सार्थक

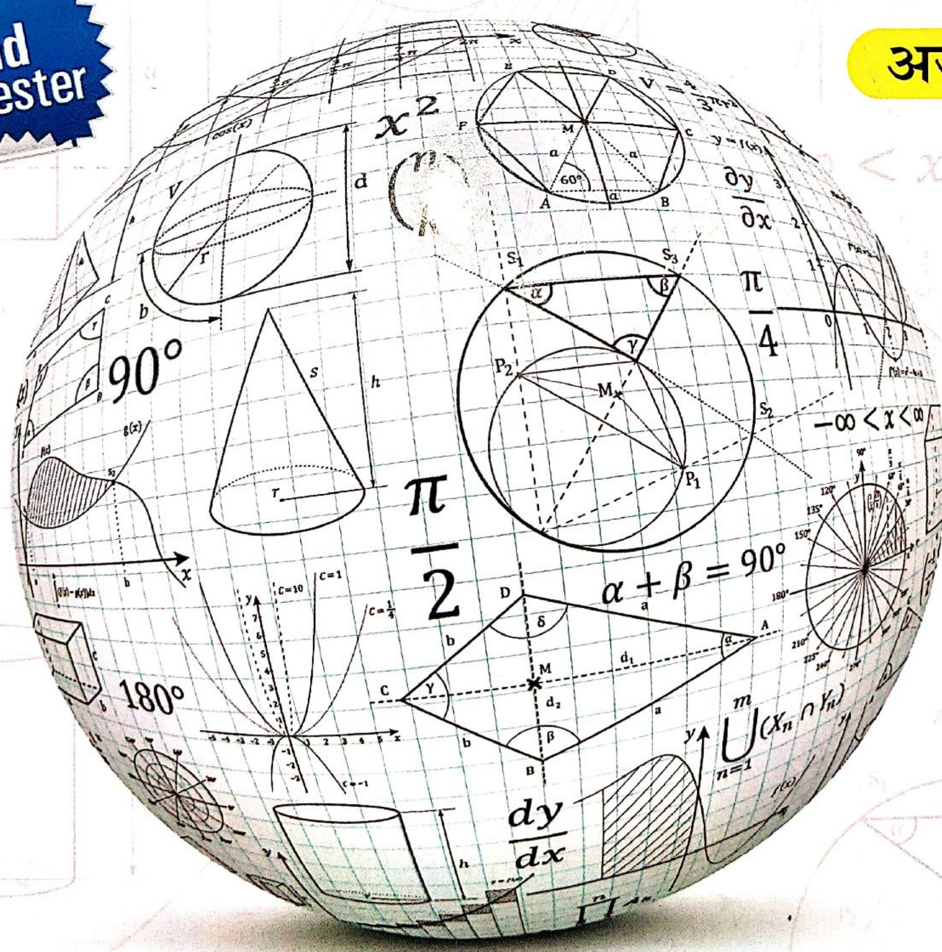
प्राविधिक शिक्षा परिषद् उ० प्र० द्वारा
स्वीकृत नवीनतम् पाठ्यक्रमानुसार

अनुप्रयुक्त गणित-II

Applied Mathematics-II

For IInd Semester

अजय कुमार



Jai Prakash Nath Publications

[redacted]

सार्थक

प्राविधिक शिक्षा परिषद् उत्तर प्रदेश द्वारा
स्वीकृत 2018 के नवीनतम् पाठ्यक्रमानुसार

अनुप्रयुक्त
गणित-II
Applied Mathematics-II

(द्वितीय सेमेस्टर : डिप्लोमा इंजीनियरिंग के सभी विद्यार्थियों के लिए)

लेखक :

अजय कुमार

एम० एस–सी० (गणित)

कु० मायावती राजकीय महिला पालीटेक्निक
बादलपुर (गौतमबुद्धनगर)

परामर्शदाता

श्रीमती अनुला
व्याख्याता (गणित)
राजकीय पालीटेक्निक,
बरेली

श्री राजकुमार रेयन
(प्रधानाचार्य)
राजकीय पालीटेक्निक,
जौनपुर

श्री ब्रजेश कुमार
(प्रधानाचार्य)
हंडिया पालीटेक्निक,
हंडिया (प्रयागराज)

श्री राम भवन
व्याख्याता (गणित)
चंदौली पालीटेक्निक,
चंदौली

प्रकाशक :

जय प्रकाश नाथ पब्लिकेशन्स

गाँधी आश्रम चौराहा
नौचन्दी रोड, मेरठ – 250 002 (यू० पी०)

यहाँ पर आपको #UP POLYTECHNIC ALL SEMESTER SYLLABUS (MACHENICAL, CIVIL, ELECTRICAL, COMPUTER SCIENCE ETC.) UP BOURD ALL STUDY SYLLABUS CLASS 8TH 9TH 10TH 11TH 12TH 👇 👇 👇 👇 👇 👇 👇 👇

CHENNLE को जरूर JOIN करें |

YOUTUBE CHENNLE
PB EDUCATIONAL POINT
TELEGRAM.... PB EDUCATIONAL

अवकलन	समाकलन
1- $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
2- $\frac{d}{dx}\log_e x = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \log\lvert x \rvert + c$
3- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
4- $\frac{d}{dx}a^x = a^x \log_e a$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$
5- $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$
6- $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
7- $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$
8- $\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$
9- $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$
10- $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$	$\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$
11- $\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$
12- $\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\cos^{-1} x + c$
13- $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$
14- $\frac{d}{dx}\sec^{-1} x = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} x + c$
15- $\frac{d}{dx}\cot^{-1} x = \frac{-1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\cot^{-1} x + c$
16- $\frac{d}{dx}\operatorname{cosec}^{-1} x = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = -\operatorname{cosec}^{-1} x + c$

प्रमेय (Theorem)

① $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$

② $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

SYLLABUS
Applied Mathematics-II

[Common to all Engineering Courses]

L	T	P
5	–	–

■ RATIONALE :

Basic elements of integral calculus, differential calculus, numerical methods, differential *m* equations included in this course will play a vital role in understanding engineering problem mathematically. This will also develop analytical as well as conceptual abilities among students.

■ LEARNING OUTCOMES

After undergoing this course, the students will be able to :

- Calculus simple integration by methods of integration
- Evaluate the area under curves, surface by using definite integrals
- Calculate the area and volume under a curve along areas
- Solve the engineering problems with numerical method
- Understand the geometric shapes used in engineering problems by co-ordinate geometry.

DETAILED CONTENTS

1. INTEGRAL CALCULUS-I (12 Periods)

Methods of Indefinite Integration :

1.1 Integration by substitution.

1.2 Integration by rational function.

1.3 Integration by partial function.

1.4 Integration by parts.

1.5 Integration of special function.

2. INTEGRAL CALCULUS-II (12 Periods)

2.1 Meaning and properties of definite integrals, Evaluation of definite integrals.

2.2 Application : Length of simple curves, Finding areas bounded by simple curves, Volume of solids of revolution, centre of mean of plane areas.

2.3 Simpson's 1/3rd and Simpson's 3/8th rule and Trapezoidal Rule : Their application in simple cases. Numerical solutions of algebraic equations; Bisections method, Regula-Falsi Method, Newton-Raphson's Method (without proof), Numerical solutions of simultaneous equations; Gauss elimination method (without proof).

3. CO-ORDINATE GEOMETRY (2 DIMENSION) (10 Periods)

3.1 Circle :

Equation of circle in standard form, Centre-Radius form, Diameter form, Two intercept form.

4. CO-ORDINATE GEOMETRY (3 DIMENSION) (08 Periods)

4.1 Straight line and planes in space :

Distance between two points in space, direction cosine and direction ratios, Finding equation of a straight line (without proof).

■ INSTRUCTIONAL STRATEGY

Basic elements of Differential Calculus, Integral Calculus and differential equations can be taught conceptually along with real engineering applications in which particular algorithm and theory can be applied. Numerical examples will be helpful in understanding the content of the subject.

■ MEANS OF ASSESSMENT

- Assignments and Quiz/Class Tests
- Mid-term and End-term Written Tests
- Model/Prototype Making

SUGGESTED DISTRIBUTION OF MARKS

Topic	Time Allotted (Periods)	Marks Allotted (%)
1.	12	28
2.	12	28
3.	10	24
4.	08	20
Total	**42**	**100**

विषय सूची

खण्ड-1 : समाकलन गणित-I 1-80

1. समाकलन 3-15
2. प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन 16-30
3. खण्डशः समाकलन 31-43
4. आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन 44-54
5. कुछ विशिष्ट समाकलन 55-80

खण्ड-2 : समाकलन गणित-II 81-172

6. निश्चित समाकलन 83-102
7. समाकलन के अनुप्रयोग 103-133
8. माध्यमान 134-137
9. आंकिक समाकलन 138-150
10. बीजीय समीकरणों का हल : आंकिक विधियाँ 151-172

खण्ड-3 : द्विविमीय निर्देशांक ज्यामिति 173-198

11. वृत्त 175-198

खण्ड-4 : त्रिविमीय निर्देशांक ज्यामिति 199-244

12. अन्तरिक्ष में बिन्दु 201-218

13. समतल 219-230

14. सरल रेखा 231-244

- परीक्षा प्रश्न-पत्र

खण्ड-1 : समाकलन गणित-I

1. समाकलन 3-15

2. प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन 16-30

3. खण्डशः समाकलन 31-43

4. आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन 44-54

5. कुछ विशिष्ट समाकलन 55-80

CHAPTER 1

समाकलन (Integration)

पिछले अध्यायों में हमने फलनों को अवकल गुणांक निकालने के बारे में पढ़ा। इस अध्याय में हम समाकलन के बारे में पढ़ेंगे। अवकल गणित में हमें दिए गए फलन का अवकल गुणांक ज्ञात करना होता है जबकि समाकलन गणित में दिए गए अवकल गुणांक से मूल फलन को प्राप्त करना होता है। अत: **समाकलन को अवकलन की विपरीत क्रिया कहा जा सकता है।**

1.1 परिभाषा (Definition)

यदि $F(x)$ कोई फलन है जिसका अवकल गुणांक $f(x)$ से दिया जाता है, तो $F(x)$ को $f(x)$ का समाकल (Integral) कहा जाता है तथा समाकलन प्राप्त करने की विधि समाकलन (Integration) कहलाती है। इसे प्रतीक रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है :

$$\int f(x)\, dx = F(x)$$

प्रतीक '$\int$' को समाकलन चिह्न कहते हैं तथा dx में x यह बतलाता है कि समाकलन चर राशि x के सापेक्ष होना है। जिस फलन का समाकलन किया जाता है उसे समाकल्य (Integrand) तथा समाकलन से प्राप्त परिणाम को समाकल (Integral) कहते हैं। $\int g'(x)\, dx = g(x)$ में $g'(x)$ समाकल्य तथा $g(x)$ समाकल है।

जैसे : (i) $\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x \quad \therefore \quad \int \sec^2 x\, dx = \tan x$

(ii) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \quad \therefore \quad \int \cos x\, dx = \sin x$

उपरोक्त उदाहरणों में $\sec^2 x, \cos x$ तथा $\frac{1}{x}$ समाकल्य (Integrand) तथा $\tan x$ तथा $\sin x$ समाकल (Integral) हैं।

टिप्पणी : (i) '$\int$' S का **विकृत रूप (elongated)** है, जो 'Sum' का पहला अक्षर है।

(ii) प्रतीक '$\int$' तथा 'dx' का अलग-अलग कोई अर्थ नहीं है।

1.2 समाकलन नियतांक (Constant of Integration)

माना $\quad \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$ तो $\int f(x)\, dx = F(x) \quad \ldots$(i)

पुनः यदि C कोई स्वेच्छ अचर हो, तो

$$\frac{d}{dx}[F(x) + C] = \frac{d}{dx} F(x) = f(x) \qquad \left(\because \frac{d}{dx}(C) = 0\right)$$

$\therefore \quad \int f(x)\, dx = F(x) + C \quad \ldots$(ii)

(i) तथा (ii) से स्पष्ट है कि किसी फलन का समाकल अद्वितीय नहीं होता, C के भिन्न-भिन्न मानों के लिए इसका मान भिन्न-भिन्न होगा।

अत: यदि $F(x)$, $f(x)$ का कोई समाकल हो तो $F(x)+C$ को उसका व्यापक समाकल कहते हैं।

अत: $\int \boldsymbol{f(x)\,dx = F(x) + C}$, जहाँ C **समाकलन नियतांक (Constant of Integration)** है।

$F(x)+C$ को C की अनिश्चितता के कारण $f(x)$ का अनिश्चित समाकल (Indefinite Integral) कहते हैं।

यदि शर्तों के अधीन अनिश्चित समाकल का कोई विशेष मान प्राप्त कर लिया जाता है, तो इसे **विशेष समाकल** (Particular Integral) कहते हैं।

नोट :

- प्रत्येक अनिश्चित समाकलन में समाकलन नियतांक का प्रयोग आवश्यक है। सुविधा के लिए इसे छोड़ दिया जाता है, किंतु प्रश्न हल करते समय विद्यार्थीगण अंत में इसका प्रयोग अवश्य करें।

1.3 मूलभूत समाकलन सूत्र (Fundamental Integral Formulae)

हम जानते हैं कि $\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + C$

इस सूत्र तथा मानक फलनों के अवकलन सूत्र के आधार पर उनके संगत समाकलन सूत्रों की सूची नीचे दी गई है :

समाकलन के मानक सूत्र

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \log x + c$
3. $\int k\,dx = kx + c$
4. $\int e^x\,dx = e^x + c$
5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
8. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$
9. $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\cot x + c$
10. $\int \sec x \cdot \tan x\,dx = \sec x + c$
11. $\int \operatorname{cosec} x \cot x\,dx = -\operatorname{cosec} x + c$
12. $\int \cot x\,dx = \log_e |\sin x| + c$
13. $\int \tan x\,dx = -\log_e |\cos x| + c$ या $\log_e |\sec x| + c$
14. $\int \sec x\,dx = \log_e |(\sec x + \tan x)| + c$ या $\log_e |\tan(\pi/4 + x/2)| + C$
15. $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \log_e |(\operatorname{cosec} x - \cot x)| + c$ या $\log |\tan(x/2)| + C$
16. (i) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$ या $-\cos^{-1}\frac{x}{a} + c$

    (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + c$
17. (i) $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ या $-\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{x}{a} + c$

    (ii) $\int \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \tan^{-1} x + c$

18. (i) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} + c$ या $-\frac{1}{a}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{a} + c$

(ii) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}\, dx = \sec^{-1} x + c$

19. $\int \cosh x\, dx = \sinh x + c$

20. $\int \sinh x\, dx = \cosh x + c$

21. $\int \operatorname{sech}^2 x\, dx = \tanh x + c$

22. $\int \operatorname{cosech}^2 x\, dx = -\coth x + c$

23. $\int \operatorname{sech} x \tanh x\, dx = -\operatorname{sech} x + c$

23. $\int \operatorname{cosech} x \coth x\, dx = -\operatorname{cosech} x + c$

नोट :

- यदि उपरोक्त मानक फलनों में समाकल्य (Integrand) में x की जगह $(ax + b)$ हो तो प्राप्त परिणाम में a से भाग दे दिया जाता है, अर्थात् $\int f(ax+b)\, dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$

  जैसे : $\int \sec^2 (ax + b)\, dx = \frac{\tan (ax + b)}{a} + c$

1.4 अचर एवं फलन के गुणनफल का समाकल (Integral of the Product of a Constant and a Function)

(i) माना λ कोई अचर है, तो $\int \lambda f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx$ ...(1)

अर्थात् अचर तथा फलन के गुणनफल का समाकल अचर तथा उस फलन के समाकल के गुणनफल के बराबर होता है।

जैसे : $\int 5x^3 dx = 5\int x^3\, dx = \frac{5x^4}{4} + c$

उपसाध्य : यदि (1) में $f(x) = 1$ हो, तो $\int \lambda \times 1\, dx = \int \lambda\, dx = \lambda \int dx = \lambda \int x^0 dx = \lambda x + c$

तथा $\int dx = x + c$

(ii) $\int \{f_1(x) \pm f_2(x) \pm f_3(x) \pm \ldots\}\, dx = \int f_1(x)\, dx \pm \int f_2(x)\, dx + \int f_3(x)\, dx + \ldots$

अर्थात् फलनों के योग अथवा अंतर का समाकल फलनों के अलग-अलग समाकल के योग या अंतर के बराबर होता है।

जैसे : $\int \left(3x^2 - 5\sin x + 6e^x + \frac{1}{x}\right) dx = 3\int x^2 dx - 5\int \sin x\, dx + 6\int e^x dx + \int \frac{1}{x}\, dx$

$$= 3 \times \frac{x^3}{3} - 5 \times (-\cos x) + 6e^x + \log_e x + c = x^3 + 5\cos x + 6e^x + \log_e x + c$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. निम्नलिखित फलनों के x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात करें :

(i) $\int (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2010]**

(ii) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2006, 16 (Back), 17(O)]**

(iii) $\int (x + 3)(x - 4)\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]**

(iv) $\int \frac{(1-x^2)^3}{x^2}\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1993]**

हल : (i) $\int (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)\, dx = \int x^3 dx + 3\int x^2\, dx + 3\int x\, dx + \int 1\, dx$

$$= \frac{x^4}{4} + 3 \times \frac{x^3}{3} + 3 \times \frac{x^2}{2} + x + C$$

$$= \frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

(ii) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int \left\{(\sqrt{x})^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \times \sqrt{x} \times \frac{1}{\sqrt{x}}\right\} dx$

$$= \int \left(x + \frac{1}{x} + 2\right) dx = \int x\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx + 2\int dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \log_e x + 2x + C$$

(iii) $\int (x+3)(x-4)\, dx = \int (x^2 - 4x + 3x - 12)\, dx$

$$= \int (x^2 - x - 12)\, dx = \int x^2 dx - \int x\, dx - 12\int dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 12x + C$$ उत्तर

(iv) $\int \frac{(1-x^2)^3}{x^2}\, dx = \int \frac{1 - 3x^2 + 3x^4 - x^6}{x^2}\, dx$

$$= \int \frac{1}{x^2}\, dx - 3\int \frac{x^2}{x^2}\, dx + 3\int \frac{x^4}{x^2}\, dx - \int \frac{x^6}{x^2}\, dx$$

$$= \int x^{-2} dx - 3\int dx + 3\int x^2 dx - \int x^4 dx$$

$$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - 3 \times x + 3\,\frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{x^{4+1}}{4+1} + C$$

$$= -\,x^{-1} - 3x + x^3 - \frac{x^5}{5} + C$$

$$= -\frac{x^5}{5} + x^3 - 3x - \frac{1}{x} + C$$ उत्तर

उदाहरण 2. निम्न समाकलनों के मान ज्ञात करें :

(i) $\int \frac{x-1}{x+1}\, dx$ (ii) $\frac{x^4}{x^2+1}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004, 07, 11, 17(B)]**

हल : (i) $\int \frac{x-1}{x+1}\, dx = \int \frac{x+1-1-1}{x+1}\, dx$

$$= \int \frac{x+1}{x+1}\, dx - \int \frac{2}{x+1}\, dx = \int dx - 2\int (x+1)^{-1}\, dx = x - 2\log_e (x+1) + C$$

(ii) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2+1}\, dx = \int \frac{x^4 - 1}{x^2+1}\, dx + \int \frac{1}{x^2+1}\, dx$

$$= \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \int (x^2-1)\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int x^2\,dx - \int dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1} x + C$$ उत्तर

त्रिकोणमितीय फलन पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 3. निम्न के समाकल ज्ञात करें :

(i) $\int (2\tan x - 3\cot x)^2 dx$ (ii) $\int \frac{5}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2013]**

(iii) $\int (2\cos x - 4\sec^2 x + 5\,\text{cosec}^2\, x)\,dx$ (iv) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$

हल : (i) $\int (2\tan x - 3\cot x)^2 dx = \int (4\tan^2 x + 9\cot^2 x - 2\times 2\tan x \times 3\cot x)\,dx$

$$= 4\int \tan^2 x\,dx + 9\int \cot^2 x\,dx - 12\int dx \quad [\because \tan x \,.\, \cot x = 1]$$

$$= 4\int (\sec^2 x - 1)\,dx + 9\int (\text{cosec}^2 x - 1)\,dx - 12\int dx$$

$$= 4\int \sec^2 x\,dx - 4\int dx + 9\int \text{cosec}^2\, x\,dx - 9\int dx - 12\int dx$$

$$= 4\tan x - 4x - 9\cot x - 9x - 12x + C$$

$$= 4\tan x - 9\cot x - 25x + C$$ उत्तर

(ii) $\int \frac{5}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = 5\int \sec^2 x \,.\, \text{cosec}^2\, x\,dx = 5\int \sec^2 x\,(1+\cot^2 x)\,dx$

$$= 5\left[\int \sec^2 x\,dx + \int \sec^2 x\cot^2 x\right] dx$$

$$= \left[\tan x + \int \frac{1\times\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx\right]$$

$$= 5\left[\tan x + \int \text{cosec}^2 x\,dx\right] = 5\left[\tan x - \cot x\right] + C$$

(iii) $\int (2\cos x - 4\sec^2 x + 5\,\text{cosec}^2\, x)\,dx$

$$= 2\int \cos x\,dx - 4\int \sec^2 x\,dx + 5\int \text{cosec}^2 x\,dx$$

$$= 2\sin x - 4\tan x - 5\cot x + C$$

(iv) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$

$$= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx - \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \text{cosec}^2\, x\,dx - \int \sec^2 x\,dx$$

$$= -\cot x - \tan x + C$$

उदाहरण 4. मान निकालें :

(i) $\int \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1997, 98]**

(ii) $\int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1998]**

(iii) $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]

(iv) $\int \frac{\sec x+\tan x}{\sec x-\tan x}\,dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]

हल : (i) $\int \sqrt{1-\cos 2x}\,dx = \int \sqrt{2\sin^2 x}\,dx = \sqrt{2}\int \sin x\,dx = -\sqrt{2}\cos x + C$ उत्तर

(ii) $\int \sqrt{1+\sin 2x}\,dx = \int \sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x.\cos x}\,dx$ $[\because \sec^2 x-\tan^2 x = 1]$

$$= \int \sqrt{(\sin x+\cos x)^2}\,dx = \int (\sin x+\cos x)\,dx$$

$$= \int \sin x\,dx + \int \cos x\,dx = -\cos x + \sin x + C$$ उत्तर

(iii) $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x}\,dx = \int \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan x}\,dx = \int \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$

$$= -\frac{\log\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{-1} + C \qquad \left[\because \int \tan(ax+b)dx = -\frac{\log\cos(ax+b)}{a}\right]$$

$$= \log\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) + C$$ उत्तर

(iv) $\int \frac{\sec x+\tan x}{\sec x-\tan x}\,dx = \int \frac{(\sec x+\tan x)(\sec x+\tan x)}{(\sec x-\tan x)(\sec x+\tan x)}\,dx$

$$= \int \frac{(\sec x+\tan x)^2}{\sec^2 x-\tan^2 x}\,dx$$

$$= \int (\sec^2 x+\tan^2 x+2\sec x.\tan x)\,dx$$

$$= \int \{\sec^2 x+(\sec^2 x-1)+2\sec x.\tan x\}\,dx$$

$$= \int \{2\sec^2 x-1+2\sec x.\tan x\}\,dx$$

$$= 2\int \sec^2 x\,dx - \int dx + 2\int \sec x.\tan x\,dx$$

$$= 2\tan x - x + 2\sec x + C$$ उत्तर

उदाहरण 5. मान निकालें :

(i) $\int \sin^3 x\,dx$ (ii) $\int \cos^3 x\,dx$ (iii) $\int \cos^4 x\,dx$

हल : (i) $\int \sin^3 x\,dx = \int \frac{3\sin x-\sin 3x}{4}\,dx$ $[\because \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x]$

$$= \frac{3}{4}\int \sin x\,dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\,dx$$

$$= \frac{3}{4}(-\cos x) - \frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right) + C$$

$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$ उत्तर

(ii) $\int \cos^3 x\,dx = \int \frac{\cos 3x+3\cos x}{4}\,dx$ $[\because \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x]$

$$= \frac{1}{4}\int \cos 3x\, dx + \frac{3}{4}\int \cos x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\sin 3x}{3} + \frac{3}{4}\sin x + C = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + C$$ उत्तर

(iii) $\int \cos^4 x\, dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\times\frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}\frac{\sin 4x}{4} + C$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{3}{8}x + C$$ उत्तर

उदाहरण 6. मान निकालें :

(i) $\frac{\sin x}{\sin (x-\alpha)}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]**

(ii) $\int \sin 4x \cos 5x\, dx$

हल : (i) $\int \frac{\sin x}{\sin (x-\alpha)} dx = \int \frac{\sin (x-\alpha+\alpha)}{\sin (x-\alpha)} dx$

$$= \int \frac{\sin (x-\alpha)\cos\alpha + \cos (x-\alpha)\sin\alpha}{\sin (x-\alpha)} dx$$

$$= \int \cos\alpha\, dx + \int \sin\alpha \cot (x-\alpha)\, dx$$

$$= \cos\alpha \int dx + \sin\alpha \int \cot (x-\alpha)\, dx$$

$$= \cos\alpha \times x + \sin\alpha \times \log \sin (x-\alpha) + C$$

$$= x\cos\alpha + \sin\alpha \log \sin (x-\alpha) + C$$ उत्तर

(ii) $\int \sin 4x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\sin 4x \cos 5x\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int [\sin (4x+5x) + \sin (4x-5x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int [\sin 9x - \sin x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \sin 9x\, dx - \int \sin x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 9x}{9} - (-\cos x)\right] + C$$

$$= -\frac{1}{18}\cos 9x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

उदाहरण 7. मान निकालें :

$$\int \tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right\} dx, -\pi/2 < x < \pi/2$$

हल : $\int \tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right\} dx = \int \tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}\right\} dx$

$$= \int \tan^{-1}\left\{\sqrt{\frac{2\sin^2\left\{\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right\}}{2\cos^2\left\{\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right\}}}\right\} dx$$

$$= \int \tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right\} dx$$

$$= \int \left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) dx \qquad [\because \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta]$$

$$= \frac{\pi}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{\pi}{4}x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{\pi}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

चरघातांकी (Exponential) फलन के समाकलन पर आधारित प्रश्न

उदाहरण 8. मान निकालें :

(i) $\int \{e^{x\log a} + e^{a\log x} + e^{a\log a}\}\, dx$ (ii) $\int \frac{2^x+3^x}{5^x} dx$

(iii) $\int \frac{(a^x+b^x)^2}{a^x b^x} dx$

हल : (i) $\int \{e^{x\log a} + e^{a\log x} + e^{a\log a}\}\, dx$

$$= \int \{e^{\log a^x} + e^{\log x^a} + e^{\log a^a}\}\, dx$$

$$= \int (a^x + x^a + a^a)\, dx \qquad [\because e^{\log f(x)} = f(x)]$$

$$= \int a^x dx + \int x^a\, dx + a^a \int dx$$

$$= \frac{a^x}{\log_e a} + \frac{x^{a+1}}{a+1} + a^a x + C$$ उत्तर

(ii) $\int \frac{2^x+3^x}{5^x} dx = \int \left(\frac{2^x}{5^x} + \frac{3^x}{5^x}\right) dx = \int \left(\frac{2}{5}\right)^x dx + \int \left(\frac{3}{5}\right)^x dx$

$$= \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\log_e \frac{2}{5}} + \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\log_e \frac{3}{5}} + C \qquad \left[\because \int a^x = \frac{a^x}{\log_e a}\right]$$

(iii) $\int \frac{(a^x + b^x)^2}{a^x b^x} dx = \int \frac{a^{2x} + b^{2x} + 2a^x b^x}{a^x b^x} dx$

$$= \int \frac{a^{2x}}{a^x b^x} dx + \int \frac{b^{2x}}{a^x b^x} + 2\int \frac{a^x b^x}{a^x b^x} dx$$

$$= \int \left(\frac{a}{b}\right)^x dx + \int \left(\frac{b}{a}\right)^x dx + 2\int dx$$

$$= \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{\log_e \left(\frac{a}{b}\right)} + \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\log_e \left(\frac{b}{a}\right)} + 2x + C$$

उदाहरण 9. यदि $f'(x) = x - \frac{1}{x^2}$ तथा $f(1) = \frac{1}{2}$ तो $f(x)$ का मान बतायें।

हल : यहाँ $f'(x) = x - \frac{1}{x^2}$ $\qquad \therefore \quad \int f'(x)\, dx = \int \left(x - \frac{1}{x^2}\right) dx$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \int x\, dx - \int x^{-2}\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C \qquad \Rightarrow \quad f(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + C = \frac{3}{2} + C \qquad \text{...(1)}$$

[$x = 1$ रखने पर]

किन्तु प्रश्न से $f(1) = 1/2$ $\therefore$ $\quad \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + C \qquad \therefore \quad C = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

(1) में C का मान रखने पर $\qquad \therefore \quad f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} - 1$

प्रश्नावली 1.1

निम्नलिखित फलनों का समाकलन करें :

1. $\int (ax^2 + bx + c)\, dx$

2. (i) $\int (1 + 2x + x^2)\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]**

(ii) $\int (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)\, dx$ $\qquad$ (iii) $\int \frac{(1 - x^2)^3}{x^2} dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1993]**

3. $\int (1 + x)\sqrt{x}\, dx$

4. (i) $\int \frac{x^3 + x^2 + 6x + 7}{x^2} dx$ (ii) $\int \frac{(1 - x^2)^2}{x^2} dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2014 (0)]**

5. $\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)^3 dx$

6. $\int \left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx$

7. $\int [(x + 2)^2 + \sec^2 x]\, dx$

8. $\int (e^{ax} + \sin bx)\, dx$

9. $\int (e^x + ax^n + \sin x + \cos x)\, dx$

10. (i) $\int \frac{x}{(x - 1)^2} dx$ (ii) $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$ (iii) $\int \frac{x + 3}{x - 2} dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2014]**

11. $\int (\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x)\, dx$

12. $\int \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

13. $\int (\tan x + \cot x)^2\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1991]**

14. $\int \sqrt{1 + \cos 2x}\, dx$

15. (i) $\int \sqrt{1 - \sin 2x}\, dx$ (ii) $\int \sqrt{1 + \sin x}\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1998]**

16. (i) $\int \frac{4 - 5 \sin x}{\cos^2 x} dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1993]**

(ii) $\int \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1998]**

17. $\int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx$

18. (i) $\int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx$ (ii) $\int \frac{5}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2013]**

(iii) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

19. $\int \frac{\cos 2x + 2 \sin^2 x}{\cos^2 x} dx$

20. $\int \frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha} dx$

21. $\int \sin^4 x\, dx$

22. $\int \cos^4 x\, dx$

23. (i) $\int \cos^3 x\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]**

(ii) $\int \cos^2 bx\, dx$

24. $\int \tan^{-1} \left(\frac{1 + \cos x}{\sin x} \right) dx$

25. $\int \tan^{-1} (\sec x + \tan x)\, dx$

26. $\int \frac{e^{6 \log_e x} - e^{5 \log_e x}}{e^{4 \log_e x} - e^{3 \log_e x}} dx$

[संकेत : $\frac{x^6 - x^5}{x^4 - x^3} = \frac{x^5}{x^3} \left[\frac{x - 1}{x - 1} \right] = x^2$]

27. (i) $\int e^x a^x\, dx$ (ii) $\int \frac{3^x + 5^x}{7^x} dx$

28. $\int \left(\frac{x}{m} + \frac{m}{x} + x^m + m^x \right) dx$

29. यदि $f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^3}$ तथा $f(1) = 0$ तो $f(x)$ का मान बतायें।

30. यदि $\frac{d}{dx} f(x) = 4x^3 - \frac{3}{x^4}$ तथा $f(2) = 0$ तो $f(x)$ का मान बतायें।

31. मान निकालें :

(i) $\int \cos 2x \cos 4x \, dx$ (ii) $\int \sin 4x \cos 3x \, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1997]**

(iii) $\int \sin 3x \cos 4x \, dx$ (iv) $\int \frac{\cos x}{\cos (x-\beta)} dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1989]**

32. निम्न का मान बतायें—

(i) $\int \frac{x^3 + 3x^2 - 2x + 7}{x^2} dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]**

(ii) $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]**

(iii) $\int \tan^2 x \, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]**

(iv) $\int \left(\frac{\sin^3 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^3 x}{\cos^2 x}\right) dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(B)]**

(v) $\int \sin x \cos x \, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]**

(vi) $\int \frac{1}{1 - \sin x} dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]**

(vii) $\int \sec x (\sec x + \tan x) \, dx$

(viii) $\int (1 - x) \sqrt{x} \, dx$

(ix) $\int \sqrt[3]{x^2} \, dx$

(x) यदि $f'(x) = 4x^3 - 6$ तथा $f(0) = 3$ तो $f(x)$ का मान बतायें।

(xi) $\int \sin^2 2x \, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]**

33. सही उत्तर के चिन्ह (✓) लगायें—

(i) $\int 3^x \, dx$ का मान है—

(a) $3^x \log 3 + c$ (b) $3^x + c$ (c) $\frac{3^x}{\log 3} + c$ (d) कोई नहीं

(ii) $\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx$ का मान है—

(a) $\tan x + x + c$ (b) $\tan x - x + c$ (c) $-\tan x + x + c$ (d) कोई नहीं

(iii) $\int \sqrt{1 + \cos 2x} \, dx$ का मान है—

(a) $\sqrt{2} \sin x + c$ (b) $\sqrt{2} \cos x + c$ (c) $-\sqrt{2} \sin x + c$ (d) कोई नहीं

(iv) $\int \sqrt{1 + \sin 2x} \, dx$ का मान है—

(a) $-\sin x + \cos x + c$ (b) $\sin x + \cos x + c$

(c) $\sin x - \cos x + c$ (d) कोई नहीं

(v) यदि $f'(x) = x^2 + 5$ तो $f(x)$ का मान है—

(a) $2x$ (b) $x^3 + 5x + c$ (c) $\frac{x^3}{3} + 5x + c$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. $a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx + k$

2. (i) $\frac{x^3}{3} + x^2 + x + C$ (ii) $\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + c$ (iii) $-\frac{x^5}{5} + x^3 - 3x - \frac{1}{x} + c$

3. $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + c$ **4.** (i) $\frac{x^2}{2} + x + 6\log x - \frac{7}{x} + c$ (ii) $\frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x}$

5. $\frac{x^7}{7} - \frac{1}{5x^5} + x^3 - \frac{3}{x} + c$ **6.** $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \log x - \frac{1}{2x^2} + c$ **7.** $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + \tan x + c$

8. $\frac{e^{ax}}{a} - \frac{\cos bx}{b} + c$ **9.** $e^x + \frac{ax^{n+1}}{n+1} - \cos x + \sin x + c$

10. (i) $\log(x-1) - \frac{1}{x-1} + c$ (ii) $x - \tan^{-1} x + c$ (iii) $x + 5\log(x-2)$

11. $\tan x - \cot x + c$ **12.** (i) $\sec x + \operatorname{cosec} x + c$ (ii) $\sin x - \cos x + c$

13. $\tan x - \cot x + c$ **14.** $\sqrt{2}\sin x + c$

15. (i) $\cos x + \sin x + c$ (ii) $2\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) + c$

16. (i) $4\tan x - 5\sec x + c$ (ii) $2\tan x - x + c$

17. $2(\operatorname{cosec} x - \cot x) - x + c$

18. (i) $-\operatorname{cosec} x + \cot x + x + c$ (ii) $5\{\tan x - \cot x\} + c$ (iii) $-\cot x - \tan x + c$

19. $\tan x + c$ **20.** $2(\sin x + x\cos\alpha) + c$

21. $\frac{1}{8}\left(3x - 2\sin 2x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c$ **22.** $\frac{1}{8}\left(3x + 2\sin 2x + \frac{\sin 4x}{4}\right) + c$

23. (i) $\frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + c$ (ii) $\frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2bx}{2b}\right)$ **24.** $\frac{x}{4}(2\pi - x) + c$

25. $\frac{x}{4}(\pi + x) + c$ **26.** $\frac{x^3}{3} + c$

27. (i) $\frac{(ae)^x}{\log(ae)} + c$ (ii) $\frac{\left(\frac{3}{7}\right)^x}{\log_e\frac{3}{7}} + \frac{\left(\frac{5}{7}\right)^3}{\log_e\frac{5}{7}} + c$

28. $\frac{x^2}{2m} + m \log x + \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{m^x}{\log m} + c$

29. $x^3 + \frac{1}{x^2} - 2$ **30.** $x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{129}{8}$

31. (i) $\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 2x}{2}\right\} + c$ (ii) $\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 7x}{7} - \cos x\right] + c$

(iii) $\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 7x}{7} + \cos x\right] + c$ (iv) $x\cos\beta + \sin\beta \log\cos(x-\beta) + c$

32. (i) $\frac{x^2}{2} + 3x - 2\log x - \frac{7}{x} + c$ (ii) $x + 2\log x - \frac{1}{x} + c$ (iii) $\tan x - x + c$

(iv) $-\cos x + \sin x + c$ (v) $-\frac{1}{4}\cos 2x + c$ (vi) $\tan x + \sec x + c$

(vii) $\tan x + \sec x + c$ (viii) $\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} + c$ (ix) $\frac{3}{5}x^{5/3} + c$

(x) $x^4 - 6x + 3$ (ix) $\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 4x}{4}\right] + c$

33. (i) (c) (ii) (d) (iii) (a) (iv) (a) (v) (b)

□□□

CHAPTER 2

प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by Substitution)

2.1 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by Substitution)

हम ने पिछले अध्याय में उन फलनों के समाकलन पर विचार किया है जो या तो मानक रूप में दिए गए हों या जिन्हें सरल करके मानक रूप में परिवर्तित किया जा सकता है। किंतु कुछ फलनों का समाकलन ज्ञात करने के लिए उन्हें उचित प्रतिस्थापन द्वारा मानक रूप में लाना पड़ता है। उचित प्रतिस्थापन द्वारा मानक रूप में लाकर समाकलन ज्ञात करने की यह विधि 'प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन' के नाम से जानी जाती है।

इस प्रकिया में दिए गए फलन को उचित प्रतिस्थपन द्वारा नई चर राशि के मानक फलन में परिवर्तित कर लिया जाता है। तत्पश्चात् मानक सूत्रों के प्रयोग से उसका समाकलन ज्ञात किया जाता है। अन्त में, प्राप्त परिणाम में पुनः मूल चर राशि को प्रतिस्थापित कर दिया जाता है।

नीचे कुछ फलनों को मानक रूप में बदलने की विधि पर विचार करेंगे।

2.1.1 Type I : जब फलन $f(ax \pm b)$ के रूप का हो

इस स्थिति में, $ax \pm b = t$ रखें, जिससे $a\,dx = dt$ अर्थात् $dx = \frac{1}{a}dt$

जैसे : $\int \cos(ax+b)\,dx$ का मान ज्ञात करें।

हल : माना $ax + b = t$ तो $a\,dx = dt$ $\quad\therefore\quad dx = \frac{1}{a}dt$

$$\therefore \quad \int \cos(ax+b)\,dx = \int \cos t \,\frac{1}{a}dt = \frac{1}{a}\int \cos t\,dt = \frac{1}{a}\sin t + C$$

$$= \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

उत्तर

Type II : (a) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ के रूप के समाकल

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

यहाँ अंश (Numerator) हर (Denominator) का अवकल गुणांक है।

माना $f(x) = t$ तो $f'(x)\,dx = dt$

$$\therefore \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} = \int \frac{dt}{t} = \log t + C$$

अर्थात्
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log f(x) + C$$

उदाहरण 1. (i) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$ का मान निकालें।

हल : माना $1 + e^x = t$ तो $e^x dx = dt$

$\therefore \quad \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{dt}{t} = \log t + C = \log(1+e^x) + C$

(ii) $\int \frac{\cot x}{\log \sin x} dx$ का मान बतायें।

हल : माना $\log \sin x = t$ तो $\frac{1}{\sin x} \cos x \, dx = dt$

अर्थात् $\quad \cot x \, dx = dt$

$\therefore \quad \int \frac{\cot x}{\log \sin x} dx = \int \frac{dt}{t} = \log t + C$

$= \log\{\log \sin x\} + C$ उत्तर

Type II. (b) $\int \frac{f'(d)\,dx}{[f(x)]^n} dx$ के रूप के समाकल

यदि हर में $[f(x)]^n$ के रूप का फलन हो तथा अंश में $f'(x)$ हो तो $f(x) = t$ रखने से फलन $\int t^{-n} dt$ के रूप का हो जाएगा जिसे $\int x^n \, dx$ के सूत्र के प्रयोग से समाकलित किया जाता है।

उदाहरण $\int \frac{3x^2}{(x^3+5)^4} dx$ का मान निकालें।

हल : माना $(x^3 + 5) = t$ तो $3x^2 dx = dt$

$\therefore \quad \int \frac{3x^2}{(x^3+5)^4} dx = \int \frac{dt}{t^4} = \frac{t^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3} \frac{1}{(x^3+5)^3} + C$

• उपर्युक्त विधि से प्राप्त कुछ मानक परिणाम (Some Standard Results)

(i) $\int \tan x \, dx = \log \sec x + C$ **(ii)** $\int \cot x \, dx = \log \sin x + C$

(iii) $\int \operatorname{cosec} x \, dx = -\log(\operatorname{cosec} x + \cot x) + C$

$= \log(\operatorname{cosec} x - \cot x) + C = \log \tan \frac{x}{2} + C$

(iv) $\int \sec x \, dx = \log(\sec x + \tan x) + C = \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C$

प्रमाण : (i) $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

माना $\cos x = t$ तो $-\sin x \, dx = dt$

$\therefore \quad \int \tan x \, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log t + C = -\log(\cos x) + C$

$= \log(\cos x)^{-1} + C = \log \sec x + C$ प्रमाणित।

(ii) $\quad \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

माना $\sin x = t$ तो $\cos x \, dx = dt$

$\therefore \qquad \int \cot x\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log t + C = \log \sin x + C$ **प्रमाणित।**

(iii) $\int \text{cosec } x\, dx = \int \frac{\text{cosec } x\, (\text{cosec } x + \cot x)}{\text{cosec } x + \cot x}$

माना $\text{cosec } x + \cot x = t$

तो $\qquad (-\text{cosec } x \cot x - \text{cosec}^2 x)\, dx = dt$

या $\qquad \text{cosec } x\, (\text{cosec } x + \cot x)\, dx = -\, dt$

$\therefore \qquad \int \text{cosec } x\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log t + C$

$$= -\log (\text{cosec } x + \cot x) + C$$ **प्रमाणित।**

पुनः $\int \text{cosec } x\, dx = \int \frac{1}{\sin x}\, dx$

$$= \int \frac{1}{2 \sin (x/2) \,.\, \cos (x/2)}\, dx$$

$$\int \frac{\frac{1}{\cos (x/2)}}{\frac{2 \sin (x/2) \times \cos (x/2)}{\cos (x/2)}} = \int \frac{\sec^2 (x/2)}{2 \tan (x/2)}\, dx$$

माना $\tan \frac{x}{2} = t \qquad \Rightarrow \quad \sec^2 \frac{x}{2} \times \frac{1}{2}\, dx = dt$

$\therefore \qquad \int \text{cosec } x\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log t + C = \log \tan \frac{x}{2} + C$

टिप्पणी : $\int \textbf{cosec } x\, dx = \frac{\int \textbf{cosec } x\, (\textbf{cosec } x - \textbf{cot } x)}{\textbf{cosec } x - \textbf{cot } x}\, dx = \log (\textbf{cosec } x - \textbf{cot } x) + C$

(iv) $\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x\, (\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}\, dx$

माना $\qquad \sec x + \tan x = t$ तो $(\sec x \,.\, \tan x + \sec^2 x)\, dx = dt$

$\Rightarrow \qquad \sec x\, (\sec x + \tan x)\, dx = dt$

$\therefore \qquad \int \sec x\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log t + C = \log (\sec x + \tan x) + C$ **प्रमाणित।**

पुनः $\int \sec x\, dx = \int \text{cosec} \left(\frac{\pi}{2} + x \right) dx$

माना $\frac{\pi}{2} + x = t$ तो $dx = dt$

अतः $\int \sec x\, dx = \int \text{cosec } t\, dt = \log \tan \left\{ \frac{(\pi/2) + x}{2} \right\} + C$

$$= \log \tan \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right\} + C$$

$\therefore \quad \int \sec x\, dx = \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + C$

अतः $\int \sec x\, dx = \log(\sec x + \tan x) + C = \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C$ प्रमाणित।

2.1.2 Type III : $\int [f(x)]^n\ f'(x)\, dx$ के रूप के समाकल

यदि समाकल्य ऐसे दो फलनों का गुणनखण्ड है जिसमें एक फलन दूसरे फलन का अवकल गुणांक हो, तो उस फलन को t मानें जिसका अवकल गुणांक दूसरा फलन है।

यदि $f(x) = t$ तो $f'(x)\, dx = dt$

तो $\int [f(x)]^n\ f'(x)\, dx = \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$

उदाहरण 1. $\int \frac{(1+\log x)^2}{x} dx$ का मान निकालें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1990]

हल : माना $1 + \log x = t$ तो $\frac{1}{x} dx = dt$

$\therefore \quad \int \frac{(1+\log x)^2}{x} dx = \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(1+\log x)^3}{3} + C$ उत्तर

उदाहरण 2. $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx$ का मान बतायें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]

हल : माना $\tan^{-1} x = t$ तो $\frac{1}{1+x^2} dx = dt$

$\therefore \quad \int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} dx = \int e^t\, dt = e^t + C = e^{\tan^{-1} x} + C$ उत्तर

उदाहरण 3. $\int \frac{(p + q \tan^{-1} x)^m}{1+x^2} dx$ का मान निकालें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2002]

हल : माना $p + q \tan^{-1} x = t$ तो $q \frac{1}{1+x^2} dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2} = \frac{dt}{q}$

$\therefore \quad \int \frac{(p + q \tan^{-1} x)^m}{1+x^2} dx = \frac{1}{q} \int t^m = \frac{1}{q} \frac{t^{m+1}}{m+1} + C$

$= \frac{1}{q(m+1)} (p + q \tan^{-1} x)^{m+1} + C$ उत्तर

2.1.3 Type IV : $\int [(ax+b)^{1/m} \pm (ax+b)^{1/n}]\, dx$ अथवा $\int \frac{ax^{1/m} + b}{ax^{1/n} + b} dx$ के रूप के समाकलन

प्रथम स्थिति में $(ax + b) = t^p$ तथा द्वितीय स्थिति में $x = t^p$ लें, जहाँ p, संख्याओं m तथा n के लघुत्तम समापवर्त्य है।

उदाहरण : (i) $\int \frac{dx}{(1+x)^{1/2} + (1+x)^{1/3}}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999, 2000]

(ii) $\int \frac{1}{x^{1/2} + x^{1/3}} dx$

हल : (i) माना $I = \int \frac{dx}{(1+x)^{1/2} + (1+x)^{1/3}}$

यहाँ 2 तथा 3 का लघुत्तम समापवर्त्य = 6

$\therefore$ माना $1 + x = t^6$

या $dx = 6t^5\, dt$ तथा $t = (1+x)^{1/6}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{6t^5}{(t^6)^{1/2} + (t^6)^{1/3}} dt = 6\int \frac{t^5}{t^3 + t^2} dt$$

$$= 6\int \frac{t^5}{t^2\,(t+1)} dt = 6\int \frac{t^3}{t+1} dt$$

$$= 6\int \left[t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right] dt$$

$$= 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \log\,(t+1)\right] + C$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\log\,(t+1)$$

$$= 2\,(1+x)^{1/2} - 3\,(1+x)^{1/3} + 6\,(1+x)^{1/6} - 6\log\,[(1+x)^{1/6} + 1] + C$$

[t का मान रखने पर]

(ii) $I = \int \frac{1}{x^{1/2} + x^{1/3}} dx$ ...(1)

यहाँ $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{1}{3}$ के हर 2 तथा 3 का लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.) 6 है। अत: भिन्नात्मक घातों से मुक्त होने के लिए (1) में $x = t^6$ रखने पर $dt = 6t^5$ तथा $t = x^{1/6}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{6t^5}{(t^6)^{1/2} + (t^6)^{1/3}} dt = 6\int \frac{t^5}{t^3 + t^2} dt$$

$$= 6\int \frac{t^5}{t^2\,(t+1)} dt = 6\int \frac{t^3}{t+1} dt$$

$$= 6\int \frac{t^3 + 1 - 1}{t+1} dt$$

$$= 6\left[\int \frac{t^3+1}{t+1} dt - \int \frac{1}{t+1} dt\right]$$

$$= 6\left[\int \frac{(t+1)\,(t^2 - t + 1)}{t+1} dt - \int \frac{1}{t+1} dt\right]$$

$$= 6\left[\int (t^2 - t + 1)\, dt - \int \frac{1}{t+1} dt\right]$$

$$I = 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \log(t+1)\right] + C$$

$$= 6\left[\frac{(x^{1/6})^3}{3} - \frac{(x^{1/6})^2}{2} + x^{1/6} - \log(x^{1/6}+1)\right] + C$$

$$= 2x^{1/2} - 3x^{1/3} + 6x^{1/6} - 6\log(x^{1/6}+1) + C$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. मान बतायें :

(i) $\int e^{4x-5}\, dx$ (ii) $\int a^{3x+2}\, dx$

(iii) $\int \sec^2(7-4x)\, dx$ (iv) $\int \sin(ax+b)\cos(ax+b)\, dx$

हल : सूत्र से $\int f'(ax+b)\, dx = \frac{f(ax+b)}{a} + c$

(i) $\int e^{4x-5}\, dx = \frac{1}{4} e^{4x-5} + C$ उत्तर

(ii) $\int a^{3x+2}\, dx = \frac{1}{3}\frac{a^{3x+2}}{\log_e a} + C$ उत्तर

(iii) $\int \sec^2(7-4x)\, dx = \frac{\tan(7-4x)}{-4} + C = -\frac{1}{4}\tan(7-4x) + C$ उत्तर

(iv) $\int \sin(ax+b)\cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{2}\int 2\sin(ax+b)\cos(ax+b)\, dx$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 2(ax+b)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos 2(ax+b)}{2a}\right] + C$$

$$= -\frac{1}{4a}\cos 2(ax+b) + C$$ उत्तर

उदाहरण 2. मान निकालें :

(i) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]**

(ii) $\int \frac{x^3}{x+2}\, dx$

हल : (i) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\, dx = \int \frac{x^2+1+2x-2x}{(x+1)^2}\, dx$

$$= \int \frac{(x+1)^2 - 2x}{(x+1)^2}\, dx$$

$$= \int \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2}\,dx - 2\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int dx - 2\int \frac{x+1-1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int dx - 2\left[\int \frac{x+1}{(x+1)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx\right]$$

$$= \int dx - 2\int \frac{1}{x+1}\,dx + 2\int (x+1)^{-2}\,dx$$

$$= x - 2\log(x+1) + 2\times\frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= x - 2\log(x+1) - \frac{2}{x+1} + C$$

उत्तर

(ii) $\int\left(\frac{x^3}{x+2}\,dx = \int (x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2}\right)dx$ [अंश में हर के वास्तविक विभाजन से]

$$= \int x^2 dx - 2\int x\,dx + 4\int dx - 8\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x - 8\log(x+2) + C$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8\log(x+2) + C$$

नोट :

- (i) का मान अंश में हर के वास्तविक विभाजन के पश्चात् भी निकाला जा सकता है।

उदाहरण 3. $\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx$ का मान निकालें।

हल : $\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}\int (2\sin x\cos x)^4\,dx$

$$= \frac{1}{16}\int (\sin 2x)^4 = \frac{1}{16}\int (\sin^2 2x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{64}\int [1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x]\,dx$$

$$= \frac{1}{64}\left[\int dx - 2\int \cos 4x\,dx + \int \frac{1+\cos 8x}{2}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{64}\left[x - \frac{2\sin 4x}{4} + \frac{1}{2}\left\{x + \frac{\sin 8x}{8}\right\}\right] + C$$

$$= \frac{1}{\ }\left[\frac{3}{\ }x - \frac{\sin 4x}{\ } + \frac{1}{\ }\sin 8x\right] + C$$

$$= \frac{1}{128}\left[3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x\right] + C$$ उत्तर

उदाहरण 4. मान निकालें :

(i) $\int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]**

(ii) $\int \sin^2 x \cos x\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]**

(iii) $\int \frac{\sec^2 x}{3 + 4\tan x}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2002]**

(iv) $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1992]**

(v) $\int \tan^3 x \sec^5 x\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1992, 90]**

(vi) $\int \sec x \log(\sec x + \tan x)\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]**

(vii) $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]**

(viii) $\int \frac{e^x (1 + x)}{\cos^2 (xe^x)}$ (ix) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1992]**

हल : (i) माना $I = \int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x \times (\sin x)^{1/2}}\,dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{(\sin x)^{3/2}}\,dx$$

यदि $\sin x = t$ तो $\cos x\,dx = dt$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{t^{3/2}} = \int t^{-3/2}\,dx = \frac{t^{-3/2+1}}{-3/2+1} + C$

$$= \frac{t^{-1/2}}{-1/2} + C = \frac{-2}{t^{1/2}} + C = \frac{-2}{(\sin x)^{1/2}} + C$$

$\therefore \quad \int \frac{\cot x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = \frac{-2}{\sqrt{\sin x}} + C$ उत्तर

(ii) $I = \int \sin^2 x \cos x\,dx$

माना $\sin x = t$ तो $\cos x\,dx = dt$ $\therefore \quad I = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$ उत्तर

(iii) $I = \int \frac{\sec^2 x}{3 + 4 \tan x} dx$

माना $3 + 4 \tan x = t$ तो $0 + 4 \sec^2 x\, dx = dt$

$\Rightarrow \quad \sec^2 x\, dx = \frac{1}{4} dt$

$\therefore \quad I = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4} \log t + C = \frac{1}{4} \log (3 + 4 \tan x) + C$ उत्तर

(iv) $I = \int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

माना $\sin^{-1} x = t$ तो $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = dt$

$\therefore \quad I = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\sin^{-1} x)^2}{2} + C$ उत्तर

(v) $I = \int \tan^3 x \,.\, \sec^5 x\, dx$

$= \int \sec^4 x \,.\, \tan^2 x \,.\, \sec x \,.\, \tan x\, dx$

$= \int \sec^4 x\, (\sec^2 x - 1) \,.\, \sec x \,.\, \tan x\, dx$

$= \int (\sec^6 x - \sec^4 x) \sec x \,.\, \tan x\, dx$

माना $\sec x = t$ तो $\sec x \,.\, \tan x\, dx = dt$

$\therefore \quad I = \int (t^6 - t^4)\, dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C$

$= \frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5} + C$ उत्तर

(vi) $I = \int \sec x \log (\sec x + \tan x)\, dx$

माना $\sec x = t \quad \Rightarrow \log (\sec x + \tan x)\, dx = dt$

$\therefore \quad I = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sec^2 x}{2} + C$ उत्तर

(vii) $I = \int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

$= \int \frac{2 \sin x \cos x / \cos^4 x}{\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} + \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x}} dx = \int \frac{2 \tan x \sec^2 x}{1 + \tan^4 x} dx$

माना $\tan^2 x = t$ तो $2 \tan x \,.\, \sec^2 x\, dx = dt$ तथा $\tan^4 x = t^2$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \tan^{-1} t + C = \tan^{-1} (\tan^2 x) + C$ उत्तर

(viii) $I = \int \frac{e^x (1+x)}{\cos^2(xe^x)} dx$

माना $xe^x = t$ तो $(xe^x + e^x)\, dx = dt$

$\Rightarrow \quad e^x (1+x)\, dx = dt$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \sec^2 t\, dt = \tan t + C = \tan(xe^x) + C$ उत्तर

(ix) $I = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$

माना $e^x + e^{-x} = t$ तो $(e^x - e^x)\, dx = dt$

$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{t} = \log t + C = \log(e^x + e^{-x}) + C$

उदाहरण 5. (i) $\int x(1-x)^n\, dx$ (ii) $\int (2x^2+3)\sqrt{x+2}\, dx$

हल : (i) $I = \int x(1-x)^n\, dx$

माना $1 - x = t$ $\Rightarrow - dx = dt$

$\Rightarrow dx = -dt$ तथा $x = 1 - t$

$$I = -\int (1-t)\, t^n\, dt = -\left[\int t^n\, dt - \int t^{n+1}\, dt\right]$$

$$= -\left[\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}\right] + C$$

$$= -\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} - \frac{(1-x)^{n+2}}{n+2}\right] + C$$

(ii) $I = \int (2x^2+3)\sqrt{x+2}\, dx$

माना $x + 2 = t \Rightarrow x = t - 2$ तथा $dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \{2(t-2)^2 + 3\}\, t^{1/2}\, dt$$

$$= \int \{2(t^2 - 4t + 4) + 3\}\, t^{1/2}\, dt$$

$$= \int (2t^2 - 8t + 11)\, t^{1/2}\, dt$$

$$= \int (2t^{5/2} - 8t^{3/2} + 11t^{1/2})\, dt$$

$$= \frac{2t^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - \frac{8t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{11t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2t^{7/2}}{7/2} - \frac{8t^{5/2}}{5/2} + \frac{11t^{3/2}}{3/2} + C$$

$$= \frac{4}{7}t^{7/2} - \frac{16}{5}t^{5/2} + \frac{22}{3}t^{3/2} + C$$

$$= \frac{4}{7}(x+2)^{7/2} - \frac{16}{5}(x+2)^{5/2} + \frac{22}{3}(x+2)^{3/2} + C$$ उत्तर

▸ परिमेयीकरण पर आधारित समाकल

यदि समाकल $\int \frac{f(x)}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}\,dx$ के रूप का हो तो सर्वप्रथम हर का परिमेयीकरण करें।

उदाहरण 6. $\int \frac{x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}\,dx$ का मान निकालें।

हल : माना $I = \int \frac{x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} = \int \frac{x[\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}]}{[\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}][\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}]}\,dx$

$$= \int \frac{x[\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{(x+a)-(x+b)}\,dx = \int \frac{x\sqrt{x+a}-x\sqrt{x+b}}{a-b}\,dx$$

$$= \frac{1}{a-b}[(x+a-a)\sqrt{x+a}-(x+b-b)\sqrt{x+b}]$$

$$= \frac{1}{a-b}\int[(x+a)^{3/2}-a\sqrt{x+a}-(x+b)^{3/2}+b\sqrt{x+b}]\,dx$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{(x+a)^{3/2+1}}{3/2+1}-\frac{a(x+a)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{(x+b)^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+\frac{b(x+b)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]+C$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\frac{2}{5}(x+a)^{5/2}-\frac{2}{3}a(x+a)^{3/2}-\frac{2}{5}(x+b)^{5/2}+\frac{2b}{3}(x+b)^{3/2}\right]+C$$

महत्वपूर्ण तथ्य एवं सूत्र

1. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log_e f(x)+C$

2. $\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+C$

3. $\int \tan x\,dx = \log_e \sec x + C$

4. $\int \cot x\,dx = \log \sin x + C$

5. $\int \sec x\,dx = \log(\sec x+\tan x)+C = \log\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

6. $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \log(\operatorname{cosec} x-\cot x)+C = -\log(\operatorname{cosec} x+\cot x)+C = \log\tan(x/2)+C$

7. (i) $\int \frac{1}{(ax+b)^{1/x}\pm(ax+b)^{1/m}}\,dx$

या $\int \frac{ax^{1/m}+b}{ax^{1/n}+c}\,dx$ के रूप के समाकल में प्रथम स्थिति में $ax+b=t^p$ लें तथा दूसरी स्थिति में $x=t^p$ लें

जहाँ p, m तथा n का लघुत्तम समापवर्त्य है।

(ii) यदि समाकल्य (Integrand) (a) $(ax+b)^{1/m}$ रूप का हो तो $ax+b=t^m$ (b) तथा यदि $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{1/m}$

तो $\frac{ax+b}{cx+d}=t^m$ लें।

8. $\int \frac{1}{\sqrt{x+a}\pm\sqrt{x+b}}\,dx$ के रूप के समाकल में हर का परिमेयीकरण करें।

प्रश्नावली 2.1

मान ज्ञात करें—

1. $\int (3x+5)^7 \, dx$ **2.** $\int \sqrt{5x+7} \, dx$ **3.** $\int \left(\sqrt{3x+2} - \frac{1}{x+2}\right) dx$

4. $\int \sin^2 (2x+5) \, dx$ **5.** $\int \sin^3 (2x+1) \, dx$ **6.** $\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \, dx$

7. $\int (e^x+1)^2 e^x \, dx$ **8.** $\int \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 dx$ **9.** $\int x\sqrt{4x+3} \, dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1993]

10. $\int (x+2)\sqrt{3x+5} \, dx$ **11.** $\int \frac{x}{\sqrt{x+4}} \, dx$ **12.** $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \, dx$

13. $\int \frac{x^3}{1+x^8} \, dx$ [**संकेत** : $x^4 = t$ रखें]

14. $\int \frac{x^7}{1+x^{16}} \, dx$ **15.** $\int \tan^3 x \sec^5 x \, dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1992, 90]

16. $\int \sec x \log (\sec x + \tan x) \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2001]

17. $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} \, dx$

18. $\int \frac{\sin 2x}{a\cos^2 x + b\sin^2 x} \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1999]

[**संकेत** : Put $a\cos^2 x + b\sin^2 x = t$]

19. $\int x e^{-x^2} \, dx$ **20.** $\int e^x \sin e^x \, dx$ **21.** $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \, dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1991]

22. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2003]

23. $\int (e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}) \, dx$

24. (i) $\int \frac{a}{b+ce^x} \, dx$ [**संकेत** : e^{-x} से गुणा-भाग कर $be^{-x} + c = t$ रखें]

(ii) $\int \frac{dx}{1+e^x} \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]

25. $\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{1+x^2} \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2001]

26. $\int \frac{\cos (a + b\log x)}{x} \, dx$ **27.** $\int \frac{1}{x(1+\log x)} \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2003]

28. $\int \frac{(p+q\tan^{-1}x)^m}{1+x^2}\,dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2002, 08]

29. $\int \tan x \sec^2 x \sqrt{1-\tan^2 x}\,dx$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sin x}}$ [संकेत : $\sqrt{1+\sin x} = \sqrt{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$]

31. $\int \sec^7 x \sin x\,dx$

32. $\int \frac{\tan x}{3+2\tan^2 x}\,dx$

[संकेत : $\int \frac{\sin x/\cos x}{3+2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\,dx = \int \frac{\sin x\cos x}{3\cos^2 x + 2\sin^2 x}$, अब $3\cos^2 x + 2\sin^2 x = t$ लें]

33. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}\,dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1992]

[संकेत : $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x}\,dx = \int \frac{\tan x\,dx}{\sqrt{\tan x}\,\sin x\cos x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\tan x}\,\sin x\,.\cos^2 x} = \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}\,dx$]

34. (i) $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\sin(x-b)}$

[संकेत : $\int \frac{1}{\sin(x-a)\sin(x-b)}\,dx = \frac{1}{\sin(b-a)}\int \frac{\sin(b-a)}{\sin(x-a)\sin(x-b)}\,dx$

$= \frac{1}{\sin(b-a)}\int \frac{\sin\{(x-a)-(x-b)\}}{\sin(x-a)\sin(x-b)}\,dx$]

(ii) $\int \frac{dx}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$

(iii) $\int \frac{\cos x}{\cos(x-\alpha)}\,dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1989]

(iv) $\int \frac{\sin x}{\sin(x-\alpha)}\,dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2002, 08]

(v) $\int \frac{\sin(x-\alpha)}{\sin(x+\alpha)}\,dx$ [संकेत : $x+\alpha=t$ रखें]

35. (i) $\int \frac{dx}{(1+x)^{1/2}-(1+x)^{1/3}}$ (ii) $\int \frac{dx}{(1+x)^{1/2}+(1+x)^{1/3}}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999, 2000]

36. (i) $\int \frac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}\,dx$ (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{3-2x}}\,dx$

(iii) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{2x+1}}$ (iv) $\int \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}\,dx$

37. निम्न का मान बतायें—

(i) $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]

(ii) $\int \frac{7}{1+x} dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

(iii) $\int e^x \cot(e^x)\, dx$ (iv) $\int \frac{\sec^2 (\log x)}{x} dx$

(v) $\int \frac{1}{(2-3x)^4} dx$

38. सही उत्तर के चिन्ह (✓) लगायें—

(i) $\int e^{x^3} x^2\, dx$ का मान बताये—

(a) $e^{x^3} + c$ (b) $\frac{1}{3} e^{x^3} + c$ (c) $\frac{1}{6} e^{x^3} + c$ (d) कोई नहीं

(ii) $\int \sqrt{\sin x} \cos x\, dx$ का मान है—

(a) $\frac{2}{3} (\cos x)^{3/2} + c$ (b) $\frac{3}{2} (\cos x)^{3/2} + c$

(c) $\frac{2}{3} (\sin x)^{3/2} + c$ (d) कोई नहीं

(iii) $\int \frac{1}{x \cos^2 (1 + \log x)} dx$ का मान है—

(a) $\tan(1 + \log x) + c$ (b) $\cot(1 + x) + c$

(c) $\sec(1 + \log x) + c$ (d) कोई नहीं

(iv) $\int \frac{dx}{1 - \cos x}$ का मान है—

(a) $\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + c$ (b) $\log(x - \sin x) + c$ (c) $-\cot \frac{x}{2} + c$ (d) कोई नहीं

(v) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ का मान है—

(a) $\cot^{-1}(e^x) + c$ (b) $\tan^{-1}(e^x) + c$

(c) $\log(e^x + 1)$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. $\left[\frac{(3x+5)^8}{24} + C\right]$ **2.** $\frac{2(5x+7)^{3/2}}{15} + C$ **3.** $\frac{2(3x+2)^{3/2}}{9} - \log(x+2) + C$

4. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \sin(4x + 10) + C$ **5.** $-\frac{3}{8} \cos(2x+1) + \frac{1}{24} \cos(6x+3) + C$

UP Polytechnic में अच्छे अंक लाने के लिए Study power point का Telegram Channel Join करें ।

6. $-2\cot\frac{x}{2} - x + C$ 7. $\frac{1}{3}(e^x + 1)^3 + C$ 8. $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$

9. $\frac{1}{40}(4x+3)^{5/2} - \frac{1}{8}(4x+3)^{3/2} + C$ 10. $\frac{2}{135}(9x + 20)(3x + 5)^{3/2}$

11. $\frac{2}{3}(x-8)\sqrt{x+4} + c$ 12. $x - 2\log(x+1) - \frac{2}{x+1} + C$

13. $\frac{1}{4}\tan^{-1}(x^4) + C$ 14. $\frac{1}{8}\tan^{-1}x^8 + C$

15. $\frac{\sec^7 x}{7} - \frac{\sec^5 x}{5} + C$ 16. $\frac{[\log(\sec x + \tan x)]^2}{2} + C$

17. $\log(\sin x + \cos x) + C$ 18. $\frac{1}{b-a}\log(a\cos^2 x + b\sin^2 x)$

19. $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$ 20. $-\cos e^x + C$ 21. $\sinh^{-1}(e^x) + C$ 22. $2\sin\sqrt{x} + C$

23. $\frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) + C$ 24. (i) $-\frac{a}{b}\log(be^{-x}) + C$ (ii) $\log\frac{e^x}{1+e^x} + C$

25. $e^{\tan^{-1}x} + C$ 26. $\frac{1}{b}\sin(a + b\log x) + C$ 27. $\log[1 + \log x] + C$

28. $\frac{(p+q+\tan^{-1}x)^{m+1}}{q(m+1)}$ 29. $-\frac{1}{3}(1 - \tan^2 x)^{3/2} + C$

30. $\sqrt{2}\log\tan\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{8}\right)$ 31. $\frac{1}{6}\sec^6 x + C$

32. $-\frac{1}{2}\log(3\cos^2 x + 2\sin^2 x) + C$ 33. $2\sqrt{\tan x} + C$

34. (i) $\operatorname{cosec}(b-a)\log\frac{\sin(x-b)}{\sin(x-a)}$ (ii) $\frac{1}{\sin(b-a)}\log\frac{\sec(x-b)}{\sec(x-a)} + C$

(iii) $x\cos\alpha - \sin\alpha\log\sec(x-\alpha) + C$ (iv) $x\cos\alpha + \sin\alpha\log\sin(x-\alpha) + C$

(v) $x\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\log\sin(x+\alpha) + C'$, जहाँ $C' = c + \alpha\cos 2\alpha$

35. (i) $2(1+x)^{1/2} + 3(1+x)^{1/3} + 6(1+x)^{1/6} + 6\log[(1+x)^{1/6} - 1] + C$

(ii) $2(1+x)^{1/2} - 3(1+x)^{1/3} + 6(1+x)^6 - 6\log[(1+x)^6 + 1]$

36. (i) $\frac{2}{3}\{(x+3)^{3/2} + (x+2)^{3/2}\} + C$ (ii) $\frac{1}{6}(1-2x)^{3/2} - \frac{1}{6}(3-2x)^{3/2} + C$

(iii) $\frac{1}{6}(2x+3)^{3/2} + \frac{1}{6}(2x+1)^{3/2} + C$ (iv) $\frac{3}{2(a-b)}[(x+a)^{3/2} - (x+b)^{3/2}] + C$

37. (i) $\log(\cos x + \sin x) + c$ (ii) $7\log(1+x) + c$

(iii) $\log\sin(e^x) + c$ (iv) $\tan(\log x) + c$ (v) $\frac{1}{9(2-3x)^3} + c$

38. (i) (b) (ii) (c) (iii) (a) (iv) (c) (v) (b)

□□□

CHAPTER 3

खण्डशः समाकलन
(Integration by Parts)

पिछले अध्याय में हमने उन फलनों का समाकलन निकालना सीखा जो मानक रूप में होते हैं या मानक रूप में लाए जा सकते हैं। यदि दिया गया फलन दो फलनों का गुणनफल हो तथा जो प्रतिस्थापन के बाद भी मानक रूप में नहीं परिवर्तित होते, तो उनका समाकलन निम्न सूत्र से प्राप्त किया जाता है :

साध्य : यदि u तथा v चर राशि x के दो फलन हों, तो

$$\int uv\, dx = u\int v\, dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v\, dx\right\}dx$$

अर्थात् दो फलनों के गुणनफल का समाकलन = प्रथम फलन × द्वितीय फलन का समाकल – {प्रथम फलन का अवकल × द्वितीय फलन का समाकल} का समाकल **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]**

प्रमाण : माना $f_1(x)$ तथा $f_2(x)$ दो फलन हैं

तो $$\frac{d}{dx}\{f_1(x)\times f_2(x)\} = f_1(x)\frac{d}{dx}\{f_2(x)\} + f_2(x)\frac{d}{dx}\{f_1(x)\}$$

$\therefore$ $$\int[f_1(x)\frac{d}{dx}f_2(x) + f_2(x)\frac{d}{dx}f_1(x)]\,dx = f_1(x)\times f_2(x)$$

या $$\int\{f_1(x)\frac{d}{dx}f_2(x)\}dx + \int\{f_2(x)\frac{d}{dx}f_1(x)\}\,dx = f_1(x)\times f_2(x)$$

या $$\int\{f_1(x)\frac{d}{dx}f_2(x)\}\,dx = f_1(x)\times f_2(x) - \int\left\{f_2(x)\frac{d}{dx}f_1(x)\right\}dx \qquad ...(1)$$

माना $f_1(x) = u$ तथा $\frac{d}{dx}\{f_2(x)\} = v$

अर्थात् $f_2(x) = \int v\, dx$

$\therefore$ (1) से

$$\int u\, v\, dx = u\int v\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}u\,.\int v\, dx\right\}dx$$

अर्थात् $$\int(\text{I}\times\text{(II)}) = \text{I}\int\text{II} - \int\text{I}'\int\text{II}$$

उदाहरण : $\int xe^x\, dx$ का मान निकालें।

माना $$I = \int \underset{\text{I}}{x}\ \underset{\text{II}}{e^x}\, dx = x\int e^x\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}x\,.\int e^x\, dx\right\}dx$$

$$= xe^x - \int xe^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1)+C$$

3.1 प्रथम एवं द्वितीय फलन का चयन (Selection of Ist and IInd Functions)

(A) खंडश: समाकलन से समाकल ज्ञात करते समय प्रथम एवं द्वितीय फलन के चयन में निम्न बातों का ध्यान रखें :

(i) यदि दो फलनों में एक फलन ऐसा हो जिसका समाकल हमें ज्ञात न हो तो उसे पहला फलन मानें तथा शेष को दूसरा फलन मानें। जैसे : $\int x \log x \, dx$ में पहला फलन $\log x$ तथा दूसरा फलन x होगा।

(ii) यदि फलन $x^n f(x)$ रूप का है तो x^n को प्रथम फलन के रूप में लें।

(iii) यदि समाकल्य में लघुगणकीय या प्रतीप वृत्तीय फलन हो तो इसे प्रथम फलन के रूप में लें। यदि इस स्थिति में केवल एक फलन है, तो '1' को द्वितीय फलन मानें।

जैसे : $\int \log x \, dx = \int \log x \times 1 \; dx$ यहाँ '1' द्वितीय फलन होगा।

$$\int \log x \, dx = \int \log x \times 1 \, dx; \int \tan^{-1} x \, dx = \int \tan^{-1} x \times 1 \, dx$$

(B) हम 'ILATE' शब्द में पहले आने वाले फलन को प्रथम फलन तथा बाद में आने वाले फलन को द्वितीय फलन के रूप में चयन करके भी समाकलन कर सकते हैं, जहाँ

I–Inverse Trigonometric Function (प्रतिलोम वृत्तीय फलन) जैसे $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ इत्यादि।

L–Logarithmic Function (लघुगणकीय फलन) जैसे $\log x$, $\log (x + a)$ इत्यादि।

A–Algebraic Function (बीजीय फलन) के लिए है

T–Trigonometric Function (त्रिकोणमितीय फलन) जैसे $\sin x$, $\cos x$ आदि।

E–Exponential Function (चरघातांकी फलन) जैसे e^x, a^x इत्यादि।

जैसे : $\int x \sin^{-1} x \, dx$ में $\sin^{-1} x$ जो प्रतिलोम वृत्तीय फलन (Inverse circular function) है, का चयन प्रथम फलन के रूप में होगा।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

Type I : जब प्रथम व द्वितीय दोनों फलनों का समाकल हमें पता हो :

उदाहरण 1. (i) $\int x \sec^2 x \, dx$ (ii) $\int x a^x \, dx$ (iii) $\int x^2 \log x \, dx$

हल : (i) माना $I = \int \underset{I}{x} \; \underset{II}{\sec^2 x} \, dx$ [यहाँ दोनों फलनों का समाकलन आसान है, किंतु x का अवकल गुणांक 1 है। अतः इसे प्रथम फलन के रूप में चुनने से सुविधा है, ILATE के अनुसार भी x (बीजीय फलन) प्रथम लिया जाएगा]

$$= x\int \sec^2 x \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} x . \int \sec^2 x \, dx \right\}$$

$$= x \tan x - \int 1 \times \tan x \, dx = x \tan x - \log \sec x + C$$

(ii) माना $I = \int \underset{I}{x} \underset{II}{a^x} \, dx$ [ILATE से a^x (चरघातांकी फलन) द्वितीय फलन होगा]

$$= x \int a^x \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (x) \int a^x \, dx \right\} dx$$

$$= x \frac{a^x}{\log_e a} - \int 1 \times \frac{a^x}{\log_e a} dx = x \frac{a^x}{\log_e a} - \frac{a^x}{(\log_e a)^2} + C$$

(iii) माना $I = \int \underset{II}{x^2} \underset{I}{\log x} \, dx$ [ILATE से $\log x$ (लघुगणकीय फलन) प्रथम फलन होगा]

$$= \log x \int x^2\, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} (\log x) \int x^2\, dx \right\} dx$$

$$= \log x \times \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x} \times \frac{x^3}{3}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{3} \int x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \log x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \left(\log x - \frac{1}{3} \right) + C$$

Type II : जब खंडशः समाकलन एक से अधिक बार होता है :

उदाहरण 2. (i) $\int x^2 e^x\, dx$ (ii) $\int x^2 \cos x\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]**

हल : (i) माना $I = \int \underset{\text{I}}{x^2}\, \underset{\text{II}}{e^x}\, dx = x^2 \int e^x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} x^2 \times \int e^x\, dx \right\} dx$

$$= x^2 e^x - \int 2x\, e^x\, dx = x^2 e^x - 2 \int \underset{\text{I}}{x}\, \underset{\text{II}}{e^x}\, dx$$

$$= x^2 e^x - 2 \left[x \int e^x\, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} x \int e^x\, dx \right\} \right] dx$$

$$= x^2 e^x - 2 [x e^x - \int 1 \times e^x\, dx] = x^2 e^x - 2 [x e^x - e^x] + C$$

(ii) $I = \int \underset{\text{I}}{x^2}\, \underset{\text{II}}{\cos x}\, dx = x^2 \int \cos x\, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} x^2 \times \int \cos x\, dx \right\} dx$

$$= x^2 \sin x - \int 2x \sin x\, dx = x^2 \sin x - 2 \int \underset{\text{I}}{x}\, \underset{\text{II}}{\sin x}\, dx$$

$$= x^2 \sin x - 2 \left[x \int \sin x\, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} x \times \int \sin x\, dx \right\} dx \right]$$

$$= x^2 \sin x - 2 [- x \cos x - \int 1 \times (- \cos x)\, dx = x^2 \sin x - 2 [- x \cos x + \sin x] + C$$

Type III : जब खंडशः समाकलन के लिए '1' (इकाई) को द्वितीय फलन लिया जाता है :

उदाहरण 3. (i) $\int \tan^{-1} x\, dx$ (ii) $\int \cos^{-1} \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2015]**

(ii) $\int \log x\, dx$

हल : (i) माना $I = \int \tan^{-1} x\, dx = \int \underset{\text{I}}{\tan^{-1} x} \times \underset{\text{II}}{1}\, dx$

$$= \tan^{-1} x \int dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} \tan^{-1} x \int dx \right\} dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1 + x^2}\, dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1 + x^2}\, dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log (1 + x^2) + C$$

(ii) $\int \cos^{-1} \frac{1 - x^2}{1 + x^2}\, dx = 2 \int \tan^{-1} x\, dx$ (अब (i) की भाँति हल करें।)

(iii) $I = \int \underset{\text{I}}{\log x} \; dx = \int \underset{\text{I}}{\log x} \times \underset{\text{II}}{1} \; dx$

$$= \log x \int dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} \log x \int dx \right\} dx = x \log x - \int \frac{1}{x} \times x \, dx$$

$$= x \log x - \int dx = x \log x - x + C = x (\log x - 1) + C$$

Type IV : जब प्रतिस्थापन से फलन ऐसे मानक फलन में परिवर्तित हो जाता है जिसका खंडशः समाकलन आसान होता है :

उदाहरण 4. (i) $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x}{1 + x^2} dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]

(ii) $\int \frac{x \tan^{-1} x}{(1 + x^2)^{3/2}} dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2014, 17(O), 17(S)]

(iii) $\int \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{a + x}} dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1994]

हल : (i) माना $\tan^{-1} x = t$ तो $\frac{1}{1 + x^2} dx = dt$ तथा $x = \tan t$

$$\therefore \quad \int \frac{x^2 \tan^{-1} x}{1 + x^2} dx = \int t \tan^2 t \, dt = \int t (\sec^2 t - 1) \, dt$$

$$= \int t \sec^2 t \, dt - \int t \, dt$$

$$= t \int \sec^2 t \, dt - \int \left\{ \frac{d}{dt} t \int \sec^2 t \, dt \right\} dt - \frac{t^2}{2}$$

$$= t \tan t - \int 1 \times \tan t \, dt - \frac{t^2}{2}$$

$$= t \tan t - \log \sec t - \frac{t^2}{2} + C$$

$$= x \tan^{-1} x - \log \sqrt{1 + x^2} - \frac{1}{2} (\tan^{-1} x)^2 + C \quad [\because \sec t = \sqrt{1 + \tan^2 t}]$$

(ii) माना $\tan^{-1} x = t$ तो $\frac{1}{1 + x^2} dx = dt$ तथा $x = \tan t$

$$\therefore \quad \int \frac{x \tan^{-1} x}{(1 + x^2)^{3/2}} dx = \int \frac{x \tan^{-1} x}{(1 + x^2)(1 + x^2)^{1/2}} dx = \int \frac{t \tan t}{(1 + \tan^2 t)^{1/2}} dt$$

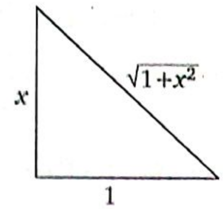
$$= \int \frac{t \tan t}{\sec t} dt = \int t \sin t \, dt$$

$$= t \int \sin t \, dt - \int \left\{ \frac{dt}{dt} \int \sin t \, dt \right\} dt$$

$$= t \times (-\cos t) - \int 1 \times (-\cos t) \, dt = -t \cos t + \int \cos t \, dt$$

$$= -t \cos t + \sin t + C \qquad \ldots(1$$

अब $\because \quad \tan t = x = \frac{x}{1} = \frac{\text{लंब}}{\text{आधार}}$



$\therefore \quad \sin t = \frac{\text{लंब}}{\text{कर्ण}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ तथा $\cos t = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

अतः (1) से $\int \frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx = -\tan^{-1} x \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$ उत्तर

(iii) मान लिया $x = a\tan^2\theta$ तो $dx = 2a\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$

$$\therefore \quad \int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}\, dx = \int \sin^{-1}\sqrt{\frac{a\tan^2\theta}{a + a\tan^2\theta}} \times 2a\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \int \sin^{-1}\sqrt{\left[\frac{a\tan^2\theta}{a(1+\tan^2\theta)}\right]}\, 2\,a\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= 2a\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}} \times \tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= 2a\int \sin^{-1}\sqrt{\sin^2\theta} \times \tan\theta\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= 2a\int \theta\,.\,\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta \qquad [\because \sin^{-1}(\sin\theta) = \theta]$$

$$= 2a\left[\theta\int\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta - \int\left\{\frac{d\theta}{d\theta}\times\int\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta\right\}d\theta\right] \qquad \ldots(1)$$

अब यदि $\tan\theta = t$ तो $\sec^2\theta\, d\theta = dt$

$$\therefore \qquad \int\tan\theta\sec^2\theta\, d\theta = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} = \frac{\tan^2\theta}{2}$$

अतः (1) से $\int \sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a+x}}\, dx = 2a\left[\frac{\theta\tan^2\theta}{2} - \int 1\times\frac{\tan^2\theta}{2}\, d\theta\right]$

$$= a\,[\theta\tan^2\theta - \int(\sec^2\theta - 1)\, d\theta]$$

$$= a\,[\theta\tan^2\theta - \{\tan\theta - \theta\}] + C$$

$$= a\,[\theta\tan^2\theta - \tan\theta + \theta] + C$$

$$= a\left[\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}\,.\,\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x}{a}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}\right] + C \qquad \left[\because \tan^2\theta = \frac{x}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(\frac{x}{a}+1\right)\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{\frac{x}{a}}\right] + C$$

$$= (a+x)\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{ax} + C$$ उत्तर

Type V : त्रिकोणमितीय सूत्रों द्वारा मानक खंडशः रूप के प्रश्न :

उदाहरण 5. $\int \frac{x}{1+\sin x}\,dx$

हल : माना $I = \int \frac{x}{1+\sin x}\,dx = \int \frac{x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}\,dx = \int \frac{x - x\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx$

$$= \int \frac{x - x\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int x\sec^2 x\,dx - \int x\sec x \,.\, \tan x\,dx$$

$$= \left[x\int \sec^2 x\,dx - \int\left\{\frac{dx}{dx}\int \sec^2 x\,dx\right\}dx\right]$$

$$- \left[x\int \sec x\,.\,\tan x\,dx - \int\left\{\frac{dx}{dx}\int \sec x\,.\,\tan dx\right]dx\right]$$

$$= [x\tan x - \int \tan x\,dx] - [x\sec x - \int 1\times \sec x\,dx]$$

$$= [x\tan x - \log\sec x] - [x\sec x - \log(\sec x + \tan x) + C$$

$$= x(\tan x - \sec x) - \log\sec x + \log(\sec x + \tan x) + C$$

Type VI : विशेष फलन (Special Functions) :

उदाहरण 6. (i) $\int e^x\{f(x) + f'(x)\}\,dx = e^x f(x) + C$ (ii) $\int\{xf'(x) + f(x)\}\,dx = xf(x) + C$

प्रमाण : (i) $\int e^x\{f(x) + f'(x)\}\,dx$

$$= \int \underset{\text{II}}{e^x}\,\underset{\text{I}}{f(x)}\,dx + \int e^x f'(x)\,dx$$

$$= f(x)\int e^x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\int e^x dx\right\}dx + \int e^x f'(x)\,dx$$

$$= e^x f(x) - \int e^x f'(x)\,dx + \int e^x f'(x)\,dx + C = e^x f(x) + C$$

(ii) $\int\{x f'(x) + f(x)\}\,dx = \int xf'(x)\,dx + \int f(x)\,dx$

$$= x\int f'(x)\,dx - \int\left\{\frac{dx}{dx}\int f'(x)\,dx\right\} + \int f(x)\,dx$$

$$= x\,f(x) - \int 1\times f(x)\,dx + \int f(x)\,dx + C$$

$$= x\,f(x) + C$$

उदाहरण 7. (i) $\int e^x\{\sin x + \cos x\}\,dx$ (ii) $\int\{\sin(\log x) + \cos(\log x)\}\,dx$

हल : (i) $\int e^x\{\sin x + \cos x\}\,dx = \int \underset{\text{II}}{e^x}\,\underset{\text{I}}{\sin x} + \int e^x\cos x\,dx$

$$= \sin x\int e^x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\sin x\int e^x\,dx\right\}dx + \int e^x\cos x\,dx$$

$$= e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx + \int e^x\cos x\,dx + C$$

$$= e^x\sin x + C$$

(ii) माना $\log x = t$ तो $e^t = x$ तथा $dx = e^t\,dt$

$$\therefore \int \{\sin(\log x) + \cos(\log x)\}\,dx = \int e^t \{\sin t + \cos t\}\,dt$$

$$= \int e^t \sin t\,dt + \int e^t \cos t\,dt = e^t \sin t + C \qquad \text{[(i) से]}$$

$$= x \sin(\log x) + C$$

उदाहरण 8. (i) $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1993]**

(ii) $\int \frac{e^x (x^2+1)}{(x+1)^2}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]**

(iii) $\int \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1993]**

हल : (i) माना $I = \int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{(x+1-1)\,e^x}{(x+1)^2}\,dx$

$$= \int \frac{x+1}{(x+1)^2} e^x\,dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+1} \times e^x\,dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{x+1} \int e^x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+1}\right) \int e^x\,dx \right\} dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{e^x}{x+1} - \int \left\{ -\frac{1}{(x+1)^2} e^x \right\} dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}\,dx + C$$

$$= \frac{e^x}{x+1} + \int \frac{e^x}{(x+1)^2}\,dx - \int \frac{e^x}{(x+1)^2}\,dx + C = \frac{e^x}{x+1} + C \qquad \text{उत्तर}$$

(ii) माना $I = \frac{e^x (x^2+1)}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{e^x (x^2 + 2x - 2x + 1)}{(x+1)^2}\,dx = \int e^x \frac{\{(x^2+2x+1) - 2x\}}{(x+1)^2}\,dx$

$$= \int e^x \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2}\,dx - 2\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx = \int e^x\,dx - 2\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= e^x - 2\frac{e^x}{x+1} + C \qquad \left[\text{उदाहरण (ii) से } \int \frac{xe^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x}{x+1}\right]$$

(iii) माना $I = \int \frac{x - \sin x}{1 - \cos x}\,dx = \int \frac{x}{1-\cos x}\,dx - \int \frac{\sin x}{1 - \cos x}\,dx$

$$= \int \frac{x}{2\sin^2(x/2)}\,dx - \int \frac{2\sin(x/)2 \,.\, \cos(x/2)}{2\sin^2(x/2)}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \underset{\text{I}}{x} \underset{\text{II}}{\text{cosec}^2} (x/2)\,dx - \int \cot(x/2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x \int \text{cosec}^2 (x/2)\,dx - \int \left\{ \frac{dx}{dx} \int \text{cosec}^2 (x/2) \right\} \right] - \int \cot(x/2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-x\cot(x/2)}{1/2} - \int \frac{1\times(-\cot(x/2))}{1/2}\,dx\right] - \int \cot(x/2)\,dx$$

$$= -x\cot\frac{x}{2}\times\frac{1}{2}\times 2 + 2\times\frac{1}{2}\int\cot\frac{x}{2}\,dx - \int\cot\frac{x}{2}\,dx + C$$

$$= -x\cot\frac{x}{2} + C$$

Type VII : $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ तथा $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ के रूप में समाकल

उदाहरण 9. सिद्ध कीजिए :

(i) $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + C$

(ii) $\int e^{x}\sin x\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2013]**

(iii) $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + C$

हल : (i) $I = \int \underset{\text{I}}{e^{ax}}\,\underset{\text{II}}{\sin bx}\,dx = e^{ax}\int\sin bx\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}e^{ax}\int\sin bx\,dx\right\}dx$

$$= -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} - \int ae^{ax}\frac{(-\cos bx)}{b}\,dx$$

$$= \frac{-e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int \underset{\text{I}}{e^{ax}}\,\underset{\text{II}}{\cos bx}\,dx$$

$$= -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\left[e^{ax}\int\cos bx\,dx - \int\frac{d}{dx}e^{ax}\int\cos bx\,dx\right]$$

$$= -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\left[\frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \int ae^{ax}\frac{\sin bx}{b}\,dx\right]$$

$$= -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$= -e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}I$$

या $$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)I = \frac{-e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx$$

या $$\frac{(a^2+b^2)}{b^2}I = e^{ax}\frac{(-b\cos bx + a\sin bx]}{b^2}$$

$\therefore$ $$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + C \quad ...(1)$$

सिद्ध हुआ।

(ii) (1) में $a = 1, b = 1$ डालने पर $\int e^{x}\sin dx = \frac{e^{x}}{2}[\sin x - \cos x]$

(iii) माना $I = \int \underset{\text{I}}{e^{ax}} \underset{\text{II}}{\cos bx}\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2 + b^2}[a \cos bx + b \sin bx] + C$

[ऊपर की तरह स्वयं सिद्ध करें]

नोट :

- स्पष्ट है कि इस रूप के फलनों में दो बार खंडशः समाकलन का प्रयोग होता है। इसके बाद पुनः मूल समाकल पद के रूप में प्राप्त होता है जिसके पक्षांतरण से समाकल का मान प्राप्त हो जाता है।

उदाहरण 10. मान निकालें :

(i) $\int \sec^3 x\, dx$

(ii) $\int e^{2x} \sin 3x\, dx$

हल : (i) माना $I = \int \sec^3 x\, dx = \int \underset{\text{I}}{\sec x}.\, \underset{\text{II}}{\sec^2 x}$

$$= \sec x \int \sec^2 x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx} \sec x \int \sec^2 x\, dx\right\} dx$$

$$= \sec x \,.\, \tan x - \int \sec x \,.\, \tan x \tan x\, dx$$

$$= \sec x \,.\, \tan x - \int \sec x \,.\, \tan^2 x\, dx$$

$$= \sec x \,.\, \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \sec x \,.\, \tan x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

$$= \sec x \,.\, \tan x - I + \log(\sec x + \tan x) + C_1$$

या $\qquad 2I = \sec x \,.\, \tan x + \log(\sec x + \tan x) + C_1$

$\therefore \qquad I = \dfrac{1}{2}[\sec x \tan x + \log(\sec + \tan x)] + C,\quad$ जहाँ $C = \dfrac{1}{2} C_1$

(ii) माना $\qquad I = \int \underset{\text{I}}{e^{2x}} \underset{\text{II}}{\sin 3x}\, dx$

$$= e^{2x} \int \sin 3x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx} e^{2x} \int \sin 3x\, dx\right\} dx$$

$$= e^{2x} \frac{(-\cos 3x)}{3} - \int 2e^{2x} \frac{(-\cos 3x)}{3}\, dx$$

$$= \frac{-e^{2x}}{3} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x\, dx$$

$$= \frac{-e^{2x}}{3} \cos 3x + \frac{2}{3}\left[e^{2x} \int \cos 3x\, dx - \int \left\{\frac{d}{dx} e^{2x} \int \cos 3x\, dx\right\}\right]$$

$$= \frac{-e^{2x} \cos 3x}{3} + \frac{2}{3}\left[\frac{e^{2x} \sin 3x}{3} - \int 2e^{2x} \frac{\sin 3x}{3}\, dx\right]$$

$$= \frac{-e^{2x} \cos 3x}{3} + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x - \frac{4}{9} \int e^{2x} \sin 3x\, dx$$

$$= \frac{-e^{2x} \cos 3x}{3} + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x - \frac{4}{9} I + C$$

या $\qquad \left(1 + \dfrac{4}{9}\right) I = \dfrac{e^{2x}}{3}\left[\dfrac{2 \sin 3x}{3} - \cos 3x\right] + C$

या $\quad \frac{13}{9} I = \frac{e^{2x}}{9} [2 \sin 3x - 3 \cos 3x] + C$

विकल्प : $\because \int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx - b \cos bx]$

यहाँ $a = 2, b = 3$

$$\therefore \quad \int e^{2x} \sin 3x \, dx = \frac{e^{2x}}{2^2 + 3^2} [2 \sin x - 3x \cos 3x] + C$$

$$= \frac{e^{2x}}{13} [2 \sin 3x - 3 \cos 3x]$$

महत्वपूर्ण तथ्य एवं सूत्र

1. $\int u \, v \, dx = u \int v \, dx - \int \left\{ \frac{du}{dx} \int v \, dx \right\} dx$, जहाँ u तथा v चर x के फलन हैं।

   अर्थात् $\int \text{I} \times \text{II} = \text{I} \int \text{II} - \int \{\text{I}' \int \text{II}\}$

   प्रथम फलन का चयन धारा (3.1) के अनुसार करें।
2. $\int e^x \{f(x) + f'(x)\} dx = e^x f(x) + C$
3. $\int \{x \, f'(x) + f(x)\} \, dx = x \, f(x) + C$
4. $\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \sin bx - b \cos bx] + C$
5. $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [a \cos bx + b \sin bx] + C$

प्रश्नावली 3.1

निम्न के मान ज्ञात करें—

1. $\int x \cos x \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1981, 17(S)]
2. $\int x \sin x \cos x \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1992]
3. $\int x \log x \, dx$
4. $\int x^2 e^{ax} \, dx$
5. $\int x^2 \sin x \, dx$
6. $\int \sin^{-1} x \, dx$
7. $\int \cos^{-1} x \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1995]
8. $\int (\log x)^2 \, dx$
9. $\int x \tan^{-1} x \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1990]
10. $\int \log (1 + x^2) \, dx$
11. $\int \sec^3 x \, dx$ [**संकेत :** $\int \sec^3 x \, dx = \int \underset{\text{I}}{\sec x} \, . \, \underset{\text{II}}{\sec^2 x} \, dx$]
12. $\int \frac{\sin^{-1} x}{(1 - x^2)^{3/2}} \, dx$
13. $\int \sin \sqrt{x} \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1970, 72]
14. (i) $\int x \tan^2 x \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1984]

    (ii) $\int x \cos^2 x \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2008]

15. $\int x \sin^2 x\, dx$

16. $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

17. (i) $\int \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$

(ii) $\int \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx$

18. $\int \tan^{-1} \frac{3x-x^3}{1-3x^2}\, dx$

19. $\int e^x (1+\tan x) \sec x\, dx$

20. $\int e^x \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) dx$

21. $e^x \{\log \sin x + \cot x\}\, dx$

22. $\int \frac{e^x}{x} (x \log x + 1)\, dx$

23. $\int \frac{\log x}{(1+\log x)^2}\, dx$ [**संकेत :** $\log x = t$ रखने से प्रश्न $\int \frac{te^t}{(t+1)^2}\, dt$ में परिवर्तित हो जाएगा]

24. $\int \sin (\log x)\, dx$ [**संकेत :** $\log x = t \Rightarrow x = e^t$ तथा $\int \sin (\log x)\, dx = \int e^t \sin t\, dt$]

25. $\int e^x \cos^2 x\, dx$

26. $\int x \sin^{-1} x\, dx$

27. $\int x^2 \tan^{-1} x\, dx$

28. $\int x \log (1+x)\, dx$

29. $\int x^3 \log 2x\, dx$

30. $\int \frac{e^x (x^2+1)}{(x+1)^2}\, dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]

31. $\int \frac{x}{1+\cos x}\, dx$

32. $\int e^{ax} \cos bx\, dx$

33. $\int e^x \sin x\, dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2013]

34. निम्न के मान बताये—

(i) $\int x \sin x\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]**

(ii) $\int x e^x\, dx$

(iii) $\int \sin x \cos x\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]**

(iv) $\int \log x\, dx$

(v) दो फलनों के गुणनफल के समाकलन का सूत्र लिखों। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]**

35. सही उत्तर पर (✓) का चिन्ह लगायें—

(i) $\int e^x \left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right\} dx$

(a) $e^x \left(\log x + \frac{1}{x}\right) + c$

(b) $\frac{e^x}{x} + c$

(c) $xe^x + e^x + c$

(d) कोई नहीं

(ii) $\int e^{ax} \sin bx\, dx$

(a) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \sin bx + b \cos bx] + c$

(b) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2} [a \cos bx - b \cos bx] + c$

(c) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a \sin bx + b \sin ax] + c$ (d) कोई नहीं

36. $\int e^{ax} \cos bx\, dx$ का मान बतायें—

(a) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a \cos bx + b \sin bx] + c$ (b) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a \cos bx + b \sin bx] + c$

(c) $\frac{e^{ax}}{a^2-b^2}[a \cos bx + b \sin bx] + c$ (d) कोई नहीं

37. $\int 2x^3 e^{x^2} dx$

(a) $e^{x^2}(x^2-1)$ (b) $e^{x^2}(x^2+2)+c$ (c) $e^{x^2}(x+1)+c$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. $x \sin x + \cos x + C$

2. $\frac{1}{8}(\sin 2x - 2x \cos 2x)$

3. $\frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{4}x^2 + C$

4. $\frac{e^{ax}}{a^3}(a^2x^2 - 2ax + 2)$

5. $2x \sin x + (2 - x^2)\cos x + C$

6. $x \sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + C$

7. $x \cos^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C$

8. $x(\log x)^2 - 2[x \log x - x] + C$

9. $\frac{x^2}{2}\tan^{-1} x - \frac{1}{2}[x - \tan^{-1} x] + C$

10. $x \log(x^2+1) - 2x + 2\tan^{-1} x + C$

11. $\frac{1}{2}\sec x . \tan x + \frac{1}{2}\log(\sec x + \tan x) + C$

12. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\log(1-x^2) + C$

13. $2[-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x}] + C$

14. (i) $x \tan x - \log \sec x - \frac{x^2}{2} + C$ (ii) $\frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2x}{4} + \frac{\cos 2x}{8} + C$

15. $\frac{1}{4}\left[x^2 - x \sin 2x - \frac{\cos 2x}{2}\right] + C$

16. $x - \sqrt{1-x^2}\sin^{-1} x + C$

17. (i) $2x \tan^{-1} x - \log(1+x^2) + C$ (ii) $2[x \tan^{-1} x - \log\sqrt{1+x^2}] + C$

18. $3x \tan^{-1} x - \frac{3}{2}\log(x^2+1) + C$

19. $e^x \sec x + C$

20. $\frac{1}{x}e^x + C$

21. $e^x \log \sin x + C$

22. $e^x \log x + C$

23. $\frac{x}{\log x + 1} + C$

24. $\frac{x}{2}[\sin(\log x) - \cos(\log x)] + C$

25. $\frac{1}{2}e^x + \frac{e^x}{10}[\cos 2x + 2\sin 2x] + C$

26. $\frac{1}{2}x^2 \sin^{-1} x + \frac{1}{4} x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\sin^{-1} x + C$

27. $\frac{x^3}{3}\tan^{-1} x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\log(x^2+1) + C$

28. $\frac{x^2}{2}\log(x+1) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x + \log(x+1)\right] + C$

29. $\frac{x^4}{4}\log 2x - \frac{1}{16}x^4 + C$

30. $e^x - \frac{2e^x}{x+1} + C$

31. $x\tan\frac{x}{2} - 2\log\sec\frac{x}{2} + C$

32. $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + C$

33. $\frac{e^x}{2}[\sin x - \cos x] + C$

34. (i) $-x\cos x + \sin x + C$ (ii) $e^x(x-1) + C$ (iii) $-\frac{1}{4}\cos 2x + c$

(iv) $x(\log x - 1) + C$ (v) $\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int\left\{\frac{du}{dx}\int v\,dx\right\}dx$

35. (i) (b) (ii) (b) **36.** (b) **37.** (a)

□□□

CHAPTER 4

आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन (Integration by Partial Fractions)

4.1 परिभाषा (Definition)

इस अध्याय में हम किसी परिमेय भिन्नात्मक फलन को आंशिक भिन्नों में तोड़कर समाकलन करना सीखेंगे। इस विधि में सर्वप्रथम दिए गए भिन्न को दो या दो से अधिक भिन्नों के योग या अंतर के रूप में व्यक्त करते हैं। तत्पश्चात् पहले बताए गए विधियों का प्रयोग कर समाकलन निकालते हैं।

आंशिक भिन्नों में तोड़ते समय निम्न बातों का ध्यान रखें :

(i) सर्वप्रथम दिए गए भिन्न को सामान्य भिन्न (Proper fraction) के रूप में व्यक्त करें। इसका अर्थ यह है कि यदि भिन्न के अंश में चर राशि का घात हर की चर राशि के घात से ज्यादा या बराबर है तो भाग देकर उसे सामान्य भिन्न में परिवर्तित करें।

(ii) यदि हर की राशि का गुणनखंड संभव है तो उसका गुणनखंड प्राप्त कर लें।

तत्पश्चात् नीचे दिए गए तालिका के अनुसार दिए गए (या प्राप्त) सामान्य भिन्न को आंशिक भिन्नों में तोड़कर समाकलन ज्ञात करें।

क्रम संख्या	सामान्य भिन्न (Proper fraction) का रूप	आंशिक भिन्नों का रूप
1.	$\frac{f(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$	$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-\beta}+\frac{C}{x-\gamma}$
2.	$\frac{g(x)}{(x-\alpha)^2}$	$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{(x-\alpha)^2}$
3.	$\frac{\phi(x)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)}$	$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{(x-\alpha)^2}+\frac{C}{x-\beta}$
4.	$\frac{\psi(x)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}$	$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$

जहाँ ax^2+bx+c का एकघातीय गुणनखंड सम्भव नहीं है

तालिका में A, B, C वास्तविक संख्यायें हैं जिनका मान ज्ञात करना होगा।

उपरोक्त फलनों के लिए इन्हें ज्ञात करने की क्रिया विधि साधित उदाहरणों से स्पष्ट हो जायेगी।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

Type I : जब भिन्न के हर में अपुनरावृत्त एक घातीय (Linear non-repeated) गुणनखंड हो या हर को अपुनरावृत्त गुणनखंड में तोड़ना संभव हो [$\frac{f(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ रूप]

1. (i) $\int \frac{x^2}{(x-1)(3x-1)(3x-2)}\,dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]

(ii) $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\,dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1992, 2014 (O)]

हल : (i) $\int \frac{x^2}{(x-1)(3x-1)(3x-2)}\,dx$

हल : यह सामान्य भिन्न है। माना $\frac{x^2}{(x-1)(3x-1)(3x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{3x-1} + \frac{C}{3x-2}$ ...(1)

या $x^2 = A(3x-1)(3x-2) + B(x-1)(3x-2) + C(x-1)(3x-1)$ ...(2)

(2) में $x-1=0$ अर्थात् $x=1$ रखने पर, $1^2 = A(3\times 1-1)(3\times 1-2) + B\times 0 + C\times 0$

या $2A = 1 \quad \therefore \quad A = \frac{1}{2}$

$3x-1=0$ अर्थात् $x=\frac{1}{3}$ रखने पर, $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = A\times 0 + B\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(3\times\frac{1}{3}-2\right) + C\times 0$

या $\frac{1}{9} = B\times\left(-\frac{2}{3}\right)(-1) \qquad \therefore \quad B = \frac{3}{9\times 2} = \frac{1}{6}$

तथा $3x-2=0$ अर्थात् $x=\frac{2}{3}$ रखने पर, $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = A\times 0 + B\times 0 + C\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(3\times\frac{2}{3}-1\right)$

या $\frac{4}{9} = C\left(-\frac{1}{3}\right)\times 1 \qquad \therefore \quad C = -\frac{3\times 4}{9} = -\frac{4}{3}$

A, B तथा C के मान (1) में रखकर समाकलन करने पर

$$\int \frac{x^2}{(x-1)(3x-1)(3x-2)}\,dx = \int\left[\frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{6(3x-1)} - \frac{4}{3(3x-2)}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-1)}\,dx + \frac{1}{6}\int\frac{1}{3x-1}\,dx - \frac{4}{3}\int\frac{1}{3x-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(x-1) + \frac{1}{18}\log(3x-1) - \frac{4}{9}\log(3x-2) + C$$

(ii) दिया गया समाकल्य $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\,dx$

यहाँ $\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5(x-1)}{x^2-5x+6}$ [$\because$ यह असामान्य भिन्न है अत: वास्तविक विभाजन (Division) से]

$$= 1 + \frac{5(x-1)}{(x-3)(x-2)}$$

माना $\frac{5(x-1)}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} \qquad \Rightarrow \quad 5(x-1) = A(x-2) + B(x-3)$ ...(1)

अब (1) में क्रमशः $x=3$ तथा $x=2$ रखकर अचरों का मान ज्ञात करने पर $A=10, B=-5$

$$\therefore \quad \int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\,dx = \int \left\{1 + \frac{5(x-1)}{(x-3)(x-2)}\right\} dx$$

$$= \int \left[1 + \frac{10}{x-3} - \frac{5}{x-2}\right] dx \qquad [(2) \text{ में } A \text{ तथा } B \text{ का मान रखने पर}]$$

$$= \int dx + 10\int \frac{1}{x-3}\,dx - 5\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= x + 10 \log (x-3) - 5 \log (x-2) + C$$

Type II : जब हर में एकघातीय गुणनखंड की आवृत्ति हुई हो $\left[\dfrac{\phi(x)}{(x-\alpha)^2} \text{ के रूप का}\right]$

2. $\displaystyle\int \frac{x}{(x-2)(x-1)^2}\,dx$

हल : माना $\displaystyle\frac{x}{(x-2)(x-1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$ ...(1)

या $\quad x = A(x-1)^2 + B(x-2)(x-1) + C(x-2)$ ...(2)

(2) में क्रमशः $x = 0, 1, 2$ रखकर अचरों का मान ज्ञात करने पर, $A = 2,\ B = -2$ तथा $C = -1$

(1) में A, B, C का मान रखकर समाकलन करने पर

$$\int \frac{x}{(x-2)(x-1)}\,dx = \int \left[\frac{2}{x-2} - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}\right] dx$$

$$= 2\int \frac{1}{x-2}\,dx - 2\int \frac{1}{x-1}\,dx - \int (x-1)^{-2}\,dx$$

$$= 2\log(x-2) - 2\log(x-1) - \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= 2\log\frac{x-2}{x-1} + \frac{1}{x-1} + C$$

Type III : जब हर में द्विघात के ऐसे फलन हों जिनका गुणनखंड संभव न हो

3. मान निकालें।

(i) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x^2+1)}\,dx$

(ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^3}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1987]**

हल : माना $\displaystyle\frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 199**

...(

या $\quad x + 1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = (A+B)x^2 + Cx + A$ ...(

दोनों ओर से x^2, x के गुणांक तथा अचर की तुलना करने पर

$$C = 1, \qquad A = 1 \quad \text{तथा } A + B = 0 \text{ या } \quad B = -A = -1$$

A, B तथा C का यह मान (1) में रखकर समाकलन करने पर

$$I = \int \frac{x+1}{x(x^2+1)}\,dx = \int \left[\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1}\right] dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \log x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + \tan^{-1} x + C$$

(ii) $\because \quad \dfrac{1}{1-x^3} = \dfrac{1}{(1)^3 - (x)^3} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}$ $[\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)]$

माना
$$\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x+x^2} \qquad ...(1)$$

या
$$1 = A(1+x+x^2) + (Bx+C)(1-x) \qquad ...(2)$$

(2) में $x = 1$ रखने से, $1 = A(1+1+1) + (B+C)\times 0 \quad \therefore \quad A = \dfrac{1}{3}$

पुनः (1) में x^2 के गुणांक तथा अचर की तुलना करने पर

$$A - B = 0 \Rightarrow A = B = \frac{1}{3} \qquad \text{तथा} \qquad A + C = 1 \Rightarrow C = 1 - A = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ (1) में A, B, C के मान रखकर समाकलन करने पर

$$\int \frac{dx}{1-x^3} = \int \left[\frac{1}{3(1-x)} + \frac{\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{1+x+x^2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-x}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{1+x+x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{3\times 2}\int \frac{2x+4}{1+x+x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{6}\int \frac{2x+1+3}{1+x+x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{6}\left[\int \frac{2x+1}{1+x+x^2}\,dx + \int \frac{3}{1+x+x^2}\,dx\right.$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{6}\log(1+x+x^2) + \frac{3}{6}\int \frac{1}{x^2 + 2\times x\times\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{6}\log(1+x+x^2) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{6}\log(1+x+x^2) + \frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C$$

$$\left[\because \int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{6}\log(1+x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

Type IV : यदि परिमेय फलन के अंश तथा हर में चर राशि x के समघात हों तो आंशिक भिन्नों में तोड़ने के लिए निम्न प्रक्रिया अपनाते हैं :

I. $x^2 = y$ रखें II. आंशिक भिन्न में तोड़ें III. पुनः y की जगह x^2 रखें। IV. समाकलन करें।

4. (i) $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2007, 11]**

(ii) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]**

हल : (i) माना $x^2 = y$ तो $\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{y}{(y+1)(y+4)}$

अब माना $$\frac{y}{(y+1)(y+4)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+4} \quad ...(1)$$

या $$y = A(y+4) + B(y+1) \quad ...(2)$$

(2) में क्रमशः $y = -4$ तथा -1 रखने पर, $A = -\frac{1}{3}$ तथा $B = \frac{4}{3}$

अतः $$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{y}{(y+1)(y+4)}$$

$$= -\frac{1}{3(y+1)} + \frac{4}{3(y+4)}$$

$$= -\frac{1}{3(x^2+1)} + \frac{4}{3}\frac{1}{x^2+4} \quad [\because y = x^2 \text{ रखने पर}]$$

$$\therefore \int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = -\frac{1}{3}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{4}{3}\int\frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{4}{3}\times\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

(ii) माना $x^2 = y$ तो $\frac{x^4}{x^2+1} = \frac{y^2}{1+y} = \frac{y^2-1+1}{1+y} = \frac{y^2-(1)^2}{1+y} + \frac{1}{1+y}$

$$= \frac{(y+1)(y-1)}{1+y} + \frac{1}{1+y} = y - 1 + \frac{1}{1+y}$$

$$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{y^2}{1+y} = y - 1 + \frac{1}{1+y} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}$$ [$\because y = x^2$ रखने पर]

$$\therefore \quad \int \frac{x^4}{1+x^2}\,dx = \int \left[x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right] dx$$

$$= \int x^2\,dx - \int dx + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1} x + C$$

नोट :

- $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}\,dx = \int \left[\frac{(x^2)^2-(1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right] dx$ के रूप में तोड़कर

या x^4 में $(1+x^2)$ से भाग देकर भी इसका हल निकाला जा सकता है।

TYPE V: ऐसे भिन्न जिनको प्रतिस्थापन के बाद आंशिक भिन्नों में तोड़ा जाता है :

5. (i) $\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1996]**

(ii) $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$ (iii) $\int \frac{(x^2+x+1)}{(x-1)^3}\,dx$

(iv) $\int \frac{dx}{x(x^n+1)}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994, 98, 2018(S)]**

(v) $\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}\,dx$

(vi) $\int \frac{dx}{1+3e^x+2e^{2x}}$

हल : (i) माना $I = \int \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}\,dx$ ...(1)

पुन: माना $\sin x = t$ तो $\cos x\,dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{(1+t)(2+t)} = \int \frac{dt}{1+t} - \int \frac{1}{2+t}$$ [आंशिक भिन्नों में तोड़ने पर]

$$= \log(1+t) - \log(2+t) + C = \log\left(\frac{1+t}{2+t}\right) + C$$

$\therefore$ (1) से $\int \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}\,dx = \log \frac{(1+\sin x)}{2+\sin x} + C$

उ

(ii) $I = \int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+2)} dx$

माना $x^2 = t$ तो $2x\,dx = dt$ $\therefore$ $I = \int \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$ [अब

(1) की तरह हल करें]

(iii) माना $x - 1 = t$ तो $dx = dt$ तथा $x = t + 1$

$$\therefore \int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^3} dx = \int \frac{(t+1)^2+(t+1)+1}{t^3} dt$$

$$= \int \frac{t^2+2t+1+t+1+1}{t^3} dt = \int \frac{t^2+3t+3}{t^3} dt$$

$$= \int \frac{t^2}{t^3} + 3\int \frac{t}{t^3} + \int \frac{3}{t^3} dt = \int \frac{1}{t} dt + 3\int t^{-2} dt + 3\int t^{-3} dt$$

$$= \log t + 3 \times \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + 3\frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C = \log t - \frac{3}{t} + \frac{3}{2}t^{-2} + C$$

t का मान रखने पर $I = \int \frac{x^2+x+1}{(x-1)^3} dx = \log(x-1) - \frac{3}{x-1} + \frac{3}{2(x-1)^2} + C$ उत्तर

(iv) माना $I = \int \frac{dx}{x(x^n+1)} = \int \frac{x^{n-1}}{x^{n-1}\, x\,(x^n+1)} dx = \int \frac{x^{n-1}}{x^n(x^n+1)} dx$

$x^n = t$ रखने पर जिससे $x^{n-1}\, dx = \frac{1}{n} dt$

$$\therefore \quad I = \frac{1}{n}\int \frac{dt}{t\,(t+1)} = \frac{1}{n}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{1}{n}[\log t - \log(t+1)] + C$$

$$= \frac{1}{n}\log \frac{t}{t+1} + C = \frac{1}{n}\log \frac{x^n}{x^n+1} + C$$ [t का मान रखने पर]

(v) $I = \int \frac{x}{(x^2-a^2)(x^2-b^2)} dx$

माना $x^2 = t$ जिससे $2x\,dx = dt$ या $x\,dx = \frac{1}{2} dt$ $\therefore$ $I = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-a^2)(t-b^2)}$

माना $\frac{1}{(t-a^2)(t-b^2)} = \frac{A}{t-a^2} + \frac{B}{t-b^2}$ ...(1)

या $1 = A(t-b^2) + B(t-a^2)$ ...(2)

(2) में $t - a^2 = 0$ या $t = a^2$ रखने से, $1 = A(a^2-b^2) + B \times 0 \Rightarrow A = \frac{1}{a^2-b^2}$

तथा (2) में $t - b^2 = 0$ या $t = b^2$ रखने पर

$$1 = A \times 0 + B(b^2 - a^2) \Rightarrow B = \frac{1}{b^2 - a^2} = -\frac{1}{a^2 - b^2}$$

(1) में A तथा B के मान रखकर समाकलन करने पर

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t - a^2)(t - b^2)} dt = \frac{1}{2(a^2 - b^2)}\int \frac{1}{t - a^2} dt - \frac{1}{2(a^2 - b^2)}\int \frac{1}{t - b^2} dt$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)}[\log(t - a^2) - \log(t - b^2)] + C$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)}\log\frac{t - a^2}{t - b^2} + C = \frac{1}{2(a^2 - b^2)}\log\frac{x^2 - a^2}{x^2 - b^2} + C \quad [t = x^2 \text{ रखने पर}]$$

(vi) माना $I = \int \frac{dx}{1 + 3e^x + 2e^{2x}} = \int \frac{e^x\, dx}{e^x(1 + 3e^x + 2e^{2x})} = \int \frac{e^x}{2e^{3x} + 3e^{2x} + e^x} dx$

$e^x = t$ रखने पर जिससे $e^x\, dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{2t^3 + 3t^2 + t} = \int \frac{dt}{t(2t^2 + 3t + 1)} = \int \frac{dt}{t(2t + 1)(t + 1)}$$

$$= \int \frac{1}{t} dt - 4\int \frac{1}{2t + 1} dt + \int \frac{1}{t + 1} dt \quad [\text{आंशिक भिन्नीकरण से}]$$

$$= \log t - 4 \times \frac{1}{2}\log(2t + 1) + \log(t + 1) + C$$

$$= \log t - 2\log(2t + 1) + \log(t + 1) + C$$

$$= \log t - \log(2t + 1)^2 + \log(t + 1) + C$$

$$= \log\frac{t(t + 1)}{(2t + 1)^2} + C = \log\left\{\frac{e^x(e^x + 1)}{(2e^x + 1)^2}\right. + C \quad [t \text{ का मान रखने पर}]$$

महत्वपूर्ण तथ्य

समाकलन के लिए आंशिक भिन्नों में तोड़ने से पहले निम्न तथ्यों का ध्यान रखें :

1. यदि अंश में चर राशि का घात, हर की चर राशि के घात से अधिक है या बराबर है अर्थात् यह असामान्य भिन्न (Improper fraction) है, तो पहले वास्तविक विभाजन द्वारा इसे सामान्य भिन्न (Proper Fraction) में बदलें।
2. यदि हर का गुणनखंड संभव है, तो उसके संभव गुणनखंड निकालें।
3. अब भिन्न (सामान्य भिन्न) को आंशिक भिन्नों में तोड़ें। इसके बाद समाकलन की क्रिया करें।
4. आंशिक भिन्नों में तोड़ने की विधि साधित उदाहरणों से स्पष्ट है।

प्रश्नावली 4.1

निम्न के मान ज्ञात करें—

Type-I :

1. (i) $\int \frac{3x}{(x - 2)(x + 1)} dx$ (ii) $\int \frac{x^2}{(x - 1)(3x - 1)(3x - 2)} dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]**

(iii) $\int \frac{dx}{6x - x^2 - 5}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1996]

(iv) $\int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1987]

(v) $\int \frac{x^3 + 2}{(x-1)(x-2)^3} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1995, 2016]

(vi) $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} dx$

Type-II :

2. (i) $\int \frac{(x-1)}{(x+1)^2 (x-2)} dx$

(ii) $\int \frac{x-1}{(x-3)(x-2)^2} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1991, 99]

(iii) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

(iv) $\int \frac{x}{(x-1)^2} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1980, 88]

TYPE III :

3. (i) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1984]

(ii) $\int \frac{dx}{1 + x^3}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

(iii) $\int \frac{dx}{1 + x + x^2 + x^3}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1984]

(iv) $\int \frac{1}{1 + x - x^2 - x^3} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2014, 17(S)]

(v) $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1981]

TYPE IV :

4. (i) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

(ii) $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(3x^2+4)} dx$

(iii) $\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} dx$

(iv) $\int \frac{x}{(x^2-a^2)(x^2-b^2)} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1991]

(v) $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2007, 11, 17(S)]

[संकेत : $x^2 = y$ लें]

TYPE V :

5. (i) $\int \frac{\cos x}{(\sin x - 1)(\sin x - 3)}\, dx$

(ii) $\int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x}$

[संकेत : $\int \frac{dx}{\sin x + 2\sin x \cos x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x\,(1 + 2\cos x)}$

$$= \int \frac{\sin x\, dx}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)(1 + 2\cos x)}\ ]$$

(iii) $\int \frac{\sec^2 x}{(1 + \tan x)(2 + \tan x)}\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]**

(iv) $\int \frac{\sec x}{1 + \operatorname{cosec} x}\, dx$

[संकेत : $\int \frac{\sec x}{1 + \operatorname{cosec} x}\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x\,(1 + \sin x)} \times \frac{\cos x}{\cos x}\, dx = \int \frac{\sin x \cos x}{(1 - \sin^2 x)(1 + \sin x)}\, dx$]

(v) $\int \frac{e^x}{e^{2x} + 4e^x + 3}\, dx$ (vi) $\int \frac{dx}{1 + 3e^x + 2e^{2x}}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1998]**

[संकेत : $\int \frac{dx}{1 + 3e^x + 2e^{2x}} = \int \frac{e^x}{2e^{3x} + 3e^{2x} + e^x}\, dx$ अब $e^x = t$ रखें]

(vii) $\int \frac{dx}{x\,(1 + \log x)(3 + \log x)}$ (viii) $\int \frac{1}{x\,[6(\log x)^2 + 7\log x + 2]}\, dx$

(ix) $\int \frac{1}{x(x^4 + 1)}\, dx$ [संकेत : $\frac{1}{x(x^4 + 1)} = \frac{x^3}{x^4\,(x^4 + 1)}$]

(x) $\int \frac{dx}{x(x^n + 1)}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]**

उत्तरमाला

1. (i) $\log (x - 2)^2\,(x + 1) + C$

(ii) $\frac{1}{2}\log (x - 1) + \frac{1}{18}\log (3x - 1) - \frac{4}{9}\log (3x - 2) + C$

(iii) $\frac{1}{4}\log \frac{x - 1}{x - 5} + C$ (iv) $\log \frac{x^2 - 1}{x} + C$ (v) $\log \frac{(x - 2)^4}{(x - 1)^3} - \frac{2}{x - 2} - \frac{5}{(x - 2)^2} + C$

(vi) $x + \log \frac{x - 1}{x + 1} + C$

2. (i) $\frac{1}{9}\log\frac{x-2}{x+1}-\frac{2}{3(x+1)}+C$ (ii) $2\log(x-3)-2\log(x-2)+\frac{1}{x-2}+C$

(iii) $\left[\frac{1}{x+1}-\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]+C$ (iv) $\log(x-1)-\frac{1}{x-1}+C$

3. (i) $\frac{1}{4}[2\log(x+1)+2\tan^{-1}x-\log(x^2+1)+C$

(ii) $\frac{1}{6}\log\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$

(iii) $\frac{1}{2}\log(1+x)-\frac{1}{4}(1+x^2)+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

(iv) $\frac{1}{4}\log\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$ (v) $\frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2(1+x)}+c$

4. (i) $\frac{1}{3}\tan^{-1}x-\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$ (ii) $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)-\tan^{-1}x+C$

(iii) $\frac{1}{b^2-a^2}\left(b\tan^{-1}\frac{x}{b}-a\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)+C$ (iv) $\frac{1}{2(a^2-b^2)}\log\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}+C$

(v) $\frac{x^3}{3}-x+\tan^{-1}x+C$

5. (i) $\frac{1}{2}\log\frac{\sin x-3}{\sin x-1}+C$

(ii) $\frac{1}{6}\log(1-\cos x)+\frac{1}{2}\log(1+\cos x)+\frac{2}{3}\log(1+2\cos x)$

(iii) $\log\frac{1+\tan x}{2+\tan x}+C$ (iv) $\frac{1}{4}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+\frac{1}{2(1+\sin x)}+C$

(v) $\frac{1}{2}\log\frac{1+e^x}{3+e^x}+C$ (vi) $\log\frac{e^x(1+e^x)}{(1+2e^x)^2}+C$

(vii) $\frac{1}{2}\log\frac{1+\log x}{3+\log x}+C$ (viii) $\log\frac{2\log x+1}{3\log x+2}+C$ (ix) $\frac{1}{4}\log\frac{x^4}{x^4+1}+C$

□□□

CHAPTER

5

कुछ विशिष्ट समाकल

(Some Special Integrals)

5.1 कुछ महत्वपूर्ण प्रतिस्थापन

इस अध्याय में हम कुछ महत्वपूर्ण सूत्रों की स्थापना करेंगे तथा विभिन्न प्रकार के समाकलनों में उनका प्रयोग करना सीखेंगे।

नीचे कुछ महत्वपूर्ण प्रतिस्थापनों की सूची दी गई है जो समाकलन के लिए उपयोगी हैं।

समाकलन का रूप	**प्रतिस्थापन**
$a^2 + x^2$	$x = a \tan\theta$ या $x = a \cot\theta$
$a^2 - x^2$	$x = a \sin\theta$ या $x = a \cos\theta$
$x^2 - a^2$	$x = a \sec\theta$ या $x = a\,\text{cosec}\,\theta$
$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ या $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	$x = a \cos 2\theta$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2016]
$\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}}$	$x^2 = a^2 \cos 2\theta$
$\sqrt{(2ax - x^2)}$	$x = a(1 - \cos 2\theta)$

5.2 सूत्र (Formulae)

(i) $\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$

(ii) $\int \frac{1}{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a} + C$

(iii) $\int \frac{1}{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x} + C$

(iv) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a}\right) + C$

(v) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\, dx = \log (x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C = \sinh^{-1} \left(\frac{x}{a}\right) + C$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]

(vi) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \log (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C = \cosh^{-1} \left(\frac{x}{a}\right) + C$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1997]

(vii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1989]

(viii) $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2}\log[x + \sqrt{x^2 + a^2}] + C$

(ix) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log[x + \sqrt{x^2 - a^2}] + C$

(x) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} + C$

प्रमाण : (i) माना $x = a\tan\theta$ जिससे कि $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$ तथा $\tan\theta = \frac{x}{a}$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\tan^2\theta + a^2}\, d\theta = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2(\tan^2\theta + 1)}\, d\theta = \frac{1}{a}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{a}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{a}[\theta] + C = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad \left[\because \tan\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}\right]$$

नोट :

- यदि $x = a\cot\theta$ लिया जाए तो $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = -\frac{1}{a}\cot^{-1}\frac{x}{a} + C$

(ii) यहाँ $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$ [आंशिक भिन्नीकरण से]

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right] dx = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x-a}\, dx - \int \frac{1}{x+a}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2a}[\log(x-a) - \log(x+a)] + C$$

$$= \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a} + C$$

(iii) यहाँ $\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{(a+x)(a-x)} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right]$ [आंशिक भिन्नीकरण से]

$$\therefore \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\int\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right] dx = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{a+x}\, dx + \int \frac{1}{a-x}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2a}[\log(a+x) + \log(a-x)] + C = \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x} + C$$

(iv) माना $x = a\sin\theta$ जिससे $dx = a\cos\theta\, d\theta$ तथा $\sin\theta = \frac{x}{a}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \int \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}}\, d\theta = \int \frac{a\cos\theta}{a\sqrt{1 - \sin^2\theta}}\, d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\cos\theta}\, d\theta = \int d\theta + C$$

$$= \theta + C = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad \left[\because \sin\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}\right]$$

नोट :

• $x = a\cos\theta$ से $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\cos^{-1}\frac{x}{a} + C$

(v) माना $x = a\tan\theta$, जिससे कि $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$ तथा $\tan\theta = \frac{x}{a}$.

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\, dx = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2 + a^2\tan^2\theta}} = \int \frac{a\sec^2\theta}{a\sqrt{1 + \tan^2\theta}}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\, d\theta = \int \sec\theta\, d\theta = \log[\sec\theta + \tan\theta] + C_1$$

$$= \log[\tan\theta + \sqrt{1 + \tan^2\theta}] + C_1 = \log\left[\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\right] + C_1 \qquad \left[\because \tan\theta = \frac{x}{a}\right]$$

$$= \log\left[\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right] = \log[x + \sqrt{a^2 + x^2}] - \log a + C_1$$

$$= \log[x + \sqrt{a^2 + x^2}] + C \quad \text{जहाँ } C = C_1 - \log a$$

(vi) माना $I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx$ तथा $x = a\sec\theta$ जिससे कि $dx = a\sec\theta\tan\theta\, d\theta$ तथा $\sec\theta = \frac{x}{a}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}}\, d\theta = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\sqrt{\sec^2\theta - 1}}\, d\theta$$

$$= \int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\tan\theta}\, d\theta = \int \sec\theta\, d\theta = \log[\sec\theta + \tan\theta] + C_1$$

$$= \log[\sec\theta + \sqrt{\sec^2\theta - 1}] + C_1 = \log\left[\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right] + C_1 \qquad \left[\because \sec\theta = \frac{x}{a}\right]$$

$$= \log\left[\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right] + C_1 = \log[x + \sqrt{x^2 - a^2}] - \log a + C_1$$

$$= \log[x + \sqrt{x^2 - a^2}] + C \quad \text{जहाँ } C = C_1 - \log a$$

(vii) माना $I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ तथा $x = a\sin\theta$ जिससे $dx = a\cos\theta\, d\theta$ तथा $\sin\theta = \frac{x}{a}$

$$\therefore \quad \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} \times a\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int a\sqrt{1 - \sin^2\theta} \times a\cos\theta\, d\theta = a^2 \int \cos\theta \times \cos\theta\, d\theta$$

$$= a^2 \int \cos^2\theta\, d\theta = a^2 \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\, d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} [\int d\theta + \int \cos 2\theta \, d\theta] = \frac{a^2}{2} \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\theta + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2}\right] + C$$

$$= \frac{a^2}{2} [\theta + \sin \theta \sqrt{1 - \sin^2 \theta}] + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right] + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[\sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{a^2} \sqrt{a^2 - x^2}\right] + C$$

$$= \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

(viii) माना $x = a \tan \theta$ जिससे $dx = a \sec^2 \theta \, d\theta$

तो $I = \int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = \int a \sec \theta \, . \, a \sec^2 \theta \, d\theta$

$$= a^2 \int \sec^3 \theta \, d\theta = \frac{a^2}{2} [\sec \theta \, . \, \tan \theta + \log (\sec \theta + \tan \theta)] + C_1$$

[$\int \sec^3 \theta \, d\theta$ का मान रखने पर, देखें **पृष्ठ 39 Q. 4(i**

$$= \frac{a^2}{2} \left[\frac{x}{a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \log \left\{\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}\right\}\right] + C_1$$

$\left[\because \tan \theta = \frac{x}{a} \right.$ तथा $\sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$

$$= \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \{x + \sqrt{x^2 + a^2}\}] + C_1,$$ जहाँ $C = \log C_1 - \log a$

$\therefore$ $$\boldsymbol{I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log [x + \sqrt{x^2 + a^2}] + C}$$

नोट :

- $I = \int \underset{\text{I}}{\sqrt{x^2 + a^2}} \times \underset{\text{II}}{1} \, dx$ के रूप में खंडशः समाकलन से यह मान प्राप्त किया जा सकता है।

(ix) माना $x = a \sec\theta$ से $dx = a \sec\theta \tan \theta \, d\theta$ तथा $x^2 - a^2 = a^2 (\sec^2 \theta - 1)$

अब $\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx = \int a \tan\theta \, . \, a \sec \theta \tan\theta$

$$= \frac{a^2}{2}\,[\sec\theta\tan\theta + \log(\sec\theta + \tan\theta) - a^2 \log(\sec\theta + \tan\theta)] + C_1$$

[$\int \sec^3\theta\, d\theta$ तथा $\int \sec\theta\, d\theta$ का मान रखने पर, देखें **पृष्ठ 39 Q. 4(i)**]

$$= \frac{a^2}{2}\sec\theta\tan\theta - \frac{a^2}{2}\log(\sec\theta + \tan\theta) + C_1$$

$$= \frac{a^2}{2}\,\frac{x}{a}\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{a^2}{2}\log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right) + C_1$$

$$\left[\because \sec\theta = \frac{x}{a} \text{ तथा } \tan\theta = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2}a^2\log[x + \sqrt{x^2 - a^2}] + C, \quad \text{जहाँ } C = C_1 - \log a$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log[x + \sqrt{x^2 - a^2}] + C}$$

नोट :

- $I = \int \underset{\text{I}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \times \underset{\text{II}}{1}\, dx$ के रूप में खंडशः समाकलन से यह मान प्राप्त किया जा सकता है।

(x) माना $I = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx$ तथा $x = a\sec\theta$ से $dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ तथा $\sec\theta = \frac{x}{a}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\sec\theta\sqrt{a^2\sec^2\theta - 1}}\,d\theta = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\sec\theta \,.\, a\sqrt{\sec^2\theta - 1}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a^2\sec\theta \,.\, \tan\theta}\,d\theta = \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}[\theta] + C = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad \left[\because \sec\theta = \frac{x}{a}\right]$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

Type I. $\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx$ **तथा** $\int \frac{1}{a^2 \pm x^2}\,dx$, $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}$ **आदि के रूप में समाकलन**

क्रिया विधि I. दिए गए समाकलन (Integral) में x^2 का गुणांक इकाई बनाये तथा इसे $a^2 \pm x^2$ या $x^2 \pm a^2$ के रूप में लायें।

II. धारा 5.2 से उपयुक्त सूत्र का चयन कर समाकलन की क्रिया करें।

उदाहरण 1. इनके मान ज्ञात करें :

(i) $\int \frac{dx}{25 - 9x^2}$ (ii) $\int \frac{1}{4 + 9x^2}$ (iii) $\int \frac{x^4}{x^2 + 1}\,dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2007, 11, 17(S)]

UP Polytechnic में अच्छे अंक लाने के लिए Study power point का Telegram Channel Join करें।

(iv) $\int \frac{x^4+1}{x^2+1}\,dx$ (v) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$

हल : (i) माना $I = \int \frac{dx}{25-9x^2} = \int \frac{dx}{9\left(\frac{25}{9}-x^2\right)}$ [x^2 का गुणांक इकाई बनाने पर]

$$= \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(5/3)^2 - x^2}$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{1}{2\times(5/3)} \log \frac{(5/3)+x}{(5/3)-x} + C \quad \left[\because \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x} + C\right]$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{3}{2\times 5} \log \frac{5+3x}{5-3x} + C = \frac{1}{30}\log\frac{5+3x}{5-3x} + C$$

(ii) माना $I = \int \frac{1}{4+9x^2}\,dx = \int \frac{1}{9\left(\frac{4}{9}+x^2\right)}\,dx$ [x^2 का गुणांक इकाई बनाने पर]

$$= \frac{1}{9}\int \frac{1}{(2/3)^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{9}\times\frac{1}{2/3}\tan^{-1}\frac{x}{2/3} + C \quad \left[\because \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C\right]$$

$$= \frac{3}{9\times 2}\tan^{-1}\frac{3x}{2} + C = \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{3x}{2} + C$$

(iii) माना $I = \int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}\,dx$

$$= \int \frac{(x^2)^2-(1)^2}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int (x^2-1)\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \int x^2\,dx - \int dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{x^3}{3} - x + \tan^{-1} x + C$$

(iv) $I = \frac{x^4+1}{x^2+1} = \int \frac{x^4-1+2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$ [अब (iii) की भाँति हल करें]

(v) माना $I = \int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{x^2-1+2}{x^2-1}\,dx$

$$= \int\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx = \int dx + 2\int \frac{1}{(x)^2-(1)^2}\,dx$$

$$= x + 2\times\frac{1}{2}\log\frac{x-1}{x+1} + C = x + \log\frac{x-1}{x+1} + C$$

उदाहरण 2. इनके मान ज्ञात करें :

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}}$

हल : (i) माना $I = \int \frac{dx}{\sqrt{9-25x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{25\left(\frac{9}{25}-x^2\right)}}$ [x^2 का गुणांक इकाई बनाने पर]

$$= \frac{1}{5}\int \frac{dx}{\sqrt{(3/5)^2-(x)^2}} = \frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{x}{(3/5)} + C = \frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{5x}{3} + C$$

(ii) माना $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4\left(\frac{1}{4}+x^2\right)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(1/2)^2+x^2}}$

$$= \frac{1}{2}\log[x+\sqrt{x^2+(1/2)^2} + C_1$$

$$= \frac{1}{2}\log[2x+\sqrt{4x^2+1}] + C, \quad \text{जहाँ } C = C_1 - \log 2$$

Type II. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **तथा** $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ **के रूप में दिए गए समाकलन**

इस रूप में समाकल के हल के लिए सर्वप्रथम ax^2+bx+c को निम्न विधि का प्रयोग कर दो वर्गों के योग या अंतर के रूप में व्यक्त करें :

I. x^2 का गुणांक यदि इकाई नहीं हो, तो इकाई बनाएँ। इसके लि x^2 के गुणांक को उभयनिष्ठ के रूप में लें।

II. x वाले पदों में, x के गुणांक के आधे का वर्ग जोड़ और घटाकर ax^2+bx+c को निम्न रूप में परिवर्तित करें :

$$a(X^2 \pm A^2) \quad \text{या} \quad a(A^2 \mp X^2)$$

III. धारा (5.2) से उचित सूत्र का चयन कर समाकलन करें।

IV. यदि फलन उपयुक्त प्रस्थापन से ax^2+bx+c रूप में आ जाए तो आवश्यकतानुसार प्रतिस्थापन का प्रयोग करें।

क्रिया विधि निम्न उदाहरणों से स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण 3. इनके मान ज्ञात करें :

(i) $\int \frac{dx}{2x^2+x-1}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1999, 2000]**

(ii) $\int \sqrt{2x^2-5x-1}\,dx$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-3x^2}}$

(iv) $\int \frac{x}{x^4+x^2+1}dx$ (v) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+6e^x+5}dx$

हल : (i) माना $I = \int \frac{dx}{2x^2 + x - 1} = \int \frac{dx}{2\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + x + \frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2 \times \frac{3}{4}} \log \frac{x + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}}{x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} + C$$

$$\left[\because \int \frac{dx}{X^2 - A^2} = \frac{1}{2A} \log \frac{X - A}{X + A}\right.$$

$$= \frac{4}{2 \times 2 \times 3} \log \frac{x - 1/2}{x + 1} + C = \frac{1}{3} \log \left[\frac{2x - 1}{2(x + 1)}\right] + C$$

(ii) माना $I = \sqrt{2x^2 - 5x - 1}\, dx = \int \sqrt{2\left(x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}\right)}\, dx = \sqrt{2}\int \sqrt{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}}\, dx$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{33}{16}}\, dx = \sqrt{2}\int \sqrt{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{33}}{4}\right)^2}\, dx$$

$$= \sqrt{2} \times \left[\frac{x - \frac{5}{4}}{2}\sqrt{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{33}}{4}\right)^2} - \frac{1}{2}\frac{33}{16} \log \left\{\left(x - \frac{5}{4}\right) + \sqrt{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{33}}{4}\right)^2}\right\}\right] + C$$

$$\left[\because \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \{x + \sqrt{x^2 - a^2}\}\right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left[\left(x - \frac{5}{4}\right)\sqrt{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{33}{16}} - \frac{33}{16} \log \left\{\left(x - \frac{5}{4}\right) + \sqrt{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{33}{16}}\right\}\right] + C$$

उ

(iii) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2 + x - 3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2 - (3x^2 - x)}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3\left[\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right]}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2 - 3\left[\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}\right]}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 3 \times \frac{1}{36} - 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{12} - 3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{36} - \left(x - \frac{1}{6}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{6}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^{-1} \frac{x - (1/6)}{5/6} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^{-1} \frac{6x - 1}{5} + C \quad \left[\because \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C\right]$$

(iv) समाकलन में $x^2 = t$ जिससे $2x\,dx = dt$ या $x\,dx = \frac{1}{2} dt$ रखने पर

$$\therefore \quad I = \int \frac{x}{x^4 + x^2 + 1} dx = \int \frac{dt}{2(t^2 + t + 1)} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}/2} \tan^{-1} \frac{t + 1/2}{\sqrt{3}/2} + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2t + 1}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{(2x^2 + 1)}{\sqrt{3}} + C \qquad [\because \; t = x^2]$$

(v) माना $e^x = t$ तो $e^x\,dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 6e^x + 5} dx = \int \frac{dt}{t^2 + 6t + 5} = \int \frac{dt}{(t + 3)^2 - 3^2 + 5} = \int \frac{dt}{(t + 3)^2 - (2)^2}$$

$$= \frac{1}{2 \times 2} \log \frac{t + 3 - 2}{t + 3 + 2} + C = \frac{1}{4} \log \frac{t + 1}{t + 5} + C = \frac{1}{4} \log \frac{e^x + 1}{e^x + 5} + C$$ उत्तर

Type III. $\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx, \int \frac{(px + q)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ **तथा** $\int (px + q)\sqrt{ax^2 + bx + c}$ **रूप के समाकलन**

इन रूपों के समाकल का मान निकालने के लिए निम्न विधि अपनाते हैं :

I. $px + q = \alpha \left\{\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c)\right\} + \beta$

या $px + q = \alpha\,(2ax + b) + \beta$ के रूप में लिखें।

II. दोनो ओर से x के गुणांक तथा अचर की तुलना कर α तथा β का मान निकालें।

III. अब दिए गए प्रश्न में $px + q$ की जगह $\alpha(2ax + b) + \beta$ को रखें जिससे दिया गया समाकल्य दो समाकलों के योग या अंतर के रूप के रूप परिवर्तित हो जाएगा।

एक भाग $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ या $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx$ या $\int f'(x) \sqrt{f(x)}\, dx$ के रूप का होगा जिसका मान $f(x) =$ रखकर निकाला जा सकता है।

दूसरे भाग का समाकल धारा 5.2 के उपयुक्त सूत्र के प्रयोग से निकाला जाएगा।

उदाहरण 4. मान ज्ञात करें :

(i) $\int \frac{3x+1}{2x^2 - 2x + 3}$ (ii) $\int (x-1) \sqrt{x^2 - x + 1}\, dx$

हल : (i) माना $I = \int \frac{3x+1}{2x^2 - 2x + 3}$ ...(1)

माना $3x + 1 = \alpha \left(\frac{d}{dx}(2x^2 - 2x + 3) + \beta \right) = \alpha (4x - 2) + \beta$

दोनों ओर से x के गुणांक तथा अचर की तुलना से

$$4\alpha = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{4} \text{ तथा } -2\alpha + \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad -2 \times \frac{3}{4} + \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \quad 3x + 1 = \frac{3}{4}(4x - 2) + \frac{5}{2}$$

समी० (1) में यह मान रखने पर

$$I = \int \frac{\frac{3}{4}(4x-2) + \frac{5}{2}}{2x^2 - 2x + 3} dx = \frac{3}{4} \int \frac{4x - 2}{2x^2 - 2x + 3} dx + \frac{5}{2} \int \frac{1}{2x^2 - 2x + 3} dx$$

$$= \frac{3}{4} I_1 + \frac{5}{2} I_2 \quad \ldots(2)$$

जहाँ $I_1 = \int \frac{4x - 2}{2x^2 - 2x + 3} dx$ तथा $I_2 = \int \frac{1}{2x^2 - 2x + 3} dx$

माना $2x^2 - 2x + 3 = t$ तथा $(4x - 2)\, dx = dt$

$$\therefore \quad I_1 = \int \frac{dt}{t} = \log t + C_1 = \log(2x^2 - 2x + 3) + C_1$$

तथा $I_2 = \int \frac{1}{2x^2 - 2x + 3} dx = \int \frac{1}{2\left(x^2 - x + \frac{3}{2}\right)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2}} dx$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}/2} \tan^{-1} \frac{(x - 1/2)}{\sqrt{5}/2} + C_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{2x - 1}{\sqrt{5}} + C_2$$

समी० (2) में I_1 तथा I_2 का मान रखने से

$$I = \frac{3}{4}\log(2x^2 - 2x + 3) + \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C, \qquad \text{जहाँ } C = C_1 + C_2$$ **उत्तर**

(ii) $I = \int (x+1)\sqrt{x^2 - x + 1}\, dx$ ...(1)

माना $x + 1 = \alpha\left\{\frac{d}{dx}(x^2 - x + 1)\right\} + \beta = \alpha(2x - 1) + \beta$

दोनों ओर से x के गुणांक तथा अचर की तुलना से

$\beta - \alpha = 1$ तथा $\alpha = \frac{1}{2}, \ \beta = \frac{3}{2}$ [दोनों समीकरणों को हल करने से]

समी० (1) में यह मान रखने पर

$$I = \int\left\{\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{3}{2}\right\}\sqrt{x^2 - x + 1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (2x-1)\sqrt{x^2 - x + 1}\, dx + \frac{3}{2}\int\sqrt{x^2 - x + 1}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}I_1 + \frac{3}{2}I_2 \qquad ...(2)$$

जहाँ $I_1 = \int (2x-1)\sqrt{x^2 - x + 1}\, dx$ तथा $I_2 = \int\sqrt{x^2 - x + 1}\, dx$

$x^2 - x + 1 = t$ से $(2x - 1)\, dx = dt$

$$\therefore \quad I_1 = \int t^{1/2}\, dt = \frac{t^{1/2+1}}{(1/2)+1} + C_1 = \frac{t^{3/2}}{3/2} + C_1 = \frac{2}{3}t^{3/2} + C_1 = \frac{2}{3}(x^2 - x + 1)^{3/2} + C_1$$

तथा $I_2 = \int\sqrt{x^2 - x + 1}\, dx = \int\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, dx$

$$= \int\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\, dx$$

$$= \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)}{2}\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\log\left[\left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \left(\frac{2x-1}{4}\right)\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{3}{8}\log\left[\frac{(2x-1) + 2\sqrt{x^2 - x + 1}}{2}\right] + C_2$$

$$= \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{3}{8}\log[(2x-1) + 2\sqrt{x^2 - x + 1}] + C_3,$$

जहाँ $C_3 = -\log 2 + C_2$

I_1 तथा I_2 का मान समी० (2) में रखने पर

$$I = \frac{1}{3}(x^2 - x + 1)^{3/2} + \frac{3}{8}(2x-1)\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{9}{16}\log[(2x-1) + 2\sqrt{x^2 - x + 1}] + C$$

जहाँ $C = C_1 + C_3$

Type IV. (a) $\int \frac{dx}{a + b \sin x}$, $\int \frac{dx}{a + b \cos x}$, $\int \frac{dx}{a + b \sin x + c \cos x}$

तथा $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$ रूप के समाकल

इन रूपों में समाकल का मान ज्ञात करने के लिए हम निम्न विधि अपनाते हैं :

I. $\sin x = \frac{2 \tan (x/2)}{1 + \tan^2 (x/2)}$, $\cos x = \frac{1 - \tan^2 (x/2)}{1 + \tan^2 (x/2)}$ रखें।

II. अंश में $1 + \tan^2 \frac{x}{2}$ की जगह $\sec^2 \frac{x}{2}$ रखें।

III. $\tan \frac{x}{2} = t$ रखे जिससे $\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx = dt$

IV. इससे समाकल $\frac{1}{at^2 + bt + c}$ रूप में परिवर्तित हो जाएगा। अब पहले बताई गई विधियों से समाकलन करें।

नीचे दिए गए उदाहरणों से क्रियाविधि स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण 5. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$ (ii) $\int \frac{dx}{2 + \cos x}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1996]**

हल : माना $I = \int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{1}{1 + \frac{2 \tan (x/2)}{1 + \tan^2 (x/2)} + \frac{1 - \tan^2 (x/2)}{1 + \tan^2 (x/2)}}$$

$$= \int \frac{1 + \tan^2 (x/2)}{1 + \tan^2 (x/2) + 2 \tan (x/2) + 1 - \tan^2 (x/2)}$$

$$= \int \frac{\sec^2 (x/2)}{2 + 2 \tan (x/2)} = \int \frac{\sec^2 (x/2)}{2 [(1 + \tan (x/2))]} dx$$

अब $\tan \frac{x}{2} = t$ रखने से, $\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx = dt$

$$I = \int \frac{dt}{1 + t} = \log (1 + t) + C = \log \left(1 + \tan \frac{x}{2}\right) + C$$

(ii) माना $I = \int \frac{1}{2 + \cos x} dx = \int \frac{1}{2 + \frac{1 - \tan^2 (x/2)}{1 + \tan^2 (x/2)}} dx$

$$= \int \frac{1 + \tan^2 (x/2)}{2 (1 + \tan^2 x/2) + 1 - \tan^2 (x/2)} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 (x/2)}{2 + 2\tan^2 (x/2) + 1 - \tan^2 (x/2)} = \int \frac{\sec^2 (x/2)}{3 + \tan^2 (x/2)} dx$$

अब $\tan \frac{x}{2} = t$ जिससे $\sec^2 \frac{x}{2} dx = 2\,dt$ रखने पर

$$I = \int \frac{2dt}{3 + t^2} = 2\int \frac{dt}{3 + t^2} dt = 2 \times \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{t}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\tan \frac{x/2}{\sqrt{3}} \right) + C$$

Type IV. (b) $\int \frac{dx}{a \sin x \pm b \cos x}$ **को हल करने का दूसरा तरीका**

I. $a = r\cos\theta$ तथा $b = r \sin\theta$ रखें जिससे $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ तथा $\tan\theta = \frac{b}{a}$

II. $\int \frac{1}{a \sin x \pm b \cos x} dx$ को $r \int \frac{1}{\sin (x \pm \theta)} dx$ रूप में लिखें।

III. दिया गया समाकल $\text{cosec}\,(x \pm \theta)$ रूप का हो जाएगा।

IV. अब इसे सूत्र की सहायता से समाकलन करें।

उदाहरण : हल करें $\int \frac{1}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx$

हल : माना $1 = r\cos\theta, \sqrt{3} = r\sin\theta$ जिससे $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ तथा $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

माना $I = \int \frac{1}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx$

$$= \frac{1}{r} \int \frac{1}{(\sin x \cos\theta + \cos x \sin\theta)} d\theta = \frac{1}{r} \int \frac{dx}{\sin (x + \theta)} = \frac{1}{r} \int \text{cosec}\,(x + \theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{r} \log \{\tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\theta}{2} \right) + C \quad \text{तथा } \theta = \frac{\pi}{3}, r = 2.$$

Type V. $\int \frac{dx}{a + b\cos^2 x}, \int \frac{dx}{a + b \sin^2 x}, \int \frac{dx}{a\cos^2 x + 2b \sin x \cos x + c \sin^2 x}$

$\int \frac{1}{a \sin^2 x + b\cos^2 x} dx$ **तथा** $\int \frac{1}{a + b \sin^2 x + c\cos^2 x} dx$ **रूप के समाकलन :**

ऐसे समाकल को निम्न रूप में ज्ञात करते हैं :

I. हर तथा अंश को $\cos^2 x$ से भाग दें।

II. यदि हर में $\sec^2 x$ आए तो उसे $1 + \tan^2 x$ के रूप में लिखें।

III. अब $\tan x = t$ रखें जिससे $\sec^2 x\, dx = dt$

प्रतिस्थापन से समाकल $\int \frac{1}{at^2 + bt + c} dt$ के रूप का हो जाएगा।

IV. अब पहले बताई गई विधियों से समाकलन करें।

उदाहरण : इनके मान निकालें :

(i) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 5\cos^2 x}$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2000]

(ii) $\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}$ (iii) $\int \frac{\sin x}{\sin 3x} dx$

हल : (i) माना $I = \int \frac{1}{4\sin^2 x + 5\cos^2 x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{4\tan^2 x + 5} dx$

[अंश तथा हर को $\cos^2 x$ से भाग देने पर]

$\tan x = t$ रखने पर, जिससे $\sec^2 x\, dx = dt$

$$I = \int \frac{dt}{4t^2 + 5} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2 + (5/4)} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{(t)^2 + (\sqrt{5}/2)^2} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{5}/2}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{5}/2} + C$$

$$= \frac{2}{4} \times \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{2t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{2\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{2t}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{2\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{2\tan x}{\sqrt{5}} + C$$ उत्तर

(ii) $$I = \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x}} dx = \int \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x + 1} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{1 + \tan^2 x + 1} dx = \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + 2} dx$$

$\tan x = t$ रखने पर, जिससे $\sec^2 x\, dx = dt$

$$I = \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

(iii) माना $I = \int \frac{\sin x}{\sin 3x} dx = \int \frac{\sin x}{3\sin x - 4\sin^3 x} dx$

$$= \int \frac{\sin x}{\sin x\,(3 - 4\sin^2 x)} dx = \int \frac{1}{3 - 4\sin^2 x} dx$$

$$\int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{3 - 4\sin^2 x}{\cos^2 x}} dx = \int \frac{\sec^2 x}{3\sec^2 x - 4\tan^2 x} dx = \int \frac{\sec^2 x}{3(1 + \tan^2 x) - 4\tan^2 x} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x}{3 + 3\tan^2 x - 4\tan^2 x}\,dx = \int \frac{\sec^2 x}{3 - \tan^2 x}\,dx$$

$\tan x = t$ रखने पर, जिससे $\sec^2 x\,dx = dt$

$$I = \int \frac{dt}{3 - t^2} = \int \frac{dt}{(\sqrt{3})^2 - (t)^2} = \frac{1}{2 \times \sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{3} - t}{\sqrt{3} + t} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \frac{\sqrt{3} + \tan x}{\sqrt{3} - \tan x} + C$$

Type VI. $\int \frac{a \sin x + b \cos x}{c \sin x + d \cos x}\,dx$ **रूप का समाकल**

इस रूप के समाकल को निम्न विधि से समाकलित करते हैं :

I. $a \sin x + b \cos x = \alpha \times$ हर का अवकल गुणांक $+ \beta \times$ हर

$$= \alpha \left\{ \frac{d}{dx} (c \sin x + d \cos x) \right\} + \beta \{c \sin x + d \cos x\}$$ के रूप में लिखें।

II. दोनों ओर $\sin x$ तथा $\cos x$ के गुणांकों की तुलना कर a तथा β का मान प्राप्त करें।

III. अब समाकल को निम्न रूप में लिखें :

$$\int \frac{a \sin x + b \cos x}{c \sin x + d \cos x}\,dx = \alpha \int \frac{c \cos x - d \sin x}{c \sin x + d \cos x}\,dx + \beta \int \frac{c \sin x + d \cos x}{c \sin x + d \cos x}\,dx$$

$$= \alpha \log (c \sin x + d \cos x) + \beta x + C$$

क्रिया विधि नीचे दिए गए उदाहरणों से स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण : (i) $\int \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x}\,dx$ (ii) $\int \frac{1}{1 + \cot x}\,dx$

हल : (i) $I = \int \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x}\,dx$

माना $2 \sin x + 3 \cos x = \alpha \left[\frac{d}{dx} (3 \sin x + 4 \cos x) \right] + \beta [3 \sin x + 4 \cos x]$

या $2 \sin x + 3 \cos x = \alpha [3 \cos x - 4 \sin x] + \beta [3 \sin x + 4 \cos x]$ ...(1)

$$= (3\beta - 4\alpha) \sin x + (3\alpha + 4\beta) \cos x$$

दोनों तरफ से $\sin x$ तथा $\cos x$ के गुणांकों की तुलना कर प्राप्त समीकरण को हल करने पर

$\therefore$ $$\alpha = \frac{1}{25}, \quad \beta = \frac{18}{25}$$

अब (1) से,

$$2 \sin x + 3 \cos x = \frac{1}{25} [3 \cos \alpha - 4 \sin x] + \frac{18}{25} [3 \sin x + 4 \cos x]$$

$$\therefore \quad I = \int \frac{\frac{1}{25} [3 \cos x - 4 \sin x] + \frac{18}{25} [3 \sin x + 4 \cos x]}{3 \sin x + 4 \cos x}\,dx$$

$$= \frac{1}{25} \int \frac{3 \cos x - 4 \sin x}{3 \sin x + 4 \cos x}\,dx + \frac{18}{25} \int \frac{3 \sin x + 4 \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x}\,dx$$

$$= \frac{1}{25} \log [3 \sin x + 4 \cos x] + \frac{18}{25} \int dx = \frac{1}{25} \log [3 \sin x + 4 \cos x] + \frac{18}{25} x + C$$

(ii) $I = \int \frac{1}{1 + \cot x} dx = \int \frac{1}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}} dx = \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ ...(1)

माना $\sin x = \alpha \left[\frac{d}{dx} (\sin x + \cos x)\right] + \beta [\sin x + \cos x]$

या $\sin x = \alpha (\cos x - \sin x) + \beta (\sin x + \cos x) = (\beta - \alpha) \cos x$

दोनों तरफ $\sin x$ तथा $\cos x$ के गुणांक बराबर हल करने पर

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}$$

अब: (1) से $I = \int \frac{-\frac{1}{2} (\cos x - \sin x) + \frac{1}{2} (\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} dx$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \log (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} \int dx$$

$$= -\frac{1}{2} \log (\sin x + \cos x) + \frac{1}{2} x + C$$

Type VII. $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + Kx^2 + 1} dx$ **तथा** $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + Kx^2 + 1} dx$ **के रूप के समाकल जहाँ K धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य के बराबर अथवा अचर है।**

इसे निम्न विधि से करें :

I. हर तथा अंश को x^2 से भाग दें।

II. हर को $\left(x \pm \frac{1}{x}\right)^2 \pm K^2$ के रूप में लिखें। अब $x - \frac{1}{x}$ या $x + \frac{1}{x}$ को t के बराबर रखें जिससे समाकल में अंश की जगह dt आ जाएगा।

III. इससे समाकल मानक रूप $\frac{1}{t^2 + a^2}$ या $\frac{1}{t^2 - a^2}$ के रूप में आ जाता है, जिसे आसानी से समाकलित किया जा सकता है।

क्रिया विधि नीचे के उदाहरणों से स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण 1. $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx$ का मान ज्ञात करें।

हल : (i) माना $I = \int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx = \int \frac{\frac{x^2 + 1}{x^2}}{\frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2}} dx$ [हर तथा अंश को x^2 से भाग देने पर]

$$= \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} dx = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + (1)^2} dx$$

$x - \frac{1}{x} = t$ रखने पर, जिससे $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{dt}{t^2 + 1^2} = \tan^{-1} t + C = \tan^{-1}\left(x - \frac{1}{x}\right) + C$$

उदाहरण 2. इनके मान ज्ञात करें :

(i) $\int \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$ (ii) $\int \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$ (iii) $\int \{\sqrt{\tan\theta} + \sqrt{\cot\theta}\}\, d\theta$

हल : (i) $I = \int \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \int \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx$

$$I = \frac{1}{2}\left[\int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx + \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 + 2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + (\sqrt{2})^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - (\sqrt{2})^2} dx$$

माना प्रथम समाकल में $x - \frac{1}{x} = u$, जिससे $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = du$

तथा द्वितीय समाकल में $x + \frac{1}{x} = v$, जिससे $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = dv$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{2})^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dv}{v^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4 \times \sqrt{2}} \log \frac{v - \sqrt{2}}{v + \sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}}{x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{x^2 + 1 - \sqrt{2}x}{x^2 + 1 + \sqrt{2}x} + C$$

(ii) माना $I = \int \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$

माना $\tan\theta = t^2$ जिससे कि $\sec^2\theta\, d\theta = 2t\, dt$

या $\quad d\theta = 2t \times \frac{1}{\sec^2\theta} dt = 2t \times \frac{1}{1 + \tan^2\theta} dt = \frac{2t}{1 + t^4} dt$

$$\therefore \quad I = \int \sqrt{t^2} \times \frac{2t}{1 + t^4} dt = \int \frac{t \times 2t}{1 + t^4} dt$$

अब (i) की तरह हल करें।

(iii) माना $I = \int \{\sqrt{\tan}\,\theta + \sqrt{\cot\,\theta}\}\, d\theta = \int \left\{\sqrt{\tan}\,\theta + \frac{1}{\sqrt{\tan\,\theta}}\right\} d\theta = \int \frac{\tan\theta + 1}{\sqrt{\tan\,\theta}} d\theta$

माना $\tan\theta = x^2$ जिससे $\sec^2\theta\, d\theta = 2x\, dx$

या $\quad d\theta = \frac{2x}{\sec^2\theta} dx = \frac{2x}{1 + \tan^2\theta} dx = \frac{2x}{1 + x^4} dx$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1 + x^2}{x} \times \frac{2x}{1 + x^4} dx = 2\int \frac{x^2 + 1}{1 + x^4} dx$$

$$I = 2\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = 2\int \frac{\frac{x^2 + 1}{x^2}}{\frac{x^4 + 1}{x^2}} dx$$

$$= 2\int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = 2\int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} dx$$

अब $x - \frac{1}{x} = y$ रखने पर, जिससे $\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = dy$

$$I = 2\int \frac{dy}{y^2 + (\sqrt{2})^2} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{y}{\sqrt{2}} + C = \sqrt{2} \tan^{-1} \frac{x - \frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \sqrt{2} \tan^{-1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} + C = \sqrt{2} \tan^{-1} \frac{\tan\theta - 1}{\sqrt{2 \tan\theta}} + C$$

दूसरी विधि : $\quad I = \int (\sqrt{\tan\theta} + \sqrt{\cot\theta})\, d\theta = \sqrt{2} \int \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{2 \sin\theta \,.\, \cos\theta}} d\theta$

$$= \sqrt{2} \int \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{1 - (\sin\theta - \cos\theta)^2}} d\theta = \sqrt{2} \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}, \text{ जहाँ } z = \sin x - \cos x$$

$$= \sqrt{2} \sin^{-1} z + c = \sqrt{2} \sin^{-1} (\sin\theta - \cos\theta) + c$$

Type VIII. $\dfrac{1}{X\sqrt{Y}}$ **के रूप के समाकल :**

क्रियाविधि : (i) यदि X तथा Y दोनों प्रथम घात के हों, तो $Y = t^2$ रखें।

(ii) यदि X द्विघातीय तथा X एक घातीय हो तो $\sqrt{Y} = t$ रखें।

(iii) यदि X एक घातीय तथा Y द्विघातीय हो, तो $X = \dfrac{1}{t}$ रखें।

(iv) यदि X तथा Y दोनों द्विघातीय हों तो $\sqrt{\dfrac{Y}{X}} = t$ या $X = \dfrac{1}{t}$ रखें।

उदाहरण 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+3}}$

हल : माना $\displaystyle I = \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+3}}$

माना $x + 3 = t^2$ तो $dx = 2t\,dt$ तथा $x + 2 = t^2 - 3 + 2 = t^2 - 1$ तथा $t = \sqrt{x+3}$

$$\therefore \quad I = \int \frac{2t\,dt}{(t^2-1)\,t} = \int \frac{2}{t^2-1}\,dt = \int \frac{2}{(t+1)(t-1)}\,dt = \int \left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right] dt$$

$$= \log(t-1) - \log(t+1) + C = \log\frac{t-1}{t+1} + C = \log\frac{\sqrt{x+3}-1}{\sqrt{x+3}+1} + C$$

उदाहरण 2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x+1)}}$

हल : माना $\displaystyle I = \int \frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x+1}}$

अब $x + 1 = t^2$ से $dx = 2t\,dt$ तथा $x^2 - 4 = (t^2-1)^2 - 4 = t^4 - 2t^2 + 1 - 4 = t^4 - 2t^2 - 3$

$$\therefore \quad I = \int \frac{2t}{(t^4 - 2t^2 - 3)\,t}\,dt = \int \frac{2}{t^4 - 2t^2 - 3}\,dt$$

$$= 2\int \frac{1}{t^4 - 3t^2 + t^2 - 3}\,dt = 2\int \frac{1}{(t^2-3)(t^2+1)}\,dt$$

$$= 2\left[\int \frac{1}{4(t^2-3)} - \frac{1}{4(t^2+1)}\right] dt \qquad \text{(आंशिक भिन्नीकरण से)}$$

$$= 2 \times \frac{1}{4}\left[\int \frac{1}{t^2 - (\sqrt{3})^2}\,dt - \int \frac{1}{t^2 + 1^2}\,dt\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} - \tan^{-1} t\right] + C$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\tan(\sqrt{x+1}) + C$$ उत्तर

उदाहरण 3. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2-1}}$

हल : माना $I = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2-1}}$

माना $1 + x = \frac{1}{t}$ तो $x = \frac{1}{t} - 1, dx = -\frac{1}{t^2} dt$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 - 1}} \times \left(-\frac{1}{t^2}\right) dx$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t}} dt = -\int (1-2t)^{-1/2} dt$$

$$= -\frac{(1-2t)^{-(1/2)+1}}{(-2)\left(-\frac{1}{2}+1\right)} = -\frac{(1-2t)^{1/2}}{-2 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{1-2t} + C$$

$$= \sqrt{1 - \frac{2}{x+1}} + C = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + C$$

उदाहरण 4. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx$

हल : $x = \frac{1}{t}$ से $t = \frac{1}{x}$ तथा $\therefore \; dt = -\frac{1}{x^2} dx$

$$\therefore \quad I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{-dt}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{t\, dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

पुन: $t^2 + 1 = z^2$ से $2t\, dt = 2z\, dz \;\Rightarrow\; t\, dt = z\, dz$

$$\therefore \quad I = -\int \frac{z\, dz}{\sqrt{z^2}} = -\int \frac{z}{z} dz = -\int dz = -z + C$$

$$= -\sqrt{t^2+1} + C = -\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$$

महत्वपूर्ण सूत्र

(i) $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

(ii) $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a} + C$

(iii) $\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a}\log\frac{a+x}{a-x} + C$

(iv) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

(v) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \log\,(x+\sqrt{a^2+x^2})+C$

(vi) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \log\,(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$

(vii) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$

(viii) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\log\,[x+\sqrt{a^2+x^2}]+C$

(ix) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\,[x+\sqrt{x^2-a^2}]+C$

(x) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a}+C$

प्रश्नावली 5.1

निम्न के मान ज्ञात करें—

1. $\int \frac{dx}{4-x^2}$ **2.** $\int \frac{dx}{(x+1)^2-4}$ **3.** $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ **4.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{(\log x)^2+10}}$

6. $\int \frac{x}{(a^2-x^2)^{3/2}}\,dx$ [**संकेत :** $x = a\sin\theta$]

[उ० प्र० डिप्लोमा 1985]

7. (i) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]

$\left[\textbf{संकेत : } \text{हर} = (1-x-x^2) = -(x^2+x-1) = -\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}\right]$

(ii) $\int x\sqrt{\frac{9-x^2}{9+x^2}}\,dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

$\left[\textbf{संकेत : } \int \frac{x\,(9-x^2)}{\sqrt{9+x^2}}\,dx = 9\int \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}\,dx - \int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}\,dx\right]$

8. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$ **9.** $\int \frac{dx}{2x^2+x-1}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999, 2000]

10. $\int \sqrt{5+4x-x^2}\, dx$ **11.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3+8x-3x^2}}$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+2}}$ **13.** $\int \frac{2x-3}{x^2+3x-18}\, dx$ **14.** $\int \frac{x+1}{x^2+x+3}\, dx$

15. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+3}}\, dx$ **16.** $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+5}}\, dx$ **17.** $\int (x+1)\sqrt{1+x^2}\, dx$

18. $\int \frac{1}{\sqrt{3}\sin x+\cos x}\, dx$ **19.** $\int \frac{1}{5+4\cos x}\, dx$

20. $\int \frac{1}{5-4\sin x}\, dx$ **21.** $\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\, dx$ **22.** $\int \frac{1}{1+\tan x}\, dx$

23. $\int \frac{1}{1+\cot x}\, dx$ **24.** $\int \frac{dx}{4\sin^2 x+5\cos^2 x}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 200

25. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$ **26.** $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\, dx$ **27.** $\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\, dx$ **28.** $\int \frac{dx}{x^4+1}$

29. $\int \sqrt{\cot\theta}\, d\theta$ **30.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$ **31.** $\int \frac{dx}{(2x+3)\sqrt{x+5}}$

32. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+4}}$ **33.** $\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\, dx$

34. $\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}}$

[संकेत : $\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]\times\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2+1}}\, dx - \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}\, dx\right]$$

35. निम्न फलनों का समाकलन करें :

(i) $\sinh x$ [संकेत : $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$]

(ii) $\cosh x$

(iii) $\tanh x$ [संकेत : $\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$]

(iv) cosech x

36. मान निकालें :

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ [संकेत : $x = a\sinh\theta$]

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ [संकेत : $x = a\cosh\theta$]

(iii) $\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx$ (iii) $\int \sqrt{x^2-a^2}\, dx$ (v) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2016]

(vi) $\int \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\, dx$ (vii) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$ (viii) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$

37. निम्न के मान ज्ञात करें—

(i) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-4x^2}}$

(ii) $\int \frac{3x^2}{\sqrt{9-16x^6}}\, dx$

(iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-16}}$

(iv) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{16+\tan^2 x}}\, dx$

(v) $\int \sqrt{x^2-16}\, dx$

(vi) $\int \frac{dx}{4+x^2}$

(vii) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$

(viii) $\int \frac{e^x}{(e^{2x}+1)}\, dx$

(ix) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8}$

(x) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}\, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]

(xi) $\int \frac{dx}{4+9x^2}$

(xii) $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{1-\cot^2 x}\, dx$

38. सही उत्तर पर (✓) का चिन्ह लगायें—

(i) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ का मान है—

(a) $\tan^{-1}(e^x) + c$

(b) $\tan^{-1}(e^{-x}) + c$

(c) $\cot^{-1}(e^x) + c$

(d) कोई नहीं

(ii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ का मान है—

(a) $\sin^{-1} \frac{x}{a}$

(b) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$

(c) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{a^2}{2} + c$

(d) कोई नहीं

(iii) $\int \sqrt{x^2 - 4}\, dx$ का मान है—

(a) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4} - 2\log[x + \sqrt{x^2 - 4}] + c$

(b) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4} + 2\log[x + \sqrt{x^2 - 4}] + c$

(c) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4} + c$

(d) $\log[x + \sqrt{x^2 - 4}] + c$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 25}}$ का मान है—

(a) $\sin^{-1} \frac{x}{5} + c$

(b) $\log[x + \sqrt{x^2 - 25}] + c$

(c) $\log[x - \sqrt{x^2 - 25}] + c$

(d) कोई नहीं

(v) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ का मान है—

(a) $\frac{1}{2a} \log \frac{x - a}{x + a} + c$

(b) $\frac{1}{2a} \log \frac{x + a}{x - a} + c$

(c) $\log \frac{x - a}{x + a} + c$

(d) $\log \frac{x + a}{x + a} + c$

उत्तरमाला

1. $\frac{1}{4} \log\left(\frac{2 + x}{2 - x}\right) + C$ **2.** $\frac{1}{4} \log_e \frac{x - 1}{x + 3} + C$ **3.** $\frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C$

4. $\log(x + \sqrt{x^2 - 9}) + C$ **5.** $\log\{\log x + \sqrt{(\log x)^2 + 10}\} + C$

6. $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C$

7. (i) $\sin^{-1} \frac{(2x + 1)}{\sqrt{5}} + C$ (ii) $\frac{9}{2} \sin^{-1} \frac{x^2}{3} + \frac{1}{2}(9 - x^4)^{1/2} + C$

8. $\frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C$ **9.** $\frac{1}{3} \log \frac{2x - 1}{2(x + 1)} + C$

10. $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{5+4x-x^2}+\frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x-2}{3}+C$

11. $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{-1}\left(\frac{3x-4}{5}\right)+C$

12. $[\log\{(x-2)+\sqrt{x^2-4x+2}]+C$

13. $\log(x^2+3x-18)-\frac{2}{3}\log\frac{x-3}{x+6}+C$

14. $\frac{1}{2}\log(x^2+x+3)+\frac{1}{\sqrt{11}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{11}}+C$

15. $2\sqrt{x^2+4x+3}-3\log\{x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\}+C$

16. $2\sqrt{x^2+4x+5}-\log(x+2+\sqrt{x^2+4x+5}+C$

17. $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\log[x+\sqrt{x^2+1}]+C$

18. $\frac{1}{2}\log\left\{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\right\}+C$

19. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\tan(x/2)}{3}\right)+C$

20. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{5\tan(x/2)-4}{3}\right)+C$

21. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)+C$

22. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\log(\sin x+\cos x)+C$

23. $-\frac{1}{2}\log(\sin x+\cos x)+\frac{1}{2}x+C$

24. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{2\tan x}{\sqrt{5}}\right)+C$

25. $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x}{2}\right)+C$

26. $\left[\frac{1}{2}\log\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right]+C$

27. $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}\right)\right]+C$

28. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\right)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left[\frac{x^2-\sqrt{2}\,x+1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\right]+C$

29. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{(\cot\theta-1)}{\sqrt{2\cot\theta}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left[\frac{\cot\theta+1-\sqrt{2\cot\theta}}{\cot\theta+1+\sqrt{2\cot\theta}}\right]+C$

30. $\log\left\{\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right\}+C$

31. $\frac{1}{\sqrt{14}}\log\left[\frac{\sqrt{2x+10}-\sqrt{7}}{\sqrt{2x+10}+\sqrt{7}}\right]+C$

32. $-\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left[\frac{\sqrt{3}+\sqrt{x^2+2x+4}}{\sqrt{3}(x+1)}\right]+C$

33. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}+C$

34. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left[\frac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2}x-\sqrt{x^2+1}}\right]+C$

35. (i) $\cosh x$ (ii) $\sinh x$ (iii) $\log(2\cosh x)$ (iv) $\log\tanh\left(\frac{x}{2}\right)+C$

36. (i) $\sinh^{-1}\frac{x}{a}$ (ii) $\cosh^{-1}\frac{x}{a}$ (iii) $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\sinh^{-1}\frac{x}{a}$

(iv) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{a}$

(v) $a\sin^{-1}\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+c$

(vi) $a\sin^{-1}\frac{x}{a}+\sqrt{a^2-x^2}+c$

(vii) $\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+c$

(viii) $\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+c$

37. (i) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}+c$

(ii) $\frac{1}{4}\sin^{-1}\left(\frac{4x^3}{3}\right)+c$

(iii) $\log(x+\sqrt{x^2-16})+c$

(iv) $\log[\tan x+\sqrt{16+\tan^2 x}]+c$

(v) $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-16}-8\log(x+\sqrt{x^2-16})+c$

(vi) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}+c$

(vii) $-\tan^{-1}(\cos x)+c$

(viii) $\tan^{-1}(e^x)+c$

(ix) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right)+c$

(x) $\log(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})+c$

(xi) $\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{3x}{2}+c$

(xii) $-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)+c$

38. (i) (a) (ii) (b) (iii) (a) (iv) (b) (v) (a)

□□

खण्ड-2 : समाकलन गणित-II

6. निश्चित समाकलन	83-102
7. समाकलन के अनुप्रयोग	103-133
8. माध्यमान	134-137
9. आंकिक समाकलन	138-150
10. बीजीय समीकरणों का हल : आंकिक विधियाँ	151-172

CHAPTER 6

निश्चित समाकलन (Definite Integration)

6.1 परिचय (Introduction)

हम पिछले अध्यायों में चर्चा कर चुके हैं कि यदि समाकलन के लिए कोई सीमा नहीं दी गई हो तो किसी फलन का समाकलन करने के बाद एक स्थिरांक जोड़ दिया जाता है, अर्थात्

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{जहाँ } f(x) \text{ का समाकलन } F(x) \text{ है।}$$

चूँकि स्थिरांक का मान निश्चित नहीं होता अतः इसे अनिश्चित समाकलन कहते हैं।

इस अध्याय में हम निश्चित सीमाओं के अधीन समाकलन पर विचार करेंगे।

6.1.1 परिभाषा (Definition)

जब किसी फलन का समाकलन दिए गए किन्हीं दो निश्चित सीमाओं के लिए किया जाता है तो उसे निश्चित समाकलन कहते हैं।

यदि $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ हो, तो $F(b) - F(a)$ को सीमाओं a तथा b के मध्य निश्चित समाकल कहा जाता है तथा इसे निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है।

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

यह स्पष्ट है कि निश्चित समाकलन अद्वितीय होता है। यहाँ a तथा b समाकलन की सीमायें हैं।

6.2 समाकलन की सीमायें (Limits of Integration)

$\int_a^b f(x)\,dx$ में a को जो समाकलन चिह्न में नीचे लिखा जाता है, समाकलन की **निम्न सीमा (Lower Limit)** तथा b को, जो ऊपर लिखा जाता है, समाकलन की **उच्च सीमा (Upper Limit)** कहते हैं।

6.3 निश्चित समाकलन ज्ञात करने की विधि (Integration)

I. सर्वप्रथम पहले बताई गई विधियों से समाकलन करें। समाकलन नियतांक नहीं लिखें।

II. इस राशि को बड़े कोष्ठक में रखकर कोष्ठक के दाहिनी ओर निम्न तथा उच्च सीमा लिखें।

III. अब समाकलन की चर राशि की जगह उच्च सीमा तथा निम्न सीमा रखकर, उच्च सीमा से प्राप्त राशि से निम्न सीमा से प्राप्त राशि का अन्तर निकाल लें।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx$

हल : $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = [\log x]_a^b = \log b - \log a = \log \frac{b}{a}$

उदाहरण 2. $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2000]

हल : $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - 1)\,dx = [\tan x - x]_0^{\pi/4}$

$$= \left[\left(\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right) - \left(\frac{\pi}{4} - 0\right)\right] = \left[1 - 0 - \frac{\pi}{4} + 0\right] = \frac{4-\pi}{4}$$

उदाहरण 3. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$

हल : $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1-\sin 2x}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \,.\, \cos x}\,dx$

$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{(\cos x - \sin x)^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \cos x\,dx - \int_0^{\pi/4} \sin x\,dx$$

$$= [\sin x]_0^{\pi/4} - [-\cos x]_0^{\pi/4} = [\sin x]_0^{\pi/4} + [\cos x]_0^{\pi/4}$$

$$= \left[\sin\frac{\pi}{4} - \sin 0\right] + \left[\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

निश्चित समाकलन में प्रतिस्थापन : यदि समाकलन करते समय प्रतिस्थापन करना पड़े तो निश्चित समाकलन की सीमाओं को भी प्रतिस्थापन की चर राशि के अनुसार परिवर्तित करना पड़ता है।

क्रियाविधि नीचे के उदाहरणों से स्पष्ट है।

उदाहरण 4. $\int_0^1 e^x \cos e^x\,dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1993]

हल : माना $I = \int_0^1 e^x \cos e^x\,dx$

$e^x = t$ लेने से, जिससे $e^x\,dx = dt$;

जब $x = 0,\ t = e^0 = 1$ तथा जब $x = 1,\ t = e^1 = e$

$\therefore \quad I = \int_1^e \cos t\,dt = [\sin t]_1^e = \sin(e) - \sin(1)$ **उत्तर**

उदाहरण 5. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

हल : माना $\cos x = t$ जिससे $-\sin x\,dx = dt$

जहाँ $x = 0,\ t = \cos 0 = 1$ जब $x = \frac{\pi}{2},\ t = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$\therefore \quad I=\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx=\int_1^0 \frac{-dt}{1+t^2}=-\int_1^0 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$=-[\tan^{-1} t]_1^0=-[\tan^{-1} 0-\tan^{-1} 1]=-\left[0-\frac{\pi}{4}\right] \quad \therefore \quad I=\frac{\pi}{4}$$ उत्तर

उदाहरण 6. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x+b^2 \sin^2 x}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1990, 2014]

हल : माना $\displaystyle I=\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x+b^2 \sin^2 x}$

$$=\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x}{a^2+b^2 \tan^2 x}\,dx$$ [हर तथा अंश को $\cos^2 x$ से भाग देने पर]

माना $\tan x=t$ जिससे $\sec^2 x\,dx=dt$

तथा जब $x=0, t=\tan 0=0$ जब $x=\frac{\pi}{2}, t=\tan\frac{\pi}{2}=\infty$

$$I=\int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2+b^2 t^2}=\frac{1}{b^2}\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+\left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{b^2}\times\frac{1}{\frac{a}{b}}\times\left[\tan^{-1}\frac{t}{\frac{a}{b}}\right]_0^{\infty}$$ $\left[\because \int\frac{dX}{X^2+A^2}=\frac{1}{A}\tan^{-1}\frac{X}{A}\right]$

$$=\frac{1}{ab}\left[\tan^{-1}\frac{bt}{a}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{ab}[\tan^{-1}\infty-\tan^{-1} 0]$$

$$=\frac{1}{ab}\times\left[\frac{\pi}{2}-0\right]=\frac{\pi}{2ab}$$ उत्तर

उदाहरण 7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2}\,dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999, 2005]

अब माना $\tan^{-1} x=t$ जिससे $\frac{1}{(1+x^2)}\,dx=dt$

जब $x=0, t=\tan^{-1} 0=0$ तथा जब $x=1, t=\tan^{-1} 1=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad I=\int_0^1 \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\pi/4} t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/4}=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^3-0\right]=\frac{\pi^3}{192}$$ उत्तर

उदाहरण 8. $\int_0^{\pi} \frac{1}{5+4\cos x}\,dx$

हल : माना $I = \int_0^{\pi} \frac{1}{5+4\cos x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{5+4\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}\,dx$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{5+5\tan^2\frac{x}{2}+4-4\tan^2\frac{x}{2}} = \int_0^{\pi} \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+9}\,dx$$

अब माना $\tan\frac{x}{2} = t$ जिससे $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = dt$ या $\sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2\,dt$

जब $x = 0,\ t = \tan\frac{0}{2} = 0$ तथा जब $x = \pi,\ t = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$

$$\therefore \qquad I = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+3^2} = 2\times\frac{1}{3}\left[\tan^{-1}\frac{t}{3}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{3}[\tan^{-1}\infty - \tan^{-1} 0]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{\pi}{2}-0\right] = \frac{\pi}{3}$$

उदाहरण 9. $\int_0^{\pi/2}(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x})\,dx$

हल : माना $I = \int_0^{\pi/2} (\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x})\,dx$

या $$I = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}+\sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\frac{1}{2}\,2\sin x\cos x}}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-1+2\sin x\cos x}}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-(\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x)}}\,dx$$

अर्थात् $$I = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}}\,dx \qquad \ldots$$

अब (1) में $\sin x - \cos x = t$ से $(\cos x+\sin x)\,dx = dt$

जब $x = 0, t = -1$ तथा जब $x = \frac{\pi}{2}, t = 1$

$$\therefore \quad I = \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sqrt{2} \times 2 \times \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\sqrt{2}\,[\sin^{-1} t]_0^1$$

$$= 2\sqrt{2}\,[\sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0] = 2\sqrt{2}\,[\frac{\pi}{2} - 0] = 2\sqrt{2} \times \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\,\pi$$ उत्तर

प्रश्नावली 6.1

निम्न का समाकलन ज्ञात करें—

1. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

2. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\cos 2x}\, dx$

3. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\, dx$

4. $\int_0^{\pi/6} \sqrt{1-\sin 2x}\, dx$

5. $\int_1^2 x \log x\, dx$

6. $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2 x\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]**

7. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan\theta}\, d\theta$

8. $\int_0^{\pi/2} e^x \sin x\, dx$

9. (i) $\int_0^{\pi/2} x \sin x\, dx$

(ii) Prove $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1 = x^2}}\, dx = 1$

10. $\int_1^3 \frac{\log x}{x}\, dx$

11. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x\, dx$

12. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\sin x)(2+\sin x)}\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]**

13. $\int_0^{\pi/3} \frac{\cos x}{3+4\sin x}\, dx$

14. $\int_0^1 x\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\, dx$ [**संकेत :** $I = \int_0^1 \frac{x(1-x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx - \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$]

15. $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2}\, dx$

16. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+5\sin x}$

17. $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1990, 14]**

18. $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^x}\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2016(B)]**

उत्तरमाला

1. $\frac{\pi}{12}$ 2. $\sqrt{2}$ 3. $\frac{2}{3}$ 4. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

5. $2\log 2-\frac{3}{4}$ 6. $\frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)$ 7. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(1+\log\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)$

8. $\frac{1}{2}(e^{\pi/2}+1)$ 9. 1 10. $\frac{(\log 3)^2}{2}$ 11. $\frac{1}{4}$

12. $\log\frac{4}{3}$ 13. $\frac{1}{4}\log\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ 14. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ 15. $\frac{\pi^2}{32}$

16. $\frac{1}{3}\log 2$ 17. $\frac{\pi}{2ab}$ 18. $\log(1+e)-\frac{1}{e}-\log 2$

6.4 निश्चित समाकलन के गुण (Properties of Definite Integration)

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB), 18(S)]

यदि $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$, तो

गुण (1) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt$

प्रमाण : माना $\int f(x)\,dx=F(x)+c$

तथा $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)+c]_a^b=F(b)-F(a)$

तथा $\int_a^b f(t)\,dt=[f(t)+c)]_a^b=F(b)-F(a)$

$\therefore \quad \int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt$

गुण (2) $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

प्रमाण : $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=-[F(a)-F(b)]=-\int_b^a f(x)\,dx$

गुण (3) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$, **जहाँ** $a<c<b$

प्रमाण : R.H.S. $=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=[F(c)-F(a)]+[F(b)-F(c)]$

$=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx=$ L.H.S.

गुण (4) $\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$

प्रमाण : माना $a-x=t$ जिससे जब $x=a, t=0$ तथा जब $x=0, t=a$ और $dx=-dt$

$\therefore \quad \int_0^a f(a-x)\,dx=-\int_a^0 f(t)\,dt=\int_0^a f(t)\,dt$ [गुण 2]

$=\int_0^a f(x)\,dx$ [गुण 1]

गुण (5) $\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$ **यदि** $f(-x)=-f(x)$ **i.e., यदि** $f(x)$ **विषम फलन है।**

तथा $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ यदि $f(-x) = f(x)$ i.e., यदि $f(x)$ सम फलन है।

प्रमाण : यहाँ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ $[\because\ 0 < 0 < a]$

$= I_1 + I_2$ (माना) ...(1)

अब $I_1 = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ तथा $I_2 = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

अब $I_1 = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx$

$x = -t$ से $dx = -dt$ तथा जब $x = -a, t - a$ तथा जब $x = 0, t = 0$

$\therefore\ I_1 = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt = \int_{0}^{a} f(-t)\,dt$ [गुण (2)]

$= \int_{0}^{a} f(-x)\,dx$ [गुण (1)] ...(2)

Case I : जब $f(x)$ विषम फलन है i.e., $f(-x) = -f(x)$

(1) तथा (2) से $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ $[\because\ f(-x) = -f(x)]$

$= 0$ **सिद्ध हुआ।**

Case II : जब $f(x)$ सम फलन है, i.e., $f(-x) = f(x)$

(1) तथा (2) से $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ $[\because\ f(-x) = f(x)]$

$= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ **सिद्ध हुआ।**

गुण (6) $\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$ यदि $f(2a - x) = f(x)$

$= 0,$ यदि $f(2a - x) = -f(x)$

प्रमाण : यहाँ $I = \int_{0}^{2a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{2a} f(x)\,dx$ $[\because\ 0 < a < 2]$ ...(1)

$= I_1 + I_2$ (माना)

जहाँ $I_1 = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ तथा $I_2 = \int_{a}^{2a} f(x)\,dx$

अब $I_2 = \int_{a}^{2a} f(x)\,dx$

$x = 2a - t$ रखने पर $dx = -dt$ तथा जब $x = a, t = a$ एवं जब $x = 2a, t = 0$

$I_2 = -\int_{a}^{0} f(2a - t)\,dt = \int_{0}^{a} f(2a - t)\,dt = \int_{0}^{a} f(2a - x)\,dx$ ...(2)

Case I : जब $f(2a - x) = f(x)$

$I_2 = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$

$\therefore$ (1) से $I = \int_{0}^{2a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ **सिद्ध हुआ।**

Case II : जब $f(2a - x) = -f(x)$

$I_2 = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ **सिद्ध हुआ।**

$\therefore$ (1) से $I = \int_{0}^{2a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx - \int_{0}^{a} f(zx)\,dx = 0$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. निम्नलिखित समाकलों के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2005, 11]

(ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cot x} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2010]

(iii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1997, 98, 2008, 09]

हल : (i) माना $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$ ...(1)

$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx \quad \left[\because \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a - x)\, dx\right]$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$ ...(2)

(1) + (2) से

$$I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

$\Rightarrow \quad 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx \qquad \Rightarrow \quad 2I = \int_0^{\pi/2} dx$

$\Rightarrow \quad 2I = [x]_0^{\pi/2} = \left[\frac{\pi}{2} - 0\right] \qquad \Rightarrow \quad 2I = \frac{\pi}{2} \qquad \therefore \quad I = \frac{\pi}{4}$

(ii) माना $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cot x} dx \qquad \Rightarrow \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}} dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

[अब प्रश्न (i) की भाँति करें]

Study
Power
Point

(iii) $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx$ ...(1)

$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}\, dx$ ...(2)

(1) + (2) से

$I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx$

$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx \qquad \Rightarrow \quad 2I = \int_0^{\pi/2} 1\, dx$

$\Rightarrow \quad 2I = [x]_0^{\pi/2} = \left[\frac{\pi}{2} - 0\right] \qquad \Rightarrow \quad 2I = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad I = \frac{\pi}{4}$ उत्तर

उदाहरण 2. $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x}\, dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2002, 2014 (O)]**

हल : माना $I = \int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x}\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \tan (\pi - x)}{\sec (\pi - x) + \cos (\pi - x)}\, dx \qquad \left[\because \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a - x)\, dx\right]$

$\Rightarrow \quad I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)(-\tan x)}{(-\sec x) + (-\cos x)}\, dx \qquad \Rightarrow \quad I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \tan x}{\sec x + \cos x}\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\tan x}{\sec x + \cos x}\, dx - \int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x}\, dx$

$\Rightarrow \quad I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x} + \cos x}\, dx - I \qquad \Rightarrow \quad I + I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$

$$\Rightarrow \quad 2I = \pi \times 2\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \qquad \left[\because \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx \text{ यदि } f(2a-x) = f(x)\right]$$

$$\Rightarrow \quad I = \pi\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

अब माना $\cos x = t$ जिससे $-\sin x\,dx = dt$ या $\sin x\,dx = -\,dt$

जहाँ $x = 0,\ t = \cos 0 = 1$ तथा जब $x = \frac{\pi}{2}, t = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$\therefore \quad I = -\pi\int_1^0 \frac{dt}{1+t^2} = \pi\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \qquad \left[\because -\int_b^a f(a)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx\right]$$

$$= \pi\,[\tan^{-1} t]_0^1 = \pi\,[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0] = \pi\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \pi \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

उदाहरण 3. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 1996, 2007]**

हल : माना $I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ ...(1)

तथा $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}\,dx \qquad \left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx\right]$

i.e., $I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ ...(2)

$\therefore$ (1) तथा (2) से जोड़ने पर

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx + \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$$ [उदाहरण (2) देखें]

उदाहरण 4. साबित करें कि $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004, 19**

हल : माना $I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx$ ...(1)

$$= \int_0^{\pi/4} \log \left\{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right\} dx = \int_0^{\pi/4} \log \left\{1 + \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} . \tan x}\right\} dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log \frac{1 + \tan x + 1 - \tan x}{1 + \tan x} dx \qquad \left[\because \tan \frac{\pi}{4} = 1\right]$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log \frac{2}{1 + \tan x} dx = \int_0^{\pi/4} \log 2 \, dx - \int_0^{\pi/4} \log (1 + \tan x) \, dx$$

$= \log 2 \int_0^{\pi/4} dx - I$ [(1) से]

$I + I = \log 2 \, [x]_0^{\pi/4}$

या $2I = \log 2 \left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\pi}{4} \log 2 \qquad \therefore \quad I = \frac{\pi}{8} \log 2$

उदाहरण 5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log (1 + x)}{1 + x^2} dx$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]**

हल : माना $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\log (1 + x)}{1 + x^2} dx$ ...(1)

(1) में $x = \tan \theta$ रखने पर जिससे $dx = \sec^2 \theta \, d\theta$;जहाँ $x = 0, \theta = 0$ तथा जब $x = 1, \theta = \pi / 4$

$\therefore \quad I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\log (1 + \tan \theta)}{\sec^2 \theta} \sec^2 \theta \, d\theta$ ...(1)

या $\quad I = \int_0^{\pi/4} \log (1 + \tan \theta) \, d\theta$ ...(2)

[अब उदाहरण (4) की भाँति हल करें।]

उदाहरण 6. (i) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$ या $\frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2002]**

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \log \cos x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2003, 17(SB)]**

हल : (i) माना $I = \int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ ...(1)

या $\quad I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \log \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\pi/2} \log \cos x \, dx$ ...(2)

(1) तथा (2) को जोड़ने पर

$$2I = \int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx + \int_0^{\pi/2} \log \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} [\log \sin x + \log \cos x] \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \sin x \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} \log \frac{2 \sin x \cos x}{2} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \frac{\sin 2x}{2} dx = \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x \, dx - \int_0^{\pi/2} \log 2 \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x \, dx - \log 2 \, [x]_0^{\pi/2} = \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x \, dx - \log 2 \left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x \, dx - \frac{\pi}{2} \log 2$$

अर्थात् $2I = I_1 - \frac{\pi}{2} \log 2$ ...(3)

जहाँ $I_1 = \int_0^{\pi/2} \log \sin 2x \, dx$

अब माना $2x = t$ जिससे $2 \, dx = dt$

अर्थात् $dx = \frac{1}{2} dt$; जब $x = 0, t = 2 \times 0 = 0$ तथा जब $x = \frac{\pi}{2}, t = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$

$$\therefore \quad I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \log \sin t \, dt = \frac{1}{2} 2 \int_0^{\pi/2} \log \sin t \, dt$$

[$\because \int_0^{2a} f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$ यदि $f(2a - x) = f(x)$]

$= \int_0^{\pi/2} \log \sin t \, dt = \int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$ [$\because \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt$]

अतः $I_1 = I$

$\therefore$ (3) में I_1 का मान रखने पर

$$2I = I - \frac{\pi}{2} \log 2 \quad \text{या} \quad I = -\frac{\pi}{2} \log 2$$

अर्थात् $$\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} \log 2^{-1} = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$$

(ii) माना $I = \int_0^{\pi/2} \log \cos x \, dx$ ...(1)

तथा $$I = \int_0^{\pi/2} \log \cos \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx$$ ...(2)

[अब ऊपर की भाँति करें]

उदाहरण 8. सिद्ध करें $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2001]

हल : माना $I = \int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

...(1)

$$=\int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)}{a^2 \cos^2 (\pi - x) + b^2 \sin (\pi - x)} dx \quad = \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx - \int_0^{\pi} \frac{x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - I$$ [(1) से]

या $$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x} dx \quad \ldots(2)$$

$\left[\because \int_0^{2a} f(x)\, dx = 2 \int_0^{a} f(x)\, dx \text{ यदि } f(2a - x) = f(x)\right]$

[हर तथा अंश में $\cos^2 x$ से भाग देने पर]

अब माना $b \tan x = t$ जिससे $b \sec^2 x\, dx = dt$ अर्थात् $\sec^2 x\, dx = \frac{1}{b} dt$

जब $x = 0, t = 0$ तथा जब $x = \pi, t = b \tan \frac{\pi}{2} = \infty$

अतः (2) से $$I = \frac{\pi}{b} \int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{\pi}{b} \frac{1}{a} \left[\tan^{-1} \frac{t}{a}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{ab} [\tan^{-1} \infty - \tan^{-1} 0] = \frac{\pi}{ab} \left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = \frac{\pi^2}{2\, ab}$$ सिद्धम्

6.5 गामा फलन (Gamma Function)

गामा फलन को सामान्यतः $\Gamma(n)$ से सूचित किया जाता है तथा इसे गामा-n पढ़ते हैं।

परिभाषा : निश्चित समाकल $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx$, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है, को n का गामा फलन कहते हैं।

अतः $$\Gamma n = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx, \quad n > 0$$

इसके निम्नंकित गुण हैं :

(i) $\Gamma(n + 1) = n\, \Gamma(n)$ या $\Gamma(n + 1) = n!$ जहाँ n धन पूर्णांक है

(ii) $\Gamma(1) = 1$ (iii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

जैसे—

(i) $\Gamma 5 = \Gamma(4 + 1) = 4\, \Gamma 4$ या $\Gamma 5 = 4!$

(ii) $\Gamma \frac{5}{2} = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \Gamma \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$

इसी तरह (iii) $\Gamma \frac{7}{2} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\pi} = \frac{15}{8} \sqrt{\pi}$

6.5.1 $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx$ के रूप में समाकल का मान :

(i) यदि दिया गया फलन $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx$ के रूप का हो, तो गामा फलन (Gamma function) की सहायता से इसका मान आसानी से निकाला जा सकता है। सूत्र निम्न है—

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}$$

जहाँ m तथा n धनात्मक पूर्णांक हैं।

(ii) **अपचयन सूत्र (Reduction Formula) :** इसका मान निम्नांकित अपचयन सूत्रों की सहायता से भी निकाला जा सकता है—

(i) $$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{[(m-1)(m-3)\ldots 2 \text{ या } 1][(n-1)(n-3)\ldots 2 \text{ या } 1]}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\ldots 2 \text{ या } 1}\cdot k$$

जहाँ $k = \pi/2$ यदि m तथा n दोनों सम हैं, $k = 1$ यदि दोनों में कोई एक विषम है।

(ii) $$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)(n-5)\ldots 2 \text{ या } 1}{n(n-2)(n-4)\ldots 2 \text{ या } 1}\cdot k$$

जहाँ $k = 1$, यदि n विषम है, $k = \frac{\pi}{2}$, यदि n सम है।

(iii) $$\int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2 \text{ या } 1}{n(n-2)(n-5)\ldots 2 \text{ या } 1}\cdot k$$

जहाँ $k = 1$, यदि n विषम है, $k = (\pi/2)$, यदि n सम है।

नोट :

- इसे वाली सूत्र के नाम से जाना जाता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

मान ज्ञात करे—

उदाहरण 1. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin^4 x\, dx$

हल : माना $$\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin^4 x\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{5+1}{2}\right)\times\Gamma\left(\frac{4+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5+4+2}{2}\right)}$$ [सूत्र के प्रयोग से]

[यहाँ $n = 4, m = 5$

$$= \frac{\Gamma(3)\times\Gamma(5/2)}{2\times\Gamma(11/2)} = \frac{2\times 1\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}}{2\times\frac{9}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{8}{315}$$

उत

उदाहरण 2. $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\, dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^0 \times \cos^8 x\, dx$

हल : $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\, dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^0 \times \cos^8 x\, dx = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{0+1}{2}\right) \times \Gamma\left(\dfrac{8+1}{2}\right)}{2 \times \Gamma\left(\dfrac{0+8+2}{2}\right)}$ [यहाँ $m = 0, n = 8$]

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{2 \times \Gamma(5)} = \frac{\sqrt{\pi} \times \frac{7}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\pi}}{2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{35}{256}\pi$$ उत्तर

उदाहरण 3. $\displaystyle\int_0^a \frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1983]

हल : माना $I = \displaystyle\int_0^a \frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$

माना $x = a \sin\theta$ लेने पर, $dx = a \cos\theta\, d\theta$ तथा जब $x = 0$, तो $\theta = 0$ तथा जब $x = a$ तो $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad I = \int_0^{\pi/2} \frac{a^4 \sin^4\theta}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\theta}}\, a\cos\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{a^4 \sin^4\theta}{a\cos\theta} \times a\cos\theta\, d\theta$$

$$= a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\, (\cos\theta)^0\, d\theta$$

$$= a^4 \frac{\Gamma\left(\frac{4+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{0+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{4+0+2}{2}\right)}$$

$$= \frac{a^4\, \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\,\Gamma(3)} = \frac{a^4 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\pi} \times \sqrt{\pi}}{2 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{3}{16}\pi a^4$$ उत्तर

उदाहरण 4. (i) $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^3 x\, dx$ (ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \cos^2 x\, dx$ (iii) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin^4 x\, dx$

अपचयन सूत्र :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{[(m-1)(m-3)\ldots(n-1)(n-3)\ldots]}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\ldots} . k \text{ से}$$

हल : (i) $$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^3 x\, dx = \frac{(6-1)(6-3)(6-5) \times (3-1)}{(6+3)(6+3-2)(6+3-4)(6+3-6)(6+3-8)} \times 1$$

$$= \frac{5 \times 3 \times 1 \times 2}{9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1} \times 1 = \frac{2}{63}$$ [$\because$ $n = 3$ विषम है अतः $k = 1$]

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^8 x \cos^2 x \, dx = \frac{(8-1)(8-3)(8-5)(8-7)(2-1)}{(8+2)(8+2-2)(8+2-4)(8+2-6)(8+2-8)} \times \frac{\pi}{2}$

$= \frac{7 \times 5 \times 3 \times 1 \times 1}{10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2} \times \frac{\pi}{2}$ [$\because$ m तथा n दो सम हैं अतः $k = \pi/2$]

$= \frac{7}{512}\pi$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin^4 x \, dx$

$\frac{(5-1)(5-3)(4-1)(4-3)}{(5+4)(5+4-2)(5+4-4)(5+4-6)(5+4-8)} \times 1 = \frac{4 \times 2 \times 3 \times 1}{9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1} \times 1 = \frac{8}{315}$

[$\because \cos x$ की घात $i.e., m$ विषम है अतः $k = 1$]

महत्वपूर्ण गुण एवं सूत्र

गामा फलन (Gamma Function)

(A) (i) गुण $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma n$ तथा $\Gamma(n+1) = n!$, जहाँ n धनात्मक पूर्णांक है।

(ii) $\Gamma 1 = 1$ (iii) $\Gamma \frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$

(B) $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}$

जहाँ m तथा n धनात्मक पूर्णांक हैं।

(i) अपचयन सूत्र :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx = \frac{[(m-1)(m-3)\ldots 2 \text{ या } 1\,(n-1)(n-3)\ldots 2 \text{ या } 1]}{(m+n)(m+n-2)(m+n-4)\ldots 2 \text{ या } 1} \cdot k$$

जहाँ $k = \frac{\pi}{2}$, यदि m तथा n दोनों सम हैं तथा $k = 1$ यदि दोनों में कोई एक विषम है।

(ii) $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{(n-1)(n-3)(n-4)\ldots 2 \text{ या } 1}{n(n-2)(n-4)\ldots 2 \text{ या } 1} \cdot k$

जहाँ $k = 1$, यदि n विषम है तथा $k = \frac{\pi}{2}$, यदि n सम है।

(iii) $\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2 \text{ या } 1}{n(n-2)(n-5)\ldots 2 \text{ या } 1} \cdot k$

जहाँ $k = 1$, यदि n विषम है तथा $k = \frac{\pi}{2}$, यदि n सम है।

प्रश्नावली 6.2

निम्न के समाकलों का मान ज्ञात करें—

1. (i) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2010, 17(O)]

(ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \tan x} dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2010, 17(O), 18(S)]

(iii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cot x}}{\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}} dx$

(iv) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{3/2} x}{\sin^{3/2} x + \cos^{3/2} x} dx$

(v) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} dx$

(vi) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sqrt{\tan x}} dx$

(vii) $\int_0^{\pi} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x} + e^{-\cos x}} dx$

2. $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x} dx$

3. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1996, 2007]

4. (i) $\int_0^{\pi} \frac{x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2001, 15]

(ii) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2014]

5. $\int_0^{\pi/2} \log \tan x \, dx$

6. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \log \tan x \, dx$

7. $\int_0^1 \log\left(\frac{1}{x} - 1\right) dx$

8. (i) $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{1 + \cos^2 x}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]

(ii) $\int_0^{\pi} x \log \sin x \, dx$

9. $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{1 + \cos \alpha \sin x}$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1989, 2003]

10. $\int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{(1 + x)(1 + x^2)} dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

11. $\int_0^{\pi} \log_e (1 + \cos x) \, dx$

12. $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2002, 14 (O)]

13. $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2001]

14. (i) $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1989]

(ii) $\int_0^{\pi/2} \cos^7 x \, dx$ (iii) $\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1996]

(iv) $\int_0^{\pi} \sin^5 x \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1992]

15. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin^4 x \, dx$

16. $\int_0^2 x^{3/2} (2-x)^{1/2} \, dx$ [संकेत : $x = 2\sin^2 t$ रखें] 17. $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^6 x \, dx$

[उ० प्र० डिप्लोमा 1980]

18. $\int_0^{\pi} \theta \sin^6 \theta \cos^4 \theta \, d\theta$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1992]

19. $\int_0^{\pi} \theta \sin^4 \theta \cos^2 \theta \, d\theta$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1995]

20. $\int_0^a \frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1983]

21. $\int_0^2 \frac{x^4}{\sqrt{4 - x^2}} dx$ 22. $\int_0^{2a} \frac{x^{3/2}}{(2a-x)^{1/2}} dx$ 23. $\int_0^{2a} \frac{x^{9/2}}{\sqrt{2a-x}} dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 1983]

24. $\int_0^{\pi/6} \sin^8 3\theta \, d\theta$ [संकेत : माना $3\theta = x$]

25. $\int_0^{2\pi} \sin^7 \frac{x}{4} dx$ 26. $\int_0^{3\pi/2} \cos^5 \frac{\theta}{3} dx$

27. $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^5} dx$ 28. $\int_0^5 x \sin^2 x \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2012]

29. $\int_0^{\pi/4} \log(1 + \tan x) \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2013, 14]

30. मान बताये—

(i) $\int_1^2 \sqrt{1+x} \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]

(ii) $\int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2\theta)^{1/2} \, d\theta$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]

(iii) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin 2x} \, dx$ [उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]

(iv) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$

(v) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(vi) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\, dx$

(vii) $\int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\, dx$

(viii) $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\sin 2x}\, dx$

(ix) $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$

(x) निश्चित समाकलन के कोई दो गुण लिखें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB), 2018 (S)]

31. सही उत्तर पर (✓) का चिन्ह लगायें—

(i) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot x\, dx$ का मान है—

(a) $\log 2$ (b) $2\log 2$ (c) $\frac{1}{2}\log 2$ (d) कोई नहीं

(ii) $\int_{-2}^{2} |x|\, dx$ का मान है—

(a) 4 (b) 3.5 (c) 2 (d) 0

(iii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sec^5 x}{\sec^5 x + \mathrm{cosec}^5 x}\, dx$ का मान है—

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) π

(iv) $\int_{-1}^{+1} x^3 (1-x^2)\, dx$ का मान है—

(a) $-\frac{40}{3}$ (b) $\frac{40}{3}$ (c) 0 (d) कोई नहीं

(v) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx$ का मान है—

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) कोई नहीं

(vi) $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^{63} x + x^{125})\, dx$ का मान है—

(a) 2π (b) 0 (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) कोई नहीं

(vii) $\int_{-\pi}^{\pi} \tan x\, dx$ का मान है—

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) कोई नहीं

(viii) $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx$ का मान है—

(a) $\int_0^a \{f(x)+f(-x)\}\, dx$

(b) $2\int_0^a f(x)\, dx$

(c) 0

(d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{\pi}{4}$ (iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) $\frac{\pi}{4}$ (v) $\frac{\pi}{4}$ (vi) $\frac{\pi}{4}$ (vii) $\frac{\pi}{2}$

2. π **3.** $\frac{\pi^2}{4}$ **4.** (i) $\frac{\pi^2}{2ab}$ (ii) $\frac{\pi}{2ab}$

5. 0 **6.** 0 **7.** 0

8. (i) $\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$ (ii) $-\frac{\pi^2}{2}\log 2$

9. $\frac{\pi\alpha}{\sin\alpha}$ **10.** $\frac{\pi}{4}$ **11.** $-\pi\log_e 2$ **12.** $\pi\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$

13. $\frac{\pi}{8}\log_e 2$ **14.** (i) $\frac{16}{35}$ (ii) $\frac{16}{35}$ (iii) $\frac{3\pi}{8}$ (iv) $\frac{16}{15}$

15. $\frac{8}{315}$ **16.** $\frac{\pi}{2}$ **17.** $\frac{8}{693}$ **18.** $\frac{3\pi^2}{512}$

19. $\frac{\pi^2}{32}$ **20.** $\frac{3}{16}\pi a^4$ **21.** 3π **22.** $\frac{3}{2}\pi a^2$

23. $\frac{63a^5\pi}{8}$ **24.** $\frac{35\pi}{368}$ **25.** $\frac{64}{35}$ **26.** $\frac{8}{5}$

27. $\frac{35\pi}{256}$ **28.** $\frac{1}{8}[10\sin 10+\cos 10+49]$ **29.** $\frac{\pi}{8}\log_e 2$

30. (i) $\frac{2}{3}(3^{3/2}-2^{3/2})$ (ii) 1 (iii) 2 (iv) $\frac{\pi}{4}$ (v) $\frac{\pi}{2}$ (vi) $1-\frac{\pi}{4}$

(vii) $e-1$ (viii) 1 (ix) $\frac{\pi}{4}$

31. (i) (c) (ii) (a) (iii) (c) (iv) (c) (v) (c) (v) (c) (vi) (b)

(vii) (c) (viii) (a)

□□□

CHAPTER 7

समाकलन के अनुप्रयोग
(Applications of Integration)

वक्रों के चाप की लम्बाई
(Length of Curves or Rectification)

7.1 परिचय (Introduction)

निश्चित समाकलन का प्रयोग विज्ञान एवं अभियांत्रिकी समस्याओं के हल में व्यापक रूप में किया जाता है। इस अध्याय में हम इसके प्रयोग से वक्रों की लम्बाई (Length of Curves), समतलीय वक्रों के अंतर्गत क्षेत्रफल (Area under Plane Curves) तथा परिभ्रमण ठोसों के आयतन (Volume of solid of revolution) ज्ञात करना सीखेंगे।

7.2 वक्रों के चाप की लम्बाई (Length at Curves)

किसी वक्र $y = f(x)$ के लिए

1. (a) $\dfrac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$ (b) वक्र $x = f(y)$ के लिए $\dfrac{dS}{dy} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}$

जहाँ S किसी वक्र के चाप की लम्बाई है।

2. $x = a$ तथा $x = b$ के बीच दिए गए वक्र $y = f(x)$ के चाप की लम्बाई $S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

3. $y = c$ तथा $y = d$ के बीच दिए गए वक्र $x = f(y)$ के चाप की लम्बाई $S = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

4. वक्र $x = \phi(t)$ तथा $y = \psi(t)$ का $t = a$ तथा $t = b$ के बीच चाप की लम्बाई $S = \int_a^b \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. वक्र $y^2 = x^3$ की मूलबिन्दु तथा बिन्दु (1, 1) के बीच की लम्बाई ज्ञात करें।

हल : वक्र का समीकरण $y^2 = x^3$

$$\Rightarrow \quad 2y\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\frac{x^2}{y} = \frac{3}{2}\frac{x^2}{x^{3/2}} = \frac{3}{2}x^{1/2} \qquad [\because\ y^2 = x^3 \Rightarrow y = x^{3/2}]$$

अब बिन्दु (0, 0) से (1, 1) के बीच चाप की लम्बाई

$$S = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{4+9x}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}(4+9x)^{3/2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{27}[(4+9\times 1)^{3/2} - (4+9\times 0)^{3/2}]$$

$$= \frac{1}{27}[(13)^{3/2} - (4)^{3/2}] = \frac{1}{27}[(13^2\times 13)^{1/2} - (2^2)^{3/2}]$$

$$= \frac{1}{27}[13\sqrt{13} - 8]$$ उत्तर

उदाहरण 2. कैटिनरी $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ की $x = 0$ से $x = 1$ के बीच की लम्बाई ज्ञात करें।

हल : वक्र का समीकरण $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$$\Rightarrow \quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 = \frac{4+(e^x-e^{-x})^2}{4} = \frac{4+e^{2x}+e^{-2x}-2e^x e^{-x}}{4}$$

$$= \frac{4+e^{2x}+e^{-2x}-2}{4} = \frac{1}{4}[e^{2x}+e^{-2x}+2]$$

$$= \frac{1}{4}[e^{2x}+e^{-2x}+2e^x . e^{-x}] = \frac{1}{4}[e^x+e^{-x}]^2$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{2}[e^x+e^{-x}]$$

$$\therefore \quad S = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (e^x+e^{-x})\, dx$$ [यहाँ $a = 0, b = 1$]

$$= \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}]_0^1 = \frac{1}{2}[(e^1 - e^0) - (e^{-1} - e^0)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[e - \frac{1}{e} - 1 + 1\right] = \frac{1}{2}\left[e - \frac{1}{e}\right]$$ उत्तर

उदाहरण 3. $\theta = 0$ से $\theta = 2\pi$ के मध्य वक्र $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ की लम्बाई ज्ञात करें।

हल : दिया गया वक्र $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{d\theta} = a(-\sin\theta + \theta\cos\theta + \sin\theta) = a\theta\cos\theta$

तथा $\quad y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta) \quad \therefore \quad \frac{dy}{d\theta} = a(\cos\theta + \theta\sin\theta - \cos\theta) = a\theta\sin\theta$

$\therefore$ अभीष्ट लम्बाई $\quad S = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2\cos^2\theta + a^2\theta^2\sin^2\theta}\, d\theta$

$$= a\int_0^{2\pi} \theta \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= a\int_0^{2\pi} \theta \times 1\, d\theta = a\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{a}{2}\times[4\pi^2 - 0] = \frac{a}{2}\times 4\pi^2 = 2a\,\pi^2$$

उदाहरण 4. एस्ट्रॉयड (Astroid) $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$ की लम्बाई ज्ञात करें।

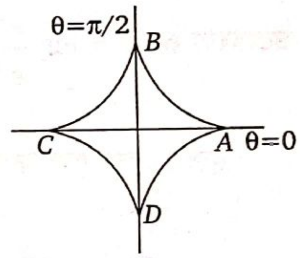
हल : वक्र का समीकरण $\quad x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$

$\therefore \quad \dfrac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta \qquad$ तथा $\quad \dfrac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta$

$\therefore$ वक्र की लम्बाई $= 4\times$ प्रथम चतुर्थांश की लम्बाई $\quad$ [$\because$ वक्र के चारों चतुर्थांशों में सममित है]

$$\therefore \quad S = 4\times\int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = 4\times\int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4\theta\sin^2\theta + 9a^2\sin^4\theta\cos^2\theta}\, d\theta$$

$$= 4\times 3\times a\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}\, d\theta$$



$$= 12a\times\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= 12\,a\times\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = 6a\times\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 6a\times\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\cos 2\times\frac{\pi}{2} - \cos 2\times 0\right] = -3a\,[\cos\pi - \cos 0]$$

$$= -3a\,[-1-1] = -3a\times(-2) = 6a$$

उत्तर

उदाहरण 5. परवलय $y^2 = 4ax$ तथा उसके नाभिलम्ब द्वारा कटी लम्बाई ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]**

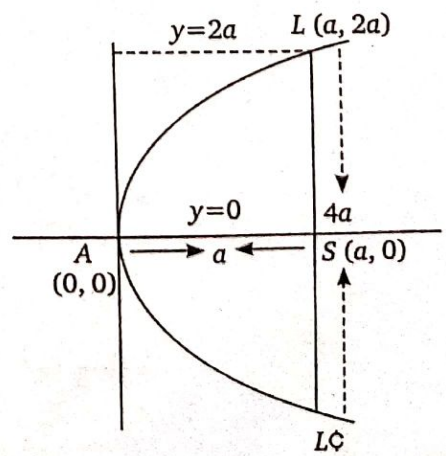
हल : चित्र से नाभिलम्ब के सिरे L तथा L' क्रमशः $(a, 2a)$ तथा $(a, -2a)$ तथा शीर्ष $A(0, 0)$ हैं।

हमें चाप LAL' ज्ञात करना है जो चाप AL का दूना है।

अब $y^2 = 4ax \;\Rightarrow\; 2y\dfrac{dy}{dx} = 4a \;\Rightarrow\; \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y}{2a}$

$\therefore$ चाप की लम्बाई $S = 2AL = 2\times(y = 0$

तथा $y = 2a$ के बीच की लम्बाई



$$= 2\int_0^{2a} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = 2\int_0^{2a} \sqrt{1 + \frac{y^2}{4a^2}}\, dy$$

$$= 2\int_0^{2a} \sqrt{y^2 + 4a^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{a}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{y^2 + 4a^2} + \frac{1}{2}\times 4a^2\log\left(y + \sqrt{y^2 + 4a^2}\right)\right]_0^{2a}$$

$$= \frac{1}{2a}[2a\sqrt{8a^2} + 4a^2 \log (2a + \sqrt{8a^2}) - 4a^2 \log 2a]$$

$$= \frac{1}{2a}[2a \times 2\sqrt{2}a + 4a^2 \log (2a + 2\sqrt{2}a) - 4a^2 \log 2a]$$

$$= \frac{4a^2}{2a}[\sqrt{2} + \log 2a(1+\sqrt{2}) - \log 2a]$$

$$= 2a\left[\sqrt{2} + \log \frac{2a(1+\sqrt{2})}{2a}\right] = 2a[\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})]$$

$$= 2a[\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})]$$

नोट :

- LAL' का मान $S = 2\int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ की सहायता से भी निकाला जा सकता है।

उदाहरण 6. $y = \log \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ के $x = 1$ से $x = 2$ तक के चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया वक्र $y = \log \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Rightarrow y = \log(e^x - 1) - \log(e^x + 1)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + e^x}{(e^x - 1)(e^x + 1)} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट लम्बाई } = \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{2e^x}{e^{2x}-1}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\frac{(e^{2x}-1)^2 + 4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}}\,dx = \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,dx = \int_1^2 \frac{\frac{e^{2x}+1}{e^x}}{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}\,dx$$

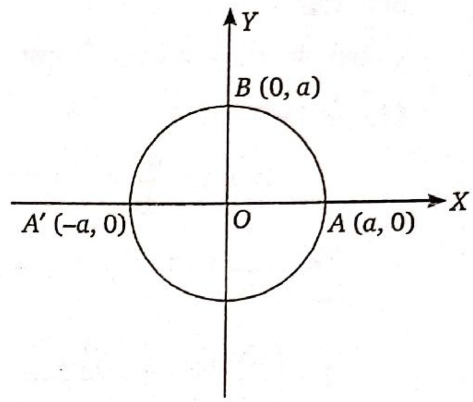
$$= \int_1^2 \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\,dx = [\log(e^x - e^{-x})]_1^2 \qquad \left[\because \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log f(x)\right]$$

$$= [\log(e^2 - e^{-2}) - \log(e^1 - e^{-1})] = \log \frac{\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)}{\left(e - \frac{1}{e}\right)}$$

$$= \log \frac{(e^4 - 1)/e^2}{(e^2 - 1)/e} = \log \frac{(e^2 + 1)\ (e^2 - 1)/e^2}{(e^2 - 1)/e} = \log \frac{e^2 + 1}{e}$$ उत्तर

उदाहरण 7. समाकलन विधि से वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ की परिधि ज्ञात करें।

हल : दिया गया समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$



$$\Rightarrow \quad y^2 = a^2 - x^2 \qquad \Rightarrow \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \times \frac{-2x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}$$

$$= \frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

अब चाप AB के बिन्दु A पर $x = a$ तथा बिन्दु B पर $x = 0$

$\therefore$ अभीष्ट परिधि $= 4 \times$ चाप AB [$\because$ वृत्त अक्षों के परितः सममित है।]

$$= 4\int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 4 \times \int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}}$$

$$= 4 \times a \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = 4 \times a \left[\sin^{-1} \frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= 4 \times a \left[\sin^{-1} \frac{a}{a} - \sin^{-1} \frac{0}{a}\right] = 4 \times a\, [\sin^{-1} 1 - \sin^{-1}\ 0]$$

$$= 4 \times a \left[\frac{\pi}{2} - 0\right] = 4 \times a \times \frac{\pi}{2} = 2\pi a$$

उदाहरण 8. सिद्ध कीजिए कि वक्र $y = c \cosh (x/c)$ के शीर्ष $(0, c)$ से किसी अन्य बिन्दु (x, y) तक चाप की लम्बाई

$S = \sinh (x/c)$ है।

हल : दिए हुए वक्र का समीकरण $y = c \cosh \frac{x}{c} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = c \times \sinh \frac{x}{c} \times \frac{1}{c} = \sinh \frac{x}{c}$

$$\therefore \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{c}\right)} = \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{c}\right)} = \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

अतः $(0, c)$ से (x, y) तक चाप की लम्बाई

$$S = \int_0^x \cosh\left(\frac{x}{c}\right) dx = \left[\frac{\sinh\left(\frac{x}{c}\right)}{\frac{1}{c}}\right]_0^x$$

$$= c\left[\sinh\frac{x}{c} - \sinh 0\right] = c\,\sinh\frac{x}{c} \qquad [\because\ \sinh 0 = 0]$$

उदाहरण 9. वक्र $3a\,y^2 = x\,(x-a)^2$ के लूप की लम्बाई बतायें।

हल : समीकरण में $y = 0$ रखने पर $x = 0,\ x = a$ तथा y का घात सम है।

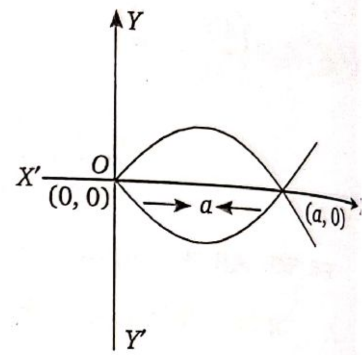
अत: वक्र $$3ay^2 = x\,(x-a)^2 \quad ...(1)$$

x-अक्ष के परित: सममित है तथा x-अक्ष को $x = 0$ तथा $x = a$ पर काटता है।

(1) के अवकलन से

$$3a \times 2y\,\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,x\,(x-a)^2 = \frac{d}{dx}\,[x^3 - 2ax^2 + a^2x] = 3x^2 - 4ax + a^2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6ay}\,[3x^2 - 4ax + a^2]$$



$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{(3x^2 - 4ax + a^2)^2}{36a^2y^2}$$

$$= 1 + \frac{\{3x^2 - 3ax - ax + a^2\}^2}{36a^2y^2}$$

$$= 1 + \frac{\{3x\,(x-a) - a\,(x-a)\}^2}{36a^2y^2}$$

$$= 1 + \frac{\{(x-a)\,(3x-a)\}^2}{36a^2y^2} = 1 + \frac{(x-a)^2\,(3x-a)^2}{36a^2y^2}$$

$$= 1 + \frac{(x-a)^2\,(3x-a)^2}{36a^2 \times \dfrac{x\,(x-a)^2}{3a}} \qquad [(1) \text{ से } y^2 \text{ का मान रखने प}$$

$$= 1 + \frac{(3x-a)^2}{12ax} = \frac{12ax + (3x-a)^2}{12ax}$$

$$= \frac{(3x-a)^2 + 4 \times 3x \times a}{12ax} = \frac{(3x+a)^2}{12ax} \qquad [\because\ (a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2]$$

$$\therefore \quad \text{अभीष्ट लम्बाई} = 2\int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\int_0^a \sqrt{\frac{(3x+a)^2}{12ax}} = 2\int_0^a \frac{3x+a}{2\sqrt{3a}\,\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{3a}}\int_0^a \left[\frac{3x}{\sqrt{x}} + \frac{a}{\sqrt{x}}\right]dx = \frac{1}{\sqrt{3a}}\left[3\int_0^a x^{1/2}\,dx + a\int_0^a x^{-1/2}\,dx\right]$$

$$S = \frac{1}{\sqrt{3a}}\left[3 \times \frac{2}{3}\,x^{3/2} + 2ax^{1/2}\right]_0^a = \frac{2}{\sqrt{3a}} \times [x^{3/2} + ax^{1/2}]_0^a$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3a}}\,[a^{3/2} - 0 + a \times a^{1/2} - 0] = \frac{2}{\sqrt{3}\,\sqrt{a}}\,[a^{3/2} + a^{3/2}]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{a}} \times 2a^{3/2} = \frac{4}{\sqrt{3}} a$$ उत्तर

महत्त्वपूर्ण सूत्र

1. (i) $\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ (ii) $\frac{dS}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$

जहाँ S किसी वक्र के चाप की लम्बाई है।

2. $x = a$ तथा $x = b$ के बीच दिए गए वक्र $y = f(x)$ की लम्बाई $S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$

3. $y = c$ तथा $y = d$ के बीच दिए गए वक्र $x = f(y)$ की लम्बाई $S = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

4. वक्र $x = \phi(t)$ तथा $y = \psi(t)$ का $t = a$ तथा $t = b$ के बीच की लम्बाई $S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$

प्रश्नावली 7.1

1. वक्र $y = \log(\sec x)$ की लम्बाई $x = 0$ और $x = \frac{\pi}{4}$ के बीच ज्ञात करें।
2. (i) $x = 1$ और $x = 2$ के बीच वक्र $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\log x$ की लम्बाई ज्ञात करें।
   [उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]
   (ii) वक्र $y = x^{3/2}$ का $x = 0$ से $x = 5$ के बीच लंबाई ज्ञात करें।
3. (i) परवलय $x^2 = 4ay$ के शीर्ष तथा नाभिलम्ब जीवा के एक सिरे के बीच चाप की लम्बाई ज्ञात करें।
   (ii) परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष तथा नाभिलम्ब जीवा के शीर्ष से नाभिलंब जीवा तक चाप की लंबाई ज्ञात करें।
   [उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]
4. एक कण के गतिपथ पर किसी बिन्दु की स्थिति $x = \frac{t^2}{2}$ तथा $y = \frac{1}{9}(6t + 9)^{3/2}$ द्वारा दी जाती है। कण द्वारा $t = 0$ से $t = 6$ तक पहुँचने में चली गई दूरी ज्ञात करें।
   [**संकेत :** चली गई दूरी $s = \int_0^6 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$
5. $t = -\pi$ और $t = \pi$ के बीच वक्र $x = a(t + \sin t)$, $y = a(1 + \cos t)$ की लम्बाई ज्ञात करें।
6. मूल बिन्दु और (a, a) के बीच स्थित वक्र $ay^2 = x^3$ के चाप की लम्बाई ज्ञात करें।
7. सिद्ध कीजिए कि वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ की सम्पूर्ण लम्बाई $6a$ है।
   [**संकेत :** $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$, वक्र का परामीतीय (Parametric) समीकरण है]
8. दिखायें वक्र $9ay^2 = x(x - a)^2$ के लूप (loop) की लम्बाई $4a\sqrt{3}$ है।
9. $x^2 + y^2 = 9$ की परिधि समाकलन विधि से निकालें।

10. प्रतिलोम चक्रज (Inverted Cycloid) $x = (\theta - \sin\theta)$, $y = (1 - \cos\theta)$ के लिए $\theta = 0$ से 2π के बीच मेहराब (Arch) की लम्बाई ज्ञात करें।

$$\left[\text{संकेत : } S = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\right]$$

उत्तरमाला

1. $\sqrt{2}+1$ **2.** (i) $\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\log 2$ (ii) $12\frac{11}{27}$

3. (i) $a[\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})]$ (ii) $2a[\sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})]$

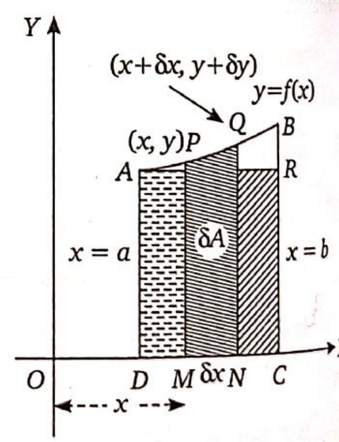
4. 36 इकाई **5.** $8a$ **6.** $\frac{a}{27}[13\sqrt{13} - 8]$ **9.** 6π **10.** 8 इकाई

समाकलन द्वारा क्षेत्रफल
(Area by Integration)

7.3 क्षेत्रफल (Area)

दिए गए वक्र $y = f(x)$, कोटियों $x = a$ तथा $x = b$ एवं x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करना।

माना AB कोई दिया गया वक्र है जो समीकरण $y = f(x)$ से निरूपित होता है। कोटियाँ AD तथा BC क्रमशः $x = a$ तथा $x = b$ द्वारा निरूपित होती हैं। हमें $ABCD$ का क्षेत्रफल निकालना है।



माना वक्र AB पर $P(x, y)$ तथा $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ दो समीप के बिन्दु हैं। P तथा Q से x-अक्ष पर क्रमशः PM तथा QN लम्ब खींचे।

माना $PQNM$ का क्षेत्रफल δA है। चूँकि बिन्दु Q बिन्दु P के समीप है अतः $PQNM$ को एक समलम्ब माना जा सकता है।

अतः समलंब $PQNM$ का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}(PM + QN) \times MN = \delta A \text{ (माना)}$$

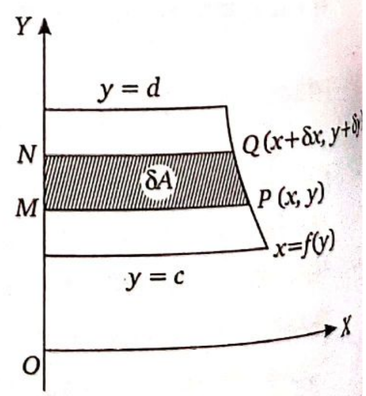
अर्थात $\delta A = \frac{1}{2}(y + y + \delta y) \times \delta x$ $\left[\because MN = ON - OM = x + \delta x - x = \delta x \text{ तथा } PM = y, QN = y + \delta y\right]$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta A}{\delta x} = \left(y + \frac{1}{2}\delta y\right)$$

सीमान्त अवस्था में जब $Q \to P$ तो $\delta x \to 0, \delta y \to 0$, तब $\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{dA}{dx}$

$$\therefore \quad \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta A}{\delta x} = \lim_{\delta y \to 0}\left(y + \frac{1}{2}\delta y\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dx} = y = f(x) \quad \Rightarrow \quad dA = f(x)\,dx \text{ या } y\,dx$$



$x = a$ तथा $x = b$ के लिए समाकलन करने पर

$$\int_a^b dA = \int_a^b f(x)dx \text{ या } \int_a^b y\,dx$$

अत: क्षेत्रफल $ABCD = A = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

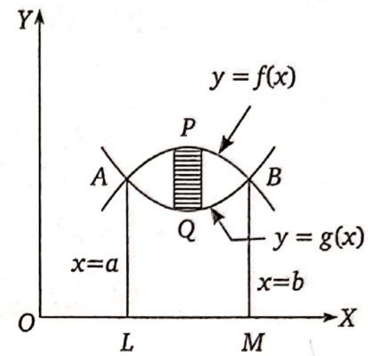
इसी प्रकार वक्र $x = f(y)$, y-अक्ष तथा कोटियों, $y = c$ तथा $y = d$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$A = \int_c^d x\,dy$$

7.4 दो वक्रों के बीच का क्षेत्रफल (Area Included Between Two Curves)

माना $y = f(x)$ तथा $y = g(x)$ दो वक्र हैं जो बिन्दुओं $x = a$ तथा $x = b$ पर एक दूसरे को काटते हैं। उनके बीच घिरा हुआ क्षेत्र $APBA$ है। माना A तथा B से x-अक्ष पर लम्ब क्रमश: AL तथा BM खीचें गए हैं।

क्षेत्रफल $APBQA$ = क्षेत्रफल $APBML$ – क्षेत्रफल $AQBML$



अर्थात्
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

इसी तरह वक्र $x = f_1(y)$

तथा $x = g_1(y)$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$A = \int_c^d \{f_1(y) - g_1(y)\}\,dy$$

जहाँ वक्र एक दूसरे को $y = c$ तथा $y = d$ पर प्रतिच्छेद करते हैं।

7.5 वक्रों का चित्रण (Tracing of Curves)

समाकलन द्वारा क्षेत्रफल निकालने के लिए हमें समकालन की सीमाओं का ज्ञान होना आवश्यक है। यह तभी सम्भव है जब हमें वक्रों की आकृति का अनुमान हो। अत: इस सम्बन्ध में कुछ बिन्दु नीचे दिए जा रहे हैं—

(1) यदि वक्र के समीकरण में y की जगह $-y$ रखने से फलन के मान में परिवर्तन नहीं हो, तो यह x-अक्ष के परित: सममित होगा। यह तभी सम्भव है जब y की घात सम हो।

जैसे $y^2 = 4ax$, x-अक्ष के परित: सममित है।

(2) इसी तरह वक्र y–अक्ष के परित: सममित होगा यदि x की घात सम हो। जैसे $x^2 = 4ay$, y–अक्ष के परित: सममित है।

(3) यदि x तथा y को परस्पर प्रतिस्थापित करने पर फलन के मान में परिवर्तन नहीं हो तो वक्र $y = x$ के परित: सममित होगा।

(4) यदि वक्र के समीकरण में अचर पद न हो तो वक्र मूल बिन्दु से गुजरेगा। जैसे $y^2 = mx$ मूल बिन्दु से गुजरता है।

7.6 अक्षों पर प्रतिच्छेद बिन्दु निकालना (To obtain intersecting points of a curve with the axis)

वक्र के समीकरण में $y = 0$ रखने पर इसके द्वारा x-अक्ष पर प्रतिच्छेद बिन्दु का x-नियामक प्राप्त होता है। इसी तरह समीकरण में $x = 0$ रखने पर प्रतिच्छेद बिन्दु का y-नियामक प्राप्त होगा।

जैसे, $x^2 + y^2 = a^2$ में $y = 0$ रखने से $x = \pm a$ तथा $y = 0$ रखने से $y = \pm a$

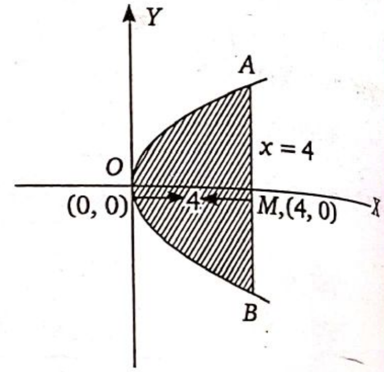
अत: x-अक्ष पर वक्र के प्रतिच्छेद बिन्दु के नियामक $(a, 0)$ तथा $(-a, 0)$ हैं एवं y-अक्ष पर $(0, a)$ तथा $(0, -a)$ हैं।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. परवलय $y^2 = 4x$ तथा सरल रेखा $x = 4$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल : $y^2 = 4x$ एक परवलय है, जो x-अक्ष के परितः सममित है तथा जिसका शीर्ष O (0, 0) है, जैसा चित्र में दिखाया गया है।

माना सरल रेखा AB, $x = 4$ द्वारा दी जाती है। हमें $y^2 = 4x$, तथा $x = 0, x = 4$ से घिरे क्षेत्र $OASBO$ का क्षेत्रफल ज्ञात करना है। चित्र से



अभीष्ट क्षेत्रफल $OASBO = 2\times$ क्षेत्रफल $OASO = 2\int_0^4 y\,dx$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{4x}\,dx = 2\times 2\int_0^4 x^{1/2}\,dx$$

$$= 2\times 2\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = \frac{8}{3}[4^{3/2} - 0] = \frac{8}{3}\times (2^2)^{3/2}$$

$$= \frac{8}{3}\times 2^3 = \frac{8\times 8}{3} \text{ वर्ग इकाई}$$

$$= \frac{64}{3} \text{ वर्ग इकाई}$$

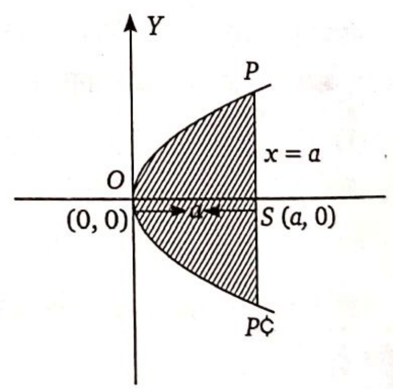
उत्तर

उदाहरण 2. परवलय $y^2 = 4ax$ तथा इसके नाभिलम्ब के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1995, 99, 2014 (0)]

हल : $\because y^2 = 4ax \Rightarrow y = 2\sqrt{a}x^{1/2}$

यह परवलय x-अक्ष के परितः सममित है तथा शीर्ष A के नियामक (0, 0) हैं। मान PSP' इसका नाभिलम्ब है जिसका समीकरण $x = a$ है।



अब अभीष्ट क्षेत्रफल $POP' = 2\times$ क्षेत्रफल $POS = 2\int_0^a y\,dx$

$$= 2\int_0^a (2\sqrt{a}\,x^{1/2})\,dx$$

$$= 2\times 2\sqrt{a}\int_0^a x^{1/2}\,dx$$

$$= 4\sqrt{a}\times\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^a$$

$$= 4a^{1/2}\times[a^{3/2} - 0]\times\frac{2}{3} = \frac{8}{3}a^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}a^2 \text{ वर्ग इकाई}$$

उत्तर

उदाहरण 3. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का क्षेत्रफल निकालें।

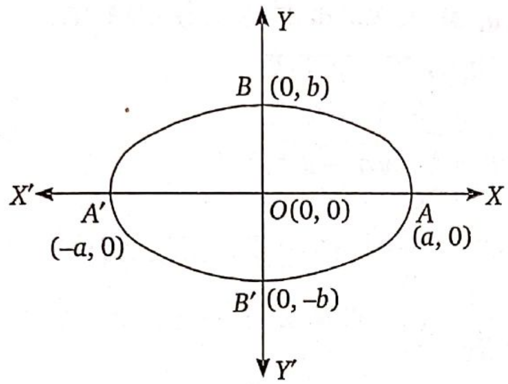
[उ० प्र० डिप्लोमा 1991, 94, 2000, 06, 12]

हल : स्पष्ट है कि दीर्घवृत्त दोनों ही अक्षों के परितः सममित है। [$\because$ x तथा y दोनों के घात सम हैं]

अतः दीर्घवृत्त का क्षेत्रफल = 4 × क्षेत्रफल OAB

अब $\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \qquad \Rightarrow \quad \dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{x^2}{a^2}$

$\Rightarrow \quad y^2=\dfrac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) \qquad \Rightarrow \quad y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ ...(1)



(1) में अब $y=0$ रखने से $\quad x=\pm a$

अत: वक्र x-अक्ष को $(a, 0)$ तथा $(-a, 0)$ पर काटता है।

$\therefore$ क्षेत्रफल $=4\times\displaystyle\int_0^a y\,dx=4\times\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$=4\times\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=4\times\frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{1}{2}a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

[सूत्र से]

$$=\frac{4b}{a}\times\frac{1}{2}[\{a\times 0+a^2\sin^{-1}1\}-\{0-0\}]=\frac{4b}{a}\times\frac{1}{2}a^2\times\sin^{-1}1=2ab\times\frac{\pi}{2}$$

$=\pi ab \qquad [\because \sin^{-1}1=\pi/2]$ उत्तर

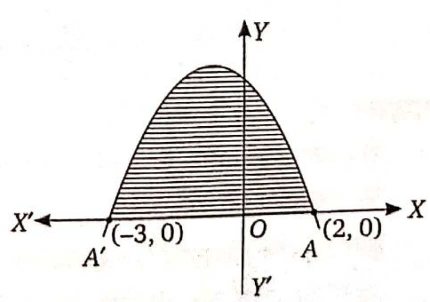
उदाहरण 4. परवलय $y=6-x-x^2$ तथा x-अक्ष के बीच घिरे स्थान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1997]

यहाँ $y=6-x-x^2, \because$ x–अक्ष पर $y=0$

$\therefore \quad 0=6-x-x^2 \quad \Rightarrow \quad x=2$ या $x=-3$

$\Rightarrow$ वक्र x-अक्ष को $x=-3$ तथा $x=2$ बिन्दुओं पर काटता है।



अत: अभीष्ट क्षेत्रफल $=\displaystyle\int_{-3}^{2} y\,dx=\int_{-3}^{2}(6-x-x^2)\,dx$

$$=\left|6x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right|_{-3}^{2}$$

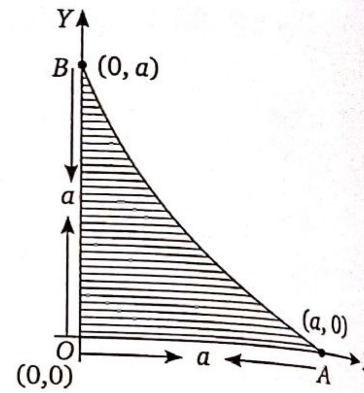
$$= \left(12 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-18 - \frac{9}{2} + \frac{27}{3}\right) = \frac{125}{6} \text{ वर्ग इकाई}$$

उत्तर

उदाहरण 5. वक्र $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ और अक्षों से घिरा क्षेत्रफल ज्ञात करो। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1994, 2008]**

हल : वक्र के समीकरण $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ में $y = 0$ रखने पर $x = a$

अत: वक्र x-अक्ष को बिन्दु $A(a, 0)$ पर काटता है। $x = 0$ रखने पर, $y = a$ अत: वक्र y-अक्ष को बिन्दु $B(0, a)$ पर काटता है।



अभीष्ट क्षेत्रफल $AOB = \int_0^a y\, dx = \int_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2\, dx$

$[\because \sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x}]$

$$= \int_0^a (a + x - 2\sqrt{a}\sqrt{x})\, dx$$

$$= \left[ax + \frac{x^2}{2} - \frac{2a^{1/2}\, x^{3/2}}{3/2} \right]_0^a$$

$$= \left(a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{4a^2}{3}\right) - (0 + 0 - 0) = \frac{a^2}{6}$$

उत्तर

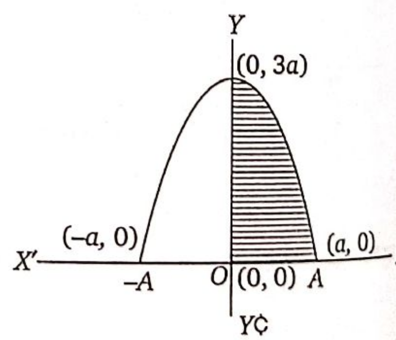
उदाहरण 6. परवलय $ay = 3(a^2 - x^2)$ तथा x-अक्ष के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1989, 96]

हल : परवलय के समीकरण $ay = 3(a^2 - x^2)$ में

$y = 0$ रखने पर $x = \pm a$; $x = 0$ रखने पर $y = 3a$

परवलय तथा x-अक्ष के बीच घिरा क्षेत्रफल



$$= 2\int_0^a y\,.\, dx = 2\int_0^a \frac{3}{a}(a^2 - x^2)\,.\, dx$$

$$= \frac{6}{a}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{6}{a}\left[a^3 - \frac{a^3}{3} - 0 + 0\right]$$

$$= \frac{6}{a} \times \frac{2a^3}{3} = 4a^2 \text{ वर्ग इकाई}$$

उत्तर

उदाहरण 7. सिद्ध करो कि किसी परवलय में शीर्ष की स्पर्श रेखा के समानान्तर रेखा (द्विकोटि) द्वारा काटे गये हिस्से का क्षेत्रफल उस आयत के क्षेत्रफल का दो–तिहाई होता है जिसकी दो भुजायें क्रमशः रेखा की लम्बाई एवं रेखा की शीर्ष से दूरी के बराबर होती हैं।

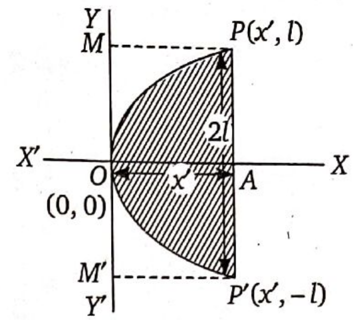
[उ० प्र० डिप्लोमा 1995]

हल : माना परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ ...(i)

माना परवलय को द्विकोटि PAP' है जिसकी लम्बाई $2l$ है तथा जो परवलय के शीर्ष से x' दूरी पर है। अत: द्विकोटि के शीर्ष $P(x', l)$ तथा $P'(x', -l)$ तथा परवलय का शीर्ष $(0, 0)$ है।

(i) में $x = x'$ तथा $y = l$ रखने पर

$$l^2 = 4a \cdot x' \Rightarrow x' = \frac{l^2}{4a}$$



अभीष्ट क्षेत्रफल $OPAP'O = A_1 = 2 \times$ क्षेत्रफल OAP

क्षेत्रफल $A_1 = 2\int_0^{x'} y \cdot dx = 2\int_0^{l^2/4a} 2\sqrt{ax}\, dx$

$$= 4\sqrt{a}\int_0^{l^2/4a} x^{1/2}\, dx = 4\sqrt{a}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{l^2/4a} = \frac{8}{3}\sqrt{a}\left[\left(\frac{l^2}{4a}\right)^{3/2} - (0)\right] = \frac{8}{3}\sqrt{a} \cdot \frac{l^3}{8a\sqrt{a}} = \frac{l^3}{3a} \quad \ldots(ii)$$

अब द्विकोटि PAP' तथा इसकी शीर्ष से दूरी OA द्वारा बने आयत $PMM'P'$ का क्षेत्रफल,

$$A_2 = PP' \times PM = 2l \cdot x' = 2l \cdot \frac{l^2}{4a} = \frac{l^3}{2a} \quad \ldots(iii)$$

समीकरण (ii) तथा (iii) से

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{l^3/3a}{l^3/2a} = \frac{2}{3} \Rightarrow A_1 = \frac{2}{3}A_2$$

यही सिद्ध करना था।

उदाहरण **8.** वक्रों $y^2 = 4ax$ तथा $x^2 = 4ay$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2011, 17 (O)]

हल : वक्रों के समीकरण $y^2 = 4ax$ ...(i)

तथा $x^2 = 4ay$ ...(ii)

समी० (i) से, $x = \frac{y^2}{4a}$ समी० (ii) में रखने पर

$$\left(\frac{y^2}{4a}\right)^2 = 4ay \quad \text{या} \quad y^4 = 64a^3y \quad \text{या } y^4 - 64a^3y = 0$$

या $y(y^3 - 64a^3) = 0 \Rightarrow y = 0, 4a$

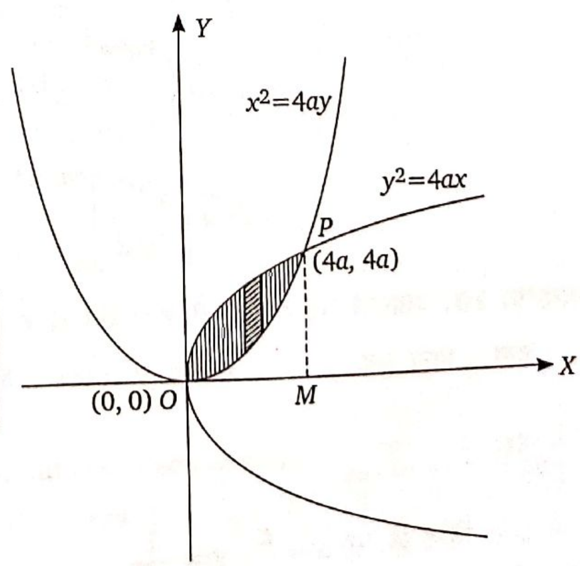
y के उक्त मान समी० (i) में रखने पर,

जब $y = 0$, तब $x = 0$

और जब $y = 4a$, तब $x = 4a$

$\therefore$ वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दु $O(0, 0)$ और $P(4a, 4a)$ हैं।

यहाँ हमें रेखांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।



$$\left[\begin{array}{l} \because y^2 = 4ax \Rightarrow y = \sqrt{4ax} = y_1 \text{ (माना)} \\ x^2 = 4ay \Rightarrow y = \frac{x^2}{4a} = y_2 \text{ (माना)} \end{array}\right]$$

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $= \int_0^{4a} (y_1 - y_2)\, dx$

$$= \int_0^{4a} \sqrt{4ax}\, dx - \int_0^{4a} \left(\frac{x^2}{4a}\right) dx$$

$$= 2\sqrt{a}\int_0^{4a} x^{1/2}\, dx - \frac{1}{4a}\int_0^{4a} x^2\, dx$$

$$= 2\sqrt{a}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{4a} - \frac{1}{4a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{4a}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{a}\,.\,[(4a)^{3/2} - 0] - \frac{1}{12a}[(4a)^3 - 0]$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{a}\,.\,(8a\sqrt{a}) - \frac{1}{12a}\,.\,(64a^3) = \frac{32a^2}{3} - \frac{16a^2}{3} = \frac{16a^2}{3}.$$

उदाहरण 9. परवलय $y^2 = 4ax$ तथा सरल रेखा $y = mx$ के अन्तर्गत क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1999]

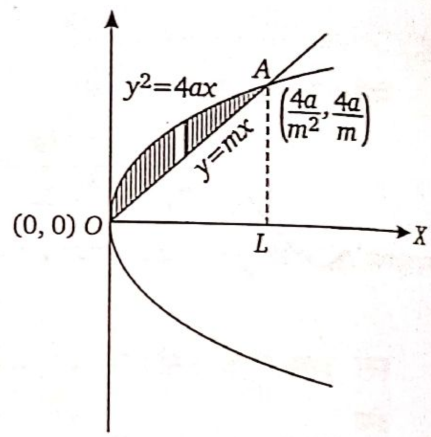
हल : परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ ...(1)

तथा सरल रेखा का समीकरण $y = mx$ ...(2)

समीकरण (2) से $y = mx$ समीकरण (1) में रखने पर

$$(mx)^2 = 4ax \Rightarrow x(m^2x - 4a) = 0$$

$$\therefore \quad x = 0 \quad \text{या} \quad x = \frac{4a}{m^2}$$



पुनः जब $x = 0$ तो $y = 0$ तथा जब $x = \frac{4a}{m^2}$ तो $y = \frac{4a}{m}$

अतः उभयनिष्ठ बिन्दुओं के निर्देशांक (0, 0)तथा $\left(\frac{4a}{m^2}, \frac{4a}{m}\right)$ हैं।

$$\therefore \quad \text{अभीष्ट क्षेत्रफल} = \int_0^{4a/m^2} (y_1 - y_2)\, dx$$

$$= \int_0^{4a/m^2} (\sqrt{4ax} - mx)\, dx \qquad \begin{bmatrix} \text{(i) से } y = \sqrt{4ax} = y_1 \text{ (माना)} \\ \text{(ii) से } y = mx = y_2 \text{ (माना)} \end{bmatrix}$$

$$= 2\sqrt{a}\int_0^{4a/m^2} x^{1/2}\, dx - \int_0^{4a/m^2} mx\, dx$$

$$= 2\sqrt{a}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{4a/m^2} - m\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{4a/m^2} = \frac{8}{3}\frac{a^2}{m^3} \text{ (सरल करने पर)}$$ उत्तर

उदाहरण 10. अंतराल $(0, \pi/2)$ में $y = \sin x$, $y = \cos x$ तथा x-अक्ष के बीच घिरा क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल : माना वक्र $y = \sin x$ तथा $y = \cos x$ अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में एक-दूसरे को A बिन्दु पर काटते हैं।

यहाँ
$$\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अतः बिन्दु A पर $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(समीकरणों को हल करने पर)

अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्रफल OAP + क्षेत्रफल APB

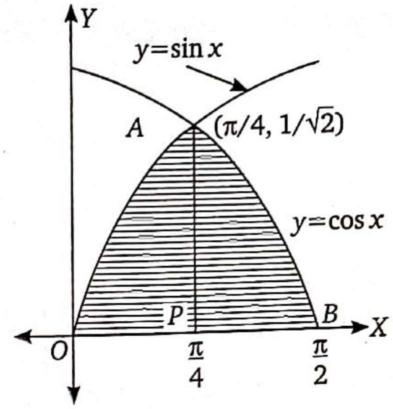
$$= \int_0^{\pi/4} \sin x\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x\, dx$$

$$= -\left| \cos x \right|_0^{\pi/4} + \left| \sin x \right|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{2}} + 2 = 2 - \sqrt{2} = (2 - \sqrt{2}) \text{ वर्ग इकाई}$$



उदाहरण 11. वक्र $xy^2 = a^2 (a - x)$ तथा $(a - x) y^2 = a^2 x$ के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल बतायें।

हल : दिए गए वक्र

$$xy^2 = a^2 (a - x) \Rightarrow y = a\sqrt{\frac{a-x}{x}} \quad ...(1)$$

$$(a - x) y^2 = a^2 x \Rightarrow y = a\sqrt{\frac{x}{a-x}} \quad ...(2)$$

एक-दूसरे को बिन्दु Q तथा R पर प्रतिच्छेद करते हैं।

(1) तथा (2) को हल करने पर $x = \frac{a}{2}$ और $y = a, -a$

अतः दोनों वक्र एक-दूसरे को $Q\left(\frac{a}{2}, a\right)$ तथा $R\left(\frac{a}{2}, -a\right)$ बिन्दुओं पर काटते हैं।

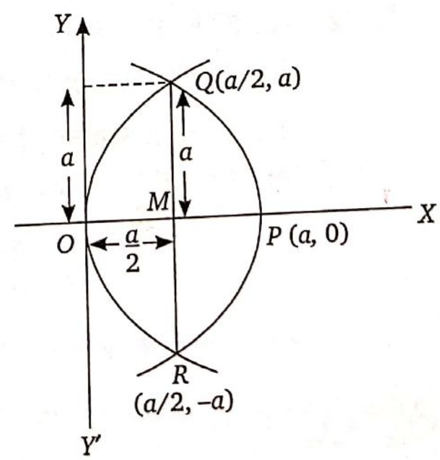
$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल = क्षेत्रफल $OQPRO$

$= 2 \times$ क्षेत्रफल $OQPO$

$= 2$ (क्षेत्रफल OMQ + क्षेत्रफल QMP)

$$= 2\left[\int_0^{a/2} a\sqrt{\frac{x}{a-x}}\, dx + \int_{a/2}^{a} a\sqrt{\frac{a-x}{x}}\, dx\right]$$

[(1) तथा (2) से]



माना $x = a\sin^2\theta$ तो $dx = 2a \sin\theta \cos\theta\, d\theta$

तथा जब $x = 0$ तब $\theta = 0$ और जब $x = \frac{a}{2}$, तब $\theta = \frac{\pi}{4}$

तथा जब $x = a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल

$$= 2\left[a\int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{a\sin^2\theta}{a - a\sin^2\theta}}\, 2a\sin\theta\cos\theta\, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{\frac{a - a\sin^2\theta}{a\sin^2\theta}}\, 2a\sin\theta\cos\theta\, d\theta\right]$$

$$= 2a\left[\int_0^{\pi/4} 2a\sin^2 d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 2a\cos^2\theta\, d\theta\right]$$

$$= 4a^2\left[\int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\, d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{(1+\cos 2\theta)}{2} d\theta\right]$$

$$= 4a^2 \times \frac{1}{2}\left[\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)_0^{\pi/4} + \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= 2a^2\left[\left\{\left(\frac{\pi}{4}-0\right) - \frac{\sin 2\times\frac{\pi}{4} - 0}{2}\right\} + \left\{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sin\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right\}\right]$$

$$= 2a^2\left[\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{4}+0-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= 2a^2\left[\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right] = 2a^2\left[\frac{\pi}{2}-1\right] \text{ वर्ग इकाई}$$

उत्त

महत्त्वपूर्ण सूत्र

1. वक्र $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ तथा x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $A = \int_a^b y\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$

2. वक्र $x = f(y)$, y-अक्ष या कोटियों, $y = c$ तथा $y = d$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $A = \int_c^d x\, dy = \int_c^d f(y)\, dy$

3. (i) दो वक्रों $y = f(x)$ तथा $y = g(x)$ तथा $x = a$ एवं $x = b$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

जहाँ a तथा b प्रतिच्छेद बिन्दु के x नियामक है।

(ii) इसी तरह वक्र $x = f_1(y)$

$x = g_1(y)$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल

$A = \int_c^d \{f_1(y) - g_1(y)\}\, dy$

जहाँ $y = c$ या $y = d$ प्रतिच्छेद बिन्दु की कोटियाँ हैं।

प्रश्नावली 7.2

1. $y = mx$, x-अक्ष एवं कोटि $x = 2$ के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करें।
2. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 2$ तथा x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालें।
3. $y = x\sin x$, x-अक्ष तथा कोटियों $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालें।
4. (i) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल समाकलन विधि से निकालें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB), 18(S)**

   (ii) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

(iii) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का क्षेत्रफल निकालें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1991, 94, 2000, 06, 12]

5. प्रथम चतुर्थांश में वक्र $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 1$ तथा $y = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालें।

6. $y = \cos x$, x-अक्ष एवं कोटियों $x = 0$ तथा $x = \frac{\pi}{2}$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1998]

7. $y = x^2$ के शीर्ष तथा नाभिलम्ब जीवा के बीच क्षेत्रफल ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2014 (O), 15]**

[संकेत : नाभि के निर्देशांक $= \left(0, \frac{1}{4}\right)$, शीर्ष के निर्देशांक $= (0, 0)$ $\therefore$ क्षेत्रफल $= 2\int_0^{1/4} x\, dy$]

8. $y = x^2$ तथा $y = 2$ के गीच का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

9. (i) $y^2 = 4ax$ और सरल रेखा $y = 2ax$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

[संकेत : $y^2 = 4ax$ तथा $y = 2ax$ को हल करने पर प्रतिच्छेद बिन्दु $(0, 0)$ तथा $\left(\frac{1}{a}, 2\right)$ है।

$\therefore$ अभीष्ट क्षेत्रफल $A = \int_0^{1/a} (\sqrt{4ax} - 2ax)$]

(ii) वक्र $y = 2 + x - x^2$ तथा x-अक्ष द्वारा घिरे हुये भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1993, 96]

[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]

10. $y^2 = 4x$ तथा $x^2 = 4ay$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालें।

11. किसी परवलय $y^2 = 4ax$ के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें जो रेखाओं जीवा $y = 2a$ तथा y-अक्ष के बीच परिबद्ध है।

12. वृत्त $x^2 + y^2 = 2$ तथा परवलय $y^2 = x$ के बीच परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

13. (i) परवलय $y = 4x^2$ और रेखा $4x - y + 3 = 0$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल बतायें।

(ii) परवलय $y = 2x^2$ और सरल रेखा $x - y + 3 = 0$ से मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

[उ० प्र० डिप्लोमा2016 (Back)]

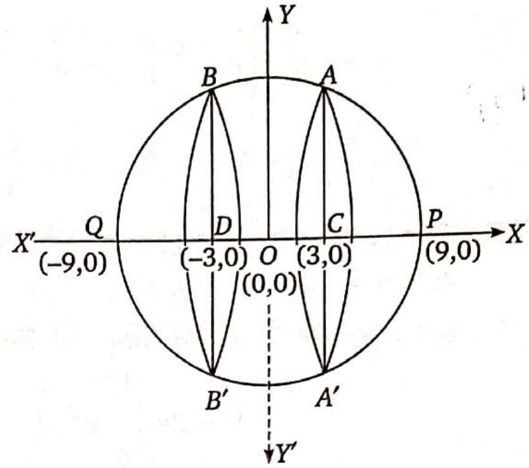
14. परवलय $y^2 = 9x$ तथा $x^2 = 9y$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल बतायें।

15. वक्र $xy^2 = a^2(a - x)$ तथा $(a - x)y^2 = a^2x$ के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1988]

उत्तरमाला

1. $2m$ वर्ग इकाई
2. $e^2 - 1$ वर्ग इकाई
3. 2π वर्ग इकाई
4. (i) πa^2 वर्ग इकाई (ii) $5\frac{1}{3}$ वर्ग इकाई (iii) πab
5. $\frac{7}{3}$ वर्ग इकाई
6. 1 वर्ग इकाई
7. $\frac{1}{6}$ वर्ग इकाई
8. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ वर्ग इकाई
9. (i) $\frac{1}{3a}$ वर्ग इकाई (ii) $4\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई
10. $\frac{16}{3}$ वर्ग इकाई
11. $\frac{2a^2}{3}$ वर्ग इकाई
12. $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$ इकाई
13. (i) $5\frac{1}{3}$ वर्ग इकाई (ii) $5\frac{5}{24}$ वर्ग इकाई
14. 27 वर्ग इकाई
15. $2a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ वर्ग इकाई



यदि CA तथा DB, x-अक्ष पर लंब हों तो चाप $PABQ$ को x-अक्ष के परितः घुमाने पर प्राप्त गोला तीन भागों (i) $APA'CA$ (ii) $AA'B'B$ (iii) $BQB'DB$ में विभाजित होता है।

भाग $APA'CA$ का आयतन $= \int_a^b \pi y^2\, dx = \int_3^9 \pi y^2\, dx,$

[$\because$ यहाँ $a = 3, b = 9$]

$$= \pi \int_3^9 (81 - x^2)\, dx$$

$$= \pi \left[81x - \frac{1}{3} x^3 \right]_3^9$$

$$= \pi \left[\left\{ 81\,(9) - \frac{1}{3}\,(9)^3 \right\} - \left\{ 81(3) - \frac{1}{3}(3)^3 \right\} \right]$$

$$= \pi\, [(729 - 243) - (243 - 9)] = 252\pi \text{ घन सेमी}$$ **उत्तर**

इसी तरह भाग $BAA'B'$ का आयतन $= \pi \int_{-3}^{3} y^2 dx = \pi \int_{-3}^{3} (81 - x^2)\, dx$

$$= \pi \left[81x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^{3} = \left[\{81 \times 3 - 81 \times (-3)\} - \left\{ \frac{(3)^3 - (-3)^3}{3} \right\} \right] = 486\pi \text{ घन सेमी}$$ **उत्तर**

तथा भाग $BQB'DB$ का आयतन = भाग $APA'CA$ का आयतन

$= 252\pi$ घन सेमी। **उत्तर**

उदाहरण 10. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को उसके दीर्घ (Major) अक्ष पर घुमाने से बनने वाले ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1992, 97, 2017(S)]**

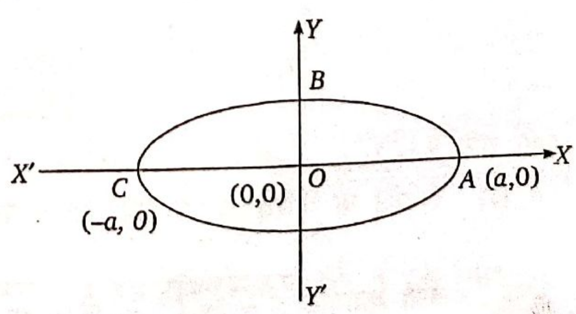
हल : दीर्घवृत्त को, दीर्घ अक्ष (Major Axis) AOC के सापेक्ष घुमाने से अभीष्ट ठोस प्राप्त होगा।

बिन्दु A तथा C के निर्देशांक क्रमशः $(a, 0)$ तथा $(-a, 0)$ होंगे।

अतः आयतन, $V = \int_{-a}^{a} \pi \, . \, y^2\, dx$

$$= \int_{-a}^{a} \pi . b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx \left[\because \text{ दीर्घवृत्त के समीकरण से } \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \text{ या } y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \right]$$

$$= \pi \, . \, b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx$$



$$= \pi \, . \, b^2 \left[x - \frac{x^3}{3a^2} \right]_{-a}^{a}$$

$$= \pi \, . \, b^2 \left[\left(a - \frac{a^3}{3a^2} \right) - \left(-a - \frac{-a^3}{3a^2} \right) \right]$$

समाकलन द्वारा आयतन एवं वक्रपृष्ठ (Volume and Surface Area by Integration)

7.7 परिभाषा (Definition)

यदि किसी वक्र खण्ड को किसी सरल रेखा के परितः इस प्रकार घुमाया जाए कि वक्र खण्ड के प्रत्येक बिन्दु की दूरी उस सरल रेखा से अपरिवर्तित रहे, तो इससे जिस ठोस का निर्माण होता है उसे **परिभ्रमण ठोस (Solid of Revolution)** कहते हैं।

जिस वक्र को सरल रेखा के चारों ओर घुमाया जाता है उसे **जनन वक्र (Generating Curve)** तथा जिस सरल रेखा के चारों ओर घुमाया जाता है उसे **परिभ्रमण अक्ष (Axis of Revolution)** कहते हैं।

व्यवहारिक जीवन में प्रयोग किए जाने कुछ परिभ्रमण ठोस निम्नांकित हैं :

1. गोला Sphere) : गोला किसी अर्द्धवृत्त को उसके व्यास के परितः घुमाने से जनित होता है। अतः अर्द्धवृत्त (या वृत्त) गोले का जनन वक्र है तथा व्यास उसका परिभ्रमण अक्ष है।

2. शंकु (Cone): यदि किसी समकोण त्रिभुज को उसकी समकोण बनाने वाली भुजाओं में से किसी एक भुजा को अक्ष मानकर उसके चारों ओर घुमाया जाए तो उसके घूर्णन से जब वह एक चक्कर पूरा कर लेता है, जनित ठोस को शंकु (Cone) कहते हैं। अतः शंकु के लिए जनन रेखा एक सरल रेखा होती है, जो परिभ्रमण अक्ष (दूसरी सरल रेखा) को एक निश्चित कोण पर काटती है। इसे शंकु का अर्द्धशीर्ष कोण (Semi-vertical angle) कहते हैं। जनन वक्र तथा परिभ्रमण अक्ष का परिच्छेद बिन्दु उसका शीर्ष कहलाता है।

3. बेलन (Cylinder) : यदि किसी आयत को उसकी एक भुजा को अक्ष मानकर उसके परितः घुमाया जाए, तो घूर्णन से, जब एक चक्कर पूर्ण हो जाता है, जनित ठोस को बेलन कहते हैं। अतः बेलन का जनन रेखा एक सरल रेखा तथा परिभ्रमण अक्ष उसके समानान्तर एक निश्चित दूरी पर दूसरी सरल रेखा होगी।

4. शंकु का छिन्नक (Frustum of a Cone) : किसी शंकु को आधार के समानान्तर किसी समतल से काटने पर आधार तथा समतल के बीच कटे भाग को शंकु का छिन्नक कहा जाता है।

(a) गोले का छिन्नक (Frustum of a Sphere) : दो समानान्तर समतलों से कटे हुए गोले का भाग गोले का छिन्नक कहलाता है।

(b) गोलीय खण्ड (Spherical Segment) : किसी समतल द्वारा गोले का कटा हुआ भाग गोलीय खण्ड कहलाता है।

7.8 आयतन तथा वक्रपृष्ठ (Volume and Surface Area)

(A) यदि $y = f(x)$, x-अक्ष, $x = a$ तथा $x = b$ से घिरे क्षेत्रफल को

(i) x-अक्ष के परितः घुमाया जाए तो जनित ठोस का आयतन

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

तथा वक्रपृष्ठ $S = 2\pi \int_a^b y \, dS = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$

(ii) x-अक्ष के समानान्तर रेखा $y = k$ के परितः घुमाया जाए तो जनित ठोस का आयतन

$$V = \pi\int_a^b (y-k)^2\, dx \text{ तथा } S = 2\pi\int_a^b (y-k)\, dS = 2\pi\int_a^b (y-k)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

(B) यदि वक्र $x = f(y)$, y–अक्ष, $y = c$ तथा $y = d$ से परिबद्ध क्षेत्रफल को

(i) y-अक्ष के परितः घुमाया जाए तो आयतन

$$V = \pi\int_c^d x^2\, dy \text{ तथा वक्रपृष्ठ} = 2\pi\int_c^d x\, dS = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

(ii) y-अक्ष के समानान्तर रेखा $x = h$ के परितः घुमाया जाए तो आयतन $V = \pi\int_c^d (x-h)^2\, dy$

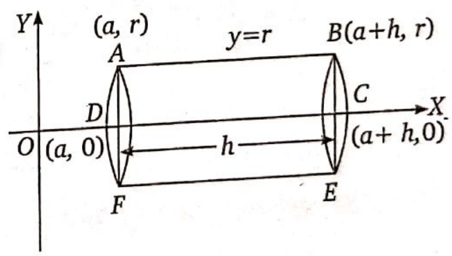
$$\text{तथा वक्रपृष्ठ } S = 2\pi\int (x-h)\, dS = 2\pi\int_c^d (x-h)\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

7.9 बेलन, शंकु एवं गोले के आयतन एवं पृष्ठ (Volume and Surface of a Cylinder, Cone and Sphere)

1. बेलन का आयतन एवं पृष्ठ (Volume and Surface of a Cylinder) [उ० प्र० डिप्लोमा 2013]

हल : माना $ABEF$ एक बेलन है तथा बेलन की ऊँचाई h एवं त्रिज्या r है। चित्र में बिन्दु O मूल बिन्दु है तथा $OL = a$ और $OC = a + h$। माना यह बेलन रेखाखण्ड AB के x-अक्ष के परितः परिक्रमण करने से जनित होता है। रेखा AB x-अक्ष के समान्तर है और इसका प्रत्येक बिन्दु x-अक्ष से r की दूरी पर है।

अतः A तथा B के नियामक क्रमशः (a, r) तथा $(a + h, r)$ होंगे।



$$\text{बेलन का आयतन} = \int_{x=a}^{a+h} \pi y^2\, dx = \pi\int_a^{a+h} r^2\, dx$$

$$= \pi r^2 [x]_a^{a+h} = \pi r^2 [a + h - a]$$

$$= \pi r^2 h \text{ घन मात्रक}$$

$$\text{बेलन का वक्र पृष्ठ} = \int_{x=a}^{a+h} 2\pi y\, ds$$

अब $y = r \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \quad ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1+0}\, dx = dx$

$$\therefore \text{ **बेलन का वक्रपृष्ठ**} = 2\pi\int_{x=a}^{a+h} r\sqrt{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi r\int_{x=a}^{a+h} dx = 2\pi r\,[x]_a^{a+h}$$

$$= 2\pi r\,[a + h - a] = \mathbf{2\pi rh} \text{ **वर्ग मात्रक**}$$

$\therefore$ बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ = बेलन का वक्रपृष्ठ + 2 (बेलन के वृत्ताकार आधार का क्षेत्रफल)

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r + h) \text{ वर्ग मात्रक}$$

2. शंकु का आयतन एवं पृष्ठ (Volume and Surface of a Right Circular Cone)

[उ० प्र० डिप्लोमा 2010]

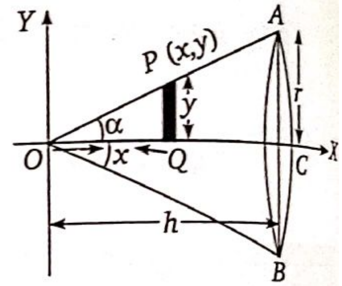
हल : माना शंकु का शीर्ष मूल बिन्दु O पर तथा अक्ष x-अक्ष पर है तथा माना इसके वृत्तीय आधार की त्रिज्या r तथा अर्द्धशीर्ष कोण α तथा ऊँचाई h है।

चित्र से स्पष्ट है $AC = r. OC = h. OA = l = \sqrt{r^2 + h^2}$

यह शंकु समकोण त्रिभुज ΔOAC को भुजा OC के परितः घुमाने से बना है।

माना $P(x, y)$ भुजा OA पर कोई बिन्दु है तथा $\angle AOC = \alpha$ तो

जनन वक्र OA का समीकरण $y = x \tan \alpha = x \cdot \frac{r}{h}$ $\left[\because \tan \alpha = \frac{AC}{OC} = \frac{r}{h}\right]$



अतः शंकु का आयतन $= \int_{x=0}^{h} \pi y^2\, dx = \int_{x=0}^{h} \pi x^2 \tan^2 \alpha\, dx$

$$= \int_{x=0}^{h} \pi \cdot x^2 \frac{r^2}{h^2}\, dx$$

$$= \pi \frac{r^2}{h^2}\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \text{ घन इकाई}$$

$\therefore$ **शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}$ (शंकु के आधार का क्षेत्रफल) $\times$ ऊँचाई $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$**

पुनः $y = \frac{r}{h} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{r}{h}$

$\therefore$ $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}}\, dx = \frac{\sqrt{h^2 + r^2}}{h}\, dx$

$= \frac{l}{h} dx,$ $[\because l = \text{तिर्यक ऊँचाई} = \sqrt{h^2 + r^2}]$

शंकु का वक्र पृष्ठ $S = 2\pi \int_{x=0}^{h} y\, ds = 2\pi \int_{x=0}^{h} \frac{r}{h} x \frac{l}{h}\, dx = \frac{2\pi rl}{h^2} \int_{x=0}^{h} x\, dx = \frac{2\pi rl}{h^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h$

$$= \frac{2\pi rl}{h^2} \cdot \frac{h^2}{2} = \pi rl \text{ वर्ग इकाई}$$

शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ = वक्र पृष्ठ + आधार का क्षेत्रफल $= \pi rl + \pi r^2 = \pi r (r + l)$ **वर्ग इकाई।**

3. गोले का आयतन एवं पृष्ठ (Volume and Curved Surface of a Sphere)

[उ० प्र० डिप्लोमा 2009, 2014]

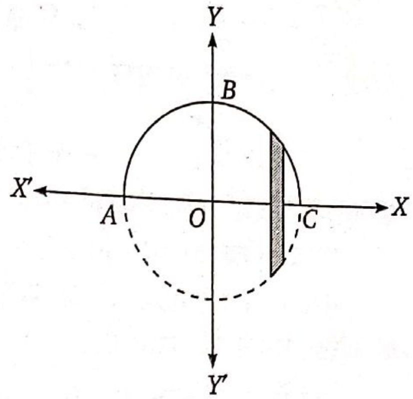
हल : माना अर्द्धवृत्त ABC को, जिसकी त्रिज्या a है, व्यास AC के परितः घुमाया जाता है जिससे गोले का निर्माण होता है।

वृत्त के केन्द्र को मूल बिन्दु O तथा व्यास AC को X-अक्ष के अनुदिश लेने पर वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \therefore y^2 = a^2 - x^2$$

अतः A और C के निर्देशांक $(-a, 0)$ तथा $(a, 0)$ हैं।

गोले का आयतन $V = \int_{-a}^{a} \pi y^2 \, dx = 2\pi \int_0^a y^2 \, dx$



$\therefore$

$$= 2\pi \int_0^a (a^2 - x^2) \, dx$$

$$= 2\pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$= 2\pi \left[a^2 (a - 0) - \frac{1}{3} (a^3 - 0) \right]$$

$$= 2\pi \left[a^3 - \frac{1}{3} a^3 \right] = 2\pi \times \frac{2}{3} a^3$$

$$= \frac{4}{3} \pi a^3$$

$\therefore$ **गोले का आयतन $= \frac{4}{3} \pi a^3$, जहाँ a गोले की त्रिज्या है।**

पुनः $x^2 + y^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$\therefore$ वक्र पृष्ठ $= \int_{-a}^{a} 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} \, dx = 2 \int_0^a 2\pi y \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} \, dx$

$$= 4\pi \int_0^a \frac{y}{y} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx = 4\pi \int_0^a a \, dx \qquad [\because x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = a]$$

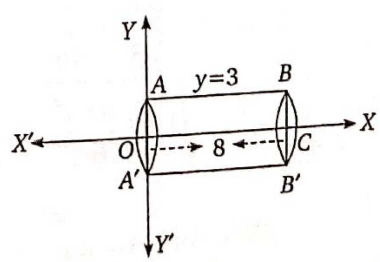
$$= 4\pi a [x]_0^a = 4\pi a [a - 0] = 4\pi a^2$$

$\therefore$ **गोले का वक्र पृष्ठ $= 4\pi a^2$, जहाँ a वक्र की त्रिज्या है।**

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. एक बेलन की ऊँचाई 8 सेमी तथा सिरे की त्रिज्या 3 सेमी है। निश्चित समाकल द्वारा उसका आयतन और वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1996]**

हल : माना $AA'BB'$ अभीष्ट बेलन है, जो जनन रेखा AB को X-अक्ष के परितः घुमाने से प्राप्त होता है। माना मूलबिन्दु O (0, 0) है।



यहाँ त्रिज्या $OA = CB = 3$ सेमी; ऊँचाई $OC = 8$ सेमी

तथा जनन रेखा AB का समीकरण $y = 3$

$\therefore$ अभीष्ट आयतन $= \pi \int_0^8 y^2 \, dx = \pi \int_0^8 (3)^2 \, dx = \pi \times 9 \int_0^8 dx$

$$= \pi \times 9 [x]_0^8 = \pi \times 9 (8 - 0) = 72\pi \text{ घन सेमी}$$

पुनः $\because \quad y = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1$

$\therefore$ अभीष्ट वक्रपृष्ठ $= 2\pi\int_0^8 y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_0^8 3\times 1\,dx = 6\pi\int_0^8 dx$

$= 6\pi\,[x]_0^8 = 6\pi\,[8-0] = 48\pi$ वर्ग सेमी

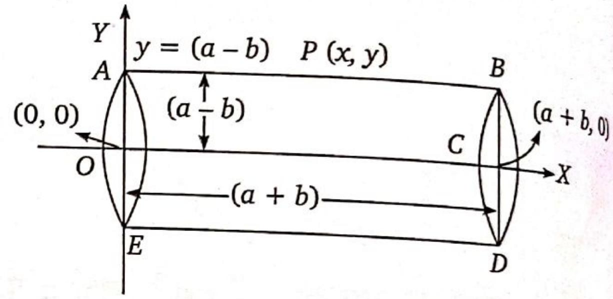
उदाहरण 2. एक आयत जिसकी लम्बाई $(a+b)$ तथा चौड़ाई $(a-b)$ है अपनी एक लम्बी भुजा जो x-अक्ष के अनुदिश है, के परितः परिक्रमण करता है। इस प्रकार जनित ठोस का आयतन, वक्र पृष्ठ एवं सम्पूर्ण पृष्ठ समाकलन द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल : माना $ABDE$ अभीष्ट बेलन है जो आयत $AOCB$, जिसकी भुजा OC, X-अक्ष के अनुदिश है, को x-अक्ष के परितः घूमाने से बनता है।

यहाँ बेलन की ऊँचाई $h = (a+b)$, त्रिज्या $r = (a-b)$

माना $P\,(x, y)$ AB पर कोई बिन्दु है, तो

जनन रेखा AB का समीकरण $y = a - b$



$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \quad ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+0}\,dx = dx$

$\therefore$ अभीष्ट आयतन $= \int_{x=0}^{a+b} \pi y^2\,dx = \pi\int_{x=0}^{a+b}(a-b)^2\,dx = \pi\,(a-b)^2\,[x]_0^{a+b}$

$= \pi\,(a-b)^2\,(a+b)$ घन इकाई — उत्तर

वक्रपृष्ठ $= \int_{x=0}^{a+b} 2\pi y\,ds = 2\pi\int_{x=0}^{a+b}(a-b)\,dx = 2\pi\,(a-b)\,[x]_0^{a+b} = 2\pi\,(a-b)\,(a+b)$

$= 2\pi\,(a^2 - b^2)$ वर्ग इकाई — उत्तर

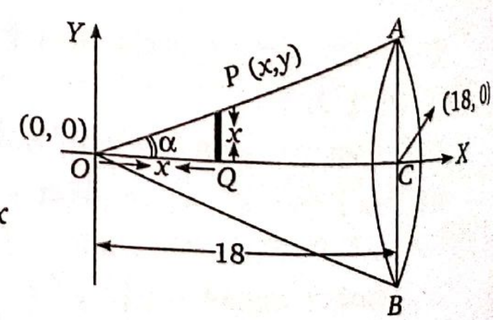
बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2\pi r\,(r+h) = 2\pi\,(a-b)\,(a-b+a+b) = 4\pi a\,(a-b)$ वर्ग इकाई — उत्तर

उदाहरण 3. एक लम्बवृत्तीय शंकु (Right Circular Cone) की ऊँचाई 18 सेमी तथा आधार की त्रिज्या 3.5 सेमी है। समाकलन विधि द्वारा इसका आयतन एवं वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लिया OAB दिया हुआ एक शंकु है जो ΔOAC को x-अक्ष के परितः घुमाने से बनता है। यहाँ $OC = 18$ सेमी, $AC = 3.5$ सेमी है, अर्द्धशीर्ष कोण $= \alpha$, माना रेखा OA पर कोई बिन्दु $P\,(x, y)$ है, तो

रेखा OA का समीकरण $y = x\tan\alpha \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \tan\alpha$

अब $\tan\alpha = \frac{3.5}{18} = \frac{7}{36}$



$\therefore \quad ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\frac{7\times 7}{36\times 36}}\,dx = \frac{\sqrt{1345}}{36}\,dx$

अभीष्ट आयतन $= \pi\int_0^{18} y^2\,dx$

$$= \pi \frac{7 \times 7}{36 \times 36} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{18} = 231 \text{ घन सेमी}$$ उत्तर

शंकु का वक्र पृष्ठ $S = 2\pi \int_0^{18} y\, ds = 2\pi \int_{x=0}^{18} x \tan a \times \frac{\sqrt{1345}}{36}\, dx$

$$= 2\pi \times \frac{\sqrt{1345}}{36} \times \frac{7}{36} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{18} = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{\sqrt{1345}}{36} \times \frac{7}{36} \times \frac{18 \times 18}{2}$$

$$= \frac{11}{2} \sqrt{1345} \text{ वर्ग इकाई}$$ उत्तर

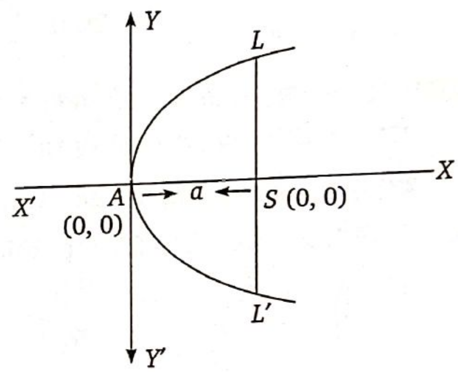
उदाहरण 4. परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष तथा नाभिलम्ब से परिबद्ध क्षेत्रफल को x-अक्ष के परितः घुमाने से जनित ठोस का आयतन निकालें।

हल : वक्र का समीकरण $y^2 = 4ax$ ...(1)

माना A परवलय का शीर्ष S नाभि है तथा नाभिलम्ब LSL' है।

ASL को X-अक्ष के परितः घूमाया गया है।

शीर्ष $A = (0, 0)$, नाभि $= S\,(a, 0)$



$\therefore$ अभीष्ट आयतन $= \pi \int_0^a y^2\, dx$

$$= \pi \int_0^a 4a\, x\, dx = 4a\pi \int_0^a x\, dx$$

$$= 4a\pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = 4a\pi \times \frac{1}{2} [a^2 - 0]$$

$$= 2a\pi \times a^2 = 2\pi a^3 \text{ घन इकाई}$$ उत्तर

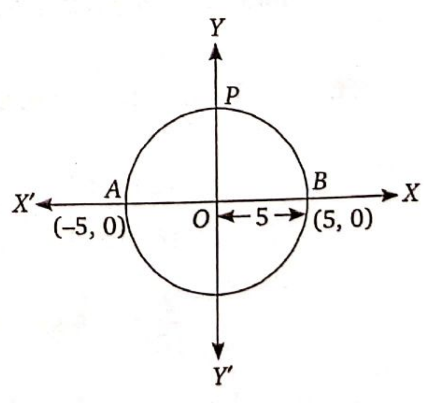
उदाहरण 5. उस गोले का आयतन और वक्रपृष्ठ ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 5 सेमी है और जिसका केन्द्र मूल बिन्दु पर है।

हल : मान लिया अर्द्धवृत्त APB को x-अक्ष के परितः घुमाने से गोला बनता है। माना अर्द्धवृत्त का केन्द्र O मूलबिन्दु है, तो वक्र का समीकरण $x^2 + y^2 = 25$ [$\because$ त्रिज्या = 5] ...(i)

$\Rightarrow \quad y^2 = 25 - x^2$

$\Rightarrow \quad y = \sqrt{25 - x^2}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 \times (-2x)}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}$



$\Rightarrow \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \frac{x^2}{25 - x^2}$

$$= \frac{25 - x^2 + x^2}{25 - x^2} = \frac{25}{25 - x^2} \quad \text{...(ii)}$$

$\therefore$ अब अभीष्ट आयतन $= \pi \int_{-5}^{5} y^2 \, dx$

$$= 2\pi \int_0^5 (25 - x^2) \, dx \qquad [(i) \text{ से}]$$

$$= 2\pi \times \left[25x - \frac{x^3}{3} \right]_0^5$$

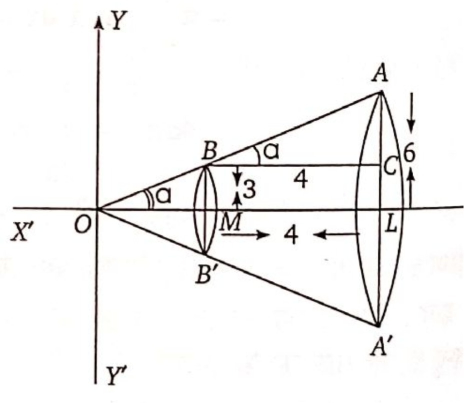
$$= 2\pi \times \left[(25 \times 5 - 0) - \left(\frac{125 - 0}{3} \right) \right]$$

$$= 2\pi \times \left[125 - \frac{125}{3} \right] = 2\pi \times \left[\frac{375 - 125}{3} \right]$$

$$= 2\pi \times \frac{250}{3} = \frac{500}{3} \pi \text{ घन सेमी}$$

उदाहरण 6. निश्चित समाकलन की सहायता से एक लम्ब वृत्तीय शंकु के छिन्नक का आयतन एवं वक्र पृष्ठ ज्ञात करें जिस मोटाई 4 सेमी और सिरों की त्रिज्यायें 3 सेमी तथा 6 सेमी हैं।

हल : (चित्र से) मान लीजिए $ABB'A$ शंकु छिन्नक है जिसमें $BC = LM = 4$ सेमी; $BM = CL = 3$ से $AL = 6$ सेमी; $\angle AOL = \angle ABC = \alpha$ तथा $AC = AL - CL = 6$ सेमी $- 3$ सेमी $= 3$ सेमी



अत: ΔABC में

$$\tan \alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$$

तथा ΔOAM से

$$\tan \alpha = \frac{BM}{OM} = \frac{3}{OM} = \frac{3}{4}$$

$\therefore \quad OM = 4$

$\therefore \quad OA$ का समीकरण $y = x \tan \alpha$ अर्थात् $y = \frac{3}{4} x$

$\therefore$ छिन्नक का आयतन $V = x$-अक्ष के परित: AB के परिक्रमण से बने ठोस का आयतन

अत: $$V = \int_4^8 \pi y^2 \, dx = \pi \int_4^8 \left(\frac{3}{4} x \right)^2 dx = \pi \times \frac{9}{16} \int_4^8 x^2 \, dx$$

$$= \frac{9\pi}{16} \left[\frac{x^3}{3} \right]_4^8 = \frac{9}{16} \times \frac{1}{3} \pi [8^3 - 4^3] = \frac{3}{16} \pi \times [512 - 64]$$

$$= \frac{3}{16} \pi \times 448 = 84 \pi \text{ घन सेमी}$$

पुन: $y = \frac{3}{4} x \quad \therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{4} \qquad \Rightarrow \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$

$\therefore$ वक्र पृष्ठ $= 2\pi\int_4^8 y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_4^8 \frac{3}{4}x \times \sqrt{\frac{25}{16}}\,dx$

$$= 2\pi \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4}\int_4^8 x\,dx = \frac{15}{8}\pi \times \left[\frac{x^2}{2}\right]_4^8$$

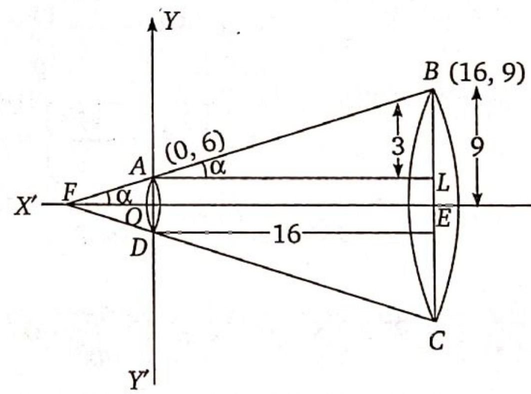
$$= \frac{15}{8}\pi \times \frac{1}{2}[8^2 - 4^2] = \frac{15}{8}\pi \times \frac{1}{2} \times [64 - 16]$$

$$= \frac{15}{8}\pi \times \frac{1}{2} \times 48 = 45\pi \text{ वर्ग सेमी} = 45 \times \frac{22}{7} \text{ वर्ग सेमी} = \frac{990}{7} \text{ वर्ग सेमी}$$ उत्तर

उदाहरण 7. एक बाल्टी के ऊपर तथा नीचे के व्यास क्रमशः 18 सेमी 12 सेमी हैं तथा उसकी गहराई 16 सेमी है। समाकलन द्वारा उसका आयतन व वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : बाल्टी एक शंकु छिन्नक है। प्रश्न से ऊपरी त्रिज्या $BE = 9$ सेमी तथा नीचे की त्रिज्या $= 6$ सेमी, बाल्टी की गहराई $DE = 16$ सेमी यदि चित्र से $\angle BFE = \angle BAL = \alpha$ होगा। $AL = OE = 16$ सेमी; $BL = BE - LE = 3$ सेमी।

तो $\tan\alpha = \frac{3}{16}$ और AB का समीकरण $y = \frac{3}{16}x + 6$ होगा। $[\because\ y = mx + c]$



अतः बाल्टी का अभीष्ट आयतन

$$= \pi\int_0^{16} y^2\,dx = \pi\int_0^{16}\left(\frac{3}{16}x + 6\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_0^{16}\left(\frac{9}{256}x^2 + \frac{9}{4}x + 36\right)dx$$

$$= \pi\left[\frac{9}{256}\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{9}{4}\left(\frac{x^2}{2}\right) + 36x\right]_0^{16}$$

$$= \pi\left(\frac{9}{256} \times \frac{16\times16\times16}{3} + \frac{9}{4}\cdot\frac{16\times16}{2} + 36\times16\right)$$

$= 912\,\pi$ घन सेमी। उत्तर

पुनः $y = \frac{3}{16}x + 6 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{16}$

$\therefore \quad ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$ या $ds = \sqrt{1+\frac{9}{256}}\,dx = \frac{\sqrt{265}}{16}dx$

बाल्टी का वक्र पृष्ठ $S = 2\pi\int_{x=0}^{16} y\,ds$

$$= \int_0^{16}\left(\frac{3}{16}x + 6\right)\frac{\sqrt{265}}{16}dx = \frac{2\times\sqrt{265}}{16}\pi\left[\frac{3}{16}\frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^{16}$$

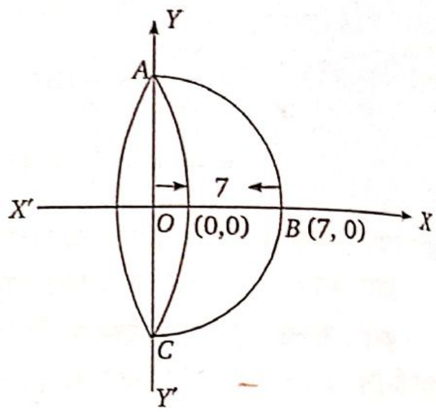
$$= \frac{2\times\sqrt{265}}{16}\pi\left[\frac{3}{16}\times\frac{16\times16}{2} + 6\times16\right]$$

$$= \frac{2 \times \sqrt{265}}{16} \pi \times (24 + 96) = \frac{2 \times \sqrt{265}}{16} \times \pi \times 120$$

$$= 15\sqrt{265}\,\pi \text{ वर्ग सेमी}$$

उत्तर

उदाहरण 8. एक अर्द्धगोलीय प्याले की त्रिज्या 7 सेमी है। उसकी धारिता एवं उसको बनाने में लगी धातु की चादर का क्षेत्रफल समाकलन विधि द्वारा निकालें।



हल : माना वृत्तीय चाप BA को x-अक्ष के परितः घुमाने से अर्द्धगोलीय प्याला $ABCOA$ बनता है।

माना मूल बिन्दु O (0, 0) तथा A (7, 0) हैं। तो त्रिज्या $OB = 7$ सेमी

तथा वक्र का समीकरण $x^2 + y^2 = 7^2$

या $\qquad y^2 = 49 - x^2$

$$\text{आयतन (धारिता)} = \pi \int_0^7 y^2\, dx = \pi \int_0^7 (49 - x^2)\, dx$$

$$= \pi \left[49x - \frac{x^3}{3}\right]_0^7 = \pi \left[49\,(7 - 0) - \left(\frac{7^3}{3} - 0\right)\right]$$

$$= \pi \left[343 - \frac{343}{3}\right] = \frac{\pi}{3}[1029 - 343] = \frac{\pi}{3}[686] = \frac{686}{3}\pi \text{ वर्ग इकाई}$$

$\therefore \qquad$ धारिता $= \dfrac{686}{3}$ वर्ग इकाई

पुनः (1) के अवकल से, $2x + 2y \dfrac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad \Rightarrow \quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2 + y^2}{y^2} = \frac{49}{y^2}$$

$\therefore \quad$ प्याले में लगने वाली चादर का क्षेत्रफल $= 2\pi \displaystyle\int_0^7 y \sqrt{\frac{49}{y^2}}\, dx = 2\pi \int_0^{\pi} y \times \frac{7}{y}\, dx$

$$= 2\pi \times 7 \int_0^7 dx = 14\pi\,[x]_0^7 = 14\pi \times 7 = 98\pi \text{ वर्ग इकाई}$$

उत्तर

उदाहरण 9. 18 सेमी व्यास का एक गोला दो समान्तर समतलों से तीन बराबर ऊँचाई के भागों में विभाजित किया जाता है। प्रत्येक भाग का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : मूल बिंदु O को केन्द्र मानकर 9 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचे जो x-अक्ष को $P(9, 0)$ तथा $Q(-9\ 0)$ पर काटता है।

$\therefore \quad$ वृत्त की त्रिज्या $OP; OQ = 9$ तथा व्यास $PQ = 18$

$\therefore$ वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = 9^2 = 81$

व्यास PQ पर दो बिन्दु C और D इस प्रकार चुनें कि

$$PC = CD = DQ = 6$$

Study
Power
Point

$$= \pi . b^2 \left[\left(a - \frac{a}{3}\right) - \left(-a + \frac{a}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi b^2}{3} [3a - a + 3a - a] = \frac{4}{3} \pi . a . b^2 \text{ इकाई आयतन}$$

उत्तर

उदाहरण 11. वक्र $y^2 = x^2 (1 - x^2)$ के एक लूप (loop) को y-अक्ष के सापेक्ष घुमाया गया है। इस प्रकार से जनित, घिरे आयतन को ज्ञात कीजिये। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1990]**

हल : y-अक्ष के सापेक्ष loop को घुमाने पर जनित आयतन,

$$V = 2\pi \int_0^1 x^2 \, dy \qquad [\because \text{ समीकरण में } y = 0 \text{ रखने से } x = \pm 1]$$

माना $x = \sin\theta$ तो $dx = \cos\theta \, d\theta$

अतः $y^2 = \sin^2\theta (1 - \sin^2\theta) = \sin^2\theta \cos^2\theta$

$\therefore \quad y = \sin\theta \cos\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \qquad \therefore \quad dy = \frac{1}{2} \times 2 \cos 2\theta \, d\theta = \cos 2\theta \, d\theta$

तथा जब $x = 0$ तो $\theta = 0$ और जब $x = 1$ तो $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad$ आयतन $V = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos 2\theta \, d\theta = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta (\cos^2 s - in^2 \theta) \, d\theta$

$$= 2\pi \left[\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos^2\theta \, d\theta - \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \, d\theta\right] \qquad ...(1)$$

अब $\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta . \cos^2\theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{2+2+2}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2\Gamma 3}$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \sqrt{\pi} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{\pi}}{2 \times 2} = \frac{\pi}{16}$$

तथा $\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta \, d\theta = \frac{\Gamma\left(\frac{4+1}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{0+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4+0+2}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma 3} = \frac{\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \times \sqrt{\pi}}{2 \times 2} = \frac{3}{16}\pi$

अतः (1) से अभीष्ट आयतन $V = 2\pi \left[\frac{\pi}{16} - \frac{3\pi}{16}\right] = -\frac{\pi^2}{4}$

अतः आयतन $= \frac{\pi^2}{4}$ घन इकाई [धनात्मक लेने पर]

उत्तर

महत्त्वपूर्ण सूत्र

(A) यदि $y = f(x)$, x-अक्ष, $x = a$ तथा $x = b$ से घिरे क्षेत्रफल को

(i) x-अक्ष के परितः घुमाया जाए तो जनित ठोस का आयतन $V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$

तथा वक्रपृष्ठ $S = 2\pi \int_a^b y \, dS = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$

(ii) x-अक्ष के समानान्तर रेखा $y = k$ के परितः घुमाया जाए तो जनित ठोस का आयतन

$$V = \pi \int_a^b (y-k)^2 \, dx \quad \text{तथा} \quad S = 2\pi \int_a^b (y-k)\, dS = 2\pi \int_a^b (y-k) \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

(B) यदि वक्र $x = f(y)$, y-अक्ष, $y = c$ तथा $y = d$ से परिबद्ध क्षेत्रफल होगा y-अक्ष के परितः घुमाया जाए तो

(i) आयतन $V = \pi \int_c^d x^2 \, dy$ तथा वक्रपृष्ठ $= 2\pi \int_c^d x \, dS = 2\pi \int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

(ii) y-अक्ष के समानान्तर रेखा $x = h$ के परितः घुमाया जाए तो आयतन $V = \pi \int_c^d (x-h)^2 \, dy$

तथा वक्रपृष्ठ $S = 2\pi \int (x-h)\, dS = 2\pi \int_c^d (x-h)\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$

प्रश्नावली 7.3

1. वक्र $y^2 = 4x$ तथा $x = 1$ के बीच परिबद्ध क्षेत्रफल को x-अक्ष के परितः घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात करें।
2. वक्र $y^2 = x^2 + 5x$, $x = 2$ तथा $x = 4$ से परिबद्ध क्षेत्रफल को x-अक्ष के परितः घूमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात करें।
3. सिद्ध करें कि किसी दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ को इसके दीर्घअक्ष (Major axis) के परितः घुमाने से जनित ठोस का आयतन $\frac{4}{3}\pi ab^2$ है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1992, 97, 2017(S)]**
4. वक्र $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{25} = 1$ को x-अक्ष के परितः घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात करें।
5. किसी दीर्घवृत्त को उसके लघु अक्ष (Minor axis) के परितः घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात करें।
6. एक बेलन की ऊँचाई 10 सेमी और सिरे की त्रिज्या 4 सेमी है, तो उसका आयतन तथा वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।
7. (i) एक लंबवृत्तीय शंकु (Right Circular Cone) की ऊँचाई 7 सेमी तथा आधार की त्रिज्या 3 सेमी है। समाकलन विधि से उसका वक्र पृष्ठ एवं आयतन ज्ञात करें।

   (ii) 28 सेमी ऊँचे और 21 सेमी त्रिज्या वाले शंकु का आयतन एवं वक्र पृष्ठ समाकलन के प्रयोग से ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2014 (O)]**
8. बिन्दुओं (0, 0) और (b, a) को मिलाने वाली रेखा को x-अक्ष के परितः घुमाया जाता है। इस प्रकार जनित ठोस का आयतन, वक्र पृष्ठ एवं सम्पूर्ण पृष्ठ निशिचत समाकलन की विधि से ज्ञात कीजिए।

   [**संकेत :** जनन रेखा $y - 0 = \frac{a-0}{b-0}(x-0) \Rightarrow y = \frac{a}{b}x$]
9. वक्र $x^2 + y^2 = 9$ को x-अक्ष के परितः घुमाया जाता है। निश्चित समाकलन विधि से जनित ठोस का आयतन तथा वक्र पृष्ठ ज्ञात करें।
10. निश्चित समाकलन विधि $x^2 + y^2 = 25$ को y-अक्ष के परितः घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात करें।
11. निश्चित समाकलन की सहायता से उस शंकु के छिन्नक का आयतन एवं वक्र पृष्ठ ज्ञात करें जिसके सिरे की त्रिज्यायें क्रमशः 5 सेमी और 10 सेमी तथा मोटाई 12 सेमी हैं।
12. निश्चित समाकलन की सहायता से उस बाल्टी का वक्र पृष्ठ एवं आयतन ज्ञात करें जिसके ऊपर और नीचे के सिरों के व्यास क्रमशः 18 सेमी तथा 12 सेमी हैं और गहराई 16 सेमी है।

13. 9 सेमी ऊँचे तथा 4 सेमी त्रिज्या वाले लंबवृतीय शंकु को आधार के समानांतर दो समतलों द्वारा इस प्रकार काटा गया है कि इसकी ऊँचाई तीन बराबर भागों मे विभाजित हो गई हैं। तीनों भाग का आयतनों का अनुपात ज्ञात करें।

14. उस शंकु के छिन्नक आयतन समाकलन विधि से ज्ञात करें जिसकी आधार की त्रिज्यायें r_1 तथा r_2 एवं मोटाई k है।

15. एक अर्द्धगोलीय प्याले की त्रिज्या 7 सेमी है। उसकी धारिता (Capacity) एवं उसको बनाने वाली धातु की चादर का क्षेत्रफल समाकलन विधि से निकालें।

16. एक गोला जिसकी त्रिज्या 6 सेमी है, दो समानांतर समतलों क्षरा तीन बराबर ऊँचाई के भागों में बाँटा गया है। प्रत्येक भाग का आयतन समाकलन विधि से ज्ञात करें।

17. वक्र $y = \sin x$, $x = 0$ तथा $x = \pi / 2$ से परिबद्ध क्षेत्रफल को x-अक्ष के परित: घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात करें।

18. हाइपोसाइक्लोयड (Hypocycloid) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ को x-अक्ष के परित: घुमाने से जनित ठोस का आयतन ज्ञात करें।

19. वक्र $y^2 = x^2 (1 - x^2)$ के एक लूप (loop) को x-अक्ष के सापेक्ष घुमाया गया है। इस प्रकार से जनित, घिरे आयतन को ज्ञात कीजिये।
[उ० प्र० डिप्लोमा 1990]

20. समाकलन विधि से लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन तथा वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिये जबकि बेलन की ऊँचाई h तिर्यक व त्रिज्या r है।
[उ० प्र० डिप्लोमा 2013]

21. निश्चित समाकलन विधि से उस शंकु का आयतन एवं संपूर्ण पृष्ठ ज्ञात करें जिसकी ऊँचाई h तिर्यक ऊँचाई l तथा वृत्तीय आधार की त्रिज्या r है।
[उ० प्र० डिप्लोमा 2010]

22. निश्चित समाकलन विधि से उस गोले का आयतन तथा वक्र पृष्ठ ज्ञात करें जिसकी त्रिज्या r है।
[उ० प्र० डिप्लोमा 2009, 2014]

23. सही उत्तर पर (✓) का चिन्ह लगायें—

(i) दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का क्षेत्रफल होगा—

(a) πab (b) $\pi \frac{(a^2 + b^2)}{4}$ (c) $\pi (a + b)$ (d) कोई नहीं

(ii) बेलन का आयतन का सूत्र होगा—

(a) $\pi r^2 h$ (b) $2\pi rh$ (c) $2\pi (r + h)$ (d) कोई नहीं

(iii) शंकु की आयतन का सूत्र होगा—

(a) $\frac{1}{3} \pi r^2 h$ (b) $\pi r (r + l)$ (c) $\pi rl (r + h)$ (d) कोई नहीं

(iv) $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ तथा $x = b$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा—

(a) $\int_a^b y \, dx$ (b) $\pi \int_a^b y \, dx$ (c) $\int_a^b y^2 \, dx$ (d) कोई नहीं

(v) $x = f(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल होगा—

(a) $\int_c^d x \, dy$ (b) $\int_c^d y \, dx$ (c) $\int_0^d x \, dy$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. 2π घन इकाई
2. 90π घन इकाई
4. $\frac{700}{3}\pi$ घन इकाई
5. $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ घन इकाई
6. 160π घन इकाई, 80π वर्ग इकाई
7. (i) $3\sqrt{58}\pi$ वर्ग सेमी, 21π घन सेमी (ii) 12936 सेमी^{2}; 3696 सेमी^{2}
8. $\frac{\pi}{3}a^2 b, \pi a\sqrt{a^2+b^2}, \pi a[\sqrt{a^2+b^2}+a]$
9. 36π घन इकाई, 36π वर्ग इकाई
10. $\frac{500}{3}\pi$ घन इकाई
11. आयतन = 2200 घन सेमी, वक्र पृष्ठ = 195 वर्ग सेमी
12. $15\sqrt{265}\,\pi$ वर्ग सेमी, 912π घन सेमी
13. 1 : 7 : 19
14. $\frac{\pi k}{3}[r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2]$
15. $\frac{686}{3}\pi$ घन सेमी, 98π वर्ग सेमी
16. $74\frac{2}{3}$ सेमी^{3}, $138\frac{2\pi}{3}$ सेमी^{3}, $74\frac{2}{3}$ सेमी^{3}
17. $\frac{\pi^2}{4}$ घन इकाई
18. $\frac{32\pi a^3}{105}$ घन इकाई
19. $\frac{2\pi}{15}$ घन इकाई
20. $\pi r^2 h, 2\pi rh$
21. $\frac{1}{3}\pi r^2 h, \pi r(r+l)$
22. $\frac{4}{3}\pi r^3, 4\pi r^2$
23. (i) (a) (ii) (a) (iii) (a) (iv) (a) (v) (a)

□□□

CHAPTER 8

माध्यमान (Mean Value)

8.1 परिभाषायें (Definitions)

1. माध्य मान (Mean Value) : किसी दिए गए फलन $y = f(x)$ का दी गई सीमाओं $x = a$ तथा $x = b$ के लिए माध्य मान निम्न सूत्र से व्यक्त किया जाता है :

$$\text{माध्य मान (Mean Value)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

2. वर्ग माध्य मान (Mean Square Value) : यदि $y = f(x)$ कोई दिया गया फलन हो तो सीमाओं $x = a$ तथा $x = b$ के बीच वर्ग माध्य मान निम्न सूत्र से व्यक्त किया जाता है :

$$\text{वर्ग माध्य मान (Mean Square Value)} \ \frac{1}{b-a}\int_a^b y^2 dx$$

3. मूल वर्ग माध्य मान (Root Mean Square Value) : यदि $y = f(x)$ चर x का कोई फलन हो, तो $x = a$ तथा $x = b$ सीमाओं के बीच इसका वर्ग मूल माध्य मान निम्न सूत्र से दिया जाता है :

$$\text{मूल वर्ग माध्य मान (Root mean square value)} = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b y^2\,dx}$$

तथा इसे r.m.s. से व्यक्त करते हैं। यह वर्ग माध्य मान का वर्गमूल है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. सीमा $(0, a)$ के लिए $x(a-x)$ का माध्य मान ज्ञात करें।

हल : यहाँ $a = 0, b = a, y = x(a-x)$

सूत्र से, माध्य मान $= \frac{1}{b-a}\int_a^b y\,dx$

$$\therefore \quad \text{माध्य मान} = \frac{1}{a-0}\int_0^a x(a-x)\,dx = \frac{1}{a}\int_0^a [ax - x^2]\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\left[a\int_0^a x\,dx - \int_0^a x^2\,dx\right] = \frac{1}{a} \times a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a - \frac{1}{a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{2}[a^2 - 0] - \frac{1}{3a}[a^3 - 0] = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{3a^2 - 2a^2}{6} = \frac{1}{6}a^2$$

अतः अभीष्ट माध्य मान $= \frac{1}{6} a^2$

उदाहरण 2. a लम्बाई की किसी छड़ के एक सिरे से, उसके कणों की दूरियों के वर्गों का माध्य मान ज्ञात करें।

हल : मान छड़ के किसी बिन्दु से उसके किसी कण की दूरी $= x$

अब प्रश्न से, छड़ के प्रारम्भिक सिरे पर $x = 0$

तथा अंतिम सिरे पर $x = a$

$$\therefore \quad \text{वर्ग माध्य मान} = \frac{1}{a-0}\int_0^a x^2\, dx = \frac{1}{a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{1}{3a}[a^3 - 0] = \frac{1}{3}a^2$$

उदाहरण 3. फलन $y = \cos(pt+\alpha)\cos(pt+\beta)$ का $t = 0$ तथा $t = \frac{\pi}{p}$ के मध्य माध्य मान प्राप्त करें।

हल : सूत्र से,

$$\text{माध्य मान} = \frac{1}{b-a}\int_a^b y\, dx, \text{ यहाँ } a = t = 0 \text{ तथा } b = t = \frac{\pi}{p}$$

$$\therefore \quad \text{अभीष्ट माध्य मान} = \frac{1}{\frac{\pi}{p} - 0}\int_0^{\pi/p} \cos(pt+\alpha)\cos(pt+\beta)\, dt$$

$$= \frac{p}{2\pi}\int_0^{\pi/p} 2\cos(pt+\alpha)\cos(pt+\beta)\, dt$$

$$= \frac{p}{2\pi}\int_0^{\pi/p} [\cos\{(pt+\alpha)+(pt+\beta)\} + \cos\{(pt+\alpha)-(pt+\beta)\}\, dt$$

$$[\because \quad 2\cos C\cos D = \cos(C+D) + \cos(C-D)]$$

$$= \frac{p}{2\pi}\left[\int_0^{\pi/p} \cos(2pt+\alpha+\beta)\, dt + \int_0^{\pi/p} \cos(\alpha-\beta)\, dt\right]$$

$$= \frac{p}{2\pi}\left[\frac{\{\sin(2pt+\alpha+\beta)\}_0^{\pi/p}}{2p} + \cos(\alpha-\beta)\{t\}_0^{\pi/p}\right]$$

$$= \frac{p}{2\pi}\left[\frac{1}{2p}\left\{\sin\left(2p\frac{\pi}{p}+\alpha+\beta\right) - \sin(2p\times 0+\alpha+\beta)\right\} + \left\{\cos(\alpha-\beta)\left\{\frac{\pi}{p} - 0\right\}\right\}\right]$$

$$= \frac{p}{2\pi}\left[\frac{1}{2p}\{\sin(2\pi+\alpha+\beta) - \sin(\alpha+\beta)\} + \frac{\pi}{p}\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$= \frac{p}{2\pi}\left[\frac{1}{2p}\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha+\beta)\} + \frac{\pi}{p}\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$= \frac{p}{2\pi}\times\frac{\pi}{p}\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

उत्तर

उदाहरण 4. किसी विद्युत परिपथ में वोल्टता $e = E \sin \omega t$, जहाँ E और Ω अचर हैं, वोल्टता $t = 0$ से $t = \frac{2\pi}{\omega}$ तक के काल में मूल वर्ग माध्य मान ज्ञात करें।

हल : $\because$ सूत्र से, मूल वर्ग माध्य मान $= \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b y^2\, dx}$

$\therefore$ अभीष्ट मूल वर्ग माध्य मान $= \sqrt{\frac{1}{\frac{2\pi}{\omega} - 0}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} E^2 \sin^2 \omega t\, dt} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \times E^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \frac{1-\cos 2\omega t}{2}\, dt}$

[यहाँ $a = 0, b = \frac{2\pi}{\omega}, y = E \sin \omega t$]

$$= \sqrt{\frac{\omega E^2}{4\pi}\left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\omega E^2}{4\pi}\left[\left(\frac{2\pi}{\omega} - 0\right) - \frac{(\sin 4\pi - \sin 0)}{2\omega}\right]}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega E^2}{4\pi}\left[\frac{2\pi}{\omega} - \frac{(0-0)}{2\pi}\right]} = \sqrt{\frac{\omega E^2}{4\pi} \times \frac{2\pi}{\omega}} = \sqrt{\frac{E^2}{2}} = \frac{E}{\sqrt{2}}$$ उत्तर

उदाहरण 5. $x = 1$ से $x = e$ के बीच $\log_e x$ का r.m.s. (मूल वर्ग माध्य मान) प्राप्त करें।

हल : यहाँ $a = 1,\ b = e,\ y = \log x$

$\therefore$ मूल वर्ग माध्य मान $= \sqrt{\frac{\int_1^e (\log x)^2\, dx}{e-1}}$ ...(1)

अब $\int (\log x)^2\, dx = \int \underset{\text{I}}{(\log x)^2} \times \underset{\text{II}}{1}\, dx$

$$= (\log_e x)^2 \int dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\log_e x)^2 \int dx\right\} dx$$

$$= x\left((\log_e x)^2 - 2\int \log_e x \times \frac{1}{x} \times x\, dx\right)$$

$$= x(\log_e x)^2 - 2\int \log_e x\, dx = x(\log_e x)^2 - 2[x \log_e x - x]$$

$$= x(\log_e x)^2 - 2x \log x + 2x$$

$\therefore$ $$\int_1^e (\log_e x)^2\, dx = [x(\log_e x)^2 - 2x \log_e x + 2x]_1^e$$

$$= [e(\log_e e)^2 - 2e \log_e e + 2e - 1 \times 0 + 2 \times 1 \times 0 - 2 \times 1]$$

$$= e \times 1 - 2e \times 1 + 2e - 2$$ [$\because \log_e e = 1, \log 1 = 0$]

$$= e - 2e + 2e - 2 = e - 2$$

$\therefore$ मूल वर्ग माध्य मान $= \sqrt{\frac{e-2}{e-1}}$ [(1) से]

उदाहरण 6. यदि $x = 0$ से $x = \frac{\pi}{2}$ के परास में $\sin x + K \sin 2x$ का माध्य शून्य हो तो K का मान ज्ञात करें।

हल : यहाँ $a = 0,\ b = \frac{\pi}{2}$ तथा $y = \sin x + K \sin 2x$

$$\therefore \quad \text{माध्य मान} = \frac{1}{(\pi/2) - 0}\int_0^{\pi/2} (\sin x + K \sin 2x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx + K \int \sin 2x\, dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[(-\cos x)_0^{\pi/2} + K\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)_0^{\pi/2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) - \frac{K}{2}\left(\cos 2\times\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)\right] = \frac{2}{\pi}\left[\cos 0 - \frac{K}{2}(-1) + \frac{K}{2}\right] = \frac{2}{\pi}[1+K]$$

अब प्रश्न से, माध्य मान $= 0$ $\quad\Rightarrow\quad \frac{2}{\pi}(K+1) = 0 \quad\Rightarrow\quad K + 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad K = -1$ **उत्तर**

प्रश्नावली 8.1

1. $x = 1$ से $x = 6$ तक माध्य मान ज्ञात करो जबकि $y = 4x^2 + 7x - 5$
2. अन्तराल $t = 0$ से $t = \frac{2\pi}{\omega}$ के लिए $\sin^2 \omega t$ का माध्य मान ज्ञात करें।
3. $x = 0$ तथा $x = \pi$ के बीच $\cos^2 px$ का माध्य मान ज्ञात करें, जहाँ p एक पूर्णांक है।
4. यदि $(\cos\theta + K \cos 2\theta)$ का $\theta = 0$ तथा $\theta = \frac{\pi}{4}$ के बीच माध्य मान शून्य हो तो K का मान ज्ञात करें।
5. एक छड़ के कणों की छड़ के सिरे से दूरियों के घनों का माध्य मान ज्ञात करें जबकि छड़ की लंबाई a है।
6. $x = 0$ तथा $x = \frac{\pi}{2}$ में $\sin^3 x$ का वर्ग माध्य मान व मूल वर्ग माध्य मान ज्ञात करें।
7. $t = 0$ तथा $t = \frac{\pi}{p}$ के लिए वक्र $y = A \sin pt$ के मूल वर्ग माध्य मान तथा माध्य मान के अन्तर की गणना करें।
8. यदि $i = I_m \sin \omega t$ हो, जहाँ i उस विद्युत धारा को प्रदर्शित करता है जो किसी चुंबकीय क्षेत्र में कोणीय वेग ω से घूमती हुई कुण्डली में बहती है तथा I_m महत्तम विद्युतधारा को प्रदर्शित करता है। तब अंतराल $t = 0$ से $t = \frac{2\pi}{\omega}$ में धारा का मूल वर्ग माध्य मान ज्ञात करें।
9. $t°$C पर धारा नियंत्रक का प्रतिरोध R समीकरण $R = 38\,(1 + 0.004t)$ द्वारा दिया जाता है, तो R का माध्य मान ज्ञात करें, यदि R, $t = 10°$C से $t = 40°$C तक परिवर्तित होता है।

उत्तरमाला

1. $76\frac{5}{6}$ **2.** 1 **3.** $\frac{1}{2}$ **4.** $K = -\sqrt{2}$ **5.** $\frac{a^3}{4}$ **6.** $\frac{5}{16}$

7. $A\left(\frac{\pi - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\pi}\right)$ **8.** $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$ **9.** 41.8

□□□

CHAPTER 9

आंकिक समाकलन (Numerical Integration)

9.1 अनियमित आकृतियों के क्षेत्रफल एवं आयतन (Area and Volume of Irregular Faces)

सांख्यिकीय समाकलन वह विधि है जिसमें किसी निश्चित समाकलन का मान फलन के सारणी रूप में उपलब्ध मानों की सहायता से निकाला जाता है। इसका प्रयोग सामानयत: अनियमित आकृत्तियों के क्षेत्रफल, आयतन आदि निकालने में होता है। इसके अलावा इसका प्रयोग निश्चित समाकल में वैसे समाकल्य का समाकलन, यथा $\int_a^b e^{x^2}\,dx, \int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx$, करने के लिए होता है, जिसका समाकल ज्ञात करना सामान्यत: आसान नहीं होता।

इस अध्याय में हम आंकिक समाकलन से संबंधित दो विधियों के बारे में पढ़ेंगे—

1. **सिम्प्सन नियम** (Simpson's Rule)

   (a) प्रथम नियम या $\left(\frac{1}{3}\right)$ नियम (b) द्वितीय नियम या $\left(\frac{3}{8}\right)$ नियम

2. **समलंबी नियम** (Trapezoidal Rule)

1. (a) सिम्प्सन का प्रथम नियम या $\left(\frac{1}{3}\right)$ नियम (Simpson's First Rule or $\left(\frac{1}{3}\right)$ Rule) : इस विधि से अनियमित आकार का क्षेत्रफल निकालने के लिए संपूर्ण क्षेत्र को बराबर दूरी पर विषम कोटियाँ लेकर सम भागों में बाँट दिया जाता है। यदि कोटियों की संख्या $(n+1)$ हो, जहाँ n सम है, तो क्षेत्रफल

$$A = \frac{h}{3}[(y_1 + y_{n+1}) + 2(y_3 + y_5 + \dots + y_{n-1}) + 4(y_2 + y_4 + \dots + y_n)$$

या $$A = \frac{h}{3}[(F + L) + 2O + 4E]$$

जहाँ F = प्रथम कोटि (First ordinate)

L = अंतिम कोटि (Last ordinate)

O = शेष विषम कोटियों का योग (Sum of odd remaining ordinates)

E = सम कोटियों का योग (Sum of even ordinates)

(b) सिम्प्सन नियम का सन्निकट समाकलन में प्रयोग : $\int_a^b y\,dx$ के सन्निकट समाकलन के लिए अंतराल $[a, b]$ को n बराबर भागों में बाँट दिया जाता है जहाँ n सम है तथा निम्न सारणी तैयार की जाती है—

x	a	$a+h$	$a+2h$	...	$a+nh=b$
$y=f(x)$	y_1	y_2	y_3	...	y_{n+1}

जहाँ $h = \frac{b-a}{n}$

तथा ऊपर वर्णित सिम्पसन $\left(\frac{1}{3}\right)$ नियम का प्रयोग किया जाता है।

$$\int_a^b y\,dx = \frac{h}{3}[(y_1 + y_{n+1}) + 2(y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 4(y_2 + y_4 + \ldots + y_n)]$$

$$= \frac{h}{3}[(F + L) + 2 \times O + 4E]$$

नोट :

- (i) (1) (a) तथा (b) के सूत्र समान हैं।
- (ii) इस नियम का प्रयोग तभी होता है, जब कोटियों की संख्या विषम हो।
- (iii) 'O' का मान निकालने प्रथम अंतिम को छोड़कर विषम कोटियों का योग निकाला जाता है।
- (iv) इसे सिम्पसन नियम के नाम से भी जाना जाता है।

(ii) सिम्पसन का द्वितीय नियम या $\left(\frac{3}{8}\right)$ नियम (Simpson's Second Rule or Three-Eight $\left(\frac{3}{8}\right)$ Rule) :

(a) अनियमित आकार का क्षेत्रफल : इस विधि से अनियमित आकृति का क्षेत्रफल निकालने के लिए सम्पूर्ण क्षेत्र को n बराबर भागों में, जहाँ n, 3 का गुणज है, बाँट दिया जाता है तथा क्षेत्रफल निम्न सूत्र से निकाला जाता है—

$$A = \frac{3h}{8}[(y_0 + y_n) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_3 + y_6 + \ldots y_{n-3})]$$

जहाँ n तीन का गुणज है तथा $h = \frac{b-a}{n}$ = दो अंतरालों के बीच की सम दूरी

(b) सन्निकट समाकलन : $\int_a^b y\,dx$ का सन्निकट समाकलन के लिए इसी सूत्र का प्रयोग होता है तथा इसे निम्न रूप में व्यक्त किया जाता है—

$$\int_a^b y\,dx = \frac{3h}{8}[(y_0 + y_n) + 3(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_3 + y_6 + \ldots y_{n-3})]$$

जहाँ $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ क्रमशः $x = a, a+h; a+2h, \ldots, a+nh$ के लिए कोटियाँ तथा $h = \frac{b-a}{n}$, जहाँ n तीन का गुणज है।

नोट :

- इस विधि में बराबर भागों की संख्या n, 3 का गुणज होती है।

2. समलंबी नियम (Trapezoidal Rule) : (i) समलंबी नियम से क्षेत्रफल निकालना : इस विधि से अनियमित आकृत्ति का क्षेत्रफल निकालने के लिए पूरे क्षेत्र को $(n+1)$ कोटियाँ लेकर n बराबर भागों में बाँट दिया जाता है तथा क्षेत्रफल के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$A = \frac{h}{2}[y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})]$$

जहाँ h दो क्रमागत कोटियों के बीच की दूरी है तथा $h = \frac{b-a}{n}$

(ii) समलंबी नियम की सहायता से सन्निकट समाकलन : समलंबी नियम का प्रयोग सन्निकट समाकलन से भी किया जाता है। इसे निम्न रूप में व्यक्त करते है—

$$\int_a^b y\,dx = \frac{h}{2}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})]$$

जहाँ $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ क्रमशः $x = a, a + h, a + 2h, \ldots, a + nh$ के संगत कोटियाँ है तथा $h = \frac{b-a}{n}$ = दो क्रमागत कोटियों के बीच की दूरी तथा n = बराबर भागों की संख्या।

नोट :

- (i) समलंबी नियम में n का मान सम या विषम कोई भी धनात्मक पूर्णांक हो सकता है।
- (ii) सन्निकट समाकलन के लिए सारणी बनाने के लिए [1 (b)] की विधि का प्रयोग होता है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. (a) अंतराल (1, 2) को चार बराबर भागों में बाँटते हुए, सिम्पसन के नियम का प्रयोग कर $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ का मान ज्ञात करें।

(b) इस प्रश्न की सहायता से log 2 के मान की गणना करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 1994, 2004, 07, 08, 10]

हल : (a) सिम्पसन नियम से $\int_a^b y\, dx = \int \frac{h}{3}[(F + L) + 2O + 4E]$ ...(1)

यहाँ $y = \frac{1}{x}$, $a = 1, b = 2$ तथा $n = 4$

$$\therefore \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

अत: परास (1, 2) को चार बराबर भाग में बाँटकर x के विभिन्न मानों के लिए y के संगत मान की गणना करने पर

	a	$a+h$	$a+2h$	$a+3h$	$a+4h$
x	1	$1 + .25 = 1.25$	$1 + 2\times 0.25 = 1.50$	$1 + 3\times 0.25 = 1.75$	$1 + 4\times 0.25 = 2$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{1.25} = 0.8$	$\frac{1}{1.50} = 0.67$	$\frac{1}{1.75} = 0.57$	$\frac{1}{2} = 0.5$
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

अब $F = y_1 = 1$ $\quad L = y_5 = 0.5$

$O = y_3 = 0.67$ $\quad E = y_2 + y_4 = 0.8 + 0.57 = 1.37$

$$\therefore \quad \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{3\times 4}[(1 + 0.5) + 2\times 0.67 + 4\times 1.37]$$

$$= \frac{1}{12}\times[1.55 + 1.34 + 5.48]$$

$$= \frac{1}{12}\times 8.32 = 0.0833\times 8.32 = 0.6932$$ उत्तर

(b) $\because \quad \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = [\log x]_1^2 = \log 2 - \log 1 = \log 2 - 0 = \log 2$

$\therefore \quad \log 2 = 0.6932$ [प्रश्न (1) से]

उदाहरण 2. निम्न तालिका से सिम्पसन नियम द्वारा $\int_{0.5}^{1.1} xy\, dx$ का मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]

x	0.5	0.8	1.1
y	0.4804	0.7262	0.9281
xy	$0.5\times 0.4804 = 0.24020$	$0.8\times 0.7262 = 0.58096$	$1.1\times 0.9281 = 1.02091$

हल : यहाँ $a = 0.5$, $b = 1.1$ तथा $n = 2$ [∵ कोटियों की संख्या तीन है]

$$\therefore \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.1-0.5}{2} = \frac{0.6}{2} = 0.3$$

अब $f(x) = xy$ के लिए

$$\therefore \quad \int_{0.5}^{1.1} xy\, dx = \frac{h}{3}[(F+L) + 2\times O + 4E]$$

$$= \frac{0.3}{3}[(0.24020 + 1.02091)] + 2\times 0 + 4\times 0.58096]$$

$$= 0.1\times [1.26111 + 2.32384]$$

$$= 0.1\times 3.58495 = 0.358495$$

उत्तर

उदाहरण 3. सिम्पसन की $\left(\frac{1}{3}\right)$ विधि से $h = 0.25$ लेते हुए $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ का मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]

हल : यहाँ $h = \frac{1}{1+x^2}$, $a = 0$, $b = 1$ तथा $h = 0.25 = \frac{1}{4}$

अतः निम्नानुसार तालिका बनाने पर

x	x_1 $a = 0$	$x_2 = a + h = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	$x_3 = a + 2h = 0 + 2\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$	$x_4 = a + 3h = 0 + 3\times\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$x_5 = a + 4h = 0 + 4\times\frac{1}{4} = 1$
$y = \frac{1}{1+x^2}$	1	$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{16}{17}$	$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5}$	$\frac{1}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{16}{25}$	$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{1}\right)^2} = \frac{1}{2}$
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

अब $\int_a^b y\, dx = \frac{h}{3}[(F+L) + 2\times O + 4E]$

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{h}{3}[(y_1 + y_5) + 2\times y_3 + 4(y_2 + y_4)]$$

$$= \frac{1}{4\times 3}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right) + 2\times\frac{4}{5} + 4\times\left(\frac{16}{17}+\frac{16}{25}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[\frac{3}{2}+\frac{8}{5}+\frac{2688}{425}\right] = \frac{1}{12}\times\frac{3}{2} + \frac{1}{12}\times\frac{8}{5} + \frac{1}{12}\times\frac{2688}{425} = \frac{1}{8}+\frac{2}{15}+\frac{672}{1275}$$

$$= 0.125 + 0.133 + 0.527 = 0.785$$

Gòej

उदाहरण 4. नीचे दी गई तालिका की सहायता से सिम्पसन के $\left(\frac{1}{3}\right)$ नियम का प्रयोग कर $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ का मान ज्ञात प्राप्त करें

$h = 0.1$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
e^{-x^2}	1	1.0101	1.0408	1.09422	1.1735	1.2840	1.4333	1.6323	1.8965	2.2479	2.7183

हल : $a = 0, b = 1, h = 0.1, y = e^{-x^2}$

सूत्र से, $\int_a^b y\, dx = \frac{h}{3}[(F + L) + 2 \times O + 4 \times E]$

$$= \frac{0.1}{3}[(1 + 2.71831) + 2(1.0408 + 1.1735 + 1.4333 + 1.8965) + 4(1.0101 + 1.0942 + 1.2840 + 1.6323 + 2.2479))]$$

$$= \frac{0.1}{3}[3.7183 + 2 \times 5.5441 + 4 \times 7.2685]$$

$$= \frac{0.1}{3}[3.7183 + 11.0882 + 29.0740]$$

$$= \frac{0.1}{3} \times 43.8805 = 1.4627$$ उत्तर

उदाहरण 5. एक नदी 80 मीटर चौड़ी है। एक किनारे से x दूरी पर गहराई y मीटरों में निम्न सारणी में दी गई है तो नदी के अनुप्रस्थ परिच्छेद का लगभग क्षेत्रफल निकालें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004, 14]**

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
y	0	4	7	9	12	15	14	8	3

हल : यहाँ $n = 8$ तथा कोटियों की संख्या 9, जो विषम है। अतः सिम्पसन नियम का प्रयोग होगा।

यहाँ $a = 0, b = 80, h =$ प्रत्येक पट्टी की चौड़ाई $= 10$ m

$F =$ प्रथम कोटि $y_1 = 0$

$L =$ अन्तिम कोटि $y_9 = 3$

विषम कोटियों का योग $O = y_3 + y_5 + y_7 = 7 + 12 + 14 = 33$

सम कोटियों का योग $E = y_2 + y_4 + y_6 + y_8 = 4 + 9 + 15 + 8 = 36$

$\therefore$ क्षेत्रफल $A = \frac{h}{3}[F + L) + 2 \times O + 4E]$ वर्ग मीटर

$= \frac{10}{3}[(0 + 3) + 2 \times 33 + 4 \times 36]$ वर्ग मीटर

$= \frac{10}{3}[3 + 66 + 144]$

$= \frac{10}{3} \times 213$ वर्ग इकाई $= 710$ वर्ग मीटर

उदाहरण 6. एक ठोस जो x-अक्ष, रेखा $x = 0$ तथा एक वक्र जो निम्न बिंदुओं से होकर जाता है, के परितः परिक्रमण करनेसे बनता है।

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y	1.0000	0.9896	0.9589	0.9089	0.8415

तो सिम्पसन के नियम से जनित ठोस का आयतन ज्ञात करें।

हल : यहाँ $a = 0, b = 1, h = 0.25$

प्रथम कोटि $y_1 = 1$ $\quad \therefore \quad {y_1}^2 = 1$

अंतिम कोटि $y_5 = 0.8145$ $\quad \therefore \quad {y_5}^2 = (0.8145)^2$

विषम कोटि $y_3 = 0.9589$ $\quad \therefore \quad {y_3}^2 = (0.9589)^2$

सम कोटि $y_2 = 0.9589$ $\quad \therefore \quad {y_2}^2 = (0.9589)^2$

$y_4 = 0.9089$ $\quad \therefore \quad {y_4}^2 = (0.9089)^2$

$\therefore \quad F = 1, \quad L = (0.8145)^2$

अब $O = y_3^2 = (0.9589)^2, \quad E = y_2^2 + y_4^2 = (0.9589)^2 + (0.9089)^2$

जनित ठोस का आयतन $= \int_0^1 \pi y^2 dx = \pi \frac{h}{3}[(F + L) + 2 \times O + 4E]$

$$= \pi \times \frac{0.25}{3}[\{1 + 10.8145)^2\} + 2 \times (0.9589)^2 + 4 \times \{0.9896)^2 + (0.9089)^2\}]$$

$$= \frac{0.25\pi}{3}[(1 + 0.6634) + 2 \times .9195 + 4 \times (.9783 + .8261)]$$

$= .2619\ [1.6634 + 1.8390 + 4 \times 1.8054]$ घन इकाई

$= .2619\ [1.6634 + 1.8390 + 7.2216]$ घन इकाई

$= .2619 \times 10.7240$ घन इकाई

$= 2.80861$ घन इकाई **उत्तर**

नोट :

- आयतनों के सूत्र में y^2 आया है अतः कोटियों का वर्ग लिया गया है।

उदाहरण 7. एक मोटर साइकिल का वेग (किमी०/मिनट), जो कि विरामावस्था से चले निश्चित समयांतरालों में t मिनट पर निम्नवत् है :

t	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v	10	18	25	29	32	20	11	5	2	0

सिम्पसन के नियम से 20 मिनट में चली गई दूरी ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]**

हल : मोटर साइकिल विरामवस्था से चलना प्रारंभ करती है, अतः यदि $t = 0$ तो $v = 0$

$\therefore$ कोटियों की सं० $= 11, \quad a = 0, \quad b = 20$

अतः $n = 10 \quad \therefore \quad h = \frac{b - a}{n} = \frac{20 - 0}{10} = 2$

पुनः $\frac{ds}{dt} = v$ या $ds = v\, dt \therefore \int ds = \int v\, dt \Rightarrow S = \int v\, dt$

अतः t तथा v में तालिका बनेगी

अतः

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
v	0	10	18	25	29	32	20	11	5	2	0
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}

अब, $F = v_1 = 0 \quad L = v_{11} = 0$

$O = v_3 + v_5 + v_7 + v_9 = 18 + 29 + 20 + 5 = 72$

$E = v_2 + v_4 + v_6 + v_8 + v_{10} = 10 + 25 + 32 + 11 + 2 = 80$

अतः सिम्पसन नियम से, $S = \int_0^{20} v\, dt = \frac{h}{3}[F + L + 2 \times O + 4E]$ किमी

$= \frac{2}{3}[0 + 0 + 2 \times 72 + 4 \times 80]$ किमी $= \frac{2}{3}[144 + 320]$ किमी

$= \frac{2}{3} \times 464$ किमी $= \frac{928}{3} = 309.3$ किमी उत्तर

उदाहरण 8. किसी बिन्दु A से s दूरी पर एक कण के वेग v निम्न सारणी में दिए गए हैं। 60 मीटर चलने में लगा समय ज्ञात करें।

s (m)	0	10	20	30	40	50	60
v (m/s)	47	58	64	65	61	52	38

हल : यहाँ $a = 0, b = 60, h = 10, n = 7$

हम जानते हैं $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow dt = \frac{ds}{v} \Rightarrow \int dt = \int \frac{ds}{v} \Rightarrow t = \int \frac{1}{v} ds \quad \therefore \quad t = \int_0^{60} \frac{1}{v} ds$

$\therefore$ हमें s तथा $\frac{1}{v}$ के बीच तालिका बनानी होगी।

अतः

s	0	10	20	30	40	50	60
v	47	58	64	65	61	52	38
$\frac{1}{v}$	$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{65}$	$\frac{1}{61}$	$\frac{1}{52}$	$\frac{1}{38}$
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7

अब $F =$ प्रथम कोटि $v_1 = \frac{1}{47}$; $L =$ अंतिम कोटि $v_7 = \frac{1}{38}$; $O = v_3 + v_5 = \frac{1}{64} + \frac{1}{61}$

$E = v_2 + v_4 + v_6 = \frac{1}{58} + \frac{1}{65} + \frac{1}{52}$

अतः सिम्पसन नियम से $t = \int_0^{60} \frac{1}{v} ds = \frac{h}{3}[(F + L) + 2 \times O + 4 \times E]$

$= \frac{10}{3}\left[\left(\frac{1}{47} + \frac{1}{38}\right) + 2 \times \left(\frac{1}{64} + \frac{1}{61}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{58} + \frac{1}{65} + \frac{1}{52}\right)\right]$

$= \frac{10}{3}[(0.0213 + 0.0263) + 2(0.0156 + 0.0164) + 4(0.0172 + 0.0154 + 0.0192]$

$= \frac{10}{3}[0.0476 + 0.0640 + 0.2072] = \frac{10}{3} \times 0.3188 = 1.06$ सेकण्ड

उदाहरण 9. यदि $e^0 = 1, e^1 = 2.72, e^2 = 7.39, e^3 = 20.09, e^4 = 54.60$ तो $\int_0^4 e^x dx$ का सन्निकट मान सिम्पसन नियम द्वारा निकालें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2012]

हल : दिया गया है : $y = e^x$ तथा $a = 0$, $b = 4$

यदि $x = 4$ हो तो $h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$

अब $h = 1$ लेकर x के मानों के संगत $y = e^x$ की तालिका

x	0	1	2	3	4
$y = e^x$	1	2.72	7.39	20.09	54.60
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

सिम्पसन नियम से $\int_0^4 e^x dx = \frac{h}{3}[(y_1 + y_5) + 4 \times (y_2 + y_4) + 2 \times y_3]$

$$= \frac{1}{3}[(1 + 54.60) + 4(2.72 + 20.09) + 2 \times 7.39]$$

$$= \frac{1}{3}[55.60 + 4 \times 22.81 + 14.78]$$

$$= \frac{1}{3}[55.60 + 91.24 + 14.78]$$

$$= \frac{1}{3}[161.62] = \frac{1}{3} \times 161.62 = 53.873$$

उत्तर

उदाहरण 10. सिम्पसन के नियम को प्रयोग कर $\int_1^5 \sqrt{x - \frac{1}{x}}\, dx$ का मान 5 कोटियाँ लेकर ज्ञात करो।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2013, 16]

हल : प्रश्न से कोटियों की संख्या = 5

अत: बराबर भागों की संख्या $n = 4$

तथा $a = 1,\ b = 5$ $\therefore\ h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

अत: $x = 1, 2, 3, 4, 5$ लेकर $y = \int_1^5 \sqrt{x - \frac{1}{x}}$ के मान के लिए सारणी

x	$x_1 = a$	$x_2 = a + h = 2$	$x_3 = a + 2h = 3$	$x_4 = a + 3h = 4$	$x_5 = a + 4h = 5$
$y = \sqrt{x - \frac{1}{x}}$	$\sqrt{1 - \frac{1}{1}} = 0$	$\sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1.22$	$\sqrt{3 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = 1.63$	$\sqrt{4 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{15}{4}} = 1.93$	$\sqrt{5 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{24}{5}} = 2.19$
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

सिम्पसन नियम से

$\therefore\ \int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{3}\{(F + L) + 2 \times O + 4 \times E\}$

$$= \frac{h}{3}\{(y_1 + y_5) + 2y_3 + 4 \times (y_2 + y_4)\}$$

$$= \frac{1}{3}\{(0 + 2.19) + 2 \times 1.63 + 4\,(1.22 + 1.93)\}$$

$$= \frac{1}{3}\{2.19 + 3.26 + 12.60\}$$

$$= \frac{1}{3} \times 18.05 = 6.016$$

उत्तर

उदाहरण 11. $\int_1^5 \frac{dx}{1+x}$ का मान समलंबी नियम से निकालें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2011, 14(O)]

हल : समलंबी नियम से $\int_a^b y\, dx = \frac{h}{2}[(y_1 + y_n) + 2(y_2 + y_3 + y_4 + \ldots + y_{n-1})]$

यहाँ $a = 1, b = 5, y = \frac{1}{1+x}$, माना $n = 4$ तो $\quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

अब $h = 1$ लेकर x के विभिन्न मानों के लिए $y = \frac{1}{1+x}$ के लिए सारणी निम्नवत् है :

x	$x_1 = a$ $= 1$	$x_2 = a + h$ $= 2$	$x_3 = a + 2h$ $= 3$	$x_4 = a + 3h$ $= 4$	$x_5 = a + 4h$ $= 5$
$y = \frac{1}{1+x}$	$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$	$\frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

अब सूत्र से $\int_1^5 \frac{dx}{1+x} = \frac{h}{2}[(y_1 + y_5) + 2(y_2 + y_3 + y_4)]$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{6} + 2\left(\frac{20 + 15 + 12}{60}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} + 2 \times \frac{47}{60}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} + \frac{47}{30}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[\frac{20 + 47}{30}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{67}{30} = \frac{67}{60} = 1.116$$

उदाहरण 12. दी गई सारणी की सहायता से x-अक्ष, वक्र समलंबी नियम से $y = f(x)$ तथा $x = 7.47$ एवं $x = 7.52$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालिए।

x	7.47	7.48	7.49	7.50	7.51	7.52
$f(x)$	1.93	1.95	1.98	2.01	2.03	2.06
	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

हल : यहाँ $h = 7.48 - 7.47 = 0.01$

अतः क्षेत्रफल $= \int_{7.47}^{7.52} f(x)\, dx = \frac{h}{2}[(y_0 + y_5) + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)]$

$$= \frac{0.01}{2}[(1.93 + 2.06) + 2(1.95 + 1.98 + 2.01 + 2.03)]$$

$$= 0.005[3.93 + 2 \times (6.97)] = 0.005[3.99 + 15.94]$$

$$= 0.005 \times 19.93 = 0.09965 \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 13. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ का मान सिम्पसन के $\left(\frac{3}{8}\right)$ नियम (द्वितीय नियम) से निकालें तथा इसकी सहायता से π के लगभग मान बतायें।

हल : यहाँ $a = 0, b = 1, n = 3, h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3}$ सारणी रूप में फलन का मान लेने पर

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
$y = \frac{1}{1+x^2}$	1	$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{9}{10}$	$\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{9}{13}$	$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
	y_0	y_1	y_2	y_3

सिम्पसन के $\left(\frac{3}{8}\right)$ नियम से

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{3}{8} h [(y_0 + y_3) + 3(y_1 + y_2)]$$

$$= \frac{3}{8} \times \frac{1}{3} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{3}{2} + 3 \times \frac{207}{130}\right] = \frac{1}{7}[1.5 + 3 \times 1.5923]$$

$$= \frac{1}{8} \times 6.2769 = 0.7846$$

पुन: $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} d = [\tan^{-1} x]_0^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$

अत: (1) तथा (2) से $\frac{\pi}{4} = 0.7846 \quad \therefore \pi = 4 \times 0.7846 = 3.1384$

महत्वपूर्ण सूत्र

1. सिम्पसन का $\left(\frac{1}{3}\right)$ नियम (Simpson's Third Rule) या सिम्पसन नियम या सिम्पसन का प्रथम नियम

(i) सन्निकट समाकलन $\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{3}[(F + L) + 2 \times O + 4E]$

$$= \frac{h}{3}[(y_1 + y_{n+1}) + 2(y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}) + 4(y_2 + y_4 + \ldots + y_n)$$

जहाँ $h = \frac{b-a}{n}$, जहाँ n = बराबर भागों की संख्या

(ii) सिम्पसन सूत्र से क्षेत्रफल $A = \frac{h}{3}[(F + L) + 2 \times O + 4E]$ वर्ग इकाई

जहाँ h = दो कोटियों के बीच की उभयनिष्ठ दूरी

F = प्रथम कोटि (First ordinate)

L = अंतिम कोटि (Last ordinate)
O = शेष विषम कोटियों की लंबाइयों का योग (Sum of remaining odd ordinates)
E = सम कोटियों की लंबाइयों का योग (Sum of even ordinates)

2. सिम्पसन का द्वितीय नियम या $\left(\frac{3}{8}\right)$ नियम

$$\int_a^b y\,dx = \frac{3}{8}h\,[(y_0 + y_n) + 3\,(y_1 + y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-1}) + 2\,(y_3 + y_6 + \ldots + y_{n-3})]$$

जहाँ $h = \frac{b-a}{n}$ = दो क्रमागत कोटियों के बीच की दूरी तथा n तीन का गुणज है तथा $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ क्रमशः $x = a, a+h, \ldots, b$ पर कोटियाँ हैं।

3. सिम्पसन का समलंबी नियम (Trapezoidal Rule) : यदि दिया गया क्षेत्र n बराबर भागों में बँटा हो, तो

(i) सन्निकट समाकलन से $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1})]$,

जहाँ $h = \frac{b-a}{n}$, तथा n = बराबर भागों की संख्या है।

(ii) क्षेत्रफल $A = \frac{h}{2}[y_0 + y_n + 2\,(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}]$ वर्ग इकाई,

जहाँ h = दो क्रमागत कोटियों के बीच की दूरी तथा $y_0, y_1, \ldots y_n$; $x = a, a+h, \ldots b$ पर कोटियाँ हैं।

प्रश्नावली 9.1

1. सिम्पसन के एक-तिहाई नियम से एक मैदान का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके आकार के बारे में निम्नलिखित बातें मालूम हैं : कोटियाँ 2, 9, 18, 40, 70 मीटर तथा उभयनिष्ठ दूरी = 30 मीटर। **[उ० प्र० डिप्लोमा 1985]**

2. सिम्पसन के नियम का प्रयोग कर नीचे दी गई विमाओं से जमीन के एक खेत का क्षेत्रफल ज्ञात करें :
कोटियाँ : 23, 19, 14, 11, 12.5, 16, 19, 20, 20
उभयनिष्ठ दूरी = 1.5
[उ० प्र० डिप्लोमा 1984]

3. सिम्पसन नियम से $\int_0^6 y\,dx$ का मान निम्न तालिका से निकालें :

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0.14	0.16	0.18	0.19	0.20	0.22	0.23

[उ० प्र० डिप्लोमा 1996]

4. सिम्पसन के $\left(\frac{1}{3}\right)$ सूत्र से $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$ का दशमलव के तीन सार्थक अंकों तक मान निकालें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2002, 17(S)]

5. (i) अन्तराल $x = 1$ से $x = 5$ को चार बराबर भागों में बाँटकर सिम्पसन के नियम द्वारा $\int_1^5 \frac{dx}{1+x}$ का मूल्य ज्ञात करें।
[उ० प्र० डिप्लोमा 1997]

(ii) सिम्पसन के नियम से $\int_2^{10} \frac{dx}{1+x^2}$ का मान ज्ञात करें।

6. किसी बिन्दु O से S दूरी पर एक काण के वेग V निम्न तालिका में दिए गए हैं। 60 मीटर चलाने में लगा समय ज्ञात करें।

S मीटर में	0	10	20	30	40	50	60
V मीटर/सेकण्ड	47	58	64	65	61	52	38

7. सिम्पसन नियम के द्वारा $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ का मान 0 से 1 को 4 समदूरस्थ अंतराल में बाँटकर निकालें। इस तरह π का मान शुद्ध 4 दशमलव स्थान तक निकालें।

8. अंतराल 0 से 1 को चार बराबर भागों में बाँटकर $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\, dx$ का मान निकालें तथा इस तरह $\log_e 2$ का मान निकालें।

9. समलंबी नियम के प्रयोग से $n = 6$ के लिए $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\, dx$ का सन्निकट मान ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]**

10. समलंबी नियम द्वारा निम्न सीमाओं के भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात करें :
    कोटियाँ : 2, 2.4, 2.7, 2.8, 3, 2.6 तथा 2.1 मात्रक, कोटियों के बीच की दूरी = 5 मात्रक।

11. सिम्पसन के नियम को प्रयोग कर $\int_1^5 \sqrt{x - \frac{1}{x}}\, dx$ का मान 5 कोटियाँ लेकर ज्ञात करें।
    [उ० प्र० डिप्लोमा 2013, 16]

12. (i) $\int_1^5 \frac{dx}{1+x}$ का मान समलंबी नियम से निकालें।
    [उ० प्र० डिप्लोमा 2011, 14 (O), 15, 16 Spl. (Back)]

    (ii) $\frac{dx}{1+x}$ का मान समलंबी नियम से निकालें।
    [उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]

13. एक नदी 80 मीटर चौड़ी है। गहराई y एक किनारे से x दूरी पर मीटरों में निम्न सारणी में दी गई है तो नदी के अनुप्रस्त परिच्छेद का लगभग क्षेत्रफल निकालें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2004, 14]**

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
y	0	4	7	9	12	15	14	8	3

14. $\int_0^6 \frac{1}{1+x^2}$ का मान सिम्पसन के $\left(\frac{3}{8}\right)$ नियम से अंतराल को 6 बराबर भागों में बाँटकर निकालें। इसकी सहायता से π का लगभग मान ज्ञात करें।

15. $\int_0^6 \frac{1}{1+x^2}$ का मान सिम्पसन के द्वितीय नियम से निकलें।
    [उ० प्र० डिप्लोमा 2017(O)]

16. निम्न तालिका की सहायता से वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा $x = 0$ और $x = 6$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0.148	0.161	0.176	0.190	0.204	0.217	0.230

17. सही उत्तर पर (✓) का चिन्ह लगायें—

    (i) समलंबी नियम है—

    (a) $\frac{h}{2}[y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_n]$ (b) $\frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_{n-1}) + y_n]$

    (c) $\frac{h}{2}[(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-1}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots)]$

(d) कोई नहीं

(ii) सिम्पसन नियम है—

(a) $\frac{h}{3}(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n+1})$

(b) $\frac{h}{3}[(y_1 + y_{n+1}) + 2(y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}) + 4(y_2 + y_4 + \ldots + y_n)]$

(c) $\frac{h}{3}[y_1 + 2(y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}) + 4(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n+1})]$

(d) कोई नहीं

(iii) सिम्पसन नियम से $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$ का मान जबकि $h = \frac{1}{2}$

(a) log 2 (b) 2 (c) $\frac{7}{10}$ (d) $\frac{1}{5}$

(iv) यदि $f(0) = 1, f(1) = 2.72$ तो समलंबी नियम से $\int_0^1 f(x)\, dx$ का मान है—

(a) 3.72 (b) 1.86 (c) 1.72 (d) 0.86

(v) सिम्पसन $\frac{1}{3}$ नियम $\int_a^b f(x)\, dx$ का मान ज्ञात करने के लिए अंतराल $[a, b]$ को बाँटा जाता है—

(a) समान चौड़ाई के सम भागों में (b) समान चौड़ाई के विषम भागों में

(c) भागों की संख्या कुछ भी हो सकती है (d) कोई नहीं

(vi) यदि $e = 2.72, e^2 = 7.34, e^3 = 20.09, e^4 = 54.60$ तो $\int_0^4 e^x\, dx$ का सिम्पसन नियम से मान होगा—

(a) 53.60 (b) 53.70 (c) 53.873 (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. 3040 वर्ग मीटर **2.** 199 वर्ग इकाई **3.** 1.13 **4.** 0.693

5. (i) 1.093 (ii) 1.2926 **6.** 1.06 सेकण्ड

7. 0.7854, $\pi = 3.1416$ **8.** 0.69, $\log_e 2 = 0.69$

9. 0.6933 **10.** 77.75 वर्ग मात्रक **11.** 6.01 **12.** 1.116 (ii) 1.866

13. 710 वर्ग मीटर **14.** 0.785395, 3.14158 **15.** 1.3571

16. 1.1362

17. (i) (b) (ii) (b) (iii) (c) (iv) (b) (v) (a) (vi) (c)

□□□

बीजीय समीकरणों का हल : आंकिक विधियाँ

CHAPTER 10

(Solution of Algebraic Equations : Numerical Methods)

10.1 परिभाषा (Definition)

बहुपदीय फलन (Polynomial functions) : फलन $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, जहाँ $a_0 \neq 0$, n कोई पूर्णांक है तथा $a_0, a_1, \ldots, a_n$ अचर है, चर x का n घात का **बहुपदीय फलन** कहलाता है।

बहुपदीय फलन का शून्य (Zero of a polynomial function) : यदि $P_n(x)$ बहुपदीय फलन हो तो $P_n(x) = 0$, बहुपदीय समीकरण कहलाता है तथा यदि α कोई वास्तविक संख्या हो तथा $P_n(\alpha) = 0$ तो α को **$P_n(x)$ का शून्य अथवा बहुपदीय समीकरण $P_n(x) = 0$ का मूल कहा जाता है।**

नोट :

- (i) किसी बहुपद $P_n(x)$ का शून्य वह मान है, जहाँ इसका लेखाचित्र x-अक्ष को काटता है।
- (ii) n घात के बहुपद के शून्यों की संख्या n होती है।

10.1.1 मूलों का अंतराल निर्धारण :

यदि $f(x)$ अंतराल (a, b) में एक वास्तविक एवं सतत फलन हो, तो तथा $f(a) \cdot f(b) < 0$ समीकरण $f(x) = 0$ का कम-से-कम एक मूल a तथा b के बीच होगा।

10.2 समीकरणों के मूल प्राप्ति की विधियाँ (Method of finding roots of a equations)

बीजीय व अबीजीय समीकरणों के मूल प्राप्त करने की अनेक विधियाँ है। हम निम्न विधियों के बारें में अध्ययन करेंगे।

(A) समद्विभाजन विधि (Bisection Method)

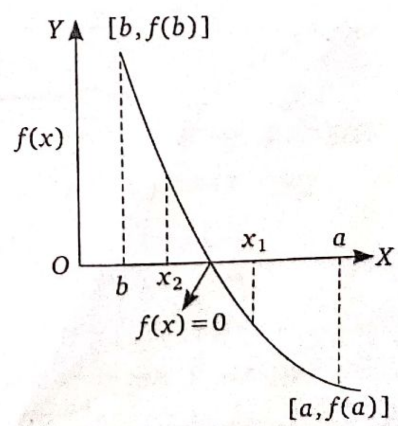
(B) रेगुला फाल्सी विधि (Regula Falsi or False Position Method)

(C) न्यूटन रैपसन विधि (Newton Raphson Method)

(D) गौस विलोपन विधि (Gauss Elimination Method)

10.2.1 समद्विभाजन विधि (या बोलजानो विधि या अर्द्ध अंतराल विधि) (Bisection Method or Bolzano or Interval halving Method)

यह समीकरणों का मूल प्राप्त करने की वह विधि है जिसमें एक अंतराल को बार-बार समद्विभाजित कर वास्तविक मूल के लिए एक उपअंतराल का निर्धारण किया जाता है, जिसमें मूल स्थित होता है।



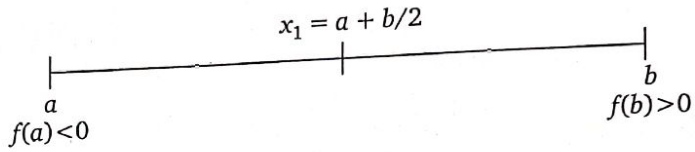
कार्यविधि : माना $f(x)$ एक वास्तविक व सतत फलन है, तथा $f(a) \cdot f(b) < 0$

Step I. दिए गए समीकरण को $f(x) = 0$ के रूप में लिखें।

Step II. दो वास्तविक संख्या a तथा b इस प्रकार प्राप्त कर $f(a) < 0$ और $f(b) > 0$ i.e., $f(a) \cdot f(b) < 0$

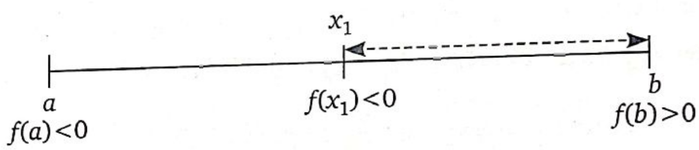
Step III. अंतराल (a, b) की समद्विभाजित करें मध्य बिन्दु x_1 प्राप्त करें जो मूल का प्रथम लगभग मान होगा।

अतः मूल का प्रथम लगभग मान $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ प्राप्त करें।



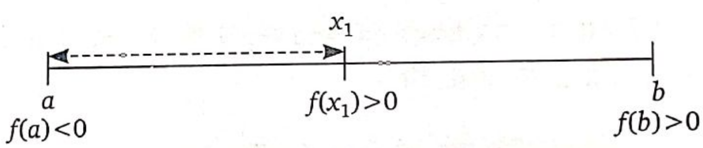
Step IV. $f(x_1)$ का मान ज्ञात कर इसका चिन्ह ज्ञात करें।

(a) यदि $f(x_1) < 0$ तो मूल x_1 तथा b के बीच होगा तथा मूल का द्वितीय लगभग मान $x_2 = \dfrac{x_1 + b}{2}$ होगा।



पुनः $f(x_2)$ ज्ञात करें।

(b) यदि $f(x_1) > 0$ तो मूल a तथा x_1 के बीच होगा तथा द्वितीय लगभग मान $x_2 = \dfrac{x_1 + a}{2}$ होगा।



पुनः $f(x_2)$ प्राप्त करें और इसका चिन्ह ज्ञात करें।

इस तरह प्रक्रिया को मूल शून्य के करीब होने तक या अपेक्षित लगभग शुद्धता का मूल (approximate accuracy) प्राप्त होने तक दुहराया जाता है।

नोट :

- यदि $f(a)\, f(x_r) = 0, 1, 2 \ldots$ तो x_r समीकरण $f(x) = 0$ का मूल होगा।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. समीकरण $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$ के मूल का तृतीय लगभग मान समद्विभाजन (बाईसेक्सन) विधि ज्ञात करें।

हल : माना $f(x) = x^3 - x - 1$

$\therefore \quad f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0$ ...(1)

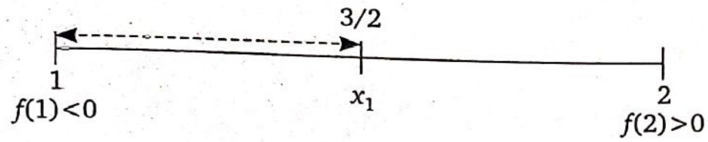
$f(2) = 8 - 2 - 1 = 5 > 0$

$\therefore \quad f(1) \cdot f(2) < 0$

अतः मूल 1 तथा 2 के बीच होगा।

अतः मूल का प्रथम लगभग मान $x_1 = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2}$ [यहाँ $a = 1, b = 2$]

मूल का द्वितीय लगभग मान (Second Approximation) :



पुनः $f(x_1) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{3}{2} - 1 = \frac{27}{8} - \frac{3}{2} - 1$ [(1) में $x = 3/2$ रखने पर]

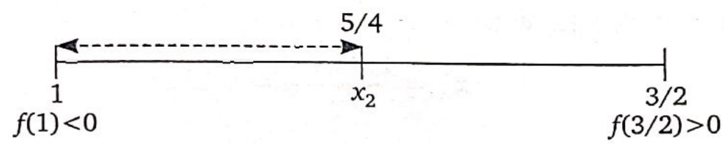
$$= \frac{7}{8} > 0$$

तथा $f(1) = -1 < 0$ ...(2) [(1) तथा (2) से]

अतः मूल 1 तथा $\frac{3}{2}$ के बीच होगा। [$\because f(1) . f(3/2) < 0$]

तथा मूल का द्वितीय लगभग मान $x_2 = \dfrac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4} > 0$ ...(3)

मूल का तृतीय लगभग मान (Third Approximation) :



पुनः $f(x_2) = f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^3 - \frac{5}{4} - 1 = -\frac{19}{64} < 0$

$f(x_1) = f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$ [(2) से]

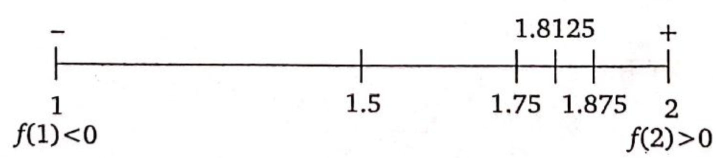
अतः मूल $\frac{5}{4}$ तथा $\frac{3}{2}$ के बीच होगा। [$\because f(5/4) . f(3/2) < 0$]

अतः तृतीय लगभग मान

$$\therefore \quad x_3 = \frac{\frac{5}{4}+\frac{3}{2}}{2} = \frac{1.25+1.5}{2} = 1.375$$

उदाहरण 2. समविभाजन विधि का तीन बार प्रयोग कर समीकरण $x^3 - x - 4 = 0$ का वह मूल ज्ञात करें जो 1 तथा 2 के बीच स्थित है।

हल : माना $f(x) = x^3 - x - 4 = 0$



$$f(0) = 0 - 0 - 4 = -4$$

अब $f(1) = 1^3 - 1 - 4 = -4 < 0$

$f(2) = 2^3 - 2 - 4 = 2 > 0$ ...(1)

$\therefore$ $f(1) . f(2) < 0$ अतः मूल 1 तथा 2 के बीच होगा।

मूल का प्रथम लगभग मान (First Approximation) :

$$x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$\therefore \quad f(x_1) = f(1.5) = (1.5)^3 - 1.5 - 4 = -2.125$ ...(2)

मूल का द्वितीय लगभग मान (Second Approximation) :

(1) तथा (2) से

$$f(1.5) < 0 \text{ तथा } f(2) > 0$$

अत: मूल 1.5 तथा 2 के बीच होगा।

अत: $x_2 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$

पुन: $f(x_2) = f(1.75) = (1.75)^3 - 1.75 - 4 = -0.3906$ ...(3)

तृतीय लगभग मान (Third Approximation) :

अत: (1) तथा (3) से

$$f(1.75) \,.\, f(2) < 0$$

अत: मूल 1.75 तथा 2 के बीच होगा

$$x_3 = \frac{1.75+2}{2} = 1.875$$

पुन: $f(x_3) = f(1.875) = (1.875) - 1.875 - 4 = 0.7167 > 0$

किन्तु (3) से $f(1.75) < 0$

अत: मूल 1.75 तथा 1.875 के बीच होगा।

अत: मूल का अगला लगभग मान $\frac{1.75+1.875}{2} = 1.8125$

उदाहरण 3. बोलजानो विधि का तीन बार प्रयोग कर समीकरण $x^4 - x^3 - 6x - 4 = 0$ के मूल का लगभग मान 2 तथा 3 के बीच ज्ञात करें।

हल : माना दिया गया फलन $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 - 6x - 4$ ...(1)

अब $f(2) - 2^4 - 2^3 - 2 \times 2^2 - 6 \times 2 - 4 = 16 - 8 - 8 - 12 - 4 = -16$ ...(2)

$f(3) = 3^4 - 3^3 - 2 \times 3^2 - 6 \times - 4 = 81 - 27 - 18 - 18 - 4 = 14$ ...(3)

$\therefore \quad f(2) . f(3) < 0$

अत: मूल 2 तथा 3 के बीच होगा।

अत: $a = 2, b = 3$

मूल का प्रथम लगभग मान :

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

पुन: (1) से $f(x) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^4 - \left(\frac{5}{2}\right)^3 - 2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6 \times \frac{5}{2} - 4$

$$= \frac{625}{} - \frac{125}{} - \frac{25}{} - 15 - 4$$

$$= \frac{625 - 250 - 200 - 304}{16}$$

$$\frac{625 - 754}{16} = -\frac{129}{16} = -8.0625 < 0 \quad ...(4)$$

मूल का द्वितीय लगभग मान :

(3) से तथा (4) से

$$f(3) > 0, f\left(\frac{5}{2}\right) < 0 \quad \Rightarrow f\left(\frac{5}{2}\right) . f(3) < 0$$

अत मूल $\frac{5}{2}$ तथा 3 के बीच होगा।

अतः यहाँ $a = \frac{5}{2}, b = 3$

$\therefore$ द्वितीय लगभग मान $x_2 = \frac{\frac{5}{2} + 3}{2} = \frac{11}{4} = 2.75$

मूल का तृतीय लगभग मान :

पुनः $f(x_2) = f\left(\frac{11}{4}\right) = \left(\frac{11}{4}\right)^4 - \left(\frac{11}{4}\right)^3 - 2 \times \left(\frac{11}{4}\right)^2 - 6 \times \frac{11}{4} - 4 = 0.77 > 0$

अत; (4) तथा (5) से

$$f\left(\frac{5}{2}\right) f\left(\frac{11}{4}\right) < 0$$

अतः मूल $\frac{5}{2}$ तथा $\frac{11}{4}$ के बीच होगा।

$\therefore$
$$a = \frac{5}{2}, b = \frac{11}{4}$$

अतः तृतीय लगभग मान

$$x_3 = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{11}{4}}{2}$$

$$= \frac{21}{8} = 2.63$$

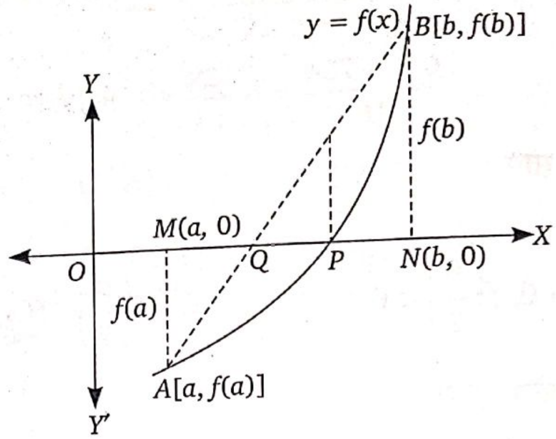
10.2.2 रेगुला फाल्सी (Regula Falsi or False Position Method)

यदि $f(x)$ वास्तविक एवं सतत फलन हो तो तथा $f(a) < 0$ तथा $f(b) > 0$ *i.e.*, $f(a) . f(b) < 0$ तो a तथा b के बीच $f(x) = 0$ का कम से कम एक मूल होगा।

तथा उसका **प्रथम लगभग मान (1st approx. root/1st iteration)** x_1 निम्न सूत्र से दिया जाता है

$$x_1 = \frac{af(b) - b(a)}{f(b) - f(a)}$$

लेखाचित्र निरूपण :



कार्यविधि : यदि $f(x)$ एक वास्तविक एवं सतत फलन हो, तो इस विधि से समीकरण $f(x) = 0$ का मूल ज्ञात करने के लिए :

Step I. समीकरण के $f(x) = 0$ रूप लिखें।

Step II. दो संख्यायें a तथा b का चुनाव इस प्रकार करें कि $f(a) . f(b) < 0$ जो यह बताता है मूल a तथा b के बीच है।

Step III. मूल का प्रथम लगभग मान (1st approximate root)

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \text{ जहाँ } f(a) < 0, f(b) > 0 \quad ...(1)$$

$f(x_1)$ का मान प्राप्त करें।

Step IV. यदि $f(x_1) < 0$ तो मूल के द्वितीय लगभग मान x_2 के लिए समीकरण (1) में $a = x_1$ रखें

i.e., $$x_2 = \frac{x_1 f(b) - bf(x_1)}{f(b) - f(x_1)}$$

यदि $f(x_1) > 0$ तो मूल के द्वितीय लगभग मान x_2 के मान के लिए समीकरण $b = x_1$ रखें

i.e., $$x_2 = \frac{af(x_1) - x_1 f(a)}{f(x_1) - f(a)}$$

Step V. प्रक्रिया को अभीष्ट शुद्धता का मान प्राप्त होने तक दुहरायें।

नोट :

- Step II में $f(a) > 0$ तथा $f(b) < 0$ भी संभव है।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. समीकरण $x^3 + x - 1 = 0$ का रेगुला फाल्सी विधि (Regula Falsi Method) का दो बार प्रयोग कर $x = 1$ के करीब मूल प्राप्त करें।

हल : माना $f(x) = x^3 + x - 1$

$$f(1) = 1^3 + 1 - 1 = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1 + 4 - 8}{8} = -\frac{3}{8}$$

$\because$ $f(1)$ तथा $f\left(\frac{1}{2}\right)$ परस्पर विपरीत चिन्ह के हैं अतः मूल $\frac{1}{2}$ तथा 1 के बीच होगा।

$\therefore$ मूल का प्रथम लगभग मान $x_1 = \dfrac{\frac{1}{2}f(1) - 1\,f\left(\frac{1}{2}\right)}{f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{1}{2}\times 1 - 1\times\left(-\frac{3}{8}\right)}{1+\frac{3}{8}}$ $\left[a = \frac{1}{2}, b = 1\right]$

$$= \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}}{\frac{11}{8}} = \dfrac{\frac{7}{8}}{\frac{11}{8}} = \frac{7}{11}$$

पुनः $f(x_1) = f\left(\frac{7}{11}\right) = \left(\frac{7}{11}\right)^3 + \frac{7}{11} - 1 = \frac{343}{1331} + \frac{7}{11} - 1$

$$= \frac{343 + 847 - 1331}{1331}$$

$$= \frac{1190 - 1331}{1331} = -\frac{141}{1331} < 0$$

$\because$ $f\left(\frac{7}{11}\right) . f(1) < 0$ अतः मूल $\frac{7}{11}$ तथा 1 के बीच होगा।

$\therefore$ मूल का द्वितीय लगभग मान $x_3 = \dfrac{\frac{7}{11}f(1) - 1f\left(\frac{7}{11}\right)}{f(1) - f\left(\frac{7}{11}\right)} = \dfrac{\frac{7}{11}\times 1 - 1\times\left(-\frac{141}{1331}\right)}{1+\frac{141}{1331}}$ $\left[a = \frac{7}{11}, b = 1\right]$

$$= \dfrac{\frac{7}{11}+\frac{141}{1331}}{\frac{1331+141}{1331}} = \frac{897+131}{1472}$$

$$= \frac{988}{1472} = 0.6797$$

उदाहरण 2. रेगुला फाल्सी विधि (Regula Falsi Method) से समीकरण $x^3 - 4x + 1 = 0$ का धनात्मक मूल प्राप्त करें। ...(1)

हल : माना $f(x) = x^3 - 4x + 1$

अब $f(0) = 0 - 4\times 0 + 1 = 1$

$f(1) = 1 - 4 + 1 = -2$

अतः $f(x) = 0$ का मूल 0 तथा 1 के बीच होगा।

सूत्र से मूल का प्रथम लगभग मान $x_1 = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$

$$= \frac{0f(1) - 1f(0)}{f(1) - f(0)} \quad [\because\ a = 0, b = 1]$$

$$= \frac{1\times 1}{-2-1} = -\frac{1}{3}$$

अब (1) से $f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{4}\right) + 1 = \frac{1}{27} - \frac{4}{3} + 1 = -\frac{8}{27} < 0$

$f\left(\frac{1}{3}\right)$ तथा $f(0)$ विपरीत चिन्ह के है अतः मूल $\frac{1}{3}$ तथा शून्य के बीच है।

अतः मूल का द्वितीय लगभग मान $x_2 = \dfrac{\frac{1}{3}f(0) - 0f\left(\frac{1}{3}\right)}{f(0) - f(1)}$ [$a = 1/3, b = 0$ लेने पर]

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1 - 0}{1 - \left(-\frac{8}{27}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{35}{27}} = \frac{9}{35}$$

पुनः $f(x_2) = f\left(\frac{9}{35}\right) = \left(\frac{9}{35}\right)^3 - 4\times\frac{9}{35} + 1 = \frac{729}{42875} - \frac{36}{35} + 1$

$$= -\frac{496}{42875} < 0$$

अतः $f\left(\frac{9}{35}\right)$ तथा $f(0)$ विपरीत चिन्ह के है।

$\therefore$ मूल का तृतीय लगभग मान $x_3 = \dfrac{\frac{9}{35}f(0) - 0f\left(\frac{9}{35}\right)}{f(0) - f\left(\frac{9}{35}\right)}$ $\left[\text{यहाँ } a = \frac{9}{35}, b = 0\right]$

$$= \frac{\frac{9}{35}\times 1 - 0}{1 - \left(-\frac{496}{42875}\right)} = \frac{\frac{9}{35}}{\frac{42875 + 496}{42875}} = \frac{9}{35}\times\frac{42875}{43371} = \frac{1225}{4819}$$

किन्तु $x_2 = \frac{9}{35} = 0.2571$ तथा $x_3 = \frac{1225}{4819} = 0.25422$ अतः x_2 तथा x_3 दशमलव अंक तक बराबर है।

अतः समीकरण का मूल $= 0.25$

उदाहरण 3. रेगुला फाल्सी विधि का दो बार प्रयोग कर समीकरण $x^3 - x - 1 = 0$ का धनात्मक मूल प्राप्त करें।

हल : माना $f(x) = x^3 - x - 1$ ...(1)

अत $f(0) = 0 - 0 - 1 = -1$

$f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1$ ...(2)

$f(2) = 2^3 - 1 = 8 - 8 = 5$ ...(3)

यहा $f(1) = -1 < 0$ तथा $f(2) = 5 > 0$

$\therefore$ अतः एक धनात्मक मूल 1 तथा 2 के बीच होगा।

मूल का प्रभम लगभग मान :

यहाँ $a = 1, b = 2$

$\therefore$ प्रथम लगभग मान $x_1 = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$

$$= \frac{1\times 5 - 2(-1)}{5 - (-1)}$$ [(2) तथा (3) से]

$$= \frac{5+2}{6} = \frac{7}{6}$$

मूल का द्वितीय लगभग मान :

पुनः (1) से

$$f\left(\frac{7}{6}\right) = \left(\frac{7}{6}\right)^3 - \frac{7}{6} - 1 = \frac{343}{216} - \frac{7}{6} - 1$$

$$= \frac{343 - 252 - 216}{216} = -\frac{125}{216} \quad ...(4)$$

अतः (3) तथा (4) से

$$f(2) > 0, f\left(\frac{7}{6}\right) < 0 \quad i.e., \quad f(2)\, f\left(\frac{7}{6}\right) < 0$$

अतः मूल $\frac{7}{6}$ एवं 2 के बीच होगा।

यहाँ $a = \frac{7}{6}, b = 2$

$\therefore$ द्वितीय लगभग मान $x_2 = \dfrac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} = \dfrac{\frac{7}{6} \times 5 - 2 \times \left(-\frac{125}{216}\right)}{5 - \left(-\frac{125}{216}\right)}$

$$= \frac{\frac{35}{6} + \frac{250}{216}}{5 + \frac{125}{216}} = \frac{\frac{1260+250}{216}}{\frac{1080+125}{216}}$$

$$= \frac{1510}{1205} = 1.253 \text{ (लगभग)}$$

10.2.3 न्यूटन रैपसन विधि (Newton Raphson Method)

न्यूटन रैपसन विधि : माना x_0, $f(x) = 0$ के मूल का लगभग मान तथा $x_1 = x_0 + h$ वास्तविक मान है, तो,

$f(x_1) = f(x_0 + h) = 0$

$\Rightarrow \quad f(x_0) + hf'(x_0) + h^2 f''(x_0) + \ldots = 0$ [Taylor Theorem से]

$\Rightarrow \quad f(x_0) + hf'(x_0) = 0$ [h का मान काफी छोटा है। अतः ऊँचे घात उपेक्षनीय है]

$\Rightarrow \quad h = \dfrac{-f(x_0)}{f'(x_0)}$

अतः मूल का प्रथम लगभग मान

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad ...(1)$$

जहाँ $f'(x_0) \neq 0$

यह मान x_0 की तुलना में मूल के ज्यादा करीब है।

(1) में x_0 की जगह x_1 रखने पर द्वितीय मूल का लगभग मान

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \text{जहाँ } f'(x_1) \neq 0$$

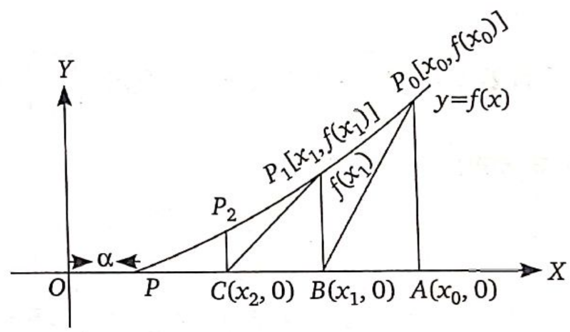
यह मान x_1 की तुलना में मूल के ज्यादा करीब है।

प्रक्रिया को उत्तरोत्तर दुहराने पर $(n+1)$वाँ अनुमानित मूल का मान प्राप्त होता है।

$$\boldsymbol{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \text{ तथा } f'(x_n) \neq 0}$$

यह **न्यूटन रैपसन सूत्र** कहलाता है।

लेखाचित्र निरूपण :



10.2.3.1 कार्यविधि : न्यूटन रैपसन विधि से $f(x) = 0$ को हल करने की विधि :

Step I. दो संख्या a तथा b का चुनाव इस प्रकार करें कि $f(a)\, f(b) < 0$।

अतः मूल a तथा b के बीच होगा।

Step II. $f(a)$ तथा $f(b)$ के मान पर विचार करें। यदि

(a) $f(a)$ शून्य से ज्यादा करीब है, तो $x_0 = a$ लें।

(b) $f(b)$ शून्य से ज्यादा करीब है, तो $x_0 = b$ लें।

Step III. न्यूटन रैपसन सूत्र $\boldsymbol{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$ का प्रयोग करें।

Step IV. विधि को अगले क्रमिक लगभग मूल $x_2, x_3 \ldots x_{n+1}$ प्राप्त करने के लिए दुहरायें तथा दो लगभग मानों के बराबर होने पर रोक दें। यह अभीष्ट मूल होगा।

10.2.3.2 न्यूटन रैपसन विधि से :

(i) वर्गमूल : माना N दी गई संख्या है जिसका वर्गमूल x है तो $\sqrt{N} = x \Rightarrow x^2 = N$

माना $\quad f(x) = x^2 - N \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$

$$\therefore \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - N}{2x_n} \qquad \left[\because \begin{array}{l} f(x_n) = x_n^2 - N \\ f'(x_n) = 2x_n \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + N}{2x_n} \quad \Rightarrow \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{N}{x_n}\right]$$

(ii) घनमूल : यदि N का घनमूल x हो तो $(N)^{1/3} = x \Rightarrow x^3 - N = 0$

माना $f(x) = x^3 - N = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$

$$\therefore \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x^3 - N}{3x_n^2} = \frac{3x_n^2 - x_n^3 + N}{3x_n^2} = \frac{1}{3}\left[2x_n + \frac{N}{x_n^2}\right]$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. समीकरण $x^2 - 8 = 0$ का वास्तविक मूल न्यूटन रैपसन विधि से ज्ञात करें।

हल : यहाँ $f(x) = x^2 - 8 = 0$ ...(1)

$f'(x) = 2x$ ...(2)

तथा $f(0) = 0 - 8 = -8$

$f(1) = 1^2 - 8 = -7$

$f(2) = 2^2 - 8 = -4$

$f(3) = 3^2 - 8 = 1$

$\therefore$ $f(2) \cdot f(3) < 0$ तथा $f(3)$ का मान शून्य के करीब है।

अतः $x_0 = 3$

अब मूल का प्रथम लगभग मान $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

$$= 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{1}{2 \times 3} = 3 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6} = 2.833$$ [(1) तथा (2) में $x = 3$ रखने पर]

मूल का द्वितीय लगभग मान $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \dfrac{17}{6} - \dfrac{\left(\frac{17}{6}\right)^2 - 8}{2 \times \frac{17}{6}}$ [(1) तथा (2) में $x = \dfrac{17}{6}$ रखने पर]

$$= \frac{17}{6} - \frac{\frac{289 - 288}{36}}{\frac{34}{6}} = \frac{17}{6} - \frac{1}{34 \times 6} = \frac{578 - 1}{204} = \frac{577}{204} = 2.828 = 2.83$$ (लगभग)

$\because$ x_1 तथा x_2 के मान दशमलव के दो अंकों तक बराबर है।

$\therefore$ अभीष्ट मूल 2.83

उदाहरण 2. $\sqrt{8}$ का मान दशमलव के दो अंकों तक न्यूटन रैपसन विधि से निकालें।

हल : माना $x = \sqrt{8} \Rightarrow x^2 - 8 = 0$

अब ऊपर (प्रश्न 2) की तरह हल करें।

उदाहरण 3. $(10)^{1/3}$ का मान न्यूटन रैपसन विधि से 4 दशमलव अंक तक निकालें।

हल : माना $x = (10)^{1/3}$

$\Rightarrow$ $x^3 = 10$ $\Rightarrow$ $x^3 - 10 = 0$

$\therefore$ $f(x) = x^3 - 10 = 0$

$f'(x) = 3x^2$

अब $2^3 = 8, 3^3 = 27$ *i.e.*, $8^{1/3} = 2$ तथा $27^{1/3} = 3$

$\therefore$ $10^{1/3}$ का मान 2 तथा 3 के बीच होगा। माना $x_0 = \dfrac{2+3}{2} = 2.5$

अब $x_0 = 2.5$ तथा $N = 10$

सूत्र से घनमूल $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left[2x_n + \frac{N}{x_n^2}\right]$

अतः $x_1 = \frac{1}{3}\left[2x_0 + \frac{10}{x_0^2}\right] = \frac{1}{3}\left[2 \times 2.5 + \frac{10}{(2.5)^2}\right]$

$$= \frac{1}{3}\left[4 + \frac{5}{2}\right] = 2.2$$

$$x_2 = \frac{1}{3}\left[2x_1 + \frac{10}{x_1^2}\right] = \frac{1}{3}\left[(2.2) \times 2 + \frac{10}{(2.2)^2}\right]$$

$$= 2.155$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\left[2x_2 + \frac{10}{x_1^2}\right] = \frac{1}{3}\left[2 \times 1.555 + \frac{10}{(2.155)^2}\right] = 2.1547$$

$$x_4 = \frac{1}{3}\left[2x_3 + \frac{10}{x_3^3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[2 \times 2.1547 + \frac{10}{(2.1547)^2}\right]$$

$$= 2.1544$$

यह अभीष्ट मूल है।

उदाहरण 4. $x_0 = 3$ लेकर न्यूटन रैपसन विधि का दो बार प्रयोग कर समीकरण $x^4 - 3x - 5 = 0$ का मूल प्राप्त करें।

हल : यहाँ $f(x) = x^3 - 3x - 5 = 0$ ...(1)

$\therefore \quad f'(x) = 3x^2 - 3$ ...(2)

तथा $\quad x_0 = 3$ [प्रश्न से]

$\therefore \quad f(3) = 3^3 - 3 \times 3 - 5 = 27 - 9 - 5 = 13$

$\quad f'(3) = 3 \times 3^2 - 3 = 27 - 3 = 24$

प्रथम लगभग मान (1st iteration) :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 3 - \frac{13}{24} = \frac{72 - 13}{24} = \frac{59}{24} = 2.4583$$

द्वितीय लगभग मान (2nd iteration) :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{59}{24} - \frac{f\left(\frac{59}{24}\right)}{f'\left(\frac{59}{24}\right)}$$ [(1) तथा (2) से]

$$= 2.4583 - \frac{(2.4583)^3 - 3(2.4583) - 5}{3 \times (2.4583)^2 - 3}$$

$$= 2.4583 - \frac{2.4812}{15.1297} = 2.4583 - 0.1640$$

$$= 2.2943$$

यह अभीष्ट मूल है।

उदाहरण 5. न्यूटन रैपसन विधि से $x^3 - 2x - 5 = 0$ का वास्तविक मूल ज्ञात करें।

हल : यहाँ $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ तथा $f'(x) = 3x^2 - 2$

$\therefore \quad f(1) = 1^3 - 2 \times 1 - 5 = -6$

$f(2) = 8 - 4 - 5 = -1$

$f(3) = 27 - 6 - 5 = 16$

$\therefore \quad f(2)\, f(3) < 0$ किन्तु $f(2) = -1$ शून्य के ज्यादा करीब है।

$\therefore \quad x_0 = 2$

माना क्रमिक रूप से मूलों के लगभग मान $x_1, x_2, x_3, \ldots$ तो

न्यूटन रैपसन सूत्र से $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ...(1)

$$= x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$$

$$= \frac{3x_n^3 - 2x_n - x_n^3 + 2x_n + 5}{3x_n^2 - 2}$$

i.e., $$x_{n+1} = \frac{2x_n^2 + 5}{3x_n^2 - 2}$$

अतः $x_1 = \dfrac{2x_0^3 + 5}{3x_0^2 - 2} = \dfrac{2 \times 2^3 + 5}{3 \times 2^2 - 2} = \dfrac{21}{10} = 2.1$

$$x_2 = \frac{2x_1^3 + 5}{3x_1^2 - 2} = \frac{2 \times (2.1)^3 + 5}{3 \times (2.1)^2 - 2} = \frac{2 \times 9.261 + 5}{3 \times 4.41 - 2} = 2.09$$

$$x_3 = \frac{2x_2^3 + 5}{3x_2^2 - 2} = \frac{2 \times (2.09)^3 + 5}{3 \times (2.09)^2 - 2} = 2.095$$

$\because \quad x_2$ तथा x_3 के मान (दशमलव के दो अंकों तक) समान है।

$\therefore \quad$ अभीष्ट मूल 2.09

नोट :

- सूत्र (1) में $n = 0, 1, 2$ रखकर प्रश्न (4) की तरह भी हल निकाला जा सकता है।

उदाहरण 6. न्यूटन रैपसन विधि से निम्न के मान ज्ञात करें—

(a) $\sqrt{5}$ का मान 5 दशमलव अंक तक

(b) $\sqrt{24}$

हल : (a) माना $\sqrt{5} = x$ तो $x^2 = 5 \Rightarrow x^2 - 5 = 0$ ...(1)

यदि $f(x) = x^2 - 5 = 0$ तो $f'(x) = 2x$

अब $2^2 = 4$ तथा $3^2 = 9$

अतः $\sqrt{5}$ के मूल का लगभग मान $x_0 = 2$

अब न्यूटन रैपसन सूत्र से

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\therefore \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_n)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(x)} = 2 - \frac{2^2 - 5}{2 \times 2} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2.25$$

$n = 1$ रखने पर

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{9}{4} - \frac{f\left(\frac{9}{4}\right)}{f'\left(\frac{9}{4}\right)}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{\frac{81-80}{16}}{\frac{9}{2}} \qquad \text{[(1) से]}$$

$$= \frac{9}{4} - \frac{1}{72} = \frac{162-1}{72} = \frac{161}{72} = 2.23611$$

(b) माना $x = \sqrt{24} \Rightarrow x^2 - 24 = 0$

यदि $f(x) = x^2 - 24 = 0$ तो $f'(x) = 2x$ ...(1)

पुन $\sqrt{24}$ का लगभग मान 5 के करीब है।

अतः $x_0 = 5$

अब सूत्र से

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$n = 0$ रखने से

$$x_1 = 5 - \frac{f(5)}{f'(5)} = 5 - \frac{25-24}{2 \times 5} \qquad \text{[(1) तथा (2) से]}$$

$$= 5 - \frac{1}{10} = \frac{49}{10} = 4.9$$

$n = 1$ रखने से

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$= (4.9) - \frac{(4.9)^2 - 24}{2 \times 4.9}$$

$$= \frac{2 \times (4.9)^2 - (4.9)^2 + 24}{2 \times 4.9} = \frac{(4.9)^2 + 24}{2 \times 4.9} = 4.899$$

$n = 2$ रखने पर

पुनः $x_3 = 4.899 - \dfrac{(4.899)^2 - 24}{2 \times 4.899}$

$$= \frac{2 \times (4.899)^2 - (4.899)^2 + 24}{2 \times 4.899} = 4.89898$$

उदाहरण 7. न्यूटन रैपसन विधि का प्रयोग कर एक धनात्मक संख्या का व्युत्क्रम प्राप्त करने का सूत्र प्राप्त करें तथा इससे $x_0 = 0.3$ लेकर 3 के व्युत्क्रम का मान दशमलव के 4 अंकों तक प्राप्त करें।

हल : माना N कोई दी गई संख्या है तथा x उसका व्युत्क्रम है तो

$$N = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad N - \frac{1}{x} = 0$$

यदि $f(x) = N - \dfrac{1}{x}$ तो

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

अब न्यूटन रैपसन सूत्र से

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x)}$$

$$= x_n - \frac{N - \frac{1}{x_n}}{\frac{1}{x_n^2}} = x_n - x_n^2 \left(N - \frac{1}{x_n}\right)$$

$$= x_n - (Nx_n^2 - x_n)$$

$$= 2x_n - Nx_n^2 = x_n\,[2 - Nx_n]$$

i.e., $x_{n+1} = x_n\,[2 - Nx_n], \; n = 0, 1, 2 \ldots$

यह अभीष्ट सूत्र है।

प्रश्न से

$$N = 3, x_0 = 0.3$$

$\therefore$ $x_1 = x_0\,(2 - 3x_0) = 0.3\,(2 - 3 \times 0.3)$

$$= 0.3 \times 1.1 = 0.33$$

$$x_2 = x_1\,(2 - 3x_1) = 0.33\,(2 - 3 \times 0.33)$$

$$= 0.33 \times 1.01 = 0.3333$$

उत्तर

10.2.4 समीकरण निकाय के हल की गौस विलोपन विधि (Numerical Solution of Simultaneous Equations : Gauss Elimination Method)

यह समीकरण निकाय को हल करने की प्रारंभिक विधि है जिसके द्वारा दिए गए समीकरण निकाय को समतुल्य त्रिभुजीय निकाय (Upper triangular system) में परिवर्तित कर दिया जाता है तथा पुनः पृष्ठगामी प्रतिस्थापन (Backward substitution) से चरों का मान ज्ञात किया जाता है।

माना दिया गया समीकरण निकाय

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \quad \dots(1)$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \quad \dots(2)$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \quad \dots(3)$$

इसे निम्न तीन चरणों में हल किया जाता है।

Step I. सर्वप्रथम समीकरण (1) की सहायता से समीकरण (2) एवं (3) से x_1 का विलोपन कर इन्हें x_2 व x_3 के पदों में व्यक्त किया जाता है जिससे समीकरण निकाय निम्न रूप का हो जाता है।

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2$$
$$a'_{31}x_2 + a'_{33}x_3 = b_3$$

Step II. पुनः Step II के द्वितीय समीकरण की सहायता से इसके तृतीय समीकरण को x_3 के पदों में व्यक्त किया जाता है जो निम्न रूप का होता है।

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2$$
$$a''_{33}x_3 = b''_3$$

जो त्रिभुजीय निकाय है तथा इससे x_3 का मान प्राप्त हो हाता है।

Step III. पृष्ठगामी प्रतिस्थापन (Backward Sustitution) : Step II में प्राप्त x_3 के मान को इसके द्वितीय समीकरण में रखकर x_2 का मान प्राप्त किया जाता है। पुनः x_2 के मान को प्रथम समीकरण में रखकर x_1 का मान प्राप्त किया जाता है।

नोट :

- (i) '″' (double primes) यह दर्शाता है कि अचरों ($i.e.$, a_{22}, a_{23}, a_{33} आदि) में दो बार परिवर्तन हुआ है।
- (ii) यदि समीकरण निकाय में अज्ञात n चर $x_1, x_2, \dots, x_n$ हों, अर्थात् चरों कि संख्या तीन से ज्यादा होने पर भी इसी विधि का प्रयोग होता है; अर्थात् पहले चरण में प्रथम समीकरण की सहायता से शेष समीकरणों से x_1 हटाया जाता है। पुनः प्राप्त समीकरणों में; दूसरे समीकरण की सहायता से तीसरे एवं अन्य शेष समकरणों से x_2 हटाया जाता है। यह प्रक्रिया त्रिभुजीय निकाय प्राप्त होने तक दुहराई जाती है। और इस तरह प्राप्त अज्ञात चर x_n की सहायता से पृष्ठगामी प्रतिस्थापन द्वारा $x_{n-1}, x_{n-2} \dots x_2, x_1$ का मान प्राप्त किया जाता है।
- (iii) समीकरण निकाय को आगमेन्टेड आव्यूह की सहायता से ऊपरी त्रिभुजीय/एसलोन रूप (Uppre Triangular/Echelon form) में बदलकर इस विधि से हल प्राप्त किया जा सकता है। (देखें : प्रश्न (1) विकल्प विधि)

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. दिए गए समीकरण निकाय

$$x + 4y - z = -5$$
$$x + y - 6z = -12$$
$$3x - y - z = 4$$

का गौस विलोपन विधि से हल प्राप्त करें।

हल : दिया गया समीकरण निकाय

$$x + 4y - z = -5 \quad \dots(1)$$
$$x + y - 6z = -12 \quad \dots(2)$$
$$3x - y - z = 4 \quad \dots(3)$$

Step I. समीकरण (2) में से (1) घटाने पर तथा समीकरण (1) में 3 से गुणा कर समीकरण (3) से घटाने पर

$$x + 4y - z = -5 \qquad ...(1)$$

$$-3y - 5z = -7 \qquad ...(4)$$

$$-13y + 2z = 19 \qquad ...(5)$$

Step II. समीकरण (5) में (3) से तथा (4) में 13 से गुणा कर समीकरण (5) से घटाने पर समीकरण निकाय

$$x + 4y - z = -5 \qquad ...(1)$$

$$-3y - 5z = -7 \qquad ...(4)$$

$$71z = 148 \qquad ...(6)$$

Step III. पृष्ठगामी प्रतिस्थापन : समीकरण (6) से इसे समीकरण (4) में रखने पर

$$-3y - 5 \times \frac{148}{71} = -7 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{3}\left[-7 - 5 \times \frac{148}{71}\right]$$

i.e., $$y = \frac{-81}{71}$$

पुनः y का यह मान (1) में रखने पर

$$x + 4 \times \frac{-81}{71} + \frac{148}{71} = -5$$

$$\Rightarrow \qquad x = -5 + \frac{324}{71} + \frac{148}{71} = \frac{117}{71}$$

अतः अभीष्ट हल $x = \frac{117}{71},\; y = -\frac{81}{71},\; z = \frac{148}{71}$

विकल्प विधि : (आव्यूह विधि) : दिए गए समीकरण को आव्यूह रूप में लिखने पर

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

i.e., $AX = B$, जहाँ $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 \\ -12 \\ 4 \end{bmatrix}$

अतः ऑगमेन्टेड आव्यूह

$$C = [A : B] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & : & -5 \\ 1 & 1 & -6 & : & -12 \\ 3 & -1 & -1 & : & 4 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & : & -5 \\ 0 & -3 & -5 & : & -7 \\ 0 & -13 & 2 & : & 19 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} R_2 = R_2 - R_1 \\ R_3 = R_3 - 3R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & : & -5 \\ 0 & -3 & -5 & : & -7 \\ 0 & 0 & 71 & : & 148 \end{bmatrix}$$

अतः $AX = B$

$\Rightarrow$ $$x + 4y - z = -5 \quad ...(1)$$

$$-3y - 5z = -7 \quad ...(2)$$

$$71z = 148 \quad ...(3)$$

पृष्ठगामी प्रतिस्थापन (Backward Substitution) :

(3) से $z = \dfrac{148}{71}$

(2) में z का मान रखने पर

$$-3y - 5 \times \frac{148}{71} = -7$$

$\Rightarrow$ $$y = -\frac{1}{3}\left[-7 + 5 \times \frac{148}{71}\right]$$

i.e., $$y = \frac{-81}{71}$$

(3) में y तथा z का मान रखने पर

$$x + 4 \times \left(\frac{-81}{71}\right) - \frac{71}{148} = -5$$

$\Rightarrow$ $$x = -5 + \frac{4 \times 81}{71} + \frac{148}{71} = \frac{117}{71}$$

अतः अभीष्ट हल $x = \dfrac{117}{71}$, $y = \dfrac{-81}{71}$, $z = \dfrac{148}{71}$

उराहरण 2. समीकरण निकाय

$$2x - y + 3z = 9$$
$$x + y + z = 6$$
$$x - y + z = 2$$

को गौस विलोपन विधि से हल करें।

हल : दिया गया समीकरण निकाय

$$2x - y + 3z = 9$$
$$x + y + z = 6$$
$$x - y + z = 2$$

या $$x + y + z = 6 \quad ...(1)$$

$$x - y + z = 2 \quad ...(2)$$

$$2x - y + 3z = 9 \quad ...(3)$$

[द्वितीय एवं तृतीय समीकरण को प्रथम एवं द्वितीय समीकरण के रूप में लेने पर]

समीकरण (2) में से 1 को घटाने पर तथा समीकरण (3) में 2 से गुणा कर (3) से घटाने पर

$$-2y = -4 \quad \text{...(4)}$$

$$-3y + z = -3 \quad \text{...(5)}$$

(4) में 3 से तथा (5) में (2) से गुणा कर घटाने पर

$$-6y = -12$$

$$-6y + 2z = -6$$

$$+ \quad - \qquad +$$

$$-2z = -6 \Rightarrow z = 3$$

(4) से $-2y = -4 \Rightarrow y = 2$

(1) में x तथा y का मान रखने पर

$$x + 2 + 3 = 6 \Rightarrow x = 1$$

अत अभीष्ट हल $x = 1, y = 2, z = 3$

उदाहरण 3. गौस विलोपन विधि का प्रयोग कर निम्न समीकरणों को हल करें—

$$x + y + z = 9$$

$$2x - 3y + 4z = 13$$

$$3x + 4y + 5z = 40$$

हल : दिया गया समीकरण निकाय

$$x + y + z = 9 \quad \text{...(1)}$$

$$2x - 3y + 4z = 13 \quad \text{...(2)}$$

$$3x + 4y + 5z = 40 \quad \text{...(3)}$$

Step I. समीकरण (1) में 2 से गुणाकर (2) से घटाने पर तथा समीकरण (1) में 3 से गुणाकर (3) में से घटाने पर

$$x + y + z = 9 \quad \text{...(1)}$$

$$-5y + 2z = -5 \quad \text{...(4)}$$

$$y + 2z = 13 \quad \text{...(5)}$$

Step II. समीकरण (5) में 5 से गुणाकर (4) में जोड़ने पर

$$x + y + z = 9 \quad \text{...(1)}$$

$$-5y + 2z = -5 \quad \text{...(4)}$$

$$12z = 6 \quad \text{...(6)}$$

Step III. समीकरण (6) से

$$12z = 60 \Rightarrow z = \frac{60}{12} = 5$$

Backward Substitution :

समीकरण (4) में $n = 5$ रखने पर

$$-5y + 5 \times 2 = -5$$

$$-5y = -15 \rightarrow y = \frac{-15}{} = 3$$

→

पुनः (1) में $y = 3, z = 5$ रखने पर

$$x + 3 + 5 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

∴ अभीष्ट मूल $x = 1, y = 3, z = 5$ **उत्तर**

महत्वपूर्ण सूत्र

1. **समद्विभाजन विधि :** यदि $f(x)$ एक वास्तविक व सतत फलन है तथा $f(a) . f(b) < 0$ तो समीकरण $f(x) = 0$ का कम से कम एक मूल a तथा b के बीच होगा तथा इसका मान $x_r = \frac{a+b}{2}, r = 1, 2, \ldots$

2. **रेगुला फाल्सी विधि :** यदि $f(x)$ एक वास्तविक व सतत फलन है तथा $f(a) . f(b) < 0$ तो समीकरण $f(x) = 0$ का कम से कम एक मूल a तथा b के बीच होगा तथा इसका मान

$$x = \frac{af(a) - af(b)}{f(b) - f(a)}$$

3. **(i) न्यूटन रैपसन विधि :** यदि x_0 किसी समीकरण $f(x) = 0$ के मूल अगले लगभग मान हो, तथा $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ मूलों के क्रमिक लगभग मान (Successive approximate roots) हों, तो न्यूटन रैपसन सूत्र से

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, \ldots \text{ जहाँ } f(x_r) \neq 0$$

(ii) न्यूटन रैपसन सूत्र से : किसी संख्या N का

(a) वर्गमूल $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left[x_n + \frac{N}{x_n}\right]$

(b) घनमूल $x_{n+1} = \frac{1}{3}\left[2x_n + \frac{N}{x_n^2}\right]$

प्रश्नावली 10.1

1. समद्विभाजन विधि (Bsisection Method) का चार बार प्रयोग कर समीकरण $x^3 - 5x + 1 = 0$ का धनात्मक मूल ज्ञात करें।

2. समद्विभाजन विधि (Bisection Method) का चार बार प्रयोग कर समीकरण $x^3 - 9x + 1 = 0$ का वह मूल प्राप्त करें जो 2 तथा 4 के बीच है।

3. $x^3 - 20 = 0$ का मूल जो 1 तथा 4 के बीच है समद्विभाजन विधि (Bisection Method) का तीन बार प्रयोग कर ज्ञात करें।

4. रेगुला फाल्सी (Falsi Position) विधि का प्रयोग कर समीकरण $x^3 - 2x - 5 = 0$ के मूल का प्रथम लगभग मान (First approximation) ज्ञात करें।

5. रेगुला फाल्सी (Regula Falsi) विधि का दो बार प्रयोग कर समीकरण $x^5 - x^4 - x^3 - 1 = 0$ का वह मूल ज्ञात करें जो 1 तथा 2 के बीच है।

6. रेगुला फाल्सी (Falsi Position) विधि का दो बार प्रयोग कर $x^3 - 5x - 7 = 0$ का मूल 2 तथा 3 के बीच ज्ञात करें।

7. न्यूटन रैपसन विधि का एक बार प्रयोग कर समीकरण $x^3 + 3x - 7 = 0$ का मूल 1 के निकट ज्ञात करें।

8. न्यूटन रैपसन विधि का एक बार प्रयोग कर $x^2 - 13 = 0$ का मूल ज्ञात करें, जबकि इसका प्रारंभिक लगभग मान 3.5 है।

9. $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$ का मूल न्यूटन रैपसन विधि का प्रयोग कर ज्ञात करें, जबकि मूल का प्रारंभिक लगभग मान 2 है।

10. न्यूटन रैपसन विधि का प्रयोग कर :

(i) $\sqrt{29}$ तीन दशमलव अंक तक मान ज्ञात करें।

(ii) $\sqrt[3]{18}$ दो शुद्ध दशमलव अंक तक

11. शून्य को प्रारंभिक मान मानकर $x^2 - 5x + 2 = 0$ का मान न्यूटन रैपसन विधि से ज्ञात करें।

12. गौस विलोपन विधि का प्रयोग कर निम्न समीकरण निकायों को हल करें—

(a) $2x + 4y + z = 3$

$3x + 2y - 2z = -2$

$x - y + z = 6$

(b) $2x + y + z = 10$

$3x + 2y + 3z = 18$

$x + 4y + 9z = 16$

(c) $x - y + z = 1$

$-3x + 2y - 3z = -6$

$2x - 5y + 4z = 5$

(d) $x + 2y + 3z + w = 3$

$4x - 6y - z - w = 27$

$3x - 2y - 3z + 2w = 13$

$x + y + z - w = 3$

13. (i) $x^3 - 5x + 1 = 0$

(a) बीजीय समीकरण है
(b) अबीजीय समीकरण है
(c) फलन है
(d) कोई नहीं

(ii) $x^3 - 5x + 1 = 0$ का मूल का समद्विभाजन विधि से प्रथम लगभग मान है—

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) कोई नहीं

(iii) यदि $f(x) = 0$ एक बीजीय समीकरण है तो न्यूटन रैपसन है—

(a) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
(b) $x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
(c) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f''(x_n)}$
(d) कोई नहीं

(iv) न्यूटन रैपसन विधि से $\sqrt{N}$, जहाँ धनात्मक पूर्णांक है, का मान

(a) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{Nx_n}\right)$
(b) $x_{n+1} = x_n\ (2 - Nx_n)$

(c) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right)$ (d) $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + N}{x_n}$

(v) यदि $f(x) = 0, f(a) < 0, f(b) > 0$ तो रेगुला फाल्सी विधि से मूल ज्ञात करने का सूत्र है।

(a) $x_1 = \frac{a+b}{2}$ (b) $x_1 = \frac{af(b) - bf(b)}{f(b) - f(a)}$ (c) $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ (d) कोई नहीं

(vi) यदि $f(x) = 0, f(a) < 0, f(b) > 0$ तो बाइसेक्सन विधि से प्रथम मूल

(a) $x_1 = \frac{a+b}{2}$ (b) $x_1 = \frac{af(b) - bf(b)}{f(b) - f(a)}$ (c) $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. $\frac{3}{16}$ **2.** 2.88 **3.** 2.875 **4.** 2.058 **5.** 1.416 **6.** 2.0945 **7.** 1.5 **8.** 3.607

9. 1.33 **10.** (i) 5.387 (ii) 2.63 **11.** 0.438

12. (a) $x = 2, y = -1, z = 3$ (b) $x = 7, y = -9, z = 5$

(c) $z = -2, y = 3, z = 6$ (d) $x = 4, y = -2, z = 1, w = 0$

13. (i) (a) (ii) (a) (iii) (a) (iv) (c) (v) (b) (vi) (a)

❑❑❑

खण्ड-3 : द्विविमीय निर्देशांक ज्यामिति

11. वृत्त 175-198

CHAPTER 11

वृत्त (Circle)

11.1 परिभाषा (Definition)

वृत्त किसी समतल में ऐसे बिन्दुओं का समुच्चय है जो उस समतल में स्थित किसी नियत बिन्दु से स्थिर दूरी पर होते हैं।

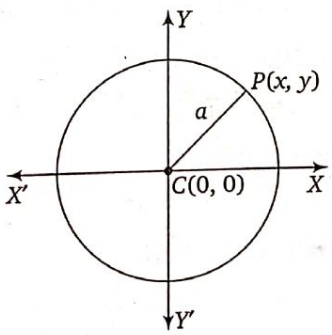
नियत बिन्दु को वृत्त का **केन्द्र (Centre)** तथा दी गई स्थिर दूरी को उसकी **त्रिज्या (Radius)** कहते है।

चित्र में स्थिर बिंदु C केंद्र तथा CP त्रिज्या है।

11.2 वत्त का समीकरण जिसका केन्द्र मूल बिंदु है (Equation of a Circle whose Centre is Origin)

माना $O(0, 0)$ वृत्त का केंद्र तथा $OP = a$ उसकी त्रिज्या है। माना $P(x, y)$ वृत्त पर कोई बिंदु है। अब बिंदु $O(0, 0)$ से बिंदु $P(x, y)$ की दूरी

$$|OP| = (x-0)^2 + (y-0)^2$$



अर्थात् $(x-0)^2 + (y-0)^2 = a^2$

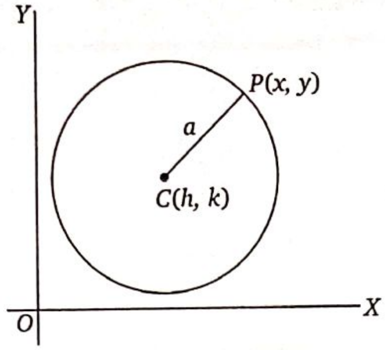
$\Rightarrow$ $\boldsymbol{x^2 + y^2 = a^2}$ यह वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

11.3 वृत्त का समीकरण, जिसकी त्रिज्या तथा केन्द्र ज्ञात हो : मानक रूप (Equation of a Circle whose Centre and Radius are given : Standard form or Central form)

माना $C(h, k)$ वृत्त का केंद्र तथा CP उसकी त्रिज्या है, जहाँ $P(x, y)$ वृत्त पर कोई बिंदु है।

माना $|CP| = a =$ वृत्त की त्रिज्या

किन्तु $CP = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$ (दूरी सूत्र से)



$$\Rightarrow \quad \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = a$$

$$\Rightarrow \quad (x-h)^2+(y-k)^2 = a^2 \qquad \text{(दोनों तरफ वर्ग करने पर)}$$

यह वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

यह वृत्त का मानक समीकरण (Standard equation) या केन्द्रीय रूप (central form) कहलाता है। अत: वृत्त का मानक समीकरण जिसका केंद्र **(h, k)** तथा त्रिज्या ***a*** है

$$\boldsymbol{(x-h)^2+(y-k)^2 = a^2}$$

नोट :

- उपर्युक्त समीकरण में $h=0, k=0$ रखने पर $x^2+y^2=a^2$ जो मूल बिंदु से जाने वाले वृत्त का समीकरण है।

11.4 वृत्त के समीकरण का व्यापक रूप (General form of the Equation of a Circle)

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

वृत्त का समीकरण जिसका केंद्र (h, k) तथा त्रिज्या a है

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-a^2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x^2+y^2+2gx+2fy+c = 0}$$

जहाँ $\quad g=-h, f=-k$ तथा $c=h^2+k^2-a^2$

यह वृत्त के समीकरण का **व्यापक रूप** कहलाता है।

स्पष्ट है व्यापक समीकरण (1) में

केंद्र (centre) $=(-g,-f)$ तथा त्रिज्या (radius) $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

नोट :

- वृत्त के व्यापक समीकरण का दूसरा रूप (1) में a से गुणा करने से प्राप्त होता है।

$$\boldsymbol{ax^2+ay^2+2agx+2afy+ac = 0}$$

11.4.1 सिद्ध करना है कि समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ एक वृत्त को निरूपित करता है।

प्रमाण : दिया गया समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

या $\quad x^2+2gx+g^2-g^2+y^2+2fy+f^2-f^2+c=0$

या $\quad (x^2+2gx+g^2)+(y^2+2fy+f^2)-(g^2+f^2-c)=0$

या $\quad (x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$

या $\{x-(-g)\}^2+\{y-(-f)\}^2=(\sqrt{g^2+f^2-c})^2$

वृत्त के समीकरण $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ से तुलना करने पर हम पाते हैं कि यह समीकरण उस वृत्त को प्रदर्शित करता है जिसका केन्द्र $(-g,-f)$ तथा त्रिज्या $\sqrt{g^2+f^2-c}$ है; $(g^2+f^2 \geq c)$

11.4.2 व्यापक द्विघात समीकरण के वृत्त होने की शर्तें (Conditions for a General Equation of Second Degree to be a Circle)

व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ एक वृत्त को निरूपित करेगा यदि

I. यह x तथा y में द्विघात समीकरण है।

II. इससे x^2 तथा y^2 के गुणांक बराबर है; $i.e., a=b$

III. समीकरण में xy वाला कोई पद नहीं है; $i.e., h=0$

अतः व्यापक द्विघात समीकरण वृत्त को निरूपित करेगा, यदि $a=b$ तथा $h=0$ है।

नोट :

- (1) दिया गया वृत्त
  - (i) वास्तविक (Real) होगा यदि $g^2+f^2-c>0$ अर्थात् त्रिज्या वास्तविक हो।
  - (ii) बिंदु वृत्त (Point circle) होगा यदि $g^2+f^2-c=0$ अर्थात् त्रिज्या शून्य हो।
  - (iii) कोई वृत्त नहीं होगा या कल्पित वृत्त (Imaginary circle) होगा यदि $g^2+f^2-c<0$
- (2) यदि दिया गया वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ हो तो बिंदु (x_1, y_1)
  - (i) वृत्त के बाहर होगा यदि $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c>0$
  - (ii) वृत्त पर होगा यदि $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$
  - (iii) वृत्त की भीतर रहेगा यदि $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c<0$

11.4.3 द्विघात समीकरण से वृत्त की त्रिज्या तथा एवं केंद्र ज्ञात करने की कार्य विधि (To find centre and radius of a circle given in general quadratic form)

I. जाँचे कि यह वृत्त होने की शर्तों का पालन करता है।

II. x^2 तथा y^2 का गुणांक इकाई बनायें।

III. प्राप्त समीकरण से

(i) केन्द्र $=\left(-\frac{1}{2}(x \text{ का गुणांक}), -\frac{1}{2}(y \text{ का गुणांक})\right)=(-g,-f)$

(ii) त्रिज्या $=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\, x \text{ का गुणांक}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\, y \text{ का गुणांक}\right)^2 - \text{अचर राशि}}=\sqrt{g^2+f^2-c}$

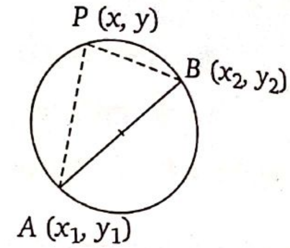
11.4.4 व्यास के शीर्षों के निर्देशांकों के पदों में वृत्त का समीकरण (Equation of the Circle when ends of the diameter are given)

माना A तथा B किसी वृत्त के व्यास AB के सिरे हैं तथा इनके नियामक क्रमशः (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) है तथा $P(x, y)$ वृत्त की परिधि पर कोई बिंदु है।

A तथा B को मिलायें

स्पष्ट है $\angle APB = 90°$ [$\because$ अर्द्ध वृत्त क. कोण $= 90°$]

$\therefore \quad AP \perp BP$



अब AP की प्रवणता (Slope) $= \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m_1$

BP की प्रवणता $= \dfrac{y - y_2}{x - x_2} = m_2$

तो $m_1 \times m_2 = -1$

[∵ परस्पर लंब रेखाओं की प्रवणता का गुणनफल = – 1]

$$\Rightarrow \quad \frac{y - y_1}{x - x_1} \times \frac{y - y_2}{x - x_2} = -1$$

$$\Rightarrow \quad (y - y_1)(y - y_2) = -(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\Rightarrow \quad (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

यह वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण : उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसके व्यास के सिरों के निर्देशांक $(-2, 4)$ तथा $(3, -5)$ है।

हल : यहाँ $(x_1, y_1) = (-2, 4), (x_2, y_2) = (3, -5) \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 3; y_1 = 4, y_2 = -5$

अतः अभीष्ट समीकरण $\{x - (-2)\}(x - 3) + (y - 4)\{y - (-5)\} = 0$

$$\Rightarrow \quad (x + 2)(x - 3) + (y - 4)(y + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2x - 6 + y^2 + 5y - 4y - 20 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - x + y^2 + y - 26 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - x + y - 26 = 0$$

उत्तर

11.5 वृत्त का प्राचलिक या परामितीय (Parametric) समीकरण

वृत्त के समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ में $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$ रखने से समीकरण संतुष्ट होता है।

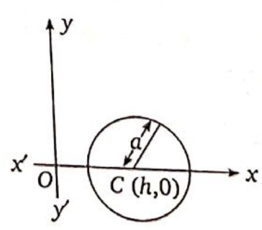
अतः वृत्त का प्राचलिक समीकरण $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$ से दिया जाता है।

वृत्त पर स्थित किसी बिंदु के **प्राचलिक या परामितीय निर्देशांक $(a\cos\theta, a\sin\theta)$** से दिए जाते है तथा इसे 'θ' बिंदु कहते है, जहाँ 'θ' एक प्राचल (Parameter) है।

11.6 कुछ विशिष्ट स्थितियों में वृत्त का समीकरण (Equation of Circle in some Special Cases)

हम जानते हैं कि वृत्त का समीकरण, जिसका केंद्र (h, k) तथा त्रिज्या a है, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ है। यहाँ हम कुछ विशिष्ट स्थितियों में वृत्त के समीकरण निकालेंगे।

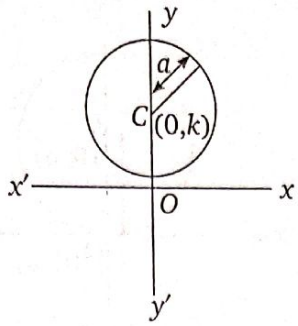
1. जब वृत्त का केंद्र x-अक्ष पर हो : स्पष्ट है इस स्थिति में $k = 0$ अतः समीकरण $(x - h)^2 + (y - 0)^2 = a^2$
$\Rightarrow \quad (x - h)^2 + y^2 = a^2$ यह अभीष्ट समीकरण है



2. जब वृत्त का केंद्र y-अक्ष पर स्थित हो : स्पष्ट है इस स्थिति में $h = 0$

∴ अभीष्ट समीकरण $(x - 0)^2 + (y - k)^2 = a^2$

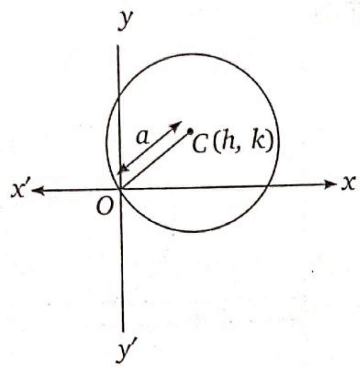
$\Rightarrow \quad x^2 + (y - k)^2 = a^2$



3. **जब वृत्त मूल बिंदु से गुजरता है :** स्पष्ट है इस स्थिति में मूल बिंदु $(0, 0)$ से केंद्र (h, k) की दूरी OC = त्रिज्या a

अर्थात् $\quad (h - 0)^2 + (k - 0)^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad h^2 + k^2 = a^2$

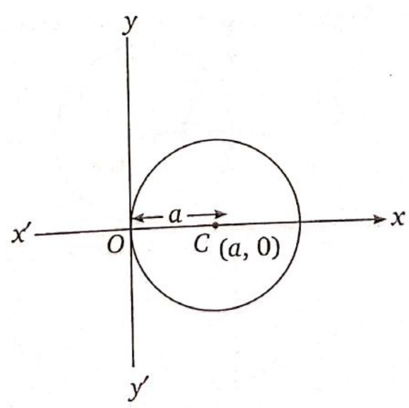


अत: समीकरण $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2 = h^2 + k^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2xh + y^2 - 2yk = 0$ यह वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

4. **जब मूल बिंदु वृत्त तथा केंद्र x-अक्ष पर स्थित हो :**

स्पष्ट है इस दशा में $h = a, k = 0$



अत: अभीष्ट समीकरण $(x - a)^2 + (y - 0)^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0$

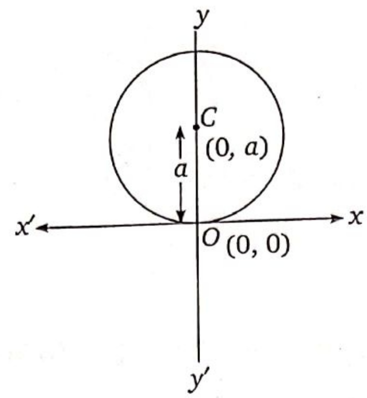
5. **जब मूल बिंदु वृत्त तथा केंद्र y-अक्ष पर स्थित हो :**

स्पष्ट है इस स्थिति में $h = 0, k = a$

अत: अभीष्ट समीकरण $(x - 0)^2 + (y - a)^2 = a^2$

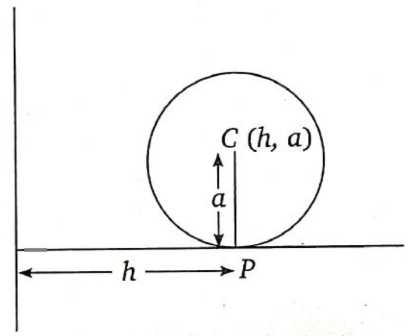
UP Polytechnic में अच्छे अंक लाने के लिए Study power point का Telegram Channel Join करें ।

$$\Rightarrow \qquad x^2 + y^2 - 2ay = 0$$



6. जब वृत्त *x*-अक्ष को स्पर्श करता है :

स्पष्ट है इस स्थिति में $k = a =$ त्रिज्या

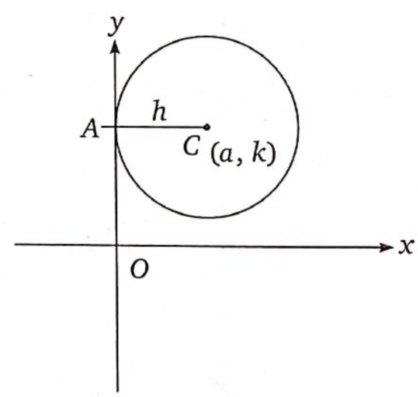


अतः समीकरण $(x-h)^2 + (y-a)^2 = a^2$

7. जब वृत्त *y*-अक्ष को स्पर्श करता है :

स्पष्ट है इस दशा में $h = a =$ त्रिज्या,

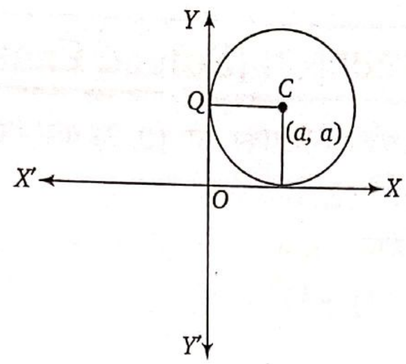
तो समीकरण $(x-a)^2 + (y-k)^2 = a^2$



8. जब वृत्त *x*-अक्ष तथा *y*-अक्ष दोनों को स्पर्श करता है :

स्पष्ट है इस दशा में $h = k = a =$ त्रिज्या

अतः समीकरण $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$



11.7 वृत्त की जीवा समीकरण : जब उसकी जीवा का मध्य बिंदु ज्ञात है (Equation of the chord of a circle when its mid-point is given)

यदि वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ ...(1)

तथा वत्त जीवा का मध्य बिंदु (x_1, y_1) हो, तो जीवा का समीकरण

$$\mathbf{xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2}$$

11.8 अक्षों पर अंतःखंड (Intercept on the axes)

माना वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(1)

जो x-अक्ष को बिंदुओं A_1, A_2 तथा y-अक्ष को बिंदुओं B_1, B_2 पर काटता है।

(1) में $y = 0$ रखने से वे बिंदु प्राप्त होंगे जहाँ वृत्त (1) x-अक्ष को काटता है। अत: (1) से

$$x^2 + 2gx + c = 0 \quad \text{...(2)}$$

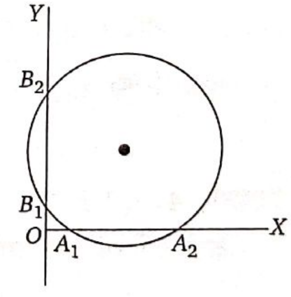
यदि x_1 तथा x_2 द्विघात समीकरण (2) के मूल हों तो

$$x_1 + x_2 = -2g, \quad x_1 x_2 = c \quad \text{...(3)}$$

[$ax^2 + bx + c = 0$ के मूल x_1, x_2 हों तो $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ तथा $x_1, x_2 = \frac{c}{a}$

अब अंत:खंड की लं० $A_1A_2 = OA_2 - OA_1 = x_2 - x_1 = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{(-2g)^2 - 4c}$ [(3)से]

$$= \sqrt{4g^2 - 4c} = 2\sqrt{g^2 - c}, \; g^2 - c \geq 0$$



इसी तरह समीकरण (2) में $x = 0$ रखने पर

$$y^2 + 2fy + c = 0 \quad \text{...(4)}$$

इससे वे दो बिंदु प्राप्त होंगे जिन पर वृत्त (1) y-अक्ष को काटता है।

यदि (4) के मूल y_1 तथा y_2 हो तो $y_1 + y_2 = -2f, y_1y_2 = c$

∴ अंत:खंड की लं० $B_1B_2 = OB_2 - OB_1 = y_2 - y_1$

$$= \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} = 2\sqrt{f^2 - c}, \; f^2 - c \geq 0$$

नोट

- x-अक्ष पर अंतःखंड प्राप्त करने के लिए वृत्त के समीकरण में $y = 0$ तथा y-अक्ष पर अंतःखंड के लिए $x = 0$ रखें।
- (a) वृत्त जब x-अक्ष को स्पर्श करेगा तो $A_1A_2 = 0 \Rightarrow g^2 = c$

  (b) वृत्त जब y-अक्ष को स्पर्श करेगा तो $B_1B_2 = 0 \Rightarrow f^2 = c$

  (c) $x_1 . x_2 < 0$ *i.e.*, $c < 0$ अर्थात् मूल परस्पर विपरीत चिन्ह के हो तो यह वृत्त x-अक्ष को मूल बिन्दु के दोनों ओर प्रतिच्छेद करेगा।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (2, 3) तथा त्रिज्या 5 है।

हल : प्रश्न से वृत्त का केंद्र $(h, k) = (2, 3)$

$\Rightarrow \quad h = 2, k = 3$ तथा त्रिज्या $a = 5$

अतः वृत्त का समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 25$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

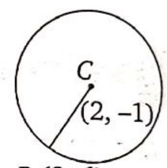
यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 2. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र (2, – 1) तथा जो बिंदु (3, 6) से होकर जाता है।

हल : प्रश्न से केंद्र $(h, k) = (2, -1)$

$\Rightarrow \quad h = 2, k = -1$

दिया गया बिंदु $P(3, 6)$



अतः त्रिज्या $a = CP = \sqrt{(3-2)^2 + \{6-(-1)\}^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$

अतः समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad (x-2)^2 + (y+1)^2 = (\sqrt{50})^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 50$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 45 = 0$ यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 3. वृत्त $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ का केंद्र तथा त्रिज्या ज्ञात करें।

हल : वृत्त के मानक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ से तुलना करने पर

$2g = 4 \quad \Rightarrow \quad g = 2$

तथा $2f = -4 \quad \Rightarrow \quad f = -2$

$c = -1$

$\therefore$ केंद्र $(-g, -f) = (-2, 2)$

तथा त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 - (-1)}$

$= \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$ उत्तर

उदाहरण 4. वृत्त $2x^2 + 2y^2 + 5x - 6y + 3 = 0$ का केंद्र तथा त्रिज्या ज्ञात करें।

हल : दिया गया समीकरण $2x^2 + 2y^2 + 5x - 6y + 3 = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x - \frac{6}{2}y + \frac{3}{2} = 0$ [x^2 तथा y^2 का गुणांक इकाई करने के लिए 2 से भाग देने पर]

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x - 3y + \frac{3}{2} = 0$

मानक समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$2g = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{5}{4},$

$$2f = -3 \Rightarrow f = -\frac{3}{2}$$

तथा $$c = \frac{3}{2}$$

अतः केन्द्र $(-g, -f) = \left(-\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$

तथा त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\left(-\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{9}{4} - \frac{3}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{25 + 36 - 24}{16}} = \frac{\sqrt{37}}{4}$$ उत्तर

उदाहरण 5. विंदु $(-2, -7)$ से होकर जाने वाले उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 5 = 0$ के संकेन्द्रीय (Concentric) है।

हल : दिया गया वृत्त $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 5 = 0$

यहाँ $2g = -8 \Rightarrow g = -4$

तथा $2f = 6 \Rightarrow f = 3$

प्रश्नानुसार, अभीष्ट वृत्त का केंद्र $= (-g, -f)$ दिए गए वृत्त का केंद्र $= (4, -3)$

अव वृत्त $(-2, -7)$ से गुजरता है।

$\therefore$ त्रिज्या = वृत्त के केंद्र $(4, -3)$ तथा बिंदु $(-2, -7)$ के बीच की दूरी

$$= \sqrt{\{4-(-2)\}^2 + \{(-3)-(-7)\}^2} \quad \text{(दूरी सूत्र से)}$$

$$= \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

अतः वृत्त का समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

$\Rightarrow (x-4)^2 + (y+3)^2 = (\sqrt{52})^2$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 52$ उत्तर

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 6y - 27 = 0$ यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 6. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र $(2, -3)$ है तथा जो रेखा $3x - 2y - 1 = 0$ तथा $4x + y - 27 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिंदु (Intersecting point) से गुजरता है।

हल : दी गई सरल रेखायें $3x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow 3x - 2y = 1$ ...(1)

$4x + y - 27 = 0 \Rightarrow 4x + y = 27$ ...(2)

(2) में 2 से गुणा कर (1) में जोड़ने पर

$$3x - 2y = 1$$
$$8x + 2y = 54$$

$\Rightarrow 11x = 55$

$\therefore x = \frac{55}{11} = 5$

(1) में x का मान रखने पर

$$3 \times 5 - 2y = 1$$

या $\quad 2y = 14 \quad \therefore \quad y = 7$

अब प्रश्न से, वृत्त का केंद्र $(h, k) = (2, -3) \Rightarrow h = 2, k = -3$ तथा यह बिंदु $(5, 7)$ से गुजरता है।

$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या $a = (2, -3)$ तथा $(5, 7)$ के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(5-2)^2 + \{7-(-3)\}^2} = \sqrt{9+100} = \sqrt{109}$$

अत वृत्त का समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad (x-2)^2 + (y+3)^2 = \sqrt{109}$

$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 109$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x + 6y - 96 = 0$ **उत्तर**

उदाहरण 7. $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$ से निरूपित वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया वृत्त $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

यह उस वृत्त का समीकरण है जिसके व्यास के सिरे (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2)

$\therefore$ व्यास = सिरों (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) के बीच की दूरी $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ **उत्तर**

उदाहरण 8. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसके व्यास के सिरे (3, 4) तथा (5, 2) है।

हल : यदि व्यास के सिरे (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) हैं तो वृत्त का समीकरण

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

यहाँ $\quad (x_1, y_1) = (3, 4) \Rightarrow x_1 = 3, y_1 = 4$

$\quad (x_2, y_2) = (5, 2) \Rightarrow x_2 = 5, y_2 = 2$

$\therefore$ अभीष्ट समीकरण $(x-3)(x-5) + (y-4)(y-2) = 0$

या $\quad x^2 - 8x + 15 + y^2 - 6y + 8 = 0$

या $\quad x^2 + y^2 - 8x - 6y + 23 = 0$ यह अभीष्ट समीकरण है। **उत्तर**

उदाहरण 9. यदि $y = 3x$ वृत्त $x^2 + y^2 - 20x = 0$ की जीवा है, तो उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करो जिसका व्यास यह जीवा है।

हल : प्रश्न से वृत्त $\quad x^2 + y^2 - 20x = 0 \quad$ ...(1)

तथा जीवा $y = 3x$

जीवा वृत्त को दो बिंदुओं P तथा Q (माना) पर काटेगी। अतः

(1) में $y = 3x$ रखने पर

$$x^2 + 9x^2 - 20x = 0$$

$$10x^2 - 20x = 0$$

$\Rightarrow \quad 10x^2 - 20x = 0$

$\Rightarrow \quad 10x(x-2) = 0$

$\Rightarrow \quad x = 0, x = 2$

अतः $y = 0$ तथा $y = 3 \times 2 = 6$

अतः P तथा Q के निर्देशांक क्रमशः (0, 0), (2, 6) हैं

$\because$ जीवा अभीष्ट वृत्त का व्यास है।

अतः $(x_1, y_1) = (0, 0)$ तथा $(x_2, y_2) = (2, 6)$

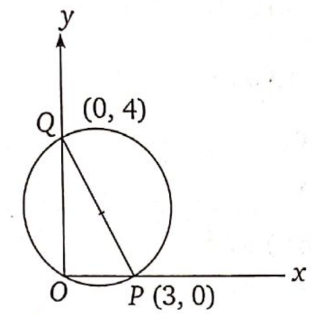
$\therefore$ अभीष्ट वृत्त $(x-0)(x-2)+(y-0)(y-6)=0$

या $x^2-2x+y^2-6y=0$ अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 10. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो मूल बिन्दु से होकर जाता है तथा नियामक अक्षों पर 3 तथा 4 अंतःखंड (Intercepts) काटता है।

हल : माना OP तथा OQ वृत्त द्वारा क्रमशः x-अक्ष तथा y-अक्ष पर काटे गए अंतःखंड हैं, तो

$$OP = 3, OQ = 4$$



$\therefore$ अतः P के नियामक $= (3, 0)$

Q के नियामक $= (0, 4)$

अब $\angle POQ = 90°$ ($\because$ वृत्तार्द्ध का कोण समकोण है)

$\therefore$ अतः PQ वृत्त का व्यास है

अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण

$$(x-3)(x-0)+(y-0)(y-4)=0$$

या $x^2-3x+y^2-4y=0$

या $x^2+y^2-3x-4y=0$

नोट :

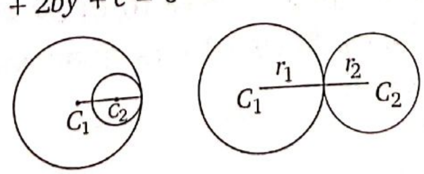
• वृत्त का समीकरण (0, 0), (3, 0) तथा (0, 4) से गुजरने वाले वृत्त के समीकरण के रूप में निकाला जा सकता है।

उदाहरण 11. सिद्ध कीजिए कि वृत्त $x^2+y^2+2ax+c=0$ तथा $x^2+y^2+2by+c=0$ एक दूसरे को स्पर्श करेंगे

यदि $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{c}$

हल : दिए गए वृत्त $x^2+y^2+2ax+c=0$ ...(1)

तथा $x^2+y^2+2by+c=0$ ...(2)



अतः (1) को केंद्र $C_1 = (-a, 0)$

त्रिज्या $= \sqrt{(-a)^2+0-c} = \sqrt{a^2-c}$

तथा (2) का केंद्र $C_2 = (0, -b)$

तथा त्रिज्या $= \sqrt{0+(-b)^2-c} = \sqrt{b^2-c}$

ये दोनों वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करेंगे यदि दोनों के केंद्रों के बीच की दूरी = दोनों की त्रिज्याओं का योग अथवा अंतर

$$C_1C_2 = r_1 \pm r_2 \qquad ...(3)$$

किन्तु $$C_1C_2 = \sqrt{(-a-0)^2+(0+b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

अत: (3) से, $$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2-c} \pm \sqrt{b^2-c}$$

$$\Rightarrow \quad a^2+b^2 = (a^2-c)+(b^2-c) \pm 2\sqrt{a^2-c}\,\sqrt{b^2-c}$$ (दोनों तरफ वर्ग करने पर)

$$\Rightarrow \quad 2c = \pm\, 2\sqrt{a^2-c}\,\sqrt{b^2-c}$$

$$\Rightarrow \quad c = \pm \sqrt{a^2-c}\,\sqrt{b^2-c}$$

$$\Rightarrow \quad c^2 = (a^2-c)\,(b^2-c)$$

$$\Rightarrow \quad c^2 = a^2b^2 - c\,(a^2+b^2) + c^2$$

$$\Rightarrow \quad a^2b^2 = c\,(a^2+b^2)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{c} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

सिद्ध हुआ।

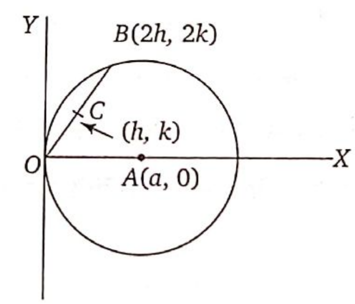
उदाहरण 12. वृत्त $x^2-2ax+y^2=0$ की जीवा मूल बिंदु से होकर जाती है। सिद्ध कीजिए इस जीवा को व्यास मानकर खींचे गए वृत्त के केंद्र का बिंदुपथ एक वृत्त है जो दिए गए वृत्त के केंद्र से होकर जाता है।

हल : दिया गया वृत्त

$$x^2-2ax+y^2=0 \qquad ...(1)$$

$$\Rightarrow \quad x^2-2ax+a^2+y^2-a^2=0$$

$$\Rightarrow \quad (x-a)^2+y^2=a^2$$



अत: दिए गए वृत्त का केंद्र = $(a, 0)$ तथा त्रिज्या = a

वृत्त (1) मूल बिंदु (0, 0) से होकर गुजरता है क्योंकि (0, 0) इसे संतुष्ट करता है।

माना मूल बिंदु से खींची गई जीवा OB है। OB को व्यास मानकर वृत्त खींचा गया है। OB के मध्य-बिंदु अर्थात् नये वृत्त के केंद्र का बिंदुपथ ज्ञात करना है।

माना C के नियामक (h, k) हैं

$\therefore \quad B$ के नियामक $= (2h, 2k)$ $\qquad$ ($\because C$, OB का मध्य-बिंदु है)

B के नियामक वृत्त (1) को संतुष्ट करेंगे क्योंकि B दिए गए वृत्त (1) पर है।

अत: $(2h)^2-2a\,(2h)+(2k)^2=0$ $\qquad$ [(1) में $x=2h$, $y=2k$ रखने पर]

$$\Rightarrow \quad 4h^2-4ah+4k^2=0$$

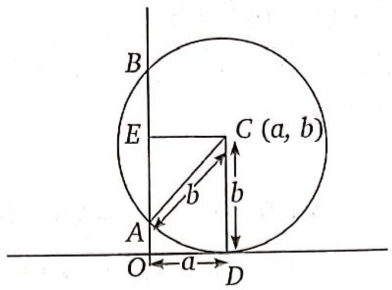
$$\Rightarrow \quad h^2-ah+k^2=0$$

$\therefore$ अभीष्ट बिंदुपथ $x^2 - ax + y^2 = 0$

यह एक वृत्त का समीकरण है तथा (1) का केंद्र (h, k) इसे संतुष्ट करता है।

IMP **उदाहरण 13.** कोई वृत्त x-अक्ष को स्पर्श करता है तथा y-अक्ष से अचर लंबाई $2k$ का अंतःखंड काटता है। सिद्ध कीजिए उसके केंद्र का बिंदुपथ $y^2 - x^2 = a^2$ है।

हल : माना $C\ (a, b)$ वृत्त का केंद्र है तथा x-अक्ष को बिंदु D पर स्पर्श करता है।



तो $\quad OD = a, CD = b, AB = 2k$

बिंदु C से AB पर लंब डालिए।

तब $AE = EB = k$ तथा चित्र से $AC = CD = b =$ त्रिज्या

समकोण ΔCEA से $AC^2 = CE^2 + EA^2$

$\Rightarrow \qquad b^2 = a^2 + k^2 \qquad\qquad \Rightarrow \quad k^2 = b^2 - a^2$

अतः बिंदु पथ (1) में $a = x, b = y$ रखने से प्राप्त होगा।

अभीष्ट बिंदुपथ $y^2 - x^2 = k^2$

उदाहरण 14. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र $(2, -1)$ है तथा रेखा जो $x - y - 6 = 0$ को स्पर्श करता है।

हल : प्रश्नानुसार, वृत्त का केंद्र $= (2, -1)$ तथा सरल रेखा का समीकरण $x - y - 6 = 0$

वृत्त इस सरल रेखा को स्पर्श करता है।

अतः वृत्त की त्रिज्या = केंद्र $(2, -1)$ से सरल रेखा $x - y - 6 = 0$ पर डाले गए लंब की लंबाई

$$= \left|\frac{2-(-1)-6}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}\right| \qquad \left[\because \text{लंब की लं०} = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$

अब, केंद्र $(h, k) = (2, -1)$

त्रिज्या $a = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

अतः वृत्त का समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

$$\Rightarrow \qquad (x-2)^2 + \{y-(-1)\}^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = \frac{9}{2}$$

$\Rightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 10 = 9$

$\Rightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 1 = 0$ यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 15. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र x-अक्ष पर है, त्रिज्या 5 है तथा जो बिंदु (2, 3) से होकर गुजरता है।

हल : प्रश्न से, माना वृत्त का केंद्र (h, k) है।

$\therefore$ केन्द्र $= (h, 0)$, त्रिज्या $= 5$

अत: वृत्त का समीकरण $(x-h)^2 + (y-0)^2 = 5^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2hx + h^2 + y^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2hx + h^2 - 25 = 0$ ...(1)

यह वृत्त बिन्दु (2, 3), से गुजरता है

अत: (1) से,

$$4 + 9 - 4h + h^2 - 25 = 0$$

$\Rightarrow \quad h^2 - 4h - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad (h-6)(h+2) = 0$

$\Rightarrow \quad h = 6, h = -2$

अत: जब $h = 6$, (1) से वृत्त

$$x^2 + y^2 - 12x + 36 - 25 = 0 \text{ या } x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$ उत्तर

तथा जब $h = -2$

$$x^2 + y^2 + 4x + 4 - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$$ उत्तर

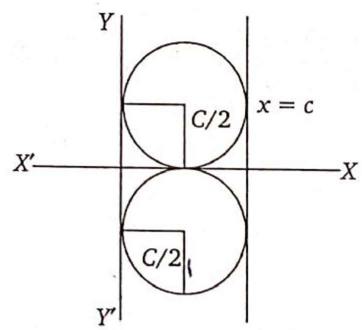
IMP **उदाहरण 16.** उन वृत्तों का समीकरण ज्ञात करें जों रेखाओं $x = 0, y = 0$ और $x = c$ को स्पर्श करते हैं।

हल : प्रश्न से, वृत्त $x = 0, y = 0$ अर्थात् दोनों अक्षों एवं $x = c$ को स्पर्श करते हैं।

$\therefore$ वृत्त का व्यास $= c$

$\therefore$ त्रिज्या $= \dfrac{c}{2}$

इन वृत्तों के केंद्र $\left(\dfrac{c}{2}, \dfrac{c}{2}\right)$ तथा $\left(\dfrac{c}{2}, -\dfrac{c}{2}\right)$ होंगे।



अत: वृत्तों के समीकरण $\left(x - \dfrac{c}{2}\right)^2 + \left(y \pm \dfrac{c}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{c}{2}\right)^2$

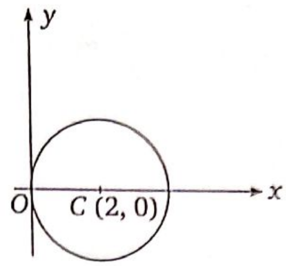
तथा $x^2 - cx + \dfrac{c^2}{4} + y^2 \pm cy + \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{c^2}{4}$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - cx \pm cy + \dfrac{c^2}{4} = 0$

$\Rightarrow \quad 4x^2 + 4y^2 - 4cx \pm 4cy + c^2 = 0$ अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 17. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र बिंदु (2, 0) है तथा वह y-अक्ष को स्पर्श करता है।

हल: प्रश्न से, वृत्त का केंद्र $(h, k) = (2, 0)$



$\Rightarrow \quad h = 2, k = 0$

त्रिज्या $a = OC = 2$

$\therefore$ वृत्त का समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$

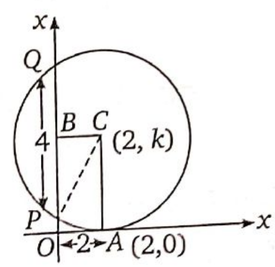
$\Rightarrow \quad (x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$

$\Rightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x = 0$

उदाहरण 18. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष को मूल विंदु से 2 की दूरी पर स्पर्श करता है तथा y-अक्ष पर अंतःखंड 4 काटता है।

हल : माना वृत्त x-अक्ष को बिंदु A पर स्पर्श करता है तथा y-अक्ष पर अंतःखंड $PQ = 4$ काटता है। अतः A के नियामक $= (2, 0)$ तथा केंद्र के नियामक $(h, k) = (2, k)$



$CB \perp PQ$ डालिए।

जिससे $PB = BQ = 2$ तथा $CB = OA = 2$

समकोण त्रिभुज CPB से

$$CP^2 = CB^2 + BP^2 = 2^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$$

$\therefore \quad CP = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

किंतु त्रिज्या $CP = CA = k \qquad \therefore \quad k = 2\sqrt{2}$

अतः वृत्त का केन्द्र $(2, 2\sqrt{2})$ तथा त्रिज्या $2\sqrt{2}$ है।

$\therefore$ वृत्त का समीकरण $(x-2)^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2})^2$

$\Rightarrow \qquad x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4\sqrt{2}y + 8 = 8$

$\Rightarrow \qquad x^2 + y^2 - 4x - 4\sqrt{2}y + 4 = 0$

यह अभीष्ट समीकरण है।

महत्वपूर्ण सूत्र

1. वृत्त का समीकरण जिसका केंद्र (h, k) है तथा त्रिज्या a है : $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$
2. वृत्त का समीकरण जिसका केंद्र (0, 0) तथा त्रिज्या a है : $x^2+y^2=a^2$
3. वृत्त का समीकरण जिसके व्यास के सिरे (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से दिए जाते हैं
$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$
4. वृत्त का सामान्य समीकरण
$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ जिसका केंद्र $(-g, -f)$ तथा त्रिज्या $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

प्रश्नावली 11.1

1. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (0, 0) तथा त्रिज्या 3 है।
2. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र (0, – 5) तथा त्रिज्या 4 है।
3. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (a, a) तथा त्रिज्या $a\sqrt{2}$ है।
4. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ तथा त्रिज्या a है।
5. निम्न वृत्तों के केंद्रों के निर्देशांक और त्रिज्याओं की लंबाई ज्ञात करें।
(i) $(x+2)^2+(y+4)^2=16$ (ii) $4x^2+4y^2+12ax-6ay-a^2=0$
(iii) $x^2+y^2-6x+8y+9=0$ (iv) $x^2+y^2-4x+2y+1=0$
[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]
6. $(x-y+a)^2+(x+y-a)^2=2a^2$ का केंद्र तथा त्रिज्या ज्ञात करें।
7. यदि वृत्त $4x^2+4y^2-5x+6y+c+7=0$ मूल बिंदु से होकर गुजरता है तो c का मान ज्ञात करें।
8. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र (2, 3) है तथा जो बिंदु (5, – 1) से होकर गुजरता है।
9. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र (3, – 4) है तथा जो दो सरल रेखाओं $3x-2y-1=0$ तथा $4x+y-27=0$ के प्रतिच्छेदन बिंदु से होकर गुजरता है।
10. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र सरल रेखाओं $x-2y+3=0$ तथा $2x-3y+4=0$ के प्रतिच्छेद बिंदु पर है तथा उसकी त्रिज्या 6 इकाई है।
11. दिखायें कि बिंदु (1, 1) वृत्त $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ के भीतर का कोई बिंदु है।
[**संकेत** : केंद्र $C(-g, -f)=(2, -3)$ तथा त्रिज्या $\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{4+9+12}=5$
यदि $P(1, 1)$ हो तो $CP=C$ तथा P के बीच की दूरी $CP=\sqrt{(1-2)^2+(1+3)^2}=\sqrt{17}<5$ अत: परिणाम]
12. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु (5, 4) से होकर जाता है और वृत्त $x^2+y^2-8x-12y+15=0$ के संकेंद्रीय है।
13. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो $x^2+y^2+8x+10y-7=0$ के केंद्र से होकर गुजरता है तथा वृत्त $2x^2+2y^2-8x-12y-9=0$ के साथ संकेंद्रीय है।
14. वृत्त $x^2+y^2-3x+ky-5=0$ तथा $4x^2+4y^2-12x-y-9=0$ संकेन्द्रीय हों तो k का मान बताइए।
15. (i) सिद्ध कीजिए कि वृत्त $x^2+y^2=1$, $x^2-2x-4y-11=0$ तथा वृत्त $x^2+y^2-4x-6y-243=0$ की त्रिज्यायें गुणोत्तर श्रेढी में हैं।

(ii) दिखायें वृत्त $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$ तथा $x^2 + y^2 - 4x - 12y = 1$ की त्रिज्यायें समानांतर श्रेढी में है।

16. (i) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके व्यास के सिरों के नियामक (2, 3) तथा (–1, – 2) हैं। वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

(ii) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके व्यास के निर्देशांक (0, 1) तथा (1, 1) है।

17. वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदुओं $(a\sin\theta, b\cos\theta)$ तथा $(a\cos\theta, -b\sin\theta)$ को मिलाने वाली सरल रेखा को व्यास मानकर खींचा गया है।

18. सिद्ध कीजिए बिंदं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) को व्यास मानकर खींचे गए वृत्त का समीकरण वही है जो बिंदुओं (x_1, y_2) तथा (x_2, y_1) को व्यास मानकर खींचा जाता है। बताइए ऐसा क्यों है।

19. $y = 2x$ वृत्त $x^2 + y^2 = 10x$ की कोई जीवा है तो इस जीवा को व्यास मानकर खींचे गए वृत्त का समीकरण ज्ञात करें।

20. उस वृत्त का समीकरण करें जो मूल बिंदु से होकर गुजरता है तथा अक्षों से अंतःखंड 2 तथा 3 काटता है।

21. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात जिसका केंद्र (2, 3) है तथा जो x-अक्ष को स्पर्श करता है।

22. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात जिसका केंद्र (1, 2) है तथा जो y-अक्ष को स्पर्श करता है।

23. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात जिसका केंद्र (1, 1) है तथा जो दोनों अक्षों को स्पर्श करता है।

24. उन वृत्तों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो दोनों अक्षों तथा $x = c$ को स्पर्श करता है।

[**संकेत :** रेखायें $x = 0, y = 0, x = c$]

25. सिद्ध कीजिए सीधी रेखाओं $x\cos\alpha + y\sin\alpha = a$ और $x\sin\alpha + y\cos\alpha = b$ के प्रतिच्छेद बिंदु का बिंदुपथ एक वृत्त है।

[**संकेत :** रेखाओं के समीकरण को वर्ग कर जोंड़े]

26. कोई वृत्त x-अक्ष को स्पर्श करता है तथा y-अक्ष से अचर लंबाई $2k$ काटता है। सिद्ध कीजिए उसके केंद्र का बिंदुपथ $y^2 - x^2 = k^2$ है।

27. वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ का केंद्र तथा त्रिज्या ज्ञात करें।

28. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केन्द्र (–1, 1) है तथा जो सरल रेखा $x + 2y - 4 = 0$ को स्पर्श करती है।

29. सिद्ध कीजिए वृत्त $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ तथा $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ एक दूसरे को स्पर्श करते है।

30. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदु (1, 2) तथा (3, 0) से गुजरता है तथा x-अक्ष पर अंतःखंड 7 काटता है।

31. सिद्ध करें बिन्दुओं (0, a) तथा (0, $-a$) से जाने वाले दो वृत्त सरल रेखा $y = mx + c$ को स्पर्श करेंगे यदि $c^2 = a^2\,(2 + m^2)$

उत्तरमाला

1. $x^2 + y^2 = 9$

2. $x^2 + y^2 + 10y + 9 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay = 0$

4. $x^2 + y^2 - 2ax\cos\alpha - 2ay\sin\alpha = 0$

5. (i) [(–2, – 4), त्रिज्या = 4]

(ii) $\left[\left(-\frac{3a}{2}, \frac{3a}{4}\right), \text{त्रिज्या} = \frac{7a}{4}\right]$

(iii) [(3, – 4) त्रिज्या = 4]

6. केन्द्र $(0, a)$, त्रिज्या $= a$

7. = –7

8. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

9. $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 100 = 0$

10. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$

12. $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 47 = 0$

13. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 87 = 0$

14. $k = -\frac{1}{4}$

16. (i) $x^2 + y^2 - x - y - 8 = 0$ क्षेत्रफल $= \frac{17}{2}\pi$ (ii) $x^2 + y^2 - x - 2y + 1 = 0$

17. $x^2 + y^2 - a(\sin\theta + \cos\theta)x - b(\cos\theta - \sin\theta)y + (a^2 - b^2)\sin\theta.\cos\theta = 0$

19. $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

20. $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$

21. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 4 = 0$

22. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

23. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

24. $4x^2 + 4y^2 - 4cx \pm 4cy + c^2 = 0$

27. केन्द्र $(-g, -f)$; त्रिज्या $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$

28. $5x^2 + 5y^2 + 10x - 10y + 1 = 0$

30. $x^2 + y^2 + x + 3y - 12 = 0$

11.8 वृत्त के समीकरण में अचर (Constants in the Equation of Circle)

हम देखते है कि वृत्त के सामान्य समीकरण $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ में तीन अचर h, k तथा a है।

इसी तरह समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ में भी तीन अचर g, f तथा c है।

अत: इन तीन अज्ञात अचरों के निर्धारण के लिए तीन समीकरणों की आवश्यकता होगी। दूसरे शब्दों में, किसी वृत्त को अद्वितीय रूप में तभी खींची जा सकती है जब वे तीन स्वतंत्र प्रतिबंधों (समीकरणों) का पालन करते हैं।

11.8.1 तीन बिंदुओं से गुजरने वाले वृत्त का समीकरण (Circle Passing through three given Points)

माना वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

यदि वृत्त तीन दिए गए बिंदुओं से गुजरता है तो ये बिंदु इस समीकरण को संतुष्ट करेंगे, जिससे g, f तथा c में तीन समीकरण प्राप्त होंगे जिन्हें हल कर g, f तथा c का मान प्राप्त किया जा सकता है।

क्रिया विधि निम्न उदाहरणों से सपष्ट है।

विकल्प : यदि वृत्त तीन बिंदुओं $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ तथा (x_3, y_3) से गुजरता है, तो उस वृत्त का समीकरण

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु (1, 1), (2, – 1) और (3, – 2) से होकर जाता है।

हल : दिए गए वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(i)

चूँकि (1) बिंदु (1, 1), (2, – 1) तथा (3, – 2) से होकर गुजरता है। अत: (i) से

$$\therefore \quad 1^2 + 1^2 + 2g \times 1 + 2f \times 1 + c = 0$$

$$2^2 + (-1)^2 + 2g \times 2 + 2f(-1) + c = 0$$

$$3^2 + (-2)^2 + 2g \times 3 + 2f(-2) + c = 0$$

अर्थात् $2+2g+2f+c=0$ ...(ii)

$5+4g-2f+c=0$ ...(iii)

$13+6g+4f+c=0$ ...(iv)

(iii) – (ii) से $2g-4f=-3$ ...(v)

(iv) – (iii) से $2g+6f=-8$ ...(vi)

पुन: (vi) – (v) से $10f=-5 \Rightarrow f=-\frac{1}{2}$

पुन: (v) में f का मान रखने पर

$$2g-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3 \Rightarrow 2g=-3-2=-5$$

$\therefore$ $g=-\frac{5}{2}$ तथा g एवं f का मान समीकरण (ii) में रखने $c=4$

इन मानों को (i) में रखने पर

$$x^2+y^2+2(-5/2)x+2(-1/2)y+4=0 \Rightarrow x^2+y^2-5x-y+4=0$$

यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 2. किसी त्रिभुज के शीर्ष के नियामक $A(1,-5), B(5,7)$ तथा $C(-5,1)$ हैं तो ABC के परिगत वृत्त का समीकरण प्राप्त करें।

हल : माना वृत्त का समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ...(1)

$\because$ वृत्त (1) बिंदु $(1,-5), (5,7)$ तथा $(-5,1)$ से गुजरता है

अत: $1+25+2g-10f+c=0$

अर्थात् $2g-10f+c+26=0$ ...(2)

तथा $25+49+10g+15f+c=0$

अर्थात् $10g+14f+c+74=0$ ...(3)

तथा $25+1-10g+2f+c=0$

अर्थात् $-10g+2f+c+26=0$ ...(4)

(2) – (3) से

$8g+24f+48=0 \Rightarrow g+3f+6=0$ ...(5)

(3) – (4) से

$20g+12f+48=0 \Rightarrow 5g+3f+12=0$ ...(6)

(6) – (5) से

$$4g+6=0 \Rightarrow g=-\frac{3}{2}$$

(5) में $g=-\frac{3}{2}$ रखने पर

$$-\frac{3}{2}+3f+6=0 \Rightarrow f=-\frac{3}{2}$$

तथा (2) में f तथा g का मान रखने पर

$$2\times\left(-\frac{3}{2}\right)-10\times\left(-\frac{3}{2}\right)+c+26=0$$

$\Rightarrow \quad c = 3-15-26 = -38$

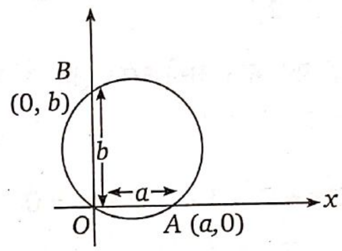
अत: (1) में f, g तथा c का मान रखने पर

$$x^2+y^2-3x-3y-38=0$$

यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 3. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो मूल बिंदु से गुजरता है तथा नियामक अक्षों के धनात्मक भाग से (Coordinate Axes) से अंत:खंड a तथा b काटता है।

हल : माना वृत्त x तथा y अक्षों क्रमश: A तथा B बिंदु पर काटता है।



अत: प्रश्न से A के निर्देशांक $= (a, 0)$

B के निर्देशांक $= (b, 0)$

अत: वृत्त मूल बिंदु $(0, 0)$, $(a, 0)$ तथा $(0, b)$ से होकर गुजरता है।

मताना वृत्त का समीकरण

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad ...(1)$$

$\therefore \quad (0, 0)$ वृत्त पर है।

अत: $\quad 0+0+0+0+c=0 \quad \Rightarrow \quad c=0$

(1) में यह मान रखने पर वृत्त का समीकरण

$$x^2+y^2+2gx+2fy=0 \quad ...(2)$$

पुन: $A\ (a, 0)$ वृत्त (1) पर है अत:

$$a^2+0+2ag+0=0$$

$\Rightarrow \quad a\,(a+2g)=0$

$\Rightarrow \quad a=0, a=-2g$ अर्थात् $g=-\dfrac{a}{2}$

पुन: $B\ (0, b)$ वृत्त (1) पर है अत:

$$0+b^2+0+2bf=0$$

$\Rightarrow \quad b\,(b+2f)=0$

$\Rightarrow \quad b=0, b=-2f \quad$ या $\quad f=-\dfrac{b}{2}$

इन मानों को (1) में रखने पर

$$x^2+y^2+2\left(-\frac{1}{2}a\right)x+2\left(-\frac{1}{2}b\right)y=0$$

अर्थात् $\quad x^2+y^2-ax-ay=0$

यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 4. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदुओं (1, – 2) तथा (4, – 3) से होकर जाता है और जिसका केन्द्र सरल रेखा $3x + 4y = 5$ पर है।

हल : माना वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad ...(1)$$

यह वृत्त बिंदुओं (1, – 2), (4, – 3) से होकर जाता है।

अतः (1) से

$$1 + 4 + 2g - 4f + c = 0$$

$$16 + 9 + 8y - 6f + c = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2g - 4f + c + 5 = 0 \quad ...(2)$$

$$8g - 6f + c + 25 = 0 \quad ...(3)$$

वृत्त का केंद्र $(-g, -f)$ सरल रेखा पर है।

$$\therefore \quad -3g - 4f = 5 \quad ...(4)$$

(2), (3) तथा (4) को हल करने पर

$$g = -3, f = 1, c = 5$$

अतः (1) से

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$$

यह वृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

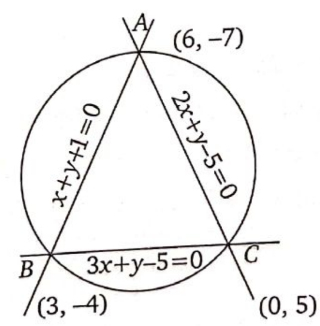
उदाहरण 5. किसी त्रिभुज की भुजायें $x + y + 1 = 0, 3x + y - 5 = 0$ तथा $2x + y - 5 = 0$ से दी जाती है। इस त्रिभुज के परिगत वृत्त का समीकरण ज्ञात करें।

हल : त्रिभुज की भुजायें

$$x + y + 1 = 0 \quad ...(1)$$

$$3x + y - 5 = 0 \quad ...(2)$$

$$2x + y - 5 = 0 \quad ...(3)$$



(1), (2) तथा (3) को हल करने पर

त्रिभुज के शीर्षों के नियामक (3, – 4), (0, 5) तथा (6, – 7) हैं।

माना परिगत वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad ...(1)$

अतः शीर्षों के नियामक (1) को संतुष्ट करेंगे।

$$\text{अतः} \quad 25 + 6g - 8f + c = 0 \quad ...(2)$$

$$25+10f+c=0 \quad ...(3)$$

$$85+12g-14f+c=0 \quad ...(4)$$

(2) – (3) से

$$6g-18f=0 \quad \Rightarrow \quad g=3f \quad ...(5)$$

(4) – (3) से

$$60+12g-24f=0 \quad \Rightarrow \quad g-2f+5=0 \quad ...(6)$$

(5) से g का मान रखने पर

$$3f-2f+5=0 \qquad \Rightarrow \quad f=-5$$

$\therefore$ $$g=3f=3\times(-5)=-15$$

(3) में $f=-5$ रखने से $c=-25+50=25$

अतः $x^2+y^2-30x-10y+25=0$ अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 6. सिद्ध करें बिंदु (2, – 4), (3, – 1), (3, – 3) तथा (0, 0) संवृत्तीय (concylic) है।

हल : माना (2, – 4), (3, – 1), (3, – 3) तथा (0, 0) से गुजरने वाला वृत्त

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad ...(1)$$

से दिया जाता है।

$\because$ यह (0, 0) से गुजरता है।

$\therefore$ $$0+0+0+0+c=0 \qquad \Rightarrow \quad c=0$$

अतः (1) से वृत्त का समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy=0$ ...(2)

बिंदु (2, – 4) वृत्त (2) पर है

$$4+16+4g-8f=0$$

$$\Rightarrow \quad 4g-8f=-20 \qquad \Rightarrow \quad g-2f=-5 \quad ...(3)$$

पुनः (3, – 1) वृत्त पर है

$$9+1+6g-2f=0 \qquad \Rightarrow \quad 3g-f=-5 \quad ...(4)$$

(3) तथा (4) को हल करने पर

$$g=-1, f=2$$

अतः (2) से वृत्त का समीकरण

$$x^2+y^2-2x+4y=0$$

अत यदि (3, – 3) इस वृत्त पर है, तो यह इसे संतुष्ट करेगा।

$\therefore$ $$(3)^2+(-3)^2-2\,(3)+4\,(-3)=9+9-6-12=0$$

अतः बिंदु (3, – 3) इस वृत्त पर है, अतः दिए गए बिंदु संवृत्तीय है।

महत्वपूर्ण सूत्र

यदि वृत्त तीन बिंदुओं $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ तथा (x_3, y_3) से गुजरता है, तो उस वृत्त का समीकरण

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

प्रश्नावली 11.2

1. यदि किसी वृत्त का केंद्र सरल रेखा $3x + 4y = 7$ पर हो तथा वह बिंदु (1, – 2) तथा (4, – 3) से होकर गुजरता हो तो उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें।

2. (i) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो (3, – 2) तथा (–2, 0) से होकर गुजरता है तथा इसका केंद्र $2x - y = 3$ पर है।

(ii) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो (0, 5) तथा (6, 1) से होकर गुजरता है तथा इसका केंद्र $12x + 5y = 25$ पर है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]**

(iii) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदुओं (2, 2), (–4, 8) से होकर गुजरता है तथा जिसका केंद्र सरल रेखा $2x + 5y = 2$ पर स्थित है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]**

3. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो (4, 5) तथा (6, – 4) से होकर गुजरता है तथा उसका केंद्र x-अक्ष पर है।

4. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केंद्र x-अक्ष पर है तथा जो बिंदु (2, 3) से गुजरता है।

5. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो मूल बिंदु तथा बिंदु $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ से होकर गुजरता है तथा जिसका व्यास $2x - 3y = 0$ से दिया जाता है।

6. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो मूल बिंदु से होकर गुजरता है तथा अक्षों पर अंतःखंड 4 तथा 5 काटता है।

7. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो अक्षों से अंतःखंड –5 तथा 7 काटता है तथा मूल बिंदु से होकर गुजरता है।

8. दिखायें कि बिंदु (1, – 6), (5, 2), (7, 0) तथा (–1, – 4) संवृत्तीय चतुर्भुज के शीर्ष है।

9. दिखायें कि बिंदु (3, – 2), (1, 0), (–1, – 2) तथा (1, – 4) संवृत्तीय है।

10. किसी वर्ग $ABCD$ की भुजा AB की लंबाई a है तो AB तथा AD को निर्देशांक अक्ष पर लेकर इस वर्ग के परिवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए। इसका केंद्र तथा त्रिज्या ज्ञात करें।

[**संकेत :** वृत्त बिंदु (0, 0), $(a, 0)$, (a, a) तथा $(0, a)$ से होकर गुजरेगा।

11. (i) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो (1, 2), (3, – 4) तथा (5, – 6) से होकर गुजरता हैं।

(ii) बिंदुओं (3, 1), (14, –1) और (11, – 5) से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात करें।

12. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जो $x + y = 6$, $2x + y = 4$ तथा $x + 2y = 5$ से दी जाती हैं तो इस त्रिभुज के परिगत वृत्त का समीकरण निकालें।

13. (i) वृत्त की परिभाषा दें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]**

(ii) वृत्त का व्यापक समीकरण लिखें।

(iii) उस वृत्त का समीकरण लिखें, जिसका केन्द्र मूल बिंदु तथा त्रिज्या a है।

(iv) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केन्द्र (2, 0) तथा त्रिज्या 7 है।

(v) उस वृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसका केन्द्र (2, 0) है तथा जो y-अक्ष को स्पर्श करता है।

(vi) वृत्त का परामितीय समीकरण लिखें।

(vii) $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$ का केन्द्र बतायें।

(viii) $x^2 + y^2 - 2ax + 2by + b^2 = 0$ की त्रिज्या ज्ञात करें।

(ix) $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$ से निरूपित वृत्त का व्यास ज्ञात करें।

(x) $x^2 + y^2 = 9$ को प्राचलिक समीकरण के रूप में व्यक्त करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]**

(xi) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ की त्रिज्या ज्ञात करें।

14. सही उत्तर पर (✓) का चिन्ह लगायें—

(i) वृत्त का केन्द्र (h, k) हो तथा यह x-अक्ष को स्पर्श करती है तो उसकी त्रिज्या होगी

(a) h (b) k (c) $h^2 + k^2$ (d) $\sqrt{h^2 + k^2}$

(ii) यदि वृत्त दोनों अक्षों को स्पर्श करता है, तो केन्द्र के नियामक

(a) समान होंगे (b) असमान होंगे

(c) समान या असमान दोनों हो सकते है (d) इनमें से कोई नहीं

(iii) यदि वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ हो तो इसका केन्द्र

(a) (g, f) (b) $(-g, -f)$ (c) $\left(\frac{1}{2}g, \frac{1}{2}f\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{2}g, -\frac{1}{2}f\right)$

(iv) $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ एक वृत्त होगा यदि

(a) $a = b$ तथा $h = 0$ (b) $a = b, h \neq 0$

(c) $a \neq b, h \neq 0$ (d) $a \neq b, h = 0$

(v) वृत्त $2x^2 + 2y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$ का केंद्र है

(a) $(1, -1)$ (b) $(-1, -1)$ (c) $(-1, 1)$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. $15x^2 + 15y^2 - 94x + 18y + 55 = 0$

2. (i) $x^2 + y^2 + 3x + 12y + 2 = 0$ (ii) $x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x - 2y - 15 = 0$

(iii) $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 16 = 0$

3. $2x^2 + 2y^2 - 11x - 18 = 0$

4. $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0, x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$

5. $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0$

6. $x^2 + y^2 - 4x - 5y = 0$

7. $x^2 + y^2 + 5x - 7y = 0$

10. $x^2 + y^2 - a(x + y) = 0$, केंद्र $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, त्रिज्या $= \frac{a}{\sqrt{2}}$

11. $x^2 + y^2 - 22x - 4y + 25 = 0$

12. $x^2 + y^2 - 17x - 19y - 50 = 0$

13. (i) देखें परिभाषा। (ii) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ (iii) $x^2 + y^2 = a^2$

(iv) $x^2 + y^2 - 4x - 45 = 0$ (v) $x^2 + y^2 - 4x = 0$

(vi) $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta$ (vii) $(-2, 2)$ (viii) a

(ix) $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ (x) $x = 3\cos\theta, y = 3\sin\theta$ (xi) 2

14. (i) (b) (ii) (a) (iii) (b) (iv) (a) (v) (a)

□□□

खण्ड-4 : त्रिविमीय निर्देशांक ज्यामिति

14. अन्तरिक्ष में बिन्दु 201-218

15. समतल 219-230

16. सरल रेखा 231-244

त्रिविमीय निर्देशांक ज्यामिति

CHAPTER 12

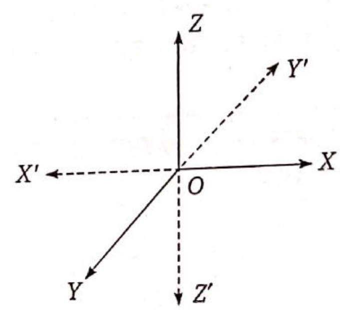
अन्तरिक्ष में बिन्दु (The Point in Space)

12.1 भूमिका (Introduction)

द्विविमीय निर्देशांक ज्यामिति में हम किसी तल में किसी बिंदु की स्थिति को बताने के लिए दो नियामकों x और y का प्रयोग करते हैं, जो नियामक अक्षों से इसकी दूरी को बताता है। किंतु अंतरिक्ष (space) में किसी बिंदु की स्थिति बताने के लिए तीन नियामकों x, y, z का प्रयोग किया जाता है जो बिंदु की तीन निर्देशांक तलों, जो परस्पर लंब होते हैं से दूरियों को सूचित करता है।

12.2 नियामक अक्ष तथा समतल (Coordinate Axes and Coordinates of a Point)

माना XOX, YOY तथा ZOZ तीन परस्पर लंब रेखायें हैं, जो बिंदु O पर मिलती हैं।



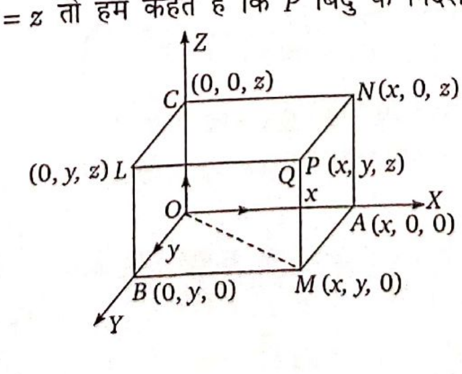
यदि O बिंदु मूल बिंदु हो तो रेखायें XX', YY' तथा ZZ' **निर्देशांक अक्ष** कहलाते है, जो क्रमशः ***x*-अक्ष, *y*-अक्ष** तथा ***z*-अक्ष** को निर्देशित करती हैं। OX, OY तथा OZ अक्षों की धनात्मक दिशायें हैं तथा OX', OY' तथा OZ' अक्षों की ऋणात्मक दिशायें हैं। तीनों अक्षों में से दो-दो के तीन युग्म निर्देशांक समतल XOY, YOZ तथा ZOX बनाते हैं, जो क्रमशः xy-तल, yz-तल तथा zx तल के नाम से जाने जाते हैं।

12.3 अंतरिक्ष में किसी बिंदु के निर्देशांक (Coordinates of a Point in Space)

माना P कोई बिंदु है। अंतरिक्ष (space) में इसकी स्थिति ज्ञात करने के लिए P से गुजरते हुए निर्देशांक समतलों के समानांतर तीन समतल लेते हैं, जो अक्षों OX, OY तथा OZ से क्रमशः A, B तथा C बिंदुओं पर मिलते हैं।

OA, OB तथा OC को भुजा मानकर समकोणीय समानांतर षटफलक (Rectangular Parallelopiped) की रचना करते हैं।

माना $OA = x, OB = y, OC = z$ तो हम कहते हैं कि P बिंदु के निर्देशांक (x, y, z) हैं।



स्पष्ट है x, y, z बिंदु P की क्रमशः xy-तल, yz-तल तथा zx-तल से दूरियाँ हैं। अतः

(i) xy-तल में प्रत्येक बिन्दु का z नियामक शून्य होगा।

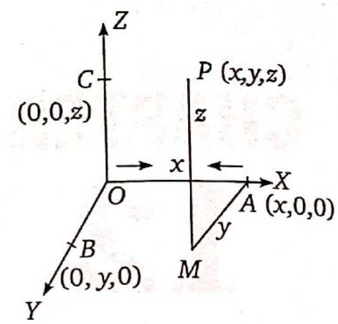
(ii) yz-तल में प्रत्येक बिन्दु का x नियामक शून्य होगा।

(iii) zx-तल में प्रत्येक बिन्दु का y नियामक शून्य होगा।

(iv) x-अक्ष पर प्रत्येक बिंदु, $(x, 0, 0)$ रूप का होगा।

(v) y-अक्ष पर प्रत्येक बिंदु $(0, y, 0)$ रूप का होगा।

(vi) z-अक्ष पर प्रत्येक बिंदु $(0, 0, z)$ रूप का होगा।

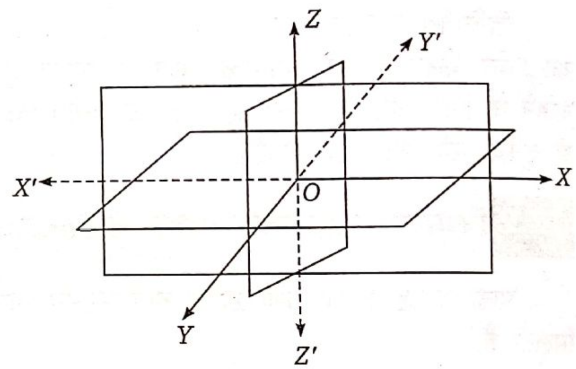


12.4 अष्टक (Octants)

निर्देशांक तल XOY, YOZ तथा ZOX अंतरिक्ष को 8 भागों में बाँटते हैं जो अष्टक (Octants) कहलाते हैं।

चित्र में

$OXYZ, OX'YZ, OXY'Z, OXYZ', OX'Y'Z, OXY'Z', OX'YZ'$ तथा $OX'Y'Z'$ आठ अष्टक हैं। किसी बिंदु के निर्देशांक चिह्न से ज्ञात होता है कि बिंदु किस अष्टक में है। नीचे की तालिका में विभिन्न अष्टकों में किसी बिंदु के निर्देशांकों के चिह्नों को दर्शाया गया है।



अष्टक → निर्देशांक ↓	OXYZ I	OX'YZ II	OXY'Z III	OXYZ' IV	OX'Y'Z V	OXY'Z' VI	OX'YZ' VII	OX'Y'Z' VIII
x	+	−	+	+	−	+	−	−
y	+	+	−	+	−	−	+	−
z	+	+	+	−	+	−	−	−

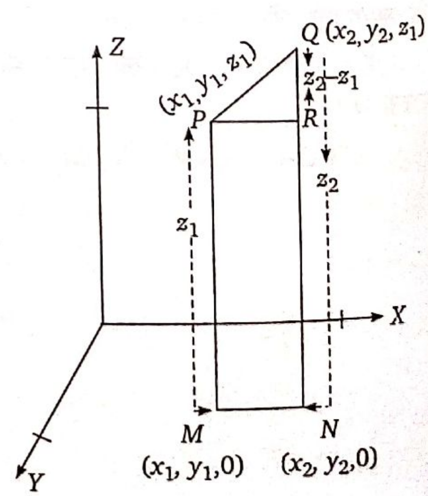
12.5 दूरी सूत्र (Distance Formula)

दो दिए गए बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ के बीच की दूरी $\boldsymbol{PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$ से दी जाती है।

प्रमाण : माना O मूल बिंदु तथा $P(x_1, y_1, z_1)$ एवं $Q(x_2, y_2, z_2)$ दिए गए बिंदु हैं।

बिंदु P तथा Q से xy-तल पर क्रमशः PM तथा QN लंब डाला। बिंदु M तथा N xy-तल में हैं, अतः इनके नियामक क्रमशः $(x_1, y_1, 0)$ तथा $(x_2, y_2, 0)$ होंगे।

पुनः द्विविमीय ज्यामिति से OX तथा OY-अक्षों के सापेक्ष बिंदु M तथा N के नियामक क्रमशः $M(x_1, y_1)$ तथा $N(x_2, y_2)$ होंगे।



$$\therefore \quad MN^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

अब P से $PR \perp QN$ डालें।

चित्र से $PR \parallel MN$ तथा $PR = MN$

समकोण ΔPQR से

$$PQ^2 = PR^2 + RQ^2 = MN^2 + (QN - RN)^2 = MN^2 + (QN - PM)^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \qquad [\because PM = z_1, QN = z_2]$$

$$\therefore \quad PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

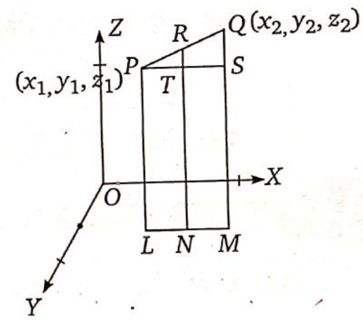
सिद्ध हुआ।

नोट :

- (i) **बिन्दु $P(x, y, z)$ की मूल बिंदु (0, 0, 0) से दूरी** $= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- (ii) बिन्दु $P(x, y, z)$ की x-अक्ष, y-अक्ष तथा z-अक्ष से दूरियाँ क्रमशः $\sqrt{y^2 + z^2}$, $\sqrt{x^2 + z^2}$ तथा $\sqrt{x^2 + h^2}$ हैं।

12.6 दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखाओं को $m : n$ में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक (Coordinates of the Point Dividing the Join of Two Points or Section Formula)

माना $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ दो बिंदु हैं तथा PQ सरल रेखा पर $R(x, y, z)$ कोई बिंदु है जो इसे $m : n$ में विभाजित करता है। P, Q तथा R से xy-तल पर क्रमशः PL, QM तथा RN लंब डालें। पुनः $PS \perp QM$ खींचें जो QM तथा RN से बिंदु S तथा T पर मिलते हैं।



अब $\quad PL = z_1, QM = z_2, RN = z$

$\therefore \quad RT = RN - TN = RN - PL = z - z_1$

$\quad QS = QM - SM = QM - PL = z_2 - z_1$

अब समरूप ΔPRT तथा PQS से $\dfrac{RT}{QS} = \dfrac{PR}{PQ}$

या $\quad \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \dfrac{m}{m+n} \qquad [\because RT = z - z_1, QS = z_2 - z_1]$

या $\quad (m+n)(z - z_1) = m(z_2 - z_1)$

या $\quad (m+n)z = mz_2 - mz_1 + mz_1 + nz_1$

या $\quad (m+n)z = mz_2 - mz_1 + (m+n)z_1$

या $\quad (m+n)z = mz_2 + nz_1$

$\therefore \quad \boldsymbol{z = \dfrac{mz_2 + nz_1}{m+n}}$

इसी तरह $\boldsymbol{x = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}}, \quad \boldsymbol{y = \dfrac{my_2 + ny_1}{m+n}}$

नोट :

- यदि बिंदु R रेखा PQ को बाह्यतः $m : n$ के अनुपात में विभाजित करता है, तो $n = -n$ लेने पर

$$\boldsymbol{x = \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \quad y = \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \quad z = \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}}$$

- यदि R रेखा PQ को $\lambda : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है तो $x = \dfrac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, y = \dfrac{\lambda y_1 + y_2}{\lambda + 1}; Z = \dfrac{\lambda z_2 + z_1}{\lambda + 1}; \lambda \neq -1$

ये नियामक (x, y, z) रेखा PQ पर किसी बिन्दु के सामान्य नियामक (General coordinates) कहलाते हैं। λ के धनात्मक या ऋणात्मक होने के अनुसार R रेखा PQ को अंतः या बाह्य रूप में विभाजित करता है।

12.7 दो दिए गए बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को जोड़ने वाली रेखा PQ के मध्य बिंदु के निर्देशांक [Coordinates of middle point of the line PQ joining the points $P(x_1, y_1, z_1)$ and $Q(x_2, y_2, z_2)$]

$\because$ मध्य-बिन्दु के लिए $m = n = 1$

अत: **मध्य-बिंदु के निर्देशांक** $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$; $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$

उदाहरण : उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात करें जो बिंदु $A(3, 1, -2)$ तथा $B(1, -3, -1)$ को मिलाने वाली सरल रेखा को 2 : 3 में अंत: विभाजित करता है। रेखा AB के मध्य-बिंदु के निर्देशांक भी ज्ञात करें।

हल : AB को 2 : 3 में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक

यदि (x, y, z) हों तो [यहाँ $m = 2, n = 3$]

अत: $x = \dfrac{2\times 1 + 3\times 3}{2+3} = \dfrac{11}{5}$; $y = \dfrac{2\times(-3) + 3\times 1}{2+3} = \dfrac{-3}{5}$; $z = \dfrac{2\times(-1) + 3\times(-2)}{2+3} = \dfrac{-8}{5}$

$\therefore$ अभीष्ट बिन्दु $= (x, y, z) = \left(\dfrac{11}{5}, \dfrac{-3}{5}, \dfrac{-8}{5}\right)$

(ii) यदि AB के मध्य-बिंदु के निर्देशांक (α, β, γ) हों, तो

$$\alpha = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2,\ \beta = \frac{1 + (-3)}{2} = \frac{-2}{2} = -1,\ \gamma = \frac{(-2) + (-1)}{2} = \frac{-3}{2}$$

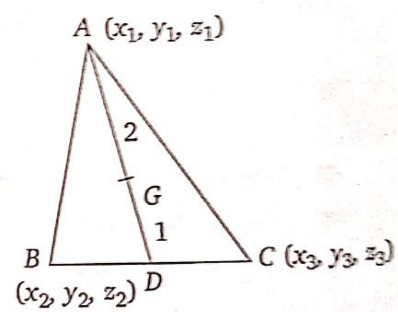
$\therefore$ मध्य-बिंदु $= (\alpha, \beta, \gamma) = (2, -1, -3/2)$

12.8 त्रिभुज का केन्द्रक (Centroid of a Triangle)

यदि किसी ΔABC के शीर्ष $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ तथा $C(x_3, y_3, z_3)$ हों तो उसका केन्द्रक

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$$

से दिया जाता है।



प्रमाण : माना ΔABC के शीर्ष $A(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ तथा (x_3, y_3, z_3) हैं। D भुजा BC का मध्य-बिंदु है।

$\therefore$ बिंदु D के निर्देशांक $= \left(\dfrac{x_2 + x_3}{2}, \dfrac{y_2 + y_3}{2}, \dfrac{z_2 + z_3}{2}\right)$

माना G, ΔABC का केंद्रक है, तो G सरल रेखा AD पर होगा तथा $AG : GD = 2 : 1$

$\therefore$ G बिंदु के नियामक

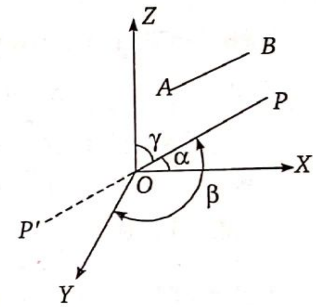
$$= \left[\frac{2\times\frac{(x_2 + x_3)}{2} + 1\times x_1}{2+1}, \frac{2\times\frac{(y_2 + y_3)}{2} + 1\times y_1}{2+1}, \frac{2\times\frac{(z_2 + z_3)}{2} + z_1}{2+1}\right]$$

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$$

अर्थात् **केन्द्रक G के नियामक** $= \left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \dfrac{z_2 + z_1 + z_3}{3}\right)$

12.9 दिक् कोण तथा दिक् कोज्या (Direction Angles and Direction cosines (or dc's))

यदि कोई सरल रेखा AB अक्षों OX, OY तथा OZ की धनात्मक दिशाओं से क्रमशः α, β, γ कोण बनाती हैं तो ये कोण AB के दिक् कोण (Drection Angles) कहलाते हैं।



इन कोणों की कोज्यायें अर्थात् $\cos\alpha, \cos\beta$ तथा $\cos\gamma$ इनकी दिक् कोज्यायें (Direction cosines or dc's) कहलाती हैं। इन्हें सामान्यतः क्रमशः l, m तथा n से व्यक्त किया जाता है।

अर्थात् $\quad l = \cos\alpha, m = \cos\beta$ तथा $n = \cos\gamma$

दिए गए चित्र में, AB के समानांतर मूल बिंदु O से OP सरल रेखा खींची गई है। स्पष्टतः यदि AB के दिक् कोण α, β तथा γ हैं, तो OP भी अक्षों की धनात्मक दिशा से α, β तथा γ कोण बनाएगी।

यह भी स्पष्ट है कि यदि AB की दिक् कोज्यायें $\cos\alpha, \cos\beta$ तथा $\cos\gamma$ हैं तो BA की दिक् कोज्यायें $\cos(\pi-\alpha), \cos(\pi-\beta)$ तथा $\cos(\pi-\gamma)$ या $-\cos\alpha, -\cos\beta$ तथा $-\cos\gamma$ होंगी।

अत: BA की दिक् कोज्यायें $-l, -m$ तथा $-n$ से दी जायेंगी।

नोट :

- दिक् कोणों का योग $=\alpha+\beta+\gamma \neq 180°$ या $360°$ क्योंकि ये तीनों कोण असमतलीय (non-coplanar) हैं।

12.10 अक्षों की दिक् कोज्यायें (Direction Cosines of Coordinate Axes)

[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]

x-अक्ष अक्षों से क्रमशः $0°, 90°$ तथा $90°$ का कोण बनाता है अत: **x-अक्ष की दिक् कोज्यायें** $\cos 0°, \cos 90°$ तथा $\cos 90°$ अर्थात् **1, 0, 0** होंगी।

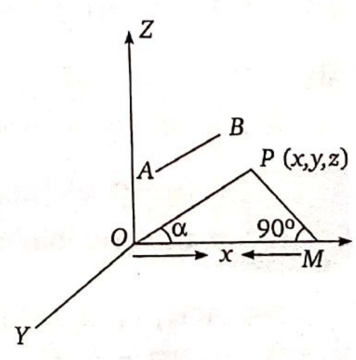
इसी तरह **y-अक्ष** की **दिक् कोज्यायें : 0, 1, 0**, **z-अक्ष की दिक् कोज्यायें : 0, 0, 1** होंगी।

12.11 दिक् अनुपात (Direction Ratios) **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]**

यदि l, m तथा n किसी सरल रेखा की दिक् कोज्यायें हों तो कोई तीन संख्यायें a, b, c, जो इनके समानुपाती हों उस सरल रेखा के दिक् अनुपात (direction ratios) कहे जाते हैं तथा संक्षेप में **d.r.'s** से सूचित किए जाते हैं।

स्पष्टत: $\dfrac{l}{a} = \dfrac{m}{b} = \dfrac{n}{c}$

12.12 दिक् कोज्याओं में संबंध (Relation between Direction Cosines)



यदि l, m तथा n किसी सरल रेखा की दिक् कोज्यायें हों तो $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

प्रमाण : माना AB कोई सरल रेखा है जो x-अक्ष, y-अक्ष तथा z-अक्ष की धनात्मक दिशा से α, β, γ कोण बनाती है। मूल बिंदु O से AB के समानांतर OP खींचा तो OP की दिक् कोज्यायें $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$ तथा $n = \cos\gamma$.

माना बिंदु P के नियामक (x, y, z) हैं। P से x-अक्ष पर लंब PM खींचा तो $OM = x$

$$\angle OMP = 90°$$

माना $OP = r$ तथा $\angle POM = \alpha$

तो ΔOPM से,

$$\cos\alpha = \frac{PM}{OP} \quad \text{या} \quad \cos\alpha = \frac{x}{r} \quad \therefore \quad x = r\cos\alpha$$

इसी प्रकार $y = r\cos\beta$ तथा $z = r\cos\gamma$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\cos^2\beta + r^2\cos^2\gamma \quad ...(1)$$

$$\therefore \quad r^2 = OP^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2$$

$$\text{या} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

अत: (1) से,

$$r^2 = r^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

$$\text{या} \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\text{अर्थात्} \quad \boldsymbol{l^2 + m^2 + n^2 = 1}$$

सिद्ध हुआ।

नोट :

- किसी बिंदु $\boldsymbol{P(x, y, z)}$ के निर्देशांक :
  उपरोक्त चित्र से $\boldsymbol{x = lr, y = mr}$ तथा $\boldsymbol{z = nr}$

12.13 दिक् कोज्याओं तथा दिक् अनुपातों में संबंध (Relation between d.c.'s and d.r.'s)

माना l, m तथा n किसी सरल रेखा की दिक् कोज्यायें हैं, तथा a, b तथा c उसके दिक् अनुपात हैं. तो

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \lambda \text{ (माना)}$$

$$\text{तो} \quad l = a\lambda, \quad m = b\lambda \quad \text{तथा } n = c\lambda \quad ...(1)$$

$$\therefore \quad l^2 + m^2 + n^2 = a^2\lambda^2 + b^2\lambda^2 + c^2\lambda^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \lambda^2(a^2 + b^2 + c^2) \quad [\because l^2 + m^2 + n^2 = 1]$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(1) से $$\boldsymbol{l = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, m = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, n = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

स्पष्ट है यदि a, b, c किसी सरल रेखा के लिए दिक् अनुपात हों तो इसकी दिक् कोज्या ज्ञात करने के लिए a, b तथा c में से प्रत्येक को $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ से भाग दें।

नोट :

- l, m, n का धनात्मक या ऋणात्मक होना रेखा की दिशा पर निर्भर करेगा।

12.14 दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा की दिक् कोज्यायें तथा दिक् अनुपात (d.c.'s and d.r.'s of the line joining two points)

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

माना $A(x_1, y_1, z_1)$ तथा $B(x_2, y_2, z_2)$ दो बिंदु हैं तथा सरल रेखा AB उन्हें जोड़ती है। माना AB की दिक् कोज्यायें l, m तथा n हैं, तो

$l = \cos\alpha,\ m = \cos\beta,\ n = \cos\gamma$

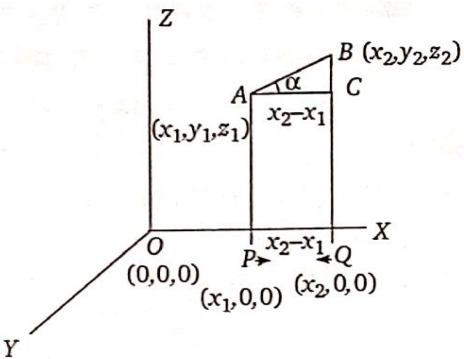
$AC = PQ = x_2 - x_1$

तथा $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

तथा माना ΔABC में, $\angle ACB = 90°$ एवं $\angle CAB = \alpha$

$\therefore \quad \cos\alpha = \dfrac{AC}{AB} \quad \Rightarrow \quad l = \dfrac{x_2 - x_1}{AB}$

इसी प्रकार $m = \dfrac{y_2 - y_1}{AB}$ तथा $n = \dfrac{z_2 - z_1}{AB}$



$\therefore$ रेखा AB की **दिक् कोज्यायें :**

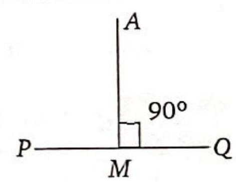
$\dfrac{x_2 - x_1}{AB}, \dfrac{y_2 - y_1}{AB}$ तथा $\dfrac{z_2 - z_1}{AB}$ जहाँ $AB = \left|\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\right|$

तथा **दिक् अनुपात : $x_2 - x_1, y_2 - y_1$ तथा $z_2 - z_1$**

12.15 प्रक्षेप (Projection)

(i) बिंदु का सरल रेखा पर प्रक्षेप : किसी बिंदु A का सरल रेखा PQ पर प्रक्षेप बिंदु A से PQ पर डाले गए लंब का पाद होता है। दिए गए चित्र में $AM \perp PQ$

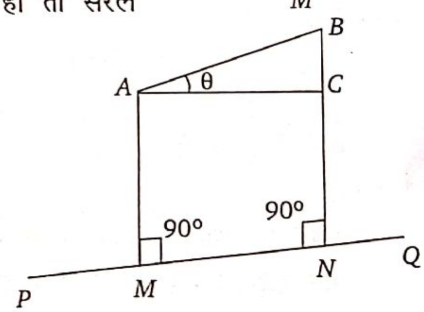
अत: पाद M बिंदु A का PQ पर प्रक्षेप है।



(ii) रेखाखण्ड का सरल रेखा पर प्रक्षेप : यदि AB कोई रेखाखण्ड हो तो सरल रेखा PQ पर इसका प्रक्षेप $AB\cos\theta$ से दिया जाता है जहाँ θ AB तथा PQ के बीच का कोण है।

चित्र में रेखाखंड AB के बिंदु A तथा B से सरल रेखा PQ पर AM तथा BN लंब डाले गए हैं जो PQ से बिंदु M तथा N पर मिलते हैं। अत: MN रेखाखंड AB का PQ पर प्रक्षेप है तथा

$MN = AB\cos\theta$ जहाँ θ, AB तथा PQ के बीच का कोण है।



12.16 दो बिंदुओं $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा PQ का उस रेखा पर प्रक्षेप ज्ञात करना, जिसकी दिक् कोज्यायें (d.c.'s) l, m तथा n हैं :

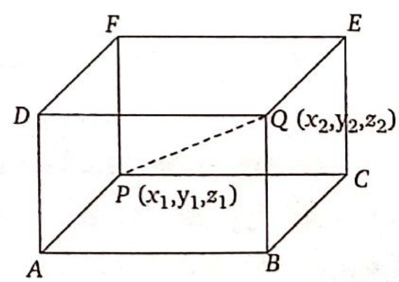
बिंदु P तथा Q से होकर जाने वाले ऐसे समानांतर षट्फलक ($ABCP, DQEF$) की रचना करें जिसके फलक निर्देशांक अक्षों के समानांतर हैं

तो $\quad PC = x_2 - x_1$

$CB = y_2 - y_1$ तथा $BQ = z_2 - z_1$

माना PQ का प्रक्षेप उस सरल रेखा पर ज्ञात करना है जो अक्षों से α, β तथा γ कोण बनाती है तथा जिसकी दिक् कोज्यायें l, m तथा n हैं

तो $\quad l = \cos\alpha,\ m = \cos\beta,\ n = \cos\gamma$



अब x-अक्ष के समानांतर रेखा PC का इस रेखा पर प्रक्षेप

$= PC\cos\alpha = (x_2 - x_1)l$

y-अक्ष के समानांतर रेखा BC का इस रेखा पर प्रक्षेप $= BC\cos\beta = (y_2 - y_1)m$

तथा z-अक्ष के समानांतर रेखा BQ का इस रेखा पर प्रक्षेप $= BQ \cos\gamma = (z_2 - z_1)n$

$\therefore$ **PQ का प्रक्षेप** $= |PC$ का प्रक्षेप $+ BC$ का प्रक्षेप $+ BQ$ का प्रक्षेप $|$

$$= |(x_2 - x_1)l + (y_2 - y_1)m + (z_2 - z_1)n|$$

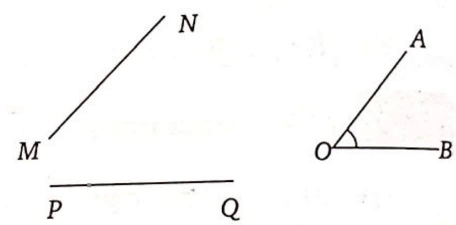
नोट :

- (i) यदि $O(0, 0, 0)$ तथा $P(x_1, y_1, z_1)$ दो बिंदु हों तो उस सरल रेखा पर जिसकी दिक् कोज्यायें l, m तथा n हों, OP का प्रक्षेप $lx_1 + my_1 + nz_1$ से दिया जाता है।
- (ii) दो बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा PQ किसके दिक् अनुपात a, b, c हैं।

$$\frac{|(x_2 - x_1)l + (y_2 - y_1)m + (z_2 - z_1)n|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

12.17 दो असमतलीय रेखाओं के बीच का कोण (Angle between two non-coplanar lines)

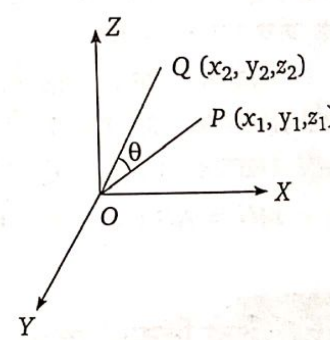
यदि PQ तथा MN दो असमतलीय रेखायें हों तो उनके बीच का कोण किसी बिंदु O से खींची गई उन दो सरल रेखाओं OA तथा OB के, जो क्रमशः PQ तथा MN के समानांतर है, बीच के कोण के बराबर होता है।



अर्थात् PQ तथा MN के बीच का कोण $= \angle AOB$

12.17 दो सरल रेखाओं जिनकी दिक् कोज्यायें l_1, m_1 तथा n_1 एवं l_2, m_2, n_2 हैं के बीच का कोण ज्ञात करना

माना दी गई दो सरल रेखाओं की दिक् कोज्यायें l_1, m_1, n_1 तथा l_2, m_2, n_2 हैं।



मूल बिंदु O से OP तथा OQ दो सरल रेखायें खींची जो इन रेखाओं के समानांतर हैं।

अतः OP तथा OQ दिक कोज्यायें क्रमशः l_1, m_1, n_1 तथा l_2, m_2, n_2 होंगी।

माना OP तथा OQ के बीच का कोण θ है। माना P तथा Q के नियामक क्रमशः (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) हैं तथा $OP = r_1$ एवं $OQ = r_2$

अब $\qquad x_1 = l_1 r_1$ एवं $x_2 = l_2 r_2$, $y_1 = m_1 r_1$

एवं $\qquad y_2 = m_2 r_2$, $z_1 = n_1 r_1$ एवं $z_2 = n_2 r_2$ ...(1)

चित्र से OQ का OP पर प्रक्षेप $= (x_2 - 0)l_1 + (y_2 - 0)m_1 + (z_2 - 0)n_1$

$$= x_2 l_1 + y_2 m_1 + z_2 n_1$$

$$= l_2 r_2 l_1 + m_2 r_2 m_1 + n_2 r_2 n_1 \qquad [(1) \text{ से}]$$

$$= r_2(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) \qquad ...(2)$$

पुनः OQ का OP पर प्रक्षेप $= OQ \cos\theta = r_2 \cos\theta$ ...(3)

अतः (2) तथा (3) से

नोट :

[redacted]

$$BC = \sqrt{(-1+4)^2 + (6-9)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18}$$

तथा $$CA = \sqrt{(0+4)^2 + (7-9)^2 + (10-6)^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

अत: $AB = BC$

अत: ये दोनों समद्विबाहु त्रिभुज की भुजायें हैं।

पुन: $AB^2 + BC^2 = 18 + 18 = 36 = CA^2$। अत: ΔABC एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज है।

उदाहरण 4. बिंदुओं (2, 1, 5) तथा (3, 4, 3) को मिलाने वाली रेखा समतल $2x + 2y - 2z = 1$ द्वारा जिस अनुपात में विभाजित होती है, वह अनुपात ज्ञात करें।

हल : माना बिंदु $P(2, 1, 5)$ तथा $Q(3, 4, 3)$ को मिलाने वाली रेखा बिंदु R पर दिए गए समतल

$$2x + 2y - 2z = 1 \quad \ldots(1)$$

द्वारा $m_1 : m_2$ के अनुपात में बिंदु $R\ (x, y, z)$ पर विभाजित होती है

$$x = \frac{m_1 \times 3 + m_2 \times 2}{m_1 + m_2} = \frac{3m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2};\ y = \frac{m_1 \times 4 + m_2 \times 1}{m_1 + m_2} = \frac{4m_1 + m_2}{m_1 + m_2};$$

$$z = \frac{m_1 \times 3 + m_2 \times 5}{m_1 + m_2} = \frac{3m_1 + 5m_2}{m_1 + m_2}$$

R समतल (1) पर है अत: (1) में यह मान रखने पर

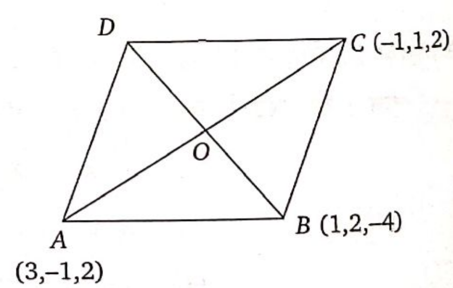
$$\frac{2(3m_1 + 2m_2) + 2(4m_1 + m_2) - 2(3m_1 + 5m_2)}{m_1 + m_2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 6m_1 + 4m_2 + 8m_1 + 2m_2 - 6m_1 - 10m_2 = m_1 + m_2$$

$$\Rightarrow \quad 7m_1 = 5m_2 \quad \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{5}{7}$$

$\therefore$ अभीष्ट अनुपात = 5 : 7

उदाहरण 5. किसी समानांतर चतुर्भुज $ABCD$ के तीन सिरे $A(3, -1, 2), B(1, 2, -4)$ तथा $C(-1, 1, 2)$ हैं। चौथे सिरे D के निर्देशांक ज्ञात करें।



हल : माना D के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

माना विकर्ण BD तथा AC बिंदु O पर मिलते हैं।

BD का मध्य-बिंदु के निर्देशांक $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z-4}{2}\right)$

तथा AC का मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$\left(\frac{3-1}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{2+2}{2}\right)$ अर्थात् (1, 0, 2)

किंतु समानांतर चतुर्भुज के विकर्ण समद्विभाजक बिंदु पर मिलते हैं।

अत: $\frac{x+1}{2} = 1 \Rightarrow x = 1;\ \frac{y+2}{2} = 0 \Rightarrow y = -2;\ \frac{z-4}{2} = 2 \Rightarrow z = 8$

$\therefore$ D के निर्देशांक = (1, – 2, 8)

उदाहरण 6. उस त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक ज्ञात करें जिसके शीर्षों के निर्देशांक (2, 3, 1), (2, 0, 5) और (4, – 1, 3) हैं।

हल : माना त्रिभुज के शीर्ष A, B, C हैं जिनके निर्देशांक क्रमश: (2, 3, 1) (2, 0, 5) और (4, – 1, 3) हैं।

सूत्र से, केंद्रक के निर्देशांक

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

यहाँ $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 4; y_1 = 3, y_2 = 0, y_3 = -1; z_1 = 1, z_2 = 5, z_3 = 3$

$\therefore$ केंद्रक के निर्देशांक $x = \frac{2+2+4}{3} = \frac{8}{3}; y = \frac{3+0+(-1)}{3} = \frac{2}{3}; z = \frac{1+5+3}{3} = 3$ **उत्तर**

अतः केंद्रक $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 3\right)$ है।

उदाहरण 7. एक रेखा निर्देशांक अक्षों के साथ बराबर कोण बनाती है। उसकी दिक् कोज्यायें ज्ञात करें।

हल : यदि रेखा अक्षों से α, β, γ कोण बनाती है, तो प्रश्न से

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma \Rightarrow l = m = n$$

अब $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

$\Rightarrow$ $l^2 + l^2 + l^2 = 1 \Rightarrow 3l^2 = 1 \Rightarrow l = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

अतः दिक् कोज्यायें $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ हैं।

उदाहरण 8. सिद्ध करें $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2011, 18(S)]**

हल : हम जानते हैं $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

अर्थात् $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\Rightarrow$ $1 - \sin^2\alpha + 1 - \sin^2\beta + 1 - \sin^2\gamma = 1$

$\Rightarrow$ $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2 y = 3 - 1 = 2$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 9. यदि दो बिन्दुओं A व B के निर्देशांक क्रमशः (3, 4, – 6) और (2, – 1, – 4) हों, तो OA, OB तथा AB के दिक् अनुपात व दिक् कोज्यायें ज्ञात कीजिये जहाँ O मूल बिन्दु (0, 0, 0) है।

हल : सूत्र से दिक् अनुपात $a = x_2 - x_1; b = y_2 - y_1; c = z_2 - z_1$

तथा दिक् कोज्यायें $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ तथा $\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

अतः रेखा OA के दिक् अनुपात (3 – 0), (4 – 0), (– 6 – 0) अर्थात् 3, 4, – 6 हैं।

$\therefore$ रेखा OA की दिक् कोज्यायें $\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2+(-6)^2}}, \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2+(-6)^2}}, \frac{-6}{\sqrt{3^2+4^2+(-6)^2}}$

या $\frac{3}{\sqrt{61}}, \frac{4}{\sqrt{61}}, \frac{-6}{\sqrt{61}}$ हैं।

रेखा OB के दिक् अनुपात, 2 – 0, – 1 – 0, – 4 – 0 या 2, – 1, – 4 हैं।

$\therefore$ रेखा OB की दिक् कोज्यायें

$$\frac{2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-4)^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-4)^2}}, \frac{-4}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-4)^2}}$$

या $\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{-4}{\sqrt{21}}$ हैं।

रेखा AB के दिक् अनुपात, 2 – 3, – 1 – 4, – 4 + 6 या – 1, – 5, 2 हैं।

∴ रेखा AB की दिक् कोज्यायें

$$\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+2^2}}, \frac{-5}{\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+2^2}}, \frac{2}{\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+2^2}}$$

या $\frac{-1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}$ **उत्तर**

उदाहरण 10. उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिये जिनके दिक् अनुपात (2, 3, 4) और (3, 4, 5) हैं।

(U.P. Dip. Engg. 2009)

हल : यदि दो रेखाओं के दिक् अनुपात $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$ हों तथा उनके बीच का कोण θ हो, तो

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)}\,.\sqrt{(a_2^2+b_2^2+c_2^2)}}$$

प्रश्न से $a_1 = 2, b_1 = 3, c_1 = 4; a_2 = 3, b_2 = 4, c_2 = 5$

∴ $$\cos\theta = \frac{2\,.\,3+3\,.\,4+4\,.\,5}{\sqrt{(2^2+3^2+4^2)}.\sqrt{(3^2+4^2+5^2)}} = \frac{38}{\sqrt{29}\sqrt{50}} = \frac{38}{5\sqrt{58}}$$

या $\theta = \cos^{-1}\left[\frac{38}{5\sqrt{58}}\right]$ **उत्तर**

उदाहरण 11. यदि एक रेखा x और y-अक्षों से क्रमश: $\pi/4$ और $\pi/3$ कोण बनाती है तो इसका z-अक्ष से कोण ज्ञात कीजिये।

(U.P. Dip. Engg. 2010)

हल : यदि कोई रेखा x, y तथा z–अक्षों से क्रमश: α, β और γ कोण बनाये, तो

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

यहाँ दी हुई रेखा x-अक्ष से $\frac{\pi}{4}$ और y-अक्ष से $\frac{\pi}{3}$ कोण बनाती है, अत: $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{\pi}{3}$, α और β के मान समीकरण (1) में रखने पर, $\cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\gamma = 1$

या $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1$ या $\cos^2\gamma = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ या $\cos\gamma = \pm\frac{1}{2}$

∴ $\gamma = \frac{\pi}{3}$ या $\frac{2\pi}{3}$

अत: दी हुई रेखा z-अक्ष से $\frac{\pi}{3}$ या $\frac{2\pi}{3}$ कोण बनाती है। **उत्तर**

उदाहरण 12. दर्शाइये कि बिन्दुओं (1, 2, 3) एवं (–1, – 2, – 3) को मिलाने वाली रेखा, बिन्दुओं (2, 3, 4) एवं (5, 9, 13) को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है तथा बिन्दुओं (– 2, 1, 5) एवं (3, 3, 2) को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् है।

(U.P. Dip. Engg. 2004)

हल : माना बिन्दुओं $A(1, 2, 3)$ और $B(-1, -2, -3)$ को मिलाने वाली रेखा AB तथा बिन्दुओं $C(2, 3, 4)$ और (5, 9, 13) को मिलाने वाली रेखा CD है।

माना a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 क्रमश: रेखाओं AB तथा CD के दिक् अनुपात है।

∴ रेखा AB के दिक् अनुपात $-1-1, -2-2, -3-3$

या $a_1 = -2, b_1 = -4, c_1 = -6$

और रेखा CD के दिक् अनुपात $5-2, 9-3, 13-4$

या $\qquad a_2 = 3, b_2 = 6, c_2 = 9$

हम जानते हैं कि दो रेखायें जिनके दिक् अनुपात a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 हों, समान्तर होती हैं,

यदि $\qquad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{-2}{3} = \frac{-4}{6} = \frac{-6}{9}$ या $\frac{-2}{3} = \frac{-2}{3} = \frac{-2}{3}$

अतः रेखायें AB और CD परस्पर समान्तर हैं। **सिद्ध हुआ।**

पुनः माना बिन्दुओं $P(-2, 1, 5)$ एवं $Q(3, 3, 2)$ को मिलाने वाली रेखा PQ है तथा इसके दिक् अनुपात a_3, b_3, c_3 है।

$\therefore$ रेखा PQ के दिक् अनुपात $3 + 2, 3 - 1, 2 - 5$ या $a_3 = 5, b_3 = 2, c_3 = -3$ हैं।

दो रेखा AB तथा PQ लम्बवत् होंगी यदि $a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 = 0$

अब, $\qquad a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 = -2 \times 5 + (-4) \times 2 + (-6) \times (-3) = -18 + 18 = 0$

अतः AB तथा PQ परस्पर लम्ब हैं। **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 13. बिंदुओं P, Q, R, S के निर्देशांक क्रमशः $(3, 4, 5), (4, 6, 3), (-1, 2, 4), (1, 0, 5)$ हैं, तो PQ का RS पर प्रक्षेप ज्ञात करें।

हल : यदि RS दिक् अनुपात a, b, c हो, तो $a = 1 - (-1), b = (0 - 2), c = (5 - 4)$

अर्थात् $a = 2, b = -2, c = 1$ हो तथा RS की दिक् कोज्यायें

$$l = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (1)^2}}, m = \frac{-2}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (1)^2}}, n = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (1)^2}}$$

$$\left[\because l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ आदि}\right]$$

अर्थात् $\qquad \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}$ हैं।

$\therefore \quad PQ$ का RS पर प्रक्षेप $= |(x_2 - x_1)\, l + (y_2 - y_1)\, m + (z_2 - z_2)\, n|$

$$= \left|(4 - 3) \times \frac{2}{3} + (6 - 4) \times \left(-\frac{2}{3}\right) + (3 - 5) \times \frac{1}{3}\right|$$

$$= \left|\frac{2}{3} - \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right| = \left|-\frac{4}{3}\right| = \frac{4}{3}$$

उत्तर

उदाहरण 14. एक रेखा x-अक्ष तथा y-अक्ष की धन दिशाओं से क्रमशः 45° तथा 60° के कोण बनाती है और z-अक्ष से न्यून कोण बनाती है। बिन्दुओं $(3, 4, -2)$ तथा $(8, -6, 4)$ को मिलाने वाली रेखा का दी हुई रेखा पर प्रक्षेप ज्ञात करो।

हल : माना कि दी हुई रेखा की दिक् कोज्यायें l, m, n हैं। तब

$$l = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}, m = \cos 60° = \frac{1}{2}, n = ?$$

$\because \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1 \qquad \therefore \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + n^2 = 1$

$\Rightarrow \quad n^2 = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow n = \pm\frac{1}{2}$ लेकिन रेखा z-अक्ष से न्यून कोण बनाती है $\therefore n = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ दी हुई रेखा की दिक्-कोज्यायें $= \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

प्रश्न से बिन्दु $(x_1, y_1, z_1) = (3, 4, -2); (x_2, y_2, z_2) = (8, -6, 4)$

Diploma Class की No. 1 YouTube Channel में आपका स्वागत है।

$\therefore$ प्रक्षेप $= l(x_2 - x_1) + m(y_2 - y_1) + n(z_2 - z_1)$

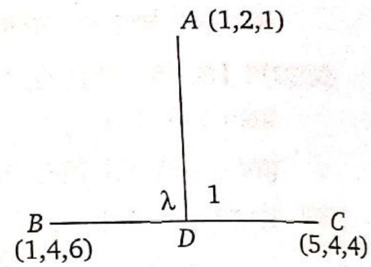
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(8-3) + \frac{1}{2}(-6-4) + \frac{1}{2}(4+2)$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}} - 5 + 3 = \frac{5}{\sqrt{2}} - 2 = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$ उत्तर

उदाहरण 15. बिन्दु (1, 2, 1) से बिन्दुओं (1, 4, 6) तथा (5, 4, 4) को मिलाने वाली रेखा पर लम्ब डाला गया है। लम्ब के पाद के निर्देशांक ज्ञात करो।

हल : माना कि लम्ब का पाद D, BC रेखा को $\lambda : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है। तब D के निर्देशांक

$$= \left(\frac{5\lambda + 1}{\lambda + 1}, \frac{4\lambda + 4}{\lambda + 1}, \frac{4\lambda + 6}{\lambda + 1}\right) \quad \ldots(1)$$



$\therefore$ AD के दिक्-अनुपात $= \frac{5\lambda + 1}{\lambda + 1} - 1, \frac{4\lambda + 4}{\lambda + 1} - 2, \frac{4\lambda + 6}{\lambda + 1} - 1$

$$= \frac{4\lambda}{\lambda + 1}, \frac{2\lambda + 2}{\lambda + 1}, \frac{3\lambda + 5}{\lambda + 1} \text{ हैं।}$$

BC के दिक्-अनुपात $= 5 - 1, 4 - 4, 4 - 6$ या $4, 0, -2$

$\because$ $AD \perp BC$

$\therefore$ $\frac{4\lambda}{\lambda + 1} \times 4 + \frac{2\lambda + 2}{\lambda + 1} \times 0 + \frac{3\lambda + 5}{\lambda + 1} \times (-2) = 0$ [सूत्र $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$]

या $16\lambda - 6\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

अत: (1) से D के नियामक $\lambda = 1$ रखने से $\left(\frac{5\times1+1}{1+1}, \frac{4\times1+4}{1+1}, \frac{4\times1+6}{1+1}\right)$ या (3, 4, 5) होंगे।

महत्वपूर्ण सूत्र एवं तथ्य

1. (i) दूरी सूत्र : दो बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा (x_2, y_2, z_2) के बीच की दूरी

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

(ii) मूल बिंदु से बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को $m : n$ में अंत: एवं बाह्यतः विभाजित करने वाले बिंदु R के निर्देशांक क्रमश:

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m + n}\right) \text{ तथा } \left(\frac{mx_2 - nx_1}{m - n}, \frac{my_2 - ny_1}{m - n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m - n}\right) \text{ हैं।}$$

(iii) यदि बिन्दु R रेखा PQ को $\lambda : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है तो R के निर्देशांक $\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda z_2 + z_1}{\lambda + 1}\right)$ से दिए जाते हैं।

यदि λ +ve हो तो रेखा अंत: एवं यदि λ –ve तो यह बाह्यत: विभाजित होती है।

2. बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली सरल रेखा के मध्य-बिंदु के नियामक

$$= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

3. किसी त्रिभुज के केंन्द्रक के निर्देशांक जिसके शीर्ष $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ तथा (x_3, y_3, z_3) हैं,

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$$

4. दिक् कोज्या (i) यदि कोई रेखा x-अक्ष, y-अक्ष तथा z-अक्ष से क्रमशः α, β, γ कोण बनाती है तो $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$ उस रेखा की दिक् कोज्यायें (d.c's) कहलाती है।

(ii) यदि l, m तथा n किसी रेखा की दिक् कोज्यायें हों तो

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \text{ जहाँ } l = \cos\alpha, m = \cos\beta, n = \cos\gamma \text{ हैं।}$$

(iii) x-अक्ष की दिक् कोज्या $= 1, 0, 0$; y-अक्ष की दिक् कोज्या $= 0, 1, 0$; z-अक्ष की दिक् कोज्या $= 0, 0, 1$

(iv) यदि PQ की दिक् कोज्यायें l, m, n हैं तो QP की दिक् कोज्यायें $-l, -m, -n$ होंगी।

5. दिक् अनुपात (i) यदि l, m तथा n किसी सरल रेखा की दिक् कोज्यायें हों तो कोई तीन संख्यायें a, b, c, जो इनके समानुपाती हों उस सरल रेखा के दिक् अनुपात (direction ratios) कहे जाते हैं तथा संक्षेप में **d.r.'s** से सूचित किए जाते हैं। स्पष्टतः $\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c}$

(ii) बिन्दुओं $A(x_1, y_1, z_1)$ तथा $B(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली रेखा का दिक् अनुपात

$$= x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$$

(iii) दिक् अनुपात के पदों में दिक् कोज्या : $\frac{x_2 - x_1}{AB}, \frac{y_2 - y_1}{AB}, \frac{z_2 - z_1}{AB}$

$$\text{जहाँ } AB = \left|\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\right|$$

6. रेखाओं के बीच का कोण

(i) यदि दो रेखाओं के बीच कोण θ हो तथा उनकी दिक् कोज्यायें l_1, m_1, n_1 तथा l_2, m_2, n_2 हों, तो

$$\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

(a) रेखायें समानांतर होगीं यदि $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

(b) रेखायें लंब होंगी यदि $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

(ii) यदि रेखाओं के दिक् अनुपात क्रमशः a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 हैं, तो

$$\cos\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

रेखायें : (a) समानांतर होंगी यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(b) लंब होगी यदि $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$

7. प्रक्षेप : $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा $Q(x_2, y_2, z_2)$ को मिलाने वाली सरल रेखा का उस सरल रेखा पर प्रक्षेप जिसकी दिक् कोज्यायें l, m, n हैं।

प्रश्नावली 12.1

1. उस अष्टक के नाम बतायें, जिसमें निम्न बिंदु हैं :

(1, 2, 3), (– 4, 2, 5), (– 4, 2, – 5), (– 3, – 1, 6), (2, – 4, – 7)

2. (i) बिंदु (2, – 1, 3) तथा (– 2, 1, 3) के बीच दूरी ज्ञात करें।

(ii) बिंदुओं (3, 4, 5) और (–1, 3, – 3) के बीच की दूरी ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2012, 2007]**

3. दिखायें बिंदु $P(-2, 3, 5)$, $Q(1, 2, 3)$ तथा $R(7, 0, -1)$ संरेखीय हैं।

[**संकेत :** दिखायें $PR = PQ + QR$]

4. (i) दिखायें $A(4, 6, -5)$, $B(0, 2, 3)$ तथा $C(-4, 2, -1)$ किसी समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

(ii) दिखाइये कि बिंदु (0, 7, 10), (–1, 6, 6) और (– 4, 9, 6) एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज बनाते हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]**

5. दो बिंदुओं $A(3, 2, 5)$ तथा $B(-4, 2, -2)$ को मिलाने वाली रेखा को 4 : 3 में विभाजित करने वाले बिंदु के निर्देशांक ज्ञात करें।

6. किसी त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिंदु (1, 5, – 1), (0, 4, – 2) तथा (2, 3, 4) से दिए जाएँ तो उसके शीर्ष ज्ञात करें।

7. (i) उस त्रिभुज के केंद्रक के निर्देशांक ज्ञात करें जिसके शीर्षों के निर्देशांक (2, 3, 1), (2, 0, 5) और (4, – 1, 3) हैं।

(ii) बिन्दुओं (1, 1, 1), (–2, 4, 1) और (2, 2, 5) से बने Δ का केन्द्रक ज्ञात कीजिये। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2013]**

8. सिद्ध करें बिंदु (1, 1, 1), (– 2, 4, 1), (–1, 5, 5) और (2, 2, 5) एक वर्ग के शीर्ष हैं।

9. (i) (– 2, 4, 7) और (3, – 5, 8) को मिलाने वाली रेखा को समतल YOZ किस अनुपात में विभाजित करती है?

[**संकेत :** विभाजक बिंदु का x-नियामक = 0]

(ii) बिन्दुओं (2, 4, 5) और (3, 5, –4) को मिलाने वाली रेखा xy-तल द्वारा किस अनुपात में विभाज्य है? **[उ० प्र० डिप्लोमा 2015 (O)]**

10. यदि A और B के निर्देशांक क्रमशः (3, 4, 5) तथा (–1, 3, – 7) हैं तो P का बिंदुपथ ज्ञात करें जबकि P इस प्रकार गति करता है कि उसकी दूरी बिंदु A तथा B से बराबर रहती है।

11. किसी रेखा के दिक् अनुपात क्रमशः 2, 3, 4 हैं तो उसकी दिक् कोज्यायें ज्ञात करें।

12. मूल बिंदु को (3, 4, 5) से मिलाने वाली सीधी रेखा की दिक् कोज्यायें ज्ञात करें।

13. बिंदुओं (7, 1, 2) तथा (1, – 1, 5) को मिलाने वाली रेखा के दिक् अनुपात तथा दिक् कोज्यायें ज्ञात करें।

14. उस रेखा की दिक्-कोज्या ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक अक्षों की धनात्मक दिशाओं के साथ बराबर कोण बनाती है।

15. (i) उन दो रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करें जिसके दिक् अनुपात क्रमशः 1, – 2, 1 तथा 4, 3, 2 हैं।

(ii) उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिये जिनके दिक् अनुपात 2, 3, 4 और 3, 4, 5 हैं। **(U.P. Dip. Engg. 2009)**

16. यदि एक रेखा x और y-अक्षों की धनात्मक दिशाओं से क्रमशः $\pi/4$ और $\pi/3$ कोण बनाती है तो इसका z-अक्ष से कोण ज्ञात कीजिये। **(U.P. Dip. Engg. 2010)**

17. यदि एक रेखा x, y तथा z अक्षों से क्रमशः α, β तथा γ कोण बनाती है, तो सिद्ध करें $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$ **[उ० प्र० डिप्लोमा 2011, 18(S)]**

18. साबित करें कि बिंदु (4, 7, 8) तथा (2, 3, 4) एवं बिंदु (–1, – 2, 1) तथा (1, 2, 5) से जाने वाली रेखायें परस्पर समानांतर हैं।

19. साबित करें मूल बिंदु को (2, 1, 1) से मिलाने वाली सरल रेखा बिंदुओं (3, 5, – 1) तथा (4, 3, – 1) से जाने वाली रेखा पर लंब है।

20. दिखाओं बिन्दुओं (1, 2, 3) तथा (–1, – 2, – 3) को मिलाने वाली रेखा बिन्दुओं (2, 3, 4) तथा (5, 9, 13) को मिलाने वाली रेखा के समानांतर है तथा बिन्दुओं (– 2, 1, 5) तथा (3, 3, 2) को मिलाने वाली रेखा के लंबवत् है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]

21. यदि $A(-1, 2, 4)$, $B(1, 0, 3)$, $C(1, 2, 3)$, $D(2, 4, 1)$ चार बिंदु हैं तो रेखाखंड AB का रेखा CD पर प्रक्षेप ज्ञात करें। तथा दिखायें रेखा AB, रेखा CD पर लंब है।

22. (i) बिन्दुओं (3, 4, – 7) तथा (7, – 2, 4) के बीच की दूरी ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]**

(ii) बिन्दुओं (6, 5, – 4) और (2, – 7, – 1) के बीच की दूरी ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]**

(iii) यदि दो बिन्दुओं A (1, a, 4) और B(– 3, – 5, 4) के बीच की दूरी 5 मात्रक है तो a का मान ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]

(iv) ΔABC का केन्द्रक ज्ञात करें यदि शीर्ष A (4, 6, – 2), B(8, – 6, 2) तथा C(7, 2, – 3) से दिया जाता है।

(v) एक रेखा के दिक् अनुपात –12, 6, – 9 है तो उसकी दिक् कोज्या ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]

(vi) दिक् कोज्यायें $\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{2}{7}$ तथा $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$ वाली रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]

(vii) x, y, z अक्षों का दिक् कोज्यायें बतायें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]**

(viii) रेखा की दिक् अनुपात को परिभाषित कीजिए। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]**

(ix) रेखा की दिक् कोज्या से क्या समझते हैं। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]**

(x) यदि कोई रेखा अक्षों से कोण क्रमशः α, β, γ बनाती है, तो सिद्ध करें $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$

(xi) सिद्ध करो कि बिंदु (– 1, – 2, – 3), B(1, 1, 1) तथा C(– 3, – 5, – 7) संरेख हैं।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(B)]

23. सही उत्तर पर (✓) का चिन्ह लगायें—

(i) एक रेखा x, y तथा z अक्षों की धनात्मक दिशा से 90°, 135° तथा 45° का कोण बनाता है तो इसकी दिक् कोज्या है।

(a) $0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) कोई नहीं

(ii) बिन्दुओं A(5, – 3, 8) तथा B(7, – 5, 9) को मिलाने वाली रेखा के दिक् अनुपात

(a) –2, 2, 1 (b) 2, – 2, 1 (c) 2, 2, 1 (d) कोई नहीं

(iii) यदि a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 दो समानांतर रेखाओं के दिक् अनुपात हों, तो

(a) $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ (b) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

(c) $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$ (d) कोई नहीं

(iv) यदि किसी त्रिभुज ABC के दो शीर्ष A(2, – 4, 3) तथा B(3, – 1, – 2) तथा इसका केंद्रक G(1, 0, 3) है तीसरा शीर्ष C

(a) (–2, 5, 8) (b) (2, – 8, 2) (c) (–2, – 8, 2) (d) कोई नहीं

(v) यदि किसी ΔABC के शीर्ष $A(a, 1, 3), B(-2, b, -5)$ तथा $C(4, 7, c)$ का केंद्रक $G(0, 0, 0)$ हो, तो (a, b, c)

(a) $(-2, -8, 2)$ (b) $(-2, 8, -2)$ (c) $(-2, -8, -2)$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. (i) $OXYZ$ (ii) $OX'YZ$ (iii) $OX'YZ'$ (iv) $OX'Y'Z$ (v) $OXY'Z'$

2. (i) $2\sqrt{5}$ (ii) 9

5. $(-1, 2, 1)$

6. $(1, 2, 3), (3, 4, 5), (-1, 6, -7)$

7. (i) $\left(\frac{8}{3}, \frac{-2}{3}, 3\right)$ (ii) $\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$

9. (i) $2 : 3$ (ii) $5 : 4$

10. $8x + 2y + 24z + 9 = 0$

11. $\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$

12. $\frac{3}{\sqrt{50}}, \frac{4}{\sqrt{50}}, \frac{5}{\sqrt{50}}$

13. $6, 2, -3; \frac{6}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}$

14. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

15. (i) $\frac{\pi}{2}$ (ii) $\cos^{-1}\frac{38}{5\sqrt{58}}$

16. $\frac{\pi}{3}$ या $\frac{2\pi}{3}$

21. प्रक्षेप $= 0$

22. (i) $\sqrt{173}$ (ii) 13 (iii) -2 (iv) $\left(\frac{19}{3}, \frac{2}{3}, -1\right)$

(v) $\frac{-12}{\sqrt{261}}, \frac{6}{\sqrt{261}}, \frac{-9}{\sqrt{261}}$ (vi) $\cos^{-1}\left(\frac{16}{21}\right)$ (vii) 1, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 1

(viii) देखें परिभाषा (ix) देखें परिभाषा

23. (i) (a) (ii) (b) (iii) (b) (iv) (a) (v) (a)

❑❑❑

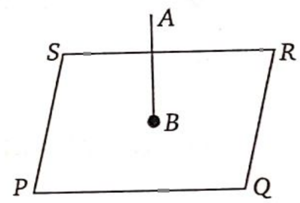
CHAPTER 13

समतल (Plane)

13.1 परिभाषा (Definition)

समतल (Plane) : यदि किसी पृष्ठ (Surface) पर दो बिंदु लिए जाएँ तथा उन दो बिंदुओं को जोड़ने वाली सरल रेखा पूरी तरह उसी पृष्ठ में हो, तो वह पृष्ठ समतल कहलाता है।

अभिलंब (Normal) : एक सरल रेखा जो किसी समतल की प्रत्येक रेखा पर लंब हो, उस समतल पर लंब कहलाता है। किसी एक समतल के अभिलंब परस्पर समानांतर होते हैं। चित्र में सरल रेखा AB समतल $PQRS$ पर अभिलंब है।



13.2 समतल का व्यापक समीकरण (General Equation of a Plane)

x, y तथा z में प्रथम घात का कोई भी समीकरण सर्वदा एक समतल को निरूपित करता है। अत: $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$ समतल का व्यापक समीकरण है, जहाँ a, b, c, d अचर राशियाँ हैं तथा a, b, c सभी शून्य नहीं हैं।

13.2.1 मूल बिंदु (0, 0, 0) से गुजरने वाले समतल का समीकरण :

समतल का समीकरण $ax + by + cz + d = 0$

मूल बिन्दु (0, 0, 0) से गुजरने वाले समतल का समीकरण $ax + by + cz = 0$

[(1) में $x = y = z = 0$ रखने से $d = 0$]

नोट :

- (i) $ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y + \frac{c}{d}z + 1 = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z + 1 = 0$

  स्पष्ट है कि समतल के समीकरण में तीन स्वेच्छ राशियाँ होती हैं। अत: समतल का समीकरण तीन प्रतिबंधों के अधीन निकाला जाता है।
- (ii) समतल के समीकरण $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$ में $\boldsymbol{a, b, c}$ समतल पर **अभिलम्ब (Normal) के दिक् अनुपात हैं।**

13.3 बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण [Equation of Plane passing through the Point (x_1, y_1, z_1)]

माना समतल का समीकरण

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \ldots(i)$$

$\because$ समतल बिंदु (x_1, y_1, z_1) से होकर गुजरता है

अत:
$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \quad \ldots(ii)$$

(1) में से (2) घटाने पर $\boldsymbol{a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0}$

यह समतल का अभीष्ट समीकरण है।

13.4 तीन बिंदुओं से गुजरने वाले समतल का समीकरण (Equation of Plane passing through Three Points)

माना समतल का समीकरण $ax + by + cz + d = 0$

यह बिंदुओं (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) तथा (x_3, y_3, z_3) से होकर गुजरता है।

अब (x_1, y_1, z_1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$ ...(1)

समतल (1) बिंदुओं (x_2, y_2, z_2) तथा (x_3, y_3, z_3) होकर जाता है, अत:

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0 \quad ...(2)$$

$$a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) + c(z_3 - z_1) = 0 \quad ...(3)$$

(1), (2) तथा (3) से a, b, c के विलोपन से

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

यह समतल का अभीष्ट समीकरण है।

अन्य विधि : समीकरण (2) तथा (3) को हल कर a, b, c का मान ज्ञात करें तथा इसे समीकरण (1) में रखकर भी समतल का समीकरण प्राप्त किया जा सकता है। (देखें उदाहरण 2 पृष्ठ 223)

13.5 समतल का अंत:खण्ड रूपी समीकरण (Intercept form of Equation of a Plane)

माना O मूल बिन्दु है तथा $Ax + By + Cz + d = 0$ ...(1)

समतल का समीकरण है, जो निर्देशांक्षों से क्रमशः $P\ (a, 0, 0)$, $Q\ (0, b, 0)$ तथा $R\ (0, 0, c)$ बिन्दुओं पर मिलता है।

यह x-अक्ष से $x = a, y = 0, z = 0$ पर मिलता है

अत: (1) से

$$Aa + d = 0 \Rightarrow A = -\frac{d}{a} \quad [(1) \text{ में } x = a, y = 0, z = 0 \text{ रखने पर}]$$

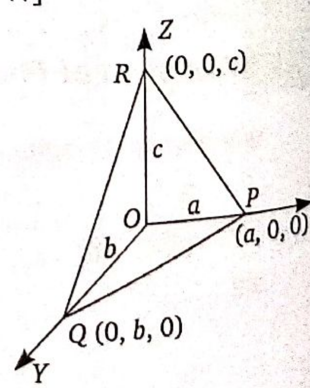
इसी तरह $Bb + d = 0 \Rightarrow B = -\dfrac{d}{b}$ [(1) में $x = 0, y = b, z = 0$ रखने पर]

$$Cc + d = 0 \Rightarrow C = -\frac{d}{c} \quad [(1) \text{ में } x = 0, y = 0, z = c \text{ रखने पर}]$$

(1) में A, B तथा C का मान रखने पर

$$-\frac{d}{a}x - \frac{d}{b}y - \frac{d}{c}z + d = 0$$

या $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{a} - 1 = 0$ अर्थात् $\boldsymbol{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1}$



यह समतल का अभीष्ट समीकरण है, जहाँ a, b, c समतल द्वारा क्रमशः x-अक्ष, y-अक्ष तथा z-अक्ष पर काटे गए अंतःखंड हैं।

13.6 समतल का लंबरूपी समीकरण (Normal Form of Equation of a Plane)

यदि मूल बिंदु O से किसी समतल पर डाले गए लंब OA की लंबाई p हो तथा इसकी दिक् कोज्यायें l, m, n हों तो समतल का समीकरण

$$\boldsymbol{lx + my + nz = p}$$

या $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$, जहाँ $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$

यह समतल का लंबरूपी समीकरण कहलाता है।

13.7 समतल के व्यापक समीकरण को लंब रूप में बदलना (Reduction of the General Equation of a Plane to Normal Form)

माना समतल का समीकरण $ax + by + cz + d = 0$ ...(1)

इसे लंब रूप $lx + my + nz = p$ में बदलना है।

इसके लिए निम्न क्रिया करें :

1. x, y तथा z वाले पद को बायें पक्ष तथा अचर पद d को दाहिने पक्ष में रखें।
2. यदि दाहिने पक्ष का अचर (d) ऋणात्मक है तो दोनों तरफ -1 से गुणा कर इसे धनात्मक बनायें।
3. प्रत्येक पद को $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(x \text{ का गुणांक})^2 + (y \text{ का गुणांक})^2 + (z \text{ का गुणांक})^2}$ से भाग दें।

इससे (1) लंब रूप में बदल जाएगा, जहाँ x, y तथा z के गुणांक अभिलंब की दिक् कोज्यायें होंगी तथा दाहिना पक्ष मूल बिंदु से समतल पर डाले गए लंब की लंबाई होगी। (देखें उदाहरण 7 पृष्ठ 224)

13.8 दिए हुए समतल के समानांतर समतल का समीकरण (Equation of Plane parallel to the given Plane)

समतल $ax + by + cz + d = 0$ के **समानांतर समतल का समीकरण** $\boldsymbol{ax + by + cz + k = 0}$ है, जहाँ k अचर है।

13.9 दो समतलों के परिच्छेद रेखा से जाने वाले समतल का समीकरण (Equation of the plane through the Line of Intersection of two Planes)

माना
$$A_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$A_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

दिए हुए समतलों के समीकरण हैं, तो इनके परिच्छेदी रेखा से होकर जाने वाले समतल का समीकरण $A_1 + \lambda A_2 = 0$ से दिया जाता है।

अर्थात् अभीष्ट समीकरण $\boldsymbol{(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0}$ ...(1)

या $(a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + (c_1 + \lambda c_2)z + (d_1 + \lambda d_2) = 0$ ...(2)

यदि समतल (x_1, y_1, z_1) से होकर गुजरे तो (1) में यह मान रखकर λ का मान ज्ञात किया जाता है, जिसे (2) में रखने पर समतल का समीकरण ज्ञात होता है।

13.10 किसी बिंदु से समतल की दूरी (Distance of a Plane from a Point)

यदि बिंदु (x_1, y_1, z_1) से समतल $ax + by + cz + d = 0$ की दूरी p हो, तो $p = \left|\dfrac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$

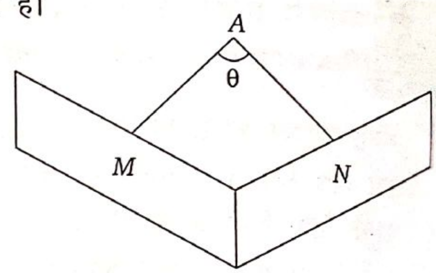
13.11 दो समानांतर समतलों के बीच की दूरी (Distance between two Parallel Planes)

यदि $ax + by + cz + d_1 = 0$ तथा $ax + by + cz + d_2 = 0$

दो समानांतर समतल हों तथा इनके बीच का दूरी D हो, तो $D = \dfrac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

13.12 दो समतलों के बीच का कोण (Angle between two Planes)

दो समतलों के बीच का कोण समतलों के अभिलंबों के बीच का कोण है।



अत: यदि समतलों के समीकरण $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$

तथा $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

हों तथा θ उनके बीच का कोण हो, तो

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

$\cos\theta$ का धनात्मक मान दोनों तलों के बीच के न्यूनकोण (acutangle) को तथा ऋणात्मक मान अधिक कोण (obtus angle) को बताता है।

उपसाध्य : (i) यदि $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ अर्थात् समतल परस्पर लंब हैं, तो

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

(ii) यदि $\theta = 0$ अर्थात् समतल समानांतर हैं तो $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

(b) यदि समतलों के समीकरण लंब रूप में

$\boldsymbol{l_1x + m_1y + n_1z = p_1 ; l_2x + m_2y + n_2z = p_2}$ हों, तो $\boldsymbol{\cos\theta = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}$

(i) यदि ये समतल परस्पर लंबवत हैं अर्थात् $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, तो $\boldsymbol{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0}$

(ii) यदि ये समतल परस्पर समानांतर हैं, अर्थात् $\theta = \mathbf{0}$, तो $\boldsymbol{\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}}$

13.13 विशिष्ट समतलों के समीकरण (Equations of some Particular Planes)

(a) निर्देशांक समतल (Coordinate planes)

(i) xy-समतल का समीकरण $z = 0$ (ii) yz-समतल का समीकरण $x = 0$

(iii) zx-समतल का समीकरण $y = 0$

(b) अक्षों (coordinate axes) के समानांतर समतलों या निर्देशांक समतलों पर लंब समतलों के समीकरण

(i) x-अक्ष के समानांतर समतल या yz-समतल पर लंब समतल का समीकरण $by + cz + d = 0$

(ii) y-अक्ष के समानांतर समतल या zx-समतल पर लंब समतल का समीकरण $ax + cz + d = 0$

(iii) z-अक्ष के समानांतर समतल या xy-समतल पर लंब समतल का समीकरण $ax + by + d = 0$

(c) निर्देशांक समतलों (coordinate planes) के समानांतर समतलों के समीकरण :

(i) yz-समतल के समानांतर तथा इससे a दूरी पर स्थित समतल का समीकरण $x = a$

(ii) xz-समतल के समानांतर इससे b दूरी पर स्थित समतल का समीकरण $y = b$

(iii) xy-समतल के समानांतर, इससे c दूरी पर स्थित समतल का समीकरण $z = c$

नोट :

- निर्देशांक अक्षों पर लंब समतल निर्देशांक तलों के समानांतर होते हैं। अतः $x = a, y = b$ तथा $z = c$ क्रमशः x-अक्ष, y-अक्ष एवं z-अक्ष पर लंब समतलों के भी समीकरण हैं। [देखें (c)]

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. बिंदु (0, – 1, – 1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करें।

हल : हम जानते हैं कि बिंदु (x_1, y_1, z_1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

यहाँ $(x_1, y_1, z_1) = (0, -1, -1)$

$\therefore$ (0, – 1, – 1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण $a(x - 0) + b\{y - (-1)\} + c\{z - (-1)\} = 0$

या $ax + b(y + 1) + c(z + 1) = 0$ अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 2. उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदुओं (1, 1, 0), (1, 2, 1) तथा (–2, 2, – 1) से गुजरता है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2012]

हल : बिंदु (1, 1, 0) से जाने वाले समतल का सामान्य समीकरण

$$a(x - 1) + b(y - 1) + c(z - 0) = 0 \quad ...(1)$$

(1) बिंदुओं (1, 2, 1) तथा (–2, 2, – 1) से गुजरेगा यदि

$$a(1 - 1) + b(2 - 1) + c(1 - 0) = 0 \quad \text{या} \quad a \times 0 + b \times 1 + c \times 1 = 0 \quad ...(2)$$

$$a(-2 - 1) + b(2 - 1) + c(-1) = 0 \quad \text{या} \quad -3a + b - c = 0 \quad ...(3)$$

वज्र गुणन से (2) तथा (3) को हल करने पर,

$$\frac{a}{1 \times (-1) - 1 \times 1} = \frac{b}{(-3) \times 1 - 0 \times (-1)} = \frac{c}{0 \times 1 - (1)(-3)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{-2} = \frac{b}{-3} = \frac{c}{3} = \lambda \quad \text{(माना)}$$

$$\Rightarrow \quad a = -2\lambda, b = -3\lambda, c = 3\lambda$$

(1) में a, b, c का मान रखने पर,

$$-2\lambda(x - 1) - 3\lambda(y - 1) + 3\lambda z = 0 \quad \Rightarrow -2(x - 1) - 3(y - 1) + 3z = 0$$

$$\Rightarrow -2x + 2 - 3y + 3 + 3z = 0 \Rightarrow -2x - 3y + 3z + 5 = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 3z - 5 = 0$$

नोट :

- विकल्प धारा 13.4 सारणिक विधि : $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1-1 & 2-1 & 1-0 \\ -2-1 & 2-1 & -1-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \quad (x-1)(-1-1) - (y-1)(3) + z(3) = 0 \quad \Rightarrow 2x + 2 - 3y + 3 + 3z = 0$$

$$\Rightarrow \quad -2x - 3y + 3z + 5 = 0 \quad \Rightarrow 2x + 3y - 3z - 5 = 0$$

उदाहरण 3. उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो नियामक अक्षों पर 6, – 3 तथा 4 इकाई के अंतःखंड काटती है।

हल : सूत्र से, समतल का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, जहाँ a, b, c नियामक अक्ष पर काटे गए अंतखंड हैं

यहाँ $a = 6, b = -3, c = 4$

अत: समतल का समीकरण $\frac{x}{6} + \frac{y}{-3} + \frac{z}{4} = 1$ या $2x - 4y + 3z = 12$

यह समतल का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 4. एक तल नियामक अक्षों को बिंदु A, B तथा C पर इस प्रकार काटता है कि ΔABC का केंद्रक बिंदु (p, q, r) है। सिद्ध कीजिए कि तल का समीकरण $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 3$ है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2010]

हल : माना समतल का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ...(1)

है जो निर्देशाक्षों को A, B तथा C पर काटता है।

अत: A के निर्देशांक $(a, 0, 0)$, B के निर्देशांक $(0, b, 0)$ तथा C के निर्देशांक $(0, 0, c)$ होंगे।

अत: केंद्रक $= \left\{\frac{1}{3}(a + 0 + 0), \frac{1}{3}(0 + b + 0), \frac{1}{3}(0 + 0 + c)\right\} = \left\{\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right\}$

प्रश्न से, केंद्रक $= (p, q, r)$

$\therefore \quad p = \frac{a}{3} \Rightarrow a = 3p;\ q = \frac{b}{3} \Rightarrow b = 3q;\ r = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 3r$

(1) में यह मान रखने पर $\frac{x}{3p} + \frac{y}{3q} + \frac{z}{3r} = 1 \Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 3$ **सिद्ध हुआ।**

उदाहरण 5. एक चर तल इस प्रकार गति करता है कि उसके द्वारा तीनों अक्षों पर काटे गए अंतखंडों के व्युत्क्रमों का योग स्थिर रहता है। सिद्ध करें कि तल एक नियत बिंदु से गुजरता है।

हल : माना समतल का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ...(1)

जहाँ a, b, c (1) द्वारा क्रमशः x-अक्ष, y-अक्ष तथा z-अक्ष पर काटे गए अंतखंड हैं।

प्रश्न से, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \lambda$ (माना)

या $\frac{1}{\lambda a} + \frac{1}{\lambda b} + \frac{1}{\lambda c} = 1$ या $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \frac{1}{c}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 1$ ...(2)

(2) से स्पष्ट है कि समतल (1) बिंदु $\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right)$ से होकर गुजरता है जो एक नियत बिंदु है।

उदाहरण 6. समतल के समीकरण $x - 2y - 2z = 12$ को अंत:खंड रूप में व्यक्त करें।

हल : दिया गया समीकरण $x - 2y - 2z = 12$

$\Rightarrow \quad \frac{x}{12} - \frac{2}{12}y - \frac{2}{12}z = \frac{12}{12} \Rightarrow \frac{x}{12} - \frac{y}{6} - \frac{z}{6} = 1$

यह अभीष्ट अंत:खंड रूप है तथा अंत:खंड 12, – 6, – 6 हैं।

उदाहरण 7. समतल के समीकरण $x - 2y - 2z = 12$ को अभिलंब रूप में व्यक्त करें तथा दिक् कोज्यायें एवं मूल बिंदु से इस पर डाले गए लंब की लंबाई भी ज्ञात करें।

हल : दिया गया समीकरण $x - 2y - 2z = 12$ ...(1)

मानक समीकरण $ax + by + cz = d$ से तुलना करने पर $a = 1, b = -2, c = -2, d = 12$

$\therefore \qquad \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$

(1) में दोनों तरफ 3 से भाग देने पर $\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} - \frac{2z}{3} = \frac{12}{3}$ या $\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} - \frac{2z}{3} = 4$

यह तल के अभिलंब रूप का समीकरण है।

मानक समीकरण $lx + my + nz = p$ से तुलना करने पर

(i) दिक् कोज्यायें $\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$

(ii) मूल बिंदु से समतल पर डाले गये अभिलंब की लंबाई = 4 इकाई

उदाहरण 8. समतलों $2x + y - 2z + 6 = 0$ तथा $2x - 3y + 6z + 18 = 0$ के बीच का न्यूनकोण ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]

हल : माना तलों के बीच का कोण θ है, तो $\cos\theta = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$

यहाँ $\qquad a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = -2;\ a_2 = 2,\ b_2 = -3, c_2 = 6$

$$\therefore \qquad \cos\theta = \frac{2\times 2 + 1\times(-3) + (-2)\times 6}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}$$

$$= -\frac{11}{\sqrt{9}\sqrt{49}} = \pm\left(-\frac{11}{3\times 7}\right) = \pm\left(-\frac{11}{21}\right)$$

अत: $\qquad \cos\theta = \frac{11}{21}$ (न्यूनकोण लेने पर)

$\therefore \qquad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{21}\right)$ उत्तर

उदाहरण 9. उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदु $(1, 1, -1)$ से होकर जाता है तथा समतल युग्म $x + 2y + 3z - 7 = 0$ तथा $2x - 3y + 4z = 0$ पर लंब है।

हल : दिए गए समतल $\qquad x + 2y + 3z - 7 = 0 \qquad$ ...(i)

$2x - 3y + 4z = 0 \qquad$ ...(ii)

बिंदु $(1, 1, -1)$ से गुजरने वाले समतल का समीकरण $a(x-1) + b(y-1) + c(z+1) = 0 \qquad$ ...(iii)

यदि समतल (iii) समतल (i) तथा (ii) दोनों पर लंब है, तो

$a + 2b + 3c = 0 \qquad$ ...(iv)

$2a - 3b + 4c = 0 \qquad$ ...(v)

[लंब के प्रतिबंध से]

(iv) तथा (v) को वज्र गुणन से हल करने पर $\dfrac{a}{2\times 4 - 3\times(-3)} = \dfrac{b}{3\times 2 - 1\times 4} = \dfrac{c}{1\times(-3) - 2\times 2}$

$\Rightarrow \qquad \frac{a}{17} = \frac{b}{2} = \frac{c}{-7} = \lambda$ (माना) $\Rightarrow a = 17\lambda, b = 2\lambda, c = -7\lambda$

(iii) में यह मान रखने पर $17\lambda(x-1) + 2\lambda(y-1) - 7\lambda(z+1) = 0$

या $\qquad 17(x-1) + 2(y-1) - 7(z+1) = 0$ या $17x - 17 + 2y - 2 - 7z - 7 = 0$

या $\qquad 17x + 2y - 7z = 26 \qquad$ यह अभीष्ट समतल है।

उदाहरण 10. उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदु (3, 4, 2) तथा (7, 0, 6) से होकर जाता है तथा समतल $2x - 5y = 15$ पर लंब है।

हल : दिया गया समतल $2x - 5y + 0z = 15$ ...(i)

बिंदु (3, 4, 2) से गुजरने वाले समतल का समीकरण $a(x-3) + b(y-4) + c(z-2) = 0$ ...(ii)

यह (7, 0, 6) से होकर जाता है।

अतः $a(7-3) + b(0-4) + c(6-2) = 0 \Rightarrow 4a - 4b + 4c = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$ ...(iii)

समतल (ii) समतल (i) पर लंब है $\therefore\ 2a + (-5)b + (0)c = 0$ ...(iv)

(iii) तथा (iv) को हल करने पर $\frac{a}{5} = \frac{b}{2} = \frac{c}{-3} = \lambda$ (माना) $\Rightarrow a = 5\lambda,\ b = 2\lambda,\ c = -3\lambda$

(iii) में यह मान रखने पर $5\lambda(x-3) + 2\lambda(y-4) - 3\lambda(z-2) = 0$

$\Rightarrow \quad 5x + 2y - 3z - 15 - 8 + 6 = 0 \Rightarrow 5x + 2y - 3z = 17$

यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 11. उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदु (1, 4, – 2) से होकर जाता है तथा समतल $-2x + y - 3z = 7$ के समानांतर है।

हल : दिया गया समतल $-2x + y - 3z = 7$

अतः इस समतल के समानांतर एक तल का समीकरण $-2x + y - 3z + \lambda = 0$ ...(1)

यह बिंदु (1, 4, – 2) से गुजरता है। अतः $(-2) \times 1 + 4 - 3 \times (-2) + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -8$

अतः अभीष्ट समीकरण $-2x + y - 3z - 8 = 0$

या $2x - y + 3z + 8 = 0$ [λ का मान (1) में रखने पर]

उदाहरण 12. बिंदु (2, 1, 0) से समतल $2x + y + 2z + 5 = 0$ की दूरी ज्ञात करें।

हल : किसी बिंदु (x_1, y_1, z_1) से समतल $ax + by + cz + d = 0$ की दूरी $= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

यहाँ $a = 2,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 5$ तथा $x_1 = 2,\ y_1 = 1,\ z_1 = 0$

$\therefore$ दूरी $= \frac{|2 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{10}{3}$ **उत्तर**

उदाहरण 13. दो समानांतर समतल $x + y - z + 4 = 0$ तथा $x + y - z + 5 = 0$ के बीच की दूरी ज्ञात करें।

हल : माना समतल $x + y - z + 4 = 0$ पर कोई बिंदु $P(x_1, y_1, z_1)$ है।

तो $x_1 + y_1 - z_1 + 4 = 0 \Rightarrow x_1 + y_1 - z_1 = -4$ ...(1)

$\therefore$ अभीष्ट दूरी = बिंदु $P(x_1, y_1 z_1)$ से समतल $x + y - z + 5 = 0$ पर लंब

$$= \left| \frac{x_1 + y_1 - z_1 + 5}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} \right| = \left| \frac{-4 + 5}{\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad [(1) \text{ से}]$$

उदाहरण 14. उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो समतल $x - 2y + 2z - 3 = 0$ के समानांतर है तथा बिंदु (1, 2, 3) से इकाई दूरी पर है।

हल : दिये गये समतल $x - 2y + 2z - 3 = 0$ के समानांतर समतल का समीकरण

$x - 2y + 2z + \lambda = 0$ ...(1)

बिंदु (1, 2, 3) से (1) की दूरी $= \left|\dfrac{1\times1-2\times2+2\times3+\lambda}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}\right| = \left|\dfrac{1-4+6+\lambda}{\sqrt{1+4+4}}\right| = \left|\dfrac{3+\lambda}{3}\right|$

किंतु प्रश्न से, $\left|\dfrac{3+\lambda}{3}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda+3=\pm 3$

$\Rightarrow \quad \lambda = 0$ या $\lambda = -6$

$\therefore$ (1) में λ के मान रखने पर $x-2y+2z=0$ तथा $x-2y+2z-6=0$

ये समतल के अभीष्ट समीकरण हैं।

महत्वपूर्ण सूत्र

1. समतल का समीकरण

(i) समतल का व्यापक समीकरण $ax+by+cz+d=0$, जहाँ a, b, c समतल के अभिलंब के दिक् अनुपात हैं।

(ii) अभिलंब रूप $lx+my+nz=p$, जहाँ p मूल बिंदु से समतल की लंब दूरी है।

(iii) अंत:खण्ड रूप $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, जहाँ a, b, c समतल द्वारा x-अक्ष, y-अक्ष तथा z-अक्ष पर कटे अंतखंड हैं।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]

(iv) एक बिंदु (x_1, y_1, z_1) से होकर गुजरने वाले समतल का समीकरण

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

(v) मूल बिंदु से होकर जाने वाले समतल का समीकरण $ax+by+cz=0$

(vi) तीन बिंदुओं (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) तथा (x_3, y_3, z_3) से होकर गुजरने वाले समतल का समीकरण

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

(vii) $ax+by+cz+d=0$ के समानांतर समतल का समीकरण $ax+by+cz+k=0$

(viii) दो समतलों के परिच्छेद से होकर जाने वाले समतल का समीकरण

$$(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\lambda\,(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$$

(ix) xy-समतल का समीकरण $z=0$; yz–समतल का समी० $x=0$; xz समतल का समीकरण $y=0$

(x) x-अक्ष के समानांतर समतल का समीकरण $by+cz+d=0$

y–अक्ष के समानांतर समतल का समीकरण $ax+cz+d=0$

z–अक्ष के समानांतर समतल का समीकरण $ax+by+d=0$

2. कोण (Angle)

(i) दो समतलों के बीच का कोण $\cos\theta = l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2$, जहाँ l_1, m_1, n_1 तथा l_2, m_2, n_2 रेखाओं की दिक् कोज्यायें हैं।

(ii) $\cos\theta = \dfrac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$, जहाँ a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 अभिलंबों के दिक् अनुपात हैं।

(iii) (a) समतल परस्पर लंब होंगे, यदि

(i) $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ या (ii) $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

(b) समतल परस्पर समानांतर होंगे, यदि

(i) $\dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}$ या (ii) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

3. दूरी (Distance)

(i) बिंदु (x_1, y_1, z_1) से समतल $ax + by + cz + d = 0$ की लंब दूरी $p = \left|\dfrac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|$

(ii) दो समानांतर समतलों $ax + by + cz + d_1 = 0$; $ax + by + cz + d_2 = 0$ के बीच की दूरी

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

प्रश्नावली 13.1

1. बिंदु (3, – 2, – 2) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करें।
2. बिंदु (0, – 1, 0), (3, 3, 0) तथा (1, 1, 1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करें।
3. उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो नियामक अक्षों पर – 4, 2 तथा 3 के अंतःखंड काटता हैं।
4. समतल के समीकरण $4x + 3y - 6z - 12 = 0$ को अंतःखंड रूप में व्यक्त करें तथा नियामक अक्षों पर इसका अंतःखंड ज्ञात करें।
5. एक समतल जिसका केन्द्रक (a, b, c) है निर्देशाक्षों को क्रमशः P, Q, R बिंदुओं पर काटता है। समतल PQR का समीकरण ज्ञात करें।
6. समतल $2x - 3y - 6z = 14$ को अभिलंब रूप में परिवर्तित करें तथा इस प्रकार मूलबिंदु से समतल पर डाले गए लंब की लंबाई तथा दिक् कोज्यायें ज्ञात करें।
7. समतल के समीकरण $2x - 3y + 6z + 14 = 0$ को अभिलम्ब रूप में परिवर्तित करें।
8. (i) समतल $2x - 3y + 4z = 1$ तथा $-x + y = 4$ के बीच का कोण ज्ञात करें।
   (ii) दो समतलों $3x - 6y + 2z = 7$ और $2x + 2y - 2z = 5$ के बीच का कोण ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(S)]**
9. उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो (1, 0, –2) से होकर जाता है तथा समतल युग्म $2x + y - z - 2 = 0$ तथा $x - y - z - 3 = 0$ पर लंब है।
10. (i) बिंदु (–1, – 1, 2) से गुजरने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो समतलों $3x + 2y - 3z = 1$ तथा $5x - 4y + z = 5$ पर लंब है।
    (ii) समतलों $x + 2y + 2z = 5$ तथा $3x + 3y + 2z = 8$ के लंबवत् और बिंदु (–1, 3, 2) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2018(SB)]**
11. उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो (2, 1, – 1) तथा (–1, 3, 4) से होकर जाता है तथा समतल $x - 2y + 4z = 10$ पर लंब है।
12. समतलों $2x + y - 2z + 6 = 0$ तथा $2x - 3y + 6z + 18 = 0$ के बीच का न्यूनकोण ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2011]**

13. λ के किस मान के लिए समतल $4x + 6y - 2z = 8$ तथा $2x + 3y + \lambda z = 12$
(i) परस्पर लंबवत् हैं? (ii) परस्पर समानांतर हैं?

14. उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदु (3, 4, 2) से होकर जाता है तथा समतल $3x - 2y + 6z - 10 = 0$ के समानांतर है। दोनों के बीच की दूरी भी ज्ञात करें।

15. उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदु (1, – 1, 2) से होकर जाता है तथा समतल $2x - 3y + z = 0$ के समानांतर है।

16. बिन्दु (1, 1, 1) तथा $2x - 4y + 3z + 5 = 0$ और $x + y - z = 6$, समतलों की परिच्छेद रेखा में होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिये। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2016]**

17. उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो बिंदु (1, 1, 1) तथा समतल $2x + y + 2z = 9$ तथा $4x - 5y - 4z = 1$ की परिच्छेदी रेखा से होकर गुजरता है।

18. मूल बिंदु और समतल $x + 2y + 3z - 4 = 0$ और $4x + 3y + 2z + 1 = 0$ की प्रतिच्छेद रेखा होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करें।

19. समतलों $x + 2y + 3z = 4$ और $2x + y - z + 5 = 0$ की प्रतिच्छेद रेखा से जाने वाले और समतल $5x + 3y + 6z + 8 = 0$ पर लंब समतल का समीकरण ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]**

20. बिंदु (2, 3, – 5) से समतल $x + 2y - 2z - 9 = 0$ की दूरी ज्ञात करें।

21. दो समानांतर समतलों $2x - y + 3z - 4 = 0$ तथा $6x - 3y + 9z + 13 = 0$ के बीच की दूरी ज्ञात करें।

22. उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो $x + 2y - 2z + 8 = 0$ के समानांतर है तथा बिंदु (2, 1, 1) से 2 इकाई की दूरी पर है।

23. (1, 1, 0), (–2, 2, – 1) और (1, 2, 1) बिंदुओं से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2012]**

24. बिंदुओं (1, 1, 1), (1, – 1, 2) और (– 2, – 2, 2) से होकर जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(S)]**

25. (i) समतल की परिभाषा दें।
(ii) समतल पर लंब की परिभाषा दें।
(iii) समतल का अंतःखंड रूप में समीकरण लिखें।
(iv) एक समतल निर्देशांक्षों से 6, 3, – 4 इकाई के अंतःखंड काटता है, तो उसका समीकरण ज्ञात करो।
(v) *xy*-समतल का समीकरण लिखें।
(vi) समतल $3x - 6y + z = 9$ द्वारा निर्देशांक्षों पर बनाये गए अंतःखंडों का मान बतायें।
(vii) यदि समतल $2x + 4y + \lambda z = 24$ तथा $2x - 4y + 3z = 5$ परस्पर लंब है तो λ का मान बतायें।
(viii) समतलों $x + y + 2z = 4$, $2x - y + z = 9$ के बीच का कोण बतायें।

26. सही उत्तर पर (✓) का चिन्ह लगायें—
(i) समतल जो *xz*-समतल के समानांतर तथा a दूरी पर स्थित है का समीकरण
(a) $y = a$ (b) $x = a$ (c) $z = a$ (d) कोई नहीं
(ii) समतल का समीकरण जो *z*-अक्ष के समानांतर है
(a) $x = 0, y = 0$ (b) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (c) $ax + by + d = 0$ (d) कोई नहीं

(iii) कोई समतल x, y, z अक्षों से क्रमशः a, b, c अंतःखंड काटता है तो उस समतल का समीकरण

(a) $ax + by + cz = 1$ (b) $\frac{x-a}{a} = \frac{z-c}{c}$

(c) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (d) कोई नहीं

(iv) बिन्दु (2, 3, 4) से गुजरने वाले समतल का समीकरण

(a) $a(x-2) + b(y-3) + c(z-4) = 0$ (b) $2a + 3b + 4c = 0$

(c) $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = 0$ (d) कोई नहीं

(v) समतल $2x - 3y + z + 8 = 0$ के समानांतर समतल का समीकरण जो बिंदु $(-1, 1, 2)$ से गुजरता है

(a) $2x - 3y + z + 3 = 0$ (b) $3x - 2y + z + 3 = 0$

(c) $2x + 3y + z + 3 = 0$ (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. $a(x-3) + b(y+2) + c(z+2) = 0$ **2.** $4x - 3y + 2z = 3$

3. $3x + 6y + 4z = 12$ **4.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} - \frac{z}{2} = 1$; 3, 4, 2

5. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$ **6.** 2 इकाई; $\frac{2}{7}, \frac{-3}{7}, \frac{-6}{7}$

7. $-\frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z = 2$ **8.** (i) $\cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{58}}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{5}{7\sqrt{3}}\right)$

9. $2x - y + 3z + 4 = 0$

10. (i) $5x + 9y + 11z - 8 = 0$ (ii) $2x - 4y + 3z + 8 = 0$

11. $18x + 17y + 4z = 49$ **12.** $\cos^{-1}(13/21)$

13. (i) 13 (ii) –1 **14.** $3x - 2y + 6z - 13 = 0$; दूरी $= 3/7$

15. $2x - 3y + z = 7$ **16.** $16x - 14y + 9z - 11 = 0$

17. $2x - 13y - 14z + 25 = 0$

18. $17x + 14y + 11z = 0$ **19.** $51x + 15y - 50z + 173 = 0$

20. 3 इकाई **21.** $\frac{25}{3\sqrt{14}}$

22. $x + 2y - 2z + 4 = 0$ या $x + 2y - 2z - 8 = 0$ **23.** $2x + 3y - 3z = 5$

24. $x - 3y - 6z + 5 = 0$

25. (i) देखें परिभाषा (ii) देखें परिभाषा (iii) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

(iv) $2x + 4y - 3z = 12$ (v) $z = 0$

(vi) $3, \frac{-3}{2}, 9$ (vii) 7 (viii) $\frac{\pi}{3}$

26. (i) (a) (ii) (c) (iii) (c) (iv) (a) (v) (a)

□□□

CHAPTER 14

सरल रेखा (Straight Line)

14.1 सरल रेखा का सामान्य समीकरण (General Form of Equation of a Straight Line)

हम जानते हैं कि दो असमानांतर (Non-parallel) समतल सर्वदा एक दूसरे को सरल रेखा पर प्रतिच्छेदित करते हैं। अत: यदि

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

दो प्रतिच्छेदी समतलों के समीकरण हैं तो ये दोनों समीकरण सम्मिलित रूप से सरल रेखा को निरूपित करते हैं। स्पष्ट है ये समीकरण x, y, z एकघातीय होते हैं।

14.2 सरल रेखा का समीकरण (सममित रूप) (Equation of a Straight Line in Symmetrical Form)

उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करना जिसकी दिक् कोज्यायें l, m, n हैं तथा जो (x_1, y_1, z_1) से होकर जाती हैं।

माना (x_1, y_1, z_1) दिया गया बिन्दु है तथा AB वह सरल रेखा है जो इस बिंदु से होकर गुजरती है।

माना l, m, n उसकी दिक् कोज्यायें हैं, तो $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$ तथा $n = \cos\gamma$

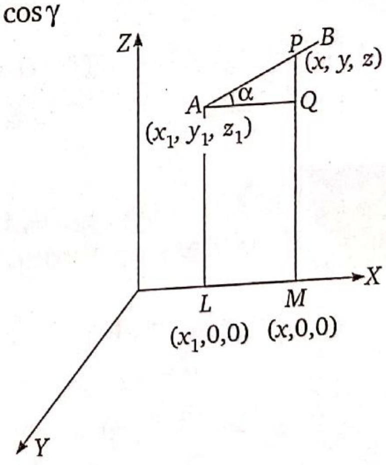
तथा $AP = r$ जहाँ $P(x, y, z)$; AB पर कोई अन्य बिन्दु है।

बिन्दु A तथा P से x-अक्ष पर AL तथा PM लम्ब डालें।

अत: L के निर्देशांक $= (x_1, 0, 0)$

M के निर्देशांक $= (x, 0, 0)$

बिन्दु A से PM पर AQ लम्ब डाला। माना $\angle PAQ = \alpha$



अब $LM = AQ = x - x_1$

ΔAPQ से $\cos\alpha = \dfrac{AQ}{AP}$

या $l = \dfrac{x - x_1}{r}$ या $\dfrac{x - x_1}{l} = r$ ...(1) ...(2)

इसी प्रकार $\dfrac{y - y_1}{m} = r$ ...(3)

तथा $\dfrac{z - z_1}{n} = r$ ...(4)

अत: (1), (2) तथा (3) से $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n} = r$

UP Polytechnic में अच्छे अंक लाने के लिए Study power point का Telegram Channel Join करें ।

∴ बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से गुजरने वाली सरल रेखा जिसकी दिक् कोज्यायें l, m, n हों

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

यह सरल रेखा के समीकरण का **सममित रूप** कहलाता है।

टिप्पणी : (i) यदि a, b, c दी गई सरल रेखा का दिक् अनुपात हों तो (x_1, y_1, z_1) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$

(ii) **x-अक्ष का समीकरण :** x-अक्ष की दिक् कोज्यायें **1, 0, 0** हैं।

अत: समीकरण : $\frac{x - 0}{1} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 0}{0} \Rightarrow y = 0, z = 0$ [∵ अक्ष मूलबिन्दु से होकर जाता है]

y-अक्ष का समीकरण : y-अक्ष की दिक् कोज्यायें **0, 1, 0** हैं।

$$\frac{x - 0}{0} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 0}{0} \Rightarrow x = 0, z = 0$$

z-अक्ष का समीकरण : $\frac{x - 0}{0} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 0}{1} \Rightarrow x = 0, y = 0$ [∵ z-अक्ष की दिक् कोज्यायें 0, 0, 1 हैं]

14.3 रेखा पर स्थित बिन्दु के निर्देशांक (Coordinates of a Point on a Line)

सरल रेखा समीकरण (धारा 14.2 से)

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = r \Rightarrow x = x_1 + lr \quad y = y_1 + mr \quad z = z_1 + nr$$

∴ इस रेखा पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $(x_1 + lr, y_1 + mr, z_1 + nr)$

नोट :

- (i) यदि a, b, c दिक् अनुपात हों तो इस रेखा पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $(x_1 + ar, y_1 + br, z_1 + cr)$
- (ii) $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$ के परिमितीय समीकरण $x = x_1 + ar; y = y_1 + br; z = z_1 + cr$ हैं जहाँ r प्राचल है।

14.4 दो बिन्दुओं (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण (Line Passing through Two Points (x_1, y_1, z_1) and (x_2, y_2, z_2))

माना a, b, c बिन्दु (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) से गुजरने वाली सरल रेखा के दिक् अनुपात हैं तो $a = x_2 - x_1, b = y_2 - y_1, c = z_2 - z_1$

∴ दो बिन्दुओं (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

14.4.1 तीन बिन्दुओं $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ तथा $C(x_3, y_3, z_3)$ की संरेखीय (Collinearity of three given points)

सरल रेखा AB का समीकरण $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ ...(1)

A, B, C संरेखीय होंगे यदि बिंदु $C(x_3, y_3, z_3)$ रेखा AB *i.e.*, (1) पर हो

$$= \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

यह $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ के संरेखीय होने की आवश्यक शर्त है।

14.5 दो रेखाओं के बीच का कोण (Angle between Two Lines)

यदि सरल रेखायें $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$ ...(1)

तथा $\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$ ...(2)

से दी जायें, जहाँ a_1, b_1, c_1 तथा a_2, b_2, c_2 क्रमशः रेखा (1) तथा (2) के दिक् अनुपात हैं तथा θ उनके बीच का कोण हो, तो

$$\cos\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

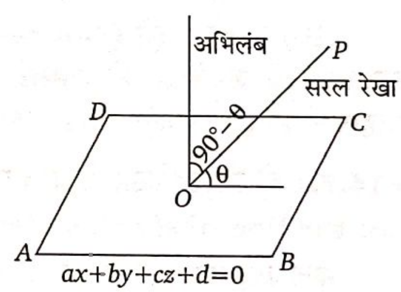
उपसाध्य : ये रेखायें

(i) परस्पर लम्ब होंगी यदि $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$

(ii) परस्पर समानान्तर होंगी यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

14.5.1 रेखा तथा समतल के बीच का कोण (Angle between a Line and a Plane)

किसी रेखा तथा समतल के बीच का कोण उस रेखा तथा उस समतल के अभिलम्ब के बीच के कोण का पूरक कोण है।



माना सरल रेखा $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$

किसी समतल $ax + by + cx + d = 0$ से θ कोण बनाती है। तो सरल रेखा और समतल के अभिलम्ब के बीच का कोण $90° - \theta$ होगा।

तथा $\cos(90° - \theta) = \sin\theta = \frac{al + bm + cn}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$

नोट :

- यदि रेखा दिए गए समतल पर लंब हो, तो यह समतल के अभिलंब के समानांतर होगा, अतः
  (i) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, यदि रेखा तल पर लंब हो,
  (ii) $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$, यदि रेखा समतल के समानांतर है।

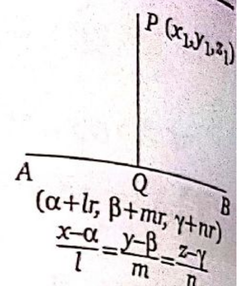
14.6 दिए गए बिन्दु से रेखा की लम्ब दूरी (Perpendicular Distance of a Point from a Line)

माना दिया गया बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ तथा सरल रेखा AB

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - \gamma}{c} = r \text{ (माना)}$$

है तथा PQ बिन्दु P से AB पर डाला गया लम्ब है, तो

पाद Q के निर्देशांक $= (\alpha + ar, \beta + br, \gamma + cr)$ हैं ...(1)



तथा रेखा PQ के दिक् अनुपात $\alpha + ar - x_1, \beta + br - y_1$ तथा $\gamma + cr - z_1$ हैं।

$\because \quad PQ \perp AB$

अतः $(\alpha + ar - x_1)\, a + (\beta + br - y_1) b + c(\gamma + cr - z_1) = 0$ से

$$r = -\frac{a(x_1 - \alpha) + b\,(y_1 - \beta) + c(z_1 - \gamma)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

r का मान (1) में रखने से Q के निर्देशांक ज्ञात हो जाते हैं। इससे PQ का मान दूरी सूत्र से आसानी से निकाला जा सकता है।

14.7 समतलीय तथा विषमतलीय रेखायें (Coplanar Lines and Skew Lines)

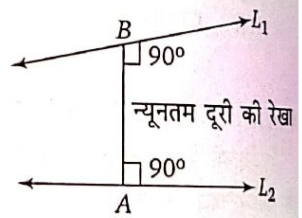
(a) परिभाषा (Definition) :

जो रेखायें एक ही समतल में स्थित होती हैं समतलीय रेखायें कहलाती है, समतलीय रेखायें या तो समानांतर होती हैं या एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं।

(b) तिरछी या विषमतलीय रेखायें (Skew Lines) :

(i) परिभाषा : आकाश (Space) में स्थित वे दो सरल रेखायें जो न तो एक तल में हैं और न ही एक-दूसरे को काटती हैं, तिरछी रेखायें (skew lines) या विषमतलीय रेखायें कहलाती हैं।

(ii) न्यूनतम दूरी की रेखा (Line of Shortest Distance) : यदि L_1 तथा L_2 दो तिरछी रेखायें हों, तो इनके बीच एक और केवल एक रेखा ऐसी होगी जो दोनों पर लम्ब होगी। इस सरल रेखा को न्यूनतम दूरी की रेखा कहते हैं।



(iii) न्यूनतम दूरी (Shortest Distance) : दो तिरछी रेखाओं के बीच **न्यूनतम दूरी की रेखा की लम्बाई उन दोनों रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी कहलाती है।** इसे सामान्यतः S.D. (Shortest Distance) से सूचित किया जाता है।

14.7.1 दो तिरछी रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी की सरल रेखा का समीकरण तथा लम्बाई (Equation of the line of shortest distance between two skew lines and its length)

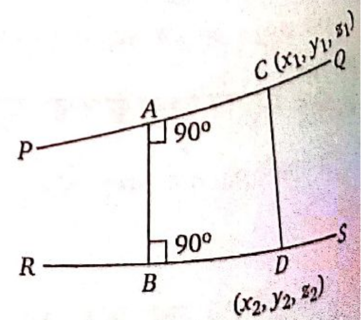
माना PQ तथा RS दो तिरछी रेखायें हैं जो क्रमशः

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \ldots(1)$$

तथा

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} \quad \ldots(2)$$

से दी जाती हैं।



माना $C(x_1, y_1, z_1)$ तथा $D(x_2, y_2, z_2)$ दो बिन्दु हैं जो क्रमशः सरल रेखा (1) तथा (2) पर हैं तथा AB दोनों के बीच की न्यूनतम दूरी है, जिसकी दिक् कोज्यायें l, m, n हैं।

$AB \perp PQ$ तथा $AB \perp RS$

अतः (1) तथा (2) से,

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0$$

वज्र गुणन से, $\dfrac{l}{m_1n_2 - m_2n_1} = \dfrac{m}{n_1l_2 - n_2l_1} = \dfrac{n}{l_1m_2 - l_2m_1} = \dfrac{1}{\sqrt{\Sigma(m_1n_2 - m_2n_1)^2}}$

यदि AB की दिक् कोज्यायें l, m, n हों, तो

$$\boldsymbol{l = \frac{m_1n_2 - m_2n_1}{\sqrt{\Sigma(m_1n_2 - m_2n_1)^2}}, m = \frac{n_1l_2 - n_2l_1}{\sqrt{\Sigma(m_1n_2 - m_2n_1)^2}}, n = \frac{l_1m_2 - l_2m_1}{\sqrt{\Sigma(m_1n_2 - m_2n_1)^2}}}$$

अर्थात्
$$l = \frac{m_1n_2 - m_2n_1}{\sqrt{(m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2 + (l_1m_2 - l_2m_1)^2}}$$

$$m = \frac{n_1l_2 - n_2l_1}{\sqrt{(m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2 + (l_1m_2 - l_2m_1)^2}}$$

$$n = \frac{l_1m_2 - l_2m_1}{\sqrt{(m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2 + (l_1m_2 - l_2m_1)^2}}$$

(i) न्यूनतम दूरी

AB = रेखा CD का AB पर प्रक्षेप

$$= (x_2 - x_1)l + (y_2 - y_1)m + (z_2 - z_1)n$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)(m_1n_2 - m_2n_1) + (y_2 - y_1)(n_1l_2 - n_2l_1) + (z_2 - z_1)(l_1m_2 - l_2m_1)}{\sqrt{(m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2 + (l_1m_2 - l_2m_1)^2}}$$

[l, m तथा n का मान रखने पर]

अर्थात् **न्यूनतम दूरी (S.D.)** $= \begin{vmatrix} \boldsymbol{x_2 - x_1} & \boldsymbol{y_2 - y_1} & \boldsymbol{z_2 - z_1} \\ \boldsymbol{l_1} & \boldsymbol{m_1} & \boldsymbol{n_1} \\ \boldsymbol{l_2} & \boldsymbol{m_2} & \boldsymbol{n_2} \end{vmatrix} \div \sqrt{(\Sigma(\boldsymbol{m_1n_2 - m_2n_1})^2}$

(ii) न्यूनतम दूरी की रेखा का समीकरण

समतल का समीकरण जिसमें रेखा PQ तथा AB स्थित हैं

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x - x_1} & \boldsymbol{y - y_1} & \boldsymbol{z - z_1} \\ \boldsymbol{l_1} & \boldsymbol{m_1} & \boldsymbol{n_1} \\ \boldsymbol{l} & \boldsymbol{m} & \boldsymbol{n} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \ldots(3)$$

तथा **उस समतल का समीकरण जिसमें रेखा RS तथा CD स्थित हैं**

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x - x_2} & \boldsymbol{y - y_2} & \boldsymbol{z - z_2} \\ \boldsymbol{l_2} & \boldsymbol{m_2} & \boldsymbol{n_2} \\ \boldsymbol{l} & \boldsymbol{m} & \boldsymbol{n} \end{vmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \ldots(4)$$

अतः **समीकरण (3) तथा (4) सम्मिलित रूप में न्यूनतम दूरी की रेखा AB के समीकरण हैं।**

नोट :

• (i) दो रेखायें समसतीय होंगी, यदि उनके बीच की न्यूनतम दूरी शून्य हो।

- (i) यदि L_1 तथा L_2 दो रेखायें हैं, जिनके समीकरण, क्रमशः $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ तथा $\frac{x-z_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ हों तो रेखाओं L_1 तथा L_2 प्रतिच्छेदी होंगी, यदि उनके बीच S.D. शून्य हो

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$$

- (ii) L_1 तथा L_2 प्रतिच्छेदी नहीं है $\Leftrightarrow$ L_1 तथा L_2 विषम तलीय (तिरछी) है,

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

- (iii) यदि दो रेखायें समानांतर हो, तो उनके बीच की न्यूनतम दूरी एक रेखा के किसी बिन्दु से दूसरी रेखा पर खींची गई रेखा की लंबाई होगी।

साधित उदाहरण (Solved Examples)

उदाहरण 1. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करें जहाँ पर रेखा $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$ समतल $2x+3y+z=0$ से मिलती है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]

हल : दी गई रेखा $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}=r$ (माना) ...(1)

अतः रेखा (1) पर स्थित किसी बिन्दु के नियामक $(r, 2r+1, 3r-2)$ से दिये जाएँगे। ...(2)

दिया गया समतल $2x+3y+z=0$ ...(3)

माना सरल रेखा (1) समतल (3) से बिन्दु (2) पर मिलती है। अतः (2) तथा (3) से

$$2r+3(2r+1)+(3r-2)=0 \quad \text{या} \quad 2r+6r+3+3r-2=0$$

या $11r+1=0 \qquad \therefore \; r=-\frac{1}{11}$

(2) में r का मान रखने पर प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक

$$x=r=-\frac{1}{11};\; y=2r+1=2\times\left(\frac{-1}{11}\right)+1=\frac{9}{11};$$

$$z=3r-2=3\times\left(-\frac{1}{11}\right)-2=-\frac{3}{11}-2=-\frac{25}{11}$$

$\therefore$ अभीष्ट बिन्दु $\left(-\frac{1}{11},\frac{9}{11},-\frac{25}{11}\right)$ हैं।

उदाहरण 2. बिन्दु $(1, 2, -1)$ तथा $(2, 1, 1)$ से गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें।

हल : दिए गए बिन्दु $(x_1, y_1, z_1)=(1, 2, -1)$ तथा $(x_2, y_2, z_2)=(2, 1, 1)$

अतः दिए गए बिन्दुओं से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{1-2}=\frac{z-(-1)}{1-(-1)}$

[(x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$]

$$\Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$$ यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 3. सरल रेखा $\frac{4-x}{2}=\frac{y}{6}=\frac{1-z}{3}$ की दिक् कोज्यायें ज्ञात करें।

हल : दी गई सरल रेखा $\frac{4-x}{2}=\frac{y}{6}=\frac{1-z}{3}$ या $\frac{x-4}{-2}=\frac{y-0}{6}=\frac{z-1}{-3}$ ...(1)

अत: (1) बिन्दु (4, 0, 1) से गुजरती है तथा इसके दिक् अनुपात –2, 6, – 3 हैं।

अत: इसकी दिक् कोज्यायें

$$l=\frac{-2}{\sqrt{(-2)^2+(6)^2+(-3)^2}}=-\frac{2}{\sqrt{4+36+9}}=-\frac{2}{7}$$

$$m=\frac{6}{\sqrt{(-2)^2+(6)^2+(-3)^2}}=\frac{6}{7};\ n=\frac{-3}{\sqrt{(-2)^2+(6)^2+(-3)^2}}=-\frac{3}{7}$$

[सूत्र $l=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ आदि]

उदाहरण 4. सरल रेखा $4x+4y-5z=12$ और $8x+12y-13z=32$ के समीकरण को सममित रूप में लिखें।

हल : दी गई रेखा
$$4x+4y-5z=12$$
$$8x+12y-13z=32 \quad ...(1)$$

माना दी गई रेखा के दिक् अनुपात l, m, n हैं, यह रेखा दोनों समतल पर हैं अत: यह इन समतलों के अभिलम्ब पर लम्ब है अत:

$$4l+4m-5n=0 \quad \text{तथा} \quad 8l+12m-13n=0$$

हल करने पर, दिक् अनुपात $l=2, m=3, n=4$

अब दी गई रेखा में $z=0$ रखने पर $4x+4y=12$ तथा $8x+12y=32$

इनके हल से $x=1, y=2$ तथा $z=0$

अत: बिन्दु (1, 2, 0) से जाने वाली रेखा का समीकरण $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-0}{4}$

यह (1) का सममित रूप है।

उदाहरण 5. रेखाओं $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}, z=2$ तथा $\frac{x-1}{1}=\frac{2y+3}{3}=\frac{z+5}{2}$ के बीच का कोण ज्ञात करें।

हल : रेखाओं के समीकरणों को मानक रूप में लिखने पर,

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{0} \quad \text{तथा} \quad \frac{x-1}{1}=\frac{y+\frac{3}{2}}{3/2}=\frac{z+5}{2}$$

अत: इनके दिक् अनुपात क्रमश: 3, – 2, 0 तथा 1, 3 / 2, 2 हैं।

माना इनके बीच का कोण θ है, तो

$$\cos\theta=\frac{3\times1+(-2)\times\frac{3}{2}+0\times2}{\sqrt{3^2+(-2)^2+0^2}\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}} \quad \left[\text{सूत्र } \cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right]$$

$$\Rightarrow \cos\theta=0 \quad \Rightarrow \quad \theta=\frac{\pi}{2}$$ उत्तर

उदाहरण 6. सरल रेखा $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{4}$ तथा समतल $2x+y-3z+4=0$ के बीच का कोण ज्ञात करें।

हल : माना दी गई सरल रेखा $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{4}$ तथा समतल $2x+y-3z+4=0$ के बीच का कोण θ है, तो

सूत्र से, $$\sin\theta=\frac{al+bm+cn}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

यहाँ $$a=2, b=1, c=-3;\ l=3, m=2, n=4$$

$$\therefore \quad \sin\theta=\frac{2\times3+1\times2+(-3)\times4}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}\sqrt{(3)^2+(2)^2+(4)^2}}=\frac{6+2-12}{\sqrt{14}\times\sqrt{29}}=\frac{-4}{\sqrt{406}}$$

$$\therefore \quad \theta=\sin^{-1}\left(-\frac{4}{\sqrt{406}}\right)$$

उदाहरण 7. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो बिन्दु $(-1, 3, -2)$ से जाती है तथा $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ तथा $\frac{x+2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{5}$ पर लम्ब है।

हल : दी गई रेखायें $$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

तथा $\frac{x+2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{5}$ अत: इनके दिक् अनुपात क्रमश: 1, 2, 3 एवं −3, 2, 5 होंगे।

माना अभीष्ट रेखा के दिक् अनुपात a, b, c हैं। यह रेखा दोनों रेखाओं पर लम्ब है। अत:

$$a+2b+3c=0 \quad \text{...(1)}$$
$$-3a+2b+5c=0 \quad \text{...(2)}$$

[सूत्र $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$]

वज्रगुणन से (i) तथा (ii) को हल करने पर

$$\frac{a}{4}=\frac{b}{-14}=\frac{c}{8} \Rightarrow \frac{a}{2}=\frac{b}{-7}=\frac{c}{4}=k \quad \text{(माना)}$$

अत: अभीष्ट सरल रेखा की दिक् अनुपात 2, −7, 4 हैं तथा दिया गया है कि यह बिन्दु $(-1, 3, 2)$ से गुजरती है।
अत: अभीष्ट समीकरण

$$\frac{x-(-1)}{2}=\frac{y-3}{-7}=\frac{z-2}{4} \quad \text{या} \quad \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-7}=\frac{z-2}{4}$$

उत्तर

उदाहरण 8. बिन्दु (0, 2, 3) से सरल रेखा $\frac{x+3}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{3}$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई तथा पाद के निर्देशांक ज्ञात करें।

हल : माना बिन्दु P (0, 2, 3) से दी गई सरल रेखा पर डाले गए लम्ब का पाद Q है।

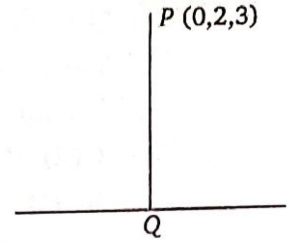
दी गई सरल रेखा $\frac{x+3}{5}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{3}=\lambda$ (माना)

अत: सामान्य बिन्दु के नियामक $x=5\lambda-3;\ y=2\lambda+1;\ z=3\lambda-4$ ...(1)

माना Q के नियामक $(5\lambda-3, 2\lambda+1, 3\lambda-4)$ हैं।

दी गई सरल रेखा के दिक् अनुपात 5, 2, 3 हैं।

अब PQ इस रेखा पर लम्ब है तथा $P(0, 2, 3)$ अत: PQ के दिक् अनुपात $(5\lambda - 3 - 0)$, $(2\lambda + 1 - 2)$ तथा $(3\lambda - 4 - 3)$ अर्थात् $(5\lambda - 3;\ 2\lambda - 1)$ तथा $(3\lambda - 7)$ हैं।



$\therefore \quad 5(5\lambda - 3) + 2(2\lambda - 1) + 3(3\lambda - 7) = 0$

$\Rightarrow \quad 25\lambda - 15 + 4\lambda - 2 + 9\lambda - 21 = 0 \quad \Rightarrow \quad 38\lambda = 38 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$

λ का मान (1) में रखने पर पाद Q के नियामक $(2, 3, -1)$ हैं।

तथा P से दी गई सरल रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

$PQ = \sqrt{(2-0)^2 + (3-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$ इकाई **उत्तर**

उदाहरण 9. सरल रेखाओं $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-8}{-1} = \dfrac{z-3}{1}$ और $\dfrac{x+3}{-3} = \dfrac{y+7}{2} = \dfrac{z-6}{4}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]

हल : दी गई रेखायें $\qquad \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-8}{-1} = \dfrac{z-3}{1} \qquad ...(1)$

$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4} \qquad ...(2)$$

यहाँ $\qquad x_1 = 3, y_1 = 8, z_1 = 3;\ l_1 = 3, m_1 = -1, n_1 = 1$

$$x_2 = -3, y_2 = -7, z_2 = 6;\ l_2 = -3, m_1 = 2, n_2 = 4$$

अत: न्यूनतम दूरी के सूत्र से

$$\text{S.D.} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \div \sqrt{(m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2 + (l_1m_2 - l_2m_1)^2}$$

(1) तथा (2) के बीच न्यूनतम दूरी

$$\text{S.D.} = \begin{vmatrix} -3-3 & -7-8 & 6-3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\div \sqrt{\{(-1)\times 4 - 2\times 1\}^2 + \{1\times(-3) - 4\times 3\}^2 + \{3\times 2 - (-3)\times(-1)\}^2}$$

$$= \begin{vmatrix} -6 & -15 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \div \sqrt{(-4-2)^2 + (-3-12)^2 + (6-3)^2}$$

$$= \frac{-6(-4-2) - (-15)(12+3) + 3(6-3)}{\sqrt{36+225+9}} = \frac{36+225+9}{\sqrt{270}} = \frac{270}{\sqrt{270}}$$

$= \sqrt{270} = 3\sqrt{30}$ इकाई **उत्तर**

उदाहरण 10. समतलों $2x - 3y + 4z = 3$ तथा $3x + y - z = 5$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो रेखा $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-1}{3}$ के समानांतर है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]

हल : प्रतिच्छेदी समतल का समीकरण $(2x - 3y + 4z - 3) + \lambda(3x + y - z - 5) = 0$

या $\qquad (2 + 3\lambda)x + (\lambda - 3)y + (4 - \lambda)z + (-3 - 5\lambda) = 0 \qquad ...(1)$

दी गई रेखा $$\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-1}{3}$$ ...(2)

प्रश्न से, (1) रेखा (2) के समानांतर है अतः (2) पर अभिलंब (1) के लंबवत् होगा।

∴ $(2+3\lambda)\times 1+(\lambda-3)(-2)+(4-\lambda)3=0$ [प्रतिबंध $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ से]

⇒ $-2\lambda+20=0$ ⇒ $\lambda=10$

λ का मान (2) में रखने पर $(3\times 10+2)x+(10-3)y+(-10+4)z+(-3-5\times 10)=0$

⇒ $$32x+7y-6z=53$$ यह अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 11. रेखा $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$ के समानांतर तथा मूल बिंदु और बिंदु $(5, 2, -1)$ से जाने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]**

हल : माना समतल का समीकरण जो बिंदु (x_1, y_1, z_1) से होकर जाता है

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$ ...(i)

चूँकि (i) मूल बिंदु से जाता है, अतः $a(x-0)+b(y-0)+c(z-0)=0$

⇒ $$ax+by+cz=0$$ ...(ii)

पुनः यह समतल बिन्दु $(5, 2, -1)$ से जाता है, अतः $5a+2b-c=0$ ...(iii)

दी गई सरल रेखा $$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$$ ...(iv)

∴ इसके दिक् अनुपात 1, 3, 2 हैं।

समतल (i) रेखा (iv) के समानांतर है। अतः समतल पर लंब, रेखा पर भी लंब होगा।

∴ $a\times 1+b\times 3+c\times 2=0$ ⇒ $a+3b+2c=0$ ...(v)

(iii) तथा (v) को हल करने पर $\frac{a}{2\times 2-(-1)\times(3)}=\frac{b}{(-1)\times 1-5\times 2}=\frac{c}{5\times 3-2\times 1}$

⇒ $\frac{a}{4+3}=\frac{b}{-1-10}=\frac{c}{15-2}$ ⇒ $\frac{a}{7}=\frac{b}{-11}=\frac{c}{13}=\lambda$ (माना)

⇒ $a=7\lambda, b=-11\lambda, c=13\lambda$

(ii) में यह मान रखने पर अभीष्ट समीकरण

$$7\lambda x+(-11\lambda)y+13\lambda z=0 \Rightarrow 7x-11y+13z=0$$

महत्वपूर्ण सूत्र

1. सरल रेखा का समीकरण

(i) **असममित** (unsymmetrical) **रूप :** $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ संयुक्त रूप में सरल रेखा के समीकरण हैं। यह असममित रूप है।

(ii) **सममित रूप :** (a) बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से गुजरने वाली तथा l, m, n दिक् कोज्या वाली सरल रेखा का समीकरण

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

(b) यदि a, b, c रेखा के दिक् अनुपात हों, तो सरल रेखा का समीकरण $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$

(c) दो बिन्दुओं (x_1, y_1, z_1) तथा $(x_2, y_2\ z_2)$ से गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरण

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

(d) x, y तथा z अक्षों के समीकरण क्रमशः $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}; \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$ तथा $\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$ या $y=0, z=0$; $x=0, z=0$ तथा $x=0, y=0$ हैं।

2. न्यूनतम दूरी (S.D.)

दो रेखाओं $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ तथा $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_n}$ के बीच की न्यूनतम दूरी

$$\text{S.D.}=\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(m_1n_2-m_2n_1)^2+(n_1l_2-n_2l_1)^2+(l_1m_2-l_2m_1)^2}}$$

3. सरल रेखा $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ तथा $ax+by+cz+d=0$ समतल के बीच का कोण θ हो तो

$$\sin\theta=\frac{al+bm+cn}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

4. यदि सरल रेखाओं के बीच का कोण θ हो, तो

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \quad \text{तथा} \quad \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

(i) $\cos\theta=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$

(ii) (a) रेखयें परस्पर लंब होंगी यदि $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

(b) रेखायें परस्पर समानांतर होंगी यदि $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

5. तीन बिन्दुओं (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) तथा (x_3, y_3, z_3) के संरेखीय होने की शर्त :

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$$

प्रश्नावली 14.1

1. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करें जहाँ पर रेखा $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-1}{2}$ समतल $x-y+z=10$ से मिलती है।

2. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करें जहाँ सीधी रेखा $\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{6}$ समतल $2x+y+z=7$ से मिलती है।

3. (i) उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो (2,– 1, 3) तथा (4, 2, 1) से गुजरती है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2016 Spl. (Back)]

(ii) सिद्ध करो कि बिंदु $A(-1, -2, -3)$, $B(1, 1, 1)$ तथा $C(-3, -5, -7)$ संरेख है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2017(SB)]

4. सरल रेखा $\frac{x-2}{2} = \frac{2y-5}{-3} = \frac{z+1}{0}$ की दिक् कोज्यायें ज्ञात करें।

5. सरल रेखा $x + y + z + 1 = 0$ और $4x + y - 2z + 2 = 0$ के समीकरण को सममित रूप में लिखें।

6. रेखा $3x + 2y + z = 10$ तथा $x + y - 2z = 4$ के समीकरण को सममित रूप में लिखें।

7. रेखाओं $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-3}$ तथा $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-5}{8} = \frac{z-1}{4}$ के बीच का कोण ज्ञात करें।

8. उन रेखाओं के बीच कोण ज्ञात करें जिनके दिक् अनुपात (2, 3, 4) और (3, 4, 5) हैं।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2009]

9. सिद्ध कीजिये कि रेखायें $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ तथा $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ परस्पर लम्ब हैं।

10. सिद्ध कीजिए बिन्दुओं (1, 2, 3) और (−1, − 2, − 3) को मिलाने वाली सीधी रेखा बिन्दुओं (−2, 1, 5) और (3, 3, 2) को मिलाने वाली रेखा पर लम्ब है।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2004]

11. उस रेखा का समीकरण ज्ञात करें जो बिन्दु (2, 3, − 1) से होकर जाती है तथा रेखाओं $\frac{x-4}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$ तथा $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+4}{4}$ पर लम्ब है।

12. k के किस मान के लिए सरल रेखायें $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ तथा $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$ परस्पर लम्ब हैं।

13. (i) बिन्दु (1, 0, 0) से सरल रेखा $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+10}{8}$ के बीच की लाम्बिक दूरी ज्ञात करें। पाद के निर्देशांक भी ज्ञात करें।

(ii) बिन्दु (1,6, 3) से रेखा $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$ पर डाले गए लंब का पाद तथा लंबाई ज्ञात करें। बिन्दु (1, 6, 3) का दी हुई रेखा में प्रतिबिंब के निर्देशांक भी ज्ञात करें।

14. बिन्दु (0, 2, 7) से सरल रेखा $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-2}$ पर डाले गए लम्ब के पाद के निर्देशांक ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2006]

15. (i) रेखायें $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ तथा $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-5}{5}$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात करें।

(ii) सरल रेखाओं $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ और $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ के मध्य की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिये।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2006, 16]

16. न्यूनतम दूरी निकालकर दिखायें कि रेखायें $\frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{-5} = \frac{z+3}{-5}$ तथा $\frac{x-8}{7} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{3}$ परस्पर प्रतिच्छेद नहीं करतीं।

17. रेखाओं $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{6}$ तथा $\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{4}$ के बीच की न्यूनतम दूरी निकालें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2003]

18. सरल रेखाओं $\frac{x-3}{3}=\frac{y-8}{-1}=\frac{z-3}{1}$ और $\frac{x+3}{-3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-6}{4}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात करें।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2008]

19. रेखाओं $\frac{x-6}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{2}$ तथा $\frac{x+4}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{-2}$ के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

[उ० प्र० डिप्लोमा 2014]

20. बिन्दु (1, 2, 3) से होकर जाने वाली तथा रेखा $x-y+2z=5$ और $3x+y+z=6$ के समान्तर रेखा का समीकरण ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2012]**

21. रेखा $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$ के समानान्तर तथा मूल बिन्दु और बिन्दु (5, 2, – 1) से होकर गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2005]**

[**संकेत** : मूल बिन्दु से गुजरने वाला समतल $ax+by+cz=0$ ...(1)

तथा (5, 2, – 1) से गुजरने वाला समतल $5a+2b-c=0$ ...(2)

समानान्तर सरल रेखा के दिक् अनुपात 1, 3, 2 हैं

अत: $1\times a+b\times 3+c\times 2=0$ ...(3)

(2) एवं (3) को हल कर a, b, c का मान (1) में डालें]

22. बिन्दुओं (2, 1, 3) तथा (4, 1, 2) से होकर जाने वाले तथा रेखा $\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{3}$ के समानान्तर समतल का समीकरण ज्ञात करें। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2014, 16 Spl. (Back)]**

23. (i) उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो समतलों $4x+3y+z=12$ तथा $3x-2y+6z=0$ के प्रतिच्छेद रेखा से होकर जाता है, तथा रेखा $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+1}{1}$ के समानांतर है।

(ii) समतलों $2x-4y+3z+5=0, x+y-z=5$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात करें जो रेखा $\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+1}{1}$ के समानांतर है। **[उ० प्र० डिप्लोमा 2017 (O)]**

24. उन सीधी रेखाओं के समीकरण ज्ञात करें जो बिन्दु (α, β, γ) से होकर जाती हैं और रेखाओं

$\frac{x}{l_1}=\frac{y}{m_1}=\frac{z}{n_1}$ तथा $\frac{x}{l_2}=\frac{y}{m_2}=\frac{z}{n_2}$ दोनों पर लम्ब हैं।

25. (i) बिंदु (x_1, y_1, z_1) से गुजरने वाली सरल रेखा का कार्त्तीय समीकरण लिखें।

(ii) दो बिंदुओं (x_1, y_1, z_1) तथा (x_2, y_2, z_2) से गुजरने वाली सरल रेखा का कार्त्तीय समीकरण लिखें।

(iii) समीकरण $6x-2=3y+1=2z-2$ से दी जाने वाली सरल रेखा का दिक् अनुपात बतायें तथा वे बिंदु बतायें जिससे यह सरल रेखा गुजरती है।

(iv) दो रेखायें $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ तथा $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$ कब (a) परस्पर समानांतर होंगी? (b) परस्पर लंब होगी?

(v) यदि दो रेखायें परस्पर प्रतिच्छेद करती हैं तो उनके बीच की न्यूनतम दूरी क्या होगी।

26. सही उत्तर पर (✓) का चिन्ह लगायें—

(i) रेखायें $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ तथा $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{-4}=\frac{z-3}{-6}$ परस्पर

(a) लंब है (b) समानांतर हैं (c) प्रतिच्छेदी है (d) कोई नहीं

(ii) रेखा $\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{0}$

(a) x-अक्ष के समानांतर है (b) y-अक्ष के समानांतर है

(c) z-अक्ष के समानांतर है (d) z-अक्ष पर लंब है

(iii) सरल रेखाओं $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ तथा $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-7}=\frac{z+2}{4}$ के बीच का कोण

(a) 45° (b) 90° (c) 135° (d) कोई नहीं

(iv) x-अक्ष का समीकरण

(a) $y=0, z=0$ (b) $x=0, z=0$ (c) $x=0, y=0$ (d) कोई नहीं

(v) $\frac{4-x}{2}=\frac{y}{6}=\frac{1-z}{3}$ की दिक् कोज्यायें

(a) 2, 6, 3 (b) – 2, – 6, – 3 (c) – 2, 6, – 3 (d) कोई नहीं

उत्तरमाला

1. (20, 23, 13) **2.** (1, – 2, 7) **3.** $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{-2}$

4. $\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0$ **5.** $\frac{x+\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{2}{3}}{-1}=\frac{z}{1}$ **6.** $\frac{x-2}{-5}=\frac{y-2}{7}=\frac{z}{1}$

7. $\cos^{-1}\frac{10}{9\sqrt{22}}$ **8.** $\frac{38}{5\sqrt{58}}$ **11.** $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{8}=\frac{z+1}{-7}$

12. $k=-\frac{10}{7}$ **13.** (i) $2\sqrt{6}$, 3, – 4, – 2 (ii) (1, 3, 5), $\sqrt{13}$ इकाई, (1, 0, 7)

14. $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$ **15.** (i) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ (ii) 0, अत: रेखा प्रतिच्छेदी तथा समतलीय हैं।

17. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ **18.** $3\sqrt{30}$ **19.** 9

20. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{4}$ **21.** $7x-11y+13z=0$ **22.** $2x-8y+4z=0$

23. $5x-9y+17z=6$ **24.** $\frac{x-\alpha}{m_1n_2-m_2n_1}=\frac{y-\beta}{n_1l_2-n_2l_1}=\frac{z-\gamma}{l_1m_2-l_2m_1}$

25. (i) $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ (ii) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$

(iii) दिक् अनुपात 1, 2, 3; बिंदु $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$

(iv) (a) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ (b) $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ (v) 0

26. (i) (b) (ii) (d) (iii) (b) (iv) (a) (v) (c)

Diploma Class की No. 1 YouTube Channel में आपका स्वागत है।

UP Polytechnic में अच्छे अंक लाने के लिए Study power point का Telegram Channel Join करें।