूल बिन्दु में परिवर्तन (Change of Origin)

वक्र आसंजन के प्रश्न हल करते समय अक्सर हमें y के ऐसे बड़े तथा जटिल मान मिलते हैं, जिससे गणना में काफी कठिनाई होती है। इस कठिनाई से बचने के लिए x तथा y का सुविधाजनक मान लेकर गणना को सरल किया जा सकता है।

Case I. यदि चरों x की संख्या n विषम हो तथा मानों के बीच समान अंतराल h हो, तो

$$u = \frac{x - x_0}{h}, v = y - y_0, \text{ जिससे } \Sigma u = \Sigma u^3 = \ldots = 0$$

जहाँ x_0 श्रेणी का मध्यमान (Middle Value) तथा h चर x के दो मानों के बीच का समान अंतर है।

Case II. यदि चरों की संख्या n सम हो तो

$$u = \frac{x - \alpha}{h}, \text{ जहाँ } \alpha \text{ दो मध्य पदों का माध्य है तथा } h = \frac{\text{सार्वअन्तर}}{2}$$

$v = y - y_0$, जहाँ y_0 कोई सुविधाजनक मान है, इसे लेकर निम्न रूप में प्रसामान्य समीकरण बनायें।

$$v = a + bu$$

$$\Sigma v = na + b\,\Sigma u$$

$$\Sigma uv = a\Sigma u + b\,\Sigma u^2$$

नोट :

- x_0 व y_0 का मान अपनी सुविधानुसार लिया जा सकता है।

प्रमुख तथ्य (Important Facts)

1. वक्र आसंजन : वक्र आसंजन दो चरों के बीच बीजीय संबंध स्थापित कर वक्र का समीकरण ज्ञात करने की विधि है।
2. न्यूनतम वर्ग विधि के लिए प्रसामान्य समीकरण :

(i) रैखिक वक्र : यदि सरल रेखा $y = a + bx$ में आसंजित करना है तो दो सामान्य समीकरण होंगे।

$$\Sigma y = na + b\Sigma x, \text{ जहाँ } n \text{ समंकों की संख्या है।}$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$$

(ii) द्विघातीय वक्र : यदि परवलय $y = a + bx + cx^2$ में आसंजित करना है तो प्रसामान्य समीकरण तीन होंगे :

$$\Sigma y = na + b\Sigma x + c\Sigma x^2$$

$$\Sigma xy = n\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3$$

$$\Sigma x^2 y = n\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4$$

इसी तरह त्रिघातीय वक्र के लिए चार, n घातीय के लिए $(n+1)$ प्रसामान्य समीकरण प्राप्त होंगे।

www.polytechnicpdf.com

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. x को स्वतंत्र चर मानते हुए दिये गये आंकड़ों के लिए दिखाइये कि आसंजित सरल रेखा का समीकरण $y = 0.7x + 11.29$ है।

x	0	5	10	15	20	25
y	12	15	17	22	24	30

हल : माना आसंजित सरल रेखा $y = ax + b$, यहाँ $n = 6$

तब प्रसामान्य समीकरण

$$\Sigma y = a\Sigma x + 6b \quad \text{...(i)}$$

अब

$$\Sigma xy = a\Sigma x^2 + b\Sigma x \quad \text{...(ii)}$$

x	y	xy	x^2
0	12	0	0
5	15	75	25
10	17	170	100
15	22	330	225
20	24	480	400
25	30	750	725
$\Sigma x = 75$	$\Sigma y = 120$	$\Sigma xy = 1805$	$\Sigma x^2 = 1375$

इन मानों से प्रसामान्य स्मीकरण (i) तथा (ii) में रखने पर

$120 = a \times 75 + 6b$ या $75a + 6b = 120$ ...(iii)

$1805 = a \times 1375 + b \times 75$ या $1375a + 75b = 1805$ ...(iv)

या $1875a + 150b = 3000$ [समी० (iii) में 25 से तथा समी० (iv) में (2) से गुणा करने पर]

$2750a + 150b = 3610$

घटाने पर $-875a = -610$

$$a = \frac{-610}{-875} = .697$$

a का मान समीकरण (ii) में रखने पर, $75 \times -87 + 7b = 120$

$$b = \frac{120 - 75 \times .697}{6} = 11.2875$$

दो अंकों तक मान लेने पर आसंजित सरल रेखा $y = \mathbf{.7x + 11.29}$ **उत्तर**

उदाहरण 2. x को स्वतंत्र चर मानते हुए निम्न सारणी की सहायता से सरल रेखा का आसंजन न्यूनतम वर्गों की विधि से ज्ञात कीजिए।

x	0	1	2	3	4
y	1	1.8	3.3	4.5	6.3

[UPBTE 2004]

हल : माना आसंजित सरल रेखा $y = ax + b$, यहाँ $n = 5$

प्रसामान्य समीकरणें $\Sigma y = a\Sigma x + 5 \times b$ ...(i)

अब $\Sigma xy = a\Sigma x^2 + b\Sigma x$ ...(ii)

www.polytechnicpdf.com

x	y	xy	x^2
0	1	0	0
1	1.8	1.8	1
2	3.3	6.6	4
3	4.5	13.5	9
4	6.3	25.2	16
$\Sigma x = 10$	$\Sigma y = 16.9$	$\Sigma xy = 47.1$	$\Sigma x^2 = 30$

इन मानों को प्रसामान्य समीकरणों (i) व (ii) मे रखने पर

$16.9 = a \times 10 + 5b$ या $10a + 5b = 16.9$ ...(iii)

$48.1 = a \times 30 + b \times 10$ $30a + 10b = 47.1$ ...(iv)

समीकरण (iii) को 3 से गुणा करने पर,

या $30a + 15b = 50.7$

$30a + 10b = 47.1$

घटाने पर $5b = 3.6$ या $b = \frac{3.6}{5} = .72$

b का मान समीकरण (iii) में रखने पर,

$$10a + 5 \times 0.72 = 16.9$$

$$10a = 16.9 - 3.60 = 13.3$$

या $a = 1.33$

अत: अभीष्ट सरल रेखा $y = 1.33x + 0.72$ उत्तर

उदाहरण 3. न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग कर निम्न आँकड़ों को द्विघात परवलय में आसंजित कीजिए—

$$(x, y) : (-1, 2), (0, 0), (0, 1), (1, 2)$$

हल : माना बहुपद का समीकरण $y = a + bx + cx^2$ ...(1)

यहाँ $n = 4$

अत: प्रसामान्य समीकरण

$$\Sigma y = na + b\,\Sigma x + c\,\Sigma x^2$$

$$\Sigma xy = a\,\Sigma x + b\,\Sigma x^2 + c\,\Sigma x^3$$

$$\Sigma x^2 y = a\,\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\,\Sigma x^4$$

अब

x	y	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
−1	2	1	−1	1	2	2
0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
1	2	1	1	1	2	2
$\Sigma x = 0$	$\Sigma y = 5$	$\Sigma x^2 = 2$	$\Sigma x^3 = 2$	$\Sigma x^4 = 2$	$\Sigma xy = 0$	$\Sigma x^2 y = 4$

इन मानों को प्रसामान्य समीकरण में रखने पर

$5 = 4a + 0b + 2c \Rightarrow 5 = 4a + 2c$ ...(1)

$0 = 0a + 2b + 0c \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$ ...(2)

$4 = 2a + 0b + 2c \Rightarrow 4 = 2a + 2c$ ...(3)

www.polytechnicpdf.com

(2), (3) तथा (4) को हल करने पर

$$a = 0.5, b = 0, c = 1.5$$

अतः (1) से $y = 0.5 + 1.5x^2$

उदाहरण 4. x को स्वतंत्र चर मानते हुए निम्नलिखित आंकड़ों के लिए न्यूनतम वर्ग विधि से द्विघात परवलय का आसंजन कीजिए।

x	0	1	2	3	4
y	−4	−1	4	11	20

हल : माना बहुपद का समीकरण

$$y = a - bx + cx^2 \quad ...(1)$$

तथा प्रसामान्य समीकरण

$$\Sigma y = ax + b\Sigma x + c\Sigma x^2 \quad ...(2)$$
$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3 \quad ...(3)$$
$$\Sigma x^2 y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4 \quad ...(4)$$

अब

x	y	xy	x^2	x^2y	x^3	x^4
0	−4	0	0	0	0	0
1	−1	−1	1	−1	1	1
2	4	8	4	16	8	16
3	11	33	9	99	27	81
4	20	80	16	320	64	256
$\Sigma x = 10$	$\Sigma x = 30$	$\Sigma x = 120$	$\Sigma x^2 = 30$	$\Sigma x^2 = 434$	$\Sigma x^3 = 100$	$\Sigma x^4 = 354$

इन मानों को (2), (3) तथा (4) में रखने पर

$$30 = 5a + 10b - 30c \quad ...(5)$$
$$120 = 2a + 30b + 100c \quad ...(6)$$
$$434 = 3a + 100b + 354c \quad ...(7)$$

इन्हें हल करने पर

$$a = -4, b = 2, c = 1$$

समी० (1) में इन मानों को रखने पर

∴ अभीष्ट परवलय $y - 4 + 2x + x^2$ उत्तर

उदाहरण 5. निम्न आंकड़ों के लिए सरल रेखा में आसंजित कीजिए।

X	0	5	10	15	20	25
y	12	15	17	22	24	30

हल : माना $u = \frac{x - 12.5}{5/2} = \frac{x - 12.5}{2.5}$, $v = y - 20$ यहाँ $n = 6$

तथा आसंजित सरल रेखा का समीकरण

$$v = a + bu \quad ...(1)$$

तब प्रसामान्य समीकरणें

$$\Sigma v = na + b\Sigma u \quad ...(2)$$
$$\Sigma uv = a\Sigma u + b\Sigma u^2 \quad ...(3)$$

www.polytechnicpdf.com

x	y	$u=\frac{x-12.5}{2.5}$	$v=y-20$	uv	u^2
0	12	-5	-8	40	25
5	15	-3	-5	15	9
10	17	-1	-3	3	1
15	22	1	2	2	1
20	24	3	4	12	9
25	30	5	10	50	25
		$\Sigma u=0$	$\Sigma v=0$	$\Sigma uv=122$	$\Sigma u^2=70$

यह मान समीकरणों (2) तथा (3) में रखने पर

$$0=6a+b\times 0 \qquad \text{या} \qquad a=0$$

$$122=a\times 0+b\times 70 \qquad b=\frac{122}{70}=1.743$$

अतः (1) से $\quad v=0+1.743=1.743$

या $\quad y-20=1.743\frac{(x-12.5)}{2.5} \quad \Rightarrow \quad 2.5y-50=1.743x-1.743\times 12.5$

$\Rightarrow \quad y=11.29+0.7x$ यही अभीष्ट सरल रेखा है। उत्तर

उदाहरण 6. निम्नलिखित समंकों के लिए एक श्रेष्ठ सरल रेखा का आसंजन कीजिए—

x	0	5	10	15	20	25
y	15	19	21	26	28	34

हल : यहाँ कुल पद 6 हैं जो कि सम (even) हैं। मानों में सर्वान्तर 5 है। अतः $a=\frac{10+15}{2}=12.5$ तथा $h=\frac{5}{2}$ लेने पर, $\quad u=\frac{x-a}{h}=\frac{x-12.5}{2.5}$ तथा $\quad v=y-24$ लेने पर, $\Sigma v=0$ हैं अतः $v=y-24$ लिया।

श्रेष्ठ आसंजित सरल रेखा, $\quad v=a+bu \quad$ ...(1)

जिसके लिए प्रसामान्य समीकरण, $\quad \Sigma y=an+b\Sigma u \quad$ ...(2)

तथा $\quad \Sigma uv=a\Sigma u+b\Sigma u^2 \quad$ ...(3)

x	$u=\frac{x-12.5}{2.5}$	y	$v=y-24$	uv	u^2
0	$\frac{0-12.5}{2.5}=-5$	16	-8	40	25
5	$\frac{5-12.5}{2.5}=-3$	19	-5	15	9
10	$\frac{10-12.5}{2.5}=-1$	21	-3	3	1
15	$\frac{15-12.5}{2.5}=1$	26	2	2	1
20	$\frac{20-12.5}{2.5}=3$	28	4	12	9
25	$\frac{25-12.5}{2.5}=5$	34	10	50	25
	$\Sigma u=0$		$\Sigma v=0$	$\Sigma uv=122$	$\Sigma u^2=70$

www.polytechnicpdf.com

ये मान समीकरणों (2) तथा (3) में रखने पर,

$$0 = 6a + 0 \Rightarrow a = 0 \text{ तथा } 12.2 + b \times 70 \Rightarrow b = 1.743$$

a तथा b के मान समीकरण (1) में रखने पर,

अभीष्ट सरल रेखा का समीकरण $v = 0 + 1.743u \quad \Rightarrow \quad y - 24 = 1.743\left(\frac{x - 12.5}{2.5}\right)$

$$y - 24 = 0.7x - 8.75 \quad \Rightarrow \quad y = 0.7x + 15.25$$

उत्तर

प्रश्नावली 20.1

1. निम्न आंकड़ों से एक सर्वोत्तम सरल रेखा का आसंजन कीजिए।

x	0	1	2	3	4
y	1	2.9	4.8	6.7	8.6

2. न्यूनतम वर्ग विधि से निम्नलिखित आंकड़ों के लिए सरल रेखा $y = ax + b$ का आसंजन कीजिए।

x	−1	0	2	3	6
y	−1	2	9	10	15

[UPBTE 2016]

3. निम्नलिखित आँकड़ों से एक सर्वोत्तम सरल रेखा का आसंजन कीजिए जबकि y परतंत्र चर है।

x	1	2	3	4	5
y	5	7	9	10	15

4. न्यूनतम वर्ग विधि से दिए गए आंकड़ों को $p = a + bw$ में आसंजन कीजिए।

w (kg)	50	70	100	120
p (kg)	12	15	21	25

5. निम्नलिखित समंकों के लिए एक श्रेष्ठ सरल रेखा का आसंजन कीजिए।

x	0	5	10	15	20	25
y	16	19	21	26	28	34

[संकेत : यहाँ $x = 6, N = 5 \therefore a = \frac{10+15}{2}, h = \frac{5}{2}$ अतः $X = \frac{x - 12.5}{2.5}, Y = y - 24$ चुनें]

6. निम्नलिखित समंकों के लिए एक सरल रेखा में आसंजन कीजिए।

x	0	5	10	15	20	25
y	12	15	17	22	24	30

[संकेत : $u = \frac{x - 1.25}{2.5}, v = y - 20$]

7. x को स्वतंत्र चर मानते हुए निम्नलिखित आँकड़ों के लिए न्यूनतम वर्ग की विधि से द्विघात परवलय का आसंजन करें।

x	0	1	2	3	4
y	1	5	10	22	38

8. निम्न आंकड़ों के लिए न्यूनतम वर्ग विधि से द्विघात परवलय का आसंजन करें।

x	−2	−1	0	1	2
y	15	1	1	3	19

www.polytechnicpdf.com

9. निम्न आंकड़ों के लिए द्विघातीय परवलय का आसंजन करें।

x	0	1	2	3	4
y	1	1.8	3.3	4.5	6.3

[संकेत : $u = \frac{x-a}{h} = \frac{x-2}{1}$]

10. एक कम्पनी के x वर्षों की आमदनी निम्न प्रकार से y के पदों में दी गई है।

x	1	2	3	4	5
y	1250	1500	1650	1950	2350

$u = x - 3$ तथा $v = \frac{y-1650}{50}$ लेकर u, v में परवलय का आसंजन कीजिए तथा 8वे वर्ष में होने वाले लाभ की परिकल्पना कीजिए।

11. $u = x - 2, v = y - 25$ लेकर निम्न आंकड़ों से द्विघातीय वक्र का आसंजन कीजिए।

x	0	1	2	3	4
y	20	22	25	28	32

उत्तरमाला

1. $y = 1 + 1.9x$
2. $y = 2.494 + 2.156x$
3. $3.9 + 1.5x$
4. $p = 2.2759 + 0.1879w$
5. $0.7x + 15.25$
6. $y = 0.7x + 11.285$
7. $y = 1.43 + 2.4x + 2.21x^2$
8. $y = \frac{-37}{35}x + x + \frac{31}{7}x^2$
9. $0.957 + 0.85x + 0.12x^2$
10. $y = 1170.5 + 72.1x + 32.15x^2$
11. $y = 19.96 + 1.88x + 0.28x^2$

□□□

www.polytechnicpdf.com

परिशिष्ट

A CHAPTER

रेखा, पृष्ठ तथा आयतन समाकल (Line, Surface and Volume Integral)

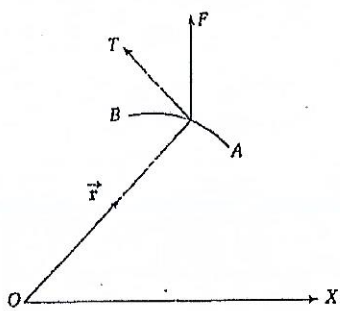
1. परिभाषायें (Definitions)

एकक सदिश फलन (Unit Vector Function)

यदि AB कोई निष्कोण (Smooth) वक्र है, जिसे C से व्यक्त किया जाता है, जिसका समीकरण

$$\vec{r} = \vec{F}(x, y, z),$$

जहाँ $\vec{r}$ इस पर स्थित किसी बिन्दु P का स्थिति सदिश है तथा $\vec{F}(x, y, z)$ सतत अवकलनीय है, तो $\frac{d\vec{r}}{ds}$ को बिन्दु P पर स्पर्श रेखा PT के अनुदिश एकक सदिश फलन कहते हैं।



रेखा समाकल (Line Integral)

कोई समाकल जो किसी वक्र के अनुदिश ज्ञात किया जाता है, रेखा समाकल (Line Integral) कहलाता है।

अतः यदि $\vec{r} = \vec{F}(x, y, z)$ कोई सतत सदिश फलन है, तो

रेखा समाकल **(Line Integral)**

$$= \int_C \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}\, ds = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

इसे स्पर्शीय रेखा समाकल **(Tangential Line Integral)** भी कहते हैं।

रेखा समाकल के अन्य रूप (Other Formal Line Integrals)

(i) रेखा समाकल का कार्तीय रूप (Cartesian Formal Line Integral) : यदि $\vec{F}(\vec{r}) = F_1\,\vec{i} + F_2\,\vec{j} + F_3\,\vec{k}$ तथा $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$ जिससे $d\vec{r} = \vec{i}\,dr + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz$

तो रेखा समाकल $\int_C F(\vec{r}) \cdot dr = \int_C [F_1\,\vec{i} + F_2\,\vec{j} + F_3\,\vec{k}] \cdot (\vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz)$

अर्थात् $\int_C F(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz)$

यह रेखा समाकल का कार्तीय रूप है।

www.polytechnicpdf.com

(ii) रेखा समाकल का प्राचलिक रूप (Parametric form of Line Integral)

यदि वक्र C प्राचलिक रूप

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \text{ में हो}$$

तथा $\vec{F} = F_1(t) + F_2(t) + F_3(t)$

रेखा समाकल $= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C (F_1(t)\,dx + F_2(t)\,dy + F_3(t)\,dz)$

$$= \int_C F_1(t) \cdot \frac{dx}{dt} + F_2(t) \cdot \frac{dy}{dt} + F_3(t) \frac{dz}{dt}\, dt,$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[F_1(t) \frac{dx}{dt} + F_2(t) \frac{dy}{dt} + F_3(t) \frac{dz}{dt} \right] dt,$$

जहाँ t तथा t_2 वक्र C के लिए प्राचल की निम्न सीमा तथा उच्च सीमा (Extremities) हैं।

नोट :

- (i) यदि C एक बंद वक्र है, तो इसके अनुदिश रेखा समाकल में $\int_C \vec{F} \cdot dr$ की जगह $\oint_C \vec{F} \cdot dr$ का प्रयोग किया जाता है। इसे परिसंचरण समाकल (Circulation Integral) कहते हैं
- (ii) रेखा समाकल $\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ समाकलन पथ पर निर्भर नहीं करता।

परिसंचरण (Circulation) : यदि सदिश $\vec{F}$ किसी द्रव (linear) का वेग (velocity) को बताता है, तो $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ को वक्र C के परित: परिसंचरण (Circulation) कहा जाता है।

आघूर्ण सदिश (Irrotational Vector)

यदि किसी क्षेत्र के प्रत्येक बंद वक्र C के लिए $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ अर्थात् परिसंचरण शून्य हो तो सदिश $\vec{F}$ आघूर्ण सदिश (Irrotational Vector) कहलाता है।

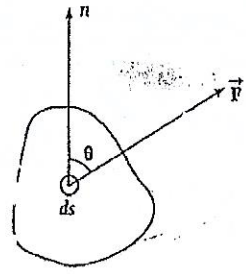
किसी बल के द्वारा किया गया कार्य (Work Done by a Force)

यदि बल $\vec{F}$ किसी वक्र C के अनुदिश गतिशील किसी कण पर क्रियाशील है, तो

बल द्वारा कृत कार्य (Total Work done by the Force) $= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ = वक्र के अनुदिश रेखा समाकल

2. पृष्ठ समाकल (Surface Integral)

मान लिया $\vec{F}$ कोई सदिश फलन तथा S कोई पृष्ठ (surface) है, तो पृष्ठ के अभिलंब के अनुदिश $\vec{F}$ के वियोजित भाग के समाकल को पृष्ठ समाकल कहा जाता है इसे $\iint_S (\vec{F} \cdot n)\, ds$ से व्यक्त किया जाता है।



पृष्ठ S के अभिलंब के अनुदिश F का वियोजित भाग

$= \vec{F} \cdot \hat{n}$ जहाँ $\hat{n}$ किसी अवयव ds पर एकक अभिलंब सदिश है

अब $\hat{n} = \dfrac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|}$ तथा $ds = \dfrac{dxdy}{|\hat{n} \cdot \vec{k}|}$

www.polytechnicpdf.com

अतः S पर $\vec{F}$ का पृष्ठ समाकल

$$\therefore \quad \Sigma \vec{F} \cdot \hat{n} = \iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n})\, ds = \iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n}) \frac{dx\, dy}{|\hat{n} \cdot \vec{k}|}$$

पृष्ठ समाकल का कार्तीय रूप (Cartesian form of Surface Integral)

यदि $\vec{F} = F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}$

$$d\vec{s} = dy\, dz\, \vec{i} + dx\, dz\, \vec{j} + dx\, dy\, \vec{k}$$

तथा $\quad \vec{F} \cdot dS = F_1 dy\, dz + F_2\, dx\, dz + F_3\, dx\, dy$

$\therefore$ पृष्ठ समाकल $\quad \int_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds = \iint_S (F_1 dy\, dz + F_2 dz\, dx + F_3 dx\, dy)$

अभिवाह (Flux)

यदि $\vec{F}$ किसी द्रव के वेग को बताता है, तो अभिवाह (Flux) $= \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n})\, ds$

पारिनालकीय सदिश फलन (Solenoidal Vector Function)

यदि $\iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n})\, ds = 0$ तो सदिश $\vec{F}$ पारिनालकीय (Solenoidal) सदिश फलन कहलाता है।

नोट

- (i) बंद पृष्ठ S पर पृष्ठ समाकल $\oint_S$ से भी निरूपित करते हैं।
- (ii) पृष्ठ समाकल ज्ञात करने के लिए उसे द्विगुण समाकलन (double integral) में व्यक्त करने से हल करने में सुविधा होती है।

www.polytechnicpdf.com

www.polytechnicpdf.com

www.polytechnicpdf.com

www.polytechnicpdf.com

उदाहरण 7. यदि t एकक स्पर्श रेखीय सदिश (unit tangent vector) है और C, xy-तल में एकक वृत्त है जिसका केन्द्र मूल

www.polytechnicpdf.com

अब $\vec{F} = x\,\vec{i} + (z^2 - z)\,\vec{j} - y\,\vec{k},\ ds = \vec{i}\,dy\,dz + \vec{j}\,dz\,dx + \vec{k}\,dx\,dy$

$\therefore$ $\vec{F} \cdot ds = \{x\,\vec{i} + (z^2 - z)\,\vec{j} - y\,\vec{k}\}$ [illegible]

www.polytechnicpdf.com

www.polytechnicpdf.com

हल : $\iiint_V \vec{F}\, dV = \iiint_V (2z\,\vec{i} - x\,\vec{j} + y\,\vec{k})\, dx\, dy\, dz$

$$= \int_0^2 \int_0^4 \left[\int_{x^2}^2 (2z\,\vec{i} - x\,\vec{j} + y\,\vec{k})\, dz \right] dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^4 [z^2\,\vec{i} - xz\,\vec{j} + yz\,\vec{k}]_{x^2}^2\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^4 [4\,\vec{i} - 2x\,\vec{j} + 2y\,\vec{k} - x^4\,\vec{i} + x^3\,\vec{j} - x^2 y\,\vec{k}]\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 [4y\,\vec{i} - 2xy\,\vec{j} + y^2\,\vec{k} - x^4 y\,\vec{i} + x^3 y\,\vec{j} - \frac{x^2 y^2}{2}\,\vec{k}]_0^4\, dx$$

$$= \int_0^2 (16\,\vec{i} - 8x\,\vec{j} + 16\,\vec{k} - 4x^4\,\vec{i} + 4x^3\,\vec{j} - 8x^2\,\vec{k})\, dx$$

$$= \left[16x\,\vec{i} - 4x^2\,\vec{j} + 16x\,\vec{k} - \frac{4x^5}{5}\,\vec{i} + x^4\,\vec{j} - \frac{8x^3}{3}\,\vec{k} \right]_0^2$$

$$= 32\,\vec{i} - 16\,\vec{j} + 32\,\vec{k} - \frac{128}{5}\,\vec{i} + 16\,\vec{j} - \frac{64}{3}\,\vec{k}$$

$$= \frac{32}{5}\,\vec{i} + \frac{32}{3}\,\vec{k} = \frac{32}{15}(3\,\vec{i} + 5\,\vec{j})$$ उत्तर

महत्त्वपूर्ण परिणाम (Important Results)

(A) रेखा समाकल

1. **(i) कार्तीय रूप**

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_C (F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz),$$

जहाँ $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + c\,\vec{k}$,

$$F(\vec{r}) = F_1\,\vec{i} + F_2\,\vec{j} + F_3\,\vec{k}$$

(ii) प्राचलिक रूप (Parametric Form) :

$$\int_C \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ F_1(t)\frac{dx}{dt} + F_2(t)\frac{dy}{dt} + F_3(t) \right\} \frac{dz}{dx}$$

2. **परिसंचरण (Circulation) :** $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ जहाँ $\vec{F}$ किसी द्रव का वेग है।

3. **आघूर्ण सदिश (Irrotational Vector) :** $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

4. **कुल कृत्त कार्य :** $\int_C \vec{F} \cdot \vec{r}$ = वक्र C के अनुदिश रेखा समाकल

www.polytechnicpdf.com

(B) पृष्ठ समाकल (Surface Integral) :

(1) पृष्ठ समाकल $= \iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n})\, ds$

$$= \iint_S (F_1\, dy\, dz + F_2\, dz\, dx + F_3\, dx\, dy)$$

(2) अभिवाह (Flux) $= \iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n})\, ds,$

जहाँ $\vec{F}$ किसी द्रव का वेग है।

(3) परिनालकीय सदिश फलन (Solenoidal) :

$$\iint_S (\vec{F} \cdot \hat{n})\, ds = 0$$

(4) आयतन समाकल (Volume Integral)

(i) $\iiint_V \vec{F}\, dv$

(ii) $\iiint_V \vec{F}\, dv = \vec{i} \iiint_V F_1\, dx\, dy\, dz + \vec{j} \iiint_V F_2\, dx\, dy\, dz + \vec{k} \iiint_V F_3\, dx\, dy\, dz$

जहाँ $\vec{F} = F_1 \vec{i} - F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}$

$dv = dx\, dy\, dz$

प्रश्नावली

1. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $\vec{F} = x^2 y^2 \vec{i} + y \vec{j}$ तथा वक्र C, xy-तल में, $y^2 = 4x$ का $(0, 0)$ से $(1, 1)$ तक का चाप है। **[BTE 2009]**

2. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{F} = y \vec{i} - x \vec{j}$ तथा वक्र C, xy–समतल में $y = x^2$ का $(0, 0)$ से $(1, 1)$ का चाप है।

3. यदि सदिश क्षेत्र $\vec{F} = x^2 \vec{i} - xy \vec{j}$ है तो मूल बिन्दु 0 से बिन्दु $Q\,(1, 1)$ तक
   (i) रेखा OQ के अनुदिश
   (ii) परवलय $y^2 = x$ के अनुदिश रेखा समाकल ज्ञात करें।

4. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ का मान ज्ञात करें, जहाँ $\vec{F} = (x^2 - y^2) \vec{i} + xy \vec{j}$ तथा वक्र C का पथ $y = x^3$ का $(0, 0)$ से $(2, 8)$ तक का चाप है।

5. $\int_C (x\, dy - y\, dx)$ का मान वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ के अनुदिश ज्ञात करें।

www.polytechnicpdf.com

6. $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ का मान ज्ञात करें, जहाँ $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} - 2xy\vec{j}$ तथा वक्र C, xy-तल में $y = 0, x = a, y = b$ तथा $x = 0$ से परिबद्ध आयत है।

7. यदि $\vec{F} = (3x^2 + 6y)\vec{i} - 14yz\vec{j} + 20xz^2\vec{k}$ है तो $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ का मान ज्ञात करें, यदि समाकल का पथ मूल बिंदु $O(0, 0, 0)$ से बिन्दु $(1, 1, 1)$ तक $x = t, y = t^2, z = t^3$ के अनुदिश है

[संकेत : $\int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int [F_1(t)\,dt - F_2(t)\,dt + F_3(t)\,dz]$

तथा $dx = dt, dy = 2t\,dt, dz = 3t^2 dt$

$\therefore \quad \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (3t^2 + 6t)\,dt - 14t^2 \times t^3 \times 2t dt + 20t \times t^6 + 3t^2\,dy$

8. वक्र C पर F का परिसंचरण ज्ञात कीजिए यदि $\vec{F} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ और C वृत्त $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ है।

[संकेत : प्राचलिक समीकरण $x = \cos\theta, y = \sin\theta, z = 0$

$$d\vec{r} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy = [(-\sin\theta)\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}]\,d\theta$$

9. बल $\vec{F} = (x^2 - y^2 + x)\vec{i} - (2xy + y)\vec{j}$ द्वारा xy-तल में परवलय $y^2 = x$ के अनुदिश $(0, 0)$ से $(1, 1)$ तक विस्थापित करने में किया गया कार्य ज्ञात करें।

10. यदि बल $\vec{F} = xy^2\vec{i} + 2x^2y\vec{j}$ एक कण को xy-तल में बिन्दु $(0, 0)$ से $(1, 3)$ तक परवलय $y = 2x^2$ के अनुदिश विस्थापित करता है तो बल द्वारा किया गया कार्य ज्ञात करें।

11. $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\,ds$ का मान ज्ञात करो जबकि $\vec{F} = xy\vec{i} - x^2\vec{j} + x\vec{k}$ तथा S समतल $2x - 2y + z = 6$ का प्रथम अष्टांक में क्षेत्र है।

12. $\iint_S \vec{A} \cdot \hat{n}\,ds$ का मान ज्ञात करो, जहाँ $A = 18z\vec{i} - 12\vec{j} + 3y\vec{k}$ तथा S समतल $2x + 3y + 6z = 12$ का प्रथम अष्टांक का क्षेत्र है।

13. यदि $\vec{F} = x\vec{i} - y\vec{j} + (z^2 - 1)\vec{k}$ और S उस बेलन का पृष्ठ है, जो पृष्ठों $z = 0, z = 1, x^2 + y^2 = 4$ से बना हुआ है तो $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\,ds$ का मान ज्ञात करें।

14. $\iint \vec{A} \cdot \hat{n}\,ds$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{A} = 2\vec{i} + x\vec{j} - 3y^2z\vec{k}$ तथा S बेलन $x^2 + y^2 = 16$ का प्रथम अष्टांश (Octant) में $z = 0$ से $z = 5$ तक का पृष्ठ है

15. $\iiint_V \phi\,dV$ का मान ज्ञात करें, जहाँ $\phi = 45x^2y$ तथा V वह आयतन है, तो समतल $4x + 2y + z = 8, x = 0, y = 0$ तथा $z = 0$ से परिबद्ध है।

16. समाकल पृष्ठ $\iint \vec{F} \cdot dS$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\vec{F} = x\vec{i} + (z^2 - zx)\vec{j} - xy\vec{k}$ तथा S उस त्रिभुज का पृष्ठ है जिसके शीर्ष $(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 4)$ हैं।

17. यदि $\vec{F} = x^2\vec{i} + z\vec{j} + yz\vec{k}$ तो $\iiint \nabla \cdot \vec{F}\,dV$ तथा $\iiint \nabla \times \vec{F}\,dV$ का मान ज्ञात करें, जहाँ V आयतज (Cuboid) के फलकों से परिबद्ध है तथा $0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c$.

www.polytechnicpdf.com

18. $\iiint_V \vec{r} \cdot dV$ का मान ज्ञात करें जहाँ V वह आयतन है, जो पृष्ठों $x = 0, x = 2, y = 0, y = 6, z = x^2$ तथा $z = 4$ से परिबद्ध है।

[संकेत : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$]

उत्तरमाला

1. 264 2. $-\frac{1}{3}$ 3. (i) 0 (ii) $\frac{1}{12}$ 4. $\frac{824}{21}$ 5. 2π 6. $-2ab^2$ 7. 5

8. $-\pi$ 9. $-\frac{2}{3}$ 10. $\frac{10}{3}$ 11. $-\frac{3}{4}$ 12. 24 13. 4π 14. 90 15. 128

16. 28/3 17. (i) $abc\frac{(2a+b)}{2}$ (ii) $abc\left(\frac{c}{2}-1\right)i$ 18. $24\vec{i} + 96\vec{j} + \frac{384}{5}\vec{k}$

□□□

www.polytechnicpdf.com

B

CHAPTER

ग्रीन, गौस एवं स्टोक के प्रमेय (Green's, Gauss's and Stokes Theorem)

1. समतल में ग्रीन प्रमेय (Green's Theorem in a Plane)

यदि xy-तल में R कोई क्षेत्र है जो सामान्य बंद वक्र C से परिबद्ध है तथा $F_1(x, y), F_2(x, y), \frac{\partial F_1}{\partial y}$ एवं $\frac{\partial F_2}{\partial x}$ क्षेत्र R में संतत (continuous) तथा अवकलनीय (differentiable) हैं तो

$$\oint_C (F_1 dx + F_2 dy) = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy$$

ग्रीन प्रमेय का सदिश रूप में (Green's Theorem in Vector Form)

सदिश रूप में ग्रीन प्रमेय निम्न रूप में दिया जाता है—

$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \iint_R (\nabla \times \vec{\mathbf{F}}) \cdot \vec{\mathbf{k}}\, dR$$

जहाँ $\vec{\mathbf{F}} = F_1 \vec{\mathbf{i}} + F_2 \vec{\mathbf{j}}$

$\vec{\mathbf{r}} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}}$; $\vec{\mathbf{k}} = z$-अक्ष के अनुदिश इकाई सदिश

तथा $dR = dx\, dy$

नोट :

- $\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \iint_R \text{curl}\, \vec{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dR$ के रूप में व्यक्त करने पर

xy-समतल के लिए $\hat{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{k}}, dR = dx\, dy$

y-समतल के लिए $\hat{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{i}}, dR = dy\, dz$

xz-समतल के लिए $\hat{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{j}}, dR = dz\, dx$

www.polytechnicpdf.com

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. एक सदिश क्षेत्र $\vec{F} = \sin y\,\vec{i} + x(1+\cos y)\,\vec{j}$ के लिए रेखा समाकल $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ का मान ज्ञात करें जहाँ C, वृत्त $x^2+y^2=a^2$ से दिया जाता है।

हल : यहाँ $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy$

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C [\sin y\,\vec{i} + x(1+\cos y)\,\vec{j}].(\vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy)$$

$$= \int_C [\sin y\,dx + x(1+\cos y)\,dy]$$

अब यहाँ $F_1 = \sin y, F_2 = x(1+\cos y)$

अब ग्रीन प्रमेय से $\oint_C (F_1 dx + F_2 dy) = \iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$

$$= \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\{x(1+\cos y)\} - \frac{\partial}{\partial y}\sin y\right] dx\,dy$$

$$= \iint_S [1+\cos y - \cos y]\,dx\,dy$$

$$= \iint_S dx\,dy = \text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi a^2$$

उदाहरण 2. सूत्र $A = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)$ से दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का क्षेत्रफल ज्ञात करें, जहाँ A, xy-तल में वक्र C द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल है।

हल : ग्रीन प्रमेय से, $\oint_C (F_1 dx + F_2 dy) = \iint_C \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$

यहाँ $F_1 = -y, F_2 = x$ $\quad \therefore \oint_C (x\,dy - y\,dy) = 2\iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right] dx\,dy$

$$= 2\iint_R dx\,dy = 2A.$$

जहाँ $A =$ वक्र C से परिबद्ध क्षेत्र

$$\therefore \quad A = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)$$

अब दीर्घवृत्त को ध्रुवीय रूप में लिखने पर,

$x = a\cos\theta \Rightarrow dx = -a\sin\theta\,d\theta$ तथा $y = b\sin\theta \Rightarrow dy = b\cos\theta\,d\theta$

www.polytechnicpdf.com

$$\therefore \quad A = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [a\cos\theta\,(a\cos\theta)\,d\theta - (b\sin\theta\,(-b\sin\theta)\,d\theta]$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}ab\int_C^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}ab\,[\theta]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2}ab \times 2\pi = \pi ab$$

उत्तर

उदाहरण 3. ग्रीन प्रमेय का प्रयोग कर $\int_C (x^2 + xy)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$ का मान निकालें। **[2016]**

जहाँ वक्र C सरल रेखा $y = \pm 1$, $x = \pm 1$ से बना वर्ग है

हल : ग्रीन प्रमेय से

$$\oint_C (F_1\,dx + F_2 dy) = \iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy$$

यहाँ $\quad F_1 = x^2 + xy \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = x$

तथा $\quad F_2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = 2x$

तथा $x = -1$ से $+1$, $y = -1$ से $+1$ के बीच है।

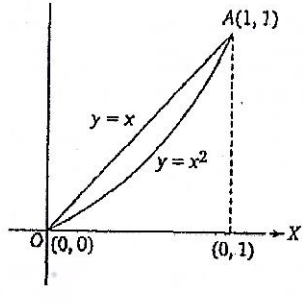
$$\therefore \quad \oint_C [(x^2 + xy)\,dx + (x^2 + y^2\,dy)] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (2x - x)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} x\int_{-1}^{1} dy\,dx = \int_{-1}^{1} x\,[y]_{-1}^{1}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x\,[1 - (-1)]\,dx = 2\int_{-1}^{1} x\,dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 2\left[\frac{1-1}{2}\right] = 2 \times 0 = 0$$

उत्तर

उदाहरण 4. $\oint_C (xy + y^2)\,dx + x^2\,dy$ के लिए ग्रीन प्रमेय का सत्यापन करें जहाँ C एक बंद वक्र है जो सरल रेखाओं $y = x$ तथा परवलय $y = x^2$ से परिबद्ध है।



हल : दिए गए वक्र $y = x$ तथा $y = x^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - x = 0 \qquad \Rightarrow \quad x(x-1) = 0$

$\Rightarrow \quad x = 0, x = 1 \qquad \Rightarrow \quad y = 0, y = 1$

अतः वक्र $(0, 0)$ तथा $(1, 1)$ पर एक-दूसरे को काटते हैं।

यहाँ $F_1 = xy + y^2 \quad \Rightarrow \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = x + 2y$

तथा $F_2 = x^2 \quad \Rightarrow \dfrac{\partial F_2}{\partial x} = 2x$

www.polytechnicpdf.com

$$\therefore \quad \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \iint_R (2x - x - 2y)\, dx\, dy \qquad \text{[ग्रीन प्रमेय से]}$$

$$= \iint_R (x - 2y)\, dx\, dy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{x} (x - 2y)\, dy\, dx = \int_0^1 [xy - y^2]_{y=x^2}^{x}\, dx$$

$$= \int_0^1 [x^2 - x^2 - x^3 + x^4]\, dx = \int_0^1 (x^4 - x^3)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{20} \quad \ldots(1)$$

अब परवलय $y = x^2$ के अनुदिश रेखा समाकल

$$\therefore \quad \int_0^1 [x(x^2) + x^4]\, dx + x^2 (2x)\, dx = \int_0^1 (3x^3 + x^4)\, dx \qquad [\because y = x^2 \Rightarrow dy = 2xd]$$

$$= \left[\frac{3x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$$

तथा रेखा $y = x$ के अनुदिश रेखा समाकल

$$\int_1^0 [\{x(x) - x^2\}\, dx + x^2 dx] = \int_1^0 3x^2 dx \qquad [\because y = x \Rightarrow dy = dx]$$

$$= \left[\frac{3x^3}{3}\right]_1^0 = -1$$

$\therefore$ अभीष्ट रेखा समाकल $\frac{19}{20} - 1 = -\frac{1}{20}$ ...(2)

समी० (1) तथा (2) से प्रमेय सत्यापित हुआ।

उदाहरण 5. ग्रीन प्रमेय से $\int_C (e^{-x} \sin y\, dx + e^{-x} \cos y\, dy)$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ C एक आयत है जिसके शीर्ष $(0, 0), (\pi, 0), (\pi, \pi/2)$ तथा $(0, \pi/2)$ हैं।

हल : ग्रीन प्रमेय से

यहाँ $F_1 = e^{-x} \sin y \quad \Rightarrow \quad F_2 = e^{-x} \cos y$

$\therefore \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = e^{-x} \cos y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = -e^{-x} \cos y$

अतः $\int_C [e^{-x} \sin y\, dx + e^{-x} \cos y\, dt]$

$$= \int_{x=0}^{\pi} \int_{y=0}^{\pi/2} [(-e^{-x} \cos y - e^{-x} (\cos y)]\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} (-2e^{-x} \cos y\, dy)\, dx\, dy$$

www.polytechnicpdf.com

$$= -2\int_0^{\pi} e^{-x}\left[\int_0^{\pi/2} \cos y\, dy\right] dx = -2\int_0^{\pi} e^{-x}\,[\sin y]_0^{\pi/2}\, dx$$

$$= -2\int_0^{\pi} e^{-x}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right] dx$$

$$= -2\int_0^{\pi} e^{-x}\, dx = -2\left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^{\pi} = 2[e^{-\pi} - e^0] = 2[e^{-\pi} - 1]$$ उत्तर

▸गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय (Gauss's Divergence Theorem)

यदि कोई आयतन V, जो किसी बंद पृष्ठ (Closed Surface) S से परिबद्ध है, तथा सदिश $\vec{F}$ सतत अवकलनीय सदिश बिंदु फलन (Continuous Differentiable Vector Point Function) है, तो

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\, ds = \iiint_V \text{div}\,\vec{F}\, ds = \iiint_V (\nabla\cdot\vec{F})\, dv$$

जहाँ $\hat{n}$ पृष्ठ S पर बाह्य दिशा से खींचा गया एकांक अभिलंब सदिश (outward unit normal vector) है। यह प्रमेय पृष्ठ समाकल को आयतन समाकल तथा आयतन समाकल को पृष्ठ समाकल में परिवर्तित करता है।

▸गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय का कार्तीय रूप (Cartesian Form of Gauss Divergence Theorem)

गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय कार्तीय रूप में निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है।

$$\iint (F_1\, dy\, dz + F_2\, dz\, dx + F_3\, dx\, dy)$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

जहाँ F_1, F_2, F_3; x, y, z में अदिश फलन हैं, $\hat{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$

तथा $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, $\hat{n}$ की दिक-कोज्यायें (Direction cosines) हैं। यह गौस प्रमेय का कार्तीय रूप है।

2. गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय से अन्य निगमन (Other Deduction from Gauss's Theorem)

गौस डाइवर्जेनस प्रमेय के आधार पर निम्न संबंधों की स्थापना की जा सकती है—

(i) $\iint_S \hat{n}\cdot\vec{F}\, ds = \iiint_V (\nabla\cdot\vec{F})\, dv$

(ii) $\iint_S \hat{n}\times\vec{F}\, ds = \iiint_V (\nabla\times\vec{F})\, dv$

(iii) $\iint_S \hat{n}\cdot\phi\, ds = \iiint_V (\nabla\phi)\, dv$

इन परिणामों से स्पष्ट है कि उपरोक्त तीनों परिणाम में $\hat{n}$ के स्थान पर ∇ रखने से प्राप्त किए जा सकते हैं।

www.polytechnicpdf.com

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय से सिद्ध करें कि

$$\iint_S \vec{r}\cdot\hat{n}\,dS = 3V,$$ जहाँ V, पृष्ठ S से परिबद्ध आयतन है।

हल : $\because \quad \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\text{div}\,\vec{r} = \nabla\cdot\vec{r} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) = 1 + 1 + 1 = 3$$

अब गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय से

$$\therefore \quad \iint_S \vec{r}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_V \text{div}\,\vec{r}\,dV = \iiint 3\,dV = 3V$$

उदाहरण 2. गौस के डाइवर्जेन्स प्रमेय से सिद्ध कीजिये कि

$$\iint_S \vec{r}\cdot\hat{n}\,dS = 108\pi$$

यदि गोला $x^2 + y^2 - z^2 = 9$ का पृष्ठ है। [U.P. Dip. Engg., 2009]

हल : $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ तथा गोले की त्रिज्या $r = 3$

गौस के डाइवर्जेन्स प्रमेय से,

$$\iint_S \vec{r}\cdot\hat{n}\,dS = \iiint_V \text{div}\,\vec{r}\,dV$$

$$= \iiint_V \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})\,dV$$

$$= \iiint_V (1 + 1 + 1)\,dV = 3\iiint dV$$

$$= 3V = 3 \times \frac{3}{3}\pi(3)^3 \qquad [\because \text{ गोले का आयतन } V = \frac{4}{3}\pi r^3]$$

$$= 4 \times 27\pi^3 = 108\pi$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 3. दिखाइये कि $\iint_S (ax\hat{i} + by\hat{j} - cz\hat{k}).\hat{n} = ds\frac{4}{3}\pi(a + b + c)$,

जहाँ गोला $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का पृष्ठ है। [U.P. Dip. Engg., 2005, 06, 08, 11]

हल : माना $\vec{F} = ax\hat{i} + by\hat{j} + cz\hat{k}$ तथा गोले का त्रिज्या $r = 1$

$$\text{div}\,\vec{F} = \nabla.\vec{F}\left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).(ax\hat{i} + by\hat{j} + cz\hat{k})$$

www.polytechnicpdf.com

$$= \frac{\partial}{\partial x}(ax) + \frac{\partial}{\partial y}(by) + \frac{\partial}{\partial z}(cz) = a + b + c$$

गौस प्रमेय से

$$(ax\,\hat{\mathbf{i}} + by\,\hat{\mathbf{j}} + cz\,\hat{\mathbf{k}}).n\,dS = \iiint \text{div}(ax\,\hat{\mathbf{i}} + by\,\hat{\mathbf{j}} + cz\,\hat{\mathbf{k}}\,dV$$

$$= \iiint_V (a+b+c)\,dV = (a+b+c)\,V \qquad \text{जहाँ } V = \text{दिये हुये गोले का आयतन}$$

$$= (a+b+c)\frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4}{3}\pi(a+b+c) \qquad [\because \text{ गोले का आयतन } V = \frac{4}{3}\pi r^3]$$ सिद्ध हुआ।

उदाहरण 4. $\iint \vec{\mathbf{F}}.\hat{\mathbf{n}}\,dS$ ज्ञात करें, जहाँ $\vec{\mathbf{F}} = (2x+3z)\,\vec{\mathbf{i}} - (xz+y)\,\vec{\mathbf{j}} + (y^2+2z)\,\vec{\mathbf{k}}$ तथा S उस गोले का पृष्ठ है जिसका केन्द्र $(3, -1, 2)$ तथा त्रिज्या 3 है। **[U.P. Dip. Engg, 2000]**

हल : $\text{div}\,\vec{\mathbf{F}} = \nabla.\vec{\mathbf{F}} = \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right).((2x+3z)\,\hat{\mathbf{i}} - (xz+y)\,\hat{\mathbf{j}} + (y^2+2z)\,\hat{\mathbf{k}})$

$$= 2 + (-1) + 2 = 3$$

$$\therefore \iint_S \vec{\mathbf{F}}.\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_V 3dV = 3 = \iiint_V dV = 3V = 3\left(\frac{4}{3}\pi(3)^3\right) = 4\pi \times 27 = 108\pi$$ उत्तर

उदाहरण 5. $\iint_S \vec{\mathbf{F}}.\hat{\mathbf{n}}\,dS$ का मान निकालिये, जहाँ $\vec{\mathbf{F}} = 4xz\,\hat{\mathbf{i}} - y^2\,\hat{\mathbf{j}} + yz\,\hat{\mathbf{k}}$ तथा S उस घन का पृष्ठ है जोकि समतलों $x=0, x=1; y=1; z=1$ से घिरा हुआ है। **[U.P. Dip. Engg., 2004, 12, 14]**

हल : $\text{div}\,(\vec{\mathbf{F}}) = \nabla.\vec{\mathbf{F}} = \left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}\right).(4xz\,\hat{\mathbf{i}} - y^2\,\hat{\mathbf{j}} + yz\,\hat{\mathbf{k}})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(4xz) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(yz) = 4z - 2y + y = 4z - y$$

अब गौस प्रमेय से

$$\iint_S \vec{\mathbf{F}}.\hat{\mathbf{n}}\,dS = \iiint_V \nabla.\vec{\mathbf{F}}\,dV = \iiint_V (4z-y)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (4z-y)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 [2z^2 - yz]_0^1\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 (2-y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{3}{2}\int_0^1 dx = \frac{3}{2}[x]_0^1 = \frac{3}{2}$$

उदाहरण 6. $\iint_S \vec{\mathbf{F}}.\hat{\mathbf{n}}\,dS$ का मान ज्ञात कीजिये जहाँ, $\vec{\mathbf{F}} = 4xz\,\hat{\mathbf{i}} - yz\,\hat{\mathbf{j}} + yz\,\hat{\mathbf{k}}$ और S उस घन का पृष्ठ है जोकि समतलों $x=0, x=2; y=0; z=2, z=0, z=2$ से परिबद्ध है। **[U.P. Dip. Engg., 2010, 15]**

www.polytechnicpdf.com

हल : $\therefore \quad \text{div}\,\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (4xy\,\hat{i} - yz\,\hat{j} + xz\,\hat{k})$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(4xy) - \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-yz) = 4y + z - x$$

गौस प्रमेय से,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_V (\nabla \cdot F)\, dV = \iiint_V (4y + z - x)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2}\int_{z=0}^{2}\left[4yz + \frac{z^2}{2} - xz\right]_{z=0}^{2} dx\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{2} [8y + 2 - 2x]\, dx\, dy$$

$$= \int_{x=0}^{2} [4y^2 + 2y - 2xy]_0^2\, dx = \int_{x=0}^{2} [16 + 4 - 4x]\, dx$$

$$= \int_0^2 (20 - 4x)\, dx = [20x - 2x^2]_0^2 = 40 - 8 = 32$$ उत्तर

उदाहरण 7. डाइवर्जेन्स प्रमेय की सहायता से $\iint_S \vec{u} \cdot \hat{n}\, dS$ का मान ज्ञात करें, जहाँ S, बेलन $x^2 + y^2 = a^2$ का पृष्ठ है, जो तल $z = 0, z = b$ से घिरा है तथा $\vec{u} = \hat{i}x - \hat{j}y + \hat{k}z$

हल : गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय से

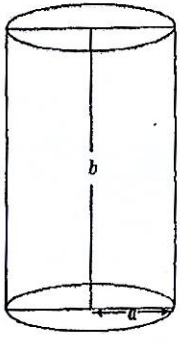
$$\iint_S \vec{u} \cdot \hat{n}\, dS = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{u})\, dV$$

$$= \iiint_V \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (\vec{i}x - \vec{j}y + \vec{k}z)\, dV$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dV$$

$$= \iiint_V (1 - 1 + 1)\, dV = \int dV = \iiint_V dx\, dy\, dz$$

= बेलन का आयतन $= \pi a^2 b$



उदाहरण 8. डाइवर्जेन्स प्रमेय की सहायता से $\iint_S (x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy)$ का मान ज्ञात करें।

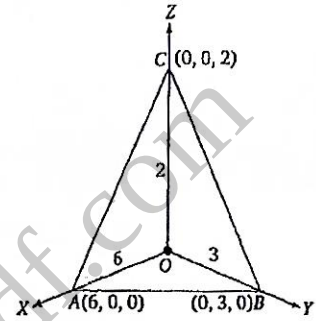
जहाँ S, समतल $x + 2y + 3z = 6$ है, जो प्रथम अष्टांक में है।

हल : $\iint_S (F_1\, dy\, dz + F_2\, dx\, dz + F_3\, dx\, dy)$

www.polytechnicpdf.com

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \qquad \text{[गौस प्रमेय का कार्तीय रूप]}$$

जहाँ V, बंद पृष्ठ से परिवद्ध आयतन है।



$$\therefore \iint_S (x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy)$$

$$= \iiint_V \left[\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right] dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_V (1+1+1)\, dx\, dy\, dz$$

$$= 3\iiint_V dV$$

$= 3 \times$ चतुष्फलक $OABC$ का आयतन

$$= 3 \times \left(\frac{1}{3} \times \Delta OAB \times OC\right) \qquad [\because OC = \text{ऊँचाई}]$$

$$= 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 3 \times 2 = 18$$ उत्तर

स्टोक का प्रमेय (Stoke's Theorem)

यह प्रमेय रेखा समाकल तथा पृष्ठ समाकल में संबंध स्थापित करता है।

कथन (Statement) : यदि $\vec{F}$ कोई संतत अवकलनीय सदिश फलन है और S ऐसा पृष्ठ है, जो वक्र C से परिबद्ध है, तो

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{curl}\, \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$$

$$= \iint_S (\Delta \times \vec{F}) \cdot \hat{n}\, dS \qquad [\because \text{curl}\, \vec{F} = \nabla \times \vec{F}]$$

जहाँ $\hat{n} = \cos\alpha\, \vec{i} + \cos\beta\, \vec{j} + \cos\gamma\, \vec{k}$

एकांक अभिलंब सदिश (Unit Vector) है जो पृष्ठ S के किसी बिन्दु पर धन दिशा में खींचा गया है।

स्टोक प्रमेय का कार्तीय रूप (Cartesian Form of Stoke's Theorem)

यहाँ $\vec{F} = F_1\, \vec{i} + F_2\, \vec{j} + F_3\, \vec{k}$, तो

$$\oint_C (F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz)$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) dz\, dx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy\right]$$

यह स्टोक प्रमेय का कार्तीय रूप है।

www.polytechnicpdf.com

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. स्टोक प्रमेय से $\oint_C (yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz)$ का मान निकाले, जहाँ C, वक्र $x^2 - y^2 = 4, z = y^2$ है। **[UPBTE 2005]**

हल : यहाँ $\vec{F} = yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$ तथा $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$

$$\therefore \quad \oint_C (yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz) = \oint_C (yz\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}) \cdot (\vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz)$$

$$= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \text{...(1)}$$

अब $\text{Curl}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}$

$$= \left[\frac{\partial(xy)}{\partial y} - \frac{\partial(xz)}{\partial z}\right]\vec{i} - \vec{j}\left[\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial z}\right] + \vec{k}\left[\frac{\partial(xz)}{\partial x} - \frac{\partial(yz)}{\partial y}\right]$$

$$= (x - x)\,\vec{i} - \vec{j}\,(y - y) + \vec{k}\,(z - z) = 0$$

अतः (1) से $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\text{curl}\,\vec{F})\ \hat{n}\,dS = 0$ $[\because \text{curl}\,\vec{F} = 0]$ उत्तर

उदाहरण 2. स्टोक प्रमेय के प्रयोग से $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\vec{F} = y^2\,\vec{i} + x^2\,\vec{j} - (x+z)\,\vec{k}$ है तथा C त्रिभुजीय परिसीमा है जिसके शीर्ष $(0, 0, 0), (1, 0, 0)$ तथा $(1, 0, 0)$ हैं। **[UPBTE 2000]**

हल : $\vec{F} = y^2\,\vec{i} + x^2\,\vec{j} - (x+z)\,\vec{k}$

$$\therefore \quad \text{Curl}\,\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x^2 & -(x-z) \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(0 - 0) - \vec{j}\,(-1 - 0) + \vec{k}\,(2x - 2y)$$

$$= \vec{j} + 2(x - y)\,\vec{k}$$

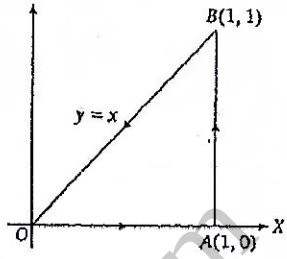
तथा $\hat{n} = \vec{k}$ [$\because$ त्रिभुज के तीनों शीर्षों के लिए $z = 0$ अतः यह xy-तल में है]

$$\therefore \quad \text{Curl}\,\vec{F} \cdot \hat{n} = [\vec{j} + 2(x - y)\,\vec{k}] \cdot \vec{k} = 2(x - y) \qquad \text{...(1)}$$

चित्र में केवल xy-तल दिखाया गया है, रेख OB का समीकरण $y = x$

www.polytechnicpdf.com

अब स्टोक प्रमेय से



$$\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \iint_S (\text{curl } \vec{\mathbf{F}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

$$= \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} 2(x-y)\, dx\, dy$$

$$= 2\int_0^1 \left[xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = 2\int_0^1 \left[x^2 - \frac{x^2}{2}\right]_0^x dx$$

$$= 2\int_0^1 \frac{x^2}{2}\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

उत्तर

उदाहरण 3. स्टोक्स के प्रमेय की सहायता से $\int_C [(2x-y)\, dx - yz^2\, dy - y^2 z\, dz]$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ C, इकाई त्रिज्या के गोले के पृष्ठ के सापेक्ष, वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ है। **[U.P. Dip. Engg., 2001]**

हल : यहाँ $\int_C [(2x-y)\, dx - yz^2\, dy - y^2 z\, dz]$

$$= \int_C [(2x-y)\hat{\mathbf{i}} - yz^2 \hat{\mathbf{j}} - y^2 z \hat{\mathbf{k}}] \cdot (dx\, \hat{\mathbf{i}} + dy\, \hat{\mathbf{j}} + dz\, \hat{k})$$

$$= \int_C [\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}] \qquad \text{जहाँ } \vec{\mathbf{F}} = (2x-y)\vec{\mathbf{i}} - yz^2 \vec{\mathbf{j}} - y^2 zx$$

$$= \iint_S (\nabla \times \vec{\mathbf{F}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS \qquad \text{[स्टोक के प्रमेय से]}$$

अब
$$\nabla \times \vec{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x-y & -yz^2 & -y^2 z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{\mathbf{i}}(-2yz + 2yz) - \vec{\mathbf{j}}(0-0) + \vec{\mathbf{k}}(0+1) = \vec{\mathbf{k}}$$

$$\therefore \iint_S (\nabla \times \vec{\mathbf{F}}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iint_S \vec{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \frac{dx\, dy}{\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}}} \qquad \left[\because dS = \frac{dx\, dy}{\hat{\mathbf{n}}\, \hat{\mathbf{k}}}\right]$$

$$= \iint_S dx\, dy = \text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi(1)^2 = \pi$$

उदाहरण 4. यदि $\vec{\mathbf{F}} = (x^2 + y^2)\vec{\mathbf{i}} - 2xy\, \vec{\mathbf{j}}$ के लिए स्टोक प्रमेय द्वारा $\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ C, आयत $x = \pm a, y = 0, y = b$ की परिसीमा है। **[UPBTE 2002]**

www.polytechnicpdf.com

हल : यहाँ $\vec{F} = (x^2 + y^2)\,\vec{i} - 2xy\,\vec{j}$

$$\therefore \quad \text{Curl } \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & -2xy & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(0-0) - \vec{j}\,(0-0) + \vec{k}\,(-2y - 2y) = 4y\,\vec{k}$$

$$\therefore \quad (\vec{\nabla} \times \vec{F}).\,\hat{n} = (-4y\,\vec{k}).\,\vec{k} = -4y \qquad [\because \hat{n} = \vec{k}] \qquad ...(1)$$

स्टोक प्रमेय से

$$\oint_C \vec{F}.\,d\vec{r} = \iint_C (\nabla \times \vec{F}).\,\hat{n}\; dS = \iint_C (-4y)\,dx\,dy \qquad [(1) \text{ से}]$$

$$= -4\int_{-a}^{a}\int_{0}^{b} y\,dx\,dy \qquad [\because x = -a \text{ से } +a \text{ तक तथा } y = 0 \text{ से } b \text{ तक विचरित होता है}]$$

$$= -4 = \int_{-a}^{a}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b dx = -4 = \int_{-a}^{a}\left(\frac{b^2}{2}\right)dx = -4\frac{b^2}{2}\int_{-a}^{a} dx$$

$$= -2b^2\,[x]_{-a}^{a} \;-2b^2 \times [a + a] = -4ab^2 \qquad ...(2)$$

उदाहरण 5. स्टोक प्रमेय से सिद्ध करें

$$\text{curl grad } \phi = 0.$$

हल : माना S किसी बंद वक्र से परिबद्ध पृष्ठ है, तो स्टोक प्रमेय से,

$$= \iint_S \text{curl (grad } \phi).\,\hat{n}\; dS = \oint_C \text{grad } \phi.\,d\vec{r} \qquad [\text{यहाँ } \vec{F}.\,\text{grad } \phi].$$

अब $$\text{grad } \phi.\,d\vec{r} = \nabla\phi.\,d\vec{r} = \left(\frac{\partial\phi}{dx}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k}\right).\,(\vec{i}\,dx + \vec{j}\,dy + \vec{k}\,dz)$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z} = d\phi$$

$$\therefore \quad \oint_C \text{grad } \phi.\,d\vec{r} = \oint_C d\phi = [\phi]_A^A, \text{ जहाँ } A, \text{ वक्र } C \text{ पर कोई बिन्दु है।}$$

$$= 0$$

अत: $$\iint_S (\text{curl grad } \phi).\,\hat{n}\; dS = 0$$

यह सम्बन्ध पृष्ठ S के सभी बिन्दुओं के लिए सत्य है।

$$\therefore \quad \text{curl grad } \phi = 0$$

www.polytechnicpdf.com

महत्वपूर्ण सूत्र

1. समतल ग्रीन प्रमेय : xy तल में

(i) $\oint_C (F_1 dx + F_2 dy) = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy$

(ii) सदिश रूप में $\oint_C \vec{\mathbf{F}} . d\vec{\mathbf{r}} = \iint_R (\nabla \times \vec{\mathbf{F}}) . \vec{\mathbf{k}}\, dS$

जहाँ $\vec{\mathbf{F}} = F_1 \vec{\mathbf{i}} + F_3 \vec{\mathbf{k}}$

$\vec{\mathbf{r}} = x\vec{\mathbf{i}} + y\vec{\mathbf{j}} + z\vec{\mathbf{k}}$

$\vec{\mathbf{k}} = z$–अक्ष के अनुदिश इकाई सदिश

2. गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय

(i) $\iint_S \vec{\mathbf{F}} . \hat{\mathbf{n}}\, dS = \iiint_V \text{div}\, F\, dV,$

जहाँ $\hat{\mathbf{n}}$ पृष्ठ S पर बाह्य दिशा से खींचा गया एकांक अभिलंब सदिश है।

(ii) कार्तीय रूप : $\iint_V \vec{\mathbf{F}} . \hat{\mathbf{n}}\, dx = \iint_S [F_1\, dy\, dz + F_2\, dz\, dx + F_3\, dx\, dy]$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz$$

जहाँ $\vec{\mathbf{F}} = F_1 \vec{\mathbf{i}} + F_2 \vec{\mathbf{j}} + F_3 \vec{\mathbf{k}}$ तथा $dV = dx\, dy\, dz$

3. स्टोक प्रमेय : (i) $\oint_C \vec{\mathbf{F}} . d\vec{\mathbf{r}} = \iint_S \text{curl}\, \vec{\mathbf{F}} . \hat{\mathbf{n}}\, dS$

(ii) कार्तीय रूप : $\oint_C \vec{\mathbf{F}} . d\vec{\mathbf{r}} = \oint_C (F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz)$

$$= \iint_S \left[\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial Z}\right] dy\, dz + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) dz\, dx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\, dy$$

प्रश्नावली

1. किसी समतल में ग्रीन प्रमेय द्वारा $\oint_C [(x + 2y)\, dx + (y + 3x\, dy)]$ का मान ज्ञात करें, जहाँ C वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ है।

2. किसी समतल में ग्रीन प्रमेय द्वारा $\oint_C [e^x (x + \sin y)\, dx + e^x (x + \cos y)\, dy]$ का मान ज्ञात करें, जहाँ वक्र C वर्ग है, जिसके शीर्ष $(\pm 1, \pm 1)$ हैं।

www.polytechnicpdf.com

3. ग्रीन प्रमेय का प्रयोग कर $\int_C [(y - \sin x)\, dx + \cos x\, dy]$ का मान निकालें, जहाँ C, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ तथा $\pi y = 2x$ द्वारा संवृत्त त्रिभुज है।

4. (i) गौस डाइवर्जेन्स प्रमेय का प्रयोग कर किसी पृष्ठ S से परिबद्ध क्षेत्र R के लिए सिद्ध करें

$$V = \iint_S \frac{1}{3}(x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy)$$

(ii) $\iint_S \nabla (x^2 + y^2 + z^2)\, dS = 6V$ (iii) $\iint_S \vec{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = 3V$

(iv) $\iiint_S \operatorname{div} \hat{\mathbf{n}}\, dv = S$ (v) $\iint_S \operatorname{curl} \vec{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = 0$

5. डाइवर्जेन्स प्रमेय का प्रयोग कर

$$\iint_S [x^2\, dy\, dz + y^2\, dz\, dx + 2z\,(xy - x - y)\, dx\, dy]$$

का मान निकालिये, जहाँ पृष्ठ S घन $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$ का पृष्ठ है।

6. $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ का पृष्ठ है तथा $\vec{\mathbf{F}} = 2x\,\vec{\mathbf{i}} + 3y\,\vec{\mathbf{j}} + 4z\,\vec{\mathbf{k}}$

7. $\iint_S [(x + z)\, dy\, dz + (y + z)\, dz\, dx + (x + y)\, dx\, dy]$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ का पृष्ठ है।

8. $\iint_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$ का मान ज्ञात करो जहाँ $\vec{\mathbf{F}} = 4xz\,\vec{\mathbf{i}} - y^2\,\vec{\mathbf{j}} + yz\,\vec{\mathbf{k}}$ तथा S उस घन का पृष्ठ है जो समतलों $x = 0$, $x = 1$ $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ से घिरा है। **[UPBTE 2004]**

9. गौस प्रमेय के प्रयोग से $\iint_S \vec{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$ का मान ज्ञात करो, यदि S गोले $x^2 - y^2 + z^2 = 9$ का पृष्ठ है। **[UPBTE 2009]**

10. स्टोक प्रमेय के प्रयोग से सिद्ध कीजिए

$$\oint_C [e^x\, dx + 2y\, dy - dz] = 0$$

जहाँ C वक्र $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$ है।

11. स्टोक प्रमेय के प्रयोग से $\int_C (xy\, dx + xy^2\, dy)$ का मान ज्ञात करो जहाँ C, xy-समतल में एक वर्ग है जिसके शीर्ष $(1, 0), (-1, 0), (0, 1)$ तथा $(0, -1)$ हैं।

12. स्टोक प्रमेय की सहायता से $\int_C [(2x - y)\, dx - yz^2\, dy - y^2 z\, dz]$ का मान ज्ञात करें, जहाँ C इकाई त्रिज्या के गोले के पृष्ठ के सापेक्ष वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ है। **[UPBTE 2001]**

www.polytechnicpdf.com

13. स्टोक के प्रमेय की सहायता से $\int_S \vec{F} \cdot d\vec{r}$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $\vec{F} = x^2 \vec{i} + xy \vec{j}$ तथा C xy-समतल में उस वर्ग की परिमाप है जो $x = 0, y = 0, z = a, y = a$ से बना है।

14. यदि $\vec{F} = (2x - y)\vec{i} - yz^2 \vec{j} - y^2 z \vec{k}$, जहाँ S गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ के ऊपर अर्द्ध पृष्ठ (upper half surface) और C उसकी सीमा है तो स्टोक का प्रमेय सत्यापित कीजिए।
[संकेत : अर्द्धपृष्ठ S की सीमा xy-तल में वृत्त है जिसका केन्द्र (0, 0, 0) है तथा त्रिज्या इकाई है। प्राचलिक समीकरण $x = \cos\theta, y = \sin\theta, z = 0$ जहाँ $0 \le \theta \le 2\pi$]

15. (i) सिद्ध कीजिए कि $\int_C \phi \nabla \psi \cdot d\vec{r} = \int (\nabla\phi \times \nabla\psi) \cdot \hat{n}\, dS$ **[UPBTE 2008]**

(ii) $\oint_C \vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$ **[UPBTE 2000]**

(iii) $\oint_C \phi \nabla\psi \cdot d\vec{r} = -\oint_C \psi \nabla\phi \cdot dr$

(iv) $\oint_C \phi \nabla\phi \cdot d\vec{r} = 0$, जहाँ C बंद वक्र है। **[UPBTE 2002]**

16. स्टोक प्रमेय से $\oint_C (yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz)$ का मान निकालें। जहाँ C, वक्र $x^2 + y^2 = 4, z = y^2$ है। **[UPBTE 2005]**

17. स्टोक्स प्रमेय का सत्यापन कीजिये

$$\iint_S \text{Curl } \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

जहाँ $\vec{F} = y^2 \vec{i} + x^2 \vec{j} - (x + z)\vec{k}$ तथा C त्रिभुज की परिसीमा है जिसके शीर्ष (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0) तथा इसे दक्षिणवर्ती अभिविन्यास की दिशा में लिया गया है **[UPBTE 2001]**

उत्तरमाला

1. π 2. $2\left(e - \frac{1}{e}\right)$ 3. $-\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}$ 5. $\frac{1}{2}$ 6. 96π 7. $\frac{64}{3}\pi$

8. 3/2 9. 108π 11. 4/3 12. π 13. $\frac{1}{2}a^2$ 14. π

□□□

www.polytechnicpdf.com

2014

अनुप्रयुक्त गणित-II

(Applied Mathematics-II)

Time : $2\frac{1}{2}$ Hrs. M.M. : 100

1. निम्न में कोई चार भाग हल कीजिये। [4 × 2 = 8]

(अ) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A^2 + 3A$ का मान ज्ञात करो।

(ब) समीकरण $y = A\cos(x)^2 + B\sin(x)^2$ के लिये अवकल समीकरण ज्ञात करो।

(स) यदि $z = x\sin y - y\sin x$, सिद्ध करो कि $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial x}$.

(द) $L(\sin 2t \cot 3t)$ का मान ज्ञात कीजिये।

(द) लाम्बिक तथा शून्य आव्यूहों की परिभाषा दीजिये।

2. निम्नलिखित में कोई दो भाग हल कीजिये। [2 × 5 = 10]

(अ) आव्यूह $\begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात करो।

(ब) $x\sin\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x$ को हल कीजिये।

(स) (i) यदि $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + 3xyz$, ∇f ज्ञात करो।

(ii) यदि $\vec{F} = \nabla(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, $\nabla \cdot \vec{F}$

3. निम्नलिखित में कोई दो भाग हल कीजिये। [2 × 5 = 10]

(अ) 6 पासों को एक साथ 729 बार उछाला गया। 5 या 6 अंक कम से कम तीन पासों पर आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये।

(ब) मान ज्ञात करो—

(i) $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^6}\,dx$

(ii) $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)}$

(स) $L^{-1}\left[\frac{1+2s}{(s+2)^2(s-1)^2}\right]$ का मान ज्ञात करो।

www.pdytechnicpdf.com

4. निम्नलिखित में कोई दो भाग हल कीजिये। **[2 × 5 = 10]**

(अ) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = 2x^2$ को हल करो।

(ब) $\int_s \vec{F}.\hat{n}\,ds$ का मान ज्ञात करो, जब $\vec{F} = 4xz\,\hat{i} - y^2\,\hat{j} + yz\,\hat{k}$ तथा S कण का पृष्ठ है जो $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 1$ से परिबद्ध है।

(स) यदि $u_1 = \frac{x_2x_3}{x_1}, u_2 = \frac{x_1x_3}{x^2}, u_3 = \frac{x_1x_2}{x_3}$; सिद्ध कीजिये $J(u_1, u_2, u_3) = 4$

5. निम्नलिखित में कोई दो भाग हल कीजिये। **[2 × 6 = 12]**

(अ) $x\,dx + y\,dy = \frac{a^2(x\,dy - y\,dx)}{x^2 + y^2}$ को हल कीजिये।

(ब) एक कण सरल आवर्त गति से गति कर रहा है। तीन उत्तरोत्तर सेकेण्डों के अन्त में कण की माध्य स्थिति से दूरियाँ x_1, x_2, x_3 हैं। सिद्ध कीजिये कि सम्पूर्ण दोलन का समय $\frac{2x}{\cos^{-1}\left[\frac{x_1 + x_3}{2x_2}\right]}$ है।

(स) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ के अभिलक्षणिक मूल तथा संगत सदिश ज्ञात कीजिये।

□□□

www.polytechnicpdf.com

2015 अनुप्रयुक्त गणित-II

(Applied Mathematics-II)

Time : $2\frac{1}{2}$ Hrs. M.M. : 100

Note : सभी प्रश्नों को हल कीजिये।

1. निम्न में से कोई चार भाग हल कीजिये— $[4 \times 2\frac{1}{2} = 10]$

(अ) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $A^2 + 2A$ का मान ज्ञात करो।

(ब) समीकरण $x = A\cos(nt + a)$ से सरल आवर्त गति का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिये।

(स) यदि $u = x^y$, सिद्ध करो कि $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$।

(द) $L\sin^2 t$ का मान ज्ञात कीजिये।

(य) विकर्ण और त्रिभुजीय आव्यूहों को परिभाषित करें।

2. निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिये— $[2 \times 5 = 10]$

(अ) आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिये।

(ब) समीकरण $x\,dy - y\,dx = \sqrt{(x^2 + y^2)}\,dx$ को हल करें।

(स) (i) यदि $\vec{V} = x^2 z\,\hat{i} - 2y^2 z^3\,\hat{j} + xy^2 z\,\hat{k}$ कर्ल $\vec{V}$ का मान बिन्दु $(1, -1, 1)$ पर ज्ञात कीजिये।

(ii) यदि $\vec{F} = xy^2\,\hat{i} + 2yz\,\hat{j} - 3yz^2\,\hat{k}$, $\nabla \cdot \vec{F}$ का मान बिन्दु $(1, -1, 1)$ पर ज्ञात कीजिये।

3. निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिये— $[2 \times 5 = 10]$

(अ) एक सिक्के को 12 बार उछाला गया तो निम्नलिखित के आने की प्रायिकता क्या होगी?

(i) 4 शीर्ष

(ii) अधिकतम 4 शीर्ष

(ब) मान ज्ञात कीजिये—

(i) $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$ (ii) $\sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)}$

(स) $L^{-1}\left[\frac{5s+3}{(s-1)(s^2+2s+5)}\right]$ का मान ज्ञात कीजिये।

www.polytechnicpdf.com

4. निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिये— [2 × 5 = 10]

(अ) $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 2y = x \log x$ को हल कीजिये।

(ब) $\int_s \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds$ का मान ज्ञात कीजिये जबकि $= 4xy\,\hat{i} + yz\,\hat{j} - xz\,\hat{k}$ और S एक घन का पृष्ठ है जो तलों $x = 0$, $x = 2, y = 0, y = 2, z = 0, z = 2$ से आबद्ध है।

(स) यदि $x = r\sin\theta\cos\phi, y = r\sin\theta\sin\phi, z = r\cos\theta$, सिद्ध करो कि $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin\theta$।

5. निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिये— [2 × 5 = 10]

(अ) $(1 + y^2)\, dx = (\tan^{-1} y - x)\, dy$ को हल कीजिये।

(ब) यदि यूरेनियम के विघटन की दर उसकी मात्रा के समानुपाती है। यदि समय T_1 और T_2 पर यूरेनियम की मात्राये M_1 और M_2 हैं तो यूरेनियम का अर्धजीवन काल ज्ञात करो।

(स) यदि $u = f(y - z, z - x, x - y)$, तो सिद्ध करो कि $\frac{\partial u}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$।

□□□

www.polytechnicpdf.com

2016 अनुप्रयुक्त गणित-II

(Applied Mathematics-II)

Time : $2\frac{1}{2}$ Hrs. M.M. : 100

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये।

1. निम्नलिखित में से कोई चार भाग हल कीजिये— [4 × 2 = 8]

(अ) इकाई आव्यूह और त्रिभुजीय आव्यूह को उदाहरण सहित परिभाषित करो।

(ब) यदि $\begin{bmatrix} x+2y-z \\ x+y \\ x-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, तो x, y और z के मान ज्ञात करो।

(स) समीकरण $ye^y\, dx = (y^3 + 2xy\, e^y)\, dy$ को हल करो।

(द) यदि $z = x \sin y + y \sin x$, तो $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ का मान ज्ञात करो।

(य) $L[e^{-t} \sin^2 t]$ का मान ज्ञात करो।

2. निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिये— [2 × 5 = 10]

(अ) सिद्ध कीजिये $\beta(m, n) = \beta(m+1, n) + \beta(m, n+1), m, n > 0$.

(ब) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & 7 & -1 \\ 1 & 9 & 16 & -13 \end{bmatrix}$ की कोटि ज्ञात करो।

(स) हल करो—$(D^2 + 3D + 2)y = e^{2x} \sin x$

अथवा

यदि $\phi(x, y, z) = 3x^2y - y^3y^2$, तो $\nabla\phi$ का मान बिन्दु $(1, -2, -1)$ पर ज्ञात करो।

3. निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिये— [2 × 5 = 10]

(अ) फलन $f(x) = e^{-x}$ की $(0, 2\pi)$ अन्तराल में फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिये।

(ब) यदि $u = ax^2 + by^2$ और $v = ax^2 - by^2$, तो $J\left(\frac{u, v}{x, y}\right)$ ज्ञात करें।

(स) यदि किसी इन्जेक्शन से खराब प्रतिक्रिया (reaction) की सम्भावित 0.001 है तो 2000 व्यक्तियों में से दो से अधिक के खराब प्रतिक्रिया होने की प्रायिकता ज्ञात करो।

4. निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिये— [2 × 5 = 10]

(अ) हल करो $(x^3D^2 + 2x^2 D - 2x)\, y = 1$

(ब) ग्रीन प्रमेय के प्रयोग से $\int_C [(x^2 + xy)\, dx + (x^2 + y^2)\, dy]$ का मान ज्ञात करो जहाँ वर्ग C, रेखा $y = \pm 1, x = \pm 1$ से परिबद्ध है।

www.polytechnicpdf.com

(स) अवकल समीकरण $(D^2 + 1)\, y = 0$ को लाप्लास रूपान्तर के प्रयोग से हल कीजिये। दिया है $y(0) = y'(0) = 1$.

5. निम्नलिखित में से कोई दो भाग हल कीजिये— [2 × 6 = 12]

(अ) कैले-हॅमिल्टन के प्रयोग से आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ का A^{-1} ज्ञात करो।

(ब) हल करो $(a^2 - 2xy - y^2)\, dx - (x + y)^2\, dy = 0$

(स) न्यूनतम वर्ग विधि के प्रयोग से निम्नलिखित आँकड़ो (data) के लिए सरल रेखा $y = ax + b$ का आसंजन कीजिये।

x	−1	0	2	3	6
y	−1	2	9	10	15

□□□

www.polytechnicpdf.com

अनुप्रयुक्त गणित-II (3rd Semester)
(APPLIED MATHEMATICS-II)

Code No. 0821/Engg.-0821

Time : 2.30 Hours] **[Maximum Marks : 50**

नोट : सभी प्रश्न हल कीजिये (Attempt all questions)—

1. निम्नलिखित में किन्हीं चार भागों को हल कीजिये। [4 × 2 = 8]

(अ) यदि आव्यूह $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ और $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ तो $A^2 - B^2$ का मान ज्ञात कीजिये।

(ब) $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy + 4x^2 = 0$ को हल कीजिये।

(स) यदि $y = e^x \sin x$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिये।

(द) $L\{e^{2t}\cos 3t\}$ का मान ज्ञात कीजिये।

(य) एक थैले मे 3 लाल तथा 5 हरी गेंद हैं। एक लाल गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये।

2. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिये— [2 × 5 = 10]

(अ) अवकल समीकरण $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = \sin(\log x^2)$ को हल कीजिये।

(ब) यदि $y = e^{ax}\sin bx$, सिद्ध कीजिये कि $\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + (a^2+b^2)\,y = 0$

(स) सिद्ध कीजिये कि $\int_0^{\pi/2} \tan^n x\, dx = \frac{\pi}{2}\sec\frac{n\pi}{2}, -1 < x < 1$

3. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिये— [2 × 5 = 10]

(अ) एक सिक्के को 12 बार उछाला जाता है।

(i) कम से कम 4 शीर्ष और

(ii) अधिकतम 4 शीर्ष पाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिये।

(ब) यदि आव्यूह $A \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, $A^3 + 3A$ का मान ज्ञात करो।

(स) कलन $f(x) = \begin{Bmatrix} -\pi, -\pi < x < 0 \\ x, 0 < x < \pi \end{Bmatrix}$ के लिए फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

4. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिये— [2 × 4 = 8]

(अ) समीकरण $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a^2 y = \sec ax$ को हल कीजिये।

www.polytechnicpdf.com

(ब) यदि आव्यूह $A = \begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 10 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ तो A^{-1} का मान ज्ञात करो। इसकी सहायता से समीकरणों $7x - y - z = 0$, $10x - 2y + z = 8$, $6x + 3y - 2z = 7$ को हल करो।

(स) यदि $r(t) = 5t^2\hat{i} + t\,\hat{j} + t^3\hat{k}$ तो सिद्ध करो कि

5. निम्नलिखित मे किन्हीं दो भागों को हल कीजिये— [2 × 6 = 12]

(अ) यदि $u_1 = \frac{x_2x_3}{x_1}$, $u_2 = \frac{x_3x_1}{x_2}$, $u_3 = \frac{x_1x_2}{x_3}$, जैकोबियन J (u_1, u_2, u_3) का मन ज्ञात कीजिये।

(ब) दिखाइए कि $\int_s (ax\hat{i} + by\hat{j} + cz\hat{k}).\hat{n}\, ds = \frac{4}{3}\pi(a + b + c)$, जहाँ पर s गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का पृष्ठ है।

(स) समीकरण $(D^2 + 9)\quad y = \cos 2t$ को लाप्लास रूपान्तरण की सहायता से हल कीजिये, जबकि $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$,

www.polytechnicpdf.com

EXAMINATION PAPER, DECEMBER-2017 U.P. (ODD SEMESTER)

Code : 0821

अनुप्रयुक्त गणित-II

(APPLIED MATHEMATICS-II)

Time : 2:30 Hours] **[Maximum Marks : 50**

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिये।/Attempt all questions :

1. निम्नलिखित में कोई चार भाग हल कीजिये।/Attempt any four parts of the following : **[4×2=8]**

(अ) यदि $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ तो A^{-1} का मान ज्ञात करो (If $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, then find A^{-1}.)

(ब) अवकल समीकरण $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{2/3}=k\frac{d^2y}{dx^2}$ की कोटि तथा घात ज्ञात करो।

Find the order and the degree of the differential equation $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{2/3}=k\frac{d^2y}{dx^2}$

(स) $L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+4)^2}\right]$ का मान ज्ञात करो (Evaluate $L^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+4)^2}\right]$)

(द) हल करो— $(D^2+D-2)y=e^{-2x}$ (*Solve* $(D^2+D-2)y=e^{-2x}$)

(इ) दिखाइये कि सदिश (2, 3, 4) (0, 1, 2) (–1, 1, –1) एक घात स्वतन्त्र है।

Show that vectors (2, 3, 4) (0, 1, 2) (–1, 1, –1) are linearly independent.

2. निम्नलिखित में कोई दो भाग हल कीजिये।/Attempt any two parts of the following : **[2×5=10]**

(अ) आव्यूह $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 6\\ 0 & 6 & 9\end{bmatrix}$ की कोटि ज्ञात करो।

Find the rank of the matrix $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 6\\ 0 & 6 & 9\end{bmatrix}$

(ब) $\int_0^1 x^6(1-x)^7dx$ का मान ज्ञात करों (Evaluate $\int_0^1 x^6(1-x)^7dx$)

(स) यदि $u=\log_e\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$, तो सिद्ध कीजिए। $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=1$

If $u=\log_e\left(\frac{x^2+y^2}{x+y}\right)$, Show that $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=1$

3. निम्नलिखित में कोई दो भाग हल कीजिये।/Attempt any two parts of the following : **[2×5=10]**

(अ) यदि $F=xy^3-x^3y$ तो ∇^2F का मान ज्ञात करो (If $F=xy^3-x^3y$ then find ∇^2F)

www.polytechnicpdf.com

(ब) हल करों— $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2y=x^2+\frac{1}{x^2}$ (Solve $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2y=x^2+\frac{1}{x^2}$)

(स) एक द्विपद बंटन में समान्तर माध्य 4 तथा विचरण 2 है तो प्रायिकता ज्ञात करो।

If mean and variance of a binomial distribution are 4 and 2 respectively, find the probability of:

(i) ठीक दो सफलता की (Exactly two successes)

(ii) कम से कम दो सफलता की (At least 2 successes)

4. निम्नलिखित में कोई दो भाग हल कीजिये।/Attempt any two parts of the following : [2×5=10]

(अ) यदि $A^{-1}=(3x^2+6y)i-14yzj+20xz^2k$ तब $\int_c A^{-1}\cdot dr^{-1}$ का मान ज्ञात करों।

यदि समाकलन का पथ मूलबिन्दु (0, 0, 0) से बिन्दु (1, 1, 1) तक $x=t$, $y=t^2$ तथा $z=t^3$ के अनुदिश है।

If $A^{-1}=(3x^2+6y)i-14yzj+20xz^2k$, then evaluate the line integral :

$\int_c A^{-1}\cdot dr^{-1}$ from (0, 0, 0) to (1, 1, 1) along the curve $C; x=t, y=t^2$ and $z=t^3$.

(ब) फलन $f(x)=x^3$ की $[-\pi,\pi]$ अन्तराल में फोरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Find lthe fourier series of the functions $f(x)=x^3$ in the interval $[-\pi,\pi]$.

(स) यदि $Z=f(x, y), x=e^u+e^{-v}, y=e^{-u}-e^v$

सिद्ध कीजिए। $\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}=x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}$

If $Z=f(x, y), x=e^u+e^{-v}, y=e^{-u}-e^v$

Prove that $\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial v}=x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}$

5. निम्नलिखित में कोई दो भाग हल कीजिये।/Attempt any two parts of the following : [2×5=10]

(अ) आव्यूह $\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ के अभिलक्षणिक मान तथा अभिलक्षणिक सदिश ज्ञात करों।

Find the Eigen values and Eigen vectors of the matrix $\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

(ब) 100 ओम के प्रतिरोध तथा 0·5 हेनरी के प्रेरकत्व को 20 वोल्ट की एक बॅटरी के साथ श्रेणी क्रम में जोड़ा गया है। परिपथ में धारा i का मान समय t के फलन के रूप में ज्ञात करों।

A resistance of 100 ohms and an inductance of 0·5 henry are connected is series with a battery of 20 volts. Find the current in a circuit as a function of t.

(स) अवकल समीकरण $y''-3y'+2y=4t+e^{3t}$ को लाप्लास रूपान्तर के प्रयोग से हल कीजिये। दिया है $y(0)=1, y'(0)=-1$

Using Laplace Transforms solve the differential equation

$y''-3y'+2y=4t+e^{3t}$, given $y(0)=1, y'(0)=-1$

www.polytechnicpdf.com

SEMESTER EXAMINATION, (U.P.) 2018

अनुप्रयुक्त गणित-II

(Applied Mathematics–II)

Code : 0821

3rd Semester

Time : 2.30 Hours] **[Maximum Marks : 50**

Notes :

(i) Attempt all questions.

(ii) Students are advised to specially check the Numerical Data of question paper in both versions. If there is any difference in Hindi translation of any question, the students should answer the question according to the English version.

(iii) Use of Pager and Mobile Phone by the students is not allowed.

1. कोई पाँच भाग हल करो। **[5 × 2 = 10]**

(क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ तो $A^2 - AB + B^2$ का मान ज्ञात करो।

(ख) हल करो $\cos^2 x \dfrac{dy}{dx} + y = \tan x$

(ग) हल करो $\sin^{-1} \dfrac{dy}{dx} = x + y$

(घ) $L\{t^2 \cos at\}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ङ) लाटरी के 1000 टिकट बेचे गए उन टिकटों में 5 इनाम है यदि एक आदमी ने एक टिकट खरीदा तो प्रायिकता ज्ञात करो कि वह आदमी इनाम जीते।

(च) यदि $\bar{f} = (x^2 - y^2)\hat{i} + 2xy\hat{j} + (y^2 - xy)\hat{k}$, तो $div\, \bar{f}$ का मान ज्ञात करो।

2. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। **[2 × 5 = 10]**

(अ) अवकल समीकरण $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = 2 \log x$ को हल करो।

(ब) अवकल समीकरण ज्ञात करो यदि $y = Ae^{2x} + Be^x + C$ जहाँ A, B व C अचर हैं।

(स) यदि $\bar{r} = a \cos t\hat{i} + a \sin t\, \hat{j} + at \tan \alpha \hat{k}$ तो $\dfrac{d\bar{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ का मान ज्ञात करो।

3. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। **[2 × 5 = 10]**

(अ) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ तो $A^3 + A^2 + A$ का मान ज्ञात करो।

(ब) फलन $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \le x \le \pi \\ -\cos x, & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$ का फोरियर श्रेणी ज्ञात करो।

(स) यदि $x = r \sin\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$ तथा $z = r \cos\theta$

तो दिखाओ $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = r^2 \sin\theta$

www.prutechnicpdf.com

4. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। [2 × 5 = 10]

(अ) मान ज्ञात करो $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$

(ब) यदि $u = \tan^{-1}\frac{x^2+y^2}{x-y}$ तो दिखाओ कि $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$

(स) निम्न आव्यूह की कोटि ज्ञात करो।

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

5. निम्नलिखित में किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। [2 × 5 = 10]

(अ) यदि $u = e^{xyz}$ तो सिद्ध करो

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2)\, e^{xyz}$$

(ब) $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{x+y+z}\, dxdydz$ का मान ज्ञात कीजिए।

(स) 60 वर्षीय व्यक्ति के 70 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता 0.65 है। 10 व्यक्तियों में, जो अब 60 वर्षीय हैं कम से कम 7 के 70 वर्ष तक जीवित रहने की प्रायिकता क्या है?

www.polytechnicpdf.com